وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA

جامعة باجي مختار - عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2019

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences

Etude De Certains Problèmes Inverses Paraboliques D ' ordre Fractionnaire En Temps

Option
Mathématiques Appliquées

Par
SETTARA LOUBNA

DIRECTRICE DE THÈSE : ATMANIA RAHIMA M.C.A U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENTE :	Alem Leila	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Nisse Lamine	Prof.	U. EL-OUED
EXAMINATEUR :	Zitouni Salah	M.C.A	U. SOUK AHRAS

Université Badji-Mokhtar Annaba
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Thèse de Doctorat

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Étude de Certains Problèmes Inverses Paraboliques D'ordre Fractionnaire en Temps

Encadreur : Dr. Mme Atmania Rahima

Devant le jury :

1. ALEM Leila	**Présidente**	**Prof.**	**U.B.M.ANNABA**
2. ATMANIA Rahima	**Rapporteuse**	**M.C.A**	**U.B.M ANNABA**
3. NISSE Lamine	**Examinateur**	**Prof.**	**U.EL OUED**
4. ZITOUNI Salah	**Examinateur**	**M.C.A**	**U.SOUK AHRAS**

الملخص

نهدف من خلال هذه الأطروحة إلى دراسة وجود ووحدانية حلول بعض المسائل العكسية الحدية بحد منبع لمعادلة تفاضلية جزئية كسرية بمفهوم ريمان ليوفيل. في المرحلة الأولى نحدد الحد المصدر المتعلق بالزمن لمسألة عكسية بشروط حدية غير محلية بالإضافة إلى شرط تكاملي، لدراسة وجود ،وحدانية و التبعية باستمرار للحل نعتمد على استعمال طريقة فوريي للجمل ثنائية التعامد، و ذلك لأن المؤثر غير مرافق لذاته و من جهة أخرى نستعمل مبدأ التقلص لبناخ.

أما في المرحلة الثانية ، نقترح تحديد الحد المصدر المتعلق بالمتغير الفضائي بشروط حدية متجانسة بإضافة شرط إبتدائي مرجح.بالنسبة للمسألة المباشرة ، نستعمل مبدأ ديهامال و طريقة فوريي لإثبات وجود ووحدانية الحل الضعيف، بالإضافة لدراسة انتظام الحل. لتحديد الحل الوحيد نفرض حل تكاملي لتعريف تطبيق ادخال - اخراج.

المسألة العكسية ترجع إلى عكس هذا التطبيق الذي يجب أن يكون رتيب و تطبيقه العكسي متباين.

الكلمات المفتاحية: المسائل العكسية، الطرح بشكل جيد، مسألة ذات معادلة كسرية بالنسبة للزمن، تحديد الحد المصدر، تحليل فوريي، التحليل الكسري .

Résumé

Dans le présent travail, on étudie deux classes de problèmes inverses de diffusion avec terme source, dont la dérivée partielle par rapport au temps est fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre non entier compris entre zéro et un.
Les problèmes d' E.D.P de cette forme sont dit problèmes de sous-diffusion.

La première investigation est consacrée à la détermination d'un coefficient du terme source dépendant du temps pour un problème inverse soumis à des conditions aux limites non locales et une condition de détermination intégrale.
On établit des résultats d'existence, d'unicité et de dépendance continue par rapport aux données de la solution. Les outils utilisées pour les démonstrations sont d'une part la méthode de Fourier pour des systèmes bi-orthogonaux, l'opérateur étant non-autoadjoint et d'une autre part la théorie du point fixe.

Pour la deuxième investigation, on se propose la détermination d'un coefficient du terme source dépendant de l'espace pour un problème inverse de sous-diffusion soumis à des conditions aux limites homogènes et une condition initiale pondérée. Pour le problème direct, le point clé dans notre analyse est l'utilisation du principe de Duhamel en plus de la méthode de Fourier pour montrer l'existence et l'unicité de la solution faible puis une question de régularité a été traité. Pour la détermination d'un unique coefficient, le problème est input output. Le problème inverse réduit en l'inversion de cette application qui devrait être monotone et d'inversion injective.

2000 Mathematics subject classification : 34A55-26A33-42A05

Mots clés : Problème inverse, Bien posé, Problème de diffusion fractionnaire en temps, Détermination du terme source, Analyse de Fourier, Analyse fractionnaire.

Abstract

In the present work, we study two classes of inverse problems for diffusion equation with source term, where the partial derivative is fractional in time.
The form of EDP problems are called sub-diffusion problems.

The first investigation is devoted to the determination of the source term coefficient dependent on time of an inverse source problem with non-local boundary conditions and an integral condition. We establish results of existence, uniqueness, and continuous dependence data. Tools used for demonstrations are based on one hand, the Fourier method for bi-orthogonal systems, the operator being not self-adjoint, in author hand the fixed point theory.

The second investigation is devoted to determination of source term coefficient dependent on the space for sub-diffusion problem with homogeneous boundary conditions and an initial weighted condition.
For direct problem, the key point in our analysis is the use of Duhamel principle in addition Fourier method, to show existence, uniqueness of weak solution, then the question of regularity is treated. to determine a unique coefficient, we add an integral condition to introduce input output mapping. The inverse problem is reduces to the problem of inversibility of the input output mapping, which should be monotone and it's inverse is bijectif.

2000 Mathematics subject classification : 34A55-26A33-42C05

Key words : Inverse problem, Well posed, Problem for fractional diffusion equation with time, Determination of source term, Fourier analysis, Fractional analysis.

To my parents, my family for their love, support, and encouragement.

Remerciements

J'ai eu la chance d'avoir bénéficié du soutien et de l'aide de nombreuses personnes durant la préparation de cette thèse. J'aimerais leur exprimer ma profonde reconnaissance à travers ces quelques lignes.

En tout premier lieu, je souhaite soulignier combien a été agréable et enrichissant l'encadrement de cette thése par docteur *ATMANIA Rahima*. Elle a su créer et entretenir un cadre de travail formidable. Sa patience, sa disponibilité et sa qualité d'écoute se sont avérées particulièrement précieux.
J'adresse l'expression de ma gratitude à madame *Alem Leila*, qui me fait l'honneur de présider ce jury et d'examiner ma thèse.
Ainsi qu'aux docteurs :
1. *Nisse Lamine* Professeur à l'université Hamma Lakhdar - El-Oued,
2. *Zitouni Salah* maitre de conférences à l'université Mohamed Chérif Messaadia - Souk Ahras, qui ont accepté d'examiner ma thèse et faire partie de ce jury.

Je remercie également tout les membres de laboratoire L.A.T.P à l'université de Marseille, pour leur accueil et leur aide durant mon séjour.

Merci à tout mes collègues de l'université 20 Aout 1955 Skikda pour leur soutien morale.

Enfin, je remercie ma meilleure amie et collègue Mlle Seddiki Hanifa pour son aide, son soutien moral, que dieu l'accueil dans son vaste paradis.

TABLE DES MATIÈRES

§INTRODUCTION

0.1 Problématique

La problématique abordée dans cette thèse s'inscrit dans le cadre des problèmes inverses paraboliques d'ordres fractionnaire en temps.

0.1.1 Problèmes inverses

Il s'agit généralement de situations où on est dans l'ignorance au moins partielle du système, par exemple certaines informations concernant la géométrie, les matériaux, les conditions initiales... ne sont pas connues. En compensation, il faut disposer (en plus des entrées) d'informations, éventuellement partielles, sur la sortie afin de reconstruire au mieux l'information manquante. Le terme inverse rappelle qu'on utilise l'information concernant le modèle physique (à l'envers) connaissant (partiellement) les sorties, on cherche à remonter à certaines caractéristiques, habituellement internes et échappant à la mesure directe.

Les problèmes inverses sont classés en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparait dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas possible en pratique. Par exemple, la difficulté d'accès dans la chambre de combustion d'un moteur automobile (B.Delattre et al., [14] 2001 ; A. Constantinescu et al. [43], 2004), dans une enceinte contenant un feu (M.Raynaud et J. Bransier, [56] 1986) ou sur les faces actives d'outils d'usinage (C.H. Huang et Y.L. Tsai, [24] 2005, C.H. Huang et H.C. Lo, [23] 2005). Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif fixé est de déterminer, à partir d'une connaissance partielle du champ de température, des paramètres de modèle inconnus. Il est possible par exemple de déterminer la conductivité d'un matériau à partir de mesures transitoires (C.Y. Yang, [68]1999). Les problèmes inverses d'identification de paramètres se rencontrent dans de nombreux autres domaines allant de la géomécanique (B. Lecampion et al. [42], 2002, B. Lecampion et A. Constantinescu, [43]2005) aux mathématiques financières.

Problèmes bien posés

Comme dans le cas des problèmes directes, un problème est bien posé au sens de J. Hadamard [20] si pour toute donnée admissible la solution existe, est unique et dépend continument des données c-à-d stable.

Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces dans lesquels les données et la solution évoluent. Ces trois conditions semblent très naturelles. En fait, généralement les problèmes inverses ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre de ces conditions, voir les trois ensembles.

- Si une solution existe, il est parfaitement concevable que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.
- Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution.
- La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires.
- Le manque de continuité est sans doute le plus problématique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible, surtout pour une résolution numérique, d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes, des données réelles.

Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus est dit mal posé.

0.1.2 Calcul fractionnaire

Les dérivées et les intégrales d'ordre non entier n'ont pas toujours des interprétations physiques et géométriques claires. Ce qui introduit leurs usages pour résoudre des problèmes appliquées dans plusieurs champs de la science. C'est l'approche viscoélastique adaptée la modélisation de phénomènes physiques d'amortissement, de tous les phénomènes dissipatifs élémentaires, compatible avec la thermodynamique des milieux continus qui a facilité l'introduction de nombreux modèles fractionnaires voir [4]. Cependant, il a fallut plus de 300 ans au calcul fractionnaire pour avoir une interprétation physique et géométrique acceptable. En effet, il a été montré qu'un nombre important de systèmes physiques, ont un comportement dit à mémoire qui peut être mieux décrit, en utilisant des modèles mathématiques d'ordre non entier.

Nous présentons ci dessous quelques exemples d'interprétations.

Équation de la chaleur

L'exemple classique est l'équation de la chaleur, où la dérivée d'ordre un demi s'introduit naturellement, quand on cherche à calculer un flux de chaleur à l'aide de la loi de Fourier.
On rappel que l'équation de la chaleur est donnée par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t),\ t > 0,\ x \geq 0, \tag{0.1}$$

où t est une variable positive symbolisant le temps, μ est une constante de diffusivité strictement positive, et f une fonction qui pour cet exemple ne dépend que du temps. La variable d'espace $x \in [0, +\infty[$ est typiquement une direction orthogonale à une direction principale y d'un écoulement fluide.
Nous considérons les conditions initiales et aux limites suivantes

$$u(0,t) = 0 \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \longrightarrow 0 \text{ si } x \longrightarrow +\infty.$$

Le flux de chaleur $\Phi(t)$ est donné par

$$\Phi(t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial x}(0,t),\ t > 0.$$

Nous supposons que u est une fonction intégrable. Ainsi, le problème peut être résolu l'aide de la transformation de Fourier en temps.
Soit

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x,\omega) \exp(i\omega t) d\omega,$$

où $\hat{u}(x,\omega)$ la transformée de Fourier de la fonction u.
En dérivant par rapport à t, nous obtenons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \hat{u}(x,\omega) \exp(i\omega t) d\omega,$$

ainsi

$$\frac{\hat{\partial u}}{\partial t} = i\omega \hat{u}.$$

Par conséquent l'équation (0.1) devienne

$$i\omega \hat{u} - \mu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \hat{f}(t),$$

dont la solution est

$$\hat{u}(x,\omega) = \frac{1}{i\omega}\hat{f} + \alpha \exp\left(\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}}x\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}}x\right).$$

En tenant compte des conditions aux limites 0.2 , nous obtenons

$$\hat{u}(x,\omega) = \frac{1}{i\omega}\hat{f}\left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\mu}}x\right)\right],$$

ainsi la transformée de Fourier du flux est donnée par

$$\hat{\Phi}(\omega) = -\sqrt{\frac{\mu}{i\omega}}\hat{f}.$$

Maintenant si nous posons

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}X(t),$$

avec $X(t)$ la fonction de Heaviside définie par

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ 1, & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Nous arrivons à

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}},$$

d'où

$$\hat{\Phi} = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\hat{\rho}\hat{f}.$$

Grâce à la relation classique

$$\widehat{\rho * f} \equiv \hat{\rho}\hat{f},$$

on a finalement

$$\hat{\Phi}(t) = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\rho * f = -\sqrt{\frac{\mu}{\pi}}\int_0^t f(\theta)\frac{d\theta}{\sqrt{t-\theta}}.$$

Ce n'est que l'intégrale d'ordre un demi de la fonction f. Ce qui permet de conclure que le flux de chaleur est donc un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$.

Modèle viscoélastique à dérivées fractionnaires

La modélisation de certains phénomènes physiques, peut être s'effectuer par l'introduction de termes intégro-différentiels à noyau faiblement singuliers (c'est -à-dire localement intégrables, mais pas nécessairement continu, comme $t^{\alpha-1}$ lorsque $0 < \alpha < 1$) dans les équations de la dynamique des matériaux; ceci est très fréquent en viscoélasticité linéaire à mémoire longue par exemple, où une relation contrainte déformation dynamique peut être modélisée par une dérivée fractionnaire.

En mécanique, l'exemple du comportement contrainte-déformation d'un solide, pour lequel l'équation de mouvement dans le cas d'un modèle entier est donnée par

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^{M} b_m \frac{d^m \sigma}{dt^m} = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^{N} E_n \frac{d^n \varepsilon}{dt^n}, \tag{0.3}$$

où σ et ε désignent respectivement la contrainte et la déformation, b_m, E_n, E_0, N et M sont des paramètres du modèle.

Ce modèle rhéologique, présente l'inconvénient d'introduire un nombre de constantes important, qu'il faut ensuite recaler sur les courbes de caractérisation mécanique.
Les dérivées fractionnaires ont ainsi été introduite pour pallier cet inconvénient.
En faisant intervenir des puissances non entières, l'équation (0.3) peut être généralisée.
Cela conduit à l'équation différentielle fractionnaire

$$(1 + bD_t^{\alpha}\sigma(t)) = (E_0 + E_1 D_t^{\alpha})\varepsilon(t).$$

0.1.3 Conditions non-locales

Durant les dernières années, parmi les problèmes aux limites non classiques pour les équations différentielles aux dérivées partielles, une place importante est occupée par les problèmes avec des conditions non locales, en particulier les conditions qui relient les valeurs des solutions, et leurs dérivées en deux ou plusieurs points intérieurs ou frontières du domaine considéré. Une définition générale de ces conditions et leur classification ont été données, en particulier, par A.M. Nakhushev dans [52].

Ce type de conditions non standard, reflète une certaine réalité dans la modélisation mathématique de quelques problèmes naturels dans plusieurs domaines comme la biologie [52], et la biotechnologie [60]. Ces conditions ont été associées à des problèmes paraboliques et hyperboliques ([2], [5], [10], [13], [22], et ont été étudiées par plusieurs auteurs.

0.1.4 Théorie du point fixe

La théorie du point fixe, est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence des solutions, pour les équations d'opérateurs non linéaires. Le problème considéré est transformé en un problème de point fixe d'un opérateur bien défini sur des espaces de Banach.
De nombreux résultats d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Brouwer, de contraction de Banach, de Leray- Schauder et autres, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe.

Le théorème établi par Banach en 1929 stipule qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui -même admet un point fixe unique, mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entrainer de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

0.2 Organisation du manuscrit

La présente thèse est composée d'une introduction et de trois chapitres, dont deux chapitre rappel essentiels pour la compréhension du chapitre de résultats concernant le sujet .

Après une introduction générale, on présente dans le premier chapitre des rappels de l'analyse de Fourier, et de l'analyse fractionnaire qui nous seront utiles par la suite.

Le chapitre 2, est consacré à la discussion des questions classiques concernant des équations ordinaires impliquant les dérivées fractionnaires (E.D.F) c-à-d les questions d'existence, d'unicité, et de la régularité de la solution. Nous nous intéressons aux problèmes de diffusion et de sous-diffusion à valeurs initiales et aux limites. Des résultats classiques sont présentées pour des problèmes unidimensionnels.

Quant au troisième chapitre, notre objectif principal est d'adapter les outils classiques de l'analyse à l'étude d'un problème inverse aux limites parabolique d'ordre fractionnaire en temps α pour $0 < \alpha < 1$ avec une condition initiale non locale.
Nous cherchons déterminer la solution $\{u(x,t), c(t)\}$ du problème

$$D^{\alpha}_{0+,t}(u(x,t) - u(x,0)) = u_{xx}(x,t) + a(t)u(x,t) + c(t)F(x,t);\ (x,t) \in (0,1) \times (0,T], \tag{0.4}$$

muni de la condition initiale

$$u(x,0) = \varphi(x);\ x \in [0,1], \tag{0.5}$$

et de la condition non-locale

$$u(0,t) = u(1,t),\ u_x(1,t) = 0;\ t \in [0,T]. \tag{0.6}$$

$D^{\alpha}_{0+,t}$ est la dérivée fractionnaire temporelle au sens de Riemann-Liouville pour $0 < \alpha < 1$, et $a(t); t > 0$ est le terme contrôle ; $F(x,t)$ le terme source connu ; $\varphi(x)$ est la température initiale.
Pour assurer l'unicité de la solution du problème inverse on rajoute la condition intégrale :

$$\int_0^1 u(x,t)dx = E(t);\ t \in [0,T], \tag{0.7}$$

où $E(t)$ est une fonction suffisamment régulière.

L'approche utilisée est basée sur le développement des solutions suivant un système bi-orthogonal des fonctions, obtenues à partir de la condition non locale. cette méthode a était utilisée par d'autres chercheurs dans le cas ordinaire ([28], [29], [35], [54],) et le cas t- fractionnaire citons les travaux ([39], [40]). Des résultats d'existence, d'unicité, et de la dépendance continue par rapport aux données sont établis.
N.B. *Les résultats de ce chapitre ont été publié dans le journal IJAMAS ; International Journal Of Applied Mathematics and Statistics [62].*

Le quatrième chapitre développe un modèle d'un problème inverse de diffusion pondéré fractionnaire en temps avec terme source pour $0 < \alpha < 1$, le problème est le suivant :
Déterminer la solution $\{u(x,t), f(x)\}$ de l'équation de sous diffusion

$$D^{\alpha}_{0+,t}u(x,t) - u_{xx}(x,t) = c(t)f(x);\ (x,t) \in (0,1) \times (0,T], \tag{0.8}$$

avec la condition initiale pondérée

$$\lim_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}u(x,t) = \varphi(x), \tag{0.9}$$

et les conditions aux bords

$$u(0,t) = u(1,t) = 0;\ t \in [0,T]. \tag{0.10}$$

$D^{\alpha}_{0+,t}$ est la dérivée fractionnaire en temps au sens de Riemann-Liouville pour $0 < \alpha < 1$, $f(x)$ est le terme source inconnu ; $\varphi(x)$ est la donnée initiale.
Pour déterminer le terme source $f(x)$ d'une façon unique, on doit rajouter la condition intégrale

$$\int_0^1 xu(x,t)dx = g(t);\ t \in [0,T], \tag{0.11}$$

avec $g(t)$ une fonction donnée.
Dans la première étape, on considère le problème (0.8)-(0.10) comme un problème direct, ensuite on détermine l'existence, l'unicité, et la régularité de sa solution faible, en utilisant le principe de Duhamel et la méthode de Fourier de la séparation de variables.
La deuxième étape est dévouée à l'utilisation de la condition supplémentaire $g(t)$ pour introduire l'application input-output $G(f)$ sur un certain espace $\mathcal{H}$ défini par

$$\mathcal{H} = \Big\{ f \in C^1[0,1] \cap \mathbb{H}^2(0,1) : C_1 < f(x) < C_2 \Big\} \subset \mathbb{L}^2[0,1].$$

Une fois l'application $G(f)$ est définie, le problème inverse est réduit au problème de son inversion. De plus, la donnée output $g(t)$ peut être déterminer analytiquement par la représentation en séries, ce qui implique la description explicite de l'application $G(f)$.

N.B Les résultats de ce chapitre ont été soumis pour publication dans le journal E.J.D.E ; Electronic Journal of Differential Equations depuis Avril 2018.

