



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA

جامعة باجي مختار- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2019

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en Sciences

Quelques propriétés topologiques et ergodiques des automates cellulaires

Option

Systèmes dynamiques

Par

Saliha Djenaoui

DIRECTEUR DE THÈSE : Redouan Ghanem Professeur U.B.M. ANNABA
CO-DIRECTEUR DE THÈSE : Pierre Guillon Maître de Recherche I.M. MARSEILLE

Devant le jury :

PRESIDENT : Mohamed Cherif Bouras Professeur U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Mohamed Tahar Kimour Professeur U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Nadjib Boussetila Professeur U. 8 MAI GUELMA
EXAMINATEUR : Fateh Ellagoune Professeur U. 8 MAI GUELMA
INVITE : Rezki Chemlal M.C.A U.A.M BEJAIA

Quelques propriétés topologiques et ergodiques des automates cellulaires

Saliha Djenaoui

14 décembre 2019

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques topologiques particuliers : les automates cellulaires. Nous abordons deux problématiques. La première problématique concerne l'ensemble limite générique qui est le plus petit fermé de domaine d'attraction comaigne. Nous étudions quelques-unes de ses propriétés topologiques, et les liens avec l'équicontinuité et la sensibilité afin de le classifier par les directions. Nous comparons également cet ensemble avec d'autres ensembles qui décrivent le comportement asymptotique. La seconde problématique concerne les facteurs équicontinus. Nous étudions les facteurs équicontinus des systèmes dynamiques d'ensemble limite générique fini et des systèmes dynamiques faiblement semi-mélangeants.

Mots clés : automate cellulaire, bassin d'attraction, ensemble limite, attracteur, dynamique directionnelle, catégorie de Baire, dynamique symbolique, facteur.

ABSTRACT In this thesis, we are interested in a particular topological dynamical systems : cellular automata. We tackle two issues. The first issue concerns the generic limit set which is the smallest closed set with a comeager realm of attraction. We study some of its topological properties, and the links with equicontinuity and sensitivity in order to classify it by the directions. We also compare this set with other sets that describe the asymptotic behavior. The second issue concerns equicontinuous factors. We study the equicontinuous factors of dynamical systems with finite generic limit set and weakly semi-mixing dynamical systems.

Keywords : cellular automata, basin of attraction, limit set, attractor, directional dynamics, Baire category, symbolic dynamics, factor.

ملخص

في هذه الأطروحة، نهتم بأنظمة ديناميكية طوبولوجية خاصة : الخلايا ذاتية السلوك. نتناول موضوعين. الأول يتعلق بالمجموعة النهائية الشاملة وهي أصغر مجموعة مغلقة لديها مجال جذب باقي . بمعنى آخر ، لديها مجال جذب مكمل لمجموعة ضئيلة. ندرس بعض خصائصها الطوبولوجية من أجل تصنيفها حسب الإتجاهات في الديناميك الإتجاهي. نقارن أيضاً هذه المجموعة بمجموعات أخرى تصف السلوك المقارب. الموضوع الثاني يتعلق بالعوامل المتساوية الإستمرارية. ندرس العوامل المتساوية الإستمرارية من أجل الأنظمة النصف مختلطة بضعف وأيضاً من أجل الأنظمة التي لديها مجموعة نهاية شاملة منتهية.

كلمات مفتاحية : خلايا ذاتية السلوك، مجال الجذب، مجموعة نهاية ، جاذب، ديناميك إتجاهي، فئة بار، ديناميك رمزي، عامل.

REMERCIEMENTS

Merci mon Dieu *Allah* de nous avoir donné le courage et la patience d'achever ce travail. Merci pour toutes Tes grâces. Merci autant que le nombre de Tes créatures.

Je remercie mon directeur de thèse Pr. *Redouan Ghanem* et Dr. *Rezki Chemlal* qui m'ont encadrée tout au long de ces années avec patience, en particulier *Rezki Chemlal* qui m'a proposé un sujet de thèse très intéressant. Je le remercie aussi pour son aide et son soutien.

Je remercie également mon co-directeur de thèse Dr. *Pierre Guillon* sans qui je n'aurais jamais pu réaliser ce travail. Je lui suis infiniment reconnaissante non seulement parce qu'il a su me guider lorsque je me perdais et que je doutais du chemin à prendre, mais aussi pour l'hospitalité dont il a fait preuve envers moi lors de mes séjours à l'Institut de Mathématiques de Marseille. Je le remercie pour ses conseils et ses encouragements et pour sa gentillesse et sa générosité.

Je remercie aussi les membres du jury : Pr. *Mohamed Tahar Kimour*, Pr. *Nadjib Boussetila*, Pr. *Fateh Ellaggoune*, Dr. *Rezki Chemlal* d'avoir accepté d'examiner cette thèse et enfin Pr. *Mohamed Cherif Bouras* d'avoir accepté de présider ce jury.

Je remercie ensuite mes amis et mes collègues qui m'ont aidée dans les moments difficiles et avec lesquels j'ai partagé des moments agréables au cours de cette période de ma vie.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à ma famille qui m'a toujours soutenue. J'adresse toute ma gratitude en particulier à ma mère *Soulef* et à mon père *Noureddine* pour leur amour et leur soutien inconditionnel.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Notations	5
1 Dynamique topologique	6
1.1 Systèmes dynamiques uniformes	6
1.1.1 Définitions	7
1.1.2 Dynamique asymptotique	9
1.1.3 Attracteurs	10
1.1.4 Récurrence	11
1.1.5 Transitivité	13
1.2 Systèmes dynamiques non uniformes	15
1.2.1 Définitions	15
1.2.2 Dynamique asymptotique	16
1.2.3 Domaines d'attraction	18
1.2.4 Récurrence	24
1.2.5 Transitivité	25
2 Automates cellulaires	29
2.1 Définitions	29
2.2 Sous-décalages (ou sous-shifts)	32
2.3 Mots bloquants	33
2.4 Classification topologique	34
2.5 Ensemble asymptotique d'AC surjectifs	37
2.6 AC obliques	38
2.7 Attracteurs sous-décalages et domaines	39

TABLE DES MATIÈRES

3	Dynamique directionnelle	45
3.1	Définitions	45
3.2	Invariance	48
3.3	Quasi-équicontinuité en deux directions	50
3.3.1	Quasi-équicontinuité en deux directions linéaires	50
3.3.2	Quasi-équicontinuité en deux directions quelconques	52
3.4	Directions obliques	55
4	L'ensemble limite générique	57
4.1	L'ensemble limite générique des SD	57
4.1.1	L'ensemble limite générique des SD non-errants	60
4.1.2	L'ensemble limite générique des SD quasi-équicontinus	61
4.2	L'ensemble limite générique des AC selon des directions	62
4.2.1	Indécomposabilité	63
4.2.2	Ensemble limite générique fini	64
4.2.3	L'ensemble limite générique dans les directions obliques	65
4.2.4	L'ensemble limite générique des AC quasi-équicontinus en deux directions	66
4.2.5	Classification des ensembles limites génériques selon les directions	68
4.3	Liens avec l'approche ergodique	70
4.3.1	L'ensemble limite probable et l'ensemble μ -limite	70
4.3.2	L'ensemble limite probable des automates cellulaires	72
4.4	Exemples	74
5	Facteurs équicontinus	81
5.1	Définitions	81
5.2	Facteurs équicontinus de SD d'ensemble limite générique fini	84
5.3	Facteurs équicontinus de SD faiblement semi-mélangeants	89
5.4	Facteurs de SD ultimement périodiques	90
5.5	Facteurs équicontinus directionnels	91
5.5.1	Produit des facteurs directionnels des AC surjectifs.	91
5.5.2	Facteurs équicontinus directionnels automates cellulaires	93
	Conclusion et perspectives	95

La propagation des feux d'une forêt, l'évolution d'un embouteillage sur une route, la croissance des cristaux, l'écoulement du sable, le comportement d'un gaz,... peuvent tous être modélisés par des automates cellulaires. Les automates cellulaires sont des objets mathématiques aux règles simples.

L'histoire des automates cellulaires remonte aux années 1940 et au mathématicien *Stanislas Ulam* qui étudiait la croissance des cristaux en la modélisant sur une grille divisée en cellules, et au mathématicien et physicien *John Von Neumann* qui travaillait sur une machine auto-reproductrice, c'est-à-dire une machine capable de construire à partir de composants élémentaires une copie d'elle-même. Grâce à Ulam et à son espace de cellules, *Von Neumann* a créé, en 1952, le premier automate cellulaire à 29 états. En 1966, Le mathématicien *Arthur Walter Burks* a publié le premier ouvrage sur les automate cellulaire [56]. Le nom d'automate cellulaire est d'ailleurs inventé par *Burks*. En 1970, les automates cellulaires ont été vulgarisés par le célèbre "jeu de la vie" du mathématicien *John Horton Conway* [27]. Ils ont été étudiés comme systèmes dynamiques dès les années 1960 [34] avec les travaux du mathématicien *Gustav Arnold Hedlund*.

Dans les années 1980, le physicien *Stephen Wolfram* a proposé une classification des comportements des automates cellulaires basée sur l'expérience [68]. Le travail de *Robert H. Gilman* était la première tentative mathématique de formaliser ces caractérisations de Wolfram [28]. Alors que la mesure est intrinsèque à la partition de Gilman, *Petr Kůrka* a une classification purement topologique centrée sur l'équicontinuité, l'expansivité et la sensibilité [42]. *Mike Hurley* a classé les automates cellulaires par leurs attracteurs [37]. La distinction fondamentale est entre les automates cellulaires qui possèdent des attracteurs disjoints et ceux avec des attracteurs qui ont tous des intersections non vides. Une autre distinction étudiée par *Enrico Formenti* et *Kůrka* [26] se situe entre les attracteurs qui sont des sous-décalages et ceux qui ne le sont pas. *Mathieu Sablik* a obtenu une autre

classification en fonction des directions [62].

La dynamique directionnelle a été introduite par *M. Sablik* [62], elle s'intéresse à la dynamique des automates cellulaires sous l'action d'un décalage. *Martin Delacourt, Victor Poupet, Mathieu Sablik et Guillaume Theyssier* [21] ont généralisé les notions de la dynamique directionnelle aux directions quelconques ; ils ont étudié le comportement qualitatif (équicontinuité, sensibilité, expansivité) qui apparaît selon des directions arbitraires dans l'espace-temps. *Kůrka* [46] a montré que tout automate cellulaire équicontinu dans la direction verticale et quasi-équicontinu dans une autre direction est nilpotent. En particulier, tout AC équicontinu en deux directions est nilpotent.

La notion d'attracteur est essentiel pour comprendre la dynamique des automates cellulaires. Un attracteur est défini comme un ensemble limite d'un ensemble invariant ouvert et fermé. L'ensemble limite est l'ensemble des points qui apparaissent arbitrairement tard pendant l'évolution du système dynamique, il est soit un singleton, soit infini dans les automates cellulaires, d'après *Karel Čulík II, Jan Pachl et Sheng Yu* [17]. L'ensemble limite peut inclure les points qui ont l'air passagers, parce qu'ils n'apparaissent arbitrairement tard autour d'aucune orbite. Pour capturer seulement les points qui peuvent être approchés par l'itération du système dynamique, on peut étudier l'ensemble asymptotique [24, 32]. Néanmoins, Cet ensemble inclut encore des points qui vont très peu probablement être vus dans la dynamique. Le mathématicien *John Milnor*, intéressé par la dynamique sur l'espace de mesures, a présenté en 1985 [54] la notion de l'ensemble limite probable (the likely limit set) qui fournit un outil utile pour étudier le comportement asymptotique pour presque toutes les orbites. D'après la référence précédente, l'ensemble limite probable est le plus petit ensemble fermé qui inclut l'ensemble asymptotique d'un ensemble de mesure pleine. Plus précisément, il est le plus petit fermé qui a un domaine d'attraction de mesure un. De manière équivalente, l'ensemble limite probable est l'unique μ -attracteur maximal [54][38][47].

Dans cette thèse, nous étudierons une version topologique de l'ensemble limite probable. Autrement dit, nous étudierons le comportement asymptotique pour presque toutes les orbites au sens de Baire. Cette version topologique a été définie aussi implicitement par *Milnor*, qui l'a appelée l'ensemble limite générique ; il est le plus petit fermé qui a un domaine d'attraction comeagre. Le but de cette étude est de connaître le lien avec l'équicontinuité et la sensibilité afin de classifier l'ensemble limite générique par les directions, dans la dynamique directionnelle, et de le comparer avec d'autres ensembles décrivant le comportement asymptotique, en particulier les attracteurs sous-décalages, pour les automates cellulaires, parce que *Pietro Di Lena et Luciano Margara* ont montré que tous les attracteurs sous-décalages ont un domaine d'attraction ouvert dense [49]. Par ailleurs, nous étudierons les facteurs équicontinus. On sait que tout système dynamique uniforme

possède son facteur équicontinu maximal, qui est le plus grand élément de sa famille des facteurs équicontinus [25], et que le facteur équicontinu maximal de tout système dynamique uniforme mélangeant (resp. faiblement mélangeant) est trivial [43, Proposition 2.45] (resp. [19, Corollaire 1.6.6]). Nous nous intéresserons aux systèmes dynamiques, en particuliers aux automates cellulaires, qui ont un facteur équicontinu maximal nilpotent.

Organisation de la thèse. Le chapitre 1 sera consacré aux systèmes dynamiques, il commencera par un rappel des notions de base des systèmes dynamiques uniformes ([19] pour plus de détails) avant de généraliser quelques-unes de ces notions aux systèmes dynamiques non uniformes.

Le chapitre 2 sera consacré aux automates cellulaires, son but est de rappeler certaines définitions et propriétés ([43] pour plus de détails) et de présenter certains résultats préliminaires.

Dans le chapitre 3, nous nous intéresserons aux automates cellulaires qui sont quasi-équicontinus en deux directions de signes opposés et aux directions obliques. Dans le chapitre 4, nous nous intéresserons à l'ensemble limite générique.

Le chapitre 5 sera consacré aux facteurs équicontinus.

NOTATIONS

d	Distance.
X	Espace métrique compact.
$B_\varepsilon(x)$	Boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $\varepsilon \geq 0$.
$\overline{B}_\varepsilon(x)$	Boule fermée de centre $x \in X$ et de rayon $\varepsilon \geq 0$.
$\mathfrak{F} = (F_t)_t$	Système dynamique non uniforme (SD).
$\mathfrak{F} = (G_{\llbracket 1, t \rrbracket})_t$	Système dynamique semi-uniforme.
G	Système dynamique uniforme.
$\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}(x)$	Orbite de x par \mathfrak{F} .
$\Omega_{\mathfrak{F}}$ (<i>resp.</i> $\omega_{\mathfrak{F}}$)	Ensemble limite (<i>resp.</i> asymptotique) de \mathfrak{F} .
$\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$	Ensemble limite générique.
$\mathcal{E}_{\mathfrak{F}}$	Ensemble des points d'équicontinuité.
$\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ (<i>resp.</i> $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V)$)	Domaine (ou bassin) d'attraction (<i>resp.</i> domaine direct) de V .
$\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(x)$	Classe asymptotique de x .
f	Application (pour les automates cellulaires, f est la règle locale).
F	Automate cellulaire (AC).
$A^{\mathbb{Z}}$	Espace de configurations.
r	Rayon d'automate cellulaire.
\mathbf{r}_+ (<i>resp.</i> \mathbf{r}_-)	Mémoire (<i>resp.</i> anticipation) d'automate cellulaire.
$[u]$	Cylindre.
σ	Décalage.
h (<i>resp.</i> $\alpha \in \mathbb{R}$)	Direction à variations bornées (<i>resp.</i> direction linéaire).
\mathcal{B}	Ensemble de directions à variations bornées.
$\mathcal{O}_{F,h}(x)$	Orbite de x par F selon h .
$\Omega_{F,h}$ (<i>resp.</i> $\omega_{F,h}$)	Ensemble limite (<i>resp.</i> asymptotique) de F selon h .
$\tilde{\omega}_{F,h}$	Ensemble limite générique selon h .
$\mathcal{E}_{F,h}$	Ensemble des points d'équicontinuité selon h .
$\mathcal{D}_{F,h}(V)$ (<i>resp.</i> $\mathfrak{d}_{F,h}(V)$)	Domaine d'attraction (<i>resp.</i> domaine direct) de V selon h .
$\mathcal{A}_{F,h}(x)$	Classe asymptotique de x selon h .
Φ	Morphisme.

CHAPITRE 1

DYNAMIQUE TOPOLOGIQUE

La dynamique topologique étudie les trajectoires des points dans l'espace des états. Les notions fondamentales de la dynamique topologique sont : l'équicontinuité, la sensibilité, la transitivité, la minimalité, la récurrence et les attracteurs.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques. Dans la première section, nous rappelons certaines définitions et propriétés des systèmes dynamiques uniformes que nous utiliserons par la suite. Nous introduisons également la notion de semi-non-errant et de semi-mélange faible. Ces notions sont valables pour les systèmes dynamiques uniformes et non uniformes. Dans la seconde section, nous généralisons certains résultats aux systèmes dynamiques non uniformes. Cette généralisation sera utile pour étudier la dynamique directionnelle des automates cellulaires. Nous montrons également certains résultats originaux que nous utiliserons pour étudier l'ensemble limite générique.

1.1 Systèmes dynamiques uniformes

Un système dynamique non uniforme (SD) est une suite $(F_t)_{t \in \mathbb{N}}$ d'applications continues d'un espace métrique compact X dans lui-même. Lorsque $F_t = G^t$, pour tout $t \in \mathbb{N}$ et une application continue G de X dans lui-même, le système devient uniforme.

Dans le cas uniforme, l'évolution d'un système dynamique est donnée par les itérations successives de la transformation : à partir du point x au temps 0, le point $G(x)$ représente la nouvelle position à l'instant 1 et $G^t(x) = \underbrace{G \dots G(x)}_{t \text{ fois}}$ est la position à l'instant $t \in \mathbb{N}$.

1.1.1 Définitions

Un **système dynamique uniforme** (X, G) (ou G sur X) est la donnée d'un espace métrique compact X et d'une application continue $G : X \rightarrow X$.

Soient (X, G) un SD uniforme, $U \subseteq X$ et $x \in X$.

- U est dit **G -invariant** ou invariant par G (resp. **fortement G -invariant**) si $G(U) \subseteq U$ (resp. $G(U) = U$).
- (U, G) est un **sous-système** de (X, G) si U est non vide, fermé et G -invariant.
- $(X \times Y, G \times H)$ est le système **produit** de deux SD uniformes (X, G) et (Y, H) tel que

$$\forall (x, y) \in X \times Y, (G \times H)(x, y) = (G(x), H(y)).$$

Orbites. On appelle **orbite** (positive) d'un point x l'ensemble

$$\mathcal{O}_G(x) = \{G^t(x) \mid t \in \mathbb{N}\} = \{x, G(x), G^2(x), \dots\}.$$

- Un point x est dit **périodique** si $\exists p \geq 1$, tel que $G^p(x) = x$.
- La **période** est la petite valeur de $p \geq 1$ telle que $G^p(x) = x$.
- Un point x est dit **ultimement périodique** si son orbite contient un point périodique.

Tout point ultimement périodique a une orbite finie.

Paires asymptotiques.

- Deux points x, y sont dits **asymptotiques** (ou (x, y) est une **paire asymptotique**) si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(G^t(x), G^t(y)) = 0.$$

- La **classe asymptotique** de $x \in X$ est

$$\mathcal{A}_G(x) = \left\{ y \in X \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(G^t(x), G^t(y)) = 0 \right\}.$$

La remarque suivante indique que, dans un espace fini, les paires asymptotiques correspondent à des orbites finalement égales.

Remarque 1.1.1. Soient G un SD uniforme sur un espace fini X et $x, y \in X$. Si x et y sont asymptotiques, alors $\exists t \in \mathbb{N}$ tel que $G^t(x) = G^t(y)$. En particulier, si G est injectif (ou surjectif), alors $x = y$.

Démonstration. Le premier point est clair, parce que X est discret.
Le deuxième point est clair, parce que si X est fini, alors l'injectivité ou la surjectivité de G est équivalente à la bijectivité pour tout G^t . \square

Propriété de Baire.

- Un sous-ensemble $U \subseteq X$ est dit **comaigne** dans X s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.
- Un sous-ensemble U est **maigre** si $X \setminus U$ est comaigne. D'après le théorème de Baire, dans un espace métrique compact, un ensemble comaigne est dense.
- On dit qu'une partie A d'un espace topologique X a la **propriété de Baire** s'il existe un ouvert U de X tel que la différence symétrique $A \Delta U = (A \setminus U) \cup (U \setminus A)$ soit maigre.
- Une **tribu** sur X est un ensemble non vide de parties de X , stable par complémentaires et par unions (ou intersections) dénombrables.
- La **tribu borélienne** (ou tribu de Borel) d'un espace topologique X est la tribu engendrée par les ouverts, ou les fermés, de X . Elle est la plus petite tribu sur X contenant tous les ouverts. Les éléments de la tribu borélienne sont appelés des **boréliens**.
- Les parties de X qui ont la propriété de Baire forment une tribu sur X s'appelle **tribu de Baire**. Puisque tout ouvert a la propriété de Baire (car l'ensemble vide est maigre), cette tribu contient celle des boréliens; pour tout borélien A , il existe un ouvert U tel que $A \Delta U$ soit maigre (pour plus de détails voir [66]).

On va utiliser la remarque suivante plusieurs fois.

Remarque 1.1.2. *Un ensemble $W \subseteq X$ avec la propriété de Baire n'est pas comaigne si et seulement s'il existe un ouvert non vide U dans lequel $W \cap U$ est maigre.*

Autrement dit, un ensemble est comaigne si et seulement s'il n'est maigre dans aucun ouvert.

Démonstration. $W^c \Delta U$ est maigre pour un certain ouvert U , et $W \cap U \subseteq W^c \Delta U$. On remarque que W est comaigne si et seulement si $U = \emptyset$. \square

Equicontinuité et sensibilité.

- L'ensemble des **points d'équicontinuité** $\mathcal{E}_G \subseteq X$ de G est défini par

$$x \in \mathcal{E}_G \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x), \forall t \geq 0, d(G^t(x), G^t(y)) < \varepsilon.$$

Si $\mathcal{E}_G \neq \emptyset$, alors on dit que G est **presque-équicontinu**.

Si \mathcal{E}_G est comaigne, alors on dit que G est **quasi-équicontinu**.

Si $\mathcal{E}_G = X$, alors on dit que G est **équicontinu**. De manière équivalente par compacité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ uniforme tel que

$$\forall x \in X, \forall y \in B_\delta(x), \forall t \in \mathbb{N}, d(G^t(x), G^t(y)) < \varepsilon.$$

Quand le contexte sera évident, on pourra omettre l'indice G .

— G est **sensible** si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in X, \forall \delta > 0, \exists y \in B_\delta(x), \exists t \in \mathbb{N}, d(G^t(x), G^t(y)) \geq \varepsilon.$$

— G est **positivement expansif** si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x, y \in X, x \neq y, \exists t \in \mathbb{N}, d(G^t(x), G^t(y)) \geq \varepsilon.$$

1.1.2 Dynamique asymptotique

— L'**ensemble limite** de U est

$$\Omega_G(U) = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{O}_G(G^t(U))}.$$

Soit $y \in X$, $y \in \Omega_G(U)$ si et seulement s'il existe une suite des points $x_k \in U$ et une suite croissante $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G^{t_k}(x_k) = y.$$

Tout ensemble limite est G -invariant. Si U est fermé et G -invariant, alors

$$\Omega_G(U) = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} G^t(U).$$

On dit que $\Omega_G = \Omega_G(X)$ est l'**ensemble limite** de G .

— G a un **ensemble limite stable** s'il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que

$$G^T(X) = \Omega_G.$$

— L'**ensemble asymptotique** de U est

$$\omega_G(U) = \bigcup_{x \in U} \Omega_G(x).$$

Tout ensemble asymptotique est G -invariant.

On dit que $\omega_G = \omega_G(X)$ est l'**ensemble asymptotique** de G .

— L'ensemble asymptotique d'un point x est exactement son ensemble limite.

$$\omega_G(x) = \omega_G(\{x\}) = \bigcup_{x \in \{x\}} \Omega_G(x) = \Omega_G(x).$$

Quand le contexte sera évident, on pourra omettre l'indice G .

Un ensemble limite est une intersection décroissante d'ensembles fermés. Par compacité, tout ensemble limite est un fermé non vide. En revanche, tout ensemble asymptotique n'est pas fermé. La proposition suivante contient certaines propriétés des ensembles asymptotiques.

Proposition 1.1.3. *Soit (X, G) un SD uniforme, $x \in X$ et $U \subseteq X$.*

1. *Si x est un point périodique, alors $\omega(x) = \mathcal{O}_G(x)$. En particulier, $x \in \omega(x)$.*
2. *$\omega(G^t(x)) = \omega(x)$ pour tout $t \in \mathbb{N}$.*
3. *Si $y \in \omega(x)$, alors $\omega(y) \subseteq \omega(x)$.*
4. *Si $U \neq \emptyset$, alors $\Omega(U) \neq \emptyset$ et $\omega(U) \neq \emptyset$.*

Nilpotence.

— On dit que G est **nilpotent** s'il existe un point $z \in X$ tel que

$$\exists T \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall t > T, G^t(x) = z.$$

— On dit que G est **asymptotiquement nilpotent** si ω_G est un singleton. Pour savoir plus sur l'ensemble asymptotique des systèmes dynamiques, on peut consulter [32]. On note qu'il a été appelé ensemble *accessible* dans [24], et ensemble *ultime* dans [31].

1.1.3 Attracteurs

Soit (X, G) un SD uniforme. $V \subseteq X$ est un **attracteur** s'il est non vide, fermé, $G(V) = V$ et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que pour tout $x \in X$,

$$d(x, V) < \delta \implies \forall t \geq 0, d(G^t(x), V) < \varepsilon \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} d(G^t(x), V) = 0.$$

- V est un **attracteur minimal**, si aucun ensemble $V' \subseteq V$ n'est un attracteur.
- V est un **quasi-attracteur**, s'il est une intersection dénombrable d'attracteurs.
- Le **domaine** (ou **bassin**) d'un attracteur V est

$$\mathcal{D}_G(V) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(G^t(x), V) = 0 \right\}.$$

Définition 1.1.4. Soit (X, G) un SD uniforme. Un ensemble $U \subseteq X$ est **entrant** si $G(\bar{U}) \subseteq \overset{\circ}{U}$.

On va voir dans la proposition suivante que l'ensemble limite de tout ensemble entrant est un attracteur, l'ensemble limite est un attracteur qui contient tous les attracteurs et l'union et l'intersection de deux attracteurs est un attracteur. De plus, le domaine d'attraction de tout attracteur est ouvert (voir la preuve dans le livre de Kůrka [43]).

Proposition 1.1.5. Soit (X, G) un SD uniforme.

1. Si $G(\bar{U}) \subseteq \overset{\circ}{U}$, alors $V = \Omega_G(U)$ est un attracteur.
2. Ω_G est l'attracteur maximal.
3. Si V_0, V_1 sont des attracteurs, alors $V_0 \cup V_1$ est un attracteur.
4. Si V_0, V_1 sont des attracteurs tels que $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$, alors $V_0 \cap V_1$ est le plus grand attracteur contenu dans les deux.
5. L'ensemble des attracteurs de (X, G) est au plus dénombrable.
6. Le domaine d'un attracteur est ouvert.

La proposition suivante a été prouvée dans [43]. Elle veut dire que, dans un SD uniforme, le domaine d'un attracteur équicontinu est équicontinu.

Proposition 1.1.6. [43] Si V est un attracteur dans (X, G) et si $V \subseteq \mathcal{E}$, alors $\mathcal{D}_G(V) \subseteq \mathcal{E}$.

1.1.4 Récurrence

Points récurrents. Soit (X, G) un SD uniforme. Un point $x \in X$ est un **point récurrent** si pour tout voisinage U de x ,

$$\exists t \in \mathbb{N}, G^t(x) \in U.$$

Un point récurrent ne revient pas forcément exactement à lui-même, mais il retourne à n'importe quel voisinage (arbitrairement petit) de lui-même.

Voici quelques propriétés des points récurrents (voir la preuve dans le livre de Vries [19]).

Proposition 1.1.7. Soit (X, G) un SD uniforme.

1. Un point $x \in X$ est récurrent si et seulement si $x \in \overline{\mathcal{O}_G(x)}$.
2. L'ensemble de tous les points récurrents, noté \mathcal{R}_G , est G -invariant.
3. Tout point périodique est un point récurrent.

4. Un point ultimement périodique mais non périodique n'est pas un point récurrent.
5. Si $A \subseteq X$ est G -invariant et $x \in A$, alors x est un point récurrent dans (X, G) si et seulement s'il est récurrent dans le sous-système $(A, G|_A)$.
6. si $x \in \mathcal{R}_G$, alors pour tout voisinage U de x , l'ensemble $D(x, U)$ est infini, où

$$D(x, U) = \{t \in \mathbb{N} \mid G^t(x) \in U\}.$$

Il est bien connu qu'un point est récurrent si et seulement s'il appartient à son ensemble asymptotique (voir par exemple le livre de Vries [19]).

Proposition 1.1.8. *Soit (X, G) un SD uniforme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $x \in X$ est un point récurrent ;
2. $x \in \omega(x)$;
3. $\omega(x) = \overline{\mathcal{O}_G(x)}$.

Points non-errants. Soit (X, G) un SD uniforme.

— Un point $x \in X$ est un **point non-errant** si pour tout voisinage U de x ,

$$\exists t \geq 1, U \cap G^{-t}(U) \neq \emptyset.$$

— L'ensemble des points non-errants est noté \mathcal{N}_G , on dit que G est non-errant si $\mathcal{N}_G = X$, ou, de manière équivalente, si pour tout ouvert $U \subseteq X$,

$$\exists t \geq 1, U \cap G^{-t}(U) \neq \emptyset.$$

Voici quelques propriétés des points non-errants (voir par exemple le livre de Vries [19]).

Proposition 1.1.9. *Soit (X, G) un SD uniforme.*

1. Pour tout point $x \in X$ on a $\omega(x) \subseteq \mathcal{N}_G$.
2. L'ensemble des points non-errants est compact non vide et G -invariant.
3. Si un point est non-errant dans un sous-système (A, G) de (X, G) , alors il est non-errant dans le système (X, G) .
4. Tout point récurrent est un point non-errant.
5. Si X a un sous-ensemble dense des points récurrents, alors $\mathcal{N}_G = X$.
En particulier, c'est le cas si X a un ensemble dense des points périodiques.
6. Si $x \in \mathcal{N}_G$, alors pour tout voisinage U de x , l'ensemble $D(U, U)$ est infini, où

$$D(U, U) = \{t \in \mathbb{N} \mid G^t(U) \cap U \neq \emptyset\}.$$

7. Si G est non-errant, alors l'ensemble des points récurrents est comeagre.

1.1.5 Transitivité

Transitivité. Soit G un SD uniforme sur X .

