

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة باجي مختار - عنابة
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA

كلية العلوم
FACULTE DES SCIENCES

قسم الرياضيات
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Laboratoire LaPS



THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques
Option : Modélisation Mathématique-Actuariat

Estimation de Bayes d'une distribution de Gamma-Lindley

Par:

Attoui Fatma Zohra

Sous la direction de

ZEGHDOUDI Halim

Prof U.B.M. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT : Chadli Assia

Prof U. B.M. Annaba

EXAMINATEUR : Arrar Nawel

M.C.A U. B.M. Annaba

EXAMINATEUR : Benchaabane Abbas

M.C.A U. Guelma

Année : 2019

TABLE DES MATIÈRES

Dédicace	4
Remerciement	5
Résumé	7
Abstract	8
Introduction	15
1 Outils mathématiques	18
1 Notion de probabilités statistiques	18
1.1 Espace probabiliste	18
1.2 Moments	19
1.3 Fonction génératrice des moments	19
1.4 Fonction inverse d'une fonction de répartition (VaR)	20
1.5 Distribution empirique	21
2 Méthodes d'estimation des paramètres	21
2.1 Méthode des moments	21
2.2 La méthode du maximum de vraisemblance	22
2.3 L'approche Bayésienne	24
2.4 Les méthodes numériques	33
3 Lois de probabilités d'usage courant	35

3.1	Loi Exponentielle	35
3.2	Loi de Gamma	36
3.3	Loi log-normale	37
2	Estimation de la prime Bayésienne de la distribution Gamma Lindley sous la fonction de perte quadratique et la fonction de perte Linex	38
1	La distribution de Gamma Lindley	39
2	Estimations du maximum de vraisemblance (MLE)	39
3	Dérivation des primes bayésiennes	40
3.1	Estimateurs de la prime bayésienne sous la fonction de perte quadratique	41
3.2	Estimateurs de la prime bayésienne sous la fonction de perte Linex	46
4	Etude de simulation	47
5	Résultats et Discussion	52
3	Estimation bayésienne de la distribution de Zeghdoudi sous les fonctions d'erreur quadratique, de perte de Linex et de perte d'entropie	54
1	La distribution de Zeghdoudi	54
2	Estimations du maximum de vraisemblance (MLE)	56
3	Dérivation des primes bayésiennes	56
3.1	Estimateurs Bayésiens de la prime sous la fonction de perte quadratique	57
3.2	Estimateurs Bayésiens de prime sous la fonction de perte Linex	62
3.3	Estimateurs de la prime Bayésienne sous la fonction de perte d'entropie	64
4	Etude de simulation	67
5	Résultats et Discussion	71
	Conclusion et Perspectives	76
	Annexes	77

Bibliographie 90

Dédicace

A MA TRES CHERE MERE

A la plus douce et la plus merveilleuse de toutes les mamans.

Tu n'a pas cessé de me soutenir et de m'encourager, ton amour, ta générosité exemplaire et ta présence constante ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

Tes prières ont été pour moi un grand soutien tout au long de mes études.

Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

A MON TRES CHER PERE

A celui qui m'a aidé à découvrir le 'savoir' le trésor inépuisable.

De tous les pères, tu as été le meilleur, tu as su m'entourer d'attention, m'inculquer les valeurs nobles de la vie, m'apprendre le sens du travail, de l'honnêteté et de la responsabilité.

Merci d'avoir été toujours là pour moi, un grand soutien tout au long de mes études.

A MON CHER FIANCE

Dans tes yeux, j'ai toujours pu lire de la tendresse,

Tu m'as toujours soutenu, compris et réconforté tu es et restera toujours ma source d'inspiration.

Merci pour ton attention, ta patience et tes encouragements ; Merci pour tout.

A MES CHERS FRERES ET SOEURS

A ceux qui ont veillé sur moi depuis toujours, ceux qui m'ont fait confiance, dans tous mes projets et qui ont accepté mes choix sans pour autant toujours forcément les comprendre

« Attoui Fatma Zohra »

Remerciement

Enfin, nous y voici ! Quelle aventure . . .

Une thèse, bien entendu, c'est un travail de longue haleine, un défi que l'on se donne à soi-même. Mais c'est surtout une formidable histoire de relations, de rencontres et d'amitié.

La pratique de la recherche scientifique vous place souvent face à des questionnements intellectuels et des obstacles techniques. Les solutions sont imposées par le fruit des nombreux contacts que j'ai eu l'occasion de créer avec nombre de personnes passionnées dans leur projet et dans leurs spécialités.

Cette période de doctorat aura été probablement l'un des plus beaux chapitres de ma vie. J'aimerais remercier ceux et celles qui d'une manière ou d'une autre ont participé à son écriture . . .

*Si il est bien quelqu'un que je dois remercier dans cette rubrique c'est mon encadreur **Pr Zeghdoudi Halim**, mon Mentor, celui qui m'a redonné foi en la Science. Merci, de m'avoir accompagné sur ce chemin, rempli d'embûches, de m'avoir guidé et enseigné les réflexes du bon chercheur.*

Merci encore de m'avoir montré l'exemple dans la préparation et la rédaction de mes papiers et travaux. Ton écoute, ta générosité, ta patience, ton optimisme et ton extraordinaire force de travail font de toi un exemple . . . dont j'espère encore pouvoir longtemps profiter ! Encore merci à vous pour votre grande disponibilité, vos précieux conseils et votre bonne humeur. Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à qui fut pour moi un directeur de thèse attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance m'ont beaucoup appris. Ils ont été et resteront des moteurs de mon travail de chercheur.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble des membres de mon jury : Madame et Messieurs

*Je remercie la Pr. **Chadli Assia** qui a accepté d'être le président*

*Je remercie **Dr. Arrar Nawel** de l'université de Annaba, ainsi que **Dr. Benchaabane Abbas** de l'université de Guelma pour l'honneur pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux en examinant ce mémoire, pour ses conseils avisés et pour l'honneur qu'il me fait en participant à ce jury.*

*Je remercie tous les membres de l'équipe du labo et spécialement à **Pr Boutabia** l'ancien chef laboratoire qui m'a supporté et m'a permis de me lever motivé, le coeur léger et l'esprit tranquille depuis le début de ma thèse.*

Enfin je remercie tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous proposons une approche Bayésienne pour résoudre des problèmes d'inférence statistique. Plus précisément, nous estimons la prime Bayésienne de la distribution Gamma Lindley (introduit par Nedjar et Zeghdoudi 2016) avec des lois a priori de type Gamma ; sous des fonctions de pertes (quadratique) et asymétriques (Linex).

De plus, nous adaptons la distribution de Zeghdoudi (introduit par Messaadia et Zeghdoudi 2018) comme une distribution conditionnelle de $X_n | \theta$, où nous nous concentrons sur l'estimation de la prime Bayésienne sous les fonctions de perte (quadratique, Linex et entropie). Enfin, nous faisons une étude numérique pour calculer la prime Bayésienne dans chaque cas.

Nous utilisons l'approximation de Lindley pour trouver l'estimateur de la prime Bayésienne car l'expression de ce dernier reste sous forme intégrale.

Mots clés :

Distribution de Zeghdoudi, Distribution de Gamma, fonction de perte , Prime Bayésienne.

Abstract

In this thesis, we consider the Zeghdoudi distribution and Gamma Lindley distribution as the conditionals distributions of $X_n | \theta$, and $X_n | \gamma, \theta$ respectively, we focus on estimation of the Bayesian premium estimators under three loss functions (squared error which is symmetric, Linex and Entropy, which are asymmetric), using non-informative and informative priors (the extension of Jeffreys and Gamma priors) respectively. Because of its difficulty and non linearity, we use a numerical approximation for computing the Bayesian premium.

Keywords

Zeghdoudi distribution, Gamma distribution, loss function, Bayesian premium.

المخلص

في هذه الرسالة ، نقتراح مقارنة متماسكة لحل مشاكل الاستدلال الإحصائي ، حيث نقدر قيمة قسط التامين البايزي لتوزيع Gamma Lindley الذي قدمه Nedjar و Zeghdoudi (2016) تحت دالتي خطأ (دالة الخطأ التربيعي و دالة الخطأ لينكس) حيث نستعمل فيها تقنية حددية للتقريب و هي تقنية تقريب "Lindley" بالإضافة إلى ذلك ، قمنا بتكييف توزيع Zeghdoudi الذي قدمه Messaadia و Zeghdoudi (2018) كتوزيع مشروط لـ $X(n|\theta)$ ، حيث نركز على تقدير قسط بايز تحت ثلاث دوال للاخطاء (التربيعية ، لينكس والانتروبي).

وأخيراً ، قمنا باجراء دراسة رقمية لحساب قسط بايز لكل حالة.

الكلمات المفتاحية :

توزيع زغودي، توزيع غاما، دالة الخطأ، قسط التامين البايزي.

Liste des figures

- Figure 3.1- Estimateurs bayésiens de la prime en utilisant Ext.J.P ($\theta = 0,44$)
- Figure 3.2- Estimateurs bayésiens de la prime en utilisant l'IG ($\theta = 0,44$)
- Figure 3.3- Estimateurs bayésiens de la prime en utilisant Ext.J.P ($\theta = 1,5$).
- Figure 3.4- Estimateurs bayésiens de la prime en utilisant l'IG ($\theta = 1,5$)
- Figure 3.5- Estimateurs bayésiens de la prime en utilisant Ext.J.P ($\theta = 9$)
- Figure 3.6- Estimateurs bayésiens de la prime en utilisant l'IG ($\theta = 9$)

Liste des tableaux

- Tableau 2.1- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte quadratique moyenne ($\gamma = 1,5, a = 1, b = 0,04, c = 1, d = 0,04$).
- Tableau 2.2- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\gamma = 1,5, a = 1, b = 0,004, c = 1, d = 0,004, \alpha = 0,1$).
- Tableau 2.3- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\gamma = 1,5, a = 1, b = 0,04, c = 1, d = 0,04, \alpha = -0,5$).
- Tableau 2.4- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte quadratique moyenne ($\gamma = 3, a = 1, b = 0,04, c = 1, d = 0,04$).
- Tableau 2.5- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\gamma = 3, a = 1, b = 0,04, c = 1, d = 0,04, \alpha = 0,1$).
- Tableau 2.6- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\gamma = 3, a = 1, b = 0,04, c = 1, d = 0,04, \alpha = -0,5$).
- Tableau 2.7- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte quadratique moyenne ($\gamma = 4,5, a = 1, b = 0,04, c = 1, d = 0,04$).
- Tableau 2.8- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\gamma = 4,5, a = 1, b = 0,04, c = 1, d = 0,04, \alpha = 0,1$).
- Tableau 2.9- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction

de perte Linex ($\gamma = 4.5, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04, \alpha = -0.5$).

Tableau 3.1- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte quadratique ($\alpha = 0.2, \beta = 0.3, c = 0.01$).

Tableau 3.2- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\alpha = 0.2, \beta = 0.3, a = 0.01, c = 0.5$)

Tableau 3.3- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex($\alpha = 0.2, \beta = 0.3, a = -0.01, c = 0.5$)

Tableau 3.4- Estimateurs de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte d'entropie ($\alpha = 1, \beta = 1.5, q = 1, c = 1$).

Abréviations & Notations

Abréviations

i.i.d : indépendants et identiquement distribuées

MLE : Maximum Likelihood Estimator

MSE : Mean Squared Error

v.a. : variable aléatoire

ZD : distribution de Zeghdoudi

GaL : distribution de Gamma Lindley

Ext.J.P : loi apriori de Jeffreys

IG : loi a priori Gamma inversé

VaR :value at risk

Notations

Ω : l'univers des possibles

\mathcal{F} : la tribu

$p(A)$: la probabilité de l'évènement A

x : l'ensemble des observations

$\mathbb{E}[\cdot]$: l'espérance mathématique de l'argument

$v[\cdot]$: la variance de l'argument

$\sigma[\cdot]$:l'écart type de l'argument

$\gamma[\cdot]$:coefficient d'asymétrie (skewness)

$M(\cdot)$: la fonction génératrice des moments

F_x : fonction de répartition de x

$\widehat{F}_n(x)$: fonction de répartition empirique

\mathbb{R} : ensemble des réels

$\mathbf{1}$: fonction indicatrice de l'ensemble A

θ, γ : les paramètres d'intérêts

Θ : l'espace des paramètres

$\hat{\theta}, \hat{\gamma}$: l'estimation du paramètre d'intérêts.

$f(x)$: la densité de probabilité

$\hat{\theta}_B, \hat{\gamma}_B$: l'estimateurs bayésiens

$R(\hat{\theta})$: risque quadratique

$\mathfrak{R}(\hat{\theta})$: risque de Bayes

$\pi(\theta)$: la densité apriori

$\pi(\theta | x), \pi(\theta, \gamma | x)$: la densité a postériori

$N(,)$: loi Normale de moyenne et de variance

\propto : le symbole de proportionnalité

$\mathbf{P}_{\text{SELF}}^B$: l'estimateur de la prime bayésienne sous la fonction de perte quadratique

$\mathbf{P}_{\text{LIN}}^B$: l'estimateur de la prime bayésienne sous la fonction de perte Linex

$\mathbf{P}_{\text{ENT}}^B$: l'estimateur de la prime bayésienne sous la fonction de perte d'entropie

Introduction

"... It is clear that it is not possible to think about learning from experience and acting on it without coming to terms with Bayes' theorem. Jerome Cornfield..."

(in De Finetti, 1974)

L'homme est curieux et c'est sans doute ce qui explique le mieux son cheminement depuis le début de l'humanité jusqu'à nos jours. Ce besoin de comprendre les phénomènes observés et le désir de les anticiper est au cœur de ses préoccupations. C'est ce qui explique l'émergence et le succès de la statistique, une discipline scientifique en plein essor. Pour définir son objet, on ne saurait mieux faire que Christian Robert (Robert 2006) : *"L'objet principal de la statistique est de mener, grâce à l'observation d'un phénomène aléatoire, une inférence sur la distribution probabiliste à l'origine de ce phénomène, c'est-à-dire de fournir une analyse (ou une description) d'un phénomène passé, ou une prédiction d'un phénomène à venir de nature similaire"*

Le troisième millénaire sera, dit-on, celui de l'information, Aussi la statistique y sera-t-elle appelée à jouer un rôle important et le paradigme Bayésien plus que tout autre, puisqu'il offre un cadre de raisonnement bien adapté à l'intégration des opinions et des faits de toutes provenances qui interviennent dans la gestion des risques et la prise de décision en contexte d'incertitude.

De la collecte de données à la prévision, l'analyse statistique pose plusieurs défis. L'élaboration du modèle représente sans doute la phase la plus délicate de l'exercice, car elle doit répondre à un double impératif de réalisme et de parcimonie. Hormis quelques cas de figure, une démarche Bayésienne n'est envisageable qu'à charge de disposer d'outils efficaces pour la quantification et la mise à jour de l'information.

Les méthodes bayésiennes nous permettent d'extraire des informations précises à partir de données opaques afin de trouver des solutions possibles dans un très grand nombre de possibilités. Ces méthodes ont été essentielles dans le déchiffrement de la

machine allemande Enigma par l'anglais Alan Turing. Cette victoire accélérée des Alliés lors de la Seconde Guerre mondiale a duré au moins deux ans et a permis de sauver des millions de vies.

Qu'est-ce que la statistique Bayésienne ?

La statistique bayésienne est une approche particulière pour appliquer la probabilité à des problèmes statistiques. Il nous fournit des outils mathématiques pour mettre à jour nos croyances sur les événements aléatoires à la lumière de nouvelles données ou preuves à propos de ces événements. En particulier, l'inférence bayésienne interprète la probabilité comme une mesure de la crédibilité ou de la confiance qu'un individu peut avoir vis-à-vis de la survenue d'un événement particulier. Nous pouvons avoir une conviction antérieure sur un événement, mais nos croyances sont susceptibles de changer lorsque de nouvelles preuves sont mises au jour. La statistique bayésienne nous donne un moyen mathématique solide d'incorporer nos croyances antérieures et nos preuves pour produire de nouvelles croyances postérieures.

Les méthodes bayésiennes sont aussi de plus en plus utilisées en recherche développementale.

L'augmentation des applications Bayésiennes est spécifiquement due à la disponibilité de méthodes de calcul bayésiennes dans des logiciels populaires des paquets tels que Amos (Arbuckle, 2006), Mplus v6 (Muthen & Muthen, 1998-2012 ; pour la méthodes bayésiennes dans Mplus Kaplan & Depaoli, 2012 ; Muthen & Asparouhov, 2012), WinBUGS (Lunn, Thomas, Best et Spiegelhalter, 2000), et un grand nombre de paquets dans la statistique R environnement informatique (Albert, 2009).

L'approche bayésienne est largement utilisée dans l'estimation des paramètres du modèle linéaire, (Potthoff et Roy, 1964 ; Geisser, 1970 ; Rao, 1975 ; Fearn, 1975 ; Strenio et al, 1983). Elle a été discutée et appliquée par Bock et Thissen (1980) sur leur modèle non linéaire (triple logistique 1976). Berkey (1982) l'a décrite pour l'estimation des paramètres du modèle linéaire de Jentsch et Bayley (1937).

Dans ce projet de recherche, nous nous intéressons essentiellement à deux nou-

velles distributions de durée de vie en utilisant les modèles de mélange et en combinant la distribution de gamma à d'autres distributions à deux paramètres (Gamma Lindley, Zeghdoudi) qui apportera un plus à la littérature existant sur la modélisation des données de survie, des sciences biologiques et des sciences actuarielles.

La thèse s'articule autour de trois chapitres, le premier chapitre est d'avantage méthodologique. Il introduit des notions fondamentales de la modélisation statistique paramétrique sous le paradigme Bayésien. Le chapitre 2 se focalise sur l'estimateur Bayésien de la prime de la distribution Gamma-Lindley sous deux fonctions de perte (erreur quadratique et Linex) avec information préalable, cette estimation est trouvée en utilisant l'approximation numérique (approximation de Lindley) qui est une méthode d'approximation appropriée pour résoudre ces problèmes. Ensuite, des simulations numériques et une étude comparative de cet estimateur aux estimateurs classiques sont utilisés. Le troisième chapitre est dédié à l'estimation de la prime Bayésienne, de la nouvelle distribution nommée Zeghdoudi, dont on utilise une combinaison entre l'approximation sus mentionnée et des lois à priori informatives et non informatives sous trois fonctions de perte (erreur quadratique, Linex et entropie), et afin d'évaluer les estimateurs de la prime bayésienne, une étude par simulation utilisant la méthode de Monte Carlo a été menée.

Cette contribution est couronnée par (02) publications scientifiques dans des revues internationales :

1-Fatma Zohra Attoui et al On Bayesian Premium Estimators for Gamma Lindley Model under Squared Error and Linex Loss Function Journal of Mathematics and Statistics, 2017, 13 (3) : 284.291. DOI : 10.3844 / jmssp.2017.284.291.

2-Fatma Zohra Attoui et al. Bayesian Premium Estimators for Zeghdoudi Model under Squared Error, Entropy and Linex Loss Functions : with Informative and Non-Informative Priors JSTA Volume 17(4)pp1-13 2018.

La conclusion et les perspectives sont données dans le quatrième chapitre.

CHAPITRE 1

Outils mathématiques

Dans ce chapitre, nous donnons une synthèse rapide sur quelques notions probabilistes, l'estimation, l'approche Bayésienne et on termine par quelques modèles statistiques paramétriques.

1 Notion de probabilités statistiques

1.1 Espace probabiliste

On considère un ensemble (Ω, \mathcal{F}, p) un espace probabilisé. L'ensemble Ω est l'univers des possibles, il est non vide. \mathcal{F} est une tribu, autrement dit c'est une partie de $p(\Omega)$ (un ensemble d'ensemble) qui est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable. La probabilité est une application de \mathcal{F} dans $[0, 1]$ qui à n'importe quel élément de l'ensemble des parties de Ω associe sa probabilité d'occurrence. Elle vérifie de plus $p[\Omega] = 1$ et la propriété d'additivité pour les ensembles disjoints.

1.2 Moments

L'espérance d'une variable désigne sa valeur espérée, on la note $\mathbb{E}[X]$. Si x représente l'encours d'un contrat pour une année, alors son espérance représente l'encours moyen et on peut logiquement s'attendre à ce que la prime chargée à l'assuré soit proche de cette moyenne, c'est la raison pour laquelle on parle de « prime pure ».