Le choix d'une étude intensive des problèmes inverses est dicté par la richesse du sujet aussi bien sur l'aspect théorique, que sur l'aspect pratique (motivation physique et technologique).

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Le but de ce chapitre est de rappeler, des connaissances classiques et utiles, de même introduire des éléments de la théorie du calcul fractionnaire sur lesquels s'appuient notre travail .

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Espaces $\mathbb{L}^2$

Soit (a, b) un intervalle dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{L}^2(a, b)$ est l'ensemble des fonctions de carré sommable sur (a, b).

$$\int_{[a,b]} |f(x)|^2 \, d\mu(x) < \infty.$$

Remarque 1.1. *$\mathbb{L}^2(a, b)$ est un espace vectoriel de dimension ∞.*
On peut munir $\mathbb{L}^2(a, b)$ de la norme suivante :

$$\|f\|_{\mathbb{L}^2(a,b)} = \left(\int_{(a,b)} |f(x)|^2 \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.1. *[9] L'espace $\mathbb{L}^2(a, b)$ muni de la norme ci-dessus est un espace de Banach. (Toute suite de Cauchy converge vers un élément de cet espace vectoriel).*

La norme ci-dessus dérive du produit scalaire

$$(f, g)_{\mathbb{L}^2(a,b)} = \int_{(a,b)} f(x)\bar{g}(x) d\mu(x).$$

Proposition 1.2. *[9] $\mathbb{L}^2(a,b)$ est un espace de Hilbert.*

Définition 1.1. *Soit $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{L}^2(a,b)$. On dit que cette suite de fonctions converge en moyenne quadratique vers un élément $f \in \mathbb{L}^2(a,b)$ si*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{L}^2(a,b)} = 0.$$

Proposition 1.3. *[9] Soit $(\phi_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{L}^2(a,b)$ tel que :*

(1) $(\phi_n, \phi_m)_{\mathbb{L}^2(a,b)} = 0,$ si $n \neq m$.

(2) La seule $g \in \mathbb{L}^2(a,b)$ telle que $(g, \phi_n)_{\mathbb{L}^2(a,b)} = 0, \forall n = 1, 2, ...$ est la fonction nulle.
Alors l'ensemble $\phi_1, \phi_2, ...$ forme une base orthogonale de $\mathbb{L}^2(a,b)$.

Espace AC

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ est dite absolument continue sur $[a,b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ et toute suite finie $[a,b]; 1 \leq i \leq n$ de sous intervalles de $[a,b]$ d'intérieurs disjoints,

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| \leq \varepsilon \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \delta.$$

On désigne par $AC[a,b] = AC^1[a,b]$ l'espace vectoriel de ces fonctions qui est un Banach pour la norme uniforme.

Théorème 1.1. *[37] Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est absolument continue sur $[a,b]$ si et seulement s'il existe une fonction sommable $\varphi \in \mathbb{L}^1(a,b)$ telle que $f'(x) = \varphi(x), p.p.\, x \in [a,b]$ c-à-d*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(s)ds,\ x \in [a,b].$$

Pour $n = 2, 3, ...,$ on définit l'espace $AC^n[a,b]$ comme suit :

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K} : f^{(n-1)} \in AC[a,b] \text{ et } f^{(k)} \in C[a,b], k = 1, ..., n-1 \right\}.$$

Lemme 1.1. *[37] Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ appartient à $AC^n[a,b]$ si et seulement si elle admet la représentation suivante :*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(x-t)^{n-1}} f^n(t)dt,\ x \in [a,b].$$

Espaces pondérés

L'espace pondéré $C_\gamma[a,b], 0 \leq \gamma < 1$ est l'espace des fonctions définies sur $(a,b]$ telles que $(t-a)^\gamma u(t) \in C[a,b]$ et qui est un Banach pour la norme

$$\|u(t)\|_{C_\gamma[a,b]} = \|(t-a)^\gamma u(t)\|_{C[a,b]}.$$

De plus, on défini l'espace $\alpha-$ pondéré

$$C_\gamma^\alpha = \left\{u \in C_\gamma[0,T] : D_{0+}^\alpha u \in C_\gamma[0,T];\, 0 \leq \gamma < \alpha < 1\right\},$$

muni de la norme $\|u\|_{C_\gamma^\alpha[0,T]} = \max\left(\|D_{0+}^\alpha u\|_{C_\gamma[0,T]}, \|u\|_{C_\gamma[0,T]}\right)$.
Ici on peut prendre $\gamma = 1-\alpha$.

Espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné.

Définition 1.2. *[9] L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in \mathbb{L}^2(\Omega), \exists g_1, ..., g_d \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ tel que : } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi, \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\right\}.$$

On pose $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$. $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions tests à support compact.
Nous avons les propriétés suivantes :

1. *H^1 muni de la norme suivante*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_2,$$

   est un espace de Banach.
2. *$H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire suivant*

$$< u, v >_{H^1(\Omega)} = < u, v >_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^d < \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} >,$$

   est un espace de Hilbert.
3. *Normes équivalente :* $\left(\|u\|_2^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^d \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

4. *Soit $m \geq 2$ entier.*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in H^{m-1}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega) \right\},$$
$$= \left\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega), \forall \alpha \ \textit{t.q}\ |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in \mathbb{L}^2(\Omega) \ \textit{t.q} \int_\Omega u \partial^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

On pose : $\partial^\alpha u = g_\alpha$.

Proposition 1.4. *[9] $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour la norme*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_2 ,$$

et des espaces de Hilbert pour le produit scalaire

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} < \partial^\alpha u, \partial^\alpha v >_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

Définition 1.3. *[9] $H_0^1(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

Proposition 1.5. *[9] $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme induite par $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*

Remarque 1.2.
1. *Si $\Omega = d, H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$.*
2. *En général $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.*
3. *$H_0^1(\Omega)$ est aussi la fermeture de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.*

Théorème 1.2. *Soit $\overline{\Omega}$ un ouvert de classe C^1. Soit $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Alors :*

$$u = 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega \Leftrightarrow u \in H_0^1(\Omega).$$

1.2 Analyse de Fourier

1.2.1 Problème de Sturm-Liouville

L'intérêt de ce problème est que dans le cas d'une E.D.P d'inconnue $u(x,t)$ avec $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0,$ la méthode de Fourier mène à la résolution d'un problème à valeurs propres du type $Av(x) = -\lambda v(x)$ et la solution sera déterminer sous forme de série de fonctions propres $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$. Nous exposons le cas unidimensionnel pour simplifier.

On appelle problème régulier de Sturm-Liouville le problème d'inconnue $v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sous des conditions aux limites homogènes :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{d}{dx}v(x)\right] + q(x)v(x) = -\lambda s(x)v(x), \\ \\ a_1 v(a) + a_2 v'(a) = 0, b_1 v(b) + b_2 v'(b) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

avec $|a_1| + |a_2| \neq 0$, $|b_1| + |b_2| \neq 0$, $p(x)$ est différentiable, $q(x)$, $s(x)$ sont continues et $p(x) > 0$, $s(x) > 0$, pour $x \in]a, b[$. En général, la fonction poids $s(x) = 1$.

Les couples (λ, v) solutions de ce problème sont encore appelés respectivement valeurs propres et fonctions propres du problème.

Un résultat très décisif pour la résolution de nombres d'E.D.P linéaires par séparation de variables est le suivant : Les valeurs propres d'un problème de Sturm Liouville forment une suite réelle positive, croissante divergeant vers l'infini alors que les fonctions propres forment une base orthogonale de $\mathbb{L}^2(a, b)$.

1.2.2 Les séries de Fourier

Les séries de Fourier trigonométrique sont une autre façon de représenter les fonctions périodiques. C'est un cas spécial des séries généralisées sur $\mathbb{R}$ où les fonctions propres obtenues sont des sinus et/ou cosinus. La construction d'une série solution d'une équation différentielle se ramène ainsi à la construction des coefficients de Fourier correspondants.

Définition 1.4. *[57] On appelle polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à N, un polynôme de la forme*

$$S_N^f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inwx};\ w = \frac{2\pi}{h},$$

où les nombres complexes $c_n(f) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h f(x)e^{-inwx}dx$, sont dits coefficients de Fourier associés à $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $h-$ périodique.

Remarque 1.3. *La famille $\phi_n(x) = e^{inwx}, n \in \mathbb{Z}$ est orthogonale.*

Remarque 1.4. *Nous pouvons aussi écrire*

$$S_N^f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(n\omega x);\ a_n, b_n \in \mathbb{R},$$

où on définit les coefficients de Fourier de f par les formules suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{2}{h}\int_0^h f(x)\cos(n\omega x)dx, \ \text{ et } \ b_n = \frac{2}{h}\int_0^h f(x)\sin(n\omega x)dx.$$

On peut aussi écrire la série de Fourier sous forme exponentielle

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int} = c_0 + \sum_{n\geq 1}\left(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int}\right),$$

où

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},$$

pour tout $n \geq 0$.

Définition 1.5. *[57] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction h périodique et continue par morceaux. On appel coefficients de Fourier de f les nombres complexes*

$$c_n(f) = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)e^{-int}dt; \quad n \in \mathbb{Z},$$

où les nombres réels

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^L f(t)\cos(nt)dt; \quad b_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^L f(t)\sin(nt)dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La série de Fourier de la fonction f est la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right).$$

Proposition 1.6. *Supposons que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ soit uniformément convergente. Soit $f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ sa somme . Alors on a*

$$c_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)e^{-int}dt.$$

Proposition 1.7. *Soient $c_n(f); n \in \mathbb{Z}$ coefficients de Fourier relatifs à f. Alors, si $f, g \in \mathbb{L}^1(0, L)$, on a : $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposition 1.8. *Si $f \in C^k[0, L]$ telle que $f^{(k)} \in \mathbb{L}^2[0, L]$ alors les coefficients de Fourier de $f^{(k)}; k \geq 1$ vérifient $c_n(f^{(k)}) = \left(\frac{2i\pi n}{L}\right)^k c_n(f)$.*
De plus, la série $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n^{2k}\left|c_n(f)\right|^2$ converge et $\lim\limits_{n\longrightarrow \acute{s}\infty}\left|n^k c_n f\right| = 0$.

Coefficient de Fourier d'une dérivée

Nous donnons ici les relations entre les coefficients de Fourier d'une fonction continue et de classe C^1 par morceaux et de sa fonction dérivée, ce résultat est fondamental dans toute les applications.

Théorème 1.3 (Formule de dérivation). *[57] Soit f une fonction $h-$ périodique, continue et de classe C^1 par morceaux, alors*

$$c_n(f') = inc_n(f),\, a_n(f') = nb_n(f),\, b_n(f') = -na_n(f).$$

En particulier si f est une fonction continue et de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier de f' ou d'une fonction continue par morceaux qui coïncide avec f' là où elle est définie, s'obtient en dérivant terme à terme la série de Fourier de f.

Lemme 1.2. *[57] Soit f une fonction $h-$ périodique définie sur $\mathbb{R}$.*

(i) Si f est continue et de classe C^1 par morceaux, alors la suite de ses coefficients de Fourier vérifie
$$c_n(f)_{n\longrightarrow\infty} = 0\left(\frac{1}{n}\right);$$

(ii) si f est de classe C^k et de classe C^{k+1} par morceaux, alors la suite de ses coefficients de Fourier vérifie
$$c_n(f)_{n\longrightarrow\infty} = 0\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

Convergence de la série de Fourier

Les questions qui se posent La série définie par $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$ d'une fonction f est-elle définie ?, convergente ?. Si oui, sa somme est -elle égale à la fonction f. La réponse est donnée par les résultats suivants.

Proposition 1.9. *[49] $f \in \mathbb{L}^2(a,b)$, soit $\phi_1, \phi_2, \ldots$ une base orthogonale de $\mathbb{L}^2(a,b)$. Les coefficients de Fourier de f sont :*
$$C_n = \frac{(f,\phi_n)}{(\phi_n,\phi_n)},$$
la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n(f)\phi_n$ converge en moyenne quadratique vers f :

$$\lim_{p\longrightarrow+\infty}\left\|\sum_{n=1}^{p} C_n(f)\phi_n - f\right\|_{\mathbb{L}^2(a,b)} = 0.$$

Théorème 1.4 (Inégalité de Bessel). *[57] Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est $h-$ périodique et intégrable (au sens de Riemann) sur $[-\pi, \pi]$ alors les coefficients de Fourier $c_n = \frac{1}{2L}\int_0^L f(\psi)e^{-in\psi}d\psi$ respectent l'inégalité*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2L}\int_0^h |f(\phi)|^2 \, d\phi.$$

Théorème 1.5 (Formule de Parseval). *[49] Si f est continue par morceaux on a*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right).$$

Théorème 1.6 (Théorème de Dirichlet). *[57] Si f est de classe C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f est simplement convergente et on a*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} \text{ converge vers } \begin{cases} f(t) \text{ si } f \text{ est continue en } t; \\ \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} \text{ si } f \text{ n'est pas continue en } t. \end{cases} \tag{1.2}$$

Si de plus f est continue alors la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$ est normalement, donc uniformément convergente vers $f(t)$.

Les notations $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x.
Un résultat important concernant la convergence uniforme d'une série de fonctions est le suivant :

Théorème 1.7 (Critère Weierstrass). *[1] La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est absolument et uniformément convergente sur un ensemble S s'il existe une suite numérique $M_n > 0, \forall n$ telle que*

$$|f_n(x)| \leq M_n. \forall x \in S,$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty.$$

Dans le cas de la série de Fourier, on a :

$$\left|c_n e^{inx}\right| \leq |c_n|.$$

L'application de ce critère à une série de Fourier révèle que la série uniformément si la série numérique $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$ est convergente , i-e, si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$.

1.3 Transformée de Laplace

Définition 1.6. *[57] La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ de la variable réelle $t \in \mathbb{R}_+$ est formellement définie par :*

$$\mathcal{L}f(s) =: \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt;\ s \in \mathbb{C}, \tag{1.3}$$

$f(t)$ est appelée l'originale de $\mathcal{L}f(s)$.

La transformée de Laplace d'une fonction n'existe que si l'intégrale (1.3) est convergente, pour cela l'originale doit être d'ordre exponentiel γ, ce qui veut dire qu'il existe deux constantes M et T telles que

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t};\ t > T,$$

dans ce cas la transformée de Laplace existe pour $\Re(s) > \gamma$.
L'originale $f(t)$ peut être reconstituée à l'aide de la transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\mathcal{L}f(s)ds,\ c > \gamma.$$

Proposition 1.10. *La transformée de Laplace est linéaire.*

Définition 1.7. *L'opérateur de convolution de Laplace de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ définies sur $\mathbb{R}_+$ est donné pour $x \in \mathbb{R}_+$ par*

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

Théorème 1.8. *(Théorème de convolution) [57] Pour deux fonctions $f(t)$, $s(t)$ dont les transformées de Laplace existent on a :*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s).\mathcal{L}g(s).$$

Proposition 1.11. *[57] La transformé de Laplace de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction $f(t)$ est donnée par :*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0^+),$$

sous l'hypothèse d'existence des intégrales correspondantes.

1.4 Calcul fractionnaire

Les mathématiques sont l'art de donner des choses trompantes des noms.
La belle est mystérieuse appellation (à première vue) *"le calcul fractionnaire"* est juste un de ces termes mal appropriés qui sont l'essence des mathématiques.
Par exemple, nous connaissons de telles noms comme *les nombres naturels* et *les nombres réels* que

nous utilisons très souvent ; réfléchissons un moment à ces noms. La notion *d'un nombre naturel* est une abstraction naturelle, mais est-ce que le *nombre* est lui même *naturel ?.*

La notion d'*un nombre réel* est une généralisation de la notion d'*un nombre naturel.* Le mot *réel* accentu qu'on prétend à ce qu'il reflète des quantités réelles. Les *nombres réels* reflètent des vraies quantités, mais ceci ne peut changer le fait qu'elles n'existent pas. Tout est en ordre dans l'analyse mathématique, et la notion d' *un nombre réel* la facilite, mais si on veut calculer quelque chose, on se rend compte immédiatement qu'il n'y a aucune place pour les *nombres réels* dans le vrai monde ; de nos jours, de calculs sont exécutés la plupart du temps sur les calculateurs numériques, qui peuvent fonctionner seulement avec les ensembles finis de fractions, qui servent à approcher d'irréels *nombre réel*.

Retournons à l'appellation *"calcul fractionnaire"*. Il ne signifie pas le calcul des fractions. Il ne signifie pas non plus une fraction de n'importe quel calcul différentiel, intégral ou calcul de variations. Le *calcul fractionnaire* est un nom pour la théorie d'intégrales et de dérivées d'ordre arbitraire, qui unifient et généralisent les notions de différentiation d'ordre entier et d'intégration répétés $n-$ fois.

Nous allons présenter des outils et des notions de base pour le calcul fractionnaire et qui aideront pour mieux à suivre notre travail, et pour en savoir plus sur le sujet voir [37] et [61].

1.4.1 Fonctions spéciales

On entend par "fonction spéciale" toute fonction qui n'est pas élémentaire (polynôme, fonction trigonométrique, exponentielle, etc) ayant une grande importance et plusieurs applications.
Dans cette partie on en rappelle quelques unes qu'on aura besoin dans notre travail.

Fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire, est la fonction Gamma qui est une généralisation de la factorielle. Nous présentons ici quelques résultats :

Définition 1.8. *[37] La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt;\ \Re(z) > 0, \tag{1.4}$$

où $t^{z-1} =: e^{(z-1)lnt}$.

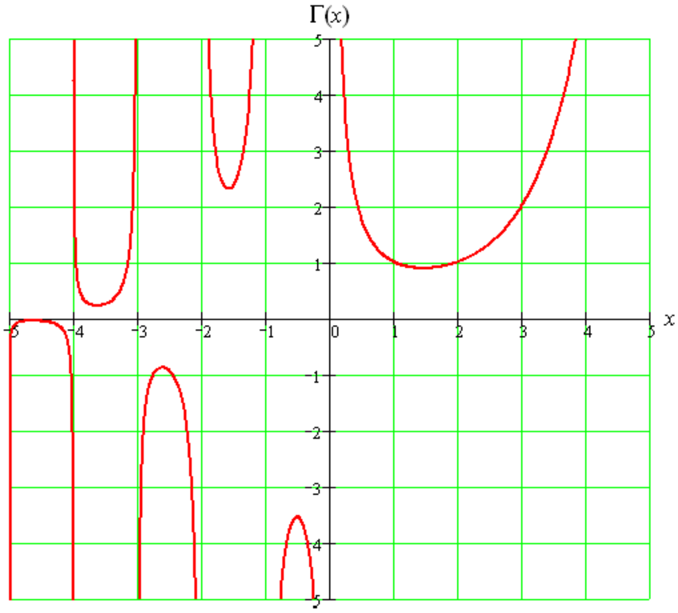

FIGURE 1.1 – Courbe représentative de la fonction Gamma

Lemme 1.3. *[37] L'intégrale* (1.4) *est convergente pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *avec* $\Re(z) > 0$.

Théorème 1.9. *[37] La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Pour* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

en particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

2. *On peut également représenter* $\Gamma(z)$ *par la limite*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)....(z+n)}, \quad \Re(z) > 0.$$

La condition $\Re(z) > 0$ *peut être étendue à* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

3. *La fonction* $\Gamma(z)$ *est analytique dans* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Fonction de Mittag-Leffler

Les fonctions de Mittag-Leffler représentent une généralisation de la fonction exponentielle, et jouent un rôle important dans la résolution des équations différentielles fractionnaire linéaires à coefficients constants.