- Un point est **transitif** si son orbite est dense.
- Si l'orbite de tout point $x \in X$ est dense dans X , ou bien, de manière équivalente, si G n'a pas d'ensemble G -invariant fermé sauf l'ensemble vide et X , on dit que G est **minimal**.
- G est **transitif** si pour tous ouverts $U, V \subseteq X$, il existe $t \geq 1$ tel que $G^t(U) \cap V \neq \emptyset$, ou de manière équivalente, $U \cap G^{-t}(V) \neq \emptyset$.
- G est **semi-transitif** si pour tous ouverts non vides $U, V \subseteq X$ tel que $V \cap \Omega_G \neq \emptyset$, il existe $t \geq 1$ tel que $U \cap G^{-t}(V) \neq \emptyset$.

Tout SD uniforme transitif est semi-transitif. La réciproque est vraie si le SD est surjectif. D'après la proposition suivante, tout système dynamique uniforme transitif est surjectif et non-errant mais n'est pas sensible.

Proposition 1.1.10. [13, 2]

1. *Tout SD uniforme transitif est surjectif.*
2. *Un SD uniforme transitif est soit sensible, soit quasi-équicontinu.*
3. *Tout SD uniforme transitif est non-errant.*

Pour la transitivité, il existe de nombreuses équivalences dans la littérature, par exemple [18, 3]. Dans la proposition suivante, l'espace est parfait [4] ou bien le système est surjectif [5].

Proposition 1.1.11. [4, 5] *Soit (X, G) un SD uniforme tel que X est un espace parfait ou G est surjectif. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *(X, G) est transitif.*
2. *Pour tout ouvert non vide $U \subseteq X$, $\bigcup_{t=1}^{\infty} G^{-t}(U)$ est dense.*
3. *L'ensemble des points transitifs est non vide.*
4. *Il existe $x \in X$ tel que $\omega_G(x) = X$.*
5. *Pour tous ouverts $U, V \subseteq X$, l'ensemble $D(U, V)$ est infini, où*

$$D(U, V) = \{t \in \mathbb{N} \mid G^t(U) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Mélange.

- Un SD uniforme (X, G) est **faiblement mélangeant** si $(X \times X, G \times G)$ est transitif.
- Un SD uniforme (X, G) est **faiblement semi-mélangeant** si pour tous ouverts non vides $U, V, U', V' \subseteq X$ tels que V et V' intersectent Ω_G , il existe $t \geq 1$ tel que

$$U \cap G^{-t}(V) \neq \emptyset \text{ et } U' \cap G^{-t}(V') \neq \emptyset.$$

- Un SD uniforme (X, G) est **mélangeant** si pour tous ouverts non vides $U, V \subseteq X$, il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \geq T$, $G^t(U) \cap V \neq \emptyset$.
- Un SD uniforme (X, G) est **semi-mélangeant** si pour tous ouverts $U, V \subseteq X$ tel que $V \cap \Omega_G \neq \emptyset$, il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \geq T$, $U \cap G^{-t}(V) \neq \emptyset$.

Remarque 1.1.12.

- 1- *Tout SD uniforme faiblement mélangeant est faiblement semi-mélangeant. La réciproque est vraie si le SD est surjectif;*
- 2- *Tout système dynamique faiblement semi-mélangeant est semi-transitif;*
- 3- *Tout SD uniforme mélangeant est semi-mélangeant;*
- 4- *Tout système dynamique semi-mélangeant est faiblement semi-mélangeant.*

Proposition 1.1.13. *Pour un SD uniforme (X, G) , les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le système est mélangeant.*
2. *Pour tous ouverts $U, V \subseteq X$, l'ensemble $D(U, V)$ est cofini (i.e., son complémentaire est fini), où*

$$D(U, V) = \{t \in \mathbb{N} \mid G^t(U) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Il est bien connu que tout système dynamique mélangeant non trivial est sensible et aucun système faiblement mélangeant non trivial n'est équicontinu (voir la preuve dans les livres [43, 19]).

Proposition 1.1.14.

- [5, Cor. 3.9] *Un SD uniforme faiblement mélangeant non trivial est sensible.*
- *Un SD uniforme équicontinu non trivial n'est pas faiblement mélangeant.*

Le produit de deux SD uniformes mélangeants est mélangeant.

Théorème 1.1.15. [3] *Soient (X, G) et (Y, G') deux SD uniformes. Supposons que (X, G) est mélangeant. Si (Y, G') est transitif (resp. faiblement mélangeant (resp. mélangeant)), alors $(X \times Y, G \times G')$ est transitif (resp. faiblement mélangeant (resp. mélangeant)).*

Le produit d'un système sensible par n'importe quel autre système est un système sensible.

Théorème 1.1.16. [5, Théorème 3.11] *Si le SD uniforme (X, G) est sensible, alors le système $(X \times Y, G \times G')$ est sensible pour tout SD uniforme (Y, G') .*

1.2 Systèmes dynamiques non uniformes

1.2.1 Définitions

- Un **système dynamique non uniforme** (SD) est une suite $\mathfrak{F} = (F_t)_{t \in \mathbb{N}}$ d'applications continues d'un espace métrique compact X dans lui-même.

Une classe qui est entre le SD uniforme et non uniforme est la suivante :

- \mathfrak{F} est **semi-uniforme** si $F_t = G_t \cdots G_1$, pour tout $t \in \mathbb{N}$ où $(G_t)_{t \geq 1}$ est une suite équicontinue d'applications de X dans X . Cela est trivialement satisfait quand $\{G_t | t \geq 1\}$ est fini ; en particulier, dans le cas du SD uniforme : $G_t = G_1$ pour tout $t \geq 1$.

On notera $G_{T+[1,t]}$ la composition $G_{T+t} \cdots G_{T+2}G_{T+1}$, de sorte que

$$F_{t+T} = G_{T+[1,t]}F_T .$$

Soient (X, \mathfrak{F}) un SD, $U \subseteq X$ et $x, y \in X$.

- On appelle **orbite** d'un point x par \mathfrak{F} l'ensemble $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}(x) = \{F_t(x) | t \in \mathbb{N}\}$.
- On dit qu'un ensemble U est **\mathfrak{F} -invariant** (resp. **fortement \mathfrak{F} -invariant**) si $F_{t+1}(U) \subseteq F_t(U)$ (resp. $F_t^{-1}(U) = U = F_t(U)$) pour tout $t \in \mathbb{N}$.
- On dit que (x, y) est une **paire asymptotique** si $\lim_{t \rightarrow \infty} d(F_t(x), F_t(y)) = 0$. La **classe asymptotique** de $x \in X$ est

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(x) = \left\{ y \in X \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(F_t(x), F_t(y)) = 0 \right\} .$$

- On dit que \mathfrak{F} est **nilpotent** s'il existe un point $z \in X$ tel que

$$\exists T \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall t > T, F_t(x) = z .$$

Equicontinuité.

- Pour $\varepsilon > 0$, on définit l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}, \varepsilon}$ des points **ε -stables** pour \mathfrak{F} comme l'ensemble de $x \in X$ pour lequel il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in B_{\delta}(x), \forall t \in \mathbb{N}, d(F_t(x), F_t(y)) < \varepsilon .$$

- L'ensemble $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} \subseteq X$ des points d'**équicontinuité** pour \mathfrak{F} est l'ensemble des points qui sont ε -stables pour tout $\varepsilon > 0$.

Si $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} \neq \emptyset$, alors on dit que \mathfrak{F} est **presque-équicontinu**.

Si $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}}$ est comaigne, alors on dit que \mathfrak{F} est **quasi-équicontinu**.

Si $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} = X$, alors on dit que \mathfrak{F} est **équicontinu**. De manière équivalente par compacité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ uniforme tels que

$$\forall x \in X, \forall y \in B_{\delta}(x), \forall t \in \mathbb{N}, d(F_t(x), F_t(y)) < \varepsilon .$$

- \mathfrak{F} est **sensible** s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in X, \forall \delta > 0, \exists y \in B_\delta(x), \exists t \in \mathbb{N}, d(F_t(x), F_t(y)) \geq \varepsilon.$$

Cela implique que $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} = \emptyset$.

- \mathfrak{F} est **positivement expansif** s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists t \in \mathbb{N}, d(F_t(x), F_t(y)) \geq \varepsilon.$$

Remarque 1.2.1. $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}}$ est *coaigne* dans un certain ouvert non vide $U \subseteq X$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble de points ε -stables est *coaigne* dans U .

Démonstration. $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}}$ peut être écrit comme l'intersection dénombrable décroissante des ensembles de points $1/n$ -stables. □

1.2.2 Dynamique asymptotique

Nous définissons les notions qui traitent le comportement asymptotique d'un SD $\mathfrak{F} = (F_t)_t$.

Définition 1.2.2.

- L'*ensemble (Ω -)limite* de $U \subseteq X$ est l'ensemble

$$\Omega_{\mathfrak{F}}(U) = \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{t \geq T} F_t(U)}.$$

- L'*ensemble asymptotique* de U est l'ensemble

$$\omega_{\mathfrak{F}}(U) = \bigcup_{x \in U} \Omega_{\mathfrak{F}}(\{x\}).$$

- On note $\Omega_{\mathfrak{F}} = \Omega_{\mathfrak{F}}(X)$ et $\omega_{\mathfrak{F}} = \omega_{\mathfrak{F}}(X)$.
- On dit que \mathfrak{F} est **asymptotiquement nilpotent** si $\omega_{\mathfrak{F}}$ est un singleton.

Par compacité, ces ensembles sont non vides. $\Omega_{\mathfrak{F}}(U)$ est compact, mais $\omega_{\mathfrak{F}}(U)$ peut ne pas être compact, même pour $U = X$ (voir l'exemple 2.5.2).

On remarque que $\Omega_{\mathfrak{F}}(U) \supseteq \bigcap_{t \in \mathbb{N}} F_t(U)$. Si U est fermé \mathfrak{F} -invariant, alors $\Omega_{\mathfrak{F}}(U) = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} F_t(U)$.

Remarque 1.2.3. Par compacité de X , pour tout U et $\varepsilon > 0$, il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall t \geq T, d(F_t(U), \Omega_{\mathfrak{F}}(U)) < \varepsilon.$$

Dans le cas uniforme, c'est clair que les ensembles asymptotiques sont invariants. Voici une généralisation de ce fait.

Proposition 1.2.4. Soient $\mathfrak{F} = (G_{\llbracket 1, t \rrbracket})_t$ un SD semi-uniforme, $U \subseteq X$, et $j \in \mathbb{N}$.

1. Si $y \in \Omega_{\mathfrak{F}}(U)$, alors $(G_{t+\llbracket 1, j \rrbracket}(y))_t$ admet une valeur d'adhérence dans $\Omega_{\mathfrak{F}}(U)$.
2. Réciproquement, si $z \in \Omega_{\mathfrak{F}}(U)$, alors il est une valeur d'adhérence de $(G_{t+\llbracket 1, j \rrbracket}(y))_t$ pour un certain $y \in \Omega_{\mathfrak{F}}(U)$.

Bien sûr, cela reste vrai pour ω , qui est défini comme un réunion d'ensembles limites.

Démonstration.

1. Par hypothèse, il y a des temps croissants $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et des points $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{t_k}(x_k) = y.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par l'équicontinuité de $(G_{t+\llbracket 1, j \rrbracket})_t$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous z, z' avec $d(z, z') < \delta$, on a

$$\forall t \in \mathbb{N}, d(G_{t+\llbracket 1, j \rrbracket}(z), G_{t+\llbracket 1, j \rrbracket}(z')) < \varepsilon/2.$$

Alors, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$, $d(F_{t_k}(x_k), y) < \delta$, de sorte que

$$d(F_{t_k+j}(x_k), G_{t_k+\llbracket 1, j \rrbracket}(y)) < \varepsilon/2.$$

Si z est une valeur d'adhérence pour $(G_{t_k+\llbracket 1, j \rrbracket}(y))_{k \in \mathbb{N}}$, on voit qu'il existe une infinité de k tels que $d(F_{t_k+j}(x_k), z) < \varepsilon$, de sorte que z est aussi dans

$$\Omega_{\mathfrak{F}}(\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}) \subseteq \Omega_{\mathfrak{F}}(U).$$

2. Maintenant, soit $z \in \Omega_{\mathfrak{F}}(U)$ une valeur d'adhérence de $(F_{t_k}(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ pour certaine $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ et une suite croissante $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers que nous pouvons supposer supérieurs à j .

Par compacité, $(F_{t_k-j}(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $y \in \Omega_{\mathfrak{F}}(U)$.

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$d(G_{t_k-j+\llbracket 1, j \rrbracket}(y), z) \leq d(G_{t_k-j+\llbracket 1, j \rrbracket}(y), F_{t_k}(x_k)) + d(F_{t_k}(x_k), z).$$

Quand k va à ∞ , le deuxième terme de la somme converge vers 0, et une sous-suite du premier terme converge vers 0, grâce à l'équicontinuité de $(G_{t_k-j+\llbracket 1, j \rrbracket})_{k \in \mathbb{N}}$. \square

En particulier, dans un système dynamique uniforme, tout ensemble limite est invariant.

Corollaire 1.2.5. *Si G est un SD uniforme et $U \subseteq X$, alors $G(\Omega_G(U)) = \Omega_G(U)$.*

Démonstration. $G_{t+[1,1]} = G_t = G$ pour chaque $t \in \mathbb{N}$, donc chaque point de la proposition 1.2.4 donne une inclusion. □

1.2.3 Domaines d'attraction

Définition 1.2.6.

— Le **domaine d'attraction** de $V \subseteq X$ est

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V) = \{x \in X \mid \omega_{\mathfrak{F}}(x) \subseteq V\}.$$

Si V est fermé, alors

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V) = \left\{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(F_t(x), V) = 0\right\}.$$

— Le **domaine direct** de $V \subseteq X$ est l'ensemble

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V) = \bigcup_{T \in \mathbb{N}} \bigcap_{t \geq T} F_t^{-1}(V).$$

C'est l'ensemble des points dont les orbites se trouvent finalement dans V .

Par définition et quelques arguments de compacité, on peut être convaincu des remarques suivantes. On remarque que le domaine et le domaine direct sont liés par des inclusions opposées suivant que l'ensemble est ouvert ou fermé.

Remarque 1.2.7. Soient $V \subseteq X$ et $V_i \subseteq X$ pour tout i dans un ensemble arbitraire I .

1. $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V) \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(B_{\varepsilon}(V))$.
2. Si V est fermé, alors

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V) = \left\{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(F_t(x), V) = 0\right\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(B_{\varepsilon}(V)) \supseteq \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V).$$

3. Au contraire, si V est ouvert, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V) \subseteq \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V)$.
4. $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\bigcup_{i \in I} V_i) \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V_i)$.
5. $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\bigcap_{i \in I} V_i) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V_i)$.

Le domaine de tout ensemble fermé a la propriété de Baire.

Remarque 1.2.8. Si $V \subseteq X$ est fermé, alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ a la propriété de Baire.

Démonstration. On a $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(B_{\varepsilon}(V))$ et tout borélien a la propriété de Baire. \square

Le complémentaire du domaine du complémentaire d'un sous-ensemble V est très pertinent dynamiquement : il est l'ensemble des points dont l'orbite a au moins une valeur d'adhérence dans V . Cela est indiqué dans la remarque suivante.

Remarque 1.2.9. Pour tout SD \mathfrak{F} et tout sous-ensemble V , l'ensemble des points dont les orbites ont une valeur d'adhérence dans V est

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C = \{x \in X \mid \omega_{\mathfrak{F}}(x) \cap V \neq \emptyset\} \supseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V),$$

et l'ensemble des points dont les orbites visitent V une infinité de fois est

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C = \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(V) \supseteq \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V).$$

On remarque que $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$ est non vide si et seulement si V intersecte $\omega_{\mathfrak{F}}$. De la remarque 1.2.7, si V est fermé (resp. ouvert), alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$ inclut (resp. est inclus dans) $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$.

Généralisons les notations des domaines à chaque suite $(V_t)_{t \in \mathbb{N}}$ de fermés de X :

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}((V_t)_t) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(F_t(x), V_t) = 0 \right\} \text{ et } \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}((V_t)_t) = \{x \in X \mid \exists T \in \mathbb{N}, \forall t \geq T, F_t(x) \in V_t\}.$$

On peut aussi noter $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}((y_t)_t)$ et $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}((y_t)_t)$ si V_t est un singleton $\{y_t\}$. Avec cette notation,

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(y) = \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\{(F_t(y))_t\}).$$

On peut remarquer de la définition que $U \subseteq \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(U) \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\omega_{\mathfrak{F}}(U))$.

Domaines et points d'équicontinuité

La remarque suivante dit que quand une classe asymptotique est grande, alors elle devrait contenir beaucoup de points d'équicontinuité.

Remarque 1.2.10. Soit (X, \mathfrak{F}) un SD. Si $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(y)$ est comaigne dans un certain ouvert non vide $U \subseteq X$ pour un certain $y \in X$, alors $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}}$ est comaigne dans U .

En particulier, on note que $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} \cap \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(y)$ est aussi comaigne dans U .

Démonstration. D'après l'hypothèse, pour tout $n \geq 1$, l'union $\bigcup_{T \in \mathbb{N}} \bigcap_{t \geq T} F_t^{-1}(\overline{B}_{1/n}(F_t(y)))$ est comaigne dans U , parce qu'elle contient $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(y)$.

Donc, il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcap_{t \geq T} F_t^{-1}(\overline{B}_{1/n}(F_t(y)))$ n'est maigre dans aucun ouvert non vide $V \subseteq U$. Par la remarque 1.1.2, il contient un ouvert non vide $W \subseteq V$. Pour tout $x \in W$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall z \in B_{\delta}(x)$, $z \in W$, ce qui signifie que

$$\forall t \geq T, F_t(z) \in \overline{B}_{1/n}(F_t(y)).$$

En particulier, $F_t(x) \in \overline{B}_{1/n}(F_t(y))$ et d'après l'inégalité triangulaire, on obtient,

$$F_t(z) \in \overline{B}_{2/n}(F_t(x)) \subseteq B_{3/n}(F_t(x)).$$

On en déduit que x est $3/n$ -stable. Autrement dit, l'ensemble des points $3/n$ -stables contient des ouverts non vides de chaque ouvert de U . Cela signifie que cet ensemble est comaigne dans U pour tout $n \in \mathbb{N}$. On conclue par la remarque 1.2.1. \square

Grâce à la proposition suivante, si on a un SD quasi-équicontinu, alors il suffit de prouver qu'un certain domaine est dense pour prouver qu'il est comaigne.

Proposition 1.2.11. Soient \mathfrak{F} un SD et $(V_t)_{t \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles fermés de X . Alors,

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} \cap \overline{\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}((V_t)_t)} \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}((V_t)_t).$$

Démonstration. Soient $x \in \mathcal{E}_{\mathfrak{F}} \cap \overline{\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}((V_t)_t)}$, et $\varepsilon > 0$. Puisque $x \in \mathcal{E}_{\mathfrak{F}}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in B_{\delta}(x), \forall t \in \mathbb{N}, d(F_t(x), F_t(y)) < \varepsilon/2 .$$

Puisque $x \in \overline{\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}((V_t)_t)}$, il existe $y \in B_{\delta}(x) \cap \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}((V_t)_t)$. Donc,

$$\exists T \in \mathbb{N}, \forall t > T, d(F_t(y), V_t) < \varepsilon/2 .$$

Pour ce T ,

$$\forall t > T, d(F_t(x), V_t) < \varepsilon.$$

Puisque c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient que $x \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}((V_t)_t)$. \square

En particulier, pour $z \in X$, on a

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(z) \supseteq \overline{\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(z)} \cap \mathcal{E}_{\mathfrak{F}}.$$

Décomposition des domaines

Cette proposition peut être comparée en partie à [54, Lemme 3] : si un ensemble est décomposable en composants invariants, alors son domaine peut être décomposé en conséquence.

Proposition 1.2.12. *Soit $\mathfrak{F} = (G_{\llbracket 1, t \rrbracket})_{t \in \mathbb{N}}$ un SD semi-uniforme. Si $(V_i)_i$ est une suite finie de fermés de X , deux à deux disjoints et invariants par chaque G_t . Alors,*

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\bigsqcup_i V_i) = \bigsqcup_i \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V_i).$$

Démonstration. Puisque les V_i sont fermés et deux à deux disjoints, soit

$$\varepsilon = \min_{i \neq j} d(V_i, V_j)/2 > 0.$$

Par l'équicontinuité de (G_t) , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall x, y \in X, d(x, y) < \delta \implies d(G_t(x), G_t(y)) < \varepsilon.$$

Soit $x \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\bigsqcup_i V_i)$, de sorte qu'il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall t \geq T, d(F_t(x), \bigsqcup_i V_i) < \min(\delta, \varepsilon).$$

En particulier, il existe i tel que $d(F_T(x), V_i) < \min(\delta, \varepsilon)$. On montre par récurrence sur $t \geq T$ que $d(F_t(x), V_i) < \min(\delta, \varepsilon)$. Puisque $G_{t+1}(V_i) \subseteq V_i$, on a

$$d(F_{t+1}(x), V_i) \leq d(F_{t+1}(x), G_{t+1}(V_i)).$$

C'est moins que ε par l'équicontinuité de (G_t) , en utilisant l'hypothèse de récurrence.

La définition de ε donne

$$\min_{j \neq i} d(F_{t+1}(x), V_j) \geq \min_{j \neq i} (d(V_j, V_i) - d(F_{t+1}(x), V_i)) \geq \varepsilon.$$

Donc,

$$\min(\delta, \varepsilon) \geq d(F_{t+1}(x), \bigsqcup_j V_j) = \min_j d(F_{t+1}(x), V_j) \geq \min(\varepsilon, d(F_{t+1}(x), V_i)).$$

Il résulte que $d(F_{t+1}(x), V_i) \leq \min(\delta, \varepsilon)$.

Puisque pour tout $t \geq T$ et $j \neq i$, $d(F_t(x), V_j) \geq \varepsilon$, on en déduit que

$$d(F_t(x), V_i) = \min_i d(F_t(x), V_i) = d(F_t(x), \bigsqcup_i V_i) \text{ converge vers } 0.$$

L'autre inclusion vient du point 4 de la remarque 1.2.7. □

Domaines d'ensembles finis

La proposition 1.2.14 montre que le domaine d'un ensemble fini contient un nombre fini de classes asymptotiques. On va l'utiliser pour montrer la proposition 1.2.15. Pour montrer la proposition 1.2.14, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.2.13. *Soient $\mathfrak{F} = (G_{[1,t]})_{t \in \mathbb{N}}$ un SD semi-uniforme et $V \subseteq X$ fini. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, x' \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ et $T \in \mathbb{N}$ tels que $d(F_T(x), F_T(x')) \leq \delta$, $\forall t \geq T$, $d(F_t(x), V) \leq \delta$ et $d(F_t(x'), V) \leq \delta$, (x, x') est une paire asymptotique.*

Proposition 1.2.14. *Soient $\mathfrak{F} = (G_{[1,t]})_{t \in \mathbb{N}}$ un SD semi-uniforme et $V \subseteq X$ fini. Alors, il y a au plus $|V|$ classes asymptotiques dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$.*

Démonstration. Pour $0 \leq i \leq |V|$, soient $x_i \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$, et δ comme dans le lemme 1.2.13. Il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que pour tout i , $\forall t \geq T$, $d(F_t(x_i), V) < \delta/2$, et en particulier,

$$\exists y_i \in V, d(F_T(x_i), y_i) < \delta/2.$$

Par le principe de tiroirs, il y a i, j distincts tels que $y_i = y_j$ et par l'inégalité triangulaire,

$$d(F_T(x_i), F_T(x_j)) < \delta.$$

1.2. SYSTÈMES DYNAMIQUES NON UNIFORMES

Par le lemme 1.2.13, on sait alors que (x_i, x_j) est une paire asymptotique. Donc, on peut diviser $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ en au plus $|V|$ classes asymptotiques. \square

Preuve du lemme 1.2.13. Soit $\varepsilon = \frac{1}{3} \min \{d(y, y') \mid y, y' \in V, y \neq y'\} > 0$. Par l'équicontinuité de (G_t) , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall x, x' \in X, d(x, x') \leq \delta \implies d(G_t(x), G_t(x')) < \varepsilon/2.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\delta \leq \varepsilon$.

Soient x, x' comme dans l'énoncé du lemme, et pour $t \in \mathbb{N}$, soit $y(t) \in V$ tel que $d(F_t(x), y(t)) = d(F_t(x), V)$, et $y'(t)$ défini de manière similaire.

Montrons par récurrence sur $t \geq T$ que $y(t) = y'(t)$ qui, de la définition de ε , est équivalent à

$$d(y(t), y'(t)) < 3\varepsilon.$$

Premièrement, par l'inégalité triangulaire,

$$d(y(T), y'(T)) \leq d(y(T), F_T(x)) + d(F_T(x), F_T(x')) + d(F_T(x'), y'(T)) < 3\delta \leq 3\varepsilon.$$

Maintenant on suppose qu'il est vrai pour $t \geq T$, et on le montre pour $t + 1$.

Par l'inégalité triangulaire, on a aussi

$$\begin{aligned} d(y(t+1), y'(t+1)) &\leq d(y(t+1), F_{t+1}(x)) + d(G_{t+1}F_t(x), G_{t+1}F_t(x')) \\ &\quad + d(F_{t+1}(x'), y'(t+1)). \end{aligned}$$

Les premier et troisième termes sont au plus δ par hypothèse, tandis que le central est au plus ε , par définition (de δ). Au final, on obtient que $y(t+1) = y'(t+1)$.

On peut conclure avec, encore une fois, l'inégalité triangulaire que :

$$d(F_t(x), F_t(x')) \leq d(F_t(x), y(t)) + d(y(t), y'(t)) + d(y'(t), F_t(x')).$$

Si $t \geq T$, alors $d(F_t(x), V) + 0 + d(V, F_t(x')) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. \square

La proposition suivante établit le lien entre l'ensemble asymptotique d'un ensemble non maigre et la sensibilité.

Proposition 1.2.15. *Soient \mathfrak{F} un SD semi-uniforme et $V = \omega(U)$ fini, pour un certain ensemble U qui est coaigre dans un certain ouvert non vide $W \subseteq X$. Alors, $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}}$ est coaigre dans W .*

Bien sûr cela signifie que $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} \cap U$ est comaigne dans W . On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.16. *Si \mathfrak{F} est sensible (ou n'a pas de point d'équicontinuité), alors l'ensemble limite et l'ensemble asymptotique de tout ensemble non maigre sont infinis.*

Preuve de la proposition 1.2.15. D'après la proposition 1.2.14,

$$U \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V) \subseteq \bigsqcup_{y \in I} \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(y)$$

pour un certain ensemble fini I . Si U est comaigne dans W , alors l'union l'est aussi.

Montrons que $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}}$ n'est maigre dans aucun ouvert non vide $W' \subseteq W$. On pourra en déduire le résultat souhaité, grâce à la remarque 1.1.2 donnera le résultat souhaité.

Puisque une union finie d'ensembles maigres est maigre, on en déduit que $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(y)$ est non maigre dans W' , pour un certain $y \in I$.

Alors, la remarque 1.2.10 dit que $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}}$ n'est pas non plus maigre dans W' . \square

1.2.4 Récurrence

Définition 1.2.17. *On dit qu'un SD \mathfrak{F} est **non-errant** si pour tout ouvert $U \subseteq X$, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(U^C)^C$ n'est pas maigre.*

La définition précédente est équivalente à la définition de la non errance dans le cas uniforme.

Remarque 1.2.18. *Si F est un SD uniforme, F est non-errant si et seulement si pour tout ouvert $V \subseteq X$, il existe $t \geq 1$ tel que $F^{-t}(V) \cap V \neq \emptyset$.*

Démonstration.

- Si (F^t) est non-errant, alors l'ensemble $\mathfrak{d}_F(V^C)^C$ des points dont les orbites visitent V une infinité de fois est en particulier non vide. Soient x un tel point et $t_1 < t_2$ sont deux pas de temps tels que $y = F^{t_1}(x)$ et $F^{t_2-t_1}(y) = F^{t_2}(x)$ sont dans V . Il est donc clair que

$$y \in V \cap F^{t_1-t_2}(V).$$

- Maintenant, supposons que pour tout ouvert non vide $U \subseteq X$, il existe

$t \geq 1$ tel que

$$U \cap F^{-t}(U) \neq \emptyset.$$

Nous montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe des pas de temps distincts $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ auxquels l'ensemble $W_{(t_0, t_1, \dots, t_n)}(U) = \bigcap_{i=0}^n F^{-t_i}(U)$ des points dont les orbites visitent U est non vide. Ceci est évident pour $n = 0$. Supposons que $W_{(0, t_1, \dots, t_n)}(U) \neq \emptyset$. Par hypothèse, il existe $t \geq 1$ tel que

$$W_{(0, t_1, \dots, t_n)}(U) \cap F^{-t}(W_{(0, t_1, \dots, t_n)}(U)) \neq \emptyset.$$

En particulier, $W_{(0, t, t+t_1, t+t_2, \dots, t+t_n)}(U)$ contient cette intersection, de sorte qu'il est non vide. Maintenant, considérons l'ensemble

$$W_n(V) = \bigcup_{\substack{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n \\ 0 < t_1 < \dots < t_n}} W_{(0, t_1, \dots, t_n)}(V)$$

des points de V dont les orbites visitent V au moins n fois. Notez qu'il est ouvert et dense dans V , parce qu'il contient l'ensemble non vide $W_n(U) \subseteq U$, pour tout sous-ensemble ouvert $U \subseteq V$. L'ensemble $\mathfrak{d}_F(V^C)^C$ des points dont les orbites visitent V une infinité de fois peut être écrit comme l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n(V)$, il est donc comaigne dans V . \square

Définition 1.2.19. On dit qu'un SD \mathfrak{F} est **semi-non-errant** si pour tout ouvert $U \subseteq X$ qui intersecte l'ensemble limite $\Omega_{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(U^C)^C$ est non maigre.

Il est clair qu'un SD sur X est non-errant si et seulement s'il est semi-non-errant et $\Omega_{\mathfrak{F}} = X$.

1.2.5 Transitivité

Transitivité. Des notions classiques de la dynamique topologique peuvent être adaptées dans le cadre de systèmes dynamiques non uniformes. On va voir un exemple qui sera utilisé, en particulier, pour un SD uniforme, mais nous donnons une version non uniforme pour la complétude.

Définition 1.2.20. Un SD \mathfrak{F} est dit **transitif** (resp. **faiblement mélangeant**) si pour tous ouverts non vides U, V (resp. et U', V') de X et pour tout $T \in \mathbb{N}$, il existe $t \geq T$ tel que $F_t^{-1}(U) \cap V \neq \emptyset$ (resp. et $F_t^{-1}(U') \cap V' \neq \emptyset$).

Le lemme suivant sera utilisé dans le contexte des applications décalages : il peut être interprété par le fait qu'un SD transitif mélange l'espace, dans le sens où il transforme une propriété topologique locale en une propriété globale.