La variance est définie par :

$$v[x] = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^2] = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2.$$

Elle s'interprète comme une mesure de la variabilité de x par rapport à son espérance. Pour les gestionnaires On définit l'écart type par :

$$\sigma[x] = \sqrt{v[x]}.$$

On définit également souvent le coefficient d'asymétrie (skewness) par :

$$\gamma[x] = \frac{\mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^3]}{v[x]^{\frac{3}{2}}}$$

Celui-ci renseigne sur la symétrie de la distribution par rapport à sa moyenne. Ainsi, dans le cas où $\gamma[x] = 0$ alors la variable est symétrique par rapport à son espérance. C'est le cas de la loi normale. En général en actuariat, $\gamma[x] \succ 0$, i.e qu'il y a de grandes chances que la variable prenne des valeurs plus élevées que sa moyenne, l'asymétrie est positive.

1.3 Fonction génératrice des moments

Il faut bien garder à l'esprit que ces grandeurs ne suffisent pas à déterminer entièrement la loi de x , même si ce sont de très bons indicateurs. En revanche, la fonction génératrice des moments contient cette information, elle est définie par :

$$M_x(t) = \mathbb{E}[e^{tx}]$$

pour un réel t tel que la somme converge (la fonction génératrice n'existe pas pour tout t , ni même pour certaines lois paramétriques comme la loi de Pareto ou la loi log-normale). Notons au passage que l'on retrouve parfois dans la littérature une définition avec une exponentielle complexe, mais l'idée sous-jacente est la même. On peut en effet écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^n M_x(t)}{dt^n} \Big|_{t=0} &= \frac{d^n \mathbb{E}[e^{tx}]}{dt^n} \Big|_{t=0} \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{d^n e^{tx}}{dt^n} \right] \Big|_{t=0} \\ &= \mathbb{E} [x^n e^{tx}] \Big|_{t=0} \\ &= \mathbb{E} [x^n] \end{aligned}$$

On comprend dès lors l'origine du nom de cette fonction, puisque ses dérivées donnent accès à tous les moments d'ordre n de x .

1.4 Fonction inverse d'une fonction de répartition (VaR)

On définit la fonction inverse de la fonction de répartition par :

$$VaR_u[x] = F_x^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_x(x) \geq u\} = \sup \{x \in \mathbb{R} : F_x(x) < u\}$$

pour $u \in [0, 1]$. On rappellera les conventions $\inf \phi = +\infty$ et $\sup \phi = -\infty$ et . La fonction inverse est croissante au sens large et semi-continue à gauche.

Remarque 1.1 *La value at risk (VaR) représente la perte potentielle maximale d'un investisseur sur la valeur d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs financiers qui ne*

devrait être atteinte qu'avec une probabilité donnée sur un horizon donné. Elle est, en d'autres termes, la pire perte attendue sur un horizon de temps donné pour un certain niveau de confiance.

1.5 Distribution empirique

On considère une réalisation $\{x_1, \dots, x_n\}$ d'un échantillon i.i.d. x_1, \dots, x_n ayant pour fonction de répartition parente F_x . On cherche à estimer F_x . On définit la fonction de répartition empirique par :

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i \leq x\}}$$

pour $x \in \mathbb{R}$. Elle satisfait les propriétés d'une distribution. C'est une fonction en escalier.

2 Méthodes d'estimation des paramètres

Nous considérerons dorénavant des modèles identifiables, c'est à dire tels que l'application $\theta \rightarrow F_\theta$ est injective. Supposons avoir sélectionné la famille paramétrique $\{F_\theta, \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p\}$. Nous cherchons à déterminer la valeur de θ la plus plausible compte tenu des observations x_1, x_2, \dots, x_n dont on dispose; nous noterons $\widehat{\theta}$ cette valeur, dite estimation du paramètre d'intérêt.

2.1 Méthode des moments

C'est la méthode la plus naturelle. L'idée de base est d'estimer une espérance mathématique par une moyenne empirique, une variance par une variance empirique, etc... Si le paramètre à estimer est l'espérance de la loi des x_i , alors on peut l'estimer par la moyenne empirique de l'échantillon. Autrement dit, si $\theta = \mathbb{E}[x]$, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments (*MoM*) est :

$$\hat{\theta}_n = \hat{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

De la même manière, on estime la variance de la loi des x_i , par la variance empirique de l'échantillon

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{x}_n^2$$

Ce principe peut naturellement se généraliser aux moments de tous ordres, centrés ou non centrés : $\mathbb{E} \left[(x - \mathbb{E}[x])^k \right]$ et $\mathbb{E} (x^k)$, $k \geq 1$.

2.2 La méthode du maximum de vraisemblance

C'est une technique qui, sous l'hypothèse que les variables ont une distribution connue, usuellement la distribution normale, permet d'estimer les paramètres d'un modèle (d'une équation ou d'un système, linéaire ou non linéaire) avec des restrictions sur les paramètres (coefficients, matrice de variances et covariances) ou non. Plus spécifiquement la technique consiste à construire une fonction appelée fonction de vraisemblance (construite à partir de la fonction de densité) et à maximiser son logarithme par rapport aux paramètres inconnus.

Fonction de vraisemblance

La méthode du maximum de vraisemblance requiert la définition de la fonction de vraisemblance, noter $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$, valant

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta),$$

où $f(x_i; \theta)$ est la densité de probabilité (discrète ou continue);

Intuitivement, il faut considérer comme la chance d'observer les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n pour la valeur θ du paramètre.

Méthode d'estimation

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ est obtenu en maximisant la 'chance' d'observer x_1, x_2, \dots, x_n , i.e.

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.1)$$

Il s'agit somme toute d'une méthode assez intuitive lorsqu'on dispose d'un échantillon fiable : on estimera le paramètre θ à la valeur $\hat{\theta}$ maximisant la probabilité de recevoir les observations x_1, x_2, \dots, x_n de l'échantillon. En pratique, il est souvent plus facile de passer au logarithme avant l'étape de maximisation.

On définit ainsi la log-vraisemblance $\ell(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$ associée à l'échantillon, donnée par

$$\ell(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n).$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ est obtenu grâce au programme de maximisation .

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \ell(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.2)$$

Quand $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \in \mathbb{R}^d$ et que toutes les dérivées partielles ci-dessus existent, $\hat{\theta}$ est la solution du système d'équations appelées équations de vraisemblance :

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln \ell(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (1.3)$$

2.3 L'approche Bayésienne

L'estimateur de Bayes

Le cas uni-dimensionnel On suppose dans cette section que le paramètre θ est réel. Rappelons que $\pi(\theta | x)$ s'interprète comme un résumé de l'information disponible sur θ , une fois x observé. D'un point de vue Bayésien, l'idéal serait que le statisticien, communique à son interlocuteur (le médecin, l'économiste, l'ingénieur, etc) la loi a posteriori, de façon à ne pas perdre d'information. Quand on souhaite cependant disposer d'une estimation pour θ , on retient le plus souvent la moyenne de la loi a posteriori.

Définition 2.1 On appelle estimation Bayésienne du paramètre θ la moyenne de la loi a posteriori. Cette moyenne est notée $\mathbb{E}(\theta | x)$ Formellement, on a :

$$\mathbb{E}(\theta | x) = \int_{\Theta} \theta \pi(\theta | x) d\theta = \frac{\int_{\Theta} \theta f(x | \theta) \pi(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} f(x | \theta) \pi(\theta) d\theta}.$$

L'estimateur de Bayes de θ est noté $\hat{\theta}_B$. Il est donc défini par : $\hat{\theta}_B = \mathbb{E}(\theta | x)$

Le cas multi-dimensionnel Dans un contexte multi-dimensionnel où $\theta = (\theta_j; j = 1, \dots, J)$ la moyenne a posteriori $\mathbb{E}(\theta | x)$ est égale au vecteur $(\mathbb{E}[\theta_j | x]; j = 1, \dots, J)$ où

$$\mathbb{E}[\theta_j | x] = \int_{\Theta_j} \theta_j \pi(\theta_j | x) d\theta_j.$$

$\pi(\theta_j | x)$ est obtenu en intégrant $\pi(\theta | x)$ sur toutes les composantes de θ autres que θ_j . Le plus souvent, les estimateurs de Bayes des θ_j ne peuvent pas être calculés de façon explicite et il faut faire appel aux méthodes de simulation de Monte Carlo.

Le risque de Bayes

La recherche d'estimateurs de Bayes peut se faire dans le cadre de la théorie de la décision. La démarche consiste alors à se fixer une règle de préférence entre estimateurs et à chercher un estimateur optimal au sens de cette règle de préférence. Rappelons qu'en statistique classique la règle de préférence repose (le plus souvent) sur le risque quadratique, noté $R(\hat{\theta})$, et défini comme suit :

$$R(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}_B) + [\text{biais}(\hat{\theta}_B)]^2.$$

L'approche Bayésienne fait reposer la règle de préférence sur le risque de Bayes. La densité a priori $\pi(\theta)$ étant fixée, le risque de Bayes de $\hat{\theta}$ est noté $\mathfrak{R}(\hat{\theta})$. Il est défini comme suit :

$$\mathfrak{R}(\hat{\theta}) = \mathbb{E} [R(\hat{\theta})] = \int_{\Theta} R(\hat{\theta}) \pi(\theta) d\theta.$$

On dira que $\hat{\theta}_1$ est meilleur que $\hat{\theta}_2$ au sens du risque de Bayes, si

$$\mathfrak{R}(\hat{\theta}_1) < \mathfrak{R}(\hat{\theta}_2).$$

A noter que, contrairement à la règle de préférence basée sur le risque quadratique il est toujours possible de comparer deux estimateurs de θ au sens du risque de Bayes. La densité a priori $\pi(\theta)$ étant fixée, on montre que l'estimateur de Bayes est l'estimateur optimal au sens du risque de Bayes.

Propriétés de l'estimateur de Bayes

P1. L'estimateur de Bayes est admissible.

P2. L'estimateur de Bayes est biaisé.

Sous certaines hypothèses de régularité le plus souvent satisfaites en pratique, on a les deux propriétés :

P3. L'estimateur de Bayes est convergent en probabilité (quand la taille de l'échantillon $(n \rightarrow +\infty)$)

P4. La loi a posteriori peut être asymptotiquement (c.a.d. pour de grandes valeurs de n) approximée par une loi normale $N(\mathbb{E}(\theta | x), \text{Var}(\theta | x))$

Lois a priori

Le point le plus critiquable et le plus critique de l'analyse Bayésienne est le choix de la loi a priori. Cependant, une fois cette dernière connue, l'inférence peut être conduite d'une façon quasi mécanique. Dans une certaine mesure, c'est aussi la plus difficile à déterminer. Dans la pratique, il est rare que l'information a priori soit suffisamment précise pour conduire à une détermination exacte de la loi a priori, au sens où plusieurs lois de probabilité peuvent être compatibles avec cette information. Il y a plusieurs raisons pour cela : le décideur, le client ou le statisticien n'ont pas forcément le temps, les ressources ou souvent la volonté de chercher à construire un a priori exact et doivent compléter l'information partielle qu'ils ont rassemblée à l'aide de données subjectives afin d'obtenir une loi a priori. Dans le cadre de cette étude, on se contente de ne présenter que les types de densités a priori les plus courants : les densités a priori conjuguées et les densités a priori non informatives.

Lois a priori conjuguées Quand l'information a priori sur le modèle est trop vague ou peu fiable, une construction subjective complète de la distribution a priori est évidemment impossible. Mais d'autres considérations plus techniques peuvent être prises en compte. En particulier, Raiffa and Schlaifer [1961] ont proposé l'utilisation des densités a priori dites conjuguées afin de faciliter l'analyse Bayésienne.

Définition 2.2 Une famille F de distribution de probabilité sur Θ est dite conjuguée (ou fermée par échantillonnage) par une fonction de vraisemblance $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n.)$ si, pour tout $\pi \in F$, la distribution a posteriori $\pi(\cdot | x)$ appartient également à F .

Cette définition est formellement vague puisque si l'on choisit F comme la famille de toutes les densités de probabilité, la famille de la densité a priori F est toujours conjuguée par la fonction de vraisemblance. Il est plus intéressant d'étudier des familles de densités a priori conjuguées tel que celles-ci aient la même forme fonctionnelle que la fonction de vraisemblance. Dans ce cas, le passage de la fonction de vraisemblance a la densité a posteriori se réduit a un changement de paramètres et non a une modification de la forme fonctionnelle de la famille correspondante. Les densités a posteriori sont donc toujours calculables et l'évaluation des statistiques a posteriori est grandement simplifiée.

Définition 2.3 Soient Θ l'espace des paramètres et Ω l'espace des observations. On définit C et h respectivement fonctions de Θ et Ω dans \mathbb{R}^+ et R , et T fonctions de Θ et Ω dans \mathbb{R}^k La famille F tel que les densités soient de la forme :

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = h(x) C(\theta) \exp(R(\theta)^t T(x)), \quad (1.4)$$

est dite famille exponentielle de dimension k . Dans le cas particulier où $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ et

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = h(x) C(\theta) \exp(\theta^t x) \quad (1.5)$$

la famille est dite naturelle.

La fonction de vraisemblance du vecteur x tel que les x_i , $i = \overline{1, N}$, sont i.i.d. est définie par :

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\prod_{i=1}^N h(x_i) \right] C(\theta)^N \exp\left(R(\theta)^t \sum_{i=1}^N T(x_i)\right). \quad (1.6)$$

Supposons que la densité a priori conjuguée s'écrive de la manière suivante :

$$\pi(\theta) \propto C(\theta)^\eta \exp(R(\theta)^t v), \quad (1.7)$$

où, les deux paramètres (ou hyperparamètres) η et v doivent être spécifiés pour mener à son terme l'analyse Bayésienne. La densité a posteriori appartient, donc, à la famille exponentielle :

$$\pi(\theta | x) \propto C(\theta)^{\eta+N} \exp\left(R(\theta)^T \left(v + \sum_{i=1}^N T(x_i)\right)\right). \quad (1.8)$$

Le choix d'un a priori conjugué est toujours un choix particulier et influence donc, dans une certaine mesure, l'inférence résultante. De plus, il peut obliger à ignorer une partie de l'information a priori si cette dernière n'est pas complètement compatible avec la structure de la loi a priori conjuguée.

Les priors conjugués naturels qui nous donnent une formule de prime de crédibilité sont : Gamma, Beta et la densité normale. Puisque la distribution de Poisson, exponentielle, géométrique, binomiale et normale appartient à la famille exponentielle des distributions.

Lois a priori non informatives

A priori de Laplace Historiquement, Laplace fut le premier à utiliser des techniques non informatives. Il munit les paramètres d'une loi a priori qui prend en compte son ignorance en donnant la même vraisemblance à chaque valeur du paramètre, donc en utilisant une loi uniforme. Ainsi, la densité a priori d'un paramètre est défini par :

$$\pi(\theta) = k,$$

où, k est une constante. Trois critiques ont été avancées sur ce choix à savoir :

- Les lois résultantes sont impropres quand l'espace des paramètres n'est pas compact, ces dernières mènent à des difficultés comme le paradoxe de marginalisation.
- Le principe des événements équiprobables de Laplace n'est pas cohérent en termes de Partitionnement.

- Une autre critique concerne le problème de l'invariance par réparamétrisation, si on passe de $\theta \in \Theta$ à $\eta = g(\theta)$ par une transformation bijective g , l'information a priori reste totalement inexistante et ne devrait pas être modifiée.

Cependant, si $\pi(\theta) = 1$, la loi a priori sur η est $\pi(\eta) = \left| \frac{d}{d\eta} g^{-1}(\eta) \right|$ par le changement de variable. Donc $\pi(\eta)$ est le plus souvent non constante.

Lois a priori de Jeffreys Afin d'éviter le besoin de prendre en compte une structure d'invariance potentielle, Jeffreys (1946, 1961) propose des lois a priori non informatives fondées sur l'information de Fisher, donnée par

$$I(\theta) = \mathbb{E}_{\theta} \left[\frac{\delta \log f(x | \theta)}{\delta \theta^2} \right]. \quad (1.9)$$

Dans le cas unidimensionnel, sous certaines conditions de régularité, cette information est aussi égale à

$$I(\theta) = -\mathbb{E}_{\theta} \left[\frac{\delta^2 \log f(x | \theta)}{\delta \theta^2} \right]. \quad (1.10)$$

La loi a priori de Jeffreys est

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)},$$

elle définit un coefficient de normalisation près quand est propre. Ce choix, dépendant de l'information de Fisher se justifie par le fait que $I(\theta)$ est largement accepté comme un indicateur de la quantité d'information apportée par le modèle sur θ , (Fisher 1956).

Lois a priori impropres La loi a priori peut être impropre i.e. $\int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = \infty$. Ce choix de type de loi n'a donc plus d'intérêt que calculatoire et s'interprète difficilement. La construction de lois non informatives peut conduire à des lois a priori de ce type.

Loi a posteriori

L'analyse statistique se ramène fondamentalement à une inversion¹, car elle doit déterminer les causes réduites aux paramètres du mécanisme probabiliste générateur, à partir des effets résumés par les observations. Une description générale de l'inversion des probabilités est donnée par le théorème de Bayes :

Théorème 2.1 *Si A et E sont deux évènements tels que $P(E) \neq 0$, $P(A | E)$ et $P(E | A)$ sont reliés par*

$$P(A | E) = \frac{P(E | A) P(A)}{P(E | A) P(A) + P(E | A^c) P(A^c)}$$

$$P(A | E) = \frac{P(E | A) P(A)}{P(E)}.$$

Bayes donne en réalité une version continue de ces résultats, à savoir, pour deux v.a. X et Y de distributions conditionnelle $f(x | y)$ et marginale $g(y)$, la distribution conditionnelle de Y sachant X est

$$g(y | x) = \frac{f(x | y) g(y)}{\int f(x | y) g(y) dy}.$$

Bayes et Laplace ont considéré que l'incertitude sur le paramètre θ d'un modèle peut être décrite par une distribution de probabilité π sur Θ , appelée distribution a priori. L'inférence est alors fondée sur la distribution de conditionnelle à X , $\pi(\theta | x)$, appelée distribution **a posteriori** et définie par

$$\pi(\theta | x) = \frac{f(x | y) \pi(\theta)}{\int f(x | y) \pi(\theta) d\theta}. \quad (1.11)$$

Fonctions de perte

Fonction de perte quadratique La fonction de perte quadratique a été proposée par [20] et [7] pour développer la théorie des moindres carrés. Elle est défini comme

$$L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2,$$

Une variante de cette fonction de perte est une fonction de perte quadratique pondérée (fonction de perte quadratique généralisée) de la forme

$$L(\hat{\theta}, \theta) = \omega(\hat{\theta}) (\hat{\theta} - \theta)^2.$$

Proposition 2.1 *Sous l'hypothèse d'un coût quadratique, l'estimateur de Bayes $\delta^\pi(x)$ de θ associé à la loi a priori π est la moyenne a posteriori de θ .*

$$\hat{\theta}_{SELF} = \mathbb{E}(\theta | x) = \int_{\theta \in \Theta} L(\theta, \delta(x)) \pi(\theta | x) d\theta.$$

Preuve. *Par définition, l'estimateur de Bayes minimise le coût a posteriori i.e*

$$p(\pi, \delta) = \mathbb{E}(\theta | x) (L(\theta, \delta(x)))$$

Sous l'hypothèse d'un coût quadratique, on a :

$$\begin{aligned} p(\pi, \delta) &= \mathbb{E}((\theta - \delta(x))^2) \\ &= \mathbb{E}(\theta^2 | x) - 2\delta(x) \mathbb{E}^{\pi(\cdot|x)}(\theta | x) + \delta^2(x). \end{aligned}$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré en $\delta(x)$. Il sera minimum en $\mathbb{E}(\theta^2 | x)$. ■

Fonction de perte Linex La fonction de perte Linex (linéaire-exponentielle) (le nom Linex se justifie par le fait que cette fonction asymétrique de perte augmente de manière approximativement linéaire d'un côté de zéro et approximativement de façon

exponentielle de l'autre côté) qui a été introduite par [35]. Elle peut être exprimé comme :

$$L(\hat{\theta}, \theta) = \exp \left(a \left(\hat{\theta} - \theta \right) \right) - a \left(\hat{\theta} - \theta \right) - 1, \quad a \neq 0. \quad (1.12)$$

Le signe et la magnitude du paramètre de forme a reflètent respectivement la direction et le degré d'asymétrie. (Si $a > 0$), la surestimation est plus grave que la sous-estimation et vice-versa). Pour a fermée à zéro, la perte de Linex est une perte d'erreur approximativement carrée et donc presque symétrique. L'attente postérieure de l'équation de la fonction de perte linex est :

$$\mathbb{E} \left[L(\hat{\theta}, \theta) \right] \propto \exp(a \hat{\theta}) \mathbb{E} [\exp(-a \theta)] - a \left(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\theta) \right) - 1.$$

Par résultat de [37], l'estimateur de θ sous la perte Linex $\hat{\theta}$ qui minimise l'équation ci-dessus est donné par

$$\hat{\theta}_{LIN} = -\frac{1}{a} \ln \left[\mathbb{E} \left[e^{-a\Theta} \right] \right].$$

Fonction de perte d'entropie Dans de nombreuses situations pratiques, il semble plus réaliste d'exprimer la perte en termes de rapport $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$, dans ce cas, [9] a proposé une fonction de perte appelée fonction de perte d'entropie générale (qui est également connu sous le nom de perte de Stein), est une perte asymétrique utile lorsque l'on attribue un crédit à sous et surestimation qui a cette forme

$$L(\theta, \hat{\theta}) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right)^q - q \ln \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta} \right) - 1, \quad q \neq 0, \quad (1.13)$$

dont le minimum se produit à $\hat{\theta} = \theta$, q est le paramètre de perte qui reflète l'écart par rapport à la symétrie. Le paramètre de perte q permet différentes formes de cette fonction de perte. Pour $q > 0$, une erreur positive (surestimation) a un effet plus grave qu'une erreur négative et pour $q < 0$, une erreur négative (sous-estimation) a un effet plus grave qu'une erreur positive.