Définition 1.9. *[37] Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie par :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}; \ (\alpha > 0), \tag{1.5}$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ par :

$$E_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}; \ (\alpha > 0, \beta > 0). \tag{1.6}$$

☞*Les figures* (1.2)-(1.3) *ci-dessous montrent, le comportement de la fonction de Mittag-Leffler à un et deux paramètres respectivement pour différentes valeurs de α et β.*

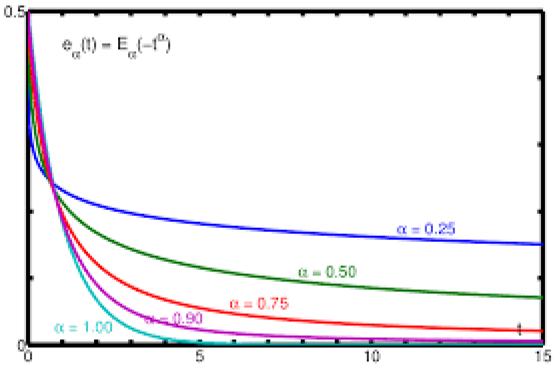

FIGURE 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre

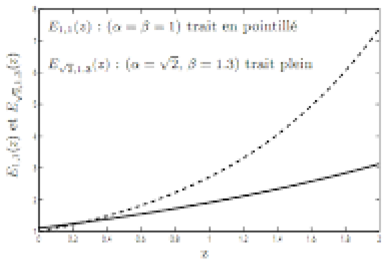

FIGURE 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

La fonction Mittag-Leffler se réduit à des fonctions simples. Par exemple

❶ $E_1(z) = E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^z.$

❷ $E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1).$

❸ $E_{1,3}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{1}{z^2}(e^z-z-1).$

❹ $E_{2,1}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cosh(z).$

❺ $E_{1/2,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}=e^{z^2}erfc(-z),$

où $erfc(z)$ est la fonction d'erreur complémentaire :

$$erfc(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty}e^{-t^2}dt=1-erfc(-z);\ z\in\mathbb{C}.$$

Dans le théorème suivant on a regroupé quelques propriétés des fonctions de Mittag-Leffler, qui seront utiles pour notre analyse des équations différentielles fractionnaires.

Théorème 1.10. *[37] La fonction Mittag-Leffler possède les propriétés suivantes :*

1. *C'est une fonction entière.*
2. *Pour $|z|<1$ la fonction de Mittag-Leffler généralisée vérifie :*

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha})dt=\frac{1}{1-z}.$$

3. *La transformée de Laplace est :*

$$\int_0^{\infty}e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm at^{\alpha})dt=\frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}\mp a)^{k+1}};\ \Re(s)>|a|^{1/\alpha},$$

où $E^{(k)}_{\alpha,\beta}(x)=\frac{d^k}{dx^k}E_{\alpha,\beta}(x)$. En particulier pour $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$,

$$\int_0^{\infty}e^{-st}t^{\frac{1}{2}(k-1)}E^{k}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\pm a\sqrt{t})dt=\frac{k!}{(\sqrt{s}\mp a)^{k+1}};\ \Re(s)>a^2.$$

4. *Dérivation de la fonction de Mittag-Leffler d'ordre $n\in\mathbb{N}$:*

$$\frac{d^n}{dt^n}(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}))=t^{\beta-n-1}E_{\alpha,\beta-n}(\lambda t^{\alpha}).$$

5. *Intégration de la fonction de Mittag-Leffler*

$$\int_0^{z}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})t^{\beta-1}dt=z^{\beta}E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^{\alpha}).$$

Cette relation est un cas particulier de l'égalité

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^{z}(z-t)^{\mu-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})t^{\beta-1}dt=z^{\beta+\mu-1}E_{\alpha,\beta+\mu}(\lambda z^{\alpha});\ (\beta>0,\mu>0).$$

Corollaire 1.1. *[37] Pour $0 < \alpha < 1, t \in [0,T]; \lambda > 0$, on a :*

(1) $0 < E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha}) < \infty$ *et* $\lim_{t \longrightarrow 0} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha}) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}$.

(2) $t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha})$, *est une fonction complètement monotone et :*

$$\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^{\alpha}) < \infty; \quad \int_0^t s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda s^{\alpha})ds < \infty.$$

1.4.2 Intégration et dérivation fractionnaires

Le calcul fractionnaire est la branche de l'analyse mathématique, qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à un ordre non entier, réel ou complexe, et qui rentre dans le cadre plus générale des opérateurs pseudo-différentiels. Par ailleurs, plusieurs approches ont été développées pour donner une signification à $D^{(n)}f(x)$ lorsque $n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans cette partie, nous avons choisi de présenter deux d'entre elles, à savoir l'approche de Riemann-Liouville, et celle de Caputo, et on se restreint au cas réel.

Intégrale fractionnaire

Définition 1.10. *[37] Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α est formellement définie par*

$$I_a^{\alpha}f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt; \quad x > a, \tag{1.7}$$

où Γ est la fonction Gamma(1.4) et $-\infty \leq a < x < \infty$.

Remarque 1.5. *[37] Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^*, I_a^{\alpha}$ coïncide avec l'intégrale répétée $n-$ fois de la forme*

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_n-1} f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt.$$

Lorsque $a = -\infty, I_a^{\alpha}$ est appelée intégrale fractionnaire au sens de Liouville, pour $a = 0$ elle est dite intégrale fractionnaire de Riemann.
En générale I_a^{α} est dite fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L).
Notons que la formule précédente reste valable lorsque $a < x < b < \infty$.

Théorème 1.11. *[37] Si $f \in \mathbb{L}^1(a,b)$, avec $a > -\infty$, alors $I_a^{\alpha}f(x)$ existe pour presque tout $x \in (a,b)$ et l'on a $I_a^{\alpha} \in \mathbb{L}^1(a,b)$.*

Nous allons maintenant voir quelques aspects de l'opérateur d'intégration fractionnaire de R-L.

Théorème 1.12. *[37] Soient $\alpha, \beta > 0$, pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^1(a,b)$, on a :*

$$I_a^\alpha I_a^\beta f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) = I_a^\beta I_a^\alpha f(x). \tag{1.8}$$

Un deuxième résultat concernant l'interversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire est donnée par :

Théorème 1.13. *[37] Soit $\alpha > 0$, et soit $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite uniformément convergente de fonctions continues sur $[a,b]$. Alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire de R-L et le signe limite comme suit :*

$$\left(I_a^\alpha \lim_{k\to\infty} f_k\right)(x) = \left(\lim_{k\to\infty} I_a^\alpha f_k\right)(x). \tag{1.9}$$

En particulier, la suite $(I_a^\alpha f_k)_{k=1}^{\infty}$ est uniformément convergente.

Dérivation fractionnaire

Définition 1.11. *[37] Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n$; la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L) d'ordre α d'une fonction f est formellement définie par*

$$D_a^\alpha f(x) := D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt;\ x > a, \tag{1.10}$$

où $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$.
En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a

$$D_a^0 f(x) = D I_a^1 f(x) = f(x),$$

$$D_a^m f(x) = D^{m+1} I_a^{m+1-m} f(x) = D^{m+1} I_a^1 f(x).$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de R-L coïncide avec la dérivée usuelle pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

☞ Contrairement à la dérivée usuelle d'une fonction $f(x)$ en un point qui ne dépend que de l'allure de $f(x)$ au voisinage restreint de ce point, la dérivée fractionnaire au sens de R-L d'ordre non-entier dépend de toutes les valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle (a,x). On dit qu'elle est à caractère non local. De plus, cette dérivée est une convolution à noyau singulier de la forme suivante :

$$D_{0+}^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} I_{0+}^{1-\alpha} f(t) = \frac{d}{dt} \left(\Phi_{1-\alpha} * f\right)(t),$$

d'où

$$D_{0+}^\alpha f(t) = \frac{d}{d} \int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(s)ds, \quad 0 < \alpha < 1,$$

qui aide sa manipulation par les outils de l'analyse de Fourier.
Le résultat suivant établi une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire $D_a^\alpha f$.

Proposition 1.12. *[37] Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha]+1$. Si $f \in AC^n [a, b]$, alors la dérivée fractionnaire $D_a^\alpha f$ existe presque partout sur $[a, b]$, en plus elle est donnée par :*

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)(a)}}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

Proposition 1.13. *[37] Si $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC [a, b]$, alors*

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right].$$

☞ Une fonction possédant une dérivée fractionnaire de R-L n'est pas nécessairement continue.

Remarque 1.6. *Si $f \in C_\gamma[a, b], 0 < \alpha < \gamma < 1$; alors $I_{a+}^\alpha f \in C_{\gamma-\alpha}[a, b]$ et si $f \in C_\gamma^n[a, b]$ alors $D_{a+}^\alpha f(t)$ existe pour $t \in]a, b]$.*

Les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaires autorisent l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a), f'(a), ...$

Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville en la borne inférieure $t = a$, qui prend la forme

$$D_a^{\alpha-k} f(a) = b_k; \quad (k = 1, 2, ..., n),$$

où b_k sont des constantes données.

Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, leur solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de telle type de conditions initiales.

Ici, on observe le conflit entre la théorie mathématique bien établie et les besoins pratiques.

Une certaine solution pour ce conflit a été proposé par M.Caputo. La définition de Caputo peut être écrite comme

Définition 1.12. *[37] Soient $\alpha \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ telles que $n = [\alpha] + 1$. On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α de $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$${}^C D_{a+}^\alpha f(t) = D_{a+}^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) p.p, \ t > a.$$

Remarque 1.7. *Pour $0 < \alpha < 1, u \in C[0, T]$, on a : ${}^C D_{0+}^a u(t) = D_{0+}^a (u(t) - u(0))$,*

où $D_{a^+}^\alpha$ est la dérivée au sens Riemann-Liouville.

Théorème 1.14. *[55] Soient $\alpha \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ telles que $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n[a, b]$, alors la* *dérivée de Caputo* ${}^C D_a^\alpha f(t)$ *est continue sur* $[a,b]$ *et admet la représentation intégrale suivante :*

$$ {}^C D_{a^+}^\alpha f(t) = I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds;\ t \in [a,b]. $$

Pour $0 < \alpha < 1$, *on a :* ${}^C D_{a^+}^\alpha f(t) = I_{a^+}^{1-\alpha} D f(t)$.

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations differentielles d'ordre entier, i.e. ; contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en la borne inférieure $t = a$.

Propriétés importantes

Nous nous intéressons dans cette partie aux propriétés d'intégration et de différentiation fractionnaire, lesquelles sont plus souvent utilisées dans les applications.

Lemme 1.4. *[55] Soit* $\alpha > 0$ *et* $f \in \mathbb{L}^1(0,T)$, *alors l'égalité*

$$ D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t), \tag{1.11} $$

est vraie pour presque tous $t \in (0,T)$.

Théorème 1.15. *[37] Soient* $\alpha, \beta > 0$ *tels que* $n-1 \leq \alpha < n, m-1 \leq \beta < m (n, m \in \mathbb{N}^*)$, *alors on a*

a) Si $\alpha > \beta > 0$, *alors pour* $f \in \mathbb{L}^1(a,b)$ *la relation*

$$ D_a^\beta (I_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha-\beta} f(t), $$

est vraie presque partout sur (a,b).

b) Si $\beta \geq \alpha > 0$ *et si la dérivée fractionnaire* $D_a^{\beta-\alpha} f$ *existe, alors on a*

$$ D_a^\beta (I_a^\alpha f)(t) = D_a^{\beta-\alpha} f(t). $$

c) S'il existe une fonction $\varphi \in \mathbb{L}^1(0,T)$ *telle que* $f = I_a^\alpha \varphi$, *alors*

$$ I_a^\alpha D_a^\alpha f(t) = f(t), $$

pour presque tout $t \in (0,T)$.

d) Si $f \in \mathbb{L}^1(0,T)$ *et* $I_a^{n-\alpha} f \in AC^n[0,T]$, *alors l'égalité*

$$ I_a^\alpha D_0^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{D^{n-k}[I_0^{n-\alpha} f](0)}{\Gamma(\alpha-k+1)} t^{\alpha-k}, $$

est vraie presque partout sur $[0,T]$. *En particulier pour* $0<\alpha<1$,

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(t)=f(t)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}I_a^{1-\alpha}f(0).$$

e) Pour $\alpha>0, n\in\mathbb{N}^*$, *telles que* $n=[\alpha]+1$, *et* $f\in C[0,T]$, *on a*

$${}^C D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha f(t)=f(t);\ t\in[0,T].$$

Si f *et* ${}^C D_{0+}^\alpha f\in C[0,T]$, *on a*

$$I_0^\alpha {}^C D_0^\alpha f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0^+)}{k!}t^k,\ t\in[0,T].$$

En particulier, pour $0<\alpha<1$, *on a* $I_0^\alpha {}^C D_0^\alpha f(t)=\left(f(t)-f(0^+)\right)$.
☛ *Si* $f\in C^n[0,T]$ *alors* ${}^C D_0^\alpha f\in C[0,T]$.

Théorème 1.16. *[37] Pour une suite de fonctions* $(f_i(t))_{i\in\mathbb{N}}$ *définies sur* $(a,b]$, *supposons que les conditions suivantes sont remplies pour* $\alpha>0$:

(i) Les dérivées $D_{a+}^\alpha f_i(t); i\geq 0;\ t\in(a,b]$ *existent.*

(ii) Les séries $\sum_{i=1}^\infty f_i(t)$ *et* $\sum_{i=1}^\infty D_a^\alpha f_i(t)$ *convergent uniformément sur* $[a+\varepsilon,b];\ \varepsilon>0$.

Alors la fonction définie par la série $\sum_{i=1}^\infty f_i(t)$ *est* α *différentiable est satisfait,*

$$D_a^\alpha\sum_{i=1}^\infty f_i(t)=\sum_{i=1}^\infty D_a^\alpha f_i(t);\ t\in(a,b].$$

☛Pour la dérivée au sens de Caputo, le théorème 1.16 est vrai sur $[a,b]$.

Proposition 1.14. *[37] pour* $\lambda\in\mathbb{R}, 0<\alpha<1$, *on a*

(i) $D_a^\alpha(t-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-a)^\alpha)=\lambda(t-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-a)^\alpha)$.

(ii) ${}^C D_0^\alpha E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha)=\lambda E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha)$.

Lemme 1.5. *[37] Soient* $0<\alpha<1, f\in\mathbb{L}^1(0,T)$ *et* $K(t)$ *admet une dérivée* $K'(t)$ *presque partout sur* $(0,T)$, *alors pour tout* $t\in(0,T)$,

$$D_{0+}^\alpha\int_0^t f(s)K(t-s)ds=\int_0^t f(t-s)D_{0+,s}^\alpha K(s)ds+f(t)\lim_{s\longrightarrow 0+}I_{0+,s}^{1-\alpha}K(s). \tag{1.12}$$

Afin de souligner la différence entre la forme des conditions initiales lesquelles doivent accompagner des équations differentielles en termes des dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo, rappelons les formules de transformées de Laplace correspondantes pour le cas $t=0$.

Proposition 1.15. *[37] Soient $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f(t) \in \mathbb{L}^1(0, b)$ pour tout $b > 0$.*

1. *Si f admet une transformée de Laplace, alors la transformée de Laplace pour l'intégrale fractionnaire au sens R-L de f est donnée par*

$$\mathcal{L}(I_0^\alpha f)(s) = s^{-\alpha}\mathcal{L}f(s).$$

2. *Si $f \in AC^n[0, b]$, pour tout $b > 0$, alors la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de R-L de f est*

$$\{\mathcal{L}(D_0^\alpha)\}(s) = s^\alpha (\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1} I_0^{n-\alpha} f(0^+).$$

Sous la condition que f ait une transformée de Laplace.

3. *Soient $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f \in C^n[0, b]$. La transformée de Laplace de ${}^C D_0^\alpha f$ est donnée par*

$$\mathcal{L}\left({}^C D_0^\alpha f\right)(s) = s^\alpha \mathcal{L}f(s) + \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+).$$

La méthode de la transformée de Laplace est fréquemment utilisée pour la résolution des problèmes appliqués. Pour choisir la formule appropriée de la transformée de Laplace, il est important de comprendre quel type de définition de dérivée fractionnaire (en d'autres termes, quel type de conditions initiales) doit être utilisé.

1.5 Les équations différentielles fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$

Une équation différentielle fractionnaire (E.D.F), est une relation fonctionnelle, qui fait intervenir une fonction inconnue u et un nombre fini de ses dérivées fractionnaires, et éventuellement des dérivées ordinaires. Nous nous intéressons au cas qui nous seront utiles pour $0 < \alpha < 1$.

1.5.1 E.D.F avec dérivées aux sens de Riemann-Liouville

Si la dérivée est au sens de R-L, nous associons à l'équation différentielles une condition initiales de la forme $D_a^{\alpha-1}u(a^+) = c$, valeur donnée qui doit être comprise dans le sens

$$D_{a^+}^{\alpha-1}u(a^+) = \lim_{t \longrightarrow a^+} D_{a^+}^{\alpha-1}u(t) = I_{a^+}^{1-\alpha}u(a).$$

Nous pouvons utiliser une autre forme de condition initiale qui est $\lim_{t \longrightarrow a^+}(t-a)^{1-\alpha}u(t) = u_0$ et le problème de Cauchy sera dit pondéré.

Théorème 1.17. *[37] Soient $0 < \alpha < 1, \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $F :]a,b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $F(.,u) \in \mathbb{L}^1(a,b)$, pour tout $u \in \Omega$ et est lipschitzienne pour la deuxième variable. Alors, la solution $u \in \mathbb{L}^1(a,b)$ existe et vérifie p.p, le problème non linéaire de Cauchy d'ordre fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+}u(t) = F(t,u(t));\ t > 0, \\ D^{\alpha-1}_{a+}u(a^+) = c;\ c \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.13}$$

si et seulement si, elle satisfait l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}F(t,u(t))ds. \tag{1.14}$$

Remarque 1.8. *Nous obtenons la solution en supposant que $u(t)$ est une solution de l'équation intégrale (1.13) que l'on écrit sous la forme*

$$u(t) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} + I^{\alpha}_{a+}F(t,u(t)). \tag{1.15}$$

On applique l'opérateur D^{α}_{a+} aux deux membres de l'équation (1.15), on déduit immédiatement que $u(t)$ est solution du problème (1.13).

Remarque 1.9. *Cette existence peut avoir lieu aussi dans $C_\gamma[a,b], 0 < 1-\alpha \leq \gamma < 1$ pour $F(t,u) \in C_\gamma[a,b]$ dans le sens où $u \in C_\gamma[a,b]$ et $D^{\alpha}_{a+}u \in C_\gamma[a,b]$.*

Théorème 1.18. *[37] Le problème de Cauchy fractionnaire pondéré :*

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+,t}u(t) = \lambda u(t);\ 0 < \alpha < 1,\ t \in [0,T];\ \lambda \in \mathbb{R}^*, \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}u(t) = c, \end{cases} \tag{1.16}$$

admet une solution unique $u \in C^{\alpha}_{1-\alpha}[0,T]$ donnée par $u(t) = c\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha}) \in C^{\alpha}_{1-\alpha}[0,T]$.

Remarque 1.10. *Pour $0 < \alpha < 1, t \in [0,T], u \in C_{1-\alpha}[0,T]$; alors $\lim\limits_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}u(t) = c$ est équivalent à $\lim\limits_{t \longrightarrow 0+} I^{1-\alpha}_{0+}u(t) = c\Gamma(\alpha)$.*

En procédant de la même façon on peut avoir le résultat suivant.

Théorème 1.19. *[37] Soient $0 < \alpha < 1$ et $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $f \in C_\gamma[a,b](\mathbb{L}^1(a,b)), 0 < 1-\alpha \leq \gamma < 1$. La fonction $u \in C_\gamma[a,b]$, solution du problème de Cauchy fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{a+}u(t) - \lambda u(t) = f(t);\quad \text{pour } a < t \leq b;\ \lambda \in \mathbb{R}, \\ D^{\alpha-1}_{a+}u(a^+) = c;\ c \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.17}$$

est unique telle que $D^{\alpha}_{a_+}u \in C_{\gamma}[a,b](\mathbb{L}^1(a,b))$ *et est donnée par :*

$$u(t) = c(t-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-a)^{\alpha}) + \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^{\alpha})f(s)ds;\ x \in [a,b]. \tag{1.18}$$

Remarque 1.11. *L'obtention de ce résultat passe par l'utilisation de la transformée de Laplace comme dans le cas ordinaire. Pour plus de détails voir [61].*

1.5.2 E.D.F avec dérivées aux sens de Caputo

Dans ce cas, nous avons des conditions initiales classiques $u(a^+) = c$, pour l'ordre $0 < \alpha < 1$. L'espace fonctionnel est $C[a,b]$ avec même hypothèse sur F. Alors, la fonction $u \in AC[a,b]$ est solution du problème non linéaire si et seulement si elle satisfait l'équation intégrale

$$u(t) = c + I^{\alpha}_{a+}F(t,u(t)),\ t \in [a,b]. \tag{1.19}$$

✎ Si la solution est dans $C[a,b]$, alors ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}u \in C[a,b]$.
Pour le cas linéaire où $F(t,u) = \lambda u(t) + f(t)$, pour $f \in C[a,b]$, la solution u est donnée dans $AC[a,b]$ par

$$u(t) = cE_{\alpha}(\lambda(t-a)^{\alpha}) + \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^{\alpha})f(s)ds,\ t \in [a,b]. \tag{1.20}$$

CHAPITRE 2

PROBLÈMES DE DIFFUSION ET DE SOUS-DIFFUSION LINÉAIRES

L'objectif de cette partie, est de traiter des équations de diffusion et de sous diffusion qui sont des équations d'ordre fractionnaire $0 < \alpha \leq 1$ en temps, munies de conditions initiales et aux bord en utilisant les résultats classiques et des propriétés du calcul fractionnaire.