Lemme 1.2.21. *Soit $\mathfrak{F} = (F_t)_{t \in \mathbb{N}}$ un SD transitif, où tous les F_t sont des homéomorphismes, et soit $W \subseteq X$ fortement \mathfrak{F} -invariant.*

1. W est soit dense soit nulle part dense.
2. W est soit d'intérieur vide, soit incluse un ouvert dense.
3. Si W a la propriété de Baire, alors il est soit maigre soit comaigne.
4. Si $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i$ est d'intérieur non vide (resp. est non maigre), où chaque W_i est fortement \mathfrak{F} -invariant (resp. et a la propriété de Baire), alors il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que W_i inclue un ouvert dense (resp. est comaigne).

Démonstration.

1. On suppose que W est dense dans un certain ouvert non vide U . Puisque \mathfrak{F} est transitif, pour tout ouvert non vide V , il existe t tel que $F_t^{-1}(V) \cap U$ est un ouvert non vide. De plus, W est dense dans U , de sorte que $F_t^{-1}(V) \cap U \cap W \neq \emptyset$. Puisque $F_t(W) \subseteq W$,

$$V \cap F_t(U) \cap W \supseteq F_t(F_t^{-1}(V) \cap U \cap W) \neq \emptyset.$$

Donc, W est dense dans X .

2. On suppose que W inclue un ouvert non vide et qu'il est fortement \mathfrak{F} -invariant, W inclue l'orbite (ouvert non vide) de cet ouvert. D'après le point 1, W inclue un ouvert dense.
3. On suppose que W n'est pas maigre et on considère un ouvert non vide $V \subseteq X$. Par la remarque 1.1.2, il existe un ouvert U dans lequel W est comaigne. Par transitivité, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $F_t^{-1}(U) \cap V$ est un ouvert non vide. Par hypothèse, W est non maigre dans l'image ouverte non vide $U \cap F_t(V)$ (car F_t est un homéomorphisme), et puisque F_t^{-1} est un homéomorphisme, $F_t^{-1}(W)$ est non maigre dans $F_t^{-1}(U) \cap V$. Par invariance inverse, nous obtenons que W est non maigre dans $F_t^{-1}(U) \cap V$. Par la remarque 1.1.2, puisque W est non maigre dans aucun ouvert non vide, il est comaigne.
4. L'un des W_i doit être d'intérieur non vide (resp. non maigre). On conclue par les points précédents. \square

Semi-mélange faible. Soit (X, \mathfrak{F}) un SD.

- On dit qu'un SD \mathfrak{F} est **semi-transitif** si pour tous ouverts $U, V \subseteq X$ tel que $V \cap \Omega_{\mathfrak{F}} \neq \emptyset$ et pour tout $T \in \mathbb{N}$, il existe $t \geq T$ tel que

$$U \cap F_t^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

1.2. SYSTÈMES DYNAMIQUES NON UNIFORMES

De manière équivalente, $\bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(V)$ est dense.

Si, de plus, $\Omega_{\mathfrak{F}} = X$, on dit que le SD \mathfrak{F} est transitif.

- On dit qu'un SD \mathfrak{F} est **faiblement semi-mélangeant** si pour tous ouverts $U, V, U', V' \subseteq X$ tels que V et V' intersectent $\Omega_{\mathfrak{F}}$ et pour tout $T \in \mathbb{N}$, il existe $t \geq T$ tel que

$$U \cap F_t^{-1}(V) \neq \emptyset \text{ et } U' \cap F_t^{-1}(V') \neq \emptyset.$$

Si, de plus, $\Omega_{\mathfrak{F}} = X$, on dit que le SD \mathfrak{F} est faiblement mélangeant.

Clairement si un système est faiblement semi-mélangeant ou transitif, alors il est semi-transitif. Par ailleurs, si un système est semi-transitif, alors il est semi-non-errant d'après la proposition suivante.

Proposition 1.2.22. *Un SD \mathfrak{F} est semi-transitif si et seulement si pour toute suite $(U_i)_i$ d'ouverts intersectant $\Omega_{\mathfrak{F}}$, l'ensemble $\bigcup_{t_1 < \dots < t_i < \dots} \bigcap_{i \geq 1} F_{t_i}^{-1}(U_i)$ est comeagre.*

En particulier, \mathfrak{F} est semi-non-errant.

Démonstration.

- Supposons que \mathfrak{F} est semi-transitif et que $(U_i)_{i \geq 1}$ est une suite d'ouverts qui intersectent $\Omega_{\mathfrak{F}}$. Montrons que l'ensemble ouvert

$$Z_n = \bigcup_{t_1 < \dots < t_n} \bigcap_{1 \leq i \leq n} F_{t_i}^{-1}(U_i) \text{ est dense.}$$

Soit U_0 un ouvert non vide de X . Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que l'ouvert

$$Z_n \cap U_0 = \bigcup_{0=t_0 < t_1 < \dots < t_n} \bigcap_{0 \leq i \leq n} F_{t_i}^{-1}(U_i) \text{ est non vide.}$$

Trivialement, $Z_0 \cap U_0 = U_0$. Par semi-transitivité, il existe $t_{n+1} > t_n$ tel que

$$Z_{n+1} \cap U_0 = Z_n \cap U_0 \cap F_{t_{n+1}}^{-1}(U_{n+1}) \text{ est non vide.}$$

On en déduit que Z_n est dense (dans X), et donc, que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ est comeagre. Ceci est une autre expression pour l'ensemble des points dont les orbites visitent la suite (U_i) dans le bon ordre, ce que nous devons prouver.

- Maintenant, supposons que pour toute suite $(U_i)_{i \geq 1}$ d'ouverts qui in-

tersectent $\Omega_{\mathfrak{F}}$, l'ensemble

$$\bigcup_{t_1 < \dots < t_i < \dots i \geq 1} \bigcap F_{t_i}^{-1}(U_i) \text{ est comeaigre.}$$

Soient U, V des ouverts non vides tel que V intersecte $\Omega_{\mathfrak{F}}$, et $T \in \mathbb{N}$. Si $U_{T+1} = V$ et $U_i = X$ si $i \neq T + 1$, alors notre hypothèse donne qu'il existe $0 < t_1 < \dots < t_i < \dots$ tels que

$$F_{t_{T+1}}^{-1}(V) = \bigcup_{t_1 < \dots < t_i < \dots i \geq 1} \bigcap F_{t_i}^{-1}(U_i) \text{ est comeaigre.}$$

Ce qui implique qu'il intersecte U . Notez que $t_{T+1} > T$.

— La définition de la semi-non-errance peut être simplement appliquée à la suite d'ouverts égaux à U . \square

La proposition précédente s'applique aux systèmes faiblement semi-mélangeants, mais le semi-mélange faible a une autre conséquence.

Remarque 1.2.23. *Tout SD faiblement semi-mélangeant \mathfrak{F} est soit sensible soit d'ensemble limite trivial.*

Démonstration. Soit (X, \mathfrak{F}) un SD. Si $\Omega_{\mathfrak{F}}$ n'est pas trivial, alors il existe deux ouverts $V, V' \subseteq X$ qui sont à distance non nulle $\varepsilon > 0$ et intersectent $\Omega_{\mathfrak{F}}$. Donc, pour tous $x \in X$ et $\delta > 0$, $B_\delta(x)$ intersecte à la fois $F_T^{-1}(V)$ et $F_T^{-1}(V')$, pour un certain $T \in \mathbb{N}$, de sorte qu'il y a deux points $y, y' \in B_\delta(x)$ pour lesquels $d(F_T(y), F_T(y')) > \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, $F_T(x)$ devrait être à distance au moins $\varepsilon/2$ de l'un des deux, ce qui signifie que x n'est pas $\varepsilon/2$ -stable. \square

Il est bien connu que tout système dynamique uniforme non trivial faiblement mélangeant est sensible (voir [43]) et le corollaire suivant est une généralisation de ce résultat.

Corollaire 1.2.24. *Tout SD non trivial faiblement mélangeant est sensible.*

CHAPITRE 2

AUTOMATES CELLULAIRES

Considérons des cellules placées sur une ligne, chacune contenant un état sélectionné d'un ensemble fini. Un automate cellulaire unidimensionnel est défini par une fonction appelée la règle locale et un voisinage. Le voisinage typique contient la cellule elle-même et deux voisines les plus proches. L'état d'une cellule au temps $t + 1$ est fonction de l'état au temps t de son voisinage et la même règle est appliquée simultanément à toutes les cellules de la ligne.

Dans ce chapitre, nous voyons que les automates cellulaires sont aussi des systèmes dynamiques uniformes très particuliers et nous rappelons certaines définitions et propriétés des automates cellulaires. Par ailleurs, nous raffinons la classification topologique de Kůrka, nous donnons un exemple d'un automate cellulaire surjectif dont l'ensemble asymptotique n'est pas plein, et nous montrons certains résultats préliminaires que nous utiliserons par la suite.

2.1 Définitions

Soit A un ensemble fini de symboles appelé **alphabet**.

$(A^{\mathbb{Z}}, F)$ ou $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est un **automate cellulaire** (AC) s'il existe des entiers $r_- \leq r_+$ (**mémoire** et **anticipation**) et une **règle locale** $f : A^{\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- + 1} \rightarrow A$ tels que

$$\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, F(x)_i = f(x_{i+\mathbf{r}_-}, \dots, x_{i+\mathbf{r}_+}).$$

- F s'appelle la règle globale de l'AC.
- $r = \max\{-\mathbf{r}_-, \mathbf{r}_+\}$ s'appelle le **rayon** de l'AC.
- $d = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- + 1$ s'appelle le **diamètre** de l'AC.

- $A^{\mathbb{Z}}$ s'appelle l'espace de configurations.
- Une **configuration** est une suite biinfinie d'éléments de A .
- Soit $u \in A^*$, la configuration ${}^{\infty}u^{\infty}$ est définie par :

$$({}^{\infty}u^{\infty})_{k|u|+i} = u_i \text{ pour } k \in \mathbb{Z}, 0 \leq i < |u| \text{ et } u \in A^*.$$

Elle est (spatialement) **périodique** de période $|u|$.

- Une configuration **monochrome** est une configuration à un seul symbole : ${}^{\infty}0^{\infty}, 0 \in A$.
- Un **mot** sur A est une suite finie d'éléments de A .
- $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ est l'ensemble de tous les mots finis $u = u_0 \dots u_{n-1}$.
- On dit que v est un **sous-mot** de u et on écrit $v \sqsubset u$, s'il existe $k, l < |u|$ avec $k < l$ tels que

$$v = u_{\llbracket k, l \rrbracket} = u_k \dots u_{l-1}.$$

- On munit $A^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit de la topologie discrète. $A^{\mathbb{Z}}$ est un espace compact par le théorème de Tychonoff. La topologie produit correspond à l'**ultramétrie** suivante :

$$\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 2^{-k} & \text{si } x \neq y \text{ où } k = \min \{ i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq y_i \vee x_{-i} \neq y_{-i} \} \end{cases}.$$

Pour toutes configurations x et y , pour tout entier positif k ,

$$d(x, y) < 2^{-k} \iff x_{\llbracket -k, k \rrbracket} = y_{\llbracket -k, k \rrbracket}.$$

- La topologie sur $A^{\mathbb{Z}}$ peut être décrite comme la topologie engendrée par les cylindres. Un **cylindre** dans $A^{\mathbb{Z}}$ est un ensemble

$$[u]_i = \{ x \in A^{\mathbb{Z}} \mid x_{\llbracket i, i+|u| \rrbracket} = u \},$$

où $u \in A^*$ et $i \in \mathbb{Z}$. Un cylindre est ouvert (ouvert et fermé) puisqu'il est une union de boules et son complémentaire est aussi un cylindre.

Donc, $(A^{\mathbb{Z}}, d)$ est un espace de Cantor, c'est-à-dire un espace métrique, compact, parfait (sans point isolé) et totalement discontinu.

- Un **décalage plein** est un SD uniforme $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$, où A est un alphabet et l'application σ est définie pour tout $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$ par :

$$\sigma(x)_i = x_{i+1}.$$

Cette application s'appelle le **décalage**, elle est continue pour $i \in \mathbb{Z}$.

Remarque 2.1.1. *On sait que $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ est transitif. D'après le lemme 1.2.21, les sous-décalages sont tous maigres ou pleins.*

Grâce au théorème suivant, on peut étudier les automates cellulaires comme des systèmes dynamiques uniformes.

Théorème 2.1.2 (Hedlund[34]). *Une fonction $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire si et seulement si elle est continue et commute avec le décalage; $F\sigma = \sigma F$.*

En particulier, l'AC $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ est un système dynamique uniforme.

Subjectivité. Un AC F est **réversible** s'il existe un AC F' tel que $FF' = F'F = Id$. Par le théorème de Hedlund, on peut caractériser les automates cellulaires réversibles comme ceux dont la règle globale est bijective.

Corollaire 2.1.3. *Un automate cellulaire est réversible si et seulement si sa règle globale est une bijection.*

Théorème 2.1.4. [10] *Tout AC surjectif est non-errant, c'est-à-dire $\mathcal{N}_F = A^{\mathbb{Z}}$.*

La preuve de la proposition suivante est dans [43].

Proposition 2.1.5. *Soit F un AC non surjectif de rayon r et de règle locale f alors il existe un **diamant** pour f , c'est-à-dire, un mot $w \in A^{2r}$ et deux mots $u, v \in A^+$ différents de même longueur tels que*

$$f(uww) = f(vww).$$

Si un AC a un mot diamant, cet AC est non surjectif.

Définition 2.1.6. *On appelle **Jardin d'Éden** de l'AC F toute configuration $x \in A^{\mathbb{Z}} \setminus F(A^{\mathbb{Z}})$. En d'autres termes, un Jardin d'Éden de l'AC F est une configuration sans antécédent.*

Un Jardin d'Éden ne peut donc apparaître, lors de l'évolution d'un AC, que comme configuration initiale. Si un AC a un Jardin d'Éden, cet AC est non surjectif.

Proposition 2.1.7. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. F est un AC non surjectif.
2. F est un AC, qui a un mot diamant.
3. F est un AC, qui a un Jardin d'Éden.

2.2 Sous-décalages (ou sous-shifts)

Définition 2.2.1.

- Un **sous-décalage** est un sous-système d'un décalage plein; on écrit simplement Σ qui est un sous-ensemble fermé σ -invariant de $A^{\mathbb{Z}}$. De manière équivalente, il existe un ensemble des mots interdits $\mathcal{F} \subseteq A^*$ tel que

$$\Sigma = \Sigma_{\mathcal{F}} = \{x \in A^{\mathbb{Z}} \mid \forall u \sqsubset x, u \notin \mathcal{F}\}.$$

- Si \mathcal{F} est fini, alors on dit que $\Sigma_{\mathcal{F}}$ est un **sous-décalage de type fini** (SFT); \mathcal{F} peut alors être supposé comme étant inclus dans A^k pour un certain $k \in \mathbb{N}$ qui est un **ordre** pour le SFT. On écrit que $\Sigma_{\mathcal{F}}$ est un k -SFT.
- Soit $\Sigma \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ un sous-décalage. Le **langage** de Σ est défini par :

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \{u \in A^* \mid \exists x \in \Sigma, u \sqsubset x\}.$$

Remarque 2.2.2. Si $U \subseteq A^{\mathbb{Z}}$, alors $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \sigma^j(U)$ est le plus grand sous-décalage inclus dans U .

Nous utiliserons le lemme suivant pour montrer des résultats concernant la dynamique des automates cellulaires.

Lemme 2.2.3. Soient $\varepsilon > 0$ et $V \subseteq A^{\mathbb{Z}}$.

1. $\sigma^j(F(V)) \subseteq B_{2^{|j|}\varepsilon}(\sigma^j(V))$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.
2. Si V est fortement σ -invariant, $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et $p > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{pn}(x) \in B_{2^{-p\varepsilon}}(V)$, alors $\forall i \in \mathbb{Z}, \sigma^i(x) \in B_{\varepsilon}(V)$.
3. Si V est un $(2k+1)$ -SFT, alors $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \sigma^i(B_{2^{-k}}(V)) = V$.

Démonstration.

1. Soit $x \in \sigma^j(B_{\varepsilon}(V))$. Alors $\sigma^{-j}(x) \in B_{\varepsilon}(V)$, ce qui signifie que $d(\sigma^{-j}(x), V) < \varepsilon$. De plus,

$$d(x, \sigma^j(V)) = d(\sigma^j \sigma^{-j}(x), \sigma^j(V)) < 2^{|j|} d(\sigma^{-j}(x), V) < 2^{|j|} \varepsilon.$$

Donc, $x \in B_{2^{|j|}\varepsilon}(\sigma^j(V))$.

2. Du point précédent, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\sigma^i(x) = \sigma^{i \bmod p} \sigma^{\lfloor i/p \rfloor p}(x) \in \sigma^{i \bmod p}(B_{2^{-p\varepsilon}}(V)) \subseteq B_{2^{\lfloor i/p \rfloor p - p\varepsilon}}(\sigma^{i \bmod p}(V)).$$

Puisque V est fortement σ -invariant, on a aussi que

$$B_{2^{|i \bmod p| - p_\varepsilon}}(\sigma^{i \bmod p}(V)) \subseteq B_\varepsilon(V).$$

Donc, $\forall i \in \mathbb{Z}, \sigma^i(x) \in B_\varepsilon(V)$.

3. Soit $i \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \sigma^{-i}(x) \in B_{2^{-k}}(V) &\iff d(\sigma^{-i}(x), V) < 2^{-k} \\ &\iff \exists y \in V, \sigma^{-i}(x)_{\llbracket -k, k \rrbracket} = y_{\llbracket -k, k \rrbracket} \\ &\iff \exists y \in V, x_{\llbracket -i-k, -i+k \rrbracket} = y_{\llbracket -k, k \rrbracket} \\ &\iff x_{\llbracket -i-k, -i+k \rrbracket} \in \mathcal{L}(V). \end{aligned}$$

Si cela est vrai pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et V est $(2k+1)$ -SFT, alors $x \in V$. \square

2.3 Mots bloquants

La notion topologique d'équicontinuité peut s'exprimer symboliquement en termes de mots bloquants, qui empêchent l'information de circuler.

Définition 2.3.1 (Mot bloquant). *Soit $s > 0$. Un mot $u \in A^+$ avec $|u| \geq s$ est dit **s -bloquant** pour un AC F s'il existe un offset $p \in \llbracket 0, |u| - s \rrbracket$ tel que*

$$\forall x, y \in [u]_0, \forall t \geq 0, F^t(x)_{\llbracket p, p+s \rrbracket} = F^t(y)_{\llbracket p, p+s \rrbracket}.$$

De façon équivalente, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (A^s)^\mathbb{N}$ telle que

$$\forall x \in [u], \forall t \geq 0, F^t(x)_{\llbracket p, p+s \rrbracket} = u_n.$$

D'après la proposition suivante, un AC est soit sensible soit quasi-équicontinu et un AC est quasi-équicontinu si et seulement s'il a un mot bloquant.

Proposition 2.3.2 (Kůrka [43]). *Soit F un AC de rayon r . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. F est non sensible.
2. F a un mot r -bloquant.
3. F est quasi-équicontinu.

L'ensemble des points d'équicontinuité, d'un automate cellulaire quasi-équicontinu, est comaigne, mais il peut être d'intérieur vide.

Exemple 2.3.3. *Soit $A = \{0, 1\}$.*

1. Soit \mathbf{Min} l'AC défini sur $A^{\mathbb{Z}}$ par

$$\mathbf{Min}(x)_i = \min(x_i, x_{i+1}).$$

F est quasi-équicontinu et $\mathcal{E} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \{x \in A^{\mathbb{Z}} \mid \exists i \geq k, x_i = 0\}$ est comeagre d'intérieur vide.

2. Soit F l'AC défini sur $A^{\mathbb{Z}}$ par

$$F(x)_i = \min(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}).$$

F est quasi-équicontinu et $\mathcal{E} = A^{\mathbb{Z}} \setminus \{1^\infty\}$ est ouvert dense.

On sait que tout AC est équicontinu si et seulement s'il est ultimement périodique, grâce à la proposition suivante.

Proposition 2.3.4 (Kůrka [43]). *Soit F un AC de rayon $r > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. F est équicontinu.
2. Il existe $k > 0$ tel que $\forall u \in A^k$, u est r -bloquant.
3. Il existe $p > 0$, $q \in \mathbb{N}$ tels que $F^{q+p} = F^q$.

Théorème 2.3.5. [10]

1. Tout AC quasi-équicontinu surjectif a un ensemble dense de configurations F -périodiques.
2. Si F est un AC équicontinu surjectif, alors il existe $p \geq 0$ tel que $F^p = id$. En particulier, F est bijectif.

2.4 Classification topologique

Gilman ([28]) a classifié les automates cellulaires en utilisant la mesure de l'ensemble des points d'équicontinuité. Puis plus tard, Kůrka ([42]) a introduit la classification topologique suivante : Un automate cellulaire unidimensionnel appartient à une et une seule des classes suivantes :

- E_1 : Il est équicontinu ;
- E_2 : Il a des points d'équicontinuité mais n'est pas équicontinu ;
- E_3 : Il est sensible mais n'est pas positivement expansif ;
- E_4 : Il est positivement expansif.

Pour les AC, la semi-transitivité est équivalente au semi-mélange faible, d'après la proposition suivante.

Proposition 2.4.1. *Un AC est semi-transitif si et seulement s'il est faiblement semi-mélangeant.*

Démonstration. C'est clair que le semi-mélange faible implique la transitivité. Maintenant, on montre la réciproque. Soient $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC et $U, U', V, V' \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ des ouverts. Comme le décalage est faiblement mélangeant, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que

$$U \cap \sigma^{-t}(U') \neq \emptyset \text{ et } V \cap \sigma^{-t}(V') \neq \emptyset.$$

Soient $W = U \cap \sigma^{-t}(U')$ et $W' = V \cap \sigma^{-t}(V')$. Comme F est semi-transitif, il existe $t' \in \mathbb{N}$ tel que $F^{t'}(W) \cap W' \neq \emptyset$ tels que W et W' sont ouverts et $W' \cap \Omega_F \neq \emptyset$. Alors,

$$F^{t'}(U \cap \sigma^{-t}(U')) \cap V \cap \sigma^{-t}(V') \neq \emptyset.$$

Donc,

$$F^{t'}(U) \cap V \neq \emptyset \text{ et } F^{t'}\sigma^{-t}(U') \cap \sigma^{-t}(V') \neq \emptyset.$$

Comme F commute avec le décalage,

$$F^{t'}(U) \cap V \neq \emptyset \text{ et } F^{t'}(U') \cap V' \neq \emptyset.$$

De plus, $W' \cap \Omega_F \neq \emptyset$. Autrement dit, $V \cap \sigma^{-t}(V') \cap \Omega_F \neq \emptyset$. Puisque Ω_F est σ -invariant,

$$V \cap \Omega_F \neq \emptyset \text{ et } V' \cap \Omega_F \neq \emptyset.$$

Donc, F est faiblement semi-mélangeant. □

Tout AC transitif est semi-transitif et surjectif.

Corollaire 2.4.2. [55] *Un AC est transitif si et seulement s'il est faiblement mélangeant.*

On sait qu'un ensemble limite d'AC qui est non trivial est infini, grâce à la proposition suivante.

Proposition 2.4.3. [17] *L'ensemble limite de tout AC est soit un singleton soit infini.*

Un AC est nilpotent si son ensemble limite est trivial, d'après le théorème suivant.

Théorème 2.4.4. [17] *Soit F un AC. F est nilpotent si et seulement si Ω_F est un singleton.*

Tout AC asymptotiquement nilpotent est nilpotent (voir [32]). On a montré dans le chapitre précédent que tout SD faiblement semi-mélangeant est soit sensible soit d'ensemble limite trivial.

Corollaire 2.4.5. *Tout AC faiblement semi-mélangeant est soit sensible soit nilpotent.*

Dans la proposition suivante, on va montrer qu'un AC semi-transitif est soit sensible soit nilpotent.

Proposition 2.4.6. *Tout AC semi-transitif non nilpotent est sensible.*

Démonstration. D'après la proposition 2.4.1, un AC semi-transitif est faiblement semi-mélangeant. D'après le corollaire 2.4.5, il est soit sensible soit nilpotent. □

Tout AC transitif est semi-transitif et surjectif.

Corollaire 2.4.7. [16] *Tout AC transitif est sensible.*

En revanche, tout AC sensible n'est pas transitif. Voici un contre-exemple.

Exemple 2.4.8. Soient $A = \{0, 1\}$ et $F = Id \times \sigma$ un AC sur $A^{\mathbb{Z}} \times A^{\mathbb{Z}}$ défini par

$$F(x, y)_i = (x_i, y_{i+1}).$$

F est sensible mais n'est pas transitif.

Tout automate cellulaire semi-mélangeant est semi-transitif. Par contre, on ne connaît aucun exemple d'AC semi-transitif qui n'est pas semi-mélangeant. De plus, tout AC semi-mélangeant non nilpotent est sensible, mais tout AC sensible n'est pas semi-mélangeant.

Proposition 2.4.9. [9]. *Tout automate cellulaire positivement expansif est mélangeant.*

En revanche, tout AC mélangeant n'est pas positivement expansif. Voici un contre-exemple.

Exemple 2.4.10. Soient $A = \{0, 1\}$ et F un AC sur $A^{\mathbb{Z}}$ défini par

$$F(x)_i = (x_{i-1} + x_{i+1}) \pmod{2}.$$

F est mélangeant et positivement expansif, alors que $\sigma \times F$ est mélangeant mais n'est pas positivement expansif ni expansif.

On en déduit que les automates cellulaires semi-mélangeants s'interclassent correctement entre les sensibles et les expansifs. Dans ce cas, on a une nouvelle classification des automates cellulaires non nilpotents :

E_1 : Les équicontinus ;

E_2 : Les quasi-équicontinus mais n'est pas équicontinus ;

E_3 : Les sensibles non semi-mélangeants ;

E_4 : Les semi-mélangeants non positivement expansifs ;

E_5 : Les positivement expansifs.

2.5 Ensemble asymptotique d'AC surjectifs

L'ensemble asymptotique d'un AC est invariant par décalage, mais contrairement à l'ensemble limite, il peut ne pas être fermé.

Proposition 2.5.1. *Un AC est surjectif si et seulement si son ensemble asymptotique est comaigne.*

L'exemple suivant répond à une question laissée ouverte dans l'article de P. Guillon and G. Richard [31] : l'ensemble asymptotique d'un automate cellulaire surjectif est comaigne, mais il n'est pas toujours plein.

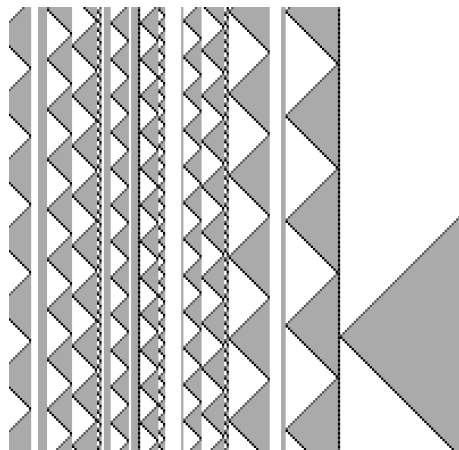


FIGURE 2.1 – Lonely Gliders (\leftarrow (resp. \rightarrow) sont représentés par des carrés noirs (resp. carrés blancs) et \rightarrow (resp. \leftarrow) sont représentés par des carrés gris foncé (resp. gris clair)).

Exemple 2.5.2 (Particules isolées (Lonely gliders)). Soient $A = \{>, <, \rightarrow, \leftarrow\}$, et F un AC défini par la règle locale suivante :

$$f : (x_{-1}, x_0, x_1) \mapsto \begin{cases} \rightarrow & \text{si } x_{-1} = \rightarrow \text{ et } x_0 = < \\ \rightarrow & \text{si } x_{-1} \neq > \text{ et } x_0 = \leftarrow \\ < & \text{si } x_{-1} = > \text{ et } x_0 = \leftarrow \\ > & \text{si } x_0 = \rightarrow \text{ et } x_1 = < \\ \leftarrow & \text{si } x_0 = \rightarrow \text{ et } x_1 \neq < \\ \leftarrow & \text{si } x_0 = > \text{ et } x_1 = \leftarrow \\ x_0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Un diagramme espace-temps typique de cet AC est montré dans la figure 2.1. Intuitivement, chaque configuration peut être décomposée en zones valides, qui contiennent au plus une flèche, avec des chevrons $<$ et $>$. La flèche se déplace dans la direction qu'elle indique, jusqu'à ce qu'il atteigne la fin de la zone (changement de direction des chevrons), dans ce cas il fait demi-tour. Dans cet esprit, il n'est pas difficile de comprendre que F est réversible (donc surjectif), et que les motifs invalides sont bloquants : ab où $a \neq >$ et $b \in \{>, \rightarrow, \leftarrow\}$ ou les symétriques. D'après le corollaire 4.1.7, l'ensemble asymptotique est co-maigre. Portant, il n'est pas plein.

Démonstration. Prouvons qu'une certaine configuration x avec une zone valide infinie qui contient une flèche ne peut pas être une valeur d'adhérence d'une orbite. En effet, toute configuration dont l'orbite est arbitrairement proche de x devrait également avoir une zone valide infinie, avec au plus une flèche (comme l'orbite illustrée à la figure 2.1, dans laquelle la zone la plus à droite doit être interprétée comme infinie). toute valeur d'adhérence d'une telle orbite n'a aucune flèche dans sa zone valide infinie (la flèche va à l'infini). \square

2.6 AC obliques

Définition 2.6.1. Un AC de mémoire \mathbf{r}_- et d'anticipation \mathbf{r}_+ est dit **oblique** si $\mathbf{r}_- > 0$ ou $\mathbf{r}_+ < 0$.

D'après la proposition suivante, l'ensemble asymptotique d'un AC oblique est exactement son ensemble limite.

Proposition 2.6.2. [32] Si F est un AC oblique, alors $\omega_F = \Omega_F$.

Proposition 2.6.3. [1] Tout AC oblique surjectif est mélangeant.

Corollaire 2.6.4. *Tout AC oblique surjectif est faiblement mélangeant.*

Le corollaire précédent est un cas particulier de la proposition suivante.

Proposition 2.6.5. *Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC de mémoire \mathbf{r}_- et d'anticipation \mathbf{r}_+ . Si F est un AC oblique, alors F est faiblement semi-mélangeant.*

Démonstration. Il suffit de prouver la propriété pour $U = [u]_n$ un cylindre, $V = [v]_m$ et $V' = [v']_{m'}$ deux cylindres de motifs apparaissant dans Ω_F , avec $m, m', n \in \mathbb{Z}$.

En prolongeant v et/ou v' (dans un motif qui apparaît toujours dans l'ensemble limite), on peut supposer qu'ils ont la même longueur et que $m = m'$.

Supposons que $\mathbf{r}_- > 0$. Il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que $T\mathbf{r}_- + m > n + |u|$ et il existe $w_T \in A^{|v|+T(\mathbf{r}_+-\mathbf{r}_-)}$ tel que

$$F^{-T}([v]_m) \supseteq [w_T]_{T\mathbf{r}_-+m}.$$

Donc, il existe $T \in \mathbb{N}$ et $y \in A^{\mathbb{Z}}$ tels que $y \in [u]_n \cap [w_T]_{T\mathbf{r}_-+m}$.