L'estimateur de Bayes associé à la distribution a priori et avec la perte d'entropie, est défini par :

$$\hat{\theta}_{ENT} = [\mathbb{E} [\theta^{-q} | \underline{x}]]^{-\frac{1}{q}}$$

2.4 Les méthodes numériques

Méthode de Newton-Raphson

Cette méthode est une approche itérative basée sur une approximation quadratique du développement en série de Taylor du logarithme de la densité a posteriori $L(\theta) = \ln \pi(\theta | y)$ où, cette densité peut ne pas être normalisée. Cette approximation quadratique de $L(\theta)$ est, généralement, suffisamment précise quand le nombre des observations est grand par rapport au nombre de paramètres. La procédure de recherche du mode est alors la suivante :

1. choix d'une valeur initiale $\theta^{(0)}$
2. pour $k = 1, 2, \dots$
 - calcul de $L'(\theta^{(k-1)})$ et $L''(\theta^{(k-1)})$
 - évaluation de $\theta^{(k)}$ à partir de la relation suivante :

$$\theta^{(k)} = \theta^{(k-1)} - \frac{L'(\theta^{(k-1)})}{L''(\theta^{(k-1)})}$$

Remarque 2.1 - Cette méthode nécessite la détermination analytique des deux premières dérivées de $L(\theta)$.

- La valeur initiale joue un rôle très important. En effet, la convergence vers le mode n'est pas garantie pour toutes les valeurs initiales, en particulier, lorsqu'elles sont issues des régions où $-L''(\theta)$ n'est pas définie positive.
- L'avantage de cette méthode numérique est que la convergence vers le mode est très

rapide une fois que l'on est proche de la solution. Par contre s'il n'y a pas convergence, il faut essayer avec une autre valeur initiale.

L'approximation de Lindley

En 1980, Lindley a fourni une solution asymptotique pour le rapport de deux intégrales généralement rencontrées dans l'estimation Bayésienne (Lindley, 1980). De nombreux auteurs ont proposé d'utiliser l'approximation de Lindley pour obtenir des estimations de Bayes des paramètres de distributions de durée de vie. Voir parmi d'autres, Howlader et Hossain (2002)[15] et Jaheen (2005)[19]. Le rapport des intégrales intervenant dans l'analyse bayésienne est donné par

$$I(\underline{x}) = \mathbb{E}(u(\Theta) | \underline{x}) = \frac{\int u(\Theta) \exp(L(\Theta) + g(\Theta)) d\Theta}{\int \exp(L(\Theta) + g(\Theta)) d\Theta}, \quad (1.14)$$

où

$u(\Theta)$ =est une fonction de Θ

$L(\Theta)$ =Log- fonction de vraisemblance

$g(\Theta)$ =Log-densité a priori

Selon D. V. Lindley (1980), si les estimations MLE des paramètres sont disponibles et n est suffisamment grand, alors le ratio ci-dessus de l'intégrale peut être approché comme suit :

$$I(\underline{x}) \approx u + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [(u_{ij} + 2u_i p_j) \sigma_{ij}] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m L_{ijk} u_l \sigma_{ij} \sigma_{kl}, \quad (1.15)$$

si $u(\alpha, \beta) = \alpha$, alors $u_1 = 1, u_2 = u_{12} =, u_{21} = u_{11} = 0$. Par conséquent, l'estimation Bayésienne de α est définie comme suit :

$$\widehat{\alpha}_{Lin} = \widehat{\alpha}_{ML} + \sigma_{11}p_1 + \sigma_{12}p_2 + 0.5 \{L_{111}\sigma_{11}^2 + 3L_{112}\sigma_{11}\sigma_{12} + L_{222}\sigma_{12}\sigma_{22}\}$$

si $u(\alpha, \beta) = \beta$, alors $u_2 = 1$, $u_1 = u_{12} = u_{21} = u_{22} = 0$. Par conséquent, l'estimation Bayésienne de β est définie comme suit :

$$\widehat{\beta}_{Lin} = \widehat{\beta}_{ML} + \sigma_{21}p_1 + \sigma_{22}p_2 + 0.5 \{L_{222}\sigma_{22}^2 + L_{112}(\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{12}^2) + L_{111}\sigma_{11}\sigma_{12}\}$$

3 Lois de probabilités d'usage courant

Dans cette partie, nous présentons une liste des lois de probabilités les plus souvent utilisées dans les études ainsi que quelques unes de leurs propriétés (moyenne, variance,..etc).

3.1 Loi Exponentielle

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t .

Une variable aléatoire continue x suit une loi exponentielle de paramètre (d'intensité ou inverse de l'échelle) $\lambda > 0$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} .$$

On note $x \sim EXP(\lambda)$

La fonction de répartition de x :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} .$$

L'espérance mathématique (ou durée de vie moyenne) et la variance de x :

$$\mathbb{E}[x] = \frac{1}{\lambda}, \text{var}[x] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

L'estimateur $\hat{\lambda}_{MOM}$ de paramètre λ obtenu par la méthode des moments est :

$$\hat{\lambda}_{MOM} = \frac{1}{\mathbb{E}[x]}.$$

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi exponentielle est donné par

$$\ln L(x_i; \alpha) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

3.2 Loi de Gamma

Une variable aléatoire continue suit une loi Gamma, de paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, le premier est appelé paramètre d'échelle alors que β est le paramètre de forme, si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \forall x > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

On note $x \sim GA(\alpha, \beta)$.

L'espérance mathématique et la variance de x :

$$\mathbb{E}[x] = \frac{\alpha}{\beta}, \text{var}[x] = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Les estimateurs $(\hat{\alpha}_{MOM}, \hat{\beta}_{MOM})$ des paramètres (α, β) obtenus par la méthode des moments sont :

$$\hat{\alpha}_{MOM} = \frac{\mathbb{E}^2[x]}{\text{var}[x]}, \hat{\beta}_{MOM} = \frac{\mathbb{E}[x]}{\text{var}[x]}.$$

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi Gamma est donné par

$$\ln L(x_i; \alpha) = n\alpha \ln \beta - n \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - n\beta \bar{X}.$$

3.3 Loi log-normale

La loi log-normale est aussi appelée loi de Galton. Une variable aléatoire continue x suit une loi log-normale quand son logarithme suit une loi normale c'est-à-dire $y = \ln x$ suit une loi $N(\alpha, \beta)$ où $\alpha = \mu_y$ et $\beta = \sigma_y$ donc de densité

$$f_x(x) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]; \forall x > 0.$$

Où μ_y est le paramètre d'échelle et σ_y^2 est le paramètre de forme. Contrairement à la loi normale, les paramètres ne donnent pas la moyenne et la variance de la loi.

L'espérance mathématique et la variance de x :

$$\mathbb{E}[x] = \exp\left(\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2}\right), \text{var}[x] = (\exp(\sigma_y^2) - 1) \exp(2\mu_y + \sigma_y^2).$$

Les estimateurs $(\hat{\alpha}_{MoM}, \hat{\beta}_{MoM})$ des paramètres (α, β) obtenu par la méthode des moments sont :

$$\hat{\alpha}_{MoM} = 2 \ln \mathbb{E}[x] - \frac{1}{2} \ln \mathbb{E}[x^2], \quad \hat{\beta}_{MoM} = \sqrt{\ln \frac{\mathbb{E}[x^2]}{\mathbb{E}^2[x]}}$$

Le logarithme de la vraisemblance d'un échantillon issu d'une loi log-normale est donné par :

$$\ln L(x_i; \mu, \sigma) = -n \ln \sigma_y - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{2\sigma_y^2} \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - \mu_y)^2.$$

CHAPITRE 2

Estimation de la prime Bayésienne de la distribution Gamma Lindley sous la fonction de perte quadratique et la fonction de perte Linex

Dans ce chapitre, nous considérons la distribution Gamma Lindley (*Gal*) comme une distribution conditionnelle de $X \mid \gamma, \theta$, nous nous concentrons sur l'estimation de la prime Bayésienne sous la fonction de perte quadratique (symétrique) et la fonction de perte de Linex (asymétrique), avec des lois a priori informatives (type Gamma). En raison de sa difficulté et de sa non-linéarité, nous utilisons l'approximation de Lindley pour estimer la prime Bayésienne.

Enfin, nous évaluons les estimateurs bayésiens sous les fonctions de perte ci-dessus, une simulation (Monte-Carlo) et des erreurs quadratiques moyennes sont données.

1 La distribution de Gamma Lindley

La distribution de Gamma Lindley a été publiée pour la première fois dans la littérature à partir de 2016 par Nedjar et Zeghdoudi. Cette distribution est basée sur des mélanges des distributions ordinaires Gamma $(2, \theta)$ et Lindley (θ) .

Soit x une variable aléatoire suivant la distribution à un paramètre avec la fonction de densité

$$f_{GaL}(x; \theta, \gamma) = \begin{cases} \frac{\theta^2((\gamma + \gamma\theta - \theta)x + 1)e^{-\theta x}}{\gamma(1 + \theta)} & x, \theta > 0, \gamma > \frac{\theta}{1 + \theta} \\ 0, & \text{Autrement.} \end{cases}$$

et la fonction de répartition de GaL est :

$$F_{GaL}(x) = 1 - \frac{((\theta\gamma + \gamma - \theta)(\theta x + 1) + \theta)e^{-\theta x}}{\gamma(1 + \theta)}; x, \theta > 0, \gamma > \frac{\theta}{1 + \theta}.$$

Le mode, la moyenne et la variance de la distribution de GaL sont donnés par

$$\text{mode}(X) = \begin{cases} \frac{\gamma\theta + \gamma - 2\theta}{\theta(\gamma + \gamma\theta - \theta)}, & \gamma \in \left[\frac{2\theta}{\theta + 1}, \infty \right] \\ 0, & \text{Autrement.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2\gamma(1 + \theta) - \theta}{\theta\gamma(1 + \theta)}, \mathbb{E}(X^2) = \frac{6\gamma\theta + 6\gamma - 4\theta}{\gamma\theta^2 + \gamma\theta^3}.$$

$$\text{Var}(X) = \frac{-(-2\gamma\theta + \theta)^2 + (2 + 6\theta)\gamma^2 - 2\gamma(\gamma\theta - 3\gamma\theta^2 + 2\theta^2)}{\gamma^2\theta^2(1 + \theta)^2}.$$

2 Estimations du maximum de vraisemblance (MLE)

Soit X_1, X_2, \dots, X_n un n échantillon d'un loi GaL (*) en présence de données complètes.

La fonction Log vraisemblance peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} \log L(\theta, \gamma; x_1, x_2, \dots, x_n) &= 2n \log \theta - n \log \gamma - n \log(\theta + 1) \\ &+ \sum_{i=1}^n \log [(\gamma + \gamma\theta - \theta)x_i + 1] - \theta \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les MLE des paramètres θ et γ sont la solution simultanée des équations suivantes. :

$$\begin{aligned} \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{\theta + 1} - \sum_{i=1}^n x_i + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{[(\gamma + \gamma\theta - \theta)x_i + 1]} &= 0, \\ \frac{-n}{\gamma} + (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{[(\gamma + \gamma\theta - \theta)x_i + 1]} &= 0, \end{aligned}$$

Ce système non linéaire n'admet pas de solutions analytiques, donc on a utilisé une méthode numérique de Newton-Raphson, les estimateurs $(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$ peuvent être écrits comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{x}} \\ \hat{\gamma}_{MV} = \frac{1}{1 + \bar{x}} \end{cases}$$

3 Dérivation des primes bayésiennes

Pour obtenir des estimateurs bayésiens, nous supposons que θ et γ sont des variables aléatoires à valeurs réelles avec une fonction de densité de probabilité $\pi(\theta, \gamma)$. Rappelons que la distribution conditionnelle de $X | \gamma, \theta$ est la distribution Gamma-Lindley et les distributions de θ et γ sont supposées être connues dans cette partie. $\pi(\theta | \underline{X})$ est la distribution à postériori de θ et γ compte tenu des données.

Dans cette section, nous considérons l'estimateur de la prime bayésienne P_{\bullet}^B en utilisant les fonctions de perte à priori gamma.

3.1 Estimateurs de la prime bayésienne sous la fonction de perte quadratique

La fonction de perte quadratique désigne la punition en utilisant $\hat{\beta}$ pour estimer β est donné par $L(\hat{\beta}, \beta) = (\hat{\beta} - \beta)^2$ et proposée par Legendree (1805) et Bühlmann Straub (1996) pour développer la théorie des moindres carrés. Cette fonction de perte est de nature symétrique c'est-à-dire qu'elle donne une pondération égale à la fois pour une sur-estimation et pour une sous-estimation.

Dans la littérature actuarielle, nous écrivons

$$L(P_{\text{SELF}}^B, \mu(\theta, \gamma)) = (P_{\text{SELF}}^B - \mu(\theta, \gamma))^2, \quad (2.2)$$

La primauté Bayésienne P_{SELF}^B est l'estimateur de $\mu(\theta, \gamma)$, elle doit être choisie de telle sorte que l'espérance a posteriori soit minimum.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [L(P_{\text{SELF}}^B, \mu(\theta, \gamma))] &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} L(P_{\text{SELF}}^B, \mu(\theta, \gamma)) \pi(\theta, \gamma | \mathbf{X}) d\theta d\gamma, \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (P_{\text{SELF}}^B - \mu(\theta, \gamma))^2 \pi(\theta, \gamma | \mathbf{X}) d\theta d\gamma, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Or, $\mathbb{E}[\mu(\theta, \gamma) | \mathbf{X}]$ est minimum ssi :

$$P_{\text{SELF}}^B = \mathbb{E}[\mu(\theta, \gamma) | \mathbf{X}] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mu(\gamma, \theta) \pi(\theta, \gamma | \mathbf{X}) d\theta d\gamma, \quad (2.4)$$

Où $\mu(\theta, \gamma)$ est la prime individuelle.

Distribution a posteriori en utilisant la loi a priori Gamma

Dans l'analyse bayésienne, nous devons spécifier une distribution préalable pour les paramètres, nous considérons que deux distributions à priori gamma indépendants

tels que, $\text{Gamma}(a, b)$ comme un à priori de θ et $\text{Gamma}(c, d)$ considérée comme un à priori de γ où a, b, c et d sont des hyperparamètres non négatifs. La motivation de considérer Gamma comme des distributions à priori est due à leur flexibilité dans la nature et la facilité mathématique, donc l'analyse en utilisant cette approche antérieure est plus précise et informative que la classique. La loi gamma à priori est une bonne distribution de la vie qui peut être pratique pour représenter de manière incertaine dans une estimation actuelle du taux de fréquence de la revendication.

$$g(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}; \theta, a, b > 0$$

$$g(\gamma) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \gamma^{c-1} e^{-d\gamma}; \gamma, c, d > 0.$$

La distribution à priori conjointe pour θ et γ est donnée comme suit :

$$\pi(\theta, \gamma) \propto \theta^{a-1} \gamma^{c-1} e^{(-b\theta-d\gamma)}; a, b, c, d > 0. \quad (2.5)$$

où, a, b, c et d sont les hyper-paramètres.

$$u(\theta, \gamma) = \mu(\theta, \gamma) = \frac{2\gamma(1 + \theta) - \theta}{\theta\gamma(1 + \theta)}$$

en combinant (2.5) avec la fonction de vraisemblance de la distribution de GL , la distribution à postérieure commune est donnée sous la forme :

$$\begin{aligned} \pi(\theta, \gamma | \mathbf{X}) &= \frac{\prod_{i=1}^n L(x_i; \theta, \gamma) \pi(\theta, \gamma)}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^n L(x_i; \theta, \gamma) \pi(\theta, \gamma) d\theta d\gamma} \\ &= R^{-1} \theta^{2n+a-1} \gamma^{c-n-1} e^{-\left[d\gamma + \theta \left(\sum_{i=1}^n x_i + b\right)\right]} P(\theta, \gamma) d\theta d\gamma, \end{aligned} \quad (2.6)$$

où R et $P(\theta, \gamma)$ sont interprétés comme

$$R = \int_{\theta} \int_{\gamma} \theta^{n+a-1} \gamma^{c-n-1} e^{-\left[d\gamma + \theta \left(\sum_{i=1}^n x_i + b\right)\right]} P(\theta, \gamma) d\theta d\gamma,$$

$$P(\theta, \gamma) = \frac{\prod_{i=1}^n [(\gamma + \gamma\theta - \theta) x_i + 1]}{(\theta + 1)^n}.$$

On peut noter ici que la répartition a posteriori de (θ, γ) prend une forme de ratio qui implique une intégration dans le dénominateur et ne peut être réduite à une forme fermée. Par conséquent, l'évaluation des espérances a posteriori pour obtenir l'estimateur de Bayes de θ et γ sera fastidieuse. Parmi les différentes méthodes proposées pour approximer le ratio des intégrales de la forme ci-dessus, la méthode d'approximation de Lindley (1980)

Selon D. V. Lindley [21], si les estimations ML des paramètres sont disponibles et que n est suffisamment grand, le rapport ci-dessus de l'intégrale peut être approché comme suit :

$$\begin{aligned} I(x) = & u(\hat{\theta}, \hat{\gamma}) + \frac{1}{2} [(\hat{u}_{\gamma\gamma} + 2\hat{u}_{\gamma}\hat{p}_{\gamma}) \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + (\hat{u}_{\theta\gamma} + 2\hat{u}_{\theta}\hat{p}_{\gamma}) \hat{\sigma}_{\theta\gamma} \\ & + (\hat{u}_{\gamma\theta} + 2\hat{u}_{\gamma}\hat{p}_{\theta}) \hat{\sigma}_{\gamma\theta} + (\hat{u}_{\theta\theta} + 2\hat{u}_{\theta}\hat{p}_{\theta}) \hat{\sigma}_{\theta\theta}] \\ & + \frac{1}{2} [(\hat{u}_{\gamma}\hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + \hat{u}_{\theta}\hat{\sigma}_{\gamma\theta}) (\hat{L}_{\gamma\gamma\gamma} \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + \hat{L}_{\gamma\theta\gamma} \hat{\sigma}_{\gamma\theta} + \hat{L}_{\theta\gamma\gamma} \hat{\sigma}_{\theta\gamma} + \hat{L}_{\theta\theta\gamma} \hat{\sigma}_{\theta\theta}) \\ & + (\hat{u}_{\gamma}\hat{\sigma}_{\theta\gamma} + \hat{u}_{\theta}\hat{\sigma}_{\theta\theta}) (\hat{L}_{\theta\gamma\gamma} \hat{\sigma}_{\theta\theta} + \hat{L}_{\gamma\theta\theta} \hat{\sigma}_{\theta\gamma} + \hat{L}_{\theta\gamma\theta} \hat{\sigma}_{\theta\gamma} + \hat{L}_{\theta\theta\theta} \hat{\sigma}_{\theta\theta})], \end{aligned} \quad (2.7)$$

où $\hat{\theta}$ et $\hat{\gamma}$ sont les MLE de θ et γ respectivement :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\theta} &= \frac{\partial u(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \theta}, \quad \hat{u}_{\gamma} = \frac{\partial u(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \gamma}, \quad \hat{u}_{\theta\gamma} = \frac{\partial u(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \theta \partial \gamma}, \quad \hat{u}_{\gamma\theta} = \frac{\partial u(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \gamma \partial \theta}, \quad \hat{u}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 u(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \theta^2}, \\ \hat{u}_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial^2 u(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \gamma^2}, \quad \hat{p}_{\theta} = \frac{\partial G(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \theta}, \quad \hat{p}_{\gamma} = \frac{\partial G(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \gamma}, \quad \hat{L}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 L(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \theta^2}, \quad \hat{L}_{\gamma\gamma} = \frac{\partial^2 L(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \gamma^2}, \\ \hat{L}_{\theta\theta\theta} &= \frac{\partial^3 L(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \theta^3}, \quad \hat{L}_{\theta\theta\gamma} = \frac{\partial^3 L(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \theta \partial \theta \partial \gamma}, \quad \hat{L}_{\gamma\gamma\theta} = \frac{\partial^3 L(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \gamma \partial \gamma \partial \theta}, \quad \hat{L}_{\gamma\theta\gamma} = \frac{\partial^3 L(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \gamma \partial \theta \partial \gamma}, \end{aligned}$$

$$\hat{L}_{\theta\gamma\gamma} = \frac{\partial^3 L(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \hat{\theta} \partial \hat{\gamma} \partial \hat{\gamma}}, \hat{L}_{\gamma\theta\theta} = \frac{\partial^3 L(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}{\partial \hat{\gamma} \partial \hat{\theta} \partial \hat{\theta}}.$$