2.1 Problèmes de diffusion linéaires

Décrivons le phénomène de la diffusion, par exemple de la chaleur à travers un corps, ou bien d'un colorant dans un liquide au repos. Dans les deux cas le principe physique est le même, et porte le nom de Loi de Fourier : le flux de chaleur est dirigé de la région chaude à la région froide, et son intensité est proportionnelle au gradient de température.

De plus la chaleur ne peut être perdue qu'à travers les éventuelles parois du récipient. On se limite encore une fois à la diffusion de la chaleur le long d'un axe. La loi de conservation de la quantité totale donne alors avec celle de Fourier, l'équation de la chaleur dans sa forme la plus simple,

$$\partial_t u(t,x) = k\partial^2_{xx} u(x,t), \tag{2.1}$$

où k est le coefficient de conductivité qui dépend du matériau utilisé.

2.1.1 Conditions aux limites naturelles et problèmes bien posés

Si les problèmes de diffusion sont définis sur un domaine spatial borné de frontière régulière, alors l'inconnu est soumis en plus de la condition initiale à différentes conditions aux bords.

1. Les conditions de Dirichlet : correspondant à imposer une température constante sur les bords du milieu Ω.

$$u(x,t) = g(x), \, \forall x \in \partial\Omega, \, \forall t \geq 0.$$

2. Les conditions de Neumann : correspondent à imposer un flux de chaleur sur les bords du milieu Ω. Si on veut isoler le milieu, il suffit d'imposer un flux nul.

$$\nabla u(x,t).n_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial n_x} = h(x,t), \, \forall x \in \partial\Omega, \, \forall t \geq 0.$$

3. Les conditions mixtes (Robin) faisant intervenir à la fois la valeur de la solution sur le bord et sa dérivée normale ainsi, ces conditions peuvent être utilisées , par exemple, pour modéliser grossièrement un processus de radiation linéaire.

$$au(x,t) + b\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = k(x), \; x \in \partial\Omega, \, t \geq 0.$$

Par contre, pour fermer le système une condition supplémentaire doit être ajoutée sur tout le domaine Ω qui est une condition initiale en temps, soit :

$$u(x, t = t_0) = u^0(x), \quad \forall \in \Omega, \, t_0 \in \mathbb{R}_+.$$

L'équation de la chaleur avec terme source dans $\mathbb{R}^3$ régit, entre autre, l'évolution de la température u en un point (x,y,z) d'un domaine Ω au cours du temps t en présence d'une source de chaleur volumique définie par f.

C'est cette même équation qui décrit l'évolution de la concentration d'un produit dans un solvant (d'où le nom d'équation de la diffusion).

L'étude mathématique de l'équation unidimensionnelle (c.à.d dans $\mathbb{R}$) va permettre de dégager, dans un cas simple, les propriétés des problèmes regroupés sous le vocable de **problèmes paraboliques**.

On se propose de résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}; \; t > 0; \; 0 < x < l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0; \; t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x); \; 0 \leq x \leq l, \end{cases} \tag{2.2}$$

qui modélise la propagation de la chaleur dans une tige de longueur finie l dont les extrémités sont maintenues à la température 0. Ici $u(x,t)$ désigne la température de la tige au point x à l'instant t. Les relations de compatibilité entre les conditions initiales $u(0,t) = u(l,t) = 0$ et la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ sont $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Par l'analyse de Fourier, le problème (2.2) aboutit au problème spectral suivant

$$\begin{cases} \Delta X(x) + \lambda X(x) = 0;\ 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

C'est un problème de Sturm-Liouville : Il s'agit de trouver les valeurs de λ dites *valeurs propres* pour lesquelles le problème (2.3) admet des solutions non triviales (c'est à dire non identiquement nulles), dites *fonctions propres*.
Les solutions du problème de Sturm-Liouville (2.3) sont

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\ \ X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l} \text{ avec } k = 1, 2, ... \tag{2.4}$$

Les coefficients de Fourier correspondants à ce problème sont solutions du problème

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0;\ t > 0, \tag{2.5}$$

données par

$$T_k(t) = A_k exp\left(-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t\right);\ \text{ avec } \ A_k \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution est la série de Fourier suivante :

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k exp\left(-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{2.6}$$

dont on doit alors étudier la convergence et la régularité.
Si de plus la solution vérifie la condition $u(x,0) = \varphi(x)$ on a

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{2.7}$$

Ce qui n'est autre que la série de Fourier de $\varphi(x)$ et les A_k sont ses coefficients de Fourier donnés par :

$$A_k(\varphi) = \varphi_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{2.8}$$

Remarque 2.1. *La série* (2.6) *converge uniformément vers la solution* $u(x,t)$ *dans* $\mathbb{L}^2[0,l]$. *De même dans* $C\left([0,l]\times[0,T]\right)$ *selon le critère de Weierstrass puisque on a*

$$\sup_{(x,t)\in[0,T]\times[0,l]} |u(x,t)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k|,$$

cette dernière série converge si $\varphi_k(x)$ *est continue,* $\varphi'_k(x)$ *est continue par morceaux et* $\varphi(0) =$

$\varphi(l) = 0$.

En conclusion on a le résultat suivant

Proposition 2.1. *[37] La solution du problème* (2.2) *existe dans* $C^{2,1}\left(]0,l[\times]0,T[\right) \cap C\left([0,l] \times [0,T]\right)$ *est donnée par* (2.6) *où les constantes* A_k *sont définies par les formules* (2.8)*, et* $\varphi \in C^4[0,l]$.

Unicité de la solution

Soit u une solution de l'équation de diffusion, et soit l'énergie du problème définie par $E(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L |u(x,t)|^2\, dx$, alors d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale,

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^L u(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx \\ &= \int_0^L u(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x,t)dx \\ &= \left[u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dx. \end{aligned}$$

Si la condition au bord est une condition de Dirichlet homogène (ou de Neumann homogène) la relation ci-dessus que $E'(t)$ est une quantité négative, par suite $E(t)$ est une quantité positive décroissante dans le temps.
Cette propriété qui représente la dissipation de l'énergie assure l'unicité de la solution.

Équation de diffusion avec un terme source

Dans le cas d'une équation de diffusion non homogène sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ avec $\Omega =]0,l[$:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t); \ (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0; \ t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x); \ x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.9}$$

$f(x,t)$ est une fonction donnée dite terme source. Il est encore possible d'utiliser la même technique. La première étape se fait aussi pour $f(x,t) = 0$. On obtient les mêmes valeurs et fonctions propres associées(2.4). Pour la deuxième étape, on décompose le terme source selon la base $X_k(x)_{n\geq 1}$ de $L^2[0,l]$ en la série de Fourier $f(x,t) = \displaystyle\sum_{k\geq 1} f_k(t)X_k(x)$ où les coefficients de Fourier de $f(x,t)$ sont données par

$$f_k(t) = \frac{< f(x,t), X_k(x) >}{< X_k(x), X_k(x) >} = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{2.10}$$

On obtient en remplaçant $\sum_{k\geq 1} X_k(x)T_k(t)$ dans l'e.d.p du problème (2.2)

$$\sum_{k\geq 1}\Big(T_k'(t)+a^2\lambda_k T_k(t\Big) = X_k(x) = \sum_{k\geq 1} f_k(t)X_k(x).$$

On déduit en y appliquant le produit scalaire les équations différentielles pour $k \geq 1$

$$\begin{cases} T_k'(t)+\lambda_k a^2 T_k(t) = f_k(t);\ t>0, \\ T_k(0)=\varphi_k, \end{cases} \tag{2.11}$$

où la condition initiale est obtenue à partir de (2.1.1). La résolution de (2.11) donne

$$T_k(t) = \varphi_k exp - \Big(a^2\lambda_k t\Big) + \int_0^t exp - \Big(a^2\lambda_k(t-s)\Big) f_k(s)ds.$$

En conclusion on a le résultat suivant

Théorème 2.1. *[37] La solution du problème de Dirichlet non homogène*(2.9) *existe dans* $C^{2,1}(\Omega\times]0,T[)\cap C\Big(\overline{\Omega}\times[0,T]\Big)$ *pour* $f,\varphi\in C^4\Big(\overline{\Omega}\times[0,T]\Big)$ *et prend la forme*

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1}\varphi_k exp(-a^2\lambda_k t)X_k(x) + \sum_{k\geq 1}\int_0^t exp(-a^2\lambda_k(t-s))f_k(s)dsX_k(x), \tag{2.12}$$

où φ_k *et* $f_k(t)$ *sont définies respectivement par* (2.1.1) *et* (2.10) *; pour* λ_k *et* $X_k(x); k\geq 1$ *définies par* (2.4).

Proposition 2.2. *[37] Pour* $\varphi_k\in\mathbb{L}^2(\Omega)$ *et* $f\in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{L}^2(\Omega))$ *le problème* (2.9) *admet une unique solution faible* $u\in C\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{L}^2(\Omega)\right)$*, donnée par* (2.12)*. De plus,*

$$\|u(.,t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_0^t \|f(.,s)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,ds.$$

2.2 Problèmes de Sous-diffusion linéaires

Ce n'est que lors des dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu le plus d'intérêt et ses applications se sont le plus diversifiées. L'une des applications les plus réussies et les plus concrètes est de caractériser les phénomènes de diffusion anormaux comme la diffusion des contaminants dans les eaux souterraines (voir figure 2.1) et pour plus de détails voir [51].

En effet, une diffusion normale où le déplacement a un comportement linéaire par rapport au temps est gérée par le modèle de l'équation de diffusion

$$\frac{\partial}{\partial t}u - k\Delta u = f.$$

Ils existent des problèmes qui sont mal-interprétés par cette équation comme l'encre dans une photocopieuse ; le mouvement des électrons dans les semi-conducteurs. C'est une diffusion anormale que le modèle d'équation fractionnaire en temps

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u - k\Delta u = f,$$

modélise mieux. Nous avons alors deux types de diffusion : si $1 < \alpha < 2$, le mouvement est rapide et la diffusion dite Sur-diffusion et si $0 < \alpha < 1$, le mouvement des particules est lent et la diffusion est dite Sous-diffusion à laquelle nous nous intéressons dans ce travail.

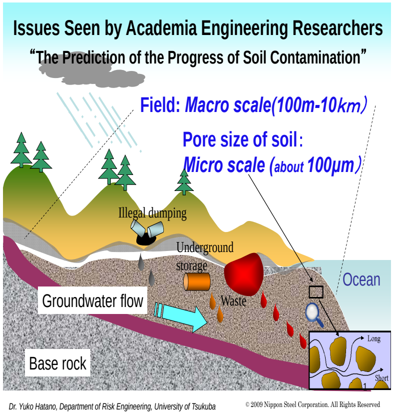

FIGURE 2.1

2.2.1 Équation de sous-diffusion sur un segment

Par manque de bibliographie nous allons nous satisfaire de résultats pris d'un article [46].

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha_{0+,t} u(x,t) = Lu + F(x,t);\ (x,t) \in G = \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = v(x,t);\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x);\ x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Le domaine Ω est ouvert et borné dans $\mathbb{R}^n$, avec $\partial\Omega$ la frontière du domaine Ω et $\overline{\Omega}$ sa fermeture. L'opérateur L est en fait un opérateur différentiel elliptique linéaire du second ordre,

$$L(u) = \sum_{k=1}^{n} p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = p(x)\Delta u;\ p \in C^1(\overline{\Omega}), p(x) > 0,\ x \in \overline{G}.$$

Définition 2.1. *On appelle solution classique du problème* (2.13) *une fonction* $u(x,t)$ *qui est définie sur le domaine* $\overline{G}_T : \overline{\Omega} \times [0,T]$ *et appartient à l'espace* $C^{2,1}_{x,t}(G) := C(\overline{G}) \cap [W(0,T) \cup C^2(\Omega)]$

satisfait l'EDP, les conditions initiales et aux bords du problème (2.13).
$W(0,T)$ *est l'espace des fonctions* $f \in C^1(0,T]$ *tel que* $f' \in L^1(0,T)$.

Remarque 2.2. *L'espace a un sens s'il est ainsi défini* $C^{2,1}_{x,t}(G) := C(\overline{G}) \cap [W(0,T) \times C^2(\Omega)]$

Si le problème (2.13) possède une solution classique, les fonctions F, u_0 et v, doivent appartenir aux espaces $C(G), C(\overline{\Omega})$ et $C\left(\partial\Omega \times [0,T]\right)$, respectivement.
Le principe du maximum est basée sur le résultat sur les extrémums pour la dérivée fractionnaire de Caputo suivant :

Théorème 2.2. *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et une fonction donnée* $f \in C[0,T]$ *avec* ${}^C D^{\alpha}_{0+} \in C[0,T]$. *Si* $f(t)$ *atteint son maximum sur* $[0,T]$ *en* $t_0 \in \left]0,T\right]$, *alors* ${}^C D^{\alpha}_{0+} f(t_0) \geq 0$.

Soit alors le principe du maximum pour le problème (2.13).

Théorème 2.3. *Soit la fonction* $u \in C^{2,1}_{x,t}(G)$ *une solution de l'équation de diffusion fractionnaire en temps* (2.13) *avec* $F(x,t) \leq 0, (x,t) \in G$. *Alors, soit* $u(x,t) \leq 0, (x,t) \in \overline{G}$ *ou la fonction* u *atteint son maximum positif sur les parties de* $S = \left(\overline{\Omega} \times 0\right) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$ *la frontière du domaine* Ω_T, *c'est-à-dire,*

$$u(x,t) \leq \max_{(x,t)\in S} u(x,t),\ \forall (x,t) \in \overline{G}. \tag{2.14}$$

Solution classique

Le principe du maximum ne peut pas servir d'obtenir l'existence de la solution mais si elle existe il est appliqué pour montrer l'unicité et la stabilité de la solution du problème (2.13).

Remarque 2.3. *L'unicité de la solution classique découle immédiatement du fait que le problème* (2.13) *pour* $F = 0, u_0 = 0$ *et* $v = 0$; *ne possède qu'une seule solution classique,* $u(x,t) = 0, (x,t) \in \overline{G}$.

Théorème 2.4. *Soit* u *une solution classique du problème* (2.13) *et* $F \in C(\overline{G})$ *telle que* $\|F\|_{C(\overline{G})} = M$. *Alors, on a l'estimation suivante :*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \max\left\{M_0, M_1\right\} + \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} M; \tag{2.15}$$

où $M_0 = \|u_0\|_{C(\overline{\Omega})}, M_1 = \|v\|_{C(\partial\Omega)\times[0,T]}$.

Présentons maintenant le résultat de stabilité important suivant.

Théorème 2.5. *Si le problème* (2.13) *possède au plus une solution classique. Cette solution dépend continument des données du problème dans le sens où si*

$$\left\|F - \overline{F}\right\|_{C(\overline{G})} \leq \epsilon;\ \|u_0 - \overline{u_0}\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \epsilon_0;\ \|v - \overline{v}\|_{C(\partial\Omega\times[0,T])} \leq \epsilon_1,$$

alors

$$\|u-\overline{u}\|_{C(\overline{G})} \le \max\{\epsilon_0, \epsilon_1\} + \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\epsilon, \tag{2.16}$$

pour les solutions classiques correspondantes u et $\overline{u}$.

La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables. Ensuite, à partir des mesures expérimentales obtenues sur le phénomène réel, la démarche consister à valider le modèle par résolution du problème inverse.

A titre d'exemples, nous allons présenter des résultats obtenus par Zhidong Zhang dans [70] dans un cadre plus précis, concernant le problème de sous -diffusion suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha_{0+,t} u(x,t) - a(t)u_{xx}(x,t) = 0; \ 0 < t \le T, \ 0 < x \le 1, \\ u(x,0) = 0; \qquad 0 < x \le 1, \\ u(1,t) = 0, u(0,t) = f(t); \qquad 0 < t \le T; f(0) = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

$a(t), f(t)$ des fonctions données. Par le changement suivant $v(x,t) = u(x,t) + (x-1)f(t)$ qui est solution du problème

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha_{0+,t} v(x,t) - a(t)u_{xx}(x,t) = (x-1) \quad {}^C D^\alpha_{0+,t} f(t); \ 0 < t \le T; \ 0 < x \le 1, \\ v(1,t) = v(0,t) = 0; \qquad 0 < t \le T, \\ v(x,0) = 0; \qquad 0 < x \le 1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Ils ont établi la représentation spectrale, l'existence, l'unicité et certains résultats de régularité pour $v(x,t)$ solution faible du problème (2.18). Sous les hypothèses suivantes

(H_1) $f(t)$ et ${}^C D^\alpha_{0+}$ sont continues et positives sur $[0,T]$ avec $f(0) = 0$.

(H_2) $a(t)$ est continue et strictement positive sur $[0,T]$.

$v(x,t)$ peut s'écrire comme une décomposition suivant la base $\sin n\pi x : n \ge 1$ ainsi

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin n\pi x, \tag{2.19}$$

telle que $v_n(t)$ sont solutions des E.D.F suivantes

$${}^C D^\alpha_{0+} v_n(t) = -a(t)n^2\pi^2 v_n(t) - \frac{2}{n\pi}\, {}^C D^\alpha_{0+} f(t), \ v_n(0) = 0, n \ge 1. \tag{2.20}$$

Le résultat d'existence et d'unicité est le suivant :

Lemme 2.1. *Sous les hypothèses $(H_1)-(H_2)$, le problème (2.18), admet une solution faible unique $v(x,t)$ représentée par (2.19) avec $v_n, {}^C D^\alpha_{0+} v_n \in C[0,T]$ pour chaque $n \ge 1$.*

Deux résultats concernant la non positivité et la croissance de $v_n(t)$ qui influent sur la régularité de $v(x,t)$ sont aussi présentés.

Lemme 2.2. *Supposons que les hypothèses $(H_1)-(H_2)$ soient vraies, alors il existe une constante positive C telle que*

$$\|v\|_{C([0,T],\mathbb{L}^2[0,1])} \leq C\,\|f\|_{C[0,T]}\,. \tag{2.21}$$

La régularité de v_{xx} et ${}^{C}D_t^{\alpha}v(x,t)$ est aussi assez importante.

Corollaire 2.1. *Supposons que les hypothèses $(H_1)-(H_2)$ soient vraies, alors ils existent deux constantes positives c_a, C_a; dépendant du coefficient $a(t)$ telle que :*

(i) $\|v_{xx}\|_{C([0,T],\mathbb{L}^2[0,1])} \leq c_a \left\|{}^{C}D_{0+}^{\alpha}f\right\|_{C[0,T]}$.

(ii) $\left\|{}^{C}D_{0+,t}^{\alpha}v\right\|_{C([0,T],\mathbb{L}^2[0,1])} \leq C_a \left\|{}^{C}D_{0+}^{\alpha}f\right\|_{C[0,T]}$.

Ces résultats garantissent que le problème (2.18) soit bien posé dans $\mathbb{L}^2(0,1)$.

Pour en savoir plus sur ce thème voir [49].

CHAPITRE 3

DÉTERMINATION D'UN TERME SOURCE INCONNU DÉPENDANT DU TEMPS ET D'UNE SOLUTION CLASSIQUE POUR UN PROBLÈME DE SOUS-DIFFUSION INVERSE

Il y a peu de travaux qui considère les problèmes inverses pour une équation différentielle fractionnaire en temps. Mentionnons que, J.Cheng et al., dans leur article [12] ont considéré le problème inverse pour déterminer l'ordre de la dérivée fractionnaire et le coefficient de diffusion, pour l'équation de diffusion en dimension un, avec la dérivée fractionnaire en temps au sens de Caputo. Les auteurs ont prouvé l'unicité de l'ordre fractionnaire et du coefficient de diffusion indépendant du temps ; en se basant sur le développement de la solution suivant les fonctions propres du problème et l'utilisation de la théorie de Gelfand -Levitan .