La même chose est vraie pour v' (pour le même T). □

On en déduit que tout AC oblique non nilpotent est sensible.

Corollaire 2.6.6. *Un AC oblique est soit sensible soit nilpotent.*

Démonstration. Un AC oblique est faiblement semi-mélangeant, d'après la proposition 2.6.5. Tout AC faiblement semi-mélangeant est soit sensible soit nilpotent, d'après la remarque 1.2.23 et le théorème 2.4.4. □

Corollaire 2.6.7. *Un AC oblique et surjectif est sensible.*

2.7 Attracteurs sous-décalages et domaines

Attracteurs sous-décalages. Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC.

- Un **attracteur sous-décalage** d'un AC est un attracteur qui est un sous-décalage.
- On dit que l'ensemble ouvert F -invariant $U \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ est **envahissant** si $\exists k > 0$ tel que

$$F^k(U) \subseteq \sigma^{-1}(U) \cap \sigma(U).$$

Proposition 2.7.1. *Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC. Un ensemble fermé non vide $V \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ tel que $F(V) = V$ est un attracteur si $V = \Omega_F(U)$ tel que U est un ensemble ouvert F -invariant.*

L'ensemble limite d'un ensemble ouvert invariant est un attracteur et si l'ensemble ouvert invariant est envahissant, alors son ensemble limite est un sous-décalage.

Proposition 2.7.2 ([26]). *Soient $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un AC et U un ensemble ouvert F -invariant. Alors $\Omega_F(U)$ est un attracteur sous-décalage si et seulement si U est envahissant.*

On va montrer que les attracteurs sous-décalages s'intersectent toujours.

Théorème 2.7.3. *Si un AC a deux attracteurs non vides σ -invariants, alors ils ne sont pas disjoints.*

Démonstration. On suppose que l'AC a deux attracteurs V_1 et V_2 disjoints non vides σ -invariants. Alors il existe ε tel que

$$\mathcal{D}_F(V_i) \supseteq B(V_i, \varepsilon), i \in \{1, 2\}.$$

Puisque σ est transitif,

$$\exists n \in \mathbb{Z}, B(V_1, \varepsilon) \cap \sigma^n(B(V_2, \varepsilon)) \neq \emptyset.$$

Mais,

$$\Omega_F(B(V_1, \varepsilon) \cap \sigma^n(B(V_2, \varepsilon))) \subseteq \Omega_F(B(V_1, \varepsilon)) \subseteq V_1.$$

Alors que d'un autre côté, $\Omega_F(B(V_1, \varepsilon) \cap \sigma^n(B(V_2, \varepsilon))) = \Omega_F(\sigma^n(\sigma^{-n}(B(V_1, \varepsilon)) \cap B(V_2, \varepsilon)))$

$$= \sigma^n(\Omega_F(\sigma^{-n}(B(V_1, \varepsilon)) \cap B(V_2, \varepsilon))) \subseteq \sigma^n(\Omega_F(B(V_2, \varepsilon))) \subseteq \sigma^n(V_2) \subseteq V_2 .$$

Alors, $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Cela contredit qu'ils sont disjoints et non vides. □

Voici quelques propriétés des attracteurs.

Théorème 2.7.4 ([37]).

1. *Si un AC a deux attracteurs disjoints, alors chaque attracteur contient deux attracteurs disjoints et un nombre indénombrable de quasi-attracteurs.*

2. Si un AC a un attracteur minimal, alors il est un sous-décalage, il est contenu dans tout autre attracteur, et son domaine d'attraction est un ensemble ouvert dense.
3. Si $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est une configuration F -périodique attractive, alors $\sigma(x) = x$ et $F(x) = x$.

La classification suivante est un raffinement de la classification de Hurley [37] : Pour tout AC $(A^{\mathbb{Z}}, F)$, on est dans un des cas suivants :

- A_1 : Il y a deux attracteurs disjoints et un continuum de quasi-attracteurs ;
- A_2 : Il y a un unique quasi-attracteur minimal qui n'est pas un attracteur ;
- A_3 : Il y a un unique attracteur minimal qui est différent de Ω_F ;
- A_4 : Il y a un unique attracteur $\Omega_F \neq A^{\mathbb{Z}}$;
- A_5 : Il y a un unique attracteur $A^{\mathbb{Z}}$.

Domaines d'attraction. Le domaine d'un attracteur est ouvert mais n'est pas toujours dense.

Proposition 2.7.5 ([49]). *Pour tout AC, Le domaine d'un attracteur sous-décalage est ouvert dense.*

La proposition suivante est très importante pour montrer la proposition 3.3.4 : la transitivité du décalage apporte certaines propriétés aux domaines et aux domaines directs des ensembles invariants par décalage via AC.

Proposition 2.7.6. *Soient $\mathfrak{F} = (F_t)$ une suite d'AC sur $X = A^{\mathbb{Z}}$, et $V \subseteq A^{\mathbb{Z}}$.*

1. $\omega_{\mathfrak{F}}(\sigma(V)) = \sigma(\omega_{\mathfrak{F}}(V))$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\sigma(V)) = \sigma(\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V))$.
2. Si V est σ -invariant, alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ soit est d'intérieur vide, soit inclue un ouvert dense ; il est soit nulle part dense soit dense. Si, de plus, V est fermé, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ est soit maigre soit comaigne.
3. Si V est un SFT et $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ d'intérieur non vide, alors $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V)$ est dense.
4. Si V est un sous-décalage, alors $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V)$ est maigre, sauf si $F_T^{-1}(V)$ est plein, pour un certain $T \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

1. C'est clair, par définition, que $\omega_{\mathfrak{F}}(\sigma(x)) = \sigma(\omega_{\mathfrak{F}}(x))$.
2. D'après le point précédent, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ est σ -invariant. En outre, on peut voir que si V est fermé, alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(B_{\varepsilon}(V))$ a la propriété de Baire. Les trois affirmations proviennent du lemme 1.2.21 (appliqué

à $\mathfrak{F} = \sigma$).

3. On montre que, pour $w \in A^*$ arbitraire, $[w] \cap \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V)$ est non vide. Puisque $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ est d'intérieur non vide, il existe $u \in A^*$ tel que $[u] \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$.

Soit $x = {}^\infty(uw)^\infty \in [u]$ une configuration périodique de période $p = |uw|$ tel que $x_{[0,p[} = uw$. Puisque $x \in [u] \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$, il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall t > T, d(F_t(x), V) < 2^{-k-p}.$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{Z}, x = \sigma^{np}(x)$, on a même :

$$\forall t > T, \forall n \in \mathbb{Z}, d(F_t \sigma^{np}(x), V) < 2^{-k-p}.$$

Par le point 1 du lemme 2.2.3, pour tout $t > T$,

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \sigma^i F_t(x) \in B_{2^{-k}}(V).$$

Puisque V est un $2k+1$ -SFT, $F_t(x) \in V$, par le point 3 du lemme 2.2.3; $x \in \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V)$. Par l'invariance par décalage, on a aussi que $\sigma^{|u|}(x) \in [w] \cap \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V)$.

4. Par définition,

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V) \subseteq \bigcup_{T \in \mathbb{N}} F_T^{-1}(V).$$

Si pour tout $T \in \mathbb{N}$, $F_T^{-1}(V)$ n'est pas plein, le point 2 du lemme 1.2.21 dit qu'il est d'intérieur vide (car il est fermé et σ -invariant). Donc, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V)$ est maigre. \square

Cette proposition nous permet de généraliser la proposition 2.7.5.

Corollaire 2.7.7. *Pour une suite \mathfrak{F} d'AC, le domaine de tout attracteur sous-décalage est ouvert dense.*

Il y a des quasi-attracteurs qui ne sont pas des attracteurs et ont des domaines d'attractions comaignes.

Exemple 2.7.8. *On reprend l'exemple 1 de l'exemple 2.3.3, on définit \mathbf{Min} sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ par*

$$\mathbf{Min}(x)_i = \min(x_i, x_{i+1}).$$

$\{\infty 0^\infty\} = \bigcap_{k \geq 0} V_k$, où $V_k = \Omega_{\mathbf{Min}}([0]_k) = \{x \in \Omega_{\mathbf{Min}} \mid \forall i \leq k, x_i = 0\}$ est un attracteur mais il n'est pas un sous-décalage, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. $\{\infty 0^\infty\}$ est l'unique quasi-attracteur (voir [43]).

Le domaine d'attraction de $\{\infty 0^\infty\}$ est $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \mid \exists i \geq k, x_i = 0\}$. Il est comaigne.

On sait que tout domaine dense contient l'ensemble des points d'équicontinuité. Par ailleurs, si un attracteur sous-décalage est inclus dans l'ensemble des points d'équicontinuité, alors son domaine aussi.

Remarque 2.7.9. *D'après la proposition 1.1.6, dans un SD uniforme, si un attracteur est inclus dans l'ensemble des points d'équicontinuité, alors son domaine aussi. En particulier, on peut déduire de la proposition 1.2.11 le résultat suivant : le domaine de tout attracteur sous-décalage équicontinu est exactement l'ensemble des points d'équicontinuité.*

Dans la figure 2.2 : Les AC Min , Min , Id , σ , σMin et C sont définis sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ par :

$$Min(x)_i = \min(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}), \mathbf{Min}(x)_i = \min(x_i, x_{i+1}), Id(x)_i = x_i, \sigma(x)_i = x_{i+1},$$

$$\sigma \mathbf{Min}(x)_i = \min(x_{i+1}, x_{i+2}), C(x)_i = x_i + x_{i+1}(x_{i+2} + 1) \pmod{2}.$$

Les AC $F_1 = Id \times Min$, $F_2 = Id \times \mathbf{Min}$ et $F_3 = Id \times \sigma \mathbf{Min}$ sont définis sur $(\{0, 1\} \times \{0, 1\})^{\mathbb{Z}}$ par :

$$F_1(x, y)_i = (x_i, \min(y_{i-1}, y_i, y_{i+1})), F_2(x, y)_i = (x_i, \min(y_i, y_{i+1})),$$

$$F_3(x, y)_i = (x_i, \min(y_{i+1}, y_{i+2})).$$

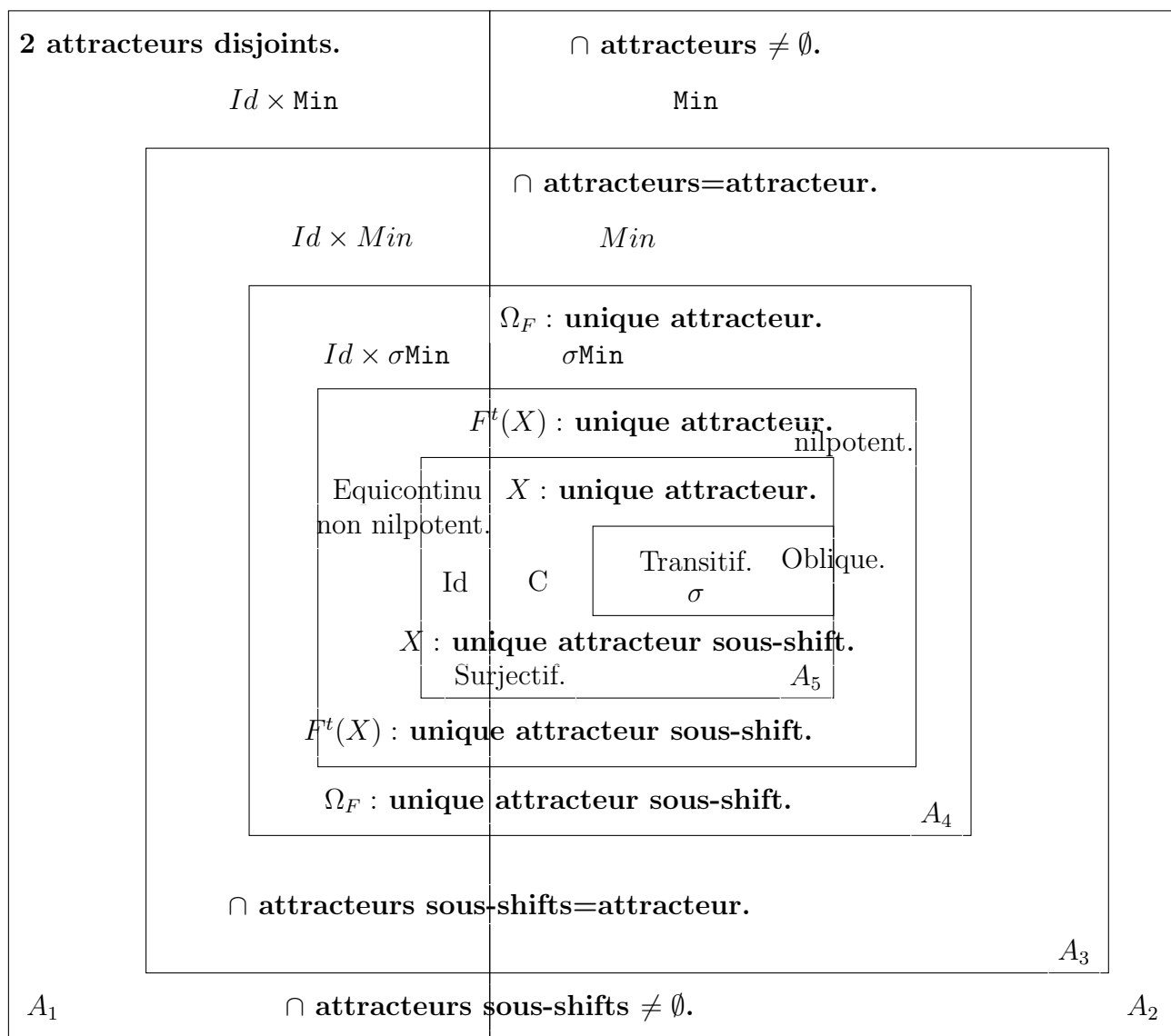


FIGURE 2.2 – Classification des AC selon les attracteurs.

CHAPITRE 3

DYNAMIQUE DIRECTIONNELLE

La dynamique directionnelle s'intéresse à la dynamique d'un automate cellulaire sous l'action d'un décalage. Étudier la dynamique d'un automate cellulaire F sous l'action d'un décalage, c'est étudier la dynamique de la suite d'automates cellulaires $(F^t \sigma^{h(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ telle que h est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{Z} appelée direction.

Dans ce chapitre, nous voyons le lien entre l'invariance par décalage et l'invariance par direction. Ensuite, nous montrons qu'il existe un ensemble fini de domaine d'attraction dense lorsque l'automate cellulaire est quasi-équicontinu en deux directions. Enfin, nous montrons que tout automate cellulaire dans une direction supérieure à son rayon est faiblement semi-mélangeant.

3.1 Définitions

On appelle **direction** une application $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ à variations bornées, c'est-à-dire : $M_h = \sup_{t \in \mathbb{N}} |h(t+1) - h(t)|$ est fini. Cette application vise à donner une position dans l'espace pour chaque pas de temps.

D'après [21], l'**AC F en direction h** est la suite $(F^t \sigma^{h(t)})_{t \in \mathbb{N}}$. En général, la dynamique directionnelle d'un AC peut être lue sur son diagramme espace-temps, en suivant h comme une courbe en allant dans la direction de temps. Le formalisme comprend celui de [62] : une direction **linéaire** est $h : t \mapsto \lfloor \alpha t \rfloor$, pour le même nombre réel α . Dans ce cas, on écrit $(F^t \sigma^{\lfloor \alpha t \rfloor})_{t \in \mathbb{N}}$ et on dit que l'AC F est en direction α .

Directions à variations bornées. L'ensemble des directions à variations bornées est noté \mathcal{B} . Pour $h, h' \in \mathcal{B}$.

- On note $h \preceq h'$ s'il existe $M > 0$ tel que

$$h(t) \leq h'(t) + M \text{ pour tout } t \in \mathbb{N}.$$

- On note $h \prec h'$ si, de plus $h' \not\preceq h$. \preceq est une relation de préordre sur \mathcal{B} , et on note \sim la relation d'équivalence correspondante.
- On note aussi

$$h \ll h' \text{ si } \lim_{t \rightarrow \infty} h'(t) - h(t) = +\infty.$$

\ll est une relation transitive qui est plus fine que \prec .

- Le préordre \preceq induit une notion d'**intervalle** de direction (fermé, ouvert, semi-ouvert), avec certaines bornes $h' \preceq h''$, notés $[h', h'']$, $]h', h''[$, $[h', h''[$, $]h', h'']$.

On dit que l'intervalle est **non dégénéré** si $h' \prec h''$.

- Pour un intervalle $S \subseteq \mathcal{B}$ de bornes h' et h'' , on note aussi

$$\mathcal{I}(S) = \{h \in \mathcal{B} \mid h' \ll h \ll h''\} \subset]h', h''[.$$

Mémoires et anticipations. Soit F un AC de mémoire $\mathbf{r}_- \in \mathbb{Z}$ et d'anticipation $\mathbf{r}_+ \in \mathbb{Z}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{N}$, F^t peut être défini par une règle locale de mémoire $\mathbf{r}_- t$ et d'anticipation $\mathbf{r}_+ t$.
- Pour une suite d'AC $(F_t)_{t \in \mathbb{N}}$, notons $\mathbf{r}_-(t)$ et $\mathbf{r}_+(t)$ la mémoire et l'anticipation minimales possibles pour F_t et nous les appelons la **mémoire itérée** et l'**anticipation itérée**. Formellement,

$$\mathbf{r}_-(t) = \sup \{i \in \mathbb{Z} \mid \forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, x_{[i, +\infty[} = y_{[i, +\infty[} \implies F_t(x)_0 = F_t(y)_0\}$$

et

$$\mathbf{r}_+(t) = \inf \{i \in \mathbb{Z} \mid \forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, x_{]-\infty, i]} = y_{]-\infty, i]} \implies F_t(x)_0 = F_t(y)_0\}.$$

Equicontinuité.

- Un mot $u \in A^*$ est **bloquant à droite** pour un AC F en direction h s'il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\forall x, y \in [u]_s, x_{]-\infty, s]} = y_{]-\infty, s]} \implies \forall t \in \mathbb{N}, F^t(x)_{]-\infty, h(t)]} = F^t(y)_{]-\infty, h(t)]}.$$

De la même façon, on définit les mots **bloquants à gauche**.

- Un mot $u \in A^*$ est **M -bloquant** pour un AC F selon h s'il existe un offset $s \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall x, y \in [u]_s, \forall t \in \mathbb{N}, F^t(x)_{[0, M]} = F^t(y)_{[0, M]},$$

3.1. DÉFINITIONS

où $M = \max(-\mathbf{r}_- + \max_t(h(t) - h(t+1)), \mathbf{r}_+ + \max_t(h(t+1) - h(t)))$ et \mathbf{r}_- et \mathbf{r}_+ sont la mémoire et l'anticipation de F .

La terminologie vient du fait que dans ce cas, u est bloquant à gauche et à droite (avec le même offset).

En particulier, un mot $u \in A^*$ avec $|u| \geq s$ est dit s -bloquant pour un AC F selon la direction α s'il existe un offset $p \in \llbracket 0, |u| - s \rrbracket$ tel que

$$\forall x, y \in [u]_0, \forall t \geq 0, \sigma^{\lfloor t\alpha \rfloor} F^t(x)_{\llbracket p, p+s \rrbracket} = \sigma^{\lfloor t\alpha \rfloor} F^t(y)_{\llbracket p, p+s \rrbracket} .$$

La proposition suivante explique comment l'équicontinuité dans les automates cellulaires en direction quelconque peut être reformulée en termes de mots bloquants. Le cas vertical remonte à [42, 43], les directions linéaires à [62], les directions à variations bornées à [21], et le cas général peut être trouvé dans les preuves de [20, Prop 3.1.3, Cor 3.1.4].

Proposition 3.1.1 ([21]). *Soient F un AC et h une direction.*

1. *S'il existe un mot bloquant à gauche et à droite u pour F en direction h , alors $\mathcal{E}_{F,h}$ contient l'ensemble comaigne des configurations où u apparaît une infinité de fois des deux côtés.*
2. *Si non, F est sensible en direction h .*

Autrement dit, dans le cas de variation bornée, $\mathcal{E}_{F,h}$ est soit vide soit comaigne. La question est ouverte si cela reste vrai dans le cas de variation non bornée (voir [20, Remark 3.1.1]).

Il n'est pas difficile d'être convaincu que les propriétés d'équicontinuité sont préservées par \sim .

Remarque 3.1.2. *Soit F un AC sur $A^{\mathbb{Z}}$ et $h, h' \in \mathcal{B}$. Si $h \sim h'$, alors $\mathcal{E}_{F,h} = \mathcal{E}_{F,h'}$.*

En particulier, F est quasi-équicontinu (resp. équicontinu) selon h si et seulement si F est quasi-équicontinu (resp. équicontinu) selon h' .

Démonstration. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $-M + h(t) \leq h'(t) \leq h(t) + M, \forall t \in \mathbb{N}$. Soit $l \in \mathbb{N}$ et $x \in A^{\mathbb{Z}}$. On va montrer que si $x \in A^{\mathbb{Z}}$ est 2^{-M-l} -stable selon h , alors il est 2^{-l} -stable selon h' . Donc, on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall y \in A^{\mathbb{Z}}, x_{\llbracket -k, k \rrbracket} = y_{\llbracket -k, k \rrbracket} &\implies \\ \forall t \in \mathbb{N}, F^t \sigma^{h(t)}(x)_{\llbracket -M-l, M+l \rrbracket} = F^t \sigma^{h(t)}(y)_{\llbracket -M-l, M+l \rrbracket} & . \\ \forall y \in A^{\mathbb{Z}}, x_{\llbracket -k, k \rrbracket} = y_{\llbracket -k, k \rrbracket} &\implies \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{N}, F^t(x)_{[-M-l+h(t), M+l+h(t)]} = F^t(x)_{[-M-l+h(t), M+l+h(t)]}.$$

Par hypothèse, on obtient

$$[-l + h'(t), l + h'(t)] \subseteq [-M - l + h(t), M + l + h(t)], \forall t \in \mathbb{N}. \text{ Ainsi,}$$

$$\forall y \in A^{\mathbb{Z}}, x_{[-k, k]} = y_{[-k, k]} \implies$$

$$\forall t \in \mathbb{N}, F^t \sigma^{h'(t)}(x)_{[-l, l]} = F^t \sigma^{h'(t)}(x)_{[-l, l]}$$

qui est exactement 2^{-l} -stabilité de x . Donc, si x est un point d'équicontinuité selon h , alors x est un point d'équicontinuité selon h' . La réciproque est symétrique. \square

Classification dynamique selon une direction. Dans [21], on a proposé une classification des automates cellulaires similaire à la classification de Kůrka pour le cas de la direction verticale.

Théorème 3.1.3. [62, 21] *Tout AC F de mémoire \mathbf{r}_- et d'anticipation \mathbf{r}_+ , satisfait une seule des conditions suivantes :*

1. F est nilpotent pour tout $h \in \mathcal{B}$.
2. F est équicontinu selon une seule direction $h' \in [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$ et sensible pour $h \neq h'$.
3. F est strictement quasi-équicontinu dans un intervalle non dégénéré $S \subseteq [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$ et sensible pour tout $h \notin S$.
4. F est strictement quasi-équicontinu selon une seule direction $h' \in [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$ et sensible pour $h \neq h'$.
5. F est sensible pour tout $h \in \mathcal{B}$.

3.2 Invariance

Nous avons déjà vu dans la remarque 3.1.2 que les propriétés d'équicontinuité sont préservées par \sim . C'est aussi le cas pour les ensembles asymptotiques, comme indiqué dans la remarque suivante ; l'ensemble limite et le domaine direct sont invariants par direction à condition que l'ensemble considéré soit fortement invariant par décalage.

Remarque 3.2.1. *Soient F un AC, $V, U \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ fortement invariants par décalage, $V_t \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ des fermés fortement invariants par décalage pour $t \in \mathbb{N}$ et $h, h' \in \mathcal{B}$.*

1. $\mathfrak{D}_{F,h}((V_t)_t) = \mathfrak{D}_{F,h'}((V_t)_t)$.
2. $\Omega_{F,h}(U) = \Omega_{F,h'}(U)$.
3. Si $h \sim h'$, $\omega_{F,h}(U) = \omega_{F,h'}(U)$.
4. Si $h \sim h'$, $\mathcal{D}_{F,h}(V) = \mathcal{D}_{F,h'}(V)$

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathfrak{D}_{F,h}((V_t)_t)$, il existe $T \in \mathbb{N}$ pour tout $t > T$, $F^t \sigma^{h(t)}(x) \in V_t$. Par hypothèse, on obtient que $F^t \sigma^{h'(t)}(x) \in V_t$ pour tout autre $h' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$.
2. $\Omega_{F,h}(U) = \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{t \geq T} F^t \sigma^{h(t)}(U)} = \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{t \geq T} F^t(U)} = \Omega_F(U)$.
3. Soit $y \in \omega_{F,h}(U)$; $\exists x \in U$ et une suite croissante $(n_k)_k$ tels que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^{n_k} \sigma^{h(n_k)}(x) = y.$$

Puisque $h \sim h'$, $(h(t) - h'(t))$ est bornée, pour $t \in \mathbb{N}$. On en déduit qu'il existe une sous-suite $(m_k)_k$ de $(n_k)_k$ telle que $(h(m_k) - h'(m_k))$ est constante, on pose $h(m_k) - h'(m_k) = q$, $q \in \mathbb{Z}$. Donc, $F^{m_k} \sigma^{h'(m_k)}(\sigma^q(x)) = F^{m_k} \sigma^{h(m_k)}(x)$ tend vers y quand k tend vers l'infini. Puisque U est σ -invariant, U contient $\sigma^q(x)$, de sorte que $y \in \omega_{F,h'}(U)$.

4. Ceci peut être directement dérivé des définitions et du point précédent. □

Pour un AC, l'ensemble asymptotique, selon n'importe quelle direction, d'un ensemble invariant par décalage est aussi invariant par décalage et par cet AC.

Proposition 3.2.2. *Soient F un AC, h une direction, et U σ -invariant. Alors*

$$F(\omega_{F,h}(U)) = \sigma(\omega_{F,h}(U)) = \omega_{F,h}(U).$$

Démonstration. Par le point 1 de la proposition 2.7.6, on sait que $\omega_{F,h}(U)$ est σ -invariant, et puisque F commute avec σ , on a que

$$\forall t \geq 1, F \sigma^{h(t) - h(t-1)}(\omega_{F,h}(U)) = F(\omega_{F,h}(U)).$$

Par la proposition 1.2.4 (appliquée à $j = 1$ et $G_t = F \sigma^{h(t) - h(t-1)}$, de sorte que $\{G_t | t \in \mathbb{N}\}$ est fini), on obtient que pour tous $y, z \in \omega_{F,h}(U)$, $F \sigma^k(y) \in$

$\omega_{F,h}(U)$ pour un certain k , et $z = F\sigma^l(x)$ pour un certain l et un certain $x \in \omega_{F,h}(U)$. □

Tout domaine invariant par décalage est une union finie de classes asymptotiques si son ensemble asymptotique est fini.

Corollaire 3.2.3. *Soient F un AC, h une direction et U tel que $V = \omega_{F,h}(U)$ est fini et $U = \mathcal{D}_{F,h}(V)$ est fortement σ -invariant. Alors F induit une bijection de V , et $U = \bigsqcup_{y \in V} \mathcal{A}_{F,h}(y)$.*

Démonstration. Par la proposition 3.2.2, on voit que $F(V) = V$, de sorte que F induit une surjection, donc une bijection de V .

Par la proposition 1.2.14, il y a au maximum $|V|$ classes asymptotiques dans U .

Par le premier point, $V \subseteq U$, de sorte que chaque $y \in V$ devrait être dans une de ces classes.

Par la remarque 1.1.1, ils sont tous dans des classes distinctes. Donc, on obtient $U \supseteq \bigsqcup_{y \in V} \mathcal{A}_{F,h}(y)$.

L'inclusion inverse est triviale. □

3.3 Quasi-équicontinuité en deux directions

Si un AC a deux directions différentes de quasi-équicontinuité, on va montrer qu'il existe une orbite périodique telle que son domaine direct est dense selon toutes les directions, et son domaine d'attraction est d'intérieur non vide selon les directions qui sont strictement entre les deux directions de quasi-équicontinuité.

Pour simplifier l'étude, on va commencer par les directions linéaires et on va voir que les mêmes résultats restent valables lorsque les directions sont quelconques.

3.3.1 Quasi-équicontinuité en deux directions linéaires

Proposition 3.3.1. *Considérons un AC $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ qui a deux directions $\alpha < 0$ et $\alpha' > 0$ de quasi-équicontinuité. Alors, il existe $a \in A$ tel que :*

1. *En toute direction $\beta \in]\alpha, \alpha'[: \mathcal{D}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ est comaigne et $\mathfrak{d}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ est dense.*
2. *En toute direction $\beta : \mathfrak{d}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ est dense.*

3.3. QUASI-ÉQUICONTINUITÉ EN DEUX DIRECTIONS

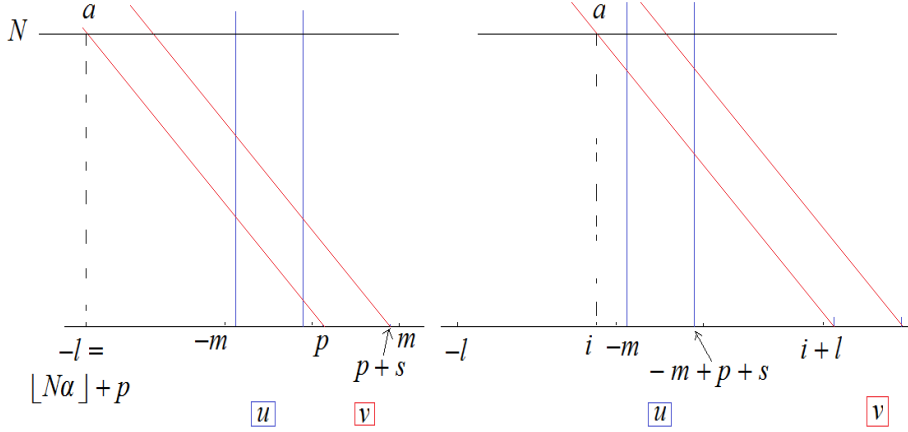


FIGURE 3.1 – Quasi-équicontinuité en 2 directions linéaires.

3. En directions α et α' : $\mathcal{D}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ est comaigne.

Démonstration.