En remplace $\pi(\theta, \gamma | x)$ de (2.6) dans l'expression de $I(x)$, où :

$$u(\theta, \gamma) = \gamma,$$

$$L(\theta, \gamma) = 2n \log \theta - n \log \gamma - n \log(\theta + 1) + \sum_{i=1}^n \log[(\gamma + \gamma\theta - \theta)x_i + 1] - \theta \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$G(\theta, \gamma) = (a - 1) \log \theta + (c - 1) \log \gamma - (b\theta + d\gamma).$$

On peut vérifier que :

$$\begin{aligned} u_\gamma &= 1, & u_{\gamma\gamma} &= u_{\gamma\theta} = u_{\theta\theta} = u_{\theta\gamma} = 0, \\ p_\theta &= \frac{(a-1)}{\theta} - b, & p_\gamma &= \frac{(c-1)}{\gamma} - d, \\ L_\theta &= \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{(\theta+1)} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i(\gamma-1)}{[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i+1]} - \sum_{i=1}^n x_i, & L_{\theta\gamma} &= L_{\gamma\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i(1+x_i)}{[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i+1]^2}, \\ L_{\theta\theta} &= \frac{-2n}{\theta^2} + \frac{n}{(\theta+1)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{[x_i(\gamma-1)]^2}{[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i+1]^2}, & L_\gamma &= \frac{-n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \frac{(1+\theta)x_i}{[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i+1]}, \\ L_{\theta\theta\theta} &= \frac{4n}{\theta^3} - \frac{2n}{(\theta+1)^3} + \sum_{i=1}^n \frac{2[x_i(\gamma-1)]^3}{[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i+1]^3}, & L_{\gamma\gamma} &= \frac{n}{\gamma^2} - \sum_{i=1}^n \frac{[(1+\theta)x_i]^2}{[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i+1]^2}, \\ L_{\theta\theta\gamma} &= L_{\gamma\theta\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{2x_i^2(1-\gamma)(1+x_i)}{[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i+1]^3}, & L_{\gamma\gamma\gamma} &= \frac{-2n}{\gamma^3} + \sum_{i=1}^n \frac{2[(1+\theta)x_i]^3}{[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i+1]^3}, \\ L_{\theta\gamma\gamma} &= L_{\gamma\gamma\theta} = -\sum_{i=1}^n \frac{[2x_i^2(1+\theta)(1+x_i)]}{[(\gamma+\gamma\theta-\theta)x_i+1]^3}, \end{aligned}$$

De nouveau, Parce que θ et γ sont indépendants $X | \gamma, \theta$, $\sigma_{\gamma\theta} = 0$ $\theta \neq \gamma$ pour

$$\sigma_{\gamma\gamma} = -\frac{1}{L_{\gamma\gamma}}; \sigma_{\theta\theta} = -\frac{1}{L_{\theta\theta}}.$$

Après évaluation de tous les u -termes, L -termes, et p -termes au point $(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$ et en utilisant l'expression ci-dessus, l'estimateur de Bayes approximatif de θ sous SELF est,

$$\hat{\theta}_B = \hat{\theta} + \hat{u}_\gamma \hat{p}_\gamma \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2} \left[(\hat{u}_\gamma \hat{\sigma}_{\gamma\gamma}) \left(\hat{L}_{\gamma\gamma\gamma} \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + \hat{L}_{\theta\theta\gamma} \hat{\sigma}_{\theta\theta} \right) \right]. \quad (2.8)$$

3. Dérivation des primes bayésiennes

Ainsi, l'estimateur de Bayes de γ internal SELF est :

$u_\gamma = 1$, $u_{\gamma\gamma} = u_{\gamma\theta} = u_{\theta\theta} = u_{\theta\gamma} = 0$ et le reste L -termes et p -termes sera comme ci-dessus, donc nous avons

$$\hat{\gamma}_B = \hat{\gamma} + \hat{u}_\gamma \hat{p}_\gamma \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2} \left[(\hat{u}_\gamma \hat{\sigma}_{\gamma\gamma}) \left(\hat{L}_{\gamma\gamma\gamma} \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + \hat{L}_{\theta\theta\gamma} \hat{\sigma}_{\theta\theta} \right) \right].$$

Maintenant, selon la fonction de perte quadratique, l'estimateur de Bayes correspondant pour le paramètre θ et γ est dérivé en suivant la distribution a postérieure (3.13) dans (3.11), comme suit :

$$P_{\text{SELF}}^B = \mathbb{E}[\mu(\theta, \gamma) | \mathbf{X}] = \int_0^\infty \int_0^\infty \mu(\theta, \gamma) \pi(\theta, \gamma | \mathbf{X}) d\theta d\gamma, \quad (2.9)$$

Suivant la procédure décrite ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned} u_\theta &= \frac{-(2\gamma\theta^2 + 4\gamma\theta - \theta^2 + 2\gamma)}{\gamma(\theta + \theta^2)^2}, & u_{\theta\theta} &= \frac{2(2\gamma\theta^3 + 6\gamma\theta^2 + 6\gamma\theta - \theta^3 + 2\gamma)}{\gamma(\theta + \theta^2)^3}, & u_{\theta\gamma} &= \frac{-\theta^2}{(\gamma(\theta + \theta^2))^2}, \\ u_\gamma &= \frac{1}{\gamma^2(1+\theta)}, & u_{\gamma\gamma} &= \frac{-2}{\gamma^3(1+\theta)}, & u_{\gamma\theta} &= \frac{-1}{(\gamma(1+\theta))^2}. \end{aligned}$$

Qui sont remplacés dans l'équation suivante

$$\begin{aligned} P_{\text{SELF}}^B &= \mathbb{E}[\mu(\theta, \gamma) | \mathbf{X}] = \hat{u}(\hat{\theta}, \hat{\gamma}) \\ &+ \frac{1}{2} [(\hat{u}_{\gamma\gamma} + 2\hat{u}_\gamma \hat{p}_\gamma) \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + (\hat{u}_{\theta\theta} + 2\hat{u}_\theta \hat{p}_\theta) \hat{\sigma}_{\theta\theta}] \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\hat{u}_\gamma \hat{u}_{\gamma\gamma}) \left(\hat{L}_{\gamma\gamma\gamma} \hat{p}_{\gamma\gamma} + \hat{L}_{\theta\theta\gamma} \hat{\sigma}_{\theta\theta} \right) + (\hat{u}_\theta \hat{\sigma}_{\theta\theta}) \left(\hat{L}_{\theta\gamma\gamma} \hat{\sigma}_{\theta\theta} + \hat{L}_{\theta\theta\theta} \hat{\sigma}_{\theta\theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

3.2 Estimateurs de la prime bayésienne sous la fonction de perte Linex

Dans notre étude, l'objectif est de trouver l'estimateur de la prime bayésien P_{LIN}^B qui est la valeur qui minimise l'équation ci-dessus, elle est donnée par :

$$P_{\text{LIN}}^B = -\frac{1}{\alpha} \log [\mathbb{E} [e^{-\alpha\mu(\theta,\gamma)}]] . \quad (2.11)$$

Lorsque l'attente $\mathbb{E} [e^{-\alpha\mu(\theta,\gamma)}]$ existe et finie (voir Calabria et Pulcini (1969) [8]). Thomson et Basu (1996) [34] ont identifié une famille de fonctions de perte $L(\Delta)$ où Δ est l'erreur d'estimation $(\hat{\beta}, \beta)$, telle que

- $L(0) = 0$.
- $L(\Delta) > (<)L(-\Delta) > 0$ pour tout $\Delta > 0$.
- $L(\cdot)$ est deux fois différentiable avec $L'(0) = 0$ et $L''(\Delta) > 0$ pour tout $\Delta \neq 0$.
- $0 < L'(\Delta) > (<) - L'(-\Delta) > 0$ pour tout $\Delta > 0$.

La répartition a postériori à l'aide de la loi a priori Gamma L'estimateur de la prime Bayésien correspondant sous la fonction de perte Linex est :

$$P_{\text{LIN}}^B = -\frac{1}{\alpha} \log \mathbb{E} [h(\theta, \gamma) | \underline{\mathbf{X}}] , \quad (2.12)$$

où

$$h(\theta, \gamma) = e^{-\alpha\mu(\theta,\gamma)} . \quad (2.13)$$

Maintenant, selon la fonction de perte de Linex, l'estimateur Bayésien pour le paramètre θ et γ est dérivé en substituant la distribution a postériori (2.20) dans (2.11), comme suit :

$$\mathbb{E} [e^{-\alpha\mu(\theta,\gamma)} | \underline{\mathbf{X}}] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\mu(\theta,\gamma)} \pi(\theta, \gamma | \underline{\mathbf{X}}) d\theta d\gamma, \quad (2.14)$$

$L(\theta, \gamma)$ et $G(\theta, \gamma)$ sont les mêmes que ceux indiqués dans (2.16) et (2.15). En suivant les mêmes étapes expliquées ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} h_\theta &= -\alpha [u_\theta e^{(-\alpha u(\theta, \gamma))}] , & h_{\theta\theta} &= -\alpha [(u_{\theta\theta} - \alpha u_\theta^2) e^{(-\alpha u(\theta, \gamma))}] , \\ h_{\theta\gamma} &= -\alpha [(u_{\theta\gamma} - \alpha u_\theta u_\gamma) e^{(-\alpha u(\theta, \gamma))}] , & h_\gamma &= -\alpha [u_\gamma e^{(-\alpha u(\theta, \gamma))}] , \\ h_{\gamma\gamma} &= -\alpha [(u_{\gamma\gamma} - \alpha u_\gamma^2) e^{(-\alpha u(\theta, \gamma))}] , & h_{\gamma\theta} &= -\alpha [(u_{\gamma\theta} - \alpha u_\theta u_\gamma) e^{(-\alpha u(\theta, \gamma))}] . \end{aligned}$$

Qui sont remplacés dans l'équation suivante

$$\begin{aligned} P_{\text{LIN}}^B &= -\frac{1}{\alpha} \log \mathbb{E} [e^{-\alpha u(\theta, \gamma)} | \underline{\mathbf{X}}] = -\frac{1}{\alpha} \log [e^{-\alpha u(\hat{\theta}, \hat{\gamma})}] & (2.15) \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\hat{h}_{\gamma\gamma} + 2\hat{h}_\gamma \hat{p}_\gamma) \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + (\hat{h}_{\theta\theta} + 2\hat{h}_\theta \hat{p}_\theta) \hat{\sigma}_{\theta\theta} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\hat{h}_\gamma \hat{\sigma}_{\gamma\gamma}) (\hat{L}_{\gamma\gamma\gamma} \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} + \hat{L}_{\theta\theta\gamma} \hat{\sigma}_{\theta\theta}) + (\hat{h}_\theta \hat{\sigma}_{\theta\theta}) (\hat{L}_{\theta\gamma\gamma} \hat{\sigma}_{\theta\theta} + \hat{L}_{\theta\theta\theta} \hat{\sigma}_{\theta\theta}) \right] . \end{aligned}$$

4 Etude de simulation

Dans cette section, une étude de simulation de Monte Carlo est effectuée pour comparer les méthodes d'estimation en utilisant les erreurs moyennes carrées (MSE) comme suit :

$$MSE(\hat{P}_\bullet^B) = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{P}_\bullet^B - \mu(\theta, \gamma))^2}{N} . \quad (2.16)$$

Lorsque N est le nombre de réplifications. Nous avons généré 100000 échantillons de tailles $n = 20, 40, 60, 80, 100$ et 1000 pour représenter les petits, modérées et importantes Quantités d'échantillons de Gamma Lindley avec trois valeurs de θ ($\theta = 0.35423, 1, 9$) avec ($\gamma = 1.5, 3, 4.5$).

Afin de comparer les estimateurs supérieurs Bayésiens obtenus dans la partie ci-dessus sous trois fonctions de perte différentes, nous choisissons les valeurs des hyperparamètres a, b, c et d comme suit $(a, b, c, d) = (1.2, 0.001, 1, 0.3)$, avec deux valeurs de symétrie pour Linex ($\alpha = 0.1, -0.5$).

Les résultats du modèle basés sur la distribution de Gamma Lindley sont résumés

dans les tableaux suivants :

Table 2.1 -Estimateur de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte d'erreur quadratique moyenne ($\gamma = 1.5, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.153765	1.666667	0.1555556
n	G.P		
20	4.997307 (3.046348e - 05)	1.614993 (9.471975e - 05)	0.1673283 (3.786201e - 05)
40	5.071424 (9.809331e - 07)	1.634784 (3.478296e - 06)	0.1566296 (9.092648e - 06)
60	5.098026 (9.310077e - 08)	1.644231 (4.34702e - 07)	0.154794 (1.871041e - 06)
80	5.111654 (1.025272e - 08)	1.649422 (8.359941e - 08)	0.1544417 (5.764072e - 07)
100	5.119931 (4.487431e - 10)	1.652677 (1.858109e - 08)	0.154415 (2.314594e - 07)
1000	5.150331 (3.434116e - 10)	1.665202 (3.366071e - 10)	0.1553615 (4.987695e - 11)

Table 2.2 - Estimateur de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\gamma = 1.5, a = 1, b = 0.004, c = 1, d = 0.004, \alpha = 0.1$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.153765	1.666667	0.1555556
n	G.P		
20	4.96047 (0.03736283)	1.61492 (0.002677836)	0.1672811 (0.000137493)
40	5.052458 (0.01026308)	1.634389 (0.00104184)	0.1566093 (1.110451e - 06)
60	5.085255 (0.004693506)	1.643829 (0.0005215545)	0.1547803 (6.009828e - 07)
80	5.102028 (0.002676713)	1.649062 (0.0003099141)	0.1544313 (1.264012e - 06)
100	5.112207 (0.001727036)	1.65236 (0.0002046931)	0.154334 (1.492224e - 06)
1000	5.14955 (1.77649e - 05)	1.665159 (2.274194e - 06)	0.1553606 (3.800078e - 08)

4. Etude de simulation

Table 2.3 - Estimateur de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\gamma = 1.5, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04, \alpha = -0.5$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.153765	1.666667	0.1555556
n	G.P		
20	5.171916 (0.0003295484)	1.635624 (0.0009637486)	0.1675587 (0.0001440801)
40	5.163393 (9.271661e - 05)	1.64558 (0.0004446442)	0.1567301 (1.379591e - 06)
60	5.160425 (4.435941e - 05)	1.65154 (0.0002288093)	0.1548624 (4.804549e - 07)
80	5.158868 (2.604214e - 05)	1.654946 (0.0001373635)	0.1544938 (1.127355e - 06)
100	5.157903 (1.713005e - 05)	1.657117 (9.119846e - 05)	0.1544571 (1.206676e - 06)
1000	5.154202 (1.910046e - 07)	1.665653 (1.027085e - 06)	0.1553659 (3.597277e - 08)

Table 2.4 - Estimateur de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte d'erreur quadratique moyenne ($\gamma = 3, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.399907	1.833333	0.1888889
n	G.P		
20	5.245517 (3.464839e - 08)	1.771582 (3.570231e - 07)	0.1832947 (3.937284e - 06)
40	5.320573 (3.330606e - 07)	1.800505 (2.689541e - 07)	0.1849694 (2.143201e - 07)
60	5.346562 (2.715271e - 07)	1.81104 (2.623254e - 07)	0.186032 (3.817615e - 08)
80	5.359731 (1.937792e - 07)	1.816463 (1.975259e - 07)	0.1866555 (1.096881e - 08)
100	5.367686 (1.409512e - 07)	1.819766 (1.474322e - 07)	0.1870587 (4.080755e - 09)
1000	5.396656 (2.084134e - 09)	1.831952 (2.333283e - 09)	0.1886903 (4.650837e - 13)

Table 2.5 - Estimateur de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\gamma = 3, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04, \alpha = 0.1$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.399907	1.833333	0.1888889
n	G.P		
20	5.207548 (0.03700179)	1.766747 (0.004433743)	0.1832283 (3.204255e - 05)
40	5.301051 (0.009772392)	1.798005 (0.001248088)	0.1849343 (1.5639e - 05)
60	5.333425 (0.004419831)	1.809354 (0.0005750293)	0.1860081 (8.298662e - 06)
80	5.349831 (0.002507607)	1.815191 (0.0003291275)	0.1866374 (5.069357e - 06)
100	5.348782 (0.002613799)	1.818745 (0.0002128115)	0.1870441 (3.40307e - 06)
1000	5.394745 (2.664489e - 05)	1.831848 (2.205679e - 06)	0.1886888 (4.100289e - 08)

Table 2.6 - Estimateur de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\gamma = 3, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04, \alpha = -0.5$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.399907	1.833333	0.1888889
n	G.P		
20	5.427538 (0.0007634619)	1.79561 (0.001423049)	0.1886775 (4.471239e - 08)
40	5.416159 (0.0002641203)	1.812972 (0.0004145909)	0.1878023 (1.180747e - 06)
60	5.411364 (0.0001312618)	1.819455 (0.0001926006)	0.1879242 (9.305554e - 07)
80	5.408745 (7.811271e - 05)	1.822815 (0.0001106374)	0.1880724 (6.667109e - 07)
100	5.407098 (5.171711e - 05)	1.824867 (7.168128e - 05)	0.1881903 (4.880571e - 07)
1000	5.400672 (5.847544e - 07)	1.832469 (7.476398e - 07)	0.1886978 (3.6525117e - 09)

4. Etude de simulation

Table 2.7 - Estimateur de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte d'erreur quadratique moyenne ($\gamma = 4.5, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.481954	1.888889	0.2
n	G.P		
20	5.329274 (1.168254e - 06)	1.827011 (6.246464e - 07)	0.193616 (2.077482e - 06)
40	5.403857 (9.673216e - 07)	1.856448 (9.089205e - 07)	0.1959277 (1.070641e - 07)
60	5.429509 (5.578413e - 07)	1.866937 (5.664754e - 07)	0.1970839 (1.68216e - 08)
80	5.442479 (3.52083e - 07)	1.872305 (3.689678e - 07)	0.1977365 (4.085179e - 09)
100	5.450306 (2.40468e - 07)	1.875564 (2.563527e - 07)	0.1981523 (1.229509e - 09)
1000	5.478765 (2.973305e - 09)	1.887536 (3.342981e - 09)	0.1998017 (5.370309e - 12)

Table 2.8 - Estimateur de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\gamma = 4.5, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04, \alpha = 0.1$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.481954	1.888889	0.2
n	GP		
20	5.290906 (0.03649938)	1.865187 (0.0005617763)	0.1935402 (4.172944e - 05)
40	5.384137 (0.009568302)	1.870985 (0.000320561)	0.1958878 (1.690997e - 05)
60	5.416239 (0.004318502)	1.874504 (0.0002069132)	0.1970568 (8.662202e - 06)
80	5.43248 (0.002447731)	1.879245 (9.300239e - 05)	0.197716 (5.216632e - 06)
100	5.442285 (0.001573686)	1.88404 (2.351128e - 05)	0.1981358 (3.475418e - 06)
1000	5.477955 (1.59943e - 05)	1.887429 (2.132462e - 06)	0.1998001 (3.997879e - 08)

Table 2.9 - Estimateur de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex ($\gamma = 4.5, a = 1, b = 0.04, c = 1, d = 0.04, \alpha = -0.5$).