Nous rencontrons dans la littérature différents problèmes de ce genre, citons sur ce sujet le travail de M.Kirane et M.Salmane [39]où ils ont traité un problème inverse qui consiste à déterminer le terme source (indépendant du temps) d'une façon unique, pour l'équation de diffusion fractionnaire :

$$\begin{gathered}
D^{\alpha}_{0_+,t}\left(u(x,t)-u(x,0)\right)-u_{xx}(x,t)=f(x);\;\;(x,t)\in Q_T:=(0,1)\times[0,T],\\
u(x,0)=\varphi(x);\;\;u(x,T)=\psi(x);\;\;x\in[0,1],\\
u_x(1,t)=u_x(0,t);\;\;u(1,t)=0;\;\;t\in[0,T].
\end{gathered}$$

Alors que, T.S.Aleroev, M.Kirane et S.A.Malik dans [1] les auteurs ont considéré un problème inverse bien posé avec terme source pour l'équation de diffusion fractionnaire

$$\begin{gathered} D^{\alpha}_{0_+}(u(x,t)-u(x,0)) - \varrho u_{xx}(x,t) = F(x,t) = a(t)f(x,t);\ (x,t)\in(0,1)\times[0,T], \\ u(x,0)=\varphi(x);\ x\in(0,1), \\ u(0,t)=u(1,t);\ u_x(1,t)=0;\ t\in(0,T], \end{gathered}$$

où $D^{\alpha}_{0_+}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville pour $0<\alpha<1, \varphi(x)$ est la température initiale, leur problème inverse consistait à déterminer le couple $\{u(x,t),a(t)\}$. Ils ont démontré l'existence de la solution par la méthode de Fourier et un système bi-orthogonal pour former une base de Riesz dans $\mathbb{L}^2(0,1)$. Par contre l'unicité a été prouvé par le théorème du point fixe de Banach.

Le suivi de ces travaux a donné naissance au travail, qui comprend des résultats présentés dans l'article [62], et qui consistent en la recherche de la solution classique et du terme source inconnu dépendant du temps pour un problème de diffusion inverse fractionnaire en temps, avec un terme de contrôle.

3.1 État d'art du problème

3.1.1 Position du problème

Dans notre cas, nous considérons l'équation aux dérivées partielles fractionnaire en temps suivante :

$$D^{\alpha}_{0_+,t}(u(x,t)-u(x,0)) = u_{xx}(x,t) + a(t)u(x,t) + c(t)F(x,t);\ (x,t)\in(0,1)\times(0,T], \tag{3.1}$$

soumise à la condition initiale

$$u(x,0)=\varphi(x);\ x\in[0,1], \tag{3.2}$$

et les conditions aux bords non-locales

$$u(0,t)=u(1,t);\ u_x(1,t)=0,\ t\in[0,T]. \tag{3.3}$$

$D^{\alpha}_{0_+,t}$ est la dérivée fractionnaire temporelle au sens de Riemann-Liouville pour $0<\alpha<1; a(t); t>0$ est le terme contrôle ; $F(x,t)$ le terme source connu ; $\varphi(x)$ est la température initiale.

Notre problème inverse consiste à déterminer le coefficient inconnu du terme source $c(t)$ et la température $u(x,t)$, à partir de la condition initiale (3.2) et la condition aux bords(3.3). Pour assurer l'unicité de la solution pour tout problème inverse, nous avons besoin de conditions additionnelle ici, on rajoute une condition intégrale de la forme suivante :

$$\int_0^1 u(x,t)dx = E(t);\ t \in [0,T], \tag{3.4}$$

où $E(t)$ est une fonction suffisamment régulière.
La résolution du problème inverse est liée à des conditions aux limites non-locales.

Le problème spectrale associé au problème de sous-diffusion (3.1)-(3.3) admet un opérateur non auto-adjoint, nous sommes incapable d'écrire la solution du problème comme une expansion des fonctions propres ce qui impose l'utilisation d'un système bi-orthogonal. La difficulté pour résoudre le problème inverse se pose également en raison de la présence de la dérivée fractionnaire en temps et du terme de contrôle $a(t)$ dans l'équation.

Stratégie

La seule issue est de construire dans L^2 un système bi-orthogonal (Voir V.A.Il'in [25] et M.V.Keldysh [36])qui formera une base de Riesz, grâce auquel nous pouvons développer la solution sous forme de série. Nous montrons l'existence et l'unicité du problème inverse en utilisant les propriétés de la fonction Mittag-Leffler et le théorème de contraction de Banach. Pour cela on va introduire quelques résultats nécessaires dans la suite de l'étude.

3.1.2 Problème spectral associé et système bi-orthogonal

Soit le problème spectrale :

$$\begin{cases} AX = -X'' = \lambda X;\ x \in [0,1], \\ X(0) = X(1);\ X'(1) = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

associé au problème de sous diffusion (3.1)-(3.3). L'opérateur $AX = -X''$ est non auto-adjoint son domaine,

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ X \in \mathbb{L}^2(0,1) : X(0) = X(1); X'(1) = 0 \text{ et} - X'' \in \mathbb{L}^2(0,1) \right\},$$

les valeurs et fonctions propres associées sont respectivement $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k \geq 0$; $X_0 = 1$; et $X_k(x) = \cos(2\pi k x)$; $k = 1, 2, ...$
La famille $\{X_k\}$ est un système non complet, car les vecteurs propres X_k; $k > 0$ ne sont pas orthogonaux à X_0, donc ils ne forment pas une base pour $\mathbb{L}^2(0,1)$; suivant l'idée présentée par V.A.Il'in

dans [25]. On définit un problème auxiliaire associé à λ_k, X_k

$$\begin{cases} \widetilde{X}'' = -\lambda_k \widetilde{X} - X_k;\ x \in (0,1), \\ \widetilde{X}(0) = \widetilde{X}(1);\ \widetilde{X}'(1) = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

dont les fonctions propres sont :

$$\widetilde{X}_k = \frac{1-x}{4\pi k} \sin(2\pi k x).$$

On obtient alors le système $S = \left\{X_k, \widetilde{X}_k, k \geq 0\right\}$ qui est complet mais non orthogonal. Pour cela on a besoin de construire un autre système de fonctions complet qui forme un système bi-orthogonal avec le système S dans l'espace $\mathbb{L}^2(0,1)$. On utilise le problème adjoint au problème spectrale (3.5) défini par :

$$\begin{cases} A^*Y = -Y'' + \lambda_k Y = 0;\ 0 < x < 1, \\ Y(0) = 0;\ Y'(0) = Y'(1). \end{cases} \tag{3.7}$$

L'ensemble des fonctions propres de ces deux problèmes $\widetilde{S} = \left\{Y_0, Y_k, \widetilde{Y}_k\right\}$, avec $Y_0 = x, Y_k = x\cos(2\pi k x); \widetilde{Y}_k = \sin(2\pi k x)$ est un système complet dans l'espace $\mathbb{L}^2(0,1)$. Après la normalisation le système bi-orthogonal est alors défini par ces deux familles de fonctions propres,

$$\{\underbrace{2}_{\downarrow},\ \underbrace{\{4\cos(2\pi n x)\}_{n=1}^{\infty}}_{\downarrow}, \underbrace{\{4(1-x)\sin(2\pi n x)\}_{n=1}^{\infty}}_{\downarrow}\}, \tag{3.8}$$

$$\{\ x,\ \{x\cos(2\pi n x)\}_{n=1}^{\infty},\ \{\sin(2\pi n x)\}_{n=1}^{\infty}\ \}. \tag{3.9}$$

dont les éléments sont orthogonaux deux à deux. Pour plus de détails voir [26].

Lemme 3.1. *Les systèmes des fonctions* (3.8),(3.9) *sont bi-orthonormales dans* $(0,1)$.

Démonstration. Il est facile de montrer que les systèmes (3.8),(3.9) forment un système bi-orthogonal sur $[0,1]$, i-e :

$$\langle X_i, Y_j \rangle = \int_0^1 X_i(x) Y_j(x) dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 0;\ i \neq j, \\ 1;\ i = j. \end{cases}$$

□

Lemme 3.2. *Les systèmes des fonctions* (3.8)(3.9) *sont complets dans* $\mathbb{L}^2(0,1)$.

Démonstration. Soit $f(x) \in \mathbb{L}^2(0,1)$ orthogonale avec le système des fonctions (3.8). $f(x)$ peut être présentée par les séries

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n x), \tag{3.10}$$

qui converge dans $\mathbb{L}^2[0,1]$. Comme $f(x)$ est orthogonal avec (3.8),

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^1 f(x)4(1-x)\sin(2\pi kx)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^1 4(1-x)\sin(2\pi nx)\sin(2\pi kx)dx = B_k,\ k=1,2,....\end{aligned}$$

Ce qui donne $B_k = 0, k = 1, 2, ...$, alors $f(x) = 0$, à partir de (3.10). De la même façon on prouve que (3.9) est complet. □

Lemme 3.3. *Les systèmes des fonctions* (3.8)(3.9) *forment une base de Riesz dans* $\mathbb{L}^2[0,1]$.

Démonstration. Nous rappelons qu'une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans un espace Hilbertien H est connue comme suite de Riesz s'il existe de constantes $0 < c \leq C < \infty$ tel que :

$$c\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right) \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|^2 \leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right).$$

Pour toutes les suites des scalaires $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans l'espace l^2,

$$l^2 = \left\{(a_1, a_2, ..., a_n)\,/ a_n \in \mathbb{R} \text{ t.q } \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 < \infty\right\}.$$

Les bases de Riesz pour l'espace de Hilbert H est la suite de Riesz qui est linéairement indépendante dans l'espace H.
Selon les résultats présentés dans le livre [18], le système(3.8) forme une base de Riesz dans $\mathbb{L}^2[0,1]$, comme il est complet dans $\mathbb{L}^2[0,1]$, par le lemme (3.2) et les séries

$$4\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 + 16\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\int_0^1 f(x)\cos(2\pi kx)dx\right)^2 + \left(\int_0^1 f(x)(1-x)\sin(2\pi kxdx\right)^2\right],$$

$$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\int_0^1 xf(x)\cos(2\pi kx)dx\right)^2 + \left(\int_0^1 f(x)\sin(2\pi kx)dx\right)^2\right],$$

sont convergentes pour toute $f(x) \in \mathbb{L}^2[0,1]$. D'une façon similaire on démontre que le système(3.9) forme une base de Riesz dans $\mathbb{L}^2[0,1]$. □

3.2 Résultats d'existence, d'unicité et de dépendance continue

Au début on va définir les espaces :

$$C^{2,\alpha}((0,1)\times(0,T]) = \left\{u(x,t) \in C^2(0,1); t \in (0,T] \text{ et } D^{\alpha}_{0+,t}(u(x,t) - u(x,0)) \in C(0,T]; x \in (0,1)\right\};$$

$$C^{1,0}([0,1]\times[0,T])=\left\{u(x,t)\in C^1[0,1];t\in[0,T]\,\text{et}\,u(x,t)\in C[0,T];x\in[0,1]\right\}.$$

De plus les fonctions a,φ,F et E vérifient ; les assertions suivantes :

✓(A_1) $a(t)\in C[0,T]$.

✓(A_2) $F(x,.)\in C[0,T];$ et pour $t\in[0,T],F(.,t)\in C^4[0,1];F(0,t)=F(1,t);$

$$F_x(1,t)=0;F_{xx}(0,t)=F_{xx}(1,t),F_{xxx}(1,t)=0 \text{ et } f(t)=\int_0^1 F(x,t)dx\neq 0.$$

✓(A_3) $\varphi\in C^4(0,1);\varphi(1)=\varphi(0),\varphi'(1)=0,\varphi''(1)=\varphi''(0)$ et $\varphi^{(3)}(1)=0$.

✓(A_4) $E\in AC[0,T]$ et $\int_0^1\varphi(x)dx=E(0)$.

Selon les assertions ci-dessus, il existe des constantes positives $L_j,j=1,2;M_i,i=0,1...,5;K_\lambda$ tel que

$$L_1:=\max_{0\le t\le T}E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha);L_2:=\max_{0\le t\le T}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^\alpha);$$

$$M_0:=\|a\|_{C[0,T]};M_1:=\left\|f^{-1}\right\|_{C[0,T]};$$

$$M_2:=\max\left(\left\|D_{0+}^\alpha(E(t)-E(0)\right\|_{C[0,T]},\|E\|_{C[0,T]}\right);M_3:=\|c\|_{C[0,T]};$$

$$M_4:=\max\left(\|F_0\|_{C[0,T]};\|F_{i,k}\|_{C[0,T]}\right);i=1,2;k=1,...$$

$$M_5:=\max\left(|\varphi_0|;|\varphi_{i,k}|\right);i=1,2;k=1,....$$

$$\max_{0<s<t\le T}\lambda_k(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_k(t-s)^\alpha\right)\le K_\lambda. \tag{3.11}$$

Théorème 3.1. *Soit $(A_1)-(A_4)$ sont vérifiées, alors le problème inverse* (3.1)-(3.4) *admet une solution unique $\{u(x,t),c(t)\}$ dans $\left[C^{2,\alpha}((0,1)\times(0,T))\cap C^{1,0}([0,1]\times(0,T))\right]\times C[0,T]$.*

Remarque 3.1. *u est alors une solution classique.*

Démonstration. Au début on va montrer l'existence de la solution du problème direct.

➥Première étape **Déterminer $u(x,t)$ pour $c(t)\in C[0,T]$.**

En appliquant la méthode de Fourier présentée dans le chapitre précédent, la solution $u(x,t)$ du problème (3.1)-(3.3) peut être développer sous forme série uniformément convergente à l'aide des fonctions propres (3.8) dans $\mathbb{L}^2(0,1)$ comme suit

$$u(x,t) = 2u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{1,k}(t) 4\cos(2\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2,k}(t) 4(1-x)\sin(2\pi kx). \tag{3.12}$$

Nous définissons les coefficients $u_0(t), u_{1,k}(t), u_{2,k}(t)$ pour $k \geq 1$ à l'aide de l'orthogonalité des fonctions propres. En multipliant (3.1) par les fonctions propres de (3.9) et en intégrant sur $[0,1]$. Notons que le produit scalaire dans $\mathbb{L}^2(0,1)$ est $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.
Le développement des coefficients $F(x,t)$ et $\varphi(x)$ en fonctions propres (3.9) est donné par

$$F_0(t) = (F(x,t), Y_0(x)),\ F_{1,k}(t) = (F(x,t), Y_{1,k}(x)),\ F_{2,k}(t) = (F(x,t), Y_{2,k}(x)),$$

et

$$\varphi_0 = (\varphi(x), Y_0(x)),\ \varphi_{1,k} = (\varphi(x), Y_{1,k}(x)),\ \varphi_{2,k} = (\varphi(x), Y_{2,k}(x)).$$

En combinant l'équation (3.1) avec $(u(x,t), Y_0(x)) = u_0(t)$ nous obtenons :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0_+}(u_0(t) - u_0(0)) = a(t)u_0(t) + c(t)F_0(t); \\ \qquad u_0(0) = \varphi_0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Pour $u_{1,k}(t) = (u(x,t), Y_{1,k}(x)); k \geq 1$, et l'équation (3.1) nous avons

$$\begin{aligned} (D^{\alpha}_{0_+}(u(x,t) - u(x,0)), Y_{1,k}(x)) &= (u_{xx}(x,t) + a(t)u(x,t) + c(t)F(x,t), Y_{1,k}(x)) \\ &= -\lambda_k u_{1,k}(t) - 4\pi n u_{2,k}(t) + a(t)u_{1,k}(t) + c(t)F_{1,k}(t). \end{aligned}$$

Les équations fractionnaires linéaires vérifiées par $u_{1,k}(t); k \geq 1$ sont

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0_+}(u_{1,k}(t) - u_{1,k}(0)) = -\lambda_k u_{1,k}(t) - 4\pi k u_{2,k}(t) + a(t)u_{1,k}(t) + c(t)F_{1,k}(t); \\ \qquad u_{1,k}(0) = \varphi_{1,k}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Ainsi, les équations fractionnaires linéaires vérifiées par $u_{2,k}(t); k \geq 1$,

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0_+}(u_{2,k}(t) - u_{2,k}(0)) = -\lambda_k u_{2,k}(t) + a(t)u_{2,k}(t) + c(t)F_{2,k}(t); \\ \qquad u_{2,k}(0) = \varphi_{2,k}. \end{cases} \tag{3.15}$$

En appliquant $I^{\alpha}_{0_+}$ sur (3.13) nous obtenons l'équation intégrale de Volterra

$$u_0(t) = \varphi_0 + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} c(s)F_0(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s)u_0(s)ds. \tag{3.16}$$

Cette solution est bornée dans $C[0,T]$ selon les assertions $(A_1)-(A_3)$. On a

$$\|u_0\|_{C[0,T]} \leq |\varphi_0| + \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|F_0\|_{C[0,T]} \|c\|_{C[0,T]} + \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|a\|_{C[0,T]} \|u_0\|_{C[0,T]}.$$

Par conséquent,

$$\|u_0\|_{C[0,T]} \leq \left[M_5 + \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} M_4 M_3\right](1-\Psi_0)^{-1} =: \psi_0, \tag{3.17}$$

pour

$$\Psi_0 := \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} M_0 < \frac{1}{2}. \tag{3.18}$$

Selon le théorème (2.1), le problème (3.15) admet une solution dans $C[0,T]$ vérifie

$$u_{2,k}(t) = \varphi_{2,k} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-s)^\alpha)(a(s)u_{2,k}(s) + c(s)F_{2,k}(s))ds. \tag{3.19}$$

Sous les assertions $(A_1)-(A_3), u_{2,k}(t)$ est bornée dans $C[0,T]$,

$$\|u_{2,k}\|_{C[0,T]} \leq |\varphi_{2,k}| L_1 + L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \|F_{2,k}\|_{C[0,T]} \|c\|_{C[0,T]} + L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \|a\|_{C[0,T]} \|u_{2,k}\|_{C[0,T]}.$$

Alors, pour $k \geq 1$ on a

$$\|u_{2,k}\|_{C[0,T]} \leq \left[M_5 L_1 + L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} M_4 M_3\right](1-\Psi_1)^{-1} =: \psi_2, \tag{3.20}$$

pour

$$\Psi_1 := L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} M_0 < \frac{1}{2}. \tag{3.21}$$

Le problème (3.14) admet une solution qui est la solution de l'équation intégrale dans $C[0,T]$

$$\begin{aligned} u_{1,k}(t) &= \varphi_{1,k} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) - 4\pi k \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-s)^\alpha) u_{2,k}(s) ds \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-s)^\alpha) \left(a(s)u_{1,k}(s) + c(s)F_{1,k}(s)\right) ds. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Sous les assertions $(A_1)-(A_3), u_{1,k}(t)$ est bornée dans $C[0,T]$,

$$\begin{aligned} \|u_{1,k}(t)\|_{C[0,T]} &\leq |\varphi_{1,k}| L_1 + L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \|F_{1,k}\|_{C[0,T]} \|c\|_{C[0,T]} \\ &+ T \frac{K_\lambda}{k\pi} \|u_{2,k}\|_{C[0,T]} + L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \|a\|_{C[0,T]} \|u_{1,k}\|_{C[0,T]}. \end{aligned}$$

Pour $k \geq 1$ on a

$$\|u_{1,k}\|_{C[0,T]} \leq \left[M_5 L_1 + L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} M_4 M_3 + T \frac{K_\lambda}{k\pi} \psi_2\right](1-\Psi_1)^{-1}. \tag{3.23}$$

Utilisons le produit de l'espace de Banach $[C[0,T]]^3$ doté de sa norme pour prouver l'existence et l'unicité des solutions sous la forme $(u_0, u_{1,k}, u_{2,k}) \in [C[0,T]]^3$.
Définissons l'opérateur Γ sur $[C[0,T]]^3$ par $\Gamma(u_0, u_{1,k}, u_{2,k})(t) = (P_0 u_0(t), P_1 u_{1,k}(t), P_2 u_{2,k}(t))$, où les opérateurs P_0, P_1, P_2 sont définis sur $C[0,T]$ par le membre droit de (3.16),(3.22) et (3.19) respectivement.
En vue de (3.17),(3.23) et (3.20) $\Gamma : [C[0,T]]^3 \longrightarrow [C[0,T]]^3$.
Montrons que Γ est une contraction sur $[C[0,T]]^3$. Donc pour toute $(u_0, u_{1,k}, u_{2,k}); (v_0, v_{1,k}, v_{2,k}) \in [C[0,T]]^3$ on a :