1. En toute direction $\beta \in]\alpha, \alpha'[$: Soient $u \in A^m, v \in A^m$ tels que

$$\forall x, y \in [u]_{-m}, \forall t \geq 0, F^t(x)_{[-m+p, -m+p+s[} = F^t(y)_{[-m+p, -m+p+s[} .$$

$$\forall x, y \in [v]_0, \forall t \geq 0, \sigma^{[t\alpha]} F^t(x)_{[p, p+s[} = \sigma^{[t\alpha]} F^t(y)_{[p, p+s[} .$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $-l := \lfloor N\alpha \rfloor + p < -m$ (i.e., $N = -\lfloor \frac{l+p}{\alpha} \rfloor$) (la partie gauche de la figure 3.1). $\exists a \in A, \forall y \in [v]_0$ on a

$$\sigma^{[N\alpha]} F^N(y)_p = F^N(y)_{-l} = a .$$

Pour $i \in \mathbb{Z}$ donné, on prend une configuration x (la partie droite de la figure 3.1) telle que $x \in [u]_{-m} \cap [v]_{i+l}$. Comme $x \in [v]_{i+l}$, $\sigma^{i+l}(x) \in [v]_0$. Donc, $F^N(\sigma^{i+l}(x))_{-l} = F^N(x)_i = a$. Comme u est un mot bloquant,

$$\forall i \in \llbracket -l, -m+p+s \llbracket, \exists z \in A^{i+l} v A^{\mathbb{N}}, \forall z' \in A^{-\mathbb{N}}, F^N(z' u z)_i = a$$

$$\iff \forall i \in \llbracket -l, -m+p+s \llbracket, \exists z \in A^{\mathbb{N}}, \forall x \in [u]_{-m}, F^N(x \llbracket_{-\infty, 0} z)_i = a .$$

a ne dépend pas de z , alors $\forall i \in \llbracket -l, -m+p+s \llbracket, \forall x \in [u]_{-m}, F^N(x)_i = a$. Donc,

$$\forall l, \exists N, a, \forall x \in [u]_{-m}, F^N(x) \in [a^{l-m+p+s}]_{-l} .$$

Puisque F est aussi quasi-équicontinu en direction strictement positive $\alpha' > 0$, alors

$$\forall l, \exists N, a, \forall x \in [u]_{-m}, F^N(x) \in [a^{2l+1}]_{-l}.$$

Donc, $[u] \subseteq \mathcal{D}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$; $\mathcal{D}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ est d'intérieur non vide et comme $\mathcal{O}_F(\infty a^\infty)$ est σ -invariant, $\mathcal{D}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ aussi. Par la proposition 1.2.11, $\mathcal{D}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ est comaire. Puisque $\mathcal{D}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ est d'intérieur non vide et $\mathcal{O}_F(\infty a^\infty)$ est un SFT, $\mathfrak{d}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ est dense, d'après le point 3 de la proposition 2.7.6.

2. En toute direction : $\mathfrak{d}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ est dense, alors il est dense dans toutes les directions, d'après la remarque 3.2.1.
3. En directions α et α' : $\mathfrak{d}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ est dense, alors $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$, d'après la proposition 1.2.11. Autrement dit, $\mathcal{D}_F(\mathcal{O}_F(\infty a^\infty))$ est comaire. \square

3.3.2 Quasi-équicontinuité en deux directions quelconques

Voici le principal lemme pour comprendre la dynamique directionnelle. Il est basé sur le fait que si un mot u est bloquant selon $h' \in \mathcal{B}$, et s' est le offset minimal correspondant, alors en particulier pour tout $t \in \mathbb{N}$ il existe $a_{u,h'}(t) \in A$ tel que

$$\forall z \in [u]_{s'}, a_{u,h'}(t) = F^t(z)_{h'(t)}.$$

Lemme 3.3.2. *Soit F un AC sur $A^\mathbb{Z}$ de mots bloquants u selon $h' \in \mathcal{B}$ avec offset $s' \in \mathbb{Z}$ et v selon $h'' \in \mathcal{B}$ avec offset $s'' \in \mathbb{Z}$, et $q' = h' + |v| - s'$ et $q'' = h'' - s''$. Alors, pour tout $z \in [v]_0$ et $j \in \llbracket q'(t), q''(t) \rrbracket$, $F^t(z)_j = a_{u,h'}(t)$.*

Bien sûr la même chose est vraie pour $[u]$. L'énoncé suivant est direct, par définition. Bien sûr l'énoncé symétrique est valable pour les mots bloquants à droite.

Remarque 3.3.3.

1. Par définition, on peut voir que si u est bloquant pour un AC F selon la direction h , alors tout mot contenant u est aussi bloquant.
2. Si deux directions sont quasi-équicontinues, la proposition 3.1.1 déclare qu'ils admettent des mots bloquants u et v . D'après le point précédent, ils admettent un mot bloquant commun uv .
3. Par définition, on peut voir que : si u est un mot bloquant à droite pour un AC F selon les directions h' et h'' , alors aussi selon toute direction $h \succ \min(h', h'')$.

3.3. QUASI-ÉQUICONTINUITÉ EN DEUX DIRECTIONS

4. D'après le point précédent et l'énoncé symétrique, si u est bloquant à droite et à gauche selon les directions h' et h'' , alors aussi selon toute direction $h \in [\min(h', h''), \max(h', h'')]$.
5. En particulier, le blocage à droite et à gauche sont conservés par \sim (qui n'est pas le cas de blocage fort).

Preuve du lemme 3.3.2. Puisqu'ils sont bloquants à droite et bloquants à gauche, respectivement, pour tout $t \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x, y \in [u]_{s'}, x_{\llbracket s', +\infty \llbracket} = y_{\llbracket s', +\infty \llbracket} \implies F^t(x)_{\llbracket h'(t), +\infty \llbracket} = F^t(y)_{\llbracket h'(t), +\infty \llbracket} \\ \forall x, y \in [v]_{s''}, x_{\llbracket -\infty, s'' \llbracket} = y_{\llbracket -\infty, s'' \llbracket} \implies F^t(x)_{\llbracket -\infty, h''(t) \llbracket} = F^t(y)_{\llbracket -\infty, h''(t) \llbracket} . \end{array} \right.$$

Par définition,

$$\forall z \in [u]_{s'}, a_{u, h'}(t) = F^t(z)_{h'(t)} .$$

Maintenant, soit $j \in \llbracket q'(t), q''(t) \llbracket$, de telle sorte qu'il existe une configuration $y \in [v]_0 \cap [u]_{j-h'(t)+s'}$ telle que

$$y_{\llbracket -\infty, 0 \llbracket} = z_{\llbracket -\infty, 0 \llbracket} .$$

Puisque $\sigma^{j-h'(t)}(y)$ est dans $[u]_{s'}$ et u est bloquant à gauche selon h' , on obtient :

$$F^t(y)_j = a_{u, h'}(t) .$$

D'une autre part, puisque v est bloquant à droite selon h'' ,

$$\forall t \in \mathbb{N}, F^t(z)_{\llbracket -\infty, h''(t)-s'' \llbracket} = F^t(y)_{\llbracket -\infty, h''(t)-s'' \llbracket} .$$

En particulier, on obtient que $F^t(z)_j = F^t(y)_j = a_{u, h'}(t)$. □

Grâce au lemme précédent, on va montrer que l'image de n'importe quelle configuration contenant un mot bloquant, à partir d'un certain temps, devient une configuration monochrome.

Proposition 3.3.4. *Soit F un AC de mot bloquant u selon deux directions différentes h' et h'' , avec $h'' \not\leq h'$. Selon toute direction $h \in \mathcal{B}$, le domaine direct $\mathfrak{D}_{F, h}((\infty a_{u, h'}(t)^\infty)_t)$ contient toutes les configurations σ -périodiques où u apparaît; De plus, le domaine $\mathcal{D}_{F, h}((\infty a_{u, h'}(t)^\infty)_t)$ contient :*

1. Toutes les configurations où u apparaît une infinité de fois à gauche et à droite, si $h' \preceq h \preceq h''$;
2. Toutes les configurations où u apparaît une infinité de fois à droite, si

$$h' \ll h \preceq h'' ;$$

3. Toutes les configurations où u apparaît une infinité de fois à gauche, si $h' \preceq h \ll h''$;

4. Toutes les configurations où u apparaît, si $h' \ll h \ll h''$.

Démonstration. Considérons une configuration $z \in [u]_i$, pour un certain $i \in \mathbb{Z}$, avec une certaine σ -période $p \geq 1$. Soient q' et q'' comme dans le lemme 3.3.2. puisque $q'' \sim h'' \not\preceq h' \sim q'$, il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que $q'(T) \leq q''(T) + p$. Le lemme 3.3.2 dit donc que

$$F^T(z)_j = a_{u,h'}(T) \text{ pour tout } j \in \llbracket i + q'(T), i + q''(T) \rrbracket,$$

et, par périodicité, pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Cela signifie que $F^T(z)$ est monochrome, et c'est clair qu'elle reste monochrome pour $t \geq T$. Puisque, par définition, $a_{u,h'}(t)$ apparaît dans $F^t(z)$, on en déduit que $F^t(z) = {}^\infty a_{u,h'}(t)^\infty$.

1. Du point 4 de la remarque 3.3.3, u est bloquant à droite et à gauche selon tout $h \in [\min(h', h''), \max(h', h'')]$. Donc de la proposition 3.1.1, les configurations avec une infinité occurrences de u à gauche et à droite sont équicontinues.

De la proposition 1.2.11 et du point précédent $\mathcal{D}_{F,h}({}^\infty a_{u,h'}(t)^\infty)_t \supseteq \mathfrak{D}_{F,h}({}^\infty a_{u,h'}(t)^\infty)_t$ est dense, ces configurations équicontinues doivent aussi être dans $\mathcal{D}_{F,h}({}^\infty a_{u,h'}(t)^\infty)_t$.

2. Soient $z \in \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \geq i} [u]_j$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $h \preceq h'' \sim q''$, alors il existe $j \geq \max_{t \in \mathbb{N}} h(t) - q''(t) + n$ tel que $z \in [u]_j$.

Si $q' \sim h' \ll h$, alors il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que $\forall t \geq T, q'(t) + j \leq h(t) - n$.

Du lemme 3.3.2 et de ces inégalités,

pour tout $t \geq T$, le motif $F^t(z)_{\llbracket h(t)-n, h(t)+n \rrbracket}$ est monochrome. Puisque c'est vrai pour tout n , chaque valeur d'adhérence de l'orbite doit être monochrome.

3. Ce cas est symétrique au précédent.

4. Soit $z \in [u]_j$ pour certains $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $q' \sim h' \ll h \ll h'' \sim q''$, alors il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \geq T$,

$$h(t) + n \leq q''(t) + j \text{ et } q'(t) + j \leq h(t) - n .$$

Du lemme 3.3.2 et de ces inégalités,
pour tout $t \geq T$, le motif $F^t(z)_{\llbracket h(t)-n, h(t)+n \rrbracket}$ est monochrome. \square

Le domaine selon les directions de quasi-équicontinuité est non seulement dense, mais aussi comaigne, d'après la proposition 1.2.11.

3.4 Directions obliques

Définition 3.4.1. On dit qu'une direction h est **oblique** pour une suite d'AC $(F_t)_t$ si

$$h \notin [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-] .$$

La proposition suivante est une généralisation de la proposition 2.6.5.

Proposition 3.4.2. Si $(F_t)_t$ est une suite d'AC et h est une direction oblique, alors le SD $(F_t \sigma^{h(t)})_t$ est faiblement semi-mélangeant.

Démonstration. Il suffit de prouver la propriété pour $U = [u]_n$ un cylindre, $V = [v]_m$ et $V' = [v']_{m'}$ deux cylindres de motifs apparaissant dans $\Omega_{F,h}$, avec $m, m', n \in \mathbb{Z}$.

En prolongeant v et/ou v' (dans un motif qui apparaît toujours dans l'ensemble limite), on peut supposer qu'ils ont la même longueur et que $m = m'$.

Supposons, sans perte de généralité, que h est oblique à gauche : $-\mathbf{r}_- \prec h$; en particulier, il existe $T \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbf{r}_-(T) + h(T) + m > n + |u| .$$

$F_T \sigma^{h(T)}$ est un AC de mémoire $\mathbf{r}_-(T) + h(T)$ et d'anticipation $\mathbf{r}_+(T) + h(T)$:

$$\exists w_T \in A^{|\mathbf{r}_+(T) - \mathbf{r}_-(T)|}$$

tel que

$$F_T^{-1}([v]_m) \supseteq [w_T]_{\mathbf{r}_-(T) + h(T) + m} .$$

Par ailleurs, il existe $T \in \mathbb{N}$ et $y \in A^{\mathbb{Z}}$ tels que $y \in [u]_n \cap [w_T]_{\mathbf{r}_-(T) + h(T) + m}$.
La même chose est vraie pour v' (pour le même T). \square

En particulier, tout automate cellulaire en direction oblique est faiblement semi-mélangeant.

La remarque suivante montre que, dans le cas d'une seule direction d'équicontinuité (à équivalence \sim près), la mémoire itérée est équivalente à l'anticipation itérée.

Remarque 3.4.3.

1. Pour tout $t \in \mathbb{N}$, $-\infty < \mathbf{r}_-(t) \leq \mathbf{r}_+(t) < +\infty$, si et seulement si F_t n'est pas une fonction constante.
2. $(F_t \sigma^{h(t)})_{t \in \mathbb{N}}$ est équicontinu si et seulement si $\mathbf{r}_+ \preceq -h \preceq \mathbf{r}_-$ (en particulier, si F_t n'est jamais constant, $h \sim -\mathbf{r}_- \sim -\mathbf{r}_+$).

Dans le cas uniforme, F_t est constant si et seulement si l'AC est nilpotent.

Démonstration.

1. La première déclaration est directe de la continuité de F_t .
2. Si $(F_t \sigma^{h(t)})_t$ est équicontinu, alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$x, y \in A^{\mathbb{Z}}, x_{\llbracket -r, r \rrbracket} = y_{\llbracket -r, r \rrbracket} \implies F_t \sigma^{h(t)}(x)_0 = F_t \sigma^{h(t)}(y)_0.$$

Puisque F commute avec σ ,

$$x_{\llbracket -r-h(t), r-h(t) \rrbracket} = y_{\llbracket -r-h(t), r-h(t) \rrbracket} \implies F_t(x)_0 = F_t(y)_0.$$

On obtient que $-r - h(t) \leq \mathbf{r}_-(t)$ et $\mathbf{r}_+(t) \leq r - h(t)$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{N}, \mathbf{r}_+(t) \leq M - h(t) \text{ et } -h(t) \leq M + \mathbf{r}_-(t).$$

Et soit $l \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{N}$ et $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ tels que $x_{\llbracket -l-M, l+M \rrbracket} = y_{\llbracket -l-M, l+M \rrbracket}$, considérons la configuration $z \in A^{\mathbb{Z}}$ telle que $z_i = x_i$ pour tout $i \in \llbracket -\infty, l+M \rrbracket$ et $z_i = y_i$ pour tout $i \in \llbracket -l-M, +\infty \rrbracket$. Par les inégalités supposées, on a

$$x_{\llbracket -\infty, l+\mathbf{r}_+(t)+h(t) \rrbracket} = z_{\llbracket -\infty, l+\mathbf{r}_+(t)+h(t) \rrbracket} \text{ et}$$

$$z_{\llbracket -l+\mathbf{r}_-(t)+h(t), +\infty \rrbracket} = y_{\llbracket -l+\mathbf{r}_-(t)+h(t), +\infty \rrbracket}$$

de sorte que

$$F_t \sigma^{h(t)}(x)_{\llbracket -l, l \rrbracket} = F_t \sigma^{h(t)}(z)_{\llbracket -l, l \rrbracket} = F_t \sigma^{h(t)}(y)_{\llbracket -l, l \rrbracket}.$$

Cela prouve l'équicontinuité de $(F_t \sigma^{h(t)})_t$. La conséquence entre parenthèses vient du premier point. \square

Dans le cas d'un seul AC, nous avons vu que $\mathbf{r}_-(t) \geq \mathbf{r}_- t$ et $\mathbf{r}_+(t) \leq \mathbf{r}_+ t$.

CHAPITRE 4

L'ENSEMBLE LIMITE GÉNÉRIQUE

J. Milnor a défini implicitement l'ensemble limite générique, qui est le plus petit fermé de domaine d'attraction comeagre. Intuitivement, l'ensemble limite générique capture le comportement asymptotique des orbites de presque tous les points dans l'espace, au sens de Baire : on veut parler du comportement asymptotique qu'on observe vraiment.

Dans ce chapitre, nous formalisons ce concept et étudions quelques-unes de ses propriétés topologiques, et les liens avec l'équicontinuité et la sensibilité en utilisant les résultats obtenus aux trois chapitres précédents. Nous comparons aussi l'ensemble limite générique avec d'autres ensembles qui décrivent le comportement asymptotique des systèmes dynamiques, et nous terminons ce chapitre par quelques exemples. Le résultat principal de ce chapitre est la classification des automates cellulaires basée sur leurs ensembles limites génériques dans différentes directions.

4.1 L'ensemble limite générique des SD

J. Milnor [54] a suggéré la définition suivante :

Définition 4.1.1 ([54]). *Étant donné un SD \mathfrak{F} , l'ensemble limite générique $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est l'intersection de tous les fermés qui ont un domaine d'attraction comeagre.*

L'ensemble limite générique $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ peut être défini comme le plus petit fermé qui a un domaine comeagre, grâce à la proposition suivante.

Proposition 4.1.2. *Soit \mathfrak{F} un SD. Le domaine de l'ensemble limite générique est comaigne.*

Autrement dit, il est le plus petit fermé qui inclut tous les points limites de toutes les orbites *génériques*.

Démonstration. Tout espace métrique compact admet une base dénombrable : il existe un ensemble dénombrable $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ de fermés tel que tout fermé U peut s'écrire comme

$$\bigcap_{i \in I_U} U_i \text{ pour un certain } I_U \subseteq \mathbb{N}.$$

En particulier, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est l'intersection $\bigcap_U \bigcap_{i \in I_U} U_i$, où U s'étend sur les ensembles fermés qui ont un domaine comaigne, c'est-à-dire $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = \bigcap_{i \in I} U_i$, où I est l'union de I_U , pour tout U admettant un domaine comaigne.

Si i est dans I , alors il est dans un certain I_U tel que $U \subseteq U_i$, où U a un domaine comaigne, de sorte que U_i a aussi un domaine comaigne. Par le point 5 de la remarque 1.2.7,

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}) = \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(U_i).$$

On sait qu'une intersection dénombrable d'ensembles comaignes est comaigne. Donc, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}})$ est comaigne. \square

Notons que l'ensemble limite générique est la clôture de l'ensemble asymptotique d'un certain ensemble comaigne, mais peut n'être l'ensemble asymptotique d'aucun ensemble : voir l'exemple 4.4.4, où l'ensemble limite générique est plein, mais n'est pas l'ensemble asymptotique.

Lemme 4.1.3. *Soient (X, \mathcal{F}) un SD sur x et $V \subseteq X$.*

1. *Si V est ouvert et intersecte $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$, alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$ est non maigre. En particulier, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$ est non maigre et il existe un ouvert non vide U dans lequel $\bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(V)$ est dense, pour tout $T \in \mathbb{N}$.*
2. *Si V n'intersecte pas $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$, alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$ est maigre. En particulier, si V est fermé, alors $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$ est maigre, et il n'existe aucun ouvert non vide U dans lequel $\bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(V)$ est dense, pour tout $T \in \mathbb{N}$.*

4.1. L'ENSEMBLE LIMITE GÉNÉRIQUE DES SD

Il y a des contre-exemples pour lequel ce lemme ne peut pas être déclaré comme une équivalence : on prend, par exemple un ouvert $V =]0, 1[$ dans un SD uniforme défini par $F_t(x) = x/2^t$ pour $x \in [0, 1]$.

Démonstration.

- Si V est ouvert et intersecte $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$, alors $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} \setminus V = \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} \cap V^C$ est fermé. Comme, l'ensemble limite générique est minimal, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} \setminus V)$ n'est pas comaigne. De plus, il est égal à $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}) \cap \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V^C)$. Donc, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V^C)$ n'est pas comaigne non plus. D'après la remarque 1.2.9, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C \subseteq \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$. Donc, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$ est aussi non maigre. On a $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C = \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(V)$ est non maigre. D'après le complémentaire de la remarque 1.1.2, il existe un ouvert non vide U tel que $\bigcap_{T \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(V)$ est comaigne dans U , c'est-à-dire $\bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(V)$ est dense dans U pour tout $T \in \mathbb{N}$.
- Si $V^C \supseteq \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$, alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V^C) \supseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}})$ est comaigne, c'est-à-dire $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$ est maigre. Si, de plus, V est fermé alors $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$ est aussi maigre, parce que $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V^C)^C$, d'après la remarque 1.2.9. On note que si V n'intersecte pas $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$, alors il existe un ouvert $W \supseteq V$ tel que $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} \subseteq \overline{W}^C$. D'après le point précédent, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(\overline{W}^C)^C$ est maigre. Mais cet ensemble contient $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(W^C)^C$, qui doit aussi être maigre. Par la remarque 1.1.2, cela signifie que cet ensemble est maigre dans tout ouvert U . Puisqu'il peut être écrit comme l'intersection $\bigcap_{T \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(W)$ d'ouverts, cela équivaut à dire qu'il y a T tel que $\bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(W)$ n'est pas dense dans U . En particulier, $\bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(V)$ n'est pas dense dans U . □

Une conséquence de cela est la proposition suivante, qui signifie que l'ensemble limite générique intersecte tout ensemble fermé de domaine dense.

Proposition 4.1.4. *Supposons que \mathfrak{F} est un SD et que V est un ensemble fermé de domaine dense $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$. Alors V intersecte $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$.*

Démonstration. Le point 2 de la remarque 1.2.7 dit que

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V) = \bigcap_{n > 0} \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(B_{1/n}(V)).$$

Il en résulte que chaque $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(B_{1/n}(V))$ est dense.
 Son surensemble ouvert $\bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(B_{1/n}(V))$ doit être aussi dense.
 Donc, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(B_{1/n}(V)^C)^C = \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \geq T} F_t^{-1}(B_{1/n}(V))$ est comaigne. En particulier, il est non maigre. Donc le point 2 du lemme 4.1.3 dit que $\overline{B}_{1/n}(V)$ intersecte $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$.
 Puisque cela est vrai pour tout $n > 0$, puisque $\overline{B}_{1/n}(V)$ est fermé, V doit intersecter $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$. \square

4.1.1 L'ensemble limite générique des SD non-errants

Pour les systèmes dynamiques non-errants, l'ensemble limite générique est l'espace entier.

Proposition 4.1.5. *Un SD \mathfrak{F} est semi-non-errant si et seulement si $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = \Omega_{\mathfrak{F}}$.*

Démonstration.

- Supposons que \mathfrak{F} est semi-non-errant, $x \in \Omega_{\mathfrak{F}}$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(B_{\varepsilon}(x)^C)^C$ n'est pas maigre. Par inclusion, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(\overline{B}_{\varepsilon}(x)^C)^C$ n'est pas non plus maigre. Par le point 2 du lemme 4.1.3, $\overline{B}_{\varepsilon}(x)$ intersecte $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$. Puisque cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient que $x \in \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$. L'inclusion $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} \subseteq \Omega_{\mathfrak{F}}$ est toujours vraie.
- Réciproquement, nous supposons que \mathfrak{F} n'est pas semi-non-errant. Nous voulons montrer que $\Omega_{\mathfrak{F}} \not\subseteq \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$. Comme \mathfrak{F} n'est pas semi-non-errant, il existe un ouvert U qui intersecte $\Omega_{\mathfrak{F}}$ tel que $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(U^C)^C$ est maigre, c'est-à-dire $\mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(U^C)$ est comaigne. Puisque U^C est fermé, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(U^C) \supseteq \mathfrak{d}_{\mathfrak{F}}(U^C)$ est aussi comaigne. Par définition, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est donc inclus dans U^C donc, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ ne contient pas $\Omega_{\mathfrak{F}}$. \square

La proposition 4.1.5 donne directement le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.6. *Si un SD \mathfrak{F} sur X est non-errant, alors $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = X$.*

Puisque les AC surjectifs sont non-errants (voir par exemple [43]), on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.7. *Un AC F sur $A^{\mathbb{Z}}$ est surjectif si et seulement si $\tilde{\omega}_F = A^{\mathbb{Z}}$, si et seulement si ω_F est comaigne.*

La seconde assertion est aussi vraie pour les SD uniformes [32, Cor. 26].

Démonstration. La première assertion est une conséquence du corollaire 4.1.6. Pour la seconde assertion, les SD uniformes non-errants ont un ensemble co-maigre de points récurrents qui sont tous dans ω_F . \square

4.1.2 L'ensemble limite générique des SD quasi-équicontinus

On va montrer que si le système est quasi-équicontinu, alors son ensemble limite générique est exactement la clôture de l'ensemble asymptotique de son ensemble des points d'équicontinuité.

Le corollaire suivant est une conséquence de la proposition 1.2.11.

Corollaire 4.1.8. *Si \mathfrak{F} est un SD quasi-équicontinu, alors*

$$\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = \overline{\omega_{\mathfrak{F}}(\mathcal{E}_{\mathfrak{F}})}.$$

Démonstration. Puisque $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}})$ est dense, $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}})$ par la proposition 1.2.11. Donc, $\omega_{\mathfrak{F}}(\mathcal{E}_{\mathfrak{F}}) \subseteq \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$. Puisque $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est fermé, $\overline{\omega_{\mathfrak{F}}(\mathcal{E}_{\mathfrak{F}})} \subseteq \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$. Réciproquement, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est l'intersection de tous les fermés qui ont un domaine co-maigre, parmi lesquels $\overline{\omega_{\mathfrak{F}}(\mathcal{E}_{\mathfrak{F}})}$ (dont le domaine contient le co-maigre $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}}$). Donc, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = \overline{\omega_{\mathfrak{F}}(\mathcal{E}_{\mathfrak{F}})}$. \square

Si le système est équicontinu alors l'ensemble limite générique est la clôture de l'ensemble asymptotique, d'après le corollaire précédent. Autrement dit, l'ensemble asymptotique est dense dans l'ensemble limite générique. Grâce à l'équicontinuité, l'ensemble asymptotique est aussi dense dans l'ensemble limite, d'après la proposition suivante.

Proposition 4.1.9. *Si \mathfrak{F} est un SD équicontinu sur X , alors $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = \overline{\omega_{\mathfrak{F}}} = \Omega_{\mathfrak{F}}$.*

Démonstration. Soient $y \in \Omega_{\mathfrak{F}}$ et $\varepsilon > 0$. On montrera que $B_{\varepsilon}(y)$ intersecte $\omega_{\mathfrak{F}}$. Il existe δ tel que pour tout $x \in \mathcal{E}_{\mathfrak{F}} = X$ et tout $t \in \mathbb{N}$,

$$F_t(B_{\delta}(x)) \subseteq B_{\varepsilon/2}(F_t(x)) .$$

Par la compacité de X , il existe $I \subseteq X$ fini tel que $X = \bigcup_{x \in I} B_{\delta}(x)$. Puisque $y \in \Omega_{\mathfrak{F}}$, il existe $J \subseteq \mathbb{N}$ infini tel que, pour tout $t \in J$, il existe $x_t \in X$ tel que

$$F_t(x_t) \in B_{\varepsilon/2}(y).$$

Par le principe des tiroirs, il existe $x \in I$ tel que $B_{\delta}(x)$ contient une infinité

de $x_t, t \in J$. Cela signifie que pour une infinité de t ,

$$d(F_t(x), y) \leq d(F_t(x), F_t(x_t)) + d(F_t(x_t), y) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 .$$

Nous concluons que l'orbite de x a une valeur d'adhérence $z \in \omega_{\mathfrak{F}}(x) \cap B_\varepsilon(y)$. Cela prouve que $\omega_{\mathfrak{F}}(X)$ est dense dans $\Omega_{\mathfrak{F}}$; par le corollaire 4.1.8, on obtient $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = \overline{\omega_{\mathfrak{F}}(X)} = \Omega_{\mathfrak{F}}$. \square

Si le système dynamique est équicontinu, alors son ensemble limite générique est exactement son ensemble limite.

Remarque 4.1.10. *On sait qu'un automate cellulaire est nilpotent si et seulement si son ensemble limite est fini. Donc, il est nilpotent si et seulement s'il est équicontinu et son ensemble limite générique est fini.*

4.2 L'ensemble limite générique des AC selon des directions

Dans cette section, on étudie des automates cellulaires en faisant varier les directions.

Un automate cellulaire en direction est une suite d'automates cellulaires.

Proposition 4.2.1. *Soit $\mathfrak{F} = (F_t)_t$ une suite d'AC. Alors $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est un sous-décalage. Son domaine est σ -invariant.*

Démonstration. Par définition, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est fermé.

Soit $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = \overline{\omega_{\mathfrak{F}}(U)}$, où U est comaigne. Puisque σ est un homéomorphisme, $\sigma^k(U)$ est aussi comaigne pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Alors $W = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \sigma^k(U)$ est toujours comaigne, en tant que intersection dénombrable d'ensembles comaignes. On a $W \subseteq U$, de sorte que

$$\overline{\omega_{\mathfrak{F}}(W)} \subseteq \overline{\omega_{\mathfrak{F}}(U)} = \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} .$$

Réciproquement, la définition de $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ dit qu'il est contenu dans $\overline{\omega_{\mathfrak{F}}(W)}$. Donc, $\overline{\omega_{\mathfrak{F}}(W)} = \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$.

Puisque W est σ -invariant, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = \overline{\omega_{\mathfrak{F}}(W)}$ est aussi σ -invariant. \square

De plus, d'après le corollaire 2.7.7, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est inclus dans tous les attracteurs sous-décalages.

En particulier, l'ensemble limite générique d'un automate cellulaire dans n'importe quelle direction est invariant par décalage, d'après la proposition précédente. De plus, il est invariant par l'automate cellulaire lui-même, d'après la proposition suivante.

4.2. L'ENSEMBLE LIMITE GÉNÉRIQUE DES AC SELON DES DIRECTIONS

Proposition 4.2.2. *Considérons l'AC F dans une certaine direction h . Alors $\tilde{\omega}_{F,h}$ est un sous-décalage F -invariant.*

Démonstration. $\tilde{\omega}_{F,h}$ est fermé. D'après la proposition 4.2.1, $\mathcal{D}_{F,h}(\tilde{\omega}_{F,h})$ est σ -invariant. Donc, $\overline{\omega_{F,h}(\mathcal{D}_{F,h}(\tilde{\omega}_{F,h}))}$ est aussi σ -invariant.

Comme $\tilde{\omega}_{F,h} = \omega_{F,h}(\mathcal{D}_{F,h}(\tilde{\omega}_{F,h}))$, $\tilde{\omega}_{F,h}$ est σ -invariant et F -invariant, d'après la proposition 3.2.2. \square

Dans la remarque suivante, on va voir que les ensembles limites génériques sont préservés par \sim .