θ	0.35423	1	9.0
$\mu(\theta, \gamma)$	5.481954	1.888889	0.2
n	G.P		
20	5.512915 (0.0009585949)	1.852012 (0.001359935)	0.1939944 (3.606741e - 05)
40	5.500253 (0.0003348473)	1.869397 (0.0003799159)	0.1961272 (1.499893e - 05)
60	5.494853 (0.0001663833)	1.875674 (0.000174635)	0.1972194 (7.731462e - 06)
80	5.491902 (9.895527e - 05)	1.878897 (9.984395e - 05)	0.1978392 (4.669201e - 06)
100	5.490047 (6.548409e - 05)	1.880857 (6.451587e - 05)	0.1982349 (3.115667e - 06)
1000	5.482814 (7.38487e - 07)	1.888072 (6.671339e - 07)	0.1998102 (3.602843e - 08)

5 Résultats et Discussion

La performance dépend de la forme de la distribution antérieure et de la fonction de perte supposée. La plupart des auteurs ont utilisé une erreur au carré comme fonction de perte symétrique. Cependant, en pratique, la fonction perte réelle n'est souvent pas symétrique. On peut noter pour la distribution de Gamma Lindley que lorsque θ augmente, l'estimateur de la prime Bayésien $\mu(\theta, \gamma)$ diminue. De même, il a également été observé que l'estimateur de la prime Bayesian qui donne la plus faible erreur absolue moyenne sur tous les autres estimateurs bayésiens dans la majorité des cas est l'estimateur bayésien de la prime sous la fonction de perte Linex surtout lorsque le paramètre de perte est inférieur à zéro (0) c'est-à-dire ($\alpha = -0, 5$). Il est toujours suivi par l'efficacité par la perte d'erreur quadratique, comme le montrent les tableaux 1 et 2. Dans le tableau 3, on peut montrer que l'estimateur de la prime bayésien en fonction de la perte Linex est également plus efficace que l'estimateur de Bayes sous la fonction de l'erreur quadratique uniquement dans le cas des valeurs éle-

vées de θ . Au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente, on constate que toutes les MSE moyennes d'estimateurs ont presque tendance à $\mu(\theta, \gamma)$. En outre, nous concluons que la performance est approximativement égale à un risque postérieur plus petit. En outre, les résultats de Gamma Lindley sous la fonction de l'erreur quadratique sont plus précis en général sous Linex ($\alpha = -0,5$). À partir de la discussion susmentionnée, nous pouvons conclure que la procédure de Bayes discutée dans ce document peut être recommandée pour leur utilisation.

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème des estimateurs bayésiens pour la distribution Gamma Lindley, dans le cadre des fonctions de perte asymétriques et symétriques, le paramètre de risque pour un preneur d'assurance n'est jamais connu en réalité, nous avons construit des estimateurs bayésiens supérieurs à la suite de techniques d'inférence bayésiennes. En imposant une distribution préalable, nous sommes en mesure de décrire la structure de risque pour l'ensemble de la classe de notation. En pratique, le choix de cette distribution préalable est subjectif par rapport aux jugements personnels ou induit à partir de données historiques des groupes correspondants. En utilisant la simulation numérique, il semble que les primes Bayésiennes soient cohérentes et vérifient la condition de convergence à la prime individuelle. D'après les résultats, nous observons que, dans la plupart des cas, les estimateurs supérieurs Bayésiens pour la distribution Gamma Lindley sont plus efficaces, car ils convergent plus rapidement vers la prime individuelle généralement sous Linex ($\alpha = -0,5$) qui ont été mentionnés dans les tableaux ci-dessus.

CHAPITRE 3

Estimation bayésienne de la distribution de Zeghdoudi sous les fonctions d'erreur quadratique, de perte de Linex et de perte d'entropie

Ce chapitre s'articule autour de deux sections, nous nous intéressons dans un premier temps à l'estimation de la prime Bayésienne sous deux fonctions de pertes symétriques (la fonction de perte quadratique et la fonction de perte entropie) et une fonction de perte asymétrique (la fonction de perte Linex) avec priors informatifs et non informatifs, à l'aide de l'approximation numérique (approximation de Lindley). Dans la section 2, nous faisons une étude de simulation de Monte Carlo pour calculer les estimateurs Bayésiens et les erreurs quadratiques moyennes (MSE).

1 La distribution de Zeghdoudi

Soit $Y_1 \sim \text{gamma}(2, \theta)$ et $Y_2 \sim \text{gamma}(3, \theta)$ deux variables aléatoires indépendantes. Nous considérons la variable aléatoire $X = Y_1$ et $X = Y_2$ avec probabilité $\frac{\theta}{1+\theta}$ et $\frac{2}{2+\theta}$ respectivement. Nous pouvons donner notre version de cette distribution en utili-

1. La distribution de Zeghdoudi

sant le modèle généralisée de Bouchahed et Zeghdoudi 2018 [6] dont nous remplaçons

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ et $n = 2$.

La fonction de densité de X est donnés par :

$$f_{ZD}(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^3 x(1+x)e^{-\theta x}}{2+\theta} & \text{si } x, \theta > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Le mode est donné par

$$\text{mode}(X) = \frac{1}{2\theta}(-\theta + 2 + \sqrt{\theta^2 + 4}) \text{ pour } \theta > 0.$$

La fonction de distribution cumulative (c.d.f)

$$f_{ZD}(x) = 1 - \left(\frac{x^2\theta^2 + \theta(\theta + 2)x + \theta + 2}{\theta + 2} \right) e^{-x\theta}, \quad x, \theta > 0.$$

La fonction de survie et taux de hasard sont définis respectivement par :

$$\begin{aligned} S_{ZD}(x) &= 1 - F_{ZD}(x) \\ &= \left(\frac{x^2\theta^2 + \theta(\theta + 2)x + \theta + 2}{\theta + 2} \right) e^{-x\theta}; \quad x, \theta > 0. \end{aligned}$$

$$h_{ZD}(x) = \frac{f_{ZD}(x)}{1 - F_{ZD}(x)} = \frac{\theta^3 x(x + 1)}{x^2\theta^2 + \theta(\theta + 2)x + \theta + 2}.$$

Moments et mesures connexes

Le kième moment sur l'origine du ZD est :

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{(k + 1)!(\theta + k + 2)}{\theta^k(\theta + 2)}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Corollaire 1.1 Soit $X \sim ZD(\theta)$, la moyenne et la variance de X respectivement

sont :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2(\theta + 3)}{\theta(\theta + 2)}, \quad \mathbf{Var}(X) = \frac{2(\theta^2 + 6\theta + 6)}{\theta^2(\theta + 2)^2}$$

2 Estimations du maximum de vraisemblance (MLE)

La fonction de vraisemblance pour un échantillon aléatoire x_1, x_2, \dots, x_n tiré de la distribution de Zeghdoudi est :

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\theta^3}{(\theta + 2)} \right)^n \prod_{i=1}^n (x_i^2 + x_i) e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}, \quad x, \theta > 0.$$

La fonction ln-vraisemblance est :

$$\ln l(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = 3n \ln \theta - n \ln(\theta + 2) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i + x_i^2) - \theta \sum_{i=1}^n x_i.$$

Les estimateurs du paramètre θ par la méthode des moments (*MoM*) et par la méthode du maximum de vraisemblance (MLE) sont les mêmes et peuvent être obtenus en résolvant l'équation non linéaire suivante :

$$\frac{3}{\theta} - \frac{1}{\theta + 2} - \bar{x} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_M = \hat{\theta}_{ML} = \left\{ \frac{1}{\bar{x}} (-\bar{x} + \sqrt{4\bar{x} + \bar{x}^2 + 1} + 1) \right\}.$$

3 Dérivation des primes bayésiennes

Supposons que θ est une variable aléatoire à valeur réelle avec une fonction de densité de probabilité $\pi(\theta)$. La distribution a postérieure de θ , c'est-à-dire, rappelle que la distribution conditionnelle de $X_n | \theta$ est la distribution de Zeghdoudi et que la distribution de Θ est supposée être connue dans la présente section. $\pi(\theta | \underline{X})$ est la distribution a postérieure de θ étant donné les données. Dans cette section, nous considérons l'estimation de la prime bayésienne \mathbf{P}_{\bullet}^B sur la base des fonctions de priors et de perte susmentionnées.

3.1 Estimateurs Bayésiens de la prime sous la fonction de perte quadratique

Dans la littérature actuarielle, nous écrivons la fonction de perte quadratique sous la forme suivante :

$$L(\mathbf{P}_{\text{SELF}}^B, \mu(\theta)) = (\mathbf{P}_{\text{SELF}}^B - \mu(\theta))^2,$$

la prime Bayésienne $\mathbf{P}_{\text{SELF}}^B$ est l'estimateur de $\mu(\theta)$, elle doit être choisie de telle sorte que l'espérance a posteriori de la fonction de perte quadratique

$$\mathbb{E} [L(\hat{\theta}, \theta)] = \int_0^{\infty} L(\hat{\theta}, \theta) \pi(\theta | x) d\theta = \int_0^{\infty} (\mathbf{P}_{\text{SELF}}^B - \mu(\theta)) \pi(\theta | \underline{X}) d\theta,$$

est minimum

$$\mathbf{P}_{\text{SELF}}^B = \mathbb{E} [\mu(\Theta) | x] = \int_0^{\infty} \mu(\theta) \pi(\theta | \underline{X}) d\theta, \quad (3.1)$$

où

$$\mu(\theta) = \mathbb{E} [x | \Theta] = \frac{2(\theta + 3)}{\theta(\theta + 2)}, \quad (3.2)$$

est la prime individuelle

Distribution a posteriori en utilisant l'extension de Jeffreys

L'approche Bayésienne fait appel à nos connaissances préalables sur les paramètres ainsi que sur les données disponibles. Lorsque les connaissances préalables sur le paramètre ne sont pas disponibles, il est possible d'utiliser le précédent non informatif dans l'analyse Bayésienne.

Comme nous n'avons aucune connaissance des paramètres, nous cherchons à utiliser l'extension de l'information préalable de Jeffreys, où la loi apriori de Jeffreys est la racine carrée du déterminant de l'information de Fisher.

On trouve Jeffrey de prendre $\pi(\theta) = \sqrt{I(\theta)}$,

où

$$I(\theta) = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 \log f(x; \theta)}{\partial \theta^2} \right] = \frac{2(\theta^2 + 6\theta + 6)}{\theta^2(\theta + 2)^2},$$

L'extension de la distribution de Jeffreys est donné comme suit :

$$I(\theta) = \frac{2(\theta^2 + 6\theta + 6)}{\theta^2(\theta + 2)^2},$$

$$\pi(\theta) = [I(\theta)]^c = k \left[\frac{2(\theta^2 + 6\theta + 6)}{\theta^2(\theta + 2)^2} \right]^c, \quad \theta, c > 0, \quad k \text{ est une constante.} \quad (3.3)$$

en combinant (3.3) avec la fonction de vraisemblance de la distribution de Zeghdoudi, la distribution a postérieure du paramètre θ à partir des données (x_1, x_2, \dots, x_n) est calculée comme suit :

$$\pi(\theta | \underline{X}) = \frac{\prod_{i=1}^n L(\theta; x_i) \pi(\theta)}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^n L(\theta; x_i) \pi(\theta) d\theta} = \frac{\frac{\theta^{(3n-2c)}}{(\theta+2)^{n+2c}} (\theta^2 + 6\theta + 6)^c e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}}{\int_0^\infty \frac{\theta^{(3n-2c)}}{(\theta+2)^{n+2c}} (\theta^2 + 6\theta + 6)^c e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta}, \quad \theta > 0.$$

Selon la fonction de perte quadratique, l'estimateur Bayésien de la prime correspondant est obtenu en substituant la distribution postérieure(3.4) dans (3.2), comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{SELF}}^B &= \int_0^\infty \mu(\theta) \pi(\theta | \underline{X}) d\theta \\ &= \frac{\int_0^\infty \frac{2\theta^{(3n-2c-1)}}{(\theta+2)^{n+2c+1}} (\theta + 3) (\theta^2 + 6\theta + 6)^c e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta}{\int_0^\infty \frac{\theta^{(3n-2c)}}{(\theta+2)^{n+2c}} (\theta^2 + 6\theta + 6)^c e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta}, \quad \theta > 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3. Dérivation des primes bayésiennes

Nous pouvons noter ici que la distribution a postérieure $\pi(\theta | \mathbf{X})$ prend une forme de ratio qui ne donne pas une formule de crédibilité et implique une intégration dans le dénominateur et ne peut être réduite à une forme fermée. Par conséquent, l'évaluation de l'attente a postérieure pour obtenir la prime Bayésienne de θ sera fastidieuse.

Nous considérons la technique d'approximation de Lindley pour l'estimation de θ , dont le rapport des intégrales est donné par :

$$I(x) = h(\hat{\theta}) + 0.5 \left[(\hat{h}_{\theta\theta} + 2\hat{h}_{\theta}\hat{p}_{\theta}) \hat{\sigma}_{\theta\theta} \right] + 0.5 \left[(\hat{h}_{\theta}\hat{\sigma}_{\theta\theta}) (\hat{L}_{\theta\theta\theta}\hat{\sigma}_{\theta\theta}) \right], \quad (3.5)$$

où

$$\hat{h}_{\theta} = \frac{\partial h(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}, \quad \hat{h}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 h(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}^2}, \quad \hat{p}_{\theta} = \frac{\partial g(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}, \quad \hat{L}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 L(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}^2}, \quad \hat{\sigma}_{\theta\theta} = -\frac{1}{\hat{L}_{\theta\theta}}, \quad \hat{L}_{\theta\theta\theta} = \frac{\partial^3 L(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}^3}. \quad (3.6)$$

Après avoir substitué la valeur de $f(\theta | x)$, il peut être écrit comme suit :

$$\mathbf{P}_{\text{SELF}}^B = \mathbb{E}[\mu(\Theta) | x] = \frac{\int_{\theta} \mu(\theta) \exp[L(\theta, x) + g(\theta)] d\theta}{\int_{\theta} \exp[L(\theta, x) + g(\theta)] d\theta}, \quad \theta > 0 \quad (3.7)$$

où

$$h(\theta) = \mu(\theta) = \frac{2(\theta + 3)}{\theta(\theta + 2)},$$

$$L(\theta; x) = 3n \ln \theta - n \ln(\theta + 2) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i + x_i^2) - \theta \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.8)$$

$$g(\theta) = c [\ln(2\theta^2 + 12\theta + 12) - 2 \ln(\theta^2 + 2\theta)]. \quad (3.9)$$

Nous vérifions facilement que

$$\begin{aligned} \hat{h}_{\theta} &= -\frac{2(\theta^2 + 6\theta + 6)}{(\theta^2 + 2\theta)^2}, & \hat{h}_{\theta\theta} &= \frac{4(\theta^3 + 9\theta^2 + 18\theta + 12)}{(\theta^2 + 2\theta)^3}, & \hat{p}_{\theta} &= 2c \left(\frac{\theta + 3}{\theta^2 + 6\theta + 6} - \frac{2\theta + 2}{\theta^2 + 2\theta} \right), \\ \hat{L}_{\theta\theta} &= -\frac{3n}{\theta^2} + \frac{n}{(\theta + 2)^2}, & \hat{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{\theta^2(\theta + 2)^2}{n[3(\theta + 2)^2 - \theta^2]}, & \hat{L}_{\theta\theta\theta} &= \frac{6n}{\theta^3} - \frac{2n}{(\theta + 2)^3}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ensuite, nous obtenons

$$\mathbf{P}_{\text{SELF}}^B = \mathbb{E}[\mu(\Theta) | x] = \frac{2(\hat{\theta}^2 + 3)}{\hat{\theta}(\hat{\theta} + 2)} + \tag{3.11}$$

$$0.5 \left[\left(\frac{2\hat{\theta}^6 + 60\hat{\theta}^4 + 72\hat{\theta}^2 + 48}{(\hat{\theta}^3 + 2\hat{\theta})^3} - 4c \left(\frac{2\hat{\theta}^3 + 16\hat{\theta}}{\hat{\theta}^4 + 16\hat{\theta} + 12} - \frac{3\hat{\theta}^2 + 2}{\hat{\theta}^3 + 2\theta} \right) \left(\frac{\hat{\theta}^4 + 16\hat{\theta}^2 + 12}{(\hat{\theta}^3 + 2\hat{\theta})^2} \right) \right) \frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2 + 2)}{n \left[3(\hat{\theta}^2 + 2)^2 + 2\hat{\theta}^2(2 - \hat{\theta}^2) \right]} - \right.$$

$$\left. 0.5 \left[\left[\frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2 + 2)}{n \left[3(\hat{\theta}^2 + 2)^2 + 2\hat{\theta}^2(2 - \hat{\theta}^2) \right]} \right]^2 \left(\frac{6n}{\hat{\theta}^3} - \frac{4n(\hat{\theta}^3 - 6\hat{\theta})}{(\hat{\theta}^2 + 2)^3} \right) \left(\frac{\hat{\theta}^4 + 16\hat{\theta}^2 + 12}{(\hat{\theta}^3 + 2\hat{\theta})^2} \right) \right] \right.$$

Distribution a postérieure en utilisant la loi a priori Gamma inversé (IG)

La loi a priori Gamma inversé est un bon modèle de distribution de vie qui représente l'inverse d'une variable distribuée selon la distribution Gamma. Nous observons que si θ a une distribution gamma inversée($\alpha; \beta$), alors $\frac{1}{\theta}$ a une distribution gamma ($\alpha; \beta$).

Il est donné comme

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\theta^{\alpha+1}} e^{-\frac{\beta}{\theta}}; \alpha, \beta, \theta > 0. \tag{3.12}$$

Les deux premiers moments de $IG(\alpha, \beta)$ sont $\mathbb{E}(\Theta) = \frac{\beta}{\alpha-1}$, et $Var(\theta) = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$. Maintenant, en utilisant la vraisemblance de la distribution de Zeghdoudi (ZD) et du loi apriori Gamma inversé (IG), la distribution a postérieure du paramètre θ à partir des données (x_1, x_2, \dots, x_n) prend la forme

$$\begin{aligned} \pi(\theta | \mathbf{X}) &= \frac{\prod_{i=1}^n L(\theta; x_i) \pi(\theta)}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^n L(\theta; x_i) \pi(\theta) d\theta} \\ &= \frac{\frac{\theta^{3n-(\alpha+1)}}{(2+\theta)^n} e^{-\frac{\beta}{\theta} - \theta \sum_{i=1}^n x_i}}{\int_0^\infty \frac{\theta^{3n-(\alpha+1)}}{(2+\theta)^n} e^{-\frac{\beta}{\theta} - \theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

3. Dérivation des primes bayésiennes

Or, selon la fonction de perte quadratique, l'estimateur de la prime Bayésienne correspondant pour le paramètre θ est dérivé en substituant la distribution a postériori(3.14) dans (3.2), comme suit :

$$\mathbf{P}_{\text{SELF}}^B = \mathbb{E}[\mu(\Theta) | x] = \int_0^\infty \mu(\theta) \pi(\theta | \mathbf{X}) d\theta = \frac{\int_0^\infty \frac{\theta^{3n-(\alpha+2)}}{(2+\theta)^{n+1}} (\theta+3) e^{-\frac{\beta}{\theta} - \theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta}{\int_0^\infty \frac{\theta^{3n-(\alpha+1)}}{(2+\theta)^n} e^{-\frac{\beta}{\theta} - \theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta}, \theta > 0. \quad (3.14)$$

En suivant la procédure décrite ci-dessus, nous avons

$$g(\theta) = \beta \ln \alpha - \ln \Gamma(\beta) - (\alpha + 1) \ln \theta - \frac{\beta}{\theta}. \quad (3.15)$$

Nous pouvons facilement vérifier que

$$\begin{aligned} \hat{h}_\theta &= -\frac{2(\theta^2+6\theta+6)}{(\theta^2+2\theta)^2}, & \hat{h}_{\theta\theta} &= \frac{4(\theta^3+9\theta^2+18\theta+12)}{(\theta^2+2\theta)^3}, & \hat{p}_\theta &= \frac{\beta}{\theta^2} - \frac{\alpha+1}{\theta}, \\ \hat{L}_{\theta\theta} &= -\frac{3n}{\theta^2} + \frac{n}{(\theta+2)^2}, & \hat{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{\theta^2(\theta+2)^2}{n[3(\theta+2)^2-\theta^2]}, & \hat{L}_{\theta\theta\theta} &= \frac{6n}{\theta^3} - \frac{2n}{(\theta+2)^3}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Après simplification, nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{SELF}}^B &= \mathbb{E}[\mu(\Theta) | x] = \frac{2(\hat{\theta}+3)}{\hat{\theta}(\hat{\theta}+2)} + \quad (3.17) \\ &0.5 \left[\left(\left(\frac{2\hat{\theta}^6+60\hat{\theta}^4+72\hat{\theta}^2+48}{(\hat{\theta}^3+2\hat{\theta})^3} \right) - \frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2+2)}{n \left[3(\hat{\theta}^2+2)^2 + 2\hat{\theta}^2(2-\hat{\theta}^2) \right]} \right) \right] - \\ &0.5 \left[\left[\frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2+2)}{n \left[3(\hat{\theta}^2+2)^2 + 2\hat{\theta}^2(2-\hat{\theta}^2) \right]} \right]^2 \left(\frac{6n}{\hat{\theta}^3} - \frac{4n(\hat{\theta}^3-6\hat{\theta})}{(\hat{\theta}^2+2)^3} \right) \left(\frac{\hat{\theta}^4+16\hat{\theta}^2+12}{(\hat{\theta}^3+2\hat{\theta})^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