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma(u_0, u_{1,k}, u_{2,k}) - \Gamma(v_0, v_{1,k}, v_{2,k})\|_{[C[0,T]]^3} \\
&\leq \max\left(\|P_0 u_0 - P_0 v_0\|_{C[0,T]} ; \|P_1 u_{1,k} - P_1 v_{1,k}\|_{C[0,T]} ; \|P_2 u_{2,k} - P_2 v_{2,k}\|_{C[0,T]}\right),
\end{aligned}$$

nous obtenons aisément

$$\|P_0 u_0 - P_0 v_0\|_{C[0,T]} \leq \frac{T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|a\|_{C[0,T]} \|u_0 - v_0\|_{C[0,T]} \leq \Psi_0 \|u_0 - v_0\|_{C[0,T]} . \tag{3.24}$$

De l'équation (3.11) nous avons pour $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
|P_1 u_{1,k}(t) - P_1 v_{1,k}(t)| &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-s)^\alpha) |a(s)| |u_{1,k}(s) - v_{1,k}(s)| \, ds \\
&\quad + 4\pi k \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-s)^\alpha) |u_{2,k} - v_{2,k}(s)| \\
&\leq L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \|a\|_{C[0,T]} \|u_{1,k} - v_{1,k}\|_{C[0,T]} + T \frac{K_\lambda}{k\pi} \|u_{2,k} - v_{2,k}\|_{C[0,T]} .
\end{aligned}$$

Par conséquent, $k \geq 1$

$$\|P_1 u_{1,k} - P_1 v_{1,k}\|_{C[0,T]} \leq \Psi_1 \|u_{1,k} - v_{1,k}\|_{C[0,T]} + T \frac{K_\lambda}{k\pi} \|u_{2,k} - v_{2,k}\|_{C[0,T]} . \tag{3.25}$$

D'une façon similaire $\forall t \in [0,T]$,

$$|P_2 u_{2,k}(t) - P_2 v_{2,k}(t)| \leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-s)^\alpha) |a(s)| |u_{2,k}(s) - v_{2,k}(s)| \, ds.$$

Ce qui donne pour $k \geq 1$

$$\|P_2 u_{2,k} - P_2 v_{2,k}\|_{C[0,T]} \leq \Psi_1 \|u_{2,k} - v_{2,k}\|_{C[0,T]} . \tag{3.26}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma(u_0,u_{1,k},u_{2,k})-\Gamma(v_0,v_{1,k},v_{2,k})\|_{[C[0,T]]^3}\\
&\le \max\left\{\left(\Psi_0\,\|u_0-v_0\|_{C[0,T]}\,;\Psi_1\,\|u_{1,n}-v_{1,n}\|_{C[0,T]}\,;\Psi_1\,\|u_{2,k}-v_{2,k}\|_{C[0,T]}\right)+T\frac{K_\lambda}{k\pi}\left(0;\|u_{2,k}-v_{2,k}\|_{C[0,T]}\,;0\right)\right\}\\
&\le \left[\max\left(\Psi_0,\Psi_1+T\frac{K_\lambda}{k\pi}\right)\right]\|(u_0,u_{1,k},u_{2,k})-(v_0,v_{1,k},v_{2,k})\|_{[C[0,T]]^3}\,.
\end{aligned}$$

Selon (3.18) et (3.21)

$$\max(\Psi_0,\Psi_1+\frac{T}{\alpha}\frac{K_\lambda}{k\pi})<1 \text{ si } T\frac{K_\lambda}{k\pi}<\frac{1}{2}. \tag{3.27}$$

Alors, Γ est une contraction sur $[C[0,T]]^3$ et admet un point fixe unique qui est le coefficient $(u_0,u_{1,n},u_{2,n})$ de la solution (3.12). Alors il existe une unique solution du problème (3.1),(3.3) pour $c(t)$ borné dans $C[0,T]$.

➥Deuxième étape **Détermination du coefficient $c(t)$ dans $C[0,T]$ en utilisant la donnée supplémentaire** (3.4)**.**

Appliquons D^{α}_{0+} à la condition (3.4), nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{0+}\left(E(t)-E(0)\right)&=\int_0^1 D^{\alpha}_{0+}\left(u(x,t)-u(x,0)\right)dx\\
&=\int_0^1\left(c(t)F(t)+u_x(0,t)+a(t)E(t)\right)dx.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$c(t)=[f(t)]^{-1}\left[D^{\alpha}_{0+}\left(E(t)-E(0)\right)-a(t)E(t)-u_x(0,t)\right].$$

Calculons maintenant $f(t)$ à partir de la forme série de $F(x,t)$

$$\begin{aligned}
f(t)&=F_0(t)\int_0^1 2dx+\sum_{k=1}^{\infty}F_{1,k}(t)\int_0^1 4\cos(2\pi kx)dx+\sum_{k=1}^{\infty}F_{2,k}(x)\int_0^1 4(1-x)\sin(2\pi kx)dx\\
&=2F_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}F_{2,k}(t).
\end{aligned}\tag{3.28}$$

Dérivons (3.12)par rapport à x nous obtenons $u_x(0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}8\pi k u_{2,k}(t)\,;$ où $u_{2,k}(t);k\ge 1$ est donnée par (3.19). L'équation obtenue est une équation intégrale par rapport à $c(t)$,

$$\begin{aligned} c(t) &= H_0(t) + H_1(t) \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k\pi}{f(t)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-s)^{\alpha}) a(s) u_{2,k}(s) ds \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k\pi}{f(t)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_{k(t-s)^{\alpha}} c(s) F_{2,k} ds; \end{aligned} \tag{3.29}$$

où

$$H_0(t) = \frac{1}{f(t)} \left(D_{0+}^{\alpha}(E(t) - E(0)) - a(t)E(t) \right),$$

$$H_1(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\pi k}{f(t)} \varphi_{2,k} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^{\alpha}).$$

Sous les assertions $(A_1) - (A_4)$ et (3.11),

$$\|H_0\|_{C[0,T]} \leq (1 + M_0) M_1 M_2;$$

$$\|H_1\|_{C[0,T]} \leq 2M_1 L_1 \sum_{k=1}^{\infty} 4k\pi \left| \varphi_{2,k} \right|.$$

La série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 4k\pi \left| \varphi_{2,k} \right|$ est convergente sous les assertions $(A_1) - (A_4)$.

En effet, on a $\varphi \in C^2(0,1), \varphi^{(2)} \in \mathbb{L}^2(0,1)$ et $|\varphi_{2,k}| = \dfrac{|\varphi_{2,k}|^{(2)}}{(2\pi k)^2}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne

$$K_1 := \sum_{k=1}^{\infty} 4\pi k \left| \varphi_{2,k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_{2,k}|^{(2)}}{k\pi}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[|\varphi_{2,k}|^{(2)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Rappelons que $\sum_{k=1}^{\infty}\left[|\varphi_{2,k}|^{(2)}\right]^2$ est borné par l'inégalité de Bessel.

$$\|c\|_{C[0,T]} \leq \|H_0\|_{C[0,T]} + \|H_1\|_{C[0,T]} + 2M_1K_\lambda M_0 T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|u_{2,k}\|_{c[0,T]}}{k\pi}$$

$$+ 2M_1K_\lambda T\,\|c\|_{C[0,T]}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|F_{2,k}\|_{C[0,T]}}{k\pi},$$

où

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|u_{2,k}\|_{C[0,T]}}{k\pi} \leq \frac{L_1}{(1-\Psi_1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_{2,k}|}{k\pi} + \frac{L_2T^\alpha\,\|c\|_{C[0,T]}}{\alpha(1-\Psi_1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|F_{2,k}\|_{C[0,T]}}{k\pi}.$$

La convergence des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_{2k}|}{k\pi} =: K_3 \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|F_{2,k}\|_{C[0,T]}}{k\pi} =: K_2,$$

est claire par l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
Pour

$$\Psi_c := 2M_1K_\lambda TK_2\left[1 + \frac{L_2M_0T^\alpha}{\alpha(1-\Psi_1)}\right] < 1, \tag{3.30}$$

on a

$$\|c\|_{C[0,T]} \leq \left[(1+M_0)M_1M_2 + 2M_1L_1K_1\right](1-\Psi_c)^{-1}$$

$$+ \frac{2M_1M_0TK_\lambda L_1K_3}{(1-\Psi_1)(1-\Psi_c)},$$

alors, $c(t)$ est borné dans $C[0,T]$. Maintenant, on définit l'opérateur P sur $C[0,T]$ par la partie droite de l'équation(3.29) .
Montrons que P est une contraction dans $C[0,T]$. Pour tout $\{c,b\} \in C[0,T]$ avec $\{u_{2,k}, v_{2,k}\}$ sont définies par l'équation (3.19) relativement à c, b respectivement, on a

$$\|u_{2,k} - v_{2,k}\|_{C[0,T]} \leq L_2\frac{T^\alpha}{\alpha(1-\Psi_1)}\|c-b\|_{C[0,T]}\|F_{2,k}\|_{C[0,T]},$$

et

$$\begin{aligned}
\|Pc - Pb\|_{C[0,T]} &\leq 2M_1 K_\lambda T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|F_{2,k}\|_{C[0,T]}}{k\pi} \|c - b\|_{C[a,b]} \\
&+ 2M_1 K_\lambda M_0 T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|u_{2,k} - v_{2,k}\|_{C[0,T]}}{k\pi} \\
&\leq 2M_1 K_\lambda T K_2 \left[1 + \frac{M_0 L_2 T^\alpha}{\alpha(1-\Psi_1)}\right] \|c - b\|_{C[0,T]} .
\end{aligned}$$

Selon (3.30) l'opérateur P admet un point fixe unique $c(t)$ dans $C[0,T]$, par le théorème du point fixe de Banach.

➥Troisième étape **Estimation du temps de l'existence locale.**

Selon (3.18),(3.21),(3.30) et (3.27) T^* doit vérifier cette approximation

$$T^* < \inf \left[\left(\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{2M_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} ; \left(\frac{\alpha}{2M_0 L_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} ; \frac{\pi}{2K_\lambda} ; \frac{1}{4M_1 K_\lambda K_2} ; \left(\frac{\alpha}{2M_0 L_2 K_2}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right] ;$$

pour assurer l'existence de la solution dans $[0,T]$ pour tout $T < T^*$.

➥Quatrième étape **Convergence de la série** (3.12) **et de ses dérivées.**

Comme il a été prouvé, en vue des assertions $(A_1)-(A_4)$, les coefficients $u_0(t), u_{1,k}(t)$ et $u_{2,k}(t)$; $k \geq 1$ sont bornés dans $C[0,T]$. Alors l'expression (3.12) donne

$$\sup_{x\in[0,1]} |u(x,t)| = |u(t)| \leq 2\,|u_0(t)| + 4\sum_{k=1}^{\infty} |u_{1,k}(t)| + 4\sum_{k=1}^{\infty} |u_{2,k}(t)| . \tag{3.31}$$

Alors, par (3.17),(3.23) et (3.20) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{C[0,T]} \leq 2\psi_0 + \frac{4L_1}{(1-\Psi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{1,k}| \\
&+ \frac{4L_2 T^\alpha M_3}{\alpha(1-\Psi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \|F_{1,k}\|_{C[0,T]} + \frac{K_\lambda T}{(1-\Psi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|u_{2,k}\|_{C[0,T]}}{k\pi} \\
&+ \frac{4L_1}{(1-\Psi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2,k}| + \frac{4L_2 T^\alpha M_3}{\alpha(1-\Psi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \|F_{2,k}\|_{C[0,T]} ,
\end{aligned}$$

$(A_2) - (A_3)$ implique que $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{i,k}|$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \|F_{i,k}\|_{C[0,T]}$; $i = 1,2$, converge et comme on a vu

précédemment $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|u_{2,k}\|_{C[0,T]}}{k\pi}$, aussi converge.
Par conséquent, la série $u(x,t)$ et sa dérivée partielle $u_x(x,t)$ sont uniformément convergentes dans $[0,1] \times [\varepsilon, T]$ pour tout $\varepsilon > 0$. De plus, u est continue en $t = 0$, pour cela, sa somme est dans $C[0,T]$ pour $x \in [0,1]$. De plus, sa dérivée partielle seconde $u_{xx}(x,t)$ est uniformément convergente dans $[0,1] \times [\varepsilon, T]$, pour tout $\varepsilon > 0$.
D'autre part, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Bessel $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\varphi_{i,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2,k}|^{(2)}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|F_{i,k}\|_{C[0,T]} = \sum_{k=1}^{\infty} \|F_{i,k}\|_{C[0,T]}^{(2)}$; $i = 1, 2$ converge uniformément. Ce qui implique, la convergence uniforme des $\sum_{k=1}^{\infty} u_{i,k}(t)$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_{i,k}(t)$; $i = 1, 2$, et des inégalités

$$\left\| D_{0+}^{\alpha}(u_0(t) - u_0(0) \right\|_{C[0,T]} \leq M_0 \|u_0\|_{C[0,T]} + M_4 M_3;$$

$$\begin{aligned}\left\| D_{0+}^{\alpha}(u_{1,k}(t) - u_{1,k}(0)) \right\|_{C[0,T]} \leq & (\lambda_k + M_0) \|u_{1,k}\|_{C[0,T]} \\ & + 4k\pi \|u_{2,k}\|_{C[0,T]} + M_3 \|F_{1,k}\|_{C[0,T]} ;\end{aligned}$$

$$\left\| D_{0+}^{\alpha}(u_{2,k}(t) - u_{2,k}(0) \right\|_{C[0,T]} \leq (\lambda_k + M_0) \|u_{2,k}\|_{C[0,T]} + M_3 \|F_{2,k}\|_{C[0,T]} ,$$

obtenus de (3.13),(3.14) et (3.15), on déduit que les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(u_{i,k}(t) - u_{i,k}(0)\right),$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_{0+}^{\alpha} \left(u_{i,k}(t) - u_{i,k}(0)\right), \, i = 1, 2,$$

sont uniformément convergentes dans $[\varepsilon, T], \forall \varepsilon > 0$.
Du théorème(1.16), la série $\alpha-$ dérivée partielle $D_{0+,t}^{\alpha} \left(u(x,t) - u(x,0)\right)$ de la série (3.12) est uniformément convergente pour $t \in [\varepsilon, T], \forall \varepsilon > 0$ et $x \in [0,1]$.
Pour cela $u(x,t) \in C^{2,\alpha}\left((0,1) \times (0,T])\right) \cap C^{1,0}\left([0,1] \times [0,T]\right)$, et vérifie les conditions (3.2),(3.3) pour $c(t) \in [0,T]$ arbitraire.

➥Cinquième étape **Unicité de la solution** $\{(u(x,t), c(t)\}$.
Supposons que $(u(x,t), c(t))$ et $(v(x,t), b(t))$ deux paires de solutions du problème (3.1)-(3.4). Utilisons nous le produit de l'espace de Banach $[C[0,T]]^4$ doté de sa norme, pour prouver l'unicité des solutions sous la forme $(u_0, u_{1,k}, u_{2,k}, c) \in [C[0,T]]^4$.

On a

$$\begin{aligned}&\|(u_0,u_{1,k},u_{2,k},c)-(v_0,v_{1,k},v_{2,k},b)\|_{[C[0,T]]^4}\\&\leq \max(\Psi_0,\Psi_1,\Psi_c)\,\|(u_0,u_{1,k},u_{2,k},c)-(v_0,v_{1,k},v_{2,k},b)\|_{[C[0,T]]^4}\,.\end{aligned}$$

En vue de (3.18),(3.21) et (3.30)

$$\|(u_0,u_{1,k},u_{2,k},c)-(v_0,v_{1,k},v_{2,k},b)\|_{[C[0,T]]^4}=0.$$

Ce qui implique que $u(x,t)=v(x,t)$ et $c(t)=b(t), t\in[0,T]$.

□

3.2.1 Dépendance continue par rapport aux données

En d'autre terme, c'est la stabilité aux données de ce problème qui sont les fonctions connues initialement et qui ont servies à déterminer la paire $(u(t),c(t))$ solution du problème.

Théorème 3.2. *Sous les assertions* $(A_1)-(A_4)$*, la solution* $(u(x,t),c(t))$ *du problème* (3.1)-(3.4) *dépend continument de la donnée* $\Phi(t)=\{a(t),F(x,t);\varphi(x);E(t)\}$.

Démonstration. Soient $((u(x,t),c(t));(\bar u(x,t),\bar c(t)))$ deux solutions du problème inverse (3.1)-(3.4),qui correspond à la donnée $\Phi(t)=\{a(t),F(x,t);\varphi(x);E(t)\}$, et $\bar\Phi(t)=\left\{\bar a(t),\bar F(x,t);\bar\varphi(x),\bar E(t)\right\}$ respectivement.
Notons $\|\Phi\|=\|a\|_{C[0,T]}+\|E\|_{AC[0,T]}+\|\varphi\|_{C^2(0,1)}+\|F\|_{C^{2,0}((0,1)\times[0,T])}\,.$
Tout d'abord, estimons le coefficient de $u(x,t)-\bar u(x,t)$ dans $C[0,T]$.
En utilisant la forme

$$\left|AG-\overline{AG}\right|=\left|AG-A\bar G+A\bar G-\overline{AG}\right|\leq|A|\left|G-A\bar G\right|+\left|\bar G\right|\left|A-\bar A\right|.$$

Donc, pour $\forall t\in(0,T]$ on a

$$\begin{aligned}|u_0(t)-\bar u_0(t)|\leq|\varphi_0-\bar\varphi_0|&+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|c(s)-\bar c(s)|\,|F_0(s)|\,ds\\&+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|\bar c(s)|\left|F_0(s)-\bar F_0(s)\right|ds\\&+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|a(s)-\bar a(s)|\,|u_0(s)|\,ds\\&+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|\bar a(s)|\,|u_0(s)-\bar u_0(s)|\,ds.\end{aligned}$$

De plus, pour les constantes $\theta_i, i = 1, .., 4$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\|u_0 - \bar{u}_0\|_{C[0,T]} \leq \frac{\theta_1}{(1-\Psi_0)} |\varphi_0 - \bar{\varphi}_0| + \frac{\theta_2}{(1-\Psi_0)} \|c - \bar{c}\|_{C[0,T]} \\ + \frac{\theta_3}{(1-\Psi_0)} \left\|F_0 - \bar{F}_0\right\|_{C[0,T]} + + \frac{\theta_4}{(1-\Psi_0)} \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} .\end{aligned} \tag{3.32}$$

Par des calculs similaires nous obtenons pour les constantes $\beta_i,\ i = 1, ..., 5$ et $\delta_i,\ i = 1, ..., 4$

$$\begin{aligned}&\|u_{1,k} - \bar{u}_{1,k}\|_{C[0,T]} \\ &\leq \frac{\beta_1}{(1-\Psi_1)} |\varphi_{1,k} - \bar{\varphi}_{1,k}| + \frac{\beta_2 \|F_{1,k}\|_{C[0,T]}}{(1-\Psi_1)} \|c - \bar{c}\|_{C[0,T]} \\ &+ \frac{\beta_3}{(1-\Psi_1)} \left\|F_{1,k} - \bar{F}_{1,k}\right\|_{C[0,T]} + \frac{\beta_4 \|u_{1,k}\|_{C[0,T]}}{(1-\Psi_1)} \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} \\ &+ \frac{\beta_5}{(1-\Psi_1)} \|u_{2,k} - \bar{u}_{2,k}\|_{C[0,T]} .\end{aligned} \tag{3.33}$$

Et

$$\begin{aligned}&\|u_{2,k} - \bar{u}_{2,k}\|_{C[0,T]} \\ &\leq \frac{\delta_1}{(1-\Psi_1)} |\varphi_{2,k} - \bar{\varphi}_{2,k}| + \frac{\delta_2 \|F_{2,k}\|_{C[0,T]}}{(1-\Psi_1)} \|c - \bar{c}\|_{C[0,T]} \\ &+ \frac{\delta_3}{(1-\Psi_1)} \left\|F_{2,k} - \bar{F}_{2,k}\right\|_{C[0,T]} + \frac{\delta_4 \|u_{2,k}\|_{C[0,T]}}{(1-\Psi_1)} \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} .\end{aligned} \tag{3.34}$$

On utilise (3.32),(3.33),(3.34) dans (3.27) et le fait que

$$\|\varphi\|_{C^2(0,1)} \geq \max \left[|\varphi_0| ; \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{1,k}| ; \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2,k}| \right] .$$

$$\|F\|_{C^{2,0}((0,1)\times[0,T])} \geq \left[\|F_0\|_{C[0,T]} ; \sum_{k=1}^{\infty} \|F_{1,k}\|_{C[0,T]} ; \sum_{k=1}^{\infty} \|F_{2,k}\|_{C[0,T]} \right] .$$