Remarque 4.2.3. *Soient F un AC, $U \subseteq A^{\mathbb{Z}}$ fortement invariant par décalage, pour $h, h' \in \mathcal{B}$. Si $h \sim h'$, alors*

$$\tilde{\omega}_{F,h}(U) = \tilde{\omega}_{F,h'}(U).$$

Démonstration. Puisque, $\tilde{\omega}_{F,h}$ est σ -invariant, $\mathcal{D}_{F,h}(\tilde{\omega}_{F,h})$ est σ -invariant et comaigne. Si $h \sim h'$, alors par les points 3 et 4 de la remarque 3.2.1, on a,

$$\begin{cases} \omega_{F,h}(\mathcal{D}_{F,h}(\tilde{\omega}_{F,h})) = \omega_{F,h'}(\mathcal{D}_{F,h}(\tilde{\omega}_{F,h})) \\ \mathcal{D}_{F,h}(\tilde{\omega}_{F,h}) = \mathcal{D}_{F,h'}(\tilde{\omega}_{F,h}) \end{cases}$$

Donc,

$$\tilde{\omega}_{F,h} = \overline{\omega_{F,h}(\mathcal{D}_{F,h}(\tilde{\omega}_{F,h}))} = \overline{\omega_{F,h'}(\mathcal{D}_{F,h'}(\tilde{\omega}_{F,h}))}.$$

De plus,

$$\overline{\omega_{F,h'}(\mathcal{D}_{F,h'}(\tilde{\omega}_{F,h}))} \supseteq \tilde{\omega}_{F,h'}.$$

Donc, $\tilde{\omega}_{F,h} \supseteq \tilde{\omega}_{F,h'}$. La réciproque est symétrique. \square

4.2.1 Indécomposabilité

Maintenant, on prouve que l'ensemble limite générique d'un automate cellulaire est indécomposable dans un certain sens.

Proposition 4.2.4. *Soit $V = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} V_i$, où $n \in \mathbb{N}$ et les V_i sont des fermés qui sont invariants par un AC F dans une direction h , et par σ^p , pour un certain $p > 0$.*

Si $\mathcal{D}_{F,h}(V)$ est d'intérieur non vide (resp. non maigre), alors il existe $i \in \llbracket 0, n \llbracket$

tel que $\mathcal{D}_{F,h}(V_i)$ est dense (resp. comaigne).

Démonstration. Comme $V = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} V_i$ et chaque V_i est fermé invariant par F dans la direction h , $\mathcal{D}_{F,h}(V) = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}_{F,h}(V_i)$ par la proposition 1.2.12. D'après le point précédent, $\bigsqcup_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}_{F,h}(V_i)$ est d'intérieur non vide (resp. non maigre). De plus, chaque $\mathcal{D}_{F,h}(V_i)$ est σ^p -invariant (resp. et a la propriété de Baire, car V_i est fermé). Donc, il existe $i \in \llbracket 0, n \llbracket$ tel que $\mathcal{D}_{F,h}(V_i)$ est dense (resp. comaigne), d'après le point 4 du lemme 1.2.21. \square

Le domaine d'attraction de l'ensemble limite générique est comaigne, donc il est non maigre et le corollaire suivant est une conséquence directe de la proposition précédente.

Corollaire 4.2.5. *Soient F un AC et h une direction. $\tilde{\omega}_{F,h}$ ne peut pas être décomposé comme union disjointe de sous-systèmes sous-décalages non triviaux (ou même sous-systèmes σ^p -invariants non triviaux, pour un certain $p > 0$).*

Démonstration. On suppose que $\tilde{\omega}_{F,h} = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} V_i$, où les V_i sont fermés, invariants, σ^p -invariants. Par la proposition 4.2.4, il existe $i \in \llbracket 0, n \llbracket$ tel que $\mathcal{D}_{F,h}(V_i)$ est comaigne. Par définition, $\tilde{\omega}_{F,h}$ est alors inclus dans V_i . Ils sont donc égaux. \square

Autrement dit, dans l'ensemble limite générique d'un automate cellulaire, il n'y a que l'ensemble limite générique lui-même qui est fermé, invariant par l'automate et par décalage, et son domaine est non maigre.

4.2.2 Ensemble limite générique fini

Si l'ensemble limite générique est fini, alors le système dynamique est quasi-équicontinu. Le corollaire suivant est une conséquence directe de la proposition 1.2.15.

Corollaire 4.2.6. *Si $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est fini, alors \mathfrak{F} est quasi-équicontinu.*

Dans le cas des automates cellulaires, si l'ensemble limite générique est fini non seulement l'automate cellulaire est quasi-équicontinu, mais aussi l'ensemble limite générique est une orbite périodique d'une configuration monochrome.

Proposition 4.2.7. *Soient F un AC et h une direction. Si $\tilde{\omega}_{F,h}$ est fini, alors $\tilde{\omega}_{F,h}$ contient une seule orbite (périodique) d'une configuration monochrome y , et $\mathcal{A}_{F,h}(y)$ est comeaigre.*

On note que l'orbite de cette configuration monochrome peut être non triviale (voir l'exemple 4.4.9), mais les configurations génériques sont toutes asymptotiques à la même configuration de cette orbite. Cela peut sembler paradoxal, en contraste avec l'aspect habituel, synchrone et uniforme de la dynamique de l'AC sur $A^{\mathbb{Z}}$, mais ici la notion de la généralité n'est pas du tout F -invariant.

Démonstration. Par la proposition 4.2.2, $\tilde{\omega}_{F,h}$ est un sous-décalage fini F -invariant, de sorte que toutes ses configurations sont périodiques (pour le décalage).

Soit $p > 0$ une période commune. $\tilde{\omega}_{F,h}$ peut être décomposé comme $\bigsqcup_{y \in V} \mathcal{O}_{F,h}(y)$, où $V \subseteq \tilde{\omega}_{F,h}$ est un ensemble de représentants des orbites.

$\tilde{\omega}_{F,h}$ est fini et son domaine est invariant par décalage, d'après le corollaire 3.2.3,

$$\mathcal{D}_{F,h}(\tilde{\omega}_{F,h}) = \bigsqcup_{y \in \tilde{\omega}_{F,h}} \mathcal{A}_{F,h}(y) .$$

$\bigsqcup_{y \in \tilde{\omega}_{F,h}} \mathcal{A}_{F,h}(y)$ est non maigre et a la propriété de Baire. De plus, chaque $y \in \tilde{\omega}_{F,h}$ est σ^p -invariant, c'est-à-dire $\mathcal{A}_{F,h}(y)$ est aussi σ^p -invariant, on peut donc appliquer le point 4 du lemme 1.2.21 (à $\mathfrak{F} = \sigma^p$), et on obtient qu'il y a $y \in \tilde{\omega}_{F,h}$ tel que $\mathcal{A}_{F,h}(y)$ est comeaigre.

Comme $\mathcal{D}_{F,h}(\mathcal{O}_{F,h}(y)) \supseteq \mathcal{A}_{F,h}(y)$ est comeaigre,

$$\tilde{\omega}_{F,h} = \mathcal{O}_{F,h}(y) .$$

De plus, puisque σ est un automorphisme de F , $\sigma(\mathcal{A}_{F,h}(y)) = \mathcal{A}_{F,h}(\sigma(y))$ est aussi comeaigre.

Alors, $\mathcal{A}_{F,h}(y) \cap \mathcal{A}_{F,h}(\sigma(y))$ est aussi comeaigre, et en particulier non vide.

Par la transitivité de la relation d'asymptoticité, y est asymptotique à $\sigma(y)$.

Puisqu'ils se trouvent tous les deux dans le sous-système bijectif de F induit sur $\tilde{\omega}_{F,h}$ fini, la remarque 1.1.1 dit que $y = \sigma(y)$, qui signifie que y est monochrome. \square

4.2.3 L'ensemble limite générique dans les directions obliques

On va montrer que l'ensemble limite générique dans une direction oblique est l'ensemble limite.

Ce corollaire nous permet de généraliser le corollaire 2.6.6.

Corollaire 4.2.8. *Considérons un SD $\mathfrak{F} = (F_t \sigma^{h(t)})_t$, où $(F_t)_t$ est une suite d'AC et h une direction oblique. Alors, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = \Omega_{\mathfrak{F}}$ et \mathfrak{F} est soit sensible soit nilpotent.*

Démonstration. D'après la proposition 3.4.2, \mathfrak{F} est faiblement semi-mélangeant et on sait qu'un SD faiblement semi-mélangeant est semi-non-errant, d'après la proposition 1.2.22 et d'après la proposition 4.1.5,

$$\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = \Omega_{\mathfrak{F}}.$$

La sensibilité vient de la proposition 3.4.2, La remarque 1.2.23 dit que tout SD faiblement semi-mélangeant est soit sensible soit d'ensemble limite trivial et on sait que l'ensemble limite d'un AC est trivial si et seulement s'il est nilpotent. \square

En particulier, l'ensemble limite générique d'un automate cellulaire dans une direction oblique est l'ensemble limite.

4.2.4 L'ensemble limite générique des AC quasi-équicontinus en deux directions

Dans la proposition 3.3.4, on a montré que si l'automate cellulaire est quasi-équicontinu en deux directions différentes, alors il existe une orbite périodique d'une configuration monochrome dont le domaine est dense. En utilisant cette proposition, on va montrer que l'ensemble limite générique, de tout automate cellulaire quasi-équicontinu en deux directions différentes, est aussi une orbite périodique d'une configuration monochrome.

Proposition 4.2.9. *Soit F un AC de mémoire \mathbf{r}_- et d'anticipation \mathbf{r}_+ . Si F est quasi-équicontinu en deux directions de signes opposés, alors il existe un intervalle non dégénéré $S \subseteq [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$ et $a \in A$ tels que $\tilde{\omega}_{F,h} = \mathcal{O}_F(\infty a^\infty)$ pour tout $h \in S$ et*

$$\mathcal{E}_{F,h} \subseteq \mathcal{D}_{F,h}(\tilde{\omega}_{F,h}) = \mathcal{A}_{F,h}(\infty a^\infty).$$

Si, de plus, $h \in \mathcal{I}(S)$, $\mathcal{D}_{F,h}(\tilde{\omega}_{F,h})$ contient un ouvert dense.

4.2. L'ENSEMBLE LIMITE GÉNÉRIQUE DES AC SELON DES DIRECTIONS

Démonstration. On suppose que F a deux directions de signes opposés h' et h'' de quasi-équicontinuité. Par le point 2 de la remarque 3.3.3, ces deux directions ont un mot bloquant commun u , de sorte que l'on peut appliquer la proposition 3.3.4 : u est aussi bloquant pour toutes les directions dans l'intervalle

$$[\min(h', h''), \max(h', h'')].$$

Puisque c'est vrai pour tous h' et h'' , on en déduit que l'ensemble S des directions quasi-équicontinues est convexe : c'est un intervalle non dégénéré.

Par le corollaire 4.2.8, il est inclus dans $[-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$.

La proposition 3.3.4 déclare également que $\mathcal{D}_{F,h}((^\infty a_{u,h'}(t)^\infty)_t)$ est dense pour tout $h \in \mathcal{B}$, de sorte qu'il contient tous les points d'équicontinuité, par la proposition 1.2.11.

Si $h \in S$, le corollaire 4.1.8 dit que l'ensemble limite générique est la clôture de l'ensemble asymptotique de $\mathcal{E}_{F,h}$, qui est alors l'ensemble asymptotique de $\{^\infty a_{u,h'}(t)^\infty | t \in \mathbb{N}\}$, qui est un ensemble de configurations monochromes ; en particulier, il ne dépend pas de h .

Par la proposition 4.2.7, il est l'orbite par F d'une configuration monochrome.

Finalement, si $h \in \mathcal{I}(S)$, il est facile de trouver $q', q'' \in S$ tels que

$$q' \ll h \ll q''.$$

Le point 4 de la proposition 3.3.4 dit que $\mathcal{D}_{F,h}((^\infty a_{u,q'}(t)^\infty)_t)$ contient un ouvert dense. Le même argument dit que ceci est dans le domaine de l'ensemble limite générique. \square

4.2.5 Classification des ensembles limites génériques selon les directions

Nous rappelons la classification des AC selon des directions et nous insistons sur les propriétés de chaque classe en termes de l'ensemble limite générique. En tant que clôture d'un ensemble asymptotique, l'ensemble limite générique peut dépendre de la direction.

Théorème 4.2.10. *Tout AC F de mémoire \mathbf{r}_- et d'anticipation \mathbf{r}_+ , satisfait exactement une des conditions suivantes :*

1. F est nilpotent ; il existe un symbole $a \in A$ tel que pour tout $h \in \mathcal{B}$, $\tilde{\omega}_{F,h} = \{\infty a^\infty\}$.
2. F est équicontinu selon une seule direction $h' \in [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$, et sensible dans toutes les autres directions ; pour tout $h \in \mathcal{B}$, $\tilde{\omega}_{F,h} = \Omega_F$ est infini.
3. F est strictement quasi-équicontinu dans un intervalle non dégénéré $S \subseteq [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$; $\exists a \in A$ tel que $\tilde{\omega}_{F,h} = \mathcal{O}_F(\infty a^\infty)$ pour tout $h \in S$, et $\tilde{\omega}_{F,h}$ est infini pour tout $h \notin S$.
4. F est strictement quasi-équicontinu selon une seule direction $h' \in [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$ et sensible dans toutes les autres directions ; pour tout $h \in \mathcal{B}$, $\tilde{\omega}_{F,h}$ est infini.
- 4'. F est strictement quasi-équicontinu selon une seule direction $h' \in [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$ et sensible dans toutes les autres directions ; $\tilde{\omega}_{F,h}$ est fini si et seulement si $h = h'$.
5. F est sensible dans toutes les directions ; $\tilde{\omega}_{F,h}$ est infini selon tout $h \in \mathcal{B}$.

Par rapport à la classification de [21], on a fusionné les deux dernières classes, parce que l'expansivité n'est pas pertinente en termes de l'ensemble limite générique, sauf qu'elle implique la surjectivité. L'ensemble limite générique d'un AC surjectif est égal au décalage plein dans chaque direction : un AC surjectif est soit dans la classe 2, soit dans la classe 4, soit dans la classe 5. Dans la classe 3, les bornes de l'intervalle de quasi-équicontinuité peuvent être fermées ou non ; en fait, tous les quatre cas peuvent se produire : voir [20] pour certains exemples (la borne serait toujours incluse si on permet des directions qui sont à variations non bornées). Voir la section 4.4 pour les exemples de toutes les classes (en particulier, les deux sous-classes de la classe 4 peuvent arriver).

4.2. L'ENSEMBLE LIMITE GÉNÉRIQUE DES AC SELON DES DIRECTIONS

Démonstration.

1. Les AC nilpotents ont un ensemble limite trivial (dans toutes les directions), qui contient l'ensemble limite générique.
2. Maintenant, on suppose que F n'est pas nilpotent, c'est-à-dire que Ω_F est infini. On suppose aussi qu'il existe au moins une direction d'équicontinuité. Par la remarque 3.4.3, toutes les autres directions sont obliques, donc il est sensible par le corollaire 4.2.8. Par la proposition 4.1.9 et le corollaire 4.2.8, $\tilde{\omega}_{F,h} = \Omega_F$, pour tout $h \in \mathcal{B}$.
3. Maintenant, on suppose que F n'admet aucune direction d'équicontinuité, mais il admet deux directions différentes de quasi-équicontinuité. Par la proposition 4.2.9, il existe un intervalle non dégénéré $S \subseteq [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$ et $a \in A$ tels que $\tilde{\omega}_{F,h} = \mathcal{O}_F(\infty a^\infty)$ pour tout $h \in S$. Pour les autres directions, l'ensemble limite générique d'un SD sensible est infini, par le corollaire 4.2.6.
4. Les cas restants quand il y a au plus une direction de quasi-équicontinuité ; elle ne peut pas être oblique, et les autres directions doivent toutes avoir un ensemble limite générique infini par le corollaire 4.2.6. Cela règle les trois dernières classes. □

4.3 Liens avec l'approche ergodique

Mesure de probabilité borélienne.

- Un couple constitué d'un ensemble et d'une tribu sur cet ensemble est appelé un **espace mesurable**.
- Une application μ défini sur un certain espace mesurable, à valeurs dans $\llbracket 0, +\infty \rrbracket$, est appelée **measure** si $\mu(\emptyset) = 0$ et μ est dénombrablement additif.
- Soit μ une mesure sur X , μ est une **probabilité** si $\mu(X) = 1$.
- Soit μ une mesure de probabilité sur X et \mathcal{T} une tribu sur X . Soit $\mathfrak{F} = (F_t)_{t \in \mathbb{N}}$ un SD.
 - Le **support** topologique \mathcal{S}_μ d'une mesure μ est le plus petit fermé de mesure 1. Si $\mathcal{S}_\mu = X$, on dit que μ est de **support total**.
 - Une mesure μ est dite invariante par \mathfrak{F} si

$$\forall A \subseteq \mathcal{T}, \mu(\mathfrak{F}^{-1}(A)) = \mu(A).$$

- On dit qu'une mesure \mathfrak{F} -invariante est **\mathfrak{F} -ergodique** si la mesure de tout ensemble fortement \mathfrak{F} -invariant est de mesure nulle, ou de complémentaire de mesure nulle.
- On dit que \mathfrak{F} est **μ -équicontinu** si $\mu(\mathcal{E}_{\mathfrak{F}}) = 1$.
D'après la proposition 3.1.1 et le corollaire 4.3.4, si μ est σ -ergodique, un AC F selon une certaine direction h est μ -équicontinu sauf si

$$\mathcal{E}_{F,h} \cap \mathcal{S}_\mu = \emptyset.$$

4.3.1 L'ensemble limite probable et l'ensemble μ -limite

L'ensemble limite générique est la variante topologique de l'**ensemble limite μ -probable** (the likely limit set) $\Lambda_{\mathfrak{F},\mu}$, qui est le plus petit fermé de X qui a un domaine d'attraction de mesure un. L'ensemble limite μ -probable ne doit pas être confondu avec l'**ensemble μ -limite** $\Omega_{\mathfrak{F},\mu}$, d'après [47, 21], qui est l'intersection de tous les fermés U tels que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(F_t^{-1}(U)) = 1$.

Nous prouvons une inclusion générale. Cependant, c'est une généralisation de [47, Prop 1].

Proposition 4.3.1. *Pour tout SD \mathfrak{F} et toute mesure de probabilité de Borel μ , $\Omega_{\mathfrak{F},\mu} \subseteq \Lambda_{\mathfrak{F},\mu}$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(F_t^{-1}(\overline{B_\varepsilon(V)})) = 1, \text{ où } V = \Lambda_{\mathfrak{F}, \mu}.$$

Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas : il existe $\alpha > 0$ et un ensemble infini $I \subseteq \mathbb{N}$ tels que pour tout $t \in I$, $\mu(A_t) \geq \alpha$, où $A_t = F_t^{-1}(\overline{B_\varepsilon(V)})^C$.

Pour tout $T \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble $B_T = A_T \setminus \bigcup_{t > T} A_t$ des points qui sont *pour la dernière fois* dans un certain A_T . On note $C_T = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} A_t \setminus \bigsqcup_{t \leq T} B_t = \bigcup_{t > T} A_t$, l'ensemble de ceux qui *attendent encore une visite* comprenant A_t pour un certain $t \in I$. Il en résulte que

$$\mu(C_T) \geq \mu(A_t) \geq \alpha.$$

Puisque $(C_T)_T$ est une suite décroissante de sous-ensembles, on obtient que

$$\mu(C) \geq \alpha, \text{ où } C = \bigcap_{T \in \mathbb{N}} C_T.$$

Maintenant si $x \in C$, alors pour tout $T \in \mathbb{N}$, il existe $t > T$ tel que $F_t(x) \in \overline{B_\varepsilon(V)}^C$.

Cela signifie que $x \notin \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$, et ainsi $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ est de mesure au plus $1 - \alpha$. \square

La réciproque est, en général, fautive : l'exemple 4.4.7 est un contre-exemple, comme prouvé dans [47]. Cependant, nous prouvons l'inverse dans un cas spécifique.

Proposition 4.3.2. *Soit \mathfrak{F} un SD μ -équicontinu pour une certaine mesure μ . Alors*

$$\Omega_{\mathfrak{F}, \mu} = \Lambda_{\mathfrak{F}, \mu} = \overline{\omega_{\mathfrak{F}}(\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} \cap \mathcal{S}_\mu)}.$$

En particulier, si μ est à support total, alors ces ensembles sont égaux à $\overline{\omega_{\mathfrak{F}}(\mathcal{E}_{\mathfrak{F}})}$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{D}_F(\Lambda_{\mathfrak{F}, \mu})$ est dense dans \mathcal{S}_μ , il contient l'ensemble de mesure pleine $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} \cap \mathcal{S}_\mu$, grâce à la proposition 1.2.11.

De la même façon comme dans la preuve du corollaire 4.1.8, nous pouvons rapidement déduire la deuxième égalité.

Maintenant soient $y \in \overline{\omega_{\mathfrak{F}}(\mathcal{E}_{\mathfrak{F}} \cap \mathcal{S}_\mu)}$ et $\varepsilon > 0$. Il y a un point $x \in \mathcal{E}_{\mathfrak{F}} \cap \mathcal{S}_\mu$, et une suite $(t_n)_n$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{t_n}(x) \in B_{\varepsilon/2}(y).$$

Par l'équicontinuité de x , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{N}, F_t(B_\delta(x)) \subseteq B_{\varepsilon/2}(F_t(x)).$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient $F_{t_n}(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(y)$, donc

$$\mu(F_{t_n}^{-1}(B_\varepsilon(y))) \geq \mu(B_\delta(x)) > 0.$$

Soit U un sous-ensemble fermé de $B_\varepsilon(y)^C$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(F_{t_n}^{-1}(U)) \leq \mu(F_{t_n}^{-1}(B_\varepsilon(y)^C)) \leq 1 - \mu(B_\delta(x)).$$

Puisque cela est positif et indépendant de n , $\mu(F_t^{-1}(U))$ ne converge pas vers 1.

Par la contraposée, on obtient que tout fermé U tel que $\mu(F_t^{-1}(U))$ converge vers 1 devrait intersecter $B_\varepsilon(y)$, pour tout $\varepsilon > 0$. Donc, il contient y , et on peut conclure que $y \in \Omega_{\mathfrak{F}, \mu}$.

L'inclusion inverse vient de la proposition 4.3.1. □

[54, Exemples 5, 6] dit qu'il n'y a pas de relations d'inclusion générales entre l'ensemble limite générique et l'ensemble limite μ -probable, mais qu'ils s'intersectent. Voici une formalisation de cet argument.

Proposition 4.3.3. *Pour tout SD \mathfrak{F} et toute mesure à support total μ , $\Lambda_{\mathfrak{F}, \mu} \cap \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} \neq \emptyset$.*

Démonstration. Remarquons que $\Lambda_{\mathfrak{F}, \mu}$ est un ensemble fermé avec un domaine dense (parce que sa mesure est 1). La proposition 4.1.4 permet de conclure. □

4.3.2 L'ensemble limite probable des automates cellulaires

Le lemme 1.2.21 donne le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.4. *Soient $\mathfrak{F} = (F_t)_{t \in \mathbb{N}}$ un SD transitif, où tous les F_t sont des homéomorphismes, μ une mesure ergodique à support total, et $W \subseteq X$ un ensemble fortement \mathfrak{F} -invariant. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. W n'est pas maigre.
2. W est comaigne.
3. W est de mesure 1.

4. W est de mesure non nulle.

Démonstration. les deux premiers points sont équivalents, grâce au lemme 1.2.21 et les deux derniers sont équivalents, grâce à la définition de l'ergodicité. Maintenant, si W est comeagre, il peut s'écrire comme une intersection dénombrable $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$ d'ouverts denses W_n , et donc comme intersection dénombrable $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathfrak{F}}(W_n)$ d'ouverts denses \mathfrak{F} -invariants. Par le support total, la mesure de W_n doit être non nulle et par l'ergodicité, elle doit être 1, donc W est de mesure 1. Autrement W est maigre, de telle sorte que l'argument précédent se tienne pour son complémentaire. \square

Dans [54], J. Milnor demande un *bon* critère pour l'égalité entre l'ensemble limite générique et l'ensemble limite μ -probable. Voici au moins un critère, dans le cas d'automates cellulaires.

Corollaire 4.3.5. *Si \mathfrak{F} est une suite d'AC, et μ est une mesure σ -ergodique à support total, alors $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}} = \Lambda_{\mathfrak{F}, \mu}$.*

Démonstration. La proposition 4.2.1 dit que l'ensemble limite générique est l'intersection de tous les fermés σ -invariants qui ont des domaines comeagres. Le même argument simple montre que l'ensemble limite μ -probable est l'intersection de tous les fermés σ -invariants qui ont des domaines de mesure 1. Grâce au corollaire 4.3.4, ces domaines sont en fait les mêmes, de sorte que les deux ensembles sont égaux. \square

En fait, même quand ils ne sont pas égaux, la plupart des résultats sur l'ensemble limite générique ont un résultat parallèle sur l'ensemble limite μ -probable, qui peuvent être prouvés avec les mêmes outils de preuve.

4.4 Exemples

Exemple 4.4.1 (Décalage). Soit σ un AC sur $A^{\mathbb{Z}}$ défini par $\sigma(x)_i = x_{i+1}$. Cet AC est réversible, donc surjectif. Par le corollaire 4.1.7, $\tilde{\omega}_{\sigma,h} = A^{\mathbb{Z}}$ selon chaque $h \in \mathcal{B}$. Selon la direction -1 , il correspond à l'AC identité. Cet AC a une seule direction d'équicontinuité : il est dans la classe 2 du théorème 4.2.10.

Soit F un AC d'alphabet A , de mémoire $\mathbf{r}_- \in \mathbb{Z}$, d'anticipation $\mathbf{r}_+ > \mathbf{r}_-$ et de règle locale f . Un état $0 \in A$ est **envahissant** si pour tout $u \in A^{\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- + 1}$ tel que $0 \sqsubset u$, on a $f(u) = 0$.

Remarque 4.4.2. Soit F un AC sur $A^{\mathbb{Z}}$ de mémoire $\mathbf{r}_- \in \mathbb{Z}$, d'anticipation $\mathbf{r}_+ > \mathbf{r}_-$, et d'état envahissant $0 \in A$. Alors, il est dans la classe 3 : $\tilde{\omega}_{F,h} = \{\infty 0^\infty\}$ selon chaque $h \in [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$ et $\tilde{\omega}_{F,h} = \Omega_F$ selon chaque $h \notin [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$.

Démonstration. On suppose que F possède un état envahissant $0 \in A$. Par définition, il est un mot bloquant (à droite et à gauche) selon chaque $h \in [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$. Par la proposition 3.3.4, il existe $a \in A$ tel que $\tilde{\omega}_{F,h} = \mathcal{O}_F(\infty a^\infty) = \overline{\omega(\mathcal{E}_{F,h})}$ selon chaque $h \in [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$. Dans ce cas, a n'est rien d'autre que 0. De plus, puisque chaque $h \notin [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$ est oblique, $\tilde{\omega}_{F,h} = \Omega_F$ par le corollaire 4.2.8. \square

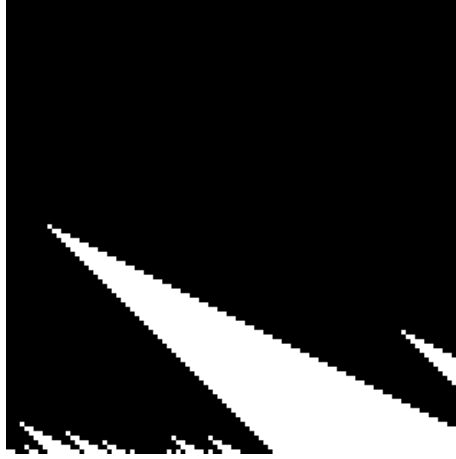


FIGURE 4.1 – L'AC Min selon la direction 1 (0 (resp. 1) est représenté par un carré noire (resp. carré blanc)).

L'exemple le plus simple d'état envahissant est le suivant.

Exemple 4.4.3 (Min). On reprend l'exemple 2.7.8, on définit \mathbf{Min} sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ par

$$\mathbf{Min}(x)_i = \min(x_i, x_{i+1}).$$

Un diagramme espace-temps typique est représenté dans la figure 4.1. Par la remarque 4.4.2, on sait que cet AC est dans la classe 3 :

1. Selon la direction 0 :

$\tilde{\omega}_{\mathbf{Min}, h} = \{\infty 0^\infty\}$ et son domaine $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \mid \exists i \geq k, x_i = 0\}$ est co-maigre.

2. Selon la direction -1 : la même chose est vraie, en remplaçant \geq par \leq .

3. Selon les directions dans $] - 1, 0[$:

$\tilde{\omega}_{\mathbf{Min}, h} = \{\infty 0^\infty\}$ et son domaine est l'ouvert dense $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \setminus \{\infty 1^\infty\}$. On note que selon la direction $-1/2$: \mathbf{Min} correspond au AC \mathbf{Min} de trois voisinages, est défini par

$$\sigma^{-1}\mathbf{Min}^2(x)_i = \min(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}).$$

Ceci est un exemple de SD uniforme dont l'ensemble limite générique n'inclut pas tous les points récurrents.

4. Toute direction $h \notin [-1, 0]$ est oblique : $\tilde{\omega}_{\mathbf{Min}, h} = \Omega_{\mathbf{Min}} = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \mid \forall k > 0, 10^k 1 \not\sqsubset x\}$. Le domaine de l'ensemble limite générique est $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Ceci est un exemple de SD uniforme dont l'ensemble des points récurrents n'est pas dense dans l'ensemble limite générique.

Exemple 4.4.4. On reprend l'exemple 2.5.2. L'AC dans cet exemple est surjectif et quasi-équicontinu. Donc, cet AC est dans la classe 4 et $\tilde{\omega}_F = A^{\mathbb{Z}}$ pour toute direction.

Exemple 4.4.5 (Ensemble limite générique fini). Considérons l'AC $\mathbf{Min} \times \sigma^{-1}\mathbf{Min}$ défini sur $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}})^2$ par

$$(\mathbf{Min} \times \sigma^{-1}\mathbf{Min})(x, y)_i = (\min(x_i, x_{i+1}), \min(y_{i-1}, y_i)).$$

D'après l'exemple 4.4.3, $\tilde{\omega}_{\mathbf{Min}, h} = \{\infty 0^\infty\}$ selon chaque $h \in [-1, 0]$ et $\tilde{\omega}_{\mathbf{Min}, h} = \Omega_{\mathbf{Min}}$ selon tout $h \notin [-1, 0]$; bien sûr $\tilde{\omega}_{\sigma^{-1}\mathbf{Min}, h} = \{\infty 0^\infty\}$ selon tout $h \in [0, 1]$ et $\tilde{\omega}_{\sigma^{-1}\mathbf{Min}, h} = \Omega_{\mathbf{Min}}$ selon $h \notin [0, 1]$. Donc, $\tilde{\omega}_{\mathbf{Min} \times \sigma^{-1}\mathbf{Min}, 0} = \{\infty 0^\infty\}^2$, et $\tilde{\omega}_{\mathbf{Min} \times \sigma^{-1}\mathbf{Min}, h} = \{\infty 0^\infty\} \times \Omega_{\mathbf{Min}}$ (resp. $\tilde{\omega}_{\mathbf{Min} \times \sigma^{-1}\mathbf{Min}, h} = \Omega_{\mathbf{Min}} \times \{\infty 0^\infty\}$) selon tout $h \in [-1, 0[$ (resp. $h \in]0, 1]$), et $\tilde{\omega}_{\mathbf{Min} \times \sigma^{-1}\mathbf{Min}, h} = \Omega_{\mathbf{Min}}^2$ selon tout $h \notin [-1, 1]$. En particulier, $\mathbf{Min} \times \sigma^{-1}\mathbf{Min}$ possède une seule direction de quasi-équicontinuité : $\{0\}$. Donc, il est dans la classe 4'.