3.2 Estimateurs Bayésiens de prime sous la fonction de perte Linex

L'estimateur Bayésien de la prime $\mathbf{P}_{\text{LIN}}^B$ qui est la valeur qui minimise l'équation ci-dessus, est donnée par :

$$\mathbf{P}_{\text{LIN}}^B = -\frac{1}{a} \ln \left[\mathbb{E} \left[e^{-a\mu(\Theta)} \mid x \right] \right], \quad (3.18)$$

Distribution postérieure utilisant l'extension de Jeffreys

En utilisant la fonction de perte Linex, l'estimateur de Bayes correspondant du paramètre θ est comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{LIN}}^B &= -\frac{1}{a} \ln \mathbb{E} \left[e^{-a\mu(\Theta)} \mid x \right]. \\ \mathbb{E} \left[e^{-a\mu(\Theta)} \mid x \right] &= \int_0^{\infty} e^{-a\mu(\theta)} f(\theta \mid x) d\theta \\ &= \frac{\int_0^{\infty} \frac{\theta^{(3n-2c)}}{(\theta+2)^{n+2c}} (\theta^2 + 6\theta + 6)^c e^{-\left(\theta \sum_{i=1}^n x_i + a\mu(\theta)\right)} d\theta}{\int_0^{\infty} \frac{\theta^{(3n-2c)}}{(\theta+2)^{n+2c}} (\theta^2 + 6\theta + 6)^c e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta} \\ &= \frac{\int_{\theta} h(\theta) \exp [L(\theta, x) + g(\theta)] d\theta}{\int_{\theta} \exp [L(\theta, x) + g(\theta)] d\theta}, \quad \theta > 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

En suivant les mêmes étapes expliquées ci-dessus, nous avons

$$h(\theta) = e^{-a\mu(\theta)}, \quad (3.20)$$

3. Dérivation des primes bayésiennes

$L(\theta, x)$ et $g(\theta)$ sont les mêmes que ceux donnés dans(3.10) et (3.11).

$$\begin{aligned} \hat{h}_\theta &= -a\mu'(\theta) e^{-a\mu(\theta)}, & \hat{h}_{\theta\theta} &= -a\left(\mu''(\theta) - a\mu'^2(\theta)\right) e^{-a\mu(\theta)}, & \hat{p}_\theta &= 2c\left(\frac{\theta+3}{\theta^2+6\theta+6} - \frac{2\theta+2}{\theta^2+2\theta}\right), \\ \hat{L}_{\theta\theta} &= -\frac{3n}{\theta^2} + \frac{n}{(\theta+2)^2}, & \hat{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{\theta^2(\theta+2)^2}{n[3(\theta+2)^2+\theta^2]}, & \hat{L}_{\theta\theta\theta} &= \frac{6n}{\theta^3} - \frac{2n}{(\theta+2)^3}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

où

$$\mu'(\theta) = \frac{\partial\mu(\theta)}{\partial\theta} = -\left(\frac{2(\theta^2+6\theta+6)}{(\theta^2+2\theta)^2}\right), \quad \mu''(\theta) = \frac{\partial^2\mu(\theta)}{\partial\theta^2} = \left(\frac{4(\theta^3+9\theta^2+18\theta+12)}{(\theta^2+2\theta)^3}\right).$$

Ensuite, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{LIN}}^B &= -\frac{1}{\alpha} \ln \mathbb{E} [e^{-a\mu(\Theta)} | x] = \\ &-\frac{1}{\alpha} \ln \left[e^{-\alpha\mu(\hat{\theta})} + 0.5 \left[\left(\left(-\alpha \left(\mu'(\hat{\theta}) - a \left(\mu'(\hat{\theta}) \right)^2 \right) e^{-a\mu(\hat{\theta})} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. 4 \left(-a\mu'(\hat{\theta}) e^{-a\mu(\hat{\theta})} \right) \left(c \left(\frac{2\theta^3+16\theta}{\theta^4+16\theta+12} - \frac{3\theta^2+2}{\theta^3+2\theta} \right) \right) \right] \frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2+2)}{n[3(\hat{\theta}^2+2)^2+2\hat{\theta}^2(2-\hat{\theta}^2)]} \right. \\ &\left. \left. 0.5 \left[\left(\frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2+2)}{n[3(\hat{\theta}^2+2)^2+2\hat{\theta}^2(2-\hat{\theta}^2)]} \right)^2 \left(-a\mu'(\hat{\theta}) e^{-a\mu(\hat{\theta})} \right) \left(\frac{6n}{\theta^3} - \frac{4n(\hat{\theta}^3-6\hat{\theta})}{(\hat{\theta}^2+2)^3} \right) \right] \right] \end{aligned}$$

Distribution a postériori à l'aide du gamma inversé (IG)

L'estimateur Bayésien correspondant sous la fonction de perte Linex est :

$$\mathbf{P}_{\text{LIN}}^B = -\frac{1}{a} \ln \mathbb{E} [e^{-a\mu(\Theta)} | x].$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-a\mu(\Theta)} | x] &= \int_0^\infty e^{-a\mu(\theta)} f(\theta | x) d\theta \\ &= \frac{\int_0^\infty \frac{\theta^{3n-(\alpha+1)}}{(2+\theta)^n} e^{-\left(\frac{\beta}{\theta} + \theta \sum_{i=1}^n x_i + a\mu(\theta)\right)} d\theta}{\int_0^\infty \frac{\theta^{3n-(\alpha+1)}}{(2+\theta)^n} e^{-\left(\frac{\beta}{\theta} + \theta \sum_{i=1}^n x_i\right)} d\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En suivant les mêmes étapes mentionnées ci-dessus, nous trouvons

$h(\theta) = e^{-a\mu(\theta)}$, $L(\theta, x)$ et $g(\theta)$ sont les mêmes que ceux donnés dans (3.10) et (3.17).

$$\begin{aligned} \hat{h}_\theta &= -a\mu'(\theta) e^{-a\mu(\theta)}, & \hat{h}_{\theta\theta} &= -a \left(\mu''(\theta) - a (\mu'(\theta))^2 \right) e^{-a\mu(\theta)}, & \hat{p}_\theta &= \frac{\beta}{\theta^2} - \frac{\alpha+1}{\theta}, \\ \hat{L}_{\theta\theta} &= -\frac{3n}{\theta^2} + \frac{n}{(\theta+2)^2}, & \hat{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{\theta^2(\theta+2)^2}{n[3(\theta+2)^2+\theta^2]}, & \hat{L}_{\theta\theta\theta} &= \frac{6n}{\theta^3} - \frac{2n}{(\theta+2)^3}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ensuite, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{LIN}}^B &= -\frac{1}{a} \ln \mathbb{E} [e^{-a\mu(\Theta)} | x] = \\ &= -\frac{1}{a} \ln \left[e^{-a\mu(\hat{\theta})} + 0.5 \left[\left(\frac{-a \left(\mu'(\hat{\theta}) - a (\mu'(\hat{\theta}))^2 \right) e^{-a\mu(\hat{\theta})}}{2 \left(-a\mu'(\hat{\theta}) e^{-a\mu(\hat{\theta})} \right) \left(\frac{\beta}{\theta^2} - \frac{\alpha+1}{\theta} \right)} \right) + \frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2+2)}{n[3(\hat{\theta}^2+2)^2+2\hat{\theta}^2(2-\hat{\theta}^2)]} \right] \right. \\ &\quad \left. + 0.5 \left[\left(\frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2+2)}{n[3(\hat{\theta}^2+2)^2+2\hat{\theta}^2(2-\hat{\theta}^2)]} \right)^2 \left(-a\mu'(\hat{\theta}) e^{-a\mu(\hat{\theta})} \right) \left(\frac{6n}{\hat{\theta}^3} - \frac{4n(\hat{\theta}^3-6\hat{\theta})}{(\hat{\theta}^2+2)^3} \right) \right] \right] \end{aligned}$$

3.3 Estimateurs de la prime Bayésienne sous la fonction de perte d'entropie

Distribution postérieure en utilisant l'extension de Jeffreys

En utilisant la fonction de perte d'entropie, l'estimateur Bayésien correspondant est le suivant

$$\mathbf{P}_{\text{ENT}}^B = \left(\mathbb{E} [\mu(\theta)^{-1} | x] \right)^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [\mu(\theta)^{-1} | x] &= \int_0^{\infty} \mu(\theta)^{-1} \pi(\theta | \mathbf{X}) d\theta & (3.26) \\
 &= \frac{\int_0^{\infty} \frac{\theta^{(3n-2c)}}{(2\theta+6)(\theta+2)^{n+2c-1}} (\theta^2 + 6\theta + 6)^c e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta}{\int_0^{\infty} \frac{\theta^{(3n-2c)}}{(2\theta+6)(\theta+2)^{n+2c-1}} (\theta^2 + 6\theta + 6)^c e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta} \\
 &= \frac{\int_{\theta} h(\theta) \exp[L(\theta, x) + g(\theta)] d\theta}{\int_{\theta} \exp[L(\theta, x) + g(\theta)] d\theta}, \quad \theta > 0
 \end{aligned}$$

$$h(\theta) = \mu(\theta)^{-1} = \frac{1}{\mu(\theta)} = \frac{\theta(\theta+2)}{2(\theta+3)},$$

$L(\theta, x)$ et $g(\theta)$ sont les mêmes que ceux donnés dans (3.10) et (3.11),

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_{\theta} &= \frac{2\theta^2+12\theta+12}{(2\theta+6)^2}, & \hat{h}_{\theta\theta} &= \frac{24}{(2\theta+6)^2}, & \hat{p}_{\theta} &= 2c \left(\frac{\theta+3}{\theta^2+6\theta+6} - \frac{2\theta+2}{\theta^2+2\theta} \right), \\
 \hat{L}_{\theta\theta} &= -\frac{3n}{\theta^2} + \frac{n}{(\theta+2)^2}, & \hat{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{\theta^2(\theta+2)^2}{n[3(\theta+2)^2+\theta^2]}, & \hat{L}_{\theta\theta\theta} &= \frac{6n}{\theta^3} - \frac{2n}{(\theta+2)^3},
 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ensuite, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{\text{ENT}}^B &= (\mathbb{E} [\mu(\theta)^{-1} | x])^{-1} & (3.28) \\
 &= \left[\frac{\hat{\theta}(\hat{\theta}+2)}{\hat{\theta}^2+2\hat{\theta}} + 0.5 \left[\left(\frac{-8\hat{\theta}^3+144\hat{\theta}}{(\hat{\theta}^2+6)^3} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. 4c \left(\frac{\hat{\theta}^4+16\hat{\theta}^2+12}{(\hat{\theta}^2+6)^2} \right) \left(\frac{2\hat{\theta}^3+16\hat{\theta}}{\hat{\theta}^4+16\hat{\theta}+12} - \frac{3\hat{\theta}^2+2}{\hat{\theta}^3+2\hat{\theta}} \right) \right] \frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2+2)}{n[3(\hat{\theta}^2+2)^2+2\hat{\theta}^2(2-\hat{\theta}^2)]} \right] + \\
 &\quad \left[0.5 \left[\left(\frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2+2)}{n[3(\hat{\theta}^2+2)^2+2\hat{\theta}^2(2-\hat{\theta}^2)]} \right)^2 \left(\frac{\hat{\theta}^4+16\hat{\theta}^2+12}{(\hat{\theta}^2+6)^2} \right) \left(\frac{6n}{\hat{\theta}^3} - \frac{4n(\hat{\theta}^3-6\hat{\theta})}{(\hat{\theta}^2+2)^3} \right) \right] \right]^{-1}.
 \end{aligned}$$

Distribution a posteriori à l'aide du gamma inversé (IG)

L'estimateur de Bayes correspondant au paramètre θ sous la fonction de perte d'entropie est :

$$\mathbf{P}_{\text{ENT}}^B = \mathbb{E} [\mu(\theta)^{-1} | x]^{-1}.$$

$$\mathbb{E} [\mu(\theta)^{-1} | x] = \int_0^{\infty} \mu(\theta)^{-1} f(\theta | x) d\theta = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\theta^{3n-\alpha}}{2(2+\theta)^{n-1}(\theta+3)} e^{-\frac{\beta}{\theta}-\theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta}{\int_0^{\infty} \frac{\theta^{3n-(\alpha+1)}}{(2+\theta)^n} e^{-\frac{\beta}{\theta}-\theta \sum_{i=1}^n x_i} d\theta}. \quad (3.29)$$

En suivant les mêmes étapes mentionnées ci-dessus, nous trouvons

$h(\theta) = \frac{\theta(\theta+2)}{(2\theta+6)}$, $L(\theta, x)$ et $g(\theta)$ sont les mêmes que ceux donnés dans (3.10) et (3.17).

$$\begin{aligned} \hat{h}_\theta &= \frac{2\theta^2+12\theta+12}{(2\theta+6)^2}, & \hat{h}_{\theta\theta} &= \frac{24}{(2\theta+6)^2}, & \hat{p}_\theta &= \frac{\beta}{\theta^2} - \frac{\alpha+1}{\theta}, \\ \hat{L}_{\theta\theta} &= -\frac{3n}{\theta^2} + \frac{n}{(\theta+2)^2}, & \hat{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{\theta^2(\theta+2)^2}{n[3(\theta+2)^2+\theta^2]}, & \hat{L}_{\theta\theta\theta} &= \frac{6n}{\theta^3} - \frac{2n}{(\theta+2)^3}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ensuite, nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{ENT}}^B &= (\mathbb{E} [\mu(\theta)^{-1} | x])^{-1} \\ &= \left[\begin{array}{c} \frac{\hat{\theta}(\hat{\theta}+2)}{2\hat{\theta}+6} + 0.5 \left[\left(\frac{-8\hat{\theta}^3+144\hat{\theta}}{(\hat{\theta}^2+6)^3} \right) + \right. \\ \left. 2 \left(\frac{\hat{\theta}^4+16\hat{\theta}^2+12}{(\hat{\theta}^2+6)^2} \right) \left(\frac{\beta}{\hat{\theta}^2} - \frac{\alpha+1}{\hat{\theta}} \right) \right] \frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2+2)}{n[3(\hat{\theta}^2+2)^2+2\hat{\theta}^2(2-\hat{\theta}^2)]} + \\ 0.5 \left[\left(\frac{\hat{\theta}^2(\hat{\theta}^2+2)}{n[3(\hat{\theta}^2+2)^2+2\hat{\theta}^2(2-\hat{\theta}^2)]} \right)^2 \left(\frac{\hat{\theta}^4+16\hat{\theta}^2+12}{(\hat{\theta}^2+6)^2} \right) \left(\frac{6n}{\hat{\theta}^3} - \frac{4n(\hat{\theta}^3-6\hat{\theta})}{(\hat{\theta}^2+2)^3} \right) \right] \end{array} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Elicitation d'hyperparamètre (s)

Selon [12], l'élicitation est le processus de formulation des connaissances et des croyances d'une personne concernant une ou plusieurs quantités incertaines dans une distribution de probabilité (conjointe) pour ces quantités. Dans le contexte de l'analyse statistique Bayésienne, il se présente le plus souvent comme une méthode de spécification de la distribution antérieure pour un ou plusieurs paramètres inconnus d'un modèle statistique. C'est une tâche difficile, car, il faut d'abord identifier la distribution préalable puis ses hyperparamètres.

Dans cette section, nous nous intéressons à la méthode proposée par [1] pour

déterminer les hyperparamètres α and β du prior gamma basant sur la méthode bootstrap, et les mêmes étapes expliquées dans [31].

4 Etude de simulation

Cette section contient une étude de simulation de Monte Carlo pour comparer les méthodes d'estimation en utilisant les erreurs quadratiques moyennes (MSE) comme suit :

$$MSE \left(\hat{P}_{\bullet}^B \right) = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\hat{P}_{\bullet}^B - \mu(\theta) \right)^2}{N}. \quad (3.32)$$

Où N est le nombre de réplifications. Nous avons généré 100000 échantillons de taille $n = 20, 40, 60, 80, 100$, et 1000 pour représenter des échantillons de petite, moyenne et grande taille provenant de la distribution de Zeghdoudi avec trois valeurs de θ ($\theta = 0, 44, 1, 5, 9$). Afin de comparer les estimateurs bayésiens de qualité obtenus dans la section ci-dessus sous trois fonctions de perte et deux loi a priori différents, nous choisissons les valeurs des constantes de Jeffreys ($c = 0, 01, 0, 5, 1$) et pour le gamma inversé, les paires de valeurs des hyper paramètres α et β sont choisies α et $\beta = (0, 2, 0, 3), (1, 1, 5)$ avec deux valeurs de symétrie de perte $\text{linex}(a = \pm 0, 01)$ et $q = 1$ pour la perte d'entropie.

Les résultats sont résumés et présentés dans les tableaux suivants.

θ	0.44	1.5	9.0
$\mu(\theta)$	6.408346	1.714286	0.2424242
n	Ext.J.P		
20	6.427768(0.0003772195)	1.70642(6.186881e - 05)	0.2325904(9.670397e - 05)
40	6.418092(9.499057e - 05)	1.710361(1.540085e - 05)	0.2374164(2.507806e - 05)
60	6.414851(4.232033e - 05)	1.711671(6.835437e - 06)	0.239065(1.128418e - 05)
80	6.413228(2.383403e - 05)	1.712326(3.842341e - 06)	0.239897(6.386787e - 06)
100	6.412253(1.526487e - 05)	1.712718(2.458112e - 06)	0.2403987(4.102794e - 06)
1000	6.408737(1.53049e - 07)	1.714129(2.454623e - 08)	0.2422203(4.15837e - 08)
	IG.P		
20	6.408436(8.184013e - 09)	1.73643(0.0004903582)	0.2296947(0.0001620411)
40	6.408226(1.427129e - 08)	1.725384(0.0001231621)	0.2359006(4.255847e - 05)
60	6.408229(1.361046e - 08)	1.72169(5.482373e - 05)	0.2380387(1.923311e - 05)
80	6.408244(1.029034e - 08)	1.719841(3.086227e - 05)	0.2391212(1.090976e - 05)
100	6.408258(7.719616e - 09)	1.718731(1.976105e - 05)	0.2397752(7.017584e - 06)
1000	6.408335(1.256809e - 10)	1.714731(1.979417e - 07)	0.2421569(7.14696e - 08)

θ	0.44	1.5	9.0
$\mu(\theta)$	6.408346	1.714286	0.2424242
n	Ext.J.P		
20	6.423919(0.0002425291)	1.706052(6.779723e - 05)	0.2325945(9.662431e - 05)
40	6.416157(6.100882e - 05)	1.710176(1.689136e - 05)	0.2374184(2.505827e - 05)
60	6.413558(2.717113e - 05)	1.711547(7.499168e - 06)	0.2390664(1.127541e - 05)
80	6.412257(1.529957e - 05)	1.712232(4.216053e - 06)	0.239898(6.381861e - 06)
100	6.411476(9.797806e - 06)	1.712643(2.697428e - 06)	0.2403995(4.099645e - 06)
1000	6.408659(9.819732e - 08)	1.714122(2.694448e - 08)	0.2422204(4.155233e - 08)
	IG.P		
20	6.404592(1.408841e - 05)	1.736061(0.0004741641)	0.2338005(7.436952e - 05)
40	6.406292(4.217769e - 06)	1.725198(0.000119076)	0.2371807(2.749423e - 05)
60	6.406937(1.985068e - 06)	1.721566(5.300208e - 05)	0.2386573(1.418976e - 05)
80	6.407274(1.148483e - 06)	1.719748(2.983602e - 05)	0.239485(8.639111e - 06)
100	6.407481(7.47438e - 07)	1.718656(1.910364e - 05)	0.2400145(5.806893e - 06)
1000	6.408257(7.9315e - 09)	1.714723(1.913457e - 07)	0.2421813(5.904271e - 08)

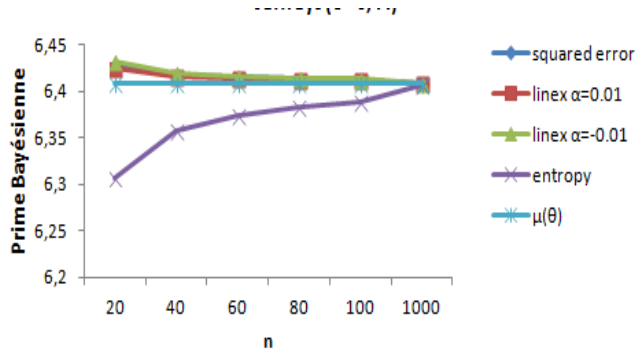
4. Etude de simulation

Table 3.3-Estimateur de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte Linex($\alpha = 0.2, \beta = 0.3, a = -0.01, c = 0.5$).