Pour obtenir des constantes $\eta_i,\ i = 1, ..., 4$, l'estimation du terme $u(x,t) - \bar{u}(x,t)$ dans $C([0,1] \times [0,T])$,

$$\|u - \bar{u}\|_{C([0,1]\times[0,T])} \leq \eta_1 \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^2(0,1)} + \eta_2 \|c - \bar{c}\|_{C[0,T]}$$

$$+ \eta_3 \left\|F - \bar{F}\right\|_{C^{2,0}((0,1)\times[0,T])} + \eta_4 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} .$$

De plus, nous avons

$$\left|D^{\alpha}_{0+,t}(u(x,t)-u(x,0))-D^{\alpha}_{0+,t}((\bar{u}(x,t)-\bar{u}(x,0))\right|$$

$$\leq \|u_{xx}-\bar{u}_{xx}\|_{C([0,1]\times[0,T])}+\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]}\|u\|_{C([0,1]\times[0,T])}$$

$$+\|\bar{a}\|_{C[0,T]}\|u-\bar{u}\|_{C([0,1]\times[0,T])}+\|c-\bar{c}\|_{C[0,T]}\|F\|_{C^2((0,1)\times[0,T])}$$

$$+\|\bar{c}\|_{C[0,T]}\left\|F-\bar{F}\right\|_{C^{2,0}((0,1)\times[0,T])}.$$

Pour cela, des estimations (3.18),(3.21) et le fait que

$$\max\left[\|u\|_{C([0,1]\times[0,T])};\|u_{xx}\|_{C([0,1]\times[0,T])};\left\|D^{\alpha}_{0+,t}(u(x,t)-u(x,0)\right\|_{C([0,1]\times[0,T])}\right]$$

$$\leq \|u\|_{C^{2,\alpha}([0,1]\times[0,T])}.$$

Nous obtenons pour des constantes positives B_1, B_2 tel que

$$\|u-\bar{u}\|_{C^{2,\alpha}((0,1)\times(0,T])}\leq B_1\left\|\Phi-\bar{\Phi}\right\|+B_2\|c-\bar{c}\|_{C[0,T]}. \tag{3.35}$$

Maintenant, on estime $|c(t)-\bar{c}(t)|$.
Notons $E(t)-E(0)=A(t)$, alors on a d'après (3.29)

$$\left|H_0-\bar{H}_0\right\|_{C[0,T]}\leq M_1\left\|D^{\alpha}_{0+,t}A(t)-D^{\alpha}_{0+,t}\bar{A}(t)\right\|_{C[0,T]}+M_1^2M_2\left\|\bar{f}-f\right\|_{C[0,T]}$$

$$+M_1M_2\|\bar{a}-a\|_{C[0,T]}+M_0M_1\left\|E-\bar{E}\right\|_{C_{1-\alpha}[0,T]}$$

$$+M_0M_1^2M_2\left\|\bar{f}-f\right\|_{C[0,T]}.$$

De plus, par l'équation (3.29)

$$\left\|H_1-\bar{H}_1\right\|_{C[0,T]}\leq 8M_1L_1\sum_{k=1}^{\infty}k\pi\left|\varphi_{2,k}-\bar{\varphi}_{2,k}\right|+8M_1^2L_1\sum_{k=1}^{\infty}k\pi\left|\bar{\varphi}_{2,k}\right|\left\|\bar{f}-f\right\|_{C[0,T]}.$$

L'estimation de la première partie de l'intégrale est

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k (t-s)^{\alpha}) \left[\frac{c(s)F_{2,k}(s)}{f(t)} - \frac{\bar{c}(s)\bar{F}_{2,k}(s)}{\bar{f}(t)}\right] ds\right|$$

$$\leq 2TK_\lambda M_1 M_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\|F_{2,k} - \bar{F}_{2,k}\right\|_{C[0,T]}}{k\pi} + 2TK_\lambda M_1 \left\|c - \bar{c}\right\|_{C[0,T]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\|\bar{F}_{2,k}\right\|_{C[0,T]}}{k\pi}$$

$$+ 2TK_\lambda M_1^2 M_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\|\bar{F_{2,k}}\right\|_{C[0,T]}}{k\pi} \left\|\bar{f} - f\right\|_{C[0,T]}.$$

Alors, pour des constantes positives Π_i, $i = 1, ..., 6$, on a

$$\left\|c - \bar{c}\right\|_{C[0,T]} \leq \frac{\Pi_1}{(1-\Psi_c)} \left\|E - \bar{E}\right\|_{AC[0,T]} + \frac{\Pi_2}{(1-\Psi_c)} \sum_{k=1}^{\infty} k\pi \left|\varphi_{2,k} - \bar{\varphi}_{2,k}\right|$$

$$+ \frac{\Pi_3}{(1-\Psi_c)} \left\|\bar{f} - f\right\|_{C[0,T]} + \frac{\Pi_4}{(1-\Psi_c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\|F_{2,k} - \bar{F}_{2,k}\right\|_{C[0,T]}}{k\pi}$$

$$+ \frac{\Pi_5}{(1-\Psi_c)} \left\|\bar{a} - a\right\|_{C[0,T]} + \frac{\Pi_6}{(1-\Psi_c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\|u_{2,k} - \bar{u}_{2,k}\right\|_{C[0,T]}}{k\pi}.$$

Selon (3.30) et

$$\left\|f\right\|_{C[0,T]} = \int_0^1 \left\|F(x,.)\right\|_{C[0,T]} dx \leq \left\|F\right\|_{C^{2,0}((0,1)\times[0,T])},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\pi \left|\varphi_{2,k}\right| \leq \left\|\varphi\right\|_{C^2(0,1)}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\|F_{2,k}\right\|_{C[0,T]}}{k\pi} \leq \left\|F\right\|_{C^{2,0}((0,1)\times[0,T])},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\|u_{2,k}\right\|_{C[0,T]}}{k\pi} \leq \left\|u\right\|_{C^{2,\alpha}((0,1)\times(0,T])}.$$

On peut obtenir, pour des constantes positives B_3, B_4 et (3.35)

$$\|c-\bar{c}\|_{C[0,T]} \leq B_3 \left\|\Phi-\bar{\Phi}\right\| + B_4 \|u-\bar{u}\|_{C^{2,\alpha}((0,1)\times(0,T]}$$

$$\leq (B_3 + B_4 B_1) \left\|\Phi-\bar{\Phi}\right\| + B_4 B_2 \|c-\bar{c}\|_{C[0,T]}.$$

Alors

$$\|c-\bar{c}\|_{C[0,T]} \leq \frac{(B_3+B_4B_1)}{1-B_4B_2} \left\|\Phi-\bar{\Phi}\right\|;$$

$$\|u-\bar{u}\|_{C^{2,\alpha}((0,1)\times(0,T]} \leq \left[B_1 + \frac{(B_3+B_4B_1)}{1-B_4B_2}\right] \left\|\Phi-\bar{\Phi}\right\|.$$

Ce qui implique la dépendance de $c(t)$ et $u(x,t)$ par rapport à la donnée Φ. $\square$

Remarque 3.2. *Le problème est alors bien posé.*

CHAPITRE 4

DÉTERMINATION D'UN TERME SOURCE DÉPENDANT DE L'ESPACE POUR UN PROBLÈME DE SOUS DIFFUSION INVERSE PONDÉRÉ ET SOLUTION FAIBLE

4.1 Introduction

Les problèmes inverses avec terme source pour les équations différentielles fractionnaires en temps, apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents champs de recherche. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces problèmes et leurs applications en sciences de l'ingénieur restent encore peu développés. On peut noter que pour la majeur partie des domaines (automatique, électricité,...), les opérateurs fractionnaires sont utilisés pour prendre en compte des effets mémoire. Mentionnons que, Ying Zhang et Xiang Xu dans leur article [69] ont considéré le problème inverse de diffusion suivant

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+,t}u(x,t) = \partial_{xx}u(x,t) + f(x);\ (x,t) \in Q_T := I \times (0,T), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \partial_x u(0,t) = 0; -\partial_x u(1,t) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $I = (0,1), T > 0$, et $D^{\alpha}_{0+,t}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville pour $0 < \alpha < 1$.

Le but était de déterminer le terme source indépendant du temps. Les auteurs ont prouvé l'unicité du terme source, en utilisant le principe de Duhamel et la méthode de Fourier.

Alors que, Ebru Ozbilge et al., dans leur travail [54] ont traité le problème bien posé suivant :

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(x,t) = (K(x)u_x)_x + r(t)F(x,t);\ 0 < \alpha \leq 1;\ (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,0) = g(x);\ 0 < x < 1, \\ u(0,t) = \psi_0(t); u(1,t) = \psi_1(t),\ 0 < t < T, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $\Omega_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$, $D_{0+,t}^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Sous certaines conditions le problème (4.2) admet une unique solution $u(x,t)$ définie sur $\overline{\Omega}_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}$ et appartient à l'espace $C(\overline{\Omega}_T) \cap W_t^1(0,T] \cap C_x^2(0,1)$.

Ce genre de problèmes inverses jouent un rôle crucial dans la physique et les mathématiques appliquées puisqu'ils sont utilisés avec succès pour expliquer des phénomènes compliqués dans beaucoup de domaines connue comme la mécanique des fluide, physique, chimie, viscoelasticité,... .

Les auteurs ont considéré le problème inverse de déterminer la fonction inconnue $r(t)$ à partir de la donnée output de Dirichlet sur les bornes $x = 0$ et $x = 1$ comme suit :

$$\Phi[r] = K(x)u_x(x,t;r)|_{x=0}; r \in \mathcal{K} \subseteq C^1(\Omega_T).$$

$$\Psi[r] = K(x)u_x(x,t;r)|_{x=1}; r \in \mathcal{K} \subseteq C^1(\Omega_T).$$

Alors, le problème inverse avec les données output $f(t)$ et $h(t)$ peut être exprimer comme des équations opérationnelles suivantes :

$$\Phi(r) = f \quad f \in C^1(0,T].$$

$$\Psi[r] = h \quad h \in C^1(0,T].$$

Ces expressions réduisent le problème inverse de déterminer la fonction inconnue $r(t)$ à un problème d'inversibilité des applications input-output $\Phi[.], \Psi[.]$. Pour plus de détails voir [54].

En s'inspirant de ces travaux, nous avons développé ce travail [3] soumis à L'EJDE.

4.2 Position du problème

Considérons le problème inverse à déterminer la paire $\{u(x,t), f(x)\}$, dans $\Omega = \{(x,t);\ 0 < x < 1;\ 0 < t \leq T\}$ qui vérifie l'équation différentielle fractionnaire en temps

$$D_{0+,t}^\alpha u(x,t) - u_{xx}(x,t) = c(t)f(x);\ (x,t) \in \Omega, \tag{4.3}$$

avec la donnée initiale pondéré

$$\lim_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha} u(x,t) = \varphi(x);\ x \in [0,1], \tag{4.4}$$

et les conditions aux bords

$$u(0,t) = u(1,t) = 0;\ t \in [0,T], \tag{4.5}$$

où $\varphi(x), c(t)$ sont des fonctions données, et $D^{\alpha}_{0+,t}$ est la dérivée fractionnaire en temps au sens de Riemann-Liouville pour $0 < \alpha < 1$.

La condition initiale et les conditions aux bords sont insuffisantes pour déterminer le terme source $f(x)$; pour cela on doit rajouter une condition qui est la donnée de la quantité en espace totale de la fonction d'état La condition initiale et les conditions aux bords sont insuffisantes pour déterminer le terme source $f(x)$; pour cela on doit rajouter une condition qui est la donnée de la quantité en espace totale de la fonction d'état

$$\int_0^1 xu(x,t)dx = g(t);\ t \in [0,T], \tag{4.6}$$

avec $g(t)$ une fonction régulière.

4.3 Analyse du problème

4.3.1 Problème direct

Dans cette partie, on va établir la représentation spectrale, l'existence, l'unicité, et la régularité des solutions faibles du problème (4.3)-(4.5). Pour cela on va présenter quelques hypothèses sur les fonctions c, φ, f et g.

✓(A_1) $c \in C_{1-\alpha}([0,T];\mathbb{R}^+)$ tel que $c(t) \neq 0$ et $\displaystyle\int_0^t c(s)ds \neq 0, \forall t \in (0,T]$.

✓(A_2) $f \in C^1[0,1] \cap \mathbb{H}^2(0,1)$ tel que $f(0) = 0 = f(1)$ et $f'(0) = f'(1)$.

✓(A_3) $\varphi \in C^1[0,1] \cap \mathbb{H}^2(0,1)$ tel que $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$ et $\varphi'(0) = \varphi'(1)$.

Le problème spectrale associé au problème (4.3)-(4.5)

$$\begin{cases} -Au = -u_{xx} = \lambda u, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Par conséquent, $X_n = \sin(n\pi x), n \geq 1, \lambda_n = (n\pi)^2, n \geq 1$ sont respectivement les fonctions propres et les valeurs propres du problème spectrale (4.7).

Définition 4.1. *La série de Fourier sous la forme*

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} u_n(t) X_n(x); \tag{4.8}$$

est dite la solution formelle du problème (4.3)-(4.5).

Définition 4.2. *On appelle $u(x,t)$ solution faible du problème(4.3)-(4.5) dans $\mathbb{L}^2(0,1)$ si $u(.,t) \in \mathbb{H}_0^1(0,1)$ pour tout $t \in [0,T]$ et vérifie dans $\mathbb{L}^2(0,1)$ le problème*

$$\begin{cases} < D^{\alpha}_{0+,t}u(x,t); \phi(x) > + < u_{xx}(x,t); \phi_{xx}(x) > = < c(t)f(x); \phi(x) >; \;\; t \in (0,T] \\ < \lim\limits_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}u(x,t); \phi(x) > = < \varphi(x); \phi(x) > \end{cases} \tag{4.9}$$

pour toute $\phi \in \mathbb{H}_0^1(0,1)$ avec $< .,. >$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{L}^2(0,1)$.

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses $(A_1) - (A_3)$, il existe une solution faible unique du problème de diffusion fractionnaire en temps (4.3)-(4.5) donnée par la représentation spectrale (4.8) où*

$$\begin{aligned} u_n(t) = & < \varphi; X_n > \Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^{\alpha}) \\ & + < f; X_n > \int_0^t c(s)(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-(n\pi)^2(t-s)^{\alpha}\right) ds, \end{aligned} \tag{4.10}$$

sont dans l'espace $C^{\alpha}_{1-\alpha}$ pour $n \geq 1$.

Démonstration. Pour simplifier le problème à condition initiale (4.3)-(4.5), on utilise la décomposition $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$ où $w(x,t)$ est solution du problème homogène suivant

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+,t}w(x,t) - w_{xx} = 0; \; (x,t) \in (0,1) \times (0,T], \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}w(x,t) = \varphi(x); \; x \in [0,1], \\ w(0,t) = w(1,t) = 0, \; t \in (0,T], \end{cases} \tag{4.11}$$

et $v(x,t)$ est solution du problème non homogène

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+,t}v(x,t) - v_{xx} = c(t)f(x); \; (x,t) \in (0,1) \times (0,T], \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}v(x,t) = 0; \; x \in [0,1], \\ v(0,t) = v(1,t) = 0; \; t \in (0,T]. \end{cases} \tag{4.12}$$

Utilisons le principe Duhamel (Voir annexe) pour obtenir la solution du problème (4.12) où les conditions aux bords et initiales sont homogènes alors que l'équation de sous-diffusion est non homogène. Si $v(x,t)$ est solution du problème (4.12), alors $v(x,t) = \displaystyle\int_0^t V(x,t;s)ds$ où s un paramètre tel que :

$0 < s \leq t \leq T$ et $V(x,t;s)$ est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{s+,t}V(x,t;s) - V_{xx}(x,t;s) = 0;\ x \in (0,1);\ s < t \leq T, \\ \lim\limits_{t\longrightarrow s+}(t-s)^{1-\alpha}V(x,t;s) = \dfrac{f(x)c(s)}{\Gamma(\alpha)};\ x \in [0,1], \\ V(0,t;s) = V(1,t;s) = 0;\ 0 < s < t \in (0,T]. \end{cases} \tag{4.13}$$

Soit $V(x,t,t-\gamma)$ solution du problème (4.13), alors on vérifie que $\int_0^t V(x,t;s)ds$ vérifie le problème (4.12). En vue du lemme (1.5) et le changement $s = t-\gamma$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} & D^{\alpha}_{0+,t}\int_0^t V(x,t;s)ds - D_{xx}\int_0^t V(x,t;s)ds \\ & = \int_0^t \left[D^{\alpha}_{0+,t}V(x,t,t-\gamma) - V_{xx}(x,t,t-\gamma)\right]d\gamma + \lim_{\gamma\longrightarrow 0+} I^{1-\alpha}_{0+,\gamma}V(x,t,t-\gamma) \\ & = c(t)f(x). \end{aligned}$$

La solution formelle du problème fractionnaire en temps (4.11) est donnée par

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)X_n(x),$$

où les coefficients $w_n(t), n \geq 1$ seront déterminés en utilisant l'orthogonalité des $X_n(x) = \sin(n\pi x)$, $n \geq 1$ qui forment une base dans $\mathbb{L}^2[0,1]$.
Multiplions l'équation (4.12) par $X_n(x)$ et intégrant par rapport à $x \in (0,1)$ et mettons

$$w_n(t) = 2\int_0^1 w(x,t)X_n(x)dx;\ n \geq 1,$$

qui nous donne le problème fractionnaire de Cauchy pondéré suivant

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}w_n(t) = -\lambda_n w_n(t);\ t \in [0,T];\ n \geq 1, \\ \lim\limits_{t\longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}w_n(t) = \varphi_n, \end{cases} \tag{4.14}$$

où $\varphi_n = 2\int_0^1 \varphi(x)X_n(x)dx; n \geq 1$ sont les coefficients de Fourier de $\varphi(x)$. La solution du problème (4.14) est donc donnée en utilisant le théorème (1.18) par :

$$w_n(t) = \varphi_n\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^{\alpha});\ t \in (0,T],\ n \geq 1. \tag{4.15}$$

D'où la solution du problème (4.11) peut s'écrire sous la forme :

$$w(x,t) = \sum_{n\geq 1} \varphi_n \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(n\pi)^2 t^\alpha)\sin(n\pi x). \tag{4.16}$$

En utilisant le même principe, $\forall n \geq 1, V_n(t,s) = 2\int_0^1 V(x,t;s)X_n(x)dx$ vérifie le problème fractionnaire pondéré

$$\begin{cases} D^\alpha_{s+,t} V_n(t,t-s) = -\lambda_n V_n(t,t-s);\ s < t \leq T, \\ \lim\limits_{t\longrightarrow s+} (t-s)^{1-\alpha} V_n(t,t-s) = \dfrac{f_n}{\Gamma(\alpha)} c(s); \end{cases} \tag{4.17}$$

où $f_n = 2\int_0^1 f(x)X_n(x)dx; n \geq 1$, alors la solution du problème (4.13) est donnée par :

$$\begin{aligned} V(x,t;s) &= \sum_{n\geq 1} V_n(t,s)X_n(x) \qquad (4.18)\\ &= \sum_{n\geq 1} f_n c(s)(t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(n\pi)^2(t-s)^\alpha)\sin(n\pi x). \end{aligned}$$

Ainsi, pour déterminer la solution du problème (4.12), on utilise la définition $v(x,t) = \int_0^t V(x,t;s)ds$, de plus de (4.18)

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n\geq 1} f_n \sin(n\pi x) \int_0^t c(s)(t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(n\pi)^2(t-s)^\alpha)ds. \qquad (4.19)\\ &= \sum_{n\geq 1} v_n(t)X_n(x). \end{aligned}$$

Finalement, pour résumer entre les expressions (4.16) et(4.19), la représentation spectrale de la solution du problème (4.3)-(4.4) est (4.8) où les coefficients sont donnés par(4.10).
Du théorème (1.16) et des hypothèses (A_1)-(A_3), $\forall n \geq 1$ fixé, les solutions des problèmes (4.17) et (4.14) sont uniques ; par conséquent $\forall n \geq 1; u_n(t) = v_n(t) + w_n(t)$ est unique. Ce qui nous mène à l'unicité de la solution faible $u(x,t)$ sous la représentation spectrale (4.8)-(4.10). D'où le résultat. □

Maintenant, on s'intéresse à la régularité de la solution pour $f(x)$ terme source fixé dans $\mathbb{L}^2(0,1)$.