Les deux exemples suivants sont dans la classe 5.

Exemple 4.4.6 (Sensibilité en toute direction). *Considérons l'AC $\sigma^{-1}\mathbf{Min} \times \sigma$ défini sur $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})^2$ par*

$$(\sigma^{-1}\mathbf{Min} \times \sigma)(x, y)_i = (\min(x_{i-1}, x_i), y_{i+1}).$$

D'après l'exemple 4.4.1, $\tilde{\omega}_{\sigma, h} = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ selon tout $h \in \mathcal{B}$. D'après l'exemple 4.4.3, $\tilde{\omega}_{\sigma^{-1}\mathbf{Min}, h} = \{\infty 0^\infty\}$ selon tout $h \in [0, 1]$ et $\tilde{\omega}_{\sigma^{-1}\mathbf{Min}, h} = \Omega_{\mathbf{Min}}$ selon tout $h \notin [0, 1]$. Donc, $\tilde{\omega}_{\sigma^{-1}\mathbf{Min} \times \sigma, h} = \{\infty 0^\infty\} \times \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ selon tout $h \in [0, 1]$, et $\tilde{\omega}_{\sigma^{-1}\mathbf{Min} \times \sigma, h} = \Omega_{\mathbf{Min}} \times \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ selon tout $h \notin [0, 1]$. Puisqu'il n'y a aucune direction de quasi-équicontinuité, cet AC est dans la classe 5.

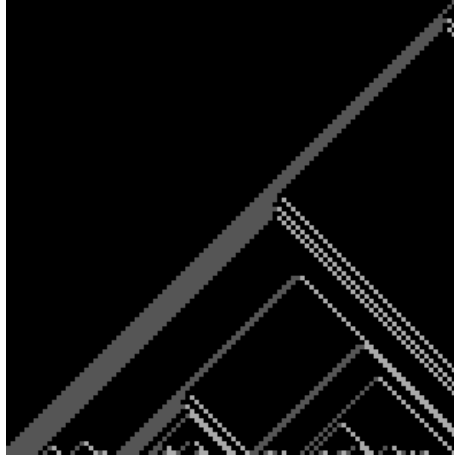


FIGURE 4.2 – Just Gliders (\leftarrow est représenté par de carré gris clair et \rightarrow est représenté par de carré gris foncé).

Exemple 4.4.7 (Just Gliders). *Soient $A = \{\leftarrow, 0, \rightarrow\}$ et F l'AC défini par la règle locale suivante :*

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})_i = \begin{cases} \rightarrow & \text{si } x_{i-1} = \rightarrow \text{ et } x_i \neq \leftarrow \text{ et } (x_{i+1} \neq \leftarrow \text{ ou } x_i = \rightarrow) \\ \leftarrow & \text{si } x_{i+1} = \leftarrow \text{ et } x_i \neq \rightarrow \text{ et } (x_{i-1} \neq \rightarrow \text{ ou } x_i = \leftarrow) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Un diagramme espace-temps typique de cet AC est montré dans la figure 4.2. Il est possible de l'interpréter comme un fond de 0, où les particules \rightarrow et \leftarrow vont à droite et à gauche, respectivement. Quand deux particules opposées se rencontrent, elles disparaissent.

On sait que cet exemple a un ensemble μ -limite qui est strictement inclus dans l'ensemble limite μ -probable, quand μ est la mesure uniforme de Bernoulli (voir

[47, Ex 3] et [48, Ex 4]). On peut voir (dans ces références) que l'ensemble limite est

$$\Omega_F = \{x \in A^{\mathbb{Z}} \mid \forall k \in \mathbb{N}, \leftarrow 0^k \rightarrow \not\subset x\}.$$

On montre que F est faiblement semi-mélangeant dans chaque direction $h \notin \{-1, +1\}$. Donc, $\tilde{\omega}_{F,h} = \Omega_{F,h}$. De plus, $\tilde{\omega}_{F,-1} = \{0, \rightarrow\}^{\mathbb{Z}}$, $\tilde{\omega}_{F,+1} = \{0, \leftarrow\}^{\mathbb{Z}}$, et F est sensible dans toutes les directions; il est dans la classe 5.

Démonstration. Par récurrence sur $t \in \mathbb{N}$, on peut voir que $F^t(x)_k = \rightarrow$ si et seulement si $x_{-t+k} = \rightarrow$ et $u = x_{[-t+k+1, t+k]}$ est un motif **équilibré à droite**; il n'envoie aucune particule à gauche, ou plus formellement :

$$\forall j \in \llbracket 0, |u| \rrbracket, \sum_{i=0}^j u_i \geq 0, \text{ où } \rightarrow = +1 \text{ et } \leftarrow = -1.$$

On peut aussi écrire

$$\forall j \in \llbracket 0, |u| \rrbracket, \sum_{i=0}^j \gamma(u_i) \geq 0, \text{ où } \gamma(u_i) = \begin{cases} +1 & \text{si } u_i = \rightarrow \\ 0 & \text{si } u_i = 0 \\ -1 & \text{si } u_i = \leftarrow \end{cases}.$$

Généralisation de cette récurrence, on peut voir que si $k \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$, $\leftarrow \not\subset w$ et $u \in A^{2t}$ est équilibré à droite, alors $F^t([wu]_k) \subseteq [w]_{k+t}$. On définit des motifs **équilibrés à gauche** symétriquement. Si $\rightarrow \not\subset z$ et u est équilibré à gauche, alors $F^t([uz]_k) \subseteq [z]_{k+t}$.

- Soient $[u]_m$, $[u']_{m'}$, $[v]_n$ et $[v']_{n'}$ quatre cylindres, les deux derniers intersectant Ω_F . Par l'expression de Ω_F , on peut les décomposer comme $v = wz$, $v' = w'z'$, avec $\leftarrow \not\subset w, w'$ et $\rightarrow \not\subset z, z'$.

On montre qu'il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que

$$F^t \sigma^{h(t)}([u]_m) \cap [v]_n \neq \emptyset \text{ et } F^t \sigma^{h(t)}([u']_{m'}) \cap [v']_{n'} \neq \emptyset.$$

Si h est oblique, le résultat découle de la proposition 3.4.2, donc on peut supposer que $h \in]-1, +1[$.

On peut supposer que u est un motif équilibré à gauche et à droite : on peut simplement l'étendre par un nombre approprié de \rightarrow sur la gauche, et un nombre approprié de \leftarrow sur la droite (le cylindre obtenu est inclus dans l'original). On peut aussi ajouter des 0 à u et u' jusqu'à pouvoir supposer qu'ils ont la même longueur et que $m = m'$.

Puisque $h \succ -1$, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que

$$h(t) > -t + \max(n + |w|, n' + |w'|) - m.$$

Puisque $h \prec 1$, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que

$$h(t) < t + \min(n + |w|, n' + |w'|) - m - |u|.$$

Ces t pourraient être distincts, mais il n'est pas difficile d'être convaincu que, puisque h à variations bornées, il y a $t \in \mathbb{N}$ commun qui satisfait tous les deux. Dans ce cas, on peut définir

$$\tilde{u} = 0^{t-n+h(t)-|w|+m} u^{t-m-|u|+n-h(t)+|w|}.$$

Clairement, il est encore équilibré à gauche et à droite, de telle sorte que

$$F^t \sigma^{h(t)}([w\tilde{u}]_{n-h(t)-t}) \subseteq [w]_n \text{ et } F^t \sigma^{h(t)}([\tilde{u}z]_{n-h(t)+|w|-t}) \subseteq [z]_{n+|w|}.$$

En prenant l'intersection, on obtient

$$F^t \sigma^{h(t)}([w\tilde{u}z]_{n-h(t)-t}) \subseteq [v]_n.$$

De plus, $[w\tilde{u}z]_{n-h(t)-t} \subseteq [\tilde{u}]_{n-h(t)-t+|w|} \subseteq [u]_m$; on obtient l'intersection non vide désirée.

Le même raisonnement peut être suivi pour $[u']_{m'}$ et $[v']_{n'}$ pour le même t .

- Le corollaire 4.2.8 donne alors que pour chaque $h \notin \{-1, +1\}$, $\tilde{\omega}_{F,h} = \Omega_F$ et F est sensible.

Comme l'ensemble des directions de quasi-équicontinuité est un intervalle, au moins une direction dans $\{-1, +1\}$ devrait aussi être sensible. Puisque la définition de la règle locale est exactement symétrique, les deux directions sont aussi sensibles.

- Maintenant, on considère la direction $h = +1$. Pour $i \in \mathbb{N}$, soit W_i l'ensemble de configurations $x \in A^{\mathbb{Z}}$ tel que $x_{\llbracket 1, i \rrbracket}$ n'est pas équilibré à droite. Si $x \in W_i$, alors par définition, $x_{\llbracket 1, t \rrbracket}$ n'est pas équilibré à droite, pour $t \geq i$, de telle sorte que, par la première affirmation de la démonstration, $F^t \sigma^t(x)_0 \neq \rightarrow$.

Puisque chaque motif peut être étendu à droite en un motif qui n'est pas équilibré à droite, on voit que $W = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i$ est un ouvert dense.

On obtient que $\omega_{F,1}(W) \cap [\rightarrow] = \emptyset$. Donc, $\omega_{F,1}(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^n(W)) \subseteq \{0, \leftarrow\}^{\mathbb{Z}}$.
Puisque $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^n(W)$ est comaigne, $\tilde{\omega}_{F,1} \subseteq \{0, \leftarrow\}^{\mathbb{Z}}$.

Réciproquement, pour chaque cylindres $[u]_m$ et $[v]_n$, le dernier intersectant $\{0, \leftarrow\}^{\mathbb{Z}}$, le même argument ci-dessus permet de trouver un $t \in \mathbb{N}$ arbitrairement grand tel que $F^t([u]_m)$ intersecte $[v]_n$, de telle sorte que le point 2 du lemme 4.1.3 affirme que $[v]_n$ intersecte l'ensemble limite générique.

— L'argument symétrique exact règle le cas de $h = -1$. □

Les deux derniers exemples sont seulement cités et pas définis formellement, parce qu'ils peuvent remplir un article entier. Le premier montre qu'il est pertinent d'étudier des directions arbitraires plutôt que des directions juste linéaires.

Exemple 4.4.8. Dans [21, Prop 3.3], un AC est construit, qui est quasi-équicontinu selon h si et seulement si $0 \prec h \prec p$, où p est une fonction explicite près de la fonction de racine carrée. Cet AC est dans la classe 3 : il existe un intervalle non dégénéré de directions de quasi-équicontinuité, mais seulement une d'entre elles est linéaire.

Avec une certaine opération de groupage horizontal et un produit avec l'AC construit dans [21, Prop 3.1] qui traite de l'autre côté d'une parabole, on peut même obtenir un AC qui est toujours dans la classe 3, mais qui est sensible selon toutes les directions linéaires.

Exemple 4.4.9. Dans [12, Thm 6.1], un AC F est construit avec un mot u qui est bloquant dans un intervalle non dégénéré de directions, tel que $\omega_F([u]_0)$ est l'orbite non triviale d'une configuration monochrome (en particulier, $\tilde{\omega}_{F^2} = \Omega_{F^2, \mu} \subsetneq \Omega_{F, \mu} = \tilde{\omega}_F$). Cela montre que les AC de la classe 3 ne sont pas toujours génériquement nilpotents : Ils peuvent converger vers une orbite non triviale, à condition que les mots bloquants soient des Jardins d'Éden.

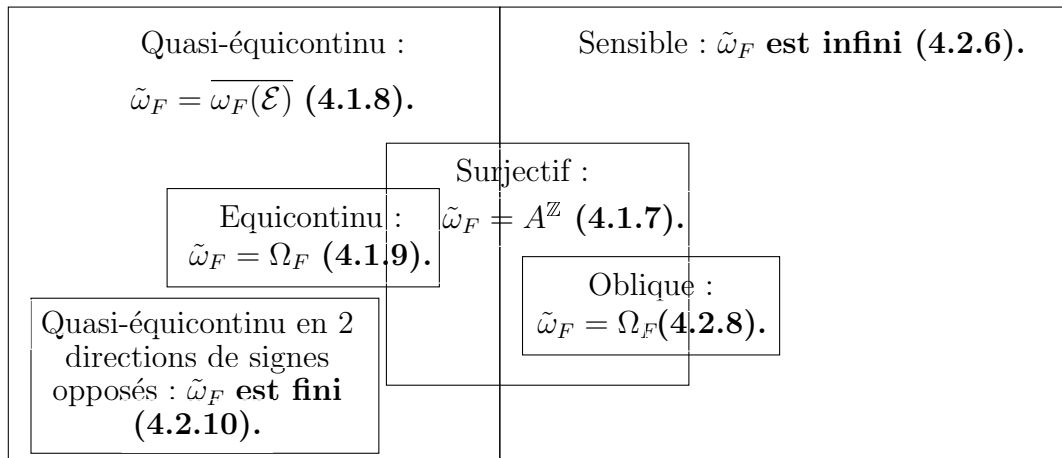


FIGURE 4.3 – Résumé des résultats. Les AC nilpotents ne sont pas considérés.

CHAPITRE 5

FACTEURS ÉQUICONTINUS

Un système dynamique $\mathfrak{F}' = (F'_t)_t$ sur Y est un facteur d'un système dynamique $\mathfrak{F} = (F_t)_t$ sur X s'il existe une application continue et surjective $\Phi : X \rightarrow Y$ telle que $t \in \mathbb{N}, F'_t \Phi = \Phi F_t$. Dans un certain sens cela signifie que \mathfrak{F}' est une simplification de la dynamique de \mathfrak{F} , une partie de l'information sur \mathfrak{F} est perdue au cours de ce procédé.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux facteurs équicontinus des systèmes dynamiques, plus particulièrement des automates cellulaires.

5.1 Définitions

Soit $\mathfrak{F} = (F_t)_t$ (resp. $\mathfrak{F}' = (F'_t)_t$) un SD sur X (resp. sur Y).

- Un **morphisme** de \mathfrak{F} dans \mathfrak{F}' est une application continue $\Phi : X \rightarrow Y$ telle que

$$\Phi \mathfrak{F} = \mathfrak{F}' \Phi \iff \Phi F_t = F'_t \Phi \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

- Si Φ est un morphisme surjectif de \mathfrak{F} dans \mathfrak{F}' , alors Φ est une **factorisation** (ou **application facteur** ou **semi-conjugaison**) et \mathfrak{F}' est dit **facteur** de \mathfrak{F} . On dit également que \mathfrak{F} est une extension de \mathfrak{F}' .
- On dit que \mathfrak{F}' est un **facteur maximal** de \mathfrak{F} si tout facteur de \mathfrak{F} est un facteur de \mathfrak{F}' .
- On dit que \mathfrak{F}' est un **facteur équicontinu maximal** de \mathfrak{F} si tout facteur équicontinu de \mathfrak{F} est un facteur équicontinu de \mathfrak{F}' .
- On dit qu'une factorisation est **cellulaire** si elle commute avec décalage.

Tout système dynamique uniforme a un facteur équicontinu maximal et la preuve du théorème suivant est dans le livre de Kůrka [43].

Théorème 5.1.1. [25] *Tout SD uniforme possède un facteur équicontinu maximal.*

Factorisation semi-ouverte. Soient deux espaces topologiques X et Y .

- On dit qu'une application f de X vers Y est **ouverte** si pour tout ouvert $U \subseteq X$, l'image $f(U)$ est ouverte dans Y .
- On dit qu'une application f de X vers Y est **semi-ouverte** ou **quasi-ouverte** si pour tout ouvert $U \subseteq X$, l'image $f(U)$ est d'intérieur non vide.
- Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite **relativement ouverte** (resp. **relativement semi-ouverte**) si sa corestriction $X \rightarrow f(X)$ est ouverte (resp. semi-ouverte).

On sait que la préimage par une application continue d'un ouvert est un ouvert. Si, de plus, l'application est semi-ouverte, alors la préimage d'un ensemble dense est dense.

Lemme 5.1.2 ([29]). *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue surjective entre deux espaces métriques compacts. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f est semi-ouverte.
2. La préimage de tout sous-ensemble dense dans Y est dense dans X .

L'extension d'un système dynamique uniforme sensible est sensible si la factorisation est semi-ouverte (voir [5]). On note qu'une application semi-ouverte a été appelée application quasi-ouverte dans [5]. Dans la proposition suivante, nous montrons que L'extension d'un système dynamique non uniforme sensible est aussi sensible si la factorisation est semi-ouverte.

Proposition 5.1.3. *Soient \mathfrak{F} un SD sur X et \mathfrak{F}' un SD sur Y tels que \mathfrak{F}' est un facteur sensible de \mathfrak{F} par Φ . Si Φ est une application facteur semi-ouverte, alors \mathfrak{F} est sensible.*

Démonstration. Comme X est compact, l'application facteur Φ est uniformément continue ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in X, d(x_1, x_2) < \delta \implies d(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) < \varepsilon.$$

On suppose que \mathfrak{F}' est ε -sensible et \mathfrak{F} n'est pas $\frac{1}{2}\delta$ -sensible. Il existe $x_0 \in X$ et un voisinage U de x_0 tels que

$$d(F_t(x_0), F_t(x)) < \frac{1}{2}\delta,$$

pour tout $x \in U$ et pour tout $t \in \mathbb{N}$. Par l'inégalité triangulaire on a :

$$d(F_t(x), F_t(x')) < \delta,$$

pour tous $x, x' \in U$ et pour tout $t \in \mathbb{N}$.

Comme Φ est semi-ouverte, $\Phi(U) \subseteq W$, où W est un ouvert non vide.

Soit $y, y' \in W$. On choisit $x, x' \in U$ tels que

$$\Phi(x) = y, \Phi(x') = y'.$$

Alors, on a

$$d(F'_t(y), F'_t(y')) = d(F'_t\Phi(x), F'_t\Phi(x')) = d(\Phi F_t(x), \Phi F_t(x')) < \varepsilon.$$

On peut choisir un voisinage arbitraire W' de y tel que pour tout $y' \in W \cap W'$ la formule précédente reste vraie. Nous obtenons une contradiction, car \mathfrak{F}' est sensible. \square

D'après Gilman [28], une factorisation qui commute avec décalage est semi-ouverte.

Lemme 5.1.4. *Soient A_1, A_2 deux alphabets et $f : A_1^{\mathbb{Z}} \rightarrow A_2^{\mathbb{Z}}$ une application continue qui commute avec le décalage. Alors, f est relativement semi-ouverte.*

Corollaire 5.1.5. *Tout automate cellulaire est relativement semi-ouvert. Donc, tout AC surjectif est semi-ouvert.*

Facteur d'un produit qui n'est pas un produit de facteurs. On sait que le produit de deux facteurs est un facteur du produit de ses extensions, mais le facteur d'un produit n'est pas toujours un produit de facteurs.

Proposition 5.1.6. *Le facteur équicontinu maximal de $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$ est \mathfrak{F} si \mathfrak{F} est un SD équicontinu et \mathfrak{F}' est un SD faiblement mélangeant.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{F} = (F_t)_t$ un SD sur X et $\mathfrak{F}' = (F'_t)_t$ un SD sur Y . On suppose que $\mathfrak{F}'' = (F''_t)_t$ est un facteur équicontinu sur Z de $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$ par l'application Φ .

1. Si $\forall (x, y, y') \in X \times Y^2, \Phi(x, y) = \Phi(x, y') : On pose$

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x, y) \text{ pour tout } y \in Y.$$

On a

$$\mathfrak{F}''\tilde{\Phi}(x) = \mathfrak{F}''\Phi(x, y) = \Phi(\mathfrak{F}(x), \mathfrak{F}'(y)) = \tilde{\Phi}\mathfrak{F}(x).$$

Alors, \mathfrak{F}'' est un facteur de \mathfrak{F} par $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x, y)$.

2. Si $\exists(x, y, y') \in X \times Y^2, \Phi(x, y) \neq \Phi(x, y')$:
 \mathfrak{F}'' est équicontinu : Soit $\epsilon > 0$,

$$\exists\delta > 0, \forall(z, z') \in Z^2, d(z, z') < \delta \implies d(F_t''(z), F_t''(z')) < \epsilon, \forall t \in \mathbb{N}.$$

Φ est uniformément continu : Soit $\delta > 0$,

$$\exists\delta' > 0, \forall(y'', y''') \in Y^2, d(y'', y''') < \delta' \implies d(\Phi(x, y''), \Phi(x, y''')) < \delta.$$

Donc,

$$\begin{aligned} d(y'', y''') < \delta' &\implies d(\Phi(x, y''), \Phi(x, y''')) < \delta \\ &\implies d(F_t''(\Phi(x, y'')), F_t''(\Phi(x, y'''))) < \epsilon. \\ &\implies d(\Phi(F_t(x), F_t'(y'')), \Phi(F_t(x), F_t'(y'''))) < \epsilon, \forall t \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

D'autre part, \mathfrak{F}' est faiblement mélangeant : $\forall y, y' \in Y, \exists t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} B_{\delta'}(y) \cap F'_{-t}(B_{\delta'}(y)) &\neq \emptyset, \\ B_{\delta'}(y) \cap F'_{-t}(B_{\delta'}(y')) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned} y'' &\in B_{\delta'}(y) \text{ et } y'' \in F'_{-t}(B_{\delta'}(y)), \\ y''' &\in B_{\delta'}(y) \text{ et } y''' \in F'_{-t}(B_{\delta'}(y')). \end{aligned}$$

On pose, $d(\Phi(x, y), \Phi(x, y')) = 3\epsilon$.

$$\begin{aligned} &d(\Phi(F_t(x), F_t'(y'')), \Phi(F_t(x), F_t'(y'''))) > \\ &d(\Phi(F_t(x), y), \Phi(F_t(x), y')) - d(\Phi(F_t(x), y), \Phi(F_t(x), F_t'(y''))) - \\ &d(\Phi(F_t(x), F_t'(y''')), \Phi(F_t(x), y')) > 3\epsilon - \epsilon - \epsilon = \epsilon. \end{aligned} \quad (5.2)$$

De (5.1) et (5.2) on a une contradiction.

Donc, \mathfrak{F} est le facteur équicontinu maximal de $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$. □

5.2 Facteurs équicontinus de SD d'ensemble limite générique fini

Dans cette section, on va montrer que si un certain système dynamique a un ensemble limite générique fini, alors ses facteurs équicontinus sont d'ensemble

5.2. FACTEURS ÉQUICONTINUS DE SD D'ENSEMBLE LIMITE GÉNÉRIQUE
 limite fini. FINI

On va voir dans la proposition suivante le lien entre les ensembles limites et entre les domaines d'attractions de deux SD s'il existe un morphisme entre eux.

Proposition 5.2.1. *Soient Φ un morphisme du SD \mathfrak{F} sur X au SD \mathfrak{F}' sur X' , $U, V \subseteq X$, $y \in X$ et $V' \subseteq X'$.*

1. $\Phi(\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(y)) \subseteq \mathcal{A}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(y))$.
2. $\Phi(\Omega_{\mathfrak{F}}(U)) = \Omega_{\mathfrak{F}'}(\Phi(U))$ et $\Phi(\omega_{\mathfrak{F}}(U)) = \omega_{\mathfrak{F}'}(\Phi(U))$.
3. Si V est fermé, alors $\Phi(\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)) \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(V))$.
4. Si, de plus, Φ est surjectif, alors $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\Phi^{-1}(V')) = \Phi^{-1}(\mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(V'))$.

Démonstration.

1. Soit $z \in \Phi(\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(y))$. $\exists x \in \mathcal{A}_{\mathfrak{F}}(y)$ tel que $z = \Phi(x)$. Donc,
 $\forall \varepsilon, \exists \delta, \exists T \in \mathbb{N}, \forall t \geq T, d(F_t(x), F_t(y)) < \delta, d(\Phi(F_t(x)), \Phi(F_t(y))) < \varepsilon$,
 car Φ est continu.
 Puisque Φ est un morphisme, $d(F'_t(\Phi(x)), F'_t(\Phi(y))) < \varepsilon$.
 Donc, $\Phi(x) = z \in \mathcal{A}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(y))$.
2. Par définition, on a

$$\Phi(\Omega_{\mathfrak{F}}(U)) = \Phi\left(\bigcap_{T \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{t \geq T} (F_t(U))}\right) \subseteq \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \Phi\left[\overline{\bigcup_{t \geq T} (F_t(U))}\right].$$

On va montrer l'autre inclusion.

Soit $x \in \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \Phi\left[\overline{\bigcup_{t \geq T} (F_t(U))}\right]$, donc $x \in \Phi\left[\overline{\bigcup_{t \geq T} (F_t(U))}\right] \forall T \in \mathbb{N}$.

Soit $A = \Phi^{-1}(x)$. A est un fermé, car Φ est continu.

Soit $A_T = A \cap \overline{\bigcup_{t \geq T} (F_t(U))}$, donc $(A_T)_T$ est une suite décroissante de fermés non vides.

Puisque X est compact, $\bigcap_{T \in \mathbb{N}} A_T \neq \emptyset$.

De plus, $\bigcap_{T \in \mathbb{N}} A_T \subseteq \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{t \geq T} (F_t(U))}$. Donc,

$$x = \Phi\left(\bigcap_{T \in \mathbb{N}} A_T\right) \subseteq \Phi\left(\bigcap_{T \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{t \geq T} (F_t(U))}\right).$$

CHAPITRE 5. FACTEURS ÉQUICONTINUS

Puisque X est compact et Φ est continu,

$$\bigcap_{T \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{t \geq T} \Phi(F_t(U))} = \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{t \geq T} \Phi(F_t(U))} =$$

$$\bigcap_{T \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{t \geq T} \Phi(F_t(U))} = \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{t \geq T} F'_t(\Phi(U))} = \Omega_{\mathfrak{F}'}(\Phi(U)).$$

De plus, $\Phi(\omega_{\mathfrak{F}}(U)) = \Phi(\bigcup_{x \in U} \Omega_{\mathfrak{F}}(x)) = \bigcup_{x \in U} \Phi(\Omega_{\mathfrak{F}}(x)) = \bigcup_{x \in U} \Omega_{\mathfrak{F}'}(\Phi(x)) = \omega_{\mathfrak{F}'}(\Phi(U))$ par le point précédent.

3. Soit $x \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$. Alors $\emptyset \neq \omega_{\mathfrak{F}}(x) \subseteq V$. Donc, $\Phi(\omega_{\mathfrak{F}}(x)) \subseteq \Phi(V)$. D'après le point précédent, $\Phi(\omega_{\mathfrak{F}}(x)) = \omega_{\mathfrak{F}'}(\Phi(x))$. Donc, $\omega_{\mathfrak{F}'}(\Phi(x)) \subseteq \Phi(V)$ et $\Phi(x) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(V))$.
4. $x \in \Phi^{-1}(\mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(V'))$. Ceci est équivalent à $\omega_{\mathfrak{F}'}(\Phi(x)) \subseteq V'$. D'après le premier point, $\omega_{\mathfrak{F}'}(\Phi(x)) = \Phi(\omega_{\mathfrak{F}}(x))$ donc, $\omega_{\mathfrak{F}}(x) \subseteq \Phi^{-1}(V')$. Ceci est vrai si et seulement si $x \in \mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\Phi^{-1}(V'))$. \square

On va voir dans la proposition suivante le lien entre les ensembles limites génériques de deux SD s'il existe une factorisation entre eux.

Proposition 5.2.2. *Soit Φ une factorisation du SD \mathfrak{F} sur X au SD \mathfrak{F}' sur X' .*

1. Si \mathfrak{F}' est quasi-équicontinu, alors $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'} \subseteq \Phi(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}})$.
2. Si Φ est semi-ouvert, alors $\Phi(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}) \subseteq \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'}$.

Démonstration.

1. Par le point 3 de la proposition 5.2.1, $\Phi(\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}})) \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}))$. Puisque $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}})$ est dense et Φ est continu et surjectif, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}))$ est aussi dense. Si \mathfrak{F}' est quasi-équicontinu, alors $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}'} \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}))$ par la proposition 1.2.11. Donc, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'} = \overline{\omega(\mathcal{E}_{\mathfrak{F}'})} \subseteq \Phi(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}})$, parce que X est compact, Φ est continu et $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est fermé.
2. On a $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, où U_n sont des ouverts denses de Y . Par le point 4 de la proposition 5.2.1, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(\Phi^{-1}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'})) = \Phi^{-1}(\mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'})) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Phi^{-1}(U_n)$. Puisque Φ est semi-ouvert, les $\Phi^{-1}(U_n)$ sont des ouverts denses de X . Donc, $\Phi^{-1}(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'})$ a un domaine comaire, de sorte qu'il contient $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$. Autrement dit, $\Phi(\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}) \subseteq \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'}$. \square

Tout système dynamique équicontinu et asymptotiquement nilpotent est nilpotent, d'après la proposition suivante.

5.2. FACTEURS ÉQUICONTINUS DE SD D'ENSEMBLE LIMITE GÉNÉRIQUE

FINI

Proposition 5.2.3. *Soit \mathfrak{F} un SD sur X . Si \mathfrak{F} est asymptotiquement nilpotent et équicontinu, alors \mathfrak{F} est nilpotent.*

Démonstration. \mathfrak{F} est asymptotiquement nilpotent, donc $\omega_{\mathfrak{F}}$ est un singleton. Comme \mathfrak{F} est équicontinu, $\overline{\omega_{\mathfrak{F}}} = \Omega_{\mathfrak{F}}$, d'après la proposition 4.1.9. Donc, $\Omega_{\mathfrak{F}}$ est aussi un singleton. De plus, $\exists T \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{F}^T(X) = \Omega_{\mathfrak{F}}$ puisque \mathfrak{F} est d'ensemble limite stable. Donc, $\exists T \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{F}^T(X)$ est aussi un singleton. Autrement dit, \mathfrak{F} est nilpotent. \square

On va utiliser la proposition précédente pour montrer que tous les facteurs équicontinus d'un automate cellulaire d'ensemble limite générique fini sont nilpotents.

Proposition 5.2.4. *Si \mathfrak{F} est un SD tel que $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est fini, alors l'ensemble limite de tout facteur équicontinu \mathfrak{F}' est fini. De plus :*

1. *Si \mathfrak{F} est donné par un AC (selon une certaine direction), alors \mathfrak{F}' est asymptotiquement nilpotent. Si, de plus, \mathfrak{F}' est équicontinu, alors \mathfrak{F}' est nilpotent.*
2. *Si \mathfrak{F}' est donné par un AC (selon une certaine direction), alors \mathfrak{F}' est nilpotent.*

Démonstration. Soit Φ une application facteur du SD \mathfrak{F} sur X au SD équicontinu \mathfrak{F}' sur Y . Par la proposition 4.1.9, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'} = \Omega_{\mathfrak{F}'}$. Si, de plus, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}}$ est fini, alors $\Omega_{\mathfrak{F}'} = \tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'}$ est aussi fini par la proposition 5.2.2.