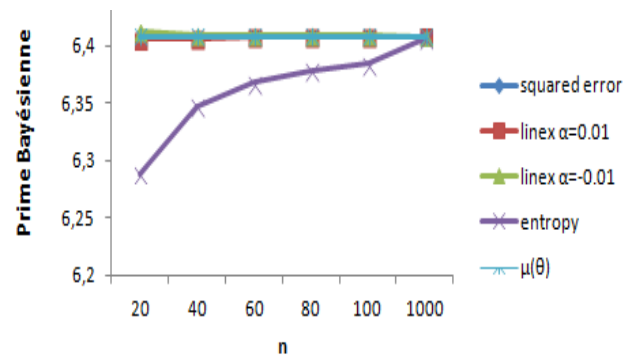
θ	0.44	1.5	9.0
$\mu(\theta)$	6.408346	1.714286	0.2424242
n	Ext..J.P		
20	6.431615(0.0005414665)	1.706788(5.621073e - 05)	0.2325864(9.678369e - 05)
40	6.420027(0.0001364558)	1.710547(1.397906e - 05)	0.2384016(1.618175e - 05)
60	6.416144(6.080963e - 05)	1.711795(6.202423e - 06)	0.2395387(8.326238e - 06)
80	6.414198(3.425128e - 05)	1.712419(3.485955e - 06)	0.2401746(5.06069e - 06)
100	6.41303(2.193846e - 05)	1.712792(2.229904e - 06)	0.2405809(3.397942e - 06)
1000	6.408815(2.200214e - 07)	1.714137(2.225972e - 08)	0.2422388(3.439732e - 08)
n	IG.P		
20	6.41228(1.547928e - 05)	1.725569(0.0001273162)	0.2358985(4.258488e - 05)
40	6.410161(3.293498e - 06)	1.720744.165851e - 05	0.238655(1.420682e - 05)
60	6.409521(1.382034e - 06)	1.7188062.042952e - 05	0.2397744(7.021747e - 06)
80	6.409215(7.548e - 07)	1.7173(9.085614e - 06)	0.2406517(3.141889e - 06)
100	6.409035(4.744779e - 07)	1.716547(5.112298e - 06)	0.2410926(1.773294e - 06)
1000	6.408412(4.440555e - 09)	1.714512(5.116727e - 08)	0.2422905(1.789591e - 08)

Table 3.4-Estimateur de la prime Bayésienne et MSE respectifs sous la fonction de perte d'entropie($\alpha = 1, \beta = 1.5, q = 1, c = 1$).

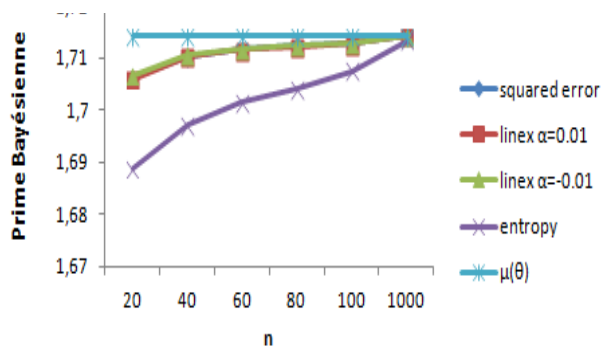
θ	0.44	1.5	9.0
$\mu(\theta)$	6.408346	1.714286	0.2424242
n	Ext..J.P		
20	6.307508(0.01016832)	1.688745(0.0006523198)	0.2390914(1.110798e - 05)
40	6.357651(0.002569982)	1.697218(0.0002913227)	0.2407382(2.842876e - 06)
60	6.374487(0.001146389)	1.701469(0.0001642655)	0.2412957(1.273515e - 06)
80	6.382929(0.0006460224)	1.704025(0.0001052825)	0.2415762(7.191958e - 07)
100	6.388001(0.0004139078)	1.707439(4.688288e - 05)	0.241745(4.61383e - 07)
1000	6.406307(4.155459e - 06)	1.713257(1.058344e - 06)	0.242356(4.653705e - 09)
n	IG.P		
20	6.28851(0.01651358)	1.693029(0.1591305)	0.2327684(0.01352628)
40	6.347871(0.004780887)	1.703629(0.1676992)	0.237462(0.01464006)
60	6.367904(0.002411886)	1.707175(0.170616)	0.2390849(0.01503543)
80	6.377967(0.001524722)	1.70895(0.1720858)	0.2399079(0.01523793)
100	6.38402(0.001088649)	1.710016(0.1729713)	0.2404054(0.01536101)
1000	6.405905(0.0001234279)	1.713858(0.1761822)	0.2422203(0.01581417)



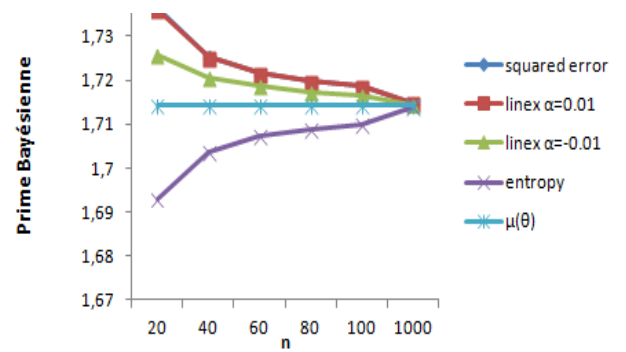
Estimateurs baysiens en utilisant l'extension de Jeffreys ($\theta = 0.44$)



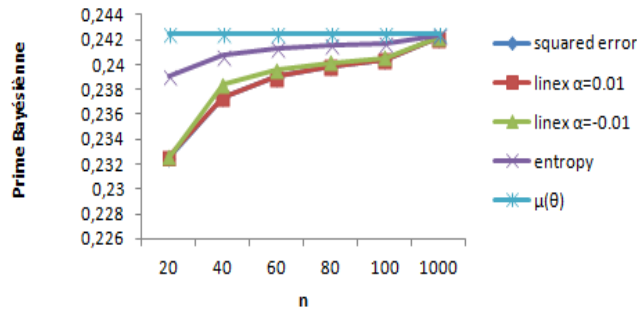
Estimateurs baysiens en utilisant l'IG ($\theta = 0.44$)



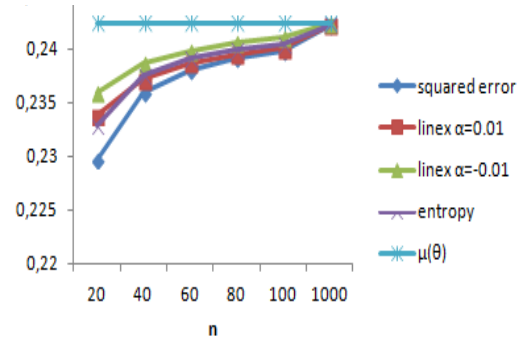
Estimateurs baysiens en utilisant l'extension de Jeffreys ($\theta = 1.5$)



Estimateurs baysiens de prime utilisant l'IG ($\theta = 1.5$)



Estimateurs baysiens de prime en utilisant l'extension de Jeffreys ($\theta = 9$)



Estimateurs baysiens de prime utilisant l'IG ($\theta = 9$)

...

5 Résultats et Discussion

Cette étude porte sur le problème de l'estimation Bayésienne fondée sur la distribution de Zeghdoudi en tant que distribution conditionnelle. Pour les estimateurs Bayésiens, la performance dépend de la forme de la distribution a priori et de la fonction de perte supposée. La plupart des auteurs ont utilisé l'erreur quadratique comme fonction de perte symétrique. Cependant, dans la pratique, la fonction de perte réelle n'est souvent pas symétrique. L'étude de simulation a révélé que l'estimateur Bayésien de la prime sous perte d'entropie est également plus efficace que l'estimateur de Bayes sous l'erreur quadratique et les fonctions de perte Linex dans le cas *Ext.J.P* lorsque θ augmente. De plus, nous pouvons noter que lorsque θ tend vers ∞ , $\mu(\theta)$ diminue et l'estimateur Bayésien de prime tend vers $\mu(\theta)$. D'autre part, sous les deux loi a priori précédents, nous concluons que la performance est à peu près égale à la réduction du risque a postériori par comparaison. En outre, les résultats du loi a priori Gamma inversé sont plus précis que l'extension de Jeffreys sous l'erreur quadratique et les fonctions de perte Linex (*MSE*). De la discussion mentionnée ci-dessus, nous pouvons conclure que la procédure de Bayes décrite dans

ce projet peut être recommandée pour leur utilisation.

Conclusion et Perspectives

L'objet de ce travail est de prouver l'applicabilité de la statistique bayésienne en fiabilité. Dans un premier lieu, nous avons commencé par présenter un rappel sur les notions de base de probabilité, ainsi que celles de l'approche bayésienne et, les méthodes d'estimation des paramètres. Par la suite, nous avons construit des estimateurs des primes bayésiennes du modèle Gamma-Lindley, suivant les techniques d'inférence bayésiennes concernant les paramètres des risques d'un assuré. Les techniques bayésiennes sont de puissants outils au service du fiabiliste mais leurs problème majeur est lié à la subjectivité des données « a priori » et aux calculs importants qu'elles demandent ainsi, leurs utilisations doivent être déterminées et faites avec beaucoup de précautions et de soins

À l'aide de la simulation numérique, il semble que les primes bayésiennes sont cohérentes et vérifient la condition de convergence vers la prime individuelle.

De plus, cette thèse exhibe l'intérêt de la nouvelle distribution Zeghdoudi dont nous avons réussi à construire des estimateurs bayésiens de prime basés sur la méthode bayésienne et suivant l'approximation de Lindley.

Enfin, et pour terminer, des applications pratiques et comparatifs selon les différents méthodes sont établies.

En perspectives, il est souhaitable de considérer les distributions de log-Zeghdoudi, inverse Zeghdoudi, comme distributions conditionnelles au lieu de la distribution de Lindley. L'étude de cas pratique avec des données réelles fera l'objet d'un travail au futur, tout en sachant que le problème réside dans l'information subjective peut aussi être une bonne perspective de recherche.

Annexes

ANNEXE 1 : La prime

La prime (cotisation) correspond à la somme que doit payer, mensuellement ou annuellement, l'assuré pour bénéficier des garanties prévues au contrat d'assurance, en cas de sinistre (risque). Elle constitue une charge relative à la conservation, à l'entretien et l'administration de l'immeuble. Bien que le syndicat doive en assumer le coût, les frais qui en découlent sont exigés aux copropriétaires à même leurs charges communes (frais de condos). L'actuaire travaille au sein des compagnies d'assurance. Sa mission : estimer les réserves que la compagnie doit établir pour faire face aux dépenses en fonction des différents contrats signés avec ses clients, calculer les risques et prévoir tous les aléas d'une situation donnée, de manière à faire une tarification qui ne laisse aucune place à l'imprévu et qui maximise les bénéfices de la compagnie.

Un point fondamental en tarification est le calcul de la prime qui a pour but d'évaluer pour chaque assuré le montant attendu des sinistres pour la période d'assurance étudiée. Ce calcul se fait le plus fréquemment par des méthodes statistiques comme : les modèles linéaires généralisés (GLM), bonus-malus et experience rating. La tarification basée sur l'expérience (experience rating) en assurance est une technique qui vise à assigner à chaque risque sa prime juste et équitable. Cette prime pour une période dépend exclusivement de la distribution des sinistres (inconnue) de ce risque pour cette période. Cette technique exige un volume d'expérience important. Elle est donc principalement utilisée en assurance automobile et en accidents du travail. Elle ne peut toutefois être utilisée, par exemple, en assurance-vie (on ne meurt qu'une fois) ou en assurance habitation (fréquence trop faible). Développée par les écoles suisse et scandinave, la théorie de la crédibilité qui est le pilier d'expérience rating repose sur les principes de l'inférence Bayésienne et représente un ensemble des techniques utilisées par les actuaires pour déterminer la prime d'un assuré/contrat

dans un portefeuille hétérogène en utilisant les informations des années précédentes. Elle s'est développée en parallèle de la statistique Bayésienne. Pour un assuré, son risque X est caractérisé par une réalisation de Θ , notée θ . Chaque sinistre est vu donc comme une variable aléatoire selon une distribution conditionnelle qui dépend de θ . En plus, l'espérance des sinistres appelée aussi la prime de risque peut être calculée sur la base de cette distribution conditionnelle. En pratique, différents modèles ont été proposés pour chercher le meilleur estimateur de la prime de risque. Le modèle Bayésien quant à lui, consiste à supposer pour θ une distribution des sinistres à priori $\pi(\theta)$ - appelée fonction de structure dans le contexte actuariel- qui décrit l'expérience de risque du même paramètre appelée $f(x|\theta)$. En combinant la distribution à priori avec la vraisemblance de $f(x|\theta)$ on peut obtenir la distribution à posteriori $f(\theta|x)$ qui établit la dépendance de θ sachant l'historique de l'expérience. La prime Bayésienne P^B -meilleure prime d'expérience- représentant l'espérance des sinistres futurs peut être calculée à partir de $f(\theta|x)$.

ANNEXE 2 : #Estimation de la prime Bayésienne du modèle GL :

```
#Estimation de la prime Bayésienne sous la fonction de perte quadratique
a=2.74
b=0.245
c=1.91
d=0.178
(y<-matrix(5, 1 ,100000))
(x<-matrix(5, 1 ,100000))
for(j in 1 :100000){
a=1
b=0.004
c=1
d=0.004
n=1000
te=9
beta=1.5
(indiv <- (2*beta*(1+te)-te)/(te*beta*(1+te)))
library(VGAM)
(m <- matrix(runif(n, 0, 1), nrow=1, ncol=n))
(M<-matrix(5, 1 ,n))
for(i in 1 :n)
{
if (m[i] <= 0.5)
{
wl <- m[i]
(M[i] <- wl)
}
}
```

```

else
{
(wl <- (0.5*rgamma(1, 2, 0.5))+(0.5*rlind(1, 0.5)))
M[i] <- wl
}}
(z0=sum (M))
(L0=(2*n/te)-(n/(te+1))+(((beta-1)*z0)/((beta+te*beta-te)*z0+1))-z0)
(L0.0=(-2*n/te^2)+(n/(te+1)^2)-(((beta-1)*z0)^2/((beta+te*beta-te)*z0+1)^2))
(L0.0.0=(4*n/te^3)-(2*n/(te+1)^3)-((2*(beta-1)*z0)^3/((beta+te*beta-te)*z0+1)^3))
(L0.bt=Lbt.0=(((1+M[i])*z0)/((beta+te*beta-te)*z0+1)^2))
(Lbt=(-n/beta)+(((1+te)*z0)/((beta+te*beta-te)*z0+1)))
(Lbt.bt=(n/beta^2)-(((1+te)*z0)^2/((beta+te*beta-te)*z0+1)^2))
(Lbt.bt.bt=(-2*n/beta^3)+((2*(1+te)*z0)^3/((beta+te*beta-te)*z0+1)^3))
(L0.0.bt=Lbt.0.0=((-2*(M[i])^2*(1+z0)*(beta-1))/((beta+te*beta-te)*z0+1)^3))
(L0.bt.bt=Lbt.bt.0=((-2*(z0)^2*(1+M[i])*(1+te))/((beta+te*beta-te)*z0+1)^3))
(u0=ubt=1)
(u0.0=ubt.bt=u0.bt=ubt.0=0)
(U0<-(-2*beta*te^2-4*beta*te+te^2-2*beta)/(beta*(te+te^2)^2))
(U0.0 <-(-4*beta*te^3+12*beta*te^2+12*beta*te-2*te^3+4*beta)/(beta*(te+te^2)^3))
(U0.bt <-(-te^2/(beta*(te+te^2)^2)))
(Ubt <-(-1/(beta^2*(1+te))))
(Ubt.bt <-(-2/(beta^3*(1+te))))
(Ubt.0<-(-1/(beta*(1+te))^2))
(P0 <-((a-b*te-1)/te))
(Pbt <-((c-d*te-1)/beta))
(S0.0<-(-1/L0.0))
(Sbt.bt<-(-1/Lbt.bt))
TE=te+u0*P0*S0.0+0.5*(u0*S0.0*Sbt.bt*L0.bt.bt+u0*(S0.0)^2*L0.0.0)

```

```

BT=beta+ubt*Pbt*Sbt.bt+0.5*(ubt*S0.0*Sbt.bt*L0.0.bt+ubt*(Sbt.bt)^2*Lbt.bt.bt)
LTE=(2*n/TE)-(n/(TE+1))+(((BT-1)*z0)/((BT+TE*BT-TE)*z0+1))-z0
LTE.TE=(-2*n/TE^2)+(n/(TE+1)^2)-(((BT-1)*z0)^2/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^2)
LTE.TE.TE=(4*n/TE^3)-(2*n/(TE+1)^3)-((2*(BT-1)*z0)^3/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^3)
LTE.BT=Lbt.0=(((1+z0)*z0)/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^2)
LBT=(-n/BT)+(((1+TE)*z0)/((BT+TE*BT-TE)*z0+1))
LBT.BT=(n/BT^2)-(((1+TE)*z0)^2/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^2)
LBT.BT.BT=(-2*n/BT^3)+((2*(1+TE)*z0)^3/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^3)
LTE.TE.BT=LBT.TE.TE=(-2*(z0)^2*(1+z0)*(BT-1))/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^3)
LTE.BT.BT=LBT.BT.TE=(-2*(z0)^2*(1+z0)*(1+TE))/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^3)
(indiv <-((2*BT*(1+TE)-TE)/(TE*BT*(1+TE)))
(UTE<-((-2*BT*TE^2-4*BT*TE+TE^2-2*BT)/(BT*(TE+TE^2)^2))
(UTE.TE <-((4*BT*TE^3+12*BT*TE^2+12*BT*TE-2*TE^3+4*BT)/(BT*(TE+TE^2)^3))
(UTE.BT <-((-TE^2/(BT*(TE+TE^2)^2)))
(UBT <-((1/(BT^2*(1+TE))))
(UBT.BT <-((-2/(BT^3*(1+TE))))
(UBT.TE<-((-1/(BT*(1+TE))^2))
(PTE <-((a-b*TE-1)/TE))
(PBT <-((c-d*TE-1)/BT))
(STE.TE<-((-1/LTE.TE))
(SBT.BT<-((-1/LBT.BT))
I<-((2*BT*(1+TE)-TE)/(TE*BT*(1+TE))+0.5*((UBT.BT+2*UBT*PBT)*SBT.BT+(UTE.TE+2*
(BE <- I)
y[j]=BE
(mse = mean( ( BE-indiv)^2, na.rm = TRUE))
x[j]=mse
}
mean(y)

```

```
mean(x)
#Estimation de la prime Bayesienne sous la fonction de perte linex
(y<-matrix(5, 1 ,100000))
(x<-matrix(5, 1 ,100000))
for(j in 1 :100000){
a=1
b=0.004
c=1
d=0.004
n=20
te=9
beta=1.5
v=-0.5
(indiv <-(2*beta*(1+te)-te)/(te*beta*(1+te)))
library(VGAM)
(m <- matrix(runif(n, 0, 1), nrow=1, ncol=n))
(M<-matrix(5, 1 ,n))
for(i in 1 :n)
{
if (m[i] <= 0.5)
{
wl <- m[i]
(M[i] <- wl)
}
else
{
(wl <- (0.5*rgamma(1, 2, 0.5))+(0.5*rlind(1, 0.5)))
M[i] <- wl
}
```