1. Par la proposition 4.2.7, $\tilde{\omega}_{F,h}$ est l'orbite $\mathcal{O}_{F,h}(y)$ d'une certaine configuration monochrome $y \in A^{\mathbb{Z}}$ telle que $\mathcal{A}_{F,h}(y)$ est comaigne. Par le point 1 de la proposition 5.2.1, $\Phi(\mathcal{A}_{F,h}(y)) \subseteq \mathcal{A}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(y))$, et $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(y))$ est aussi comaigne, par la surjectivité de Φ . $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(y))$ est donc l'espace entier $A^{\mathbb{Z}}$. En particulier, $\Phi F(y)$ est asymptotique à $\Phi(y)$. D'autre part, on remarque que, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $F'_t \Phi(y) = \Phi F_t(y)$ est le sous-système surjectif fini $\Phi(\mathcal{O}_F(y))$. La relation précédente avec la remarque 1.1.1 permettent de conclure que $\Phi F(y) = \Phi(y)$. Nous avons prouvé que tout point dans le système est asymptotique à un même point fixe, c'est-à-dire \mathfrak{F}' est asymptotiquement nilpotent. Si, De plus, \mathfrak{F}' est équicontinu, alors \mathfrak{F}' est nilpotent, d'après la proposition 5.2.3.
2. Tout AC d'ensemble limite fini est nilpotent. \square

On sait que l'ensemble limite générique de tout automate cellulaire quasi-équicontinu en deux directions est fini.

Corollaire 5.2.5. *Si F est AC quasi-équicontinu selon deux directions $h' \prec \prec h''$, alors il existe un intervalle des directions non trivial S tel que tous les facteurs équicontinus de F sont nilpotents selon tout $h \in S$.*

Démonstration. $\tilde{\omega}_F$ est fini selon tout $h \in S$ par la proposition 3.3.4. Donc, tous les facteurs équicontinus de F sont nilpotents selon tout $h \in S$ par la proposition 5.2.4. \square

L'automate cellulaire de l'exemple suivant est quasi-équicontinu en deux directions de signes opposés et n'a aucun facteur automate cellulaire équicontinu non nilpotent.

Exemple 5.2.6. *Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ l'automate cellulaire suivant :*

$$F(x)_i = \min(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}).$$

Alors,

$$F(\infty 1^\infty) = \infty 1^\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = \infty 0^\infty \text{ si } x \in A^{\mathbb{Z}} \setminus \{\infty 1^\infty\}.$$

Soit H un facteur AC de F par la factorisation Φ alors $\Phi F(x) = H\Phi(x)$.

Donc,

$$\Phi(\infty 1^\infty) = H\Phi(\infty 1^\infty) \text{ et}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(F^t(x)) = \Phi(\infty 0^\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} H^t\Phi(x) \text{ si } x \in A^{\mathbb{Z}} \setminus \{\infty 1^\infty\}.$$

On pose $\Phi(\infty 0^\infty) = a$ et $\Phi(\infty 1^\infty) = b$.

Pour $a = b$: H équicontinu (tout AC asymptotiquement nilpotent est nilpotent).

Pour $a \neq b$: H n'est pas équicontinu.

La proposition suivante est une généralisation de la proposition 5.2.4.

Proposition 5.2.7. *Si \mathfrak{F} est un SD et V est un fermé fini de X tel que $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ est dense, alors l'ensemble limite générique de tout facteur quasi-équicontinu de \mathfrak{F} est fini et tout facteur équicontinu AC de \mathfrak{F} est nilpotent.*

Démonstration. Soit \mathfrak{F}' un facteur de \mathfrak{F} par l'application facteur Φ . D'après le point 3 de la proposition 5.2.1,

$$\Phi(\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)) \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(V)).$$

Comme Φ est continu surjectif et $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V)$ (resp. V) est dense (resp. fini), $\Phi(\mathcal{D}_{\mathfrak{F}}(V))$ (resp. $\Phi(V)$) est aussi dense (resp. fini). Donc, $\mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(V))$ est dense.

5.3. FACTEURS ÉQUICONTINUS DE SD FAIBLEMENT SEMI-MÉLANGEANTS

Si \mathfrak{F}' est quasi-équicontinu, alors $\mathcal{E}_{\mathfrak{F}'} \subseteq \mathcal{D}_{\mathfrak{F}'}(\Phi(V))$ donc, $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'}$ est fini. Si \mathfrak{F}' est un AC équicontinu, alors \mathfrak{F}' est nilpotent, car $\tilde{\omega}_{\mathfrak{F}'} = \Omega_{\mathfrak{F}'}$ est fini. \square

L'ensemble limite générique est un fermé et son domaine est dense.

Corollaire 5.2.8. *Un SD d'ensemble limite générique fini n'a aucun facteur AC équicontinu non nilpotent.*

Tout AC quasi-équicontinu en deux directions distinctes possède un ensemble fini qui a un domaine d'attraction dense dans toute les directions.

Corollaire 5.2.9. *Si F est un AC quasi-équicontinu selon deux directions distinctes, alors tous les facteurs équicontinus de F qui sont AC sont nilpotents dans toutes les directions.*

5.3 Facteurs équicontinus de SD faiblement semi-mélangeants

Dans cette section, on va montrer que tout facteur équicontinu d'un SD faiblement semi-mélangeant est d'ensemble limite trivial. Si le SD d'ensemble limite trivial est surjectif, alors il est trivial.

Dans la proposition suivante, on va montrer que les propriétés de semi-transitivité et de semi-mélange faible sont préservées par factorisation.

Proposition 5.3.1.

1. *Tout facteur d'un SD semi-transitif est un SD semi-transitif.*
2. *Tout facteur d'un SD faiblement semi-mélangeant est un SD faiblement semi-mélangeant.*

Démonstration.

1. Soient (X, \mathfrak{F}) un SD semi-transitif et (Y, \mathfrak{F}') son facteur par Φ . Soient U_1 et U_2 deux ouverts de Y avec $U_2 \cap \Omega_{\mathfrak{F}'} \neq \emptyset$. Puisque Φ est surjectif continu, il existe des ouverts V_1 et V_2 de X tels que $\Phi(V_1) = U_1$ et $\Phi(V_2 \cap \Omega_{\mathfrak{F}}) = U_2 \cap \Omega_{\mathfrak{F}'}$. Puisque Φ est un morphisme,

$$\Phi(F_t(V_i)) = F'_t(\Phi(V_i)) = F'_t(U_i), i = 1, 2.$$

Puisque $\mathfrak{F} : X \rightarrow X$ est semi-transitif, pour tous ouverts V_1 et V_2 de X avec $V_2 \cap \Omega_{\mathfrak{F}} \neq \emptyset$, pour tout $T \in \mathbb{N}$, il existe $t \geq T$ tel que $F_{-t}(V_2) \cap V_1 \neq \emptyset$.

CHAPITRE 5. FACTEURS ÉQUICONTINUS

D'après les relations précédentes,

pour tous ouverts $U_1, U_2 \subseteq Y$ avec $U_2 \cap \Omega_{\mathfrak{F}'} \neq \emptyset$, pour tout $T \in \mathbb{N}$, il existe $t \geq T$ tel que $F'_{-t}(U_2) \cap U_1 \neq \emptyset$.

2. Soit (X, \mathfrak{F}) un SD faiblement semi-mélangeant et (Y, \mathfrak{F}') son facteur. Donc, $(X \times X, \mathfrak{F} \times \mathfrak{F})$ est semi-transitif et $(Y \times Y, \mathfrak{F}' \times \mathfrak{F}')$ est son facteur. D'après le point précédent, $(Y \times Y, \mathfrak{F}' \times \mathfrak{F}')$ est aussi semi-transitif. Autrement dit, (Y, \mathfrak{F}') est faiblement semi-mélangeant. \square

Tout système dynamique transitif est semi-transitif et surjectif. Il est bien connu que tout facteur d'un SD transitif (resp. faiblement mélangeant) est transitif (resp. faiblement mélangeant) (voir la preuve par exemple dans [43]).

Corollaire 5.3.2.

1. *Tout facteur d'un SD transitif est un SD transitif.*
2. *Tout facteur d'un SD faiblement mélangeant est un SD faiblement mélangeant.*

D'après la proposition suivante, un SD faiblement semi-mélangeant n'a aucun facteur équicontinu non nilpotent.

Proposition 5.3.3. *Tout facteur équicontinu d'un SD faiblement semi-mélangeant est nilpotent.*

Démonstration. D'après le point 2 de la proposition 5.3.1, tout facteur d'un SD faiblement semi-mélangeant est un SD faiblement semi-mélangeant. Donc, tout facteur est soit sensible soit d'ensemble limite trivial, d'après la remarque 1.2.23. De plus, tout SD équicontinu d'ensemble limite trivial est nilpotent, d'après la proposition 5.2.3. \square

5.4 Facteurs de SD ultimement périodiques

On va montrer que tous les facteurs d'un AC équicontinu sont équicontinus.

On sait que tous les facteurs d'un SD ultimement périodique sont ultimement périodiques

Proposition 5.4.1. *Tout facteur d'un SD périodique de période p a une période p' qui divise p et tout facteur d'un SD ultimement périodique est ultimement périodique.*

Démonstration.

1. Soient (X, \mathfrak{F}) un SD périodique de période $p > 0$ et $\Phi : (X, \mathfrak{F}) \rightarrow (Y, \mathfrak{F}')$ une application facteur. Alors, $\forall t \geq 0, \Phi F_t(X) = F'_t \Phi(X)$, donc $\Phi F_p(X) = F'_p \Phi(X)$ et $\Phi(X) = F'_p \Phi(X)$, puisque Φ est surjectif. Donc, \mathfrak{F}' est périodique de période p' qui divise p .

Si p est un nombre premier alors $p' = 1 \vee p$ ou $p = p'$.

2. Soient (X, \mathfrak{F}) un SD ultimement périodique de période $p > 0$ et pré-période $q \geq 0$ et $\Phi : (X, \mathfrak{F}) \rightarrow (Y, \mathfrak{F}')$ une application facteur. Alors, $\forall t \geq 0, \Phi F_t(X) = F'_t \Phi(X)$, donc $\Phi F_{p+q}(X) = F'_{p+q} \Phi(X)$ et $\Phi F_q(X) = F'_{p+q} \Phi(X)$, puisque Φ est surjectif. On a aussi,

$$\Phi F_q(X) = F'_q \Phi(X).$$

Alors,

$$F'_{p+q} \Phi(X) = F'_q \Phi(X).$$

Autrement dit, \mathfrak{F}' est aussi ultimement périodique. □

On sait que tout SD ultimement périodique est équicontinu.

Corollaire 5.4.2. *Tous les facteurs d'un SD ultimement périodique sont équicontinus.*

On sait que tout automate cellulaire équicontinu est ultimement périodique.

Corollaire 5.4.3. *Tous les facteurs d'un AC équicontinu sont équicontinus.*

5.5 Facteurs équicontinus directionnels

Dans cette section, nous supposons que les directions sont linéaires.

5.5.1 Produit des facteurs directionnels des AC surjectifs.

Le théorème suivant donne la classification des AC surjectifs selon une direction.

Théorème 5.5.1. [62, 1] *Soient $\alpha \in \mathbb{Z}$ et F un AC surjectif. On est dans un des trois cas suivants :*

1. $\exists \alpha' \in [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$ tel que F est équicontinu selon $\alpha = \alpha'$ et il est mélangeant selon $\alpha \neq \alpha'$.

CHAPITRE 5. FACTEURS ÉQUICONTINUS

2. $\exists \alpha' \in [-\mathbf{r}_+, -\mathbf{r}_-]$ tel que F est quasi-équicontinu selon $\alpha = \alpha'$ mais n'est pas équicontinu et il est mélangeant selon $\alpha \neq \alpha'$.
3. \exists un ensemble fini $I \subset \mathbb{Z}$, avec $I + \mathbf{r}_- \subseteq [-d, d]$, tel que F est sensible selon $\alpha \in I$ mais n'est pas mélangeant et il est mélangeant selon $\alpha \in \mathbb{Z}/I$.

Le corollaire suivant est une conséquence du théorème 5.5.1.

Corollaire 5.5.2. *L'ensemble des directions ($\alpha \in \mathbb{Z}$) dans lesquelles les AC surjectifs ont des facteurs équicontinus non triviaux est fini.*

Démonstration. Si F est surjectif, alors l'un des cas suivants doit être satisfait :

1. F est équicontinu dans une seule direction et mélangeant dans les autres directions.
2. F est quasi-équicontinu dans une seule direction et mélangeant dans les autres directions.
3. F est sensible dans un ensemble fini de directions et mélangeant hors de cet ensemble.

□

Proposition 5.5.3.

1. Si H est un facteur de F , alors $H\sigma^{[\alpha]}$ est un facteur de $F\sigma^{[\alpha]}$.
2. Si F est surjectif, alors $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_j$ est un facteur de F , où $H_i\sigma^{[\alpha_i]}$ est un facteur équicontinu de $F\sigma^{[\alpha_i]}$, où $i = 1 \cdots j$.
3. Si G est un facteur cellulaire équicontinu de $F^q\sigma^p$ et G' est un facteur cellulaire équicontinu de $F^{q'}\sigma^{p'}$, alors $(G\sigma^{-p})^{q'} \times (G'\sigma^{-p'})^q$ est un facteur de $F^{qq'}$.

Démonstration.

1. On va montrer que si H est un facteur de F alors $H\sigma^{[\alpha]}$ est un facteur de $F\sigma^{[\alpha]}$.

Soit Φ l'application facteur cellulaire ; $\Phi F = H\Phi$ et $\Phi\sigma = \sigma\Phi$. On a :

$$\Phi F = H\Phi \implies \sigma^{[\alpha]}\Phi F = \sigma^{[\alpha]}H\Phi \implies \Phi F\sigma^{[\alpha]} = H\sigma^{[\alpha]}\Phi.$$

2. Si F est surjectif et $H_i\sigma^{[\alpha_i]}$ est un facteur équicontinu de $F\sigma^{[\alpha_i]}$ pour $i = 1, \cdots, j$, alors $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_j$ est un facteur de F .

Démonstration par récurrence :

Si $H_1\sigma^{[\alpha_1]}$ est un facteur de $F\sigma^{[\alpha_1]}$, alors H_1 est un facteur de F .

On suppose que $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{j-1}$ est un facteur de F . On montre que $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_j$ est un facteur de F . D'après l'hypothèse, $(H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{j-1})\sigma^{[\alpha_j]}$ est un facteur de $F\sigma^{[\alpha_j]}$. De plus, $(H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{j-1})\sigma^{[\alpha_j]}$ est mélangeant. En effet, $H_i\sigma^{[\alpha_i]}$ est équicontinu pour $i = 1, \dots, j-1$ donc, $H_i\sigma^{[\alpha_j]}$ est mélangeant pour $i = 1, \dots, j-1$ et un produit de systèmes mélangeants est mélangeant, d'après le théorème 1.1.15.

Comme $H_j\sigma^{[\alpha_j]}$ est équicontinu, $(H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_{j-1} \times H_j)\sigma^{[\alpha_j]}$ est un facteur de $F\sigma^{[\alpha_j]}$.

3. G est un facteur cellulaire équicontinu de $F^q\sigma^p$ et G' est un facteur cellulaire équicontinu de $F^{q'}\sigma^{p'}$ \implies
 $G^{q'}$ est un facteur cellulaire équicontinu de $F^{qq'}\sigma^{p'q}$ et G'^q est un facteur cellulaire équicontinu de $F^{q'q}\sigma^{p'q}$ \implies
 $G^{q'}\sigma^{p'q-pq'}$ est un facteur mélangeant de $F^{qq'}\sigma^{p'q}$ et G'^q est un facteur cellulaire équicontinu de $F^{q'q}\sigma^{p'q}$ \implies
 $G^{q'}\sigma^{p'q-pq'} \times G'^q$ est un facteur de $F^{qq'}\sigma^{p'q}$.
 Donc, $(G\sigma^{-p})^{q'} \times (G'\sigma^{-p'})^q$ est un facteur de $F^{qq'}$. □

5.5.2 Facteurs équicontinus directionnels automates cellulaires

La proposition suivante établit le lien entre la classification des automates cellulaires selon une direction et les facteurs équicontinus.

Proposition 5.5.4.

1. *Tout automate cellulaire quasi-équicontinu en deux directions n'a aucun facteur automate cellulaire équicontinu non nilpotent en aucune direction.*
2. *Tout automate cellulaire qui a une unique direction de quasi-équicontinuité, n'a aucun facteur automate cellulaire équicontinu non nilpotent en aucune autre direction.*

Démonstration.

1. Soit F un AC quasi-équicontinu en deux directions. Supposons que F a un facteur AC équicontinu non nilpotent G , alors $\sigma^{[\alpha]}G$ est un facteur sensible de $\sigma^{[\alpha]}F$ pour tout $\alpha \neq 0$. Autrement dit, $\sigma^{[\alpha]}F$ est sensible

CHAPITRE 5. FACTEURS ÉQUICONTINUS

pour tout $\alpha \neq 0$. Nous obtenons une contradiction, car F est quasi-équicontinu en deux directions.

En effet, d'après Gilman [28], une factorisation qui commute avec le décalage est semi-ouverte et si F a un facteur sensible par une factorisation semi-ouverte, alors F l'est aussi, d'après la proposition 5.1.3.

2. Soit F un AC quasi-équicontinu. Supposons que $\sigma^{[\alpha]}F$ a un facteur AC équicontinu non nilpotent G tel que $\alpha \neq 0$, alors $\sigma^{[-\alpha]}G$ est un facteur sensible de F . Autrement dit, F est sensible. Nous obtenons une contradiction, car F est quasi-équicontinu. \square

Corollaire 5.5.5.

1. Si on a une direction avec un facteur AC équicontinu non nilpotent, alors toutes les autres directions sont sensibles.
2. Si on a deux directions avec un facteur AC équicontinu non nilpotent, alors toutes les directions sont sensibles.

L'exemple suivant est un exemple d'un automate cellulaire sensible dans toutes les directions et il a des facteurs équicontinu non nilpotents dans deux directions différentes.

Exemple 5.5.6. Soit $F = id \times \sigma$. F admet un facteur AC équicontinu en direction 0 et -1 , et est mélangeant dans les autres directions. Autrement dit, $\sigma^p(id \times \sigma)^q = \sigma^p \times \sigma^{p+q}$ est mélangeant si et seulement si $p/q \notin \{0, -1\}$ tels que $p, q \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

1. $\sigma^p \times \sigma^{p+q}$ mélangeant $\implies p/q \notin \{0, -1\}$:
 - Si $p = 0$ alors $(id \times \sigma)^q$ a un facteur AC équicontinu non trivial c'est id , alors il n'est pas mélangeant.
 - Si $p/q = -1$ alors $\sigma^p \times id$ a un facteur AC équicontinu non trivial c'est id , alors il n'est pas mélangeant.
2. $p/q \notin \{0, -1\} \implies \sigma^p \times \sigma^{p+q}$ est mélangeant :
 On sait que σ^p est mélangeant si p non nul, σ^{p+q} est mélangeant si $p/q \neq -1$ et le produit de deux systèmes mélangeants est mélangeant, d'après le théorème 1.1.15. \square

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons étudié quelques propriétés topologiques et ergodiques des automates cellulaires et plus généralement, des automates cellulaires selon des directions et comme les automates cellulaires sont des systèmes dynamiques, nous avons montré plusieurs résultats sur les systèmes dynamiques.

D'une part, nous avons étudié l'ensemble limite générique qui est le plus petit fermé avec un domaine d'attraction comaigne. Autrement dit, nous avons étudié le comportement asymptotique de presque toutes les orbites au sens de Baire. L'ensemble limite générique est inclus dans les attracteurs sous-décalages. Si le système dynamique est sensible, l'ensemble limite générique est infini et il peut être l'attracteur maximal. Si le système dynamique est quasi-équicontinu, l'ensemble limite générique peut être une orbite non triviale d'une configuration monochrome (dans les automates cellulaires), donc l'ensemble limite générique n'est pas toujours un attracteur. Dans les automates cellulaires bidimensionnels, la quasi-équicontinuité ne correspond pas à l'existence de mots bloquants, ni à la non sensibilité. Il serait bien de savoir ce qui se passe avec l'ensemble limite générique dans les automates cellulaires à deux dimensions.

L'ensemble limite générique est aussi la version topologique de l'ensemble limite probable qui est le plus petit fermé avec un domaine d'attraction de mesure un. En général, ces deux ensembles ne sont pas égaux, mais si la mesure est à support total, ils se rencontrent. Si, de plus, la mesure est ergodique pour le décalage, ces deux ensembles sont égaux.

D'autre part, nous avons étudié les facteurs équicontinus des automates cellulaires et plus généralement, des systèmes dynamiques. Si le système dynamique a un ensemble limite générique fini, alors tous ses facteurs équicontinus sont d'ensemble limite trivial. Si, de plus, le système est un automate cellulaire, alors son facteur équicontinu maximal est nilpotent. Si le système dynamique est faiblement semi-mélangeant, alors tous ses facteurs équicontinus sont nilpotents.

CHAPITRE 5. FACTEURS ÉQUICONTINUS

Nous savons que tout automate cellulaire quasi-équicontinu en deux directions a un ensemble limite générique fini, donc son facteur équicontinu maximal est nilpotent (d'ensemble limite trivial), mais est-ce que tout automate cellulaire quasi-équicontinu surjectif a un facteur équicontinu non trivial ?

Enfin, nous avons un exemple d'un automate cellulaire sensible et non transitif qui a un facteur équicontinu non trivial, mais est-ce que tout automate cellulaire sensible et non transitif a un facteur équicontinu d'ensemble limite non trivial ?

- [1] L. Acerbi, A. Dennunzio, and E. Formenti. Conservation of some dynamical properties for operations on cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 410(38-40) :3685–3693, 2009.
- [2] E. Akin, J. Auslander, and K. Berg. When is a transitive map chaotic? *in Conference in Ergodic Theory and Probability, de Gruyter and Co.*, pages 25–40, 1996.
- [3] E. Akin, J. Auslander, and A. Nagar. Variations on the concept of topological transitivity. *arXiv :1601.05614v1*, pages 1–33, 2016.
- [4] E. Akin and J. D. Carlson. Conceptions of topological transitivity. *arXiv :1108.4710v2*, pages 1–25, 2012.
- [5] E. Akin and S. Kolyada. Li-yorke sensitivity. *Institut des Hautes Études Scientifiques 35, route de Charters 91440-Bures-sur-Yvette (France)*, pages 1–18, 2002.
- [6] J. Auslander and J. A. Yorke. Interval maps, factors of maps, and chaos. *Tohoku Math. Journ.*, 32 :177–188, 1980.
- [7] A. Ballier, P. Guillon, and J. Kari. Limit sets of stable and unstable cellular automata. *Fundamenta Informaticae*, pages 45–57, 2011.
- [8] F. Blanchard, P. Kůrka, and A. Maass. Topological and measure-theoretic properties of one-dimensional cellular automata. *Physica D*, pages 86–99, 1997.
- [9] F. Blanchard and A. Maass. Dynamical properties of expansive one-sided cellular automata. pages 1–20, 1997.
- [10] F. Blanchard and P. Tisseur. Some properties of cellular automata with equicontinuity points. *Probabilités et Statistiques, Institute Henri Poincaré*, 36 :569–58, 2000.

BIBLIOGRAPHIE

- [11] R. Bowen. Topological entropy and axiom A. In *Proc. Sympos. Pure Math.*, volume 14, pages 23–41, 1970.
- [12] L. Boyer, M. Delacourt, V. Poupet, M. Sablik, and G. Theyssier. μ -Limit sets of cellular automata from a computational complexity perspective. *Journal of Computer and System Sciences*, 81(8) :1623–1647, Dec. 2015.
- [13] G. Cattaneo, A. Dennunzio, and F. Farina. A survey on transitivity in discrete timedynamical systems. application to symbolicsystems and related languages. *RAIRO-Inf. Theor. Appl.*, pages 333–352, 2006.
- [14] R. Chemlal. Equicontinuous factors of one dimensional cellular automata. *Journal of Cellular Automata*, pages 1–11, 2018.
- [15] R. Chemlal. Some topological properties of one dimensional cellular automata. *arXiv :1904.12302v1*, pages 1–11, 2019.
- [16] B. Codenotti and L. Margara. Transitive cellular automata are sensitive. *The American Mathematical Monthly*, 103(1) :58–62, 1996.
- [17] K. Čulik II, J. Pachl, and S. Yu. On the limit set of cellular automata. *SIAM Journal on computing*, 18(4) :831–842, 1989.
- [18] J. de Vries. *Elements of Topological dynamics*. Math. Appl., vol. 257, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [19] J. de Vries. *Topological dynamical systems*. De Gruyter Studies in Mathematics, 2014.
- [20] M. Delacourt. *Automates cellulaires : dynamique directionnelle et asymptotique typique*. France, 2011.
- [21] M. Delacourt, V. Poupet, M. Sablik, and G. Theyssier. Directional dynamics along arbitrary curves in cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 412 :3800–3821, 2011.
- [22] A. Dennunzio, E. Formenti, L. Manzoni, and A. E. Porreca, editors. *Cellular Automata and Discrete Complex Systems - 23rd IFIP WG 1.5 International Workshop, AUTOMATA 2017, Milan, Italy, June 7-9, 2017, Proceedings*, volume 10248 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2017.
- [23] A. Dennunzio, P. Lena, and L. Margara. Strictly temporally periodic points in cellular automata. *AUTOMATA and JAC 2012 conferences EPTCS 90*, pages 225–235, 2012.
- [24] B. Durand and J. Mazoyer. Growing patterns in one dimensional cellular automata. *Complex Systems*, 8 :419–434, 1994.
- [25] R. Ellis and W. H. Gottschalk. Homomorphisms of transformation groups. *American Mathematical Society*, 94(2) :258–271, 1960.

-
- [26] E. Formenti and P. Kůrka. Subshift attractors of cellular automata. *Nonlinearity*, 20(1) :1–15, 2007.
- [27] M. Gardner. Mathematical games : The fantastic combinations of john conway’s new solitaire game ”life”. *Scientific American*, 223 :120–123, 1970.
- [28] R. H. Gilman. Classes of linear automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 7 :105–118, 1987.
- [29] E. Glasner. The structure of tame minimal dynamical systems. *arXiv :math/0609503*, pages 1–19, 2006.
- [30] P. Guillon. *Automates cellulaires : dynamiques, simulations, traces*. France, 2008.
- [31] P. Guillon and G. Richard. Nilpotency and limit sets of cellular automata. In Ochmański and Tyszkiewicz [57], pages 375–386.
- [32] P. Guillon and G. Richard. Asymptotic behavior of dynamical systems. arXiv : 1004.4743, 2010.
- [33] P. Guillon and V. Salo. Distortion in one-head machines and cellular automata. In Dennunzio et al. [22], pages 120–138.
- [34] G. A. Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical systems theory*, 3(4) :320–375, 1969.
- [35] L. P. Hurd. Formal language characterizations of cellular automaton limit sets. *Complex Systems*, 1 :69–80, 1987.
- [36] L. P. Hurd. Recursive cellular automata invariant sets. *Complex Systems*, 4 :119–129, 1990.
- [37] M. Hurley. Attractors in cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 10(1) :131–140, 1990.
- [38] M. Hurley. Ergodic aspects of cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 10 :671–685, 1990.
- [39] M. Hurley. Varieties of periodic attractor in cellular automata. *American Mathematical Society*, 326(2) :701–726, 1991.
- [40] J. Kari. The nilpotency problem of one-dimensional cellular automata. *SIAM J. COMPUT.*, 21(3) :571–586, 1992.
- [41] S. Kolyada and L. Snoha. Some aspects of topological transitivity—a survey. *Grazer Math. Ber.*, pages 3–35, 1997.
- [42] P. Kůrka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 17(2) :417–433, 1997.
- [43] P. Kůrka. *Topological and symbolic dynamics*. Société Mathématique de France, 2003.

BIBLIOGRAPHIE

- [44] P. Kůrka. On the measure attractor of a cellular automaton. In *International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations 5th*, pages 1–12, Pomona, CA, USA, 2004.
- [45] P. Kůrka. Cellular automata with an infinite number of subshift attractors. *Complex Systems*, 17(3) :219–230, 2007.
- [46] P. Kůrka. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, chapter Topological dynamics of one-dimensional cellular automata. In Meyers [53], Apr. 2009.
- [47] P. Kůrka and A. Maass. Limit sets of cellular automata associated to probability measures. *Journal of Statistical Physics*, 100 :1031–1047, 2000.
- [48] P. Kůrka and A. Maass. Stability of subshifts in cellular automata. *Fundamenta Informaticæ*, 52(1-3) :143–155, 2002.
- [49] P. D. Lena and L. Margara. Computational complexity of dynamical systems : the case of cellular automata. *Information and Computation*, 206 :104–1116, 2008.
- [50] P. D. Lena and L. Margara. Undecidable properties of limit set dynamics of cellular automata. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 17 :337–348, 2009.
- [51] D. Lind and B. Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, 1995.
- [52] N. Masakazu. Textile systems and one-sided resolving automorphisms and endomorphisms of the shift. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 28, 2008.
- [53] R. A. Meyers, editor. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Springer, Apr. 2009.
- [54] J. Milnor. On the concept of attractor. *Commun. Math. Phys.*, 99(2) :177–195, 1985.
- [55] T. S. Moothathu. Homogeneity of surjective cellular automata. *Discrete and continuous dynamical systems*, 13(1) :195–202, 2005.
- [56] J. V. Neumann. *Theory Of Self Reproducing Automata*. University of Illinois Press, 1966.
- [57] E. Ochmański and J. Tyszkiewicz, editors. *33rd International Symposium on the Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'08)*, volume 5162 of *Lecture Notes in Computer Science*, Toruń, Poland, Aug. 2008. Springer-Verlag.
- [58] M. Pivato. *Encyclopedia of Complexity and System Science*, chapter Ergodic Theory of Cellular Automata, pages 965–999. 2008.

-
- [59] A. R. Rivera. *Extremely Amenable Groups and Banach Representations*. May 2018.
- [60] S. Ruelle. *Chaos on interval : a survey of relationship between the various kinds of chaos for continuous interval maps*. 2018.
- [61] M. Sablik. *Étude de l'action conjointe d'un automate cellulaire et du décalage : Une approche topologique et ergodique*. France, 2006.
- [62] M. Sablik. Directional dynamics for cellular automata : A sensitivity to initial condition approach. *Theoretical Computer Science*, 400 :1–18, 2008.
- [63] V. Salo. Strict asymptotic nilpotency for cellular automata. In *Automata'17*, Milano, Italy, June 2017.
- [64] R. A. Sleiman, M. Ibrahim, and F. A. Farhat. Scientific terms' dictionary : Physics-chemistry-mathematics (english-french-arabic). *DAR AL-KOTOB AL-ILMIYAH, Beirut-Lebanon*, 2007.
- [65] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73 :747–817, 1967.
- [66] S. M. Srivastava. *A course on Borel sets*. Springer, 1998.
- [67] P. Tisseur. Cellular automata and Lyapunov exponents. *Nonlinearity*, 13(5) :1547–1560, 2000.
- [68] S. Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica 10D*, pages 1–35, 1984.