}}

$$(z0=\text{sum}(M))$$

$$(L0=(2*n/te)-(n/(te+1))+(((beta-1)*z0)/((beta+te*beta-te)*z0+1))-z0)$$

$$(L0.0=(-2*n/te^2)+(n/(te+1)^2)-(((beta-1)*z0)^2/((beta+te*beta-te)*z0+1)^2))$$

$$(L0.0.0=(4*n/te^3)-(2*n/(te+1)^3)-((2*(beta-1)*z0)^3/((beta+te*beta-te)*z0+1)^3))$$

$$(L0.bt=Lbt.0=(((1+M[i])*z0)/((beta+te*beta-te)*z0+1)^2))$$

$$(Lbt=(-n/beta)+(((1+te)*z0)/((beta+te*beta-te)*z0+1)))$$

$$(Lbt.bt=(n/beta^2)-(((1+te)*z0)^2/((beta+te*beta-te)*z0+1)^2))$$

$$(Lbt.bt.bt=(-2*n/beta^3)+((2*(1+te)*z0)^3/((beta+te*beta-te)*z0+1)^3))$$

$$(L0.0.bt=Lbt.0.0=(-2*(M[i])^2*(1+z0)*(beta-1))/((beta+te*beta-te)*z0+1)^3))$$

$$(L0.bt.bt=Lbt.bt.0=((-2*(z0)^2*(1+M[i])*(1+te))/((beta+te*beta-te)*z0+1)^3))$$

$$(u0=ubt=1)$$

$$(u0.0=ubt.bt=u0.bt=ubt.0=0)$$

$$(U0<-(-2*beta*te^2-4*beta*te+te^2-2*beta)/(beta*(te+te^2)^2))$$

$$(U0.0<-(-4*beta*te^3+12*beta*te^2+12*beta*te-2*te^3+4*beta)/(beta*(te+te^2)^3))$$

$$(U0.bt<-(-te^2/(beta*(te+te^2)^2)))$$

$$(Ubt<-(-1/(beta^2*(1+te))))$$

$$(Ubt.bt<-(-2/(beta^3*(1+te))))$$

$$(Ubt.0<-(-1/(beta*(1+te))^2))$$

$$(P0<-((a-b*te-1)/te))$$

$$(Pbt<-((c-d*te-1)/beta))$$

$$(S0.0<-(-1/L0.0))$$

$$(Sbt.bt<-(-1/Lbt.bt))$$

$$(TE=te+u0*P0*S0.0+0.5*(u0*S0.0*Sbt.bt*L0.bt.bt+u0*(S0.0)^2*L0.0.0))$$

$$(BT=beta+ubt*Pbt*Sbt.bt+0.5*(ubt*S0.0*Sbt.bt*L0.0.bt+ubt*(Sbt.bt)^2*Lbt.bt.bt))$$

$$(LTE=(2*n/TE)-(n/(TE+1))+(((BT-1)*z0)/((BT+TE*BT-TE)*z0+1))-z0)$$

$$(LTE.TE=(-2*n/TE^2)+(n/(TE+1)^2)-(((BT-1)*z0)^2/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^2))$$

$$(LTE.TE.TE=(4*n/TE^3)-(2*n/(TE+1)^3)-((2*(BT-1)*z0)^3/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^3))$$


```

(LTE.BT=Lbt.0=(((1+M[i])*z0)/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^2))
(LBT=(-n/BT)+(((1+TE)*z0)/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)))
(LBT.BT=(n/BT^2)-(((1+TE)*z0)^2/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^2))
(LBT.BT.BT=(-2*n/BT^3)+((2*(1+TE)*z0)^3/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^3))
(LTE.TE.BT=LBT.TE.TE=(-2*(z0)^2*(1+z0)*(BT-1)/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^3))
(LTE.BT.BT=LBT.BT.TE=(-2*(z0)^2*(1+z0)*(1+TE)/((BT+TE*BT-TE)*z0+1)^3))
(UTB <-(-2*BT*(1+TE)-TE)/(TE*BT*(1+TE)))
(U <-(exp(-v*UTB)))
(UTE<-(-2*BT*TE^2-4*BT*TE+TE^2-2*BT)/(BT*(TE+TE^2)^2))
(UTE.TE <-(-4*BT*TE^3+12*BT*TE^2+12*BT*TE-2*TE^3+4*BT)/(BT*(TE+TE^2)^3))
(UTE.BT <-(-TE^2/(BT*(TE+TE^2)^2)))
(UBT <-(-1/(BT^2*(1+TE))))
(UBT.BT <-(-2/(BT^3*(1+TE))))
(UBT.TE<-(-1/(BT*(1+TE))^2))
(PTE <-((a-b*TE-1)/TE))
(PBT <-((c-d*TE-1)/BT))
(STE.TE<-(-1/LTE.TE))
(SBT.BT<-(-1/LBT.BT))
(ULTE<-(-v*UTE*exp(-v*UTB)))
(ULTE.LTE <-(-v*(UTE.TE-v*UTE^2)*exp(-v*UTB)))
(ULTE.LBT <-(-v*(UTE.BT-v*UTE*UBT)*exp(-v*UTB)))
(ULBT <-(-v*UBT*exp(-v*UTB)))
(ULBT.LBT <-(-v*(UBT.BT-v*UBT^2)*exp(-v*UTB)))
(ULBT.LTE <-(-v*(UBT.TE-v*UTE*UBT)*exp(-v*UTB)))
I<-(U+0.5*((ULBT.LBT+2*ULBT*PBT)*SBT.BT+(ULTE.LTE+2*ULTE*PTE)*STE.TE)+
(BE <- -(1/v)*log(I))
y[j]=BE
(mse = mean( ( BE-indiv)^2, na.rm = TRUE))

```

```
x[j]=mse  
}  
mean(y)  
mean(x)
```

```
ANNEXE 3 :#Estimation de la prime Bayésienne du modèle ZD
#Estimation de la prime Bayésienne sous la fonction de perte quadratique
#la loi apriori de Jeffrey
t : maximum de vraisemblance
te=teta
BE= l'estimateur=E[prime individuelle]
(m<-matrix(5, 1 ,100000))
(M<-matrix(5, 1 ,100000))
n=1000
te=9
c=0.5
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2)))
for ( i in 1 :10000) {
(L00 <- (-3*n/(te^2))-(2*n*(2-(te^2)))/(((te^2)+2)^2))
(s00 <- -1/L00)
(L000 <- (6*n/(te^3))-(4*n*((te^3)-6*te)/((te^2)+2)^3))
u00=0
u0=1
(p0 <- 2*c*(((te+3)/((te^2)+6*te+6))-((2*te+2)/((te^2)+2*te)))
(t=te+0.5*((u00+2*u0*p0)*s00)+0.5*((u0*s00)*(L000*s00)))
(A <- -((t^4)+16*(t^2)+12)/(((t^3)+2*t)^2))
(B <- ((2*(t^6)+60*(t^4)+72*(t^2)+48)/((t^3)+2*t)^3))
(C <- 2*c*(((2*(t^3)+16*t)/((t^4)+16*t+12))-((3*(t^2)+2)/((t^3)+2*t)))
(D <- (-3*n/(t^2))-(2*n*(2-(t^2)))/(((t^2)+2)^2))
(E <- -1/D)
(F <- (6*n/(t^3))-(4*n*((t^3)-6*t)/((t^2)+2)^3))
I <- (((t^2)+6)/(t*((t^2)+2)))+(0.5*((B+(2*A*C))*E))+(0.5*A*E*F*E)
(BE <- I)
```

```

m[i]=BE
(mse = mean( ( BE-indiv)^2, na.rm = TRUE))
M[i]=mse
}
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2)))
mean(m)
mean(M)
#loi apriori Gamma Inversé
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2)))
(m<-matrix(5, 1 ,100000))
(M<-matrix(5, 1 ,100000))
n=100
te=9
a=0.25
b=3
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2)))
for ( i in 1 :100000) {
(L00 <- (-3*n/(te^2))-2*n*(2-(te^2))/(((te^2)+2)^2))
(s00 <- -1/L00)
(L000 <- (6*n/(te^3))-4*n*((te^3)-6*te)/((te^2)+2)^3))
u00=0
u0=1
(p0 <- ((b-(a*t)-1)/t))
(t=te+0.5*((u00+2*u0*p0)*s00)+0.5*((u0*s00)*(L000*s00)))
(A <- -((t^4)+16*(t^2)+12)/(((t^3)+2*t)^2))
(B <- ((2*(t^6)+60*(t^4)+72*(t^2)+48)/((t^3)+2*t)^3))
(C <- ((b-(a*t^2)-t^2)/t^2))
(D <- (-3*n/(t^2))-2*n*(2-(t^2))/(((t^2)+2)^2))

```

```
(E <- -1/D)
(F <- (6*n/(t^3))-(4*n*((t^3)-6*t)/((t^2)+2)^3))
I <- (((t^2)+6)/(t*((t^2)+2)))+(0.5*((B+(2*A*C))*E))+(0.5*A*E*F*E)
(BE <- I)
m[i]=BE
(mse = mean( ( BE-indiv)^2, na.rm = TRUE))
M[i]=mse
}
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2))))
mean(m)
mean(M)
#Estimation de la prime Bayesienne sous la fonction de perte linex
#loi apriori de Jeffrey
(m<-matrix(5, 1 ,100000))
(M<-matrix(5, 1 ,100000))
n=1000
te=9
alpha=-2.5
c=0.5
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2))))
for ( i in 1 :100000) {
(L00 <- (-3*n/(te^2))-(2*n*(2-(te^2))/(((te^2)+2)^2))
(s00 <- -1/L00)
(L000 <- (6*n/(te^3))-(4*n*((te^3)-6*te)/((te^2)+2)^3))
u00=0
u0=1
(p0 <- 2*c*(((te+3)/((te^2)+6*te+6))-((2*te+2)/((te^2)+2*te)))
(t=te+0.5*((u00+2*u0*p0)*s00)+0.5*((u0*s00)*(L000*s00)))
```

```

(derindiv <- -((t^4)+16*(t^2)+12)/(((t^3)+2*t)^2))
(B1 <- ((2*(t^6)+60*(t^4)+72*(t^2)+48)/((t^3)+2*t)^3))
(A <- -alpha*(derindiv)*exp(-alpha*indiv))
(B <- -alpha*(B1-alpha*(derindiv^2))*exp(-alpha*indiv))
(C <- 2*c*(((2*(t^3)+16*t)/((t^4)+16*t+12))-((3*(t^2)+2)/((t^3)+2*t))))
(D <- (-3*n/(t^2))-(2*n*(2-(t^2))/(((t^2)+2)^2)))
(E <- -1/D)
(F <- (6*n/(t^3))-(4*n*((t^3)-6*t)/((t^2)+2)^3))
I <- exp(-alpha*(((t^2)+6)/(t*((t^2)+2))))+ (0.5*((B+(2*A*C))*E))+ (0.5*A*E*F*E)
(BE <- -(1/alpha)*log(I))
m[i]=BE
(mse = mean( ( BE-indiv)^2, na.rm = TRUE))
M[i]=mse
}
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2)))
mean(m)
mean(M)
#loi apriori Gamma Inversé
(m<-matrix(5, 1 ,100000))
(M<-matrix(5, 1 ,100000))
n=20
te=0.1
alpha=-2.5
a=0.25
b=3
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2)))
for ( i in 1 :100000) {
(L00 <- (-3*n/(te^2))-(2*n*(2-(te^2))/(((te^2)+2)^2)))

```

```
(s00 <- -1/L00)
(L000 <- (6*n/(te^3))-(4*n*((te^3)-6*te)/((te^2)+2)^3))
u00=0
u0=1
(p0 <- ((b-(a*t)-1)/t))
(t=te+0.5*((u00+2*u0*p0)*s00)+0.5*((u0*s00)*(L000*s00)))
(derindiv <- -((t^4)+16*(t^2)+12)/(((t^3)+2*t)^2))
(B1 <- ((2*(t^6)+60*(t^4)+72*(t^2)+48)/((t^3)+2*t)^3))
(A <- -alpha*(derindiv)*exp(-alpha*indiv))
(B <- -alpha*(B1-alpha*(derindiv^2))*exp(-alpha*indiv))
(C <- ((b-(a*t^2)-t^2)/t^2))
(D <- (-3*n/(t^2))-(2*n*(2-(t^2))/(((t^2)+2)^2)))
(E <- -1/D)
(F <- (6*n/(t^3))-(4*n*((t^3)-6*t)/((t^2)+2)^3))
I <- exp(-alpha*(((t^2)+6)/(t*((t^2)+2))))+ (0.5*((B+(2*A*C))*E))+ (0.5*A*E*F*E)
(BE <- -(1/alpha)*log(I))
m[i]=BE
(mse = mean( ( BE-indiv)^2, na.rm = TRUE))
M[i]=mse
}
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2)))
mean(m)
mean(M)
#Estimation de la prime Bayesienne sous la fonction de perte d'entropie
#loi apriori de Jeffrey
(m<-matrix(5, 1 ,100000))
(M<-matrix(5, 1 ,100000))
n=20
```

```

te=5.5
c=2
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2)))
for ( i in 1 :100000) {
(L00 <- (-3*n/(te^2))-(2*n*(2-(te^2)))/(((te^2)+2)^2))
(s00 <- -1/L00)
(L000 <- (6*n/(te^3))-(4*n*((te^3)-6*te)/((te^2)+2)^3))
u00=0
u0=1
(p0 <- 2*c*(((te+3)/((te^2)+6*te+6))-((2*te+2)/((te^2)+2*te)))
(t=te+0.5*((u00+2*u0*p0)*s00)+0.5*((u0*s00)*(L000*s00))
(A <- ((t^4)+16*(t^2)+12)/(((t^2)+6)^2))
(B <- ((-8*(t^3)+144*t)/(((t^2)+6)^3))
(C <- 2*c*(((2*(t^3)+16*t)/((t^4)+16*t+12))-((3*(t^2)+2)/((t^3)+2*t)))
(D <- (-3*n/(t^2))-(2*n*(2-(t^2)))/(((t^2)+2)^2))
(E <- -1/D)
(F <- (6*n/(t^3))-(4*n*((t^3)-6*t)/((t^2)+2)^3))
I <- (((t*((t^2)+2))/((t^2)+6))+ (0.5*((B+(2*A*C))*E))+ (0.5*A*E*F*E))^(-
1)
(BE <- I)
m[i]=BE
(mse = mean( ( BE-indiv)^2, na.rm = TRUE))
M[i]=mse
}
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2)))
mean(m)
mean(M)
#loi apriori Gamma Inversé

```



```
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2)))
(m<-matrix(5, 1 ,100000))
(M<-matrix(5, 1 ,100000))
n=20
te=5.5
a=1
b=1.5
for ( i in 1 :100000) {
(L00 <- (-3*n/(te^2))-(2*n*(2-(te^2))/(((te^2)+2)^2)))
(s00 <- -1/L00)
(L000 <- (6*n/(te^3))-(4*n*((te^3)-6*te)/((te^2)+2)^3))
u00=0
u0=1
(p0 <- ((b-(a*t)-1)/t))
(t=te+0.5*((u00+2*u0*p0)*s00)+0.5*((u0*s00)*(L000*s00)))
(A <- ((t^4)+16*(t^2)+12)/(((t^2)+6)^2))
(B <- ((-8*(t^3)+144*t)/(((t^2)+6)^3)))
(C <- ((b-(a*t^2)-t^2)/t^2))
(D <- (-3*n/(t^2))-(2*n*(2-(t^2))/(((t^2)+2)^2)))
(E <- -1/D)
(F <- (6*n/(t^3))-(4*n*((t^3)-6*t)/((t^2)+2)^3))
I <- (((t*((t^2)+2))/((t^2)+6))+ (0.5*((B+(2*A*C))*E)))+(0.5*A*E*F*E))^(-
1)
(BE <- I)
m[i]=BE
(mse = mean( ( BE-indiv)^2, na.rm = TRUE))
M[i]=mse
}
```

```
(indiv <- (((te)^2+6)/(te*((te)^2+2)))  
mean(m)  
mean(M)
```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ahn, S.E., C.S., Park, H.M., Kim. Hazard rate estimation of a mixture model with censored lifetimes, *Stoch. Environ. Res. Assess.* 21 (2007), 711-716.
- [2] Al-Kutubi, H.S. and Ibrahim, N. A. Bayes estimator for exponential distribution with extension of Jed'rey prior information, *Malaysian Journal of mathematical Sciences*, 3(2) : 297-313, 2009.
- [3] Bailey, A.L., Credibility procedures, Laplace.s generalization of Bayes. rule and the combination of collateral knowledge with observed data, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, vol. 37, 7.23, 1950
- [4] Basu, A. P., and Ebrahimi, N. Bayesian approach to life testing and reliability estimation using asymmetric loss function, *J. Statist. Plann. Infer.*, 29, 21.31, 1991.
- [5] Bellina, R, ú Méthodes d'apprentissage appliquées à la tari.cation non-viež , Thèse de doctorat en Actuariat, sous la direction de Fabrice Taillieu, Lyon, INSFA, 2014, 107 p
- [6] Bouchahed, L, Zeghdoudi, H. A new and uni.ed approch in generalizing the lindley.s distribution with applications, *statistics in transition new series*, MARCH 2018 Vol. 19, NO.1, pp. 61-74, DOI 10.21307/statrans-2018-004

-
- [7] Bühlmann, H., Straub, E., Glaubwürdigkeit für Schadensutze. Bulletin of the Swiss association of actuaries 70, 111.133, 1996.
- [8] Calabria, R. and Pulcini, G., Point estimation under asymmetric loss functions for left truncated exponential samples, Comm. in Statist. Theory and Methods, 25(3) : 585- 600, 1969.
- [9] Dey, D.K., and Liu, P.L. On comparison of estimators in a generalized life model, Microelectron Reliab., 32, 207 .221, 1992
- [10] D.V., Lindley. Fiducial distributions and Bayes.theorem, Journal of the Royal Statistical Society, Series A20,102.107, 1958.
- [11] DUPUIS.J. Statistique bayésienne et algorithmes MCMC [en ligne].,LSP-UPS, 2007. Disponible sur <https://www.math.univ-toulouse.fr/dupuis/bayesmim08.pdf>. Consulté le 15/12/2016.
- [12] Garthwaite, H. P., Kadane, B. J. and O.Hagan, A. Elicitation, working paper in university of Shecéld, 2004.
- [13] Ghitany, M.E, Al-Mutairi D.K. Estimation methods for the discrete Poisson.Lindley distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation,79(1) :1.9, 2009.
- [14] Ghitany, M.E, Atieh, B., Nadarajah, S. Lindley distribution and its application. Mathematics and computers in simulation, 78 :493.506, 2008.
- [15] Howlader, H.A., Hossain, A. Bayesian survival estimation of Pareto distribution of the second kind based on failure censored data, Computational Statistics Data Analysis, 38 :301.314, 2002.
- [16] H. Krishna, K. Kumar. Reliability estimation in Lindley distribution with progressively type II right censored sample,Math. Comput. Simul, 82 (2), 281.294, 2011.
- [17] H. Raiffa and R. Schlaifer. Applied statistical decision theory. Boston, Massachusetts :Harvard Business School, 1961.

-
- [18] H. Zeghdoudi, H. Messaadia, Zeghdoudi distribution and its applications. *Int. J. Comput. Sci. Math.* 9(1) (2018), 58.65.
- [19] Jaheen, Z.F. On record statistics from a mixture of two exponential distributions, *J. Statist. Comput. Simul.*, 75, 1-11, 2005.
- [20] Legendre, A. *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Courcier, City Paris, 1805.
- [21] Lindley, DV. Approximate Bayes methods. *Trabajos de Estadística de Investigación Operativa*, 31(1) :223.245, 1980
- [22] Metiri, F, Zeghdoudi, H, and Remita, M, R. On Bayes Estimates of Lindley Distribution under Linex Loss Function : Informative and Non Informative Priors. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. ISSN 0973-1768 Volume 12, Number 1 (2016), pp. 391-400.
- [23] M. Denuit, A. Charpentier. (2005), *Mathématiques de l'Assurance Non-Vie*. Tome II : Tarification et Provisionnement, Collection économie et Statistiques Avancées, Economica, Paris.596.
- [24] Nassar, M., and Eissa, F.H. Bayesian estimation for the exponentiated Weibull model, *Commun Statistical theory Meth.*, 33(10), 2343-2362, 2004.
- [25] N.A, Ibrahim, C.B, Guure, A.O.M, Ahmed, Bayesian estimation of two-parameter weibull distribution using extension of Jeffreys. prior information with three loss functions, *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.
- [26] Norberg, R. The credibility approach to ratemaking, *Scandinavian actuarial journal*, 181.221, 1979.
- [27] Pandey, B.N. T-estimator of the scale parameter of the exponential distribution using Linex loss function. *Commun. Statistical Theory. Meth.*, 26(9), 2191.2202, 1997.
- [28] Robert, C. *Le choix Bayésien, principes et pratique*. Statistique et Probabilités Appliquées. Springer .2006.

-
- [29] Rojo. On the admissibility of $cx+d$ with respect to the Linex loss Function, Commun. Statistical Theory. Meth, 116, 3745-3748, 1987.
- [30] R. Shanker, S. Sharma and R. Shanker, "A Two-Parameter Lindley Distribution for Modeling Waiting and Survival Times Data," Applied Mathematics, Vol. 4 No. 2, (2013).
- [31] Sajid Ali, Muhammad Aslam, Syed Mohsin Ali Kazmi. A study of the effect of the loss function on Bayes Estimate, posterior risk and hazard function for Lindley distribution, Applied Mathematical Modelling, 37, 6068.6078, 2013.
- [32] Sankaran, M. The discrete Poisson.Lindley distribution. Biometrics, 26, 145-149, 1970.
- [33] Soliman, A. Comparison of Linex and quadratic Bayes estimators for the Rayleigh distribution. Commun. Statist. Theor. Meth., 29(1), 95. 107, 2000.
- [34] Thompson, R.D. and Basu, A.P. Asymmetric loss function for estimating reliability. Journal of Bayesian Analysis in Statistics and Econometrics, Wiley, New York, 1996.
- [35] Varian, H.R. A Bayesian approach to real estate assessment, Studies in Bayesian Econometrics and Statistics, Amsterdam : North-Holland, 195.208, 1975.
- [36] Zeghdoudi, H, Nedjar, Gamma Lindley distribution and its application. Journal of Applied probability and statistics, vol. 10, 2015
- [37] Zellner, A. Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions. Journal of Amsterdam statistical association, 81, 446.451, 1986.