Théorème 4.2. *Supposons que les assertions $(A_1)-(A_3)$ sont vérifiées, alors*

$$\|u\|_{C_{1-\alpha}([0,T];\mathbb{L}^2(0,1))} \leq Q_1 \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + Q_2 \|c\|_{C_{1-\alpha}[0,T]} \|f\|_{\mathbb{L}^2(0,1)}, \tag{4.20}$$

pour certaines constantes positives Q_1 et Q_2.

Démonstration. Rappelons que $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ et

$$\sup_{0\leq s<t\leq T} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^{\alpha}) \leq M.$$

Calculons dans $\mathbb{L}^2(0,1)$ la norme de $w(x,t)$ par rapport à x, alors pour $t \in (0,T]$ fixé on a :

$$\|w(.,t)\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} |w_n(t)|^2 .$$

Cela donne pour $t \in (0,T]$

$$\begin{aligned}
\|w(.,t)\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)} &\leq \frac{\Gamma^2(\alpha)}{2}\sum_{n\geq 1}\varphi_n^2\left[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^{\alpha})\right]^2 \\
&\leq \frac{\Gamma^2(\alpha)M^2}{2}(t^{\alpha-1})^2\sum_{n\geq 1}\varphi_n^2 \\
&\leq t^{2(\alpha-1)}\Gamma^2(\alpha)M^2\|\varphi\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)} ; \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

alors, avec une approximation similaire et en vue de l'hypothèse (A_2), nous obtenons à partir de (4.16) pour chaque $t \in (0,T]$

$$\begin{aligned}
\|v(.,t)\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)} &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}|v_n(t)|^2 \\
&\leq \frac{M^2}{2}\|c\|^2_{C_{1-\alpha}[0,T]}\sum_{n\geq 1}|f_n|^2\left[\int_0^t s^{\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}ds\right]^2 \\
&\leq \left(t^{2\alpha-1}\frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\right)^2\|c\|^2_{C_{1-\alpha}[0,T]}M^2\|f\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)} . \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque $t \in [0,T]$ nous obtenons

$$\|u(.,t)\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} \leq \|w(.,t)\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + \|v(.,t)\|_{\mathbb{L}^2(0,1)}$$

$$\leq t^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)M\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + t^{2\alpha-1}\frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\|c\|_{C_{1-\alpha}[0,T]}M\|f\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} .$$

Cela nous mène à l'approximation en norme de l'espace $C_{1-\alpha}$ suivante :

$$\|u\|_{C_{1-\alpha}([0,T];\mathbb{L}^2(0,1))} \leq Q_1\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + Q_2\|c\|_{C_{1-\alpha}[0,T]}\|f\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} . \qquad (4.23)$$

On peut alors prendre $Q_1 = \Gamma(\alpha)M$ et $Q_2 = T^{\alpha}M$ pour vérifier le résultat (4.20). $\square$

Deux autres résultats avec plus de régularité par rapport à l'espace et au temps respectivement.

Théorème 4.3. *Sous les hypothèses* $(A_1)-(A_3)$, *on a*

$$\|u\|_{C_{1-\alpha}([0,T];H_0^1[0,1])} \leq Q_3 \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + Q_4 \|c\|_{C_{1-\alpha}[0,T]} \|f\|_{\mathbb{L}^2(0,1)}, \tag{4.24}$$

et

$$\|u\|_{C^{\alpha}_{1-\alpha}([0,T];\mathbb{L}^2()0,1))} \leq \max(Q_1, Q_3) \|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + \max(Q_2, Q_4) \|c\|_{C_{1-\alpha}[0,T]} \|f\|_{\mathbb{L}^2(0,1)}. \tag{4.25}$$

Démonstration. De (4.8)-(4.10) la forme spectrale de $u(x,t)$, on déduit $u_x(x,t) = v_x(x,t)+w_x(x,t)$. Alors, on aura $w_x = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)(n\pi)\cos(n\pi x)$ puis, en utilisant les propriétés de la fonction $E_{\alpha,\alpha}$ et la condition (A_3), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|w_x(.,t)\|^2_{\mathbb{L}^2[0,1]} &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(n\pi)^2 w_n^2(t) \\
&\leq \frac{\Gamma^2(\alpha)}{2}\sum_{n\geq 1}|\varphi_n|^2 n\pi^2 \left[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(n\pi)^2 t^{\alpha})\right]^2 \\
&\leq \frac{M_1^2\Gamma^2(\alpha)}{2}\sum_{n\leq 1}\frac{(\varphi_n)^2}{(n\pi)^2} \\
&\leq M_1^2\Gamma^2(\alpha)\|\varphi\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)},
\end{aligned} \tag{4.26}$$

où $\sup_{0<s<t\leq T}\lambda_n(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^{\alpha}) \leq M_1$. Aussi, nous obtenons $v_x = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)(n\pi)\cos(n\pi x)$. Le calcul de sa norme dans $\mathbb{L}^2$ donne l'approximation suivante

$$\begin{aligned}
\|v_x(.,t)\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)} &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(n\pi)^2 v_n^2(t) \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{|f_n|^2}{(n\pi)^2}\|c\|^2_{C_{1-\alpha}[0,T]} \\
&\times \left[\int_0^t s^{\alpha-1}(n\pi)^2(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(n\pi)^2(t-s)^{\alpha})ds\right]^2 \\
&\leq M_1^2\|f\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)}\|c\|^2_{C_{1-\alpha}[0,T]}\left[\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right]^2.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Comme, dans $H_0^1[0,1]$ la norme de $u(x,t)$ par rapport à x, est

$$\|u(.,t)\|_{H_0^1[0,1]} = \|u(.,t)\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + \|u_x(.,t)\|_{\mathbb{L}^2(0,1)},$$

de (4.21),(4.22), (4.26) et (4.27) l'approximation de u dans H_0^1 est

$$\|u\|_{H_0^1[0,1]} \leq t^{(\alpha-1)}\Gamma(\alpha)M\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + t^{2\alpha-1}\frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\|c\|_{C_{1-\alpha}[0,T]}M\|f\|_{\mathbb{L}^2[0,1]}$$
$$+ M_1\Gamma(\alpha)\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + M_1\|f\|_{\mathbb{L}^2(0,1)}\|c\|_{C_{1-\alpha}[0,T]}\left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right].$$

Par suite le calcul de $\|u\|_{1-\alpha}$ donne (4.24) avec $Q_3 = \Gamma(\alpha)M_1; Q_4 = \dfrac{T}{\alpha}M_1$.
Pour la deuxième approximation, notons que $D^\alpha_{0+,t}u_n(t) \in C_{1-\alpha}[0,T]$ et $\sum\limits_{n\geq 1} D^\alpha_{0+}u_n(t)X_n(x)$, la série des dérivées fractionnaires en temps est uniformément convergente pour $t \in [\epsilon, T], \epsilon > 0$, alors $\sum\limits_{n\geq 1} D^\alpha_{0+}u_n(t)X_n(x) = D^\alpha_{0+}\sum\limits_{n\geq 1} u_n(t)X_n(x)$.
Par conséquent, nous pouvons utilisé ce résultat pour vérifier que $D^\alpha u \in \mathbb{L}^2(0,1)$ via l'expression (4.3). Ce qui donne pour un premier pas

$$\left\|D^\alpha_{0+,t}u(.,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} \leq \|u_{xx}(.,t)\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + |c(t)|\,\|f\|_{\mathbb{L}^2(0,1)}.$$

Par des arguments similaires à la première partie de cette preuve, nous obtenons pour les dérivées partielles secondes des deux terme de somme u,

$$\|w_{xx}(.,t)\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(n\pi)^4 w_n^2(t)$$

$$\leq M_1^2\Gamma^2(\alpha)\|\varphi\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)},$$

et

$$\|v_{xx}(.,t)\|^2_{\mathbb{L}^2(0,1)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(n\pi)^4 v_n^2(t)$$

$$\leq M_1^2\|c\|^2_{C_{1-\alpha}[0,T]}\left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]^2\|f\|_{\mathbb{L}^2(0,1)}.$$

La norme de u dans $\mathbb{L}^2$ vérifie alors , par conséquent, avec un choix de Q_3 et Q_4 nous avons

$$\left\|D^\alpha_{0+,t}u\right\|_{C_{1-\alpha}([0,T];\mathbb{L}^2()0,1))} \leq Q_3\|\varphi\|_{\mathbb{L}^2(0,1)} + Q_4\|c\|_{C_{1-\alpha}[0,T]}\|f\|_{\mathbb{L}^2(0,1)}. \qquad (4.28)$$

De (4.20) et (4.28) nous obtenons aisément (4.25). Donc, $u(x,.) \in C^\alpha_{1-\alpha}[0,T]$ presque partout dans $\mathbb{L}^2(0,1)$.
Les approximations de w_{xx} et v_{xx} , améliorent la régularité de u. En effet, $u(.,t) \in \mathbb{H}^2[0,1]$. La

preuve est achevée. □

4.3.2 Le problème inverse

Maintenant, on démontre l'existence et l'unicité du terme source dépendant de l'espace $f(x)$. Multiplions (4.8)par x et intégrant sur $[0,1]$, et avec la condition supplémentaire, nous obtenons les séries :

$$\begin{aligned} g(t) = &\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \varphi_n \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) \\ &+ \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} f_n \int\limits_0^t c(s)(t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-(n\pi)^2(t-s)^\alpha\right) ds. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Ce qui montre la relation entre la donnée input $f(x)$ et la donnée output $g(t,f) = \int\limits_0^1 xu(f,x,t)dx$, où nous notons la solution unique du problème direct par $u(f,x,t) = w(x,t)+v(f,x,t)$. Remarquons que $w(x,t)$ la solution du problème (4.11) est indépendante du terme source $f(x)$.
Plus les assertions $(A_1)-(A_3)$, assumons les assertions suivantes :

(A_4) $g \in C^\alpha_{1-\alpha}[0,T]$ et $\lim\limits_{t\longrightarrow 0+} t^{1-\alpha} g(t) = \int_0^1 x\varphi(x)dx.$

(A_5) $f_n =< f;\varphi_n >; \varphi_n =< \varphi; X_n >; n \geq 1$ sont positives et

$$\int\limits_0^1 xf(x)dx \neq 0; \ \int\limits_0^1 x\varphi(x)dx \neq 0.$$

Définissons $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions admissible $f(x)$ par :

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in C^1[0,1] \cap \mathbb{H}^2(0,1) : C_1 < f(x) < C_2 \right\} \subset \mathbb{L}^2(0,1).$$

Notons par $\{g\} \subset C_{1-\alpha}[0,T]$ l'ensemble de la donnée out put $g(t)$ mesurée, et définissons l'application $G(f) : \mathcal{H} \longrightarrow \{g\}$ par la partie droite de l'équation (4.29), qui est bien définie en vue des assertions $(A_1)-(A_3)$. Alors le problème inverse peut être reformulé sous la forme opérationnelle :

$$G(f) = g(f,t); \ t \in (0,T]. \tag{4.30}$$

Tout d'abord, montrons la monotonie de G.

Théorème 4.4. *Avec les assertions $(A_1)-(A_4)$, l'opérateur G est monotone.*

Démonstration. Soient $f, \widetilde{f} \in \mathcal{H}$ tel que $0 < f_n \leq \widetilde{f}_n;\ n \geq 1$, alors on a :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+,t}u(x,t) - u_{xx} \leq D^{\alpha}_{0+,t}\widetilde{u}(x,t) - \widetilde{u}_{xx}(x,t), & (x,t) \in \Omega; \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}u(x,t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}\widetilde{u}(x,t); & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Multiplions par x et intégrons sur $[0,1]$, nous obtenons

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+,t}g(t) - K(t) \leq D^{\alpha}_{0+,t}\widetilde{g}(t) - \widetilde{K}(t);\ t \in (0,T] \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}g(t) = \int\limits_0^1 x\varphi(x)dx = \lim\limits_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}\widetilde{g}(t); \end{cases} \tag{4.31}$$

où

$$\begin{aligned} K(t) &= -\int\limits_0^1 xu_{xx}(x,t)dx = -u_x(1,t) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}f_nh_n(t) \\ &\leq \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\widetilde{f}_nh_n(t) = -\widetilde{u}_x(1,t) = \widetilde{K}(t);\ t \in (0,T] \end{aligned}$$

avec

$$h_n(t) = n\pi \int_0^t c(s)(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-(n\pi)^2(t-s)^{\alpha}\right)ds > 0, t > 0; n \geq 1.$$

Appliquons I^{α}_{0+} sur la première inégalité de l'équation (4.31), en utilisant la deuxième inégalité et le calcul fractionnaire nous obtenons :

$$g(t) - \widetilde{g}(t) \leq I^{\alpha}_{0+}\left[K(t) - \widetilde{K}(t)\right] \leq 0;$$

ce qui implique la monotonie de l'opérateur G. La preuve est achevée. □

Pour identifier f uniquement on doit vérifier que la fonction inconnue $f(x)$ est distinguable via l'opérateur G, ce qui signifie l'injectivité de l'opérateur G^{-1}. Ensuite, on a le résultat suivant :

Théorème 4.5. *Supposons que les assertions $(A_1)-(A_5)$ sont vérifiées. Alors la donnée input-output $G(f)$ correspondant à la donnée supplémentaire* (4.6) *; est distinguable dans la classe des fonctions sources admissibles $\mathcal{H}$.*

Démonstration. On commence par montrer que $G(f)$ est lipschitzienne et continue sur $\mathcal{H}$. Soient $f, \widetilde{f} \in \mathcal{H};$ tel que $f_n \neq \widetilde{f}_n; n \geq 1$, alors $z(x,t) = u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+,t}z(x,t) - z_{xx} = \left(f(x) - \widetilde{f}(x)\right)c(t);\ (x,t) \in (0,1) \times (0,T], \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0+} t^{1-\alpha}z(x,t) = 0;\ x \in [0,1], \\ z(0,t) = 0 = z(1,t);\ t \in (0,T]. \end{cases}$$

En vue de (4.8)-(4.10), z est donnée par

$$z(x,t) = \sum_{n\geq 1} \left[f_n - \widetilde{f}_n\right] \int_0^t c(s)(t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-(n\pi)^2(t-s)^\alpha\right) dsX_n(x).$$

En intégrant sur $[0,1]$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^1 xz(x,t)dx &= \int_0^1 x \sum_{n\geq 1} \left[< f; X_n > - < \widetilde{f}; X_n >\right] \\ &\times \int_0^t c(s)(t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-(n\pi)^2(t-s)^\alpha\right) dsX_n(x)dx, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$|g(t) - \widetilde{g}(t)| \leq \int_0^1 \left|f(x) - \widetilde{f}(x)\right| dx \, \|c\|_{C_{1-\alpha}[0,T]} M \int_0^t s^{\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1} dsdx.$$

Donc, en vue de (A_2)

$$\|g - \widetilde{g}\|_{C_{1-\alpha}[0,T]} \leq H \left\|f - \widetilde{f}\right\|_{C[0,1]},$$

où $H = \|c\|_{C_{1-\alpha}[0,T]} M \dfrac{T^\alpha \Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}$. Par conséquent, $f(x) = \widetilde{f}(x)$ sur $[0,1]$ ce qui implique $G(f) = G(\widetilde{f})$ d'où l'injectivité de G. □

Remarque 4.1. *L'existence de la fonction $f \in \mathcal{H}$ solutions de $G(f) = g(t)$ dérive de la complétude de l'espace $C_{1-\alpha}[0,T]$.*

Maintenant, nous présentons l'unique résultat lié au problème (4.11) ; ce qui montre la dépendance continue de la solution $w(x,t)$ par rapport à la donnée initiale $\varphi(x)$.

Lemme 4.1. *Soient $w_1, w_2 \in C^\alpha_{1-\alpha}\left([0,T]; \mathbb{L}^2(0,1)\right)$, solutions du problème (4.11) liées respectivement aux conditions initiales $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sous la condition (A_3). Si w_1 et w_2 vérifient :*

$$w_1(t) = \int_0^1 xw_1(x,t)dx = \int_0^1 xw_2(x,t)dx = w_2(t); \; 0 < t \leq T, \tag{4.32}$$

alors $\varphi(x) = \psi(x)$ dans $\mathbb{L}^2(0,1)$.

Démonstration. Les solutions du problème (4.11) avec les conditions initiales $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ vérifient respectivement

$$w_1(x,t) = \sum_{n\geq 1} \varphi_n \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-(n\pi)^2 t^\alpha\right) X_n(x);$$

$$w_2(x,t) = \sum_{n\geq 1} \psi_n \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-(n\pi)^2 t^\alpha\right) X_n(x).$$

Comme $w_1, w_2 \in C_{1-\alpha}\left([0,T], \mathbb{L}^2[0,1]\right)$ il est simple de démontrer que

$$w_1(t) - w_2(t) = \int_0^1 x\left[w_1(x,t) - w_2(x,t)\right]dx \in C_{1-\alpha}[0,T].$$

Alors, on peut supposer que :

$$\begin{cases} \varphi(x) > \psi(x); & x \in (x_i, x_{i+1})\,;\, i = 1, ..., m \\ \varphi(x) = \psi(x); & \text{ailleurs .} \end{cases}$$

Pour certains $x_i \in [0,1]; i = 1, ..., m+1$. En vue de (A_3) et le calcul fractionnaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{i=1}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x\left[\varphi(x) - \psi(x)\right]dx = \int_0^1 x\left[\varphi(x) - \psi(x)\right]dx \\ &\leq \int_0^1 x \sum_{n\geq 1}\left[\varphi_n - \psi_n\right]X_n(x)dx \\ &\leq \int_0^1 x \lim_{t\in[0,T]} t^{1-\alpha}\sum_{n\geq 1}\left[\varphi_n - \psi_n\right]\Gamma(\alpha)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-(n\pi)^2 t^{\alpha}\right)X_n(x)dx \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} t^{1-\alpha}\left[w_1(t) - w_2(t)\right] = \|w_1 - w_2\|_{C_{1-\alpha}[0,T]} = 0. \end{aligned}$$

Contradiction, alors $\varphi(x) = \psi(x)$ presque partout sur $[0,1]$. $\square$

A ce moment, nous exposons le résultat d'unicité suivant.

Théorème 4.6. *Le terme source $f(x)$ peut être déterminer uniquement par la donnée supplémentaire $\int_0^1 xu(x,t)dx = g(t); t \in [0,T]$ dans le problème (4.3)-(4.5).*

Démonstration. De (4.29), on conclut que l'unicité du terme $f(x)$ est lié à $v(f,x,t)$ la solution du problème (4.12). la donnée supplémentaire donne

$$g(t) = \int_0^1 xw(x,t)dx + \int_0^1 xv(f,x,t)dx.$$

Utilisons le lemme (4.1),on conclut que la condition initiale $\dfrac{f(x)c(s)}{\Gamma(\alpha)}$ dans le problème (4.13) est uniquement déterminée dans $\mathbb{L}^2(0,1)$ par la donnée supplémentaire $\int_0^1 xV(f,x,t,s)dx$. Ainsi, sous les assertions $(A_1)-(A_5)$, le fait que $\int_0^1 xv(f,x,t)dx = \int_0^1 x\int_0^t V(f,x,t,s)dsdx$ et en supposant que $f(x) > \widetilde{f}(x)$ presque partout sur $[0,1]$ on a

$$\begin{aligned}0 &< \int_0^t \int_0^1 x\left(f(x)-\widetilde{f}(x)\right)\frac{c(s)}{\Gamma(\alpha)}dxds\\ &\leq \int_0^t \frac{c(s)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 x\sum_{n\geq 1} C_n\left(f_n-\widetilde{f}_n\right)X_n(x)dxds\\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} t^{1-\alpha}\int_0^1 x\left[v(f,x,t)-v(\widetilde{f},x,t)\right]dx;\end{aligned}$$

où $C_n = \lim_{t-s\longrightarrow 0+}(t-s)^{1-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}\left(-(2n\pi)^2(t-s)^{\alpha}\right) = 1$.
Alors,

$$\left\|x(f-\widetilde{f})\right\|_{\mathbb{L}^1(0,1)} \leq C\left\|\int_0^1 x\left(v(f,x,.)-v(\widetilde{f},x,.\right)dx\right\|_{C_{1-\alpha}[0,T]}; \tag{4.33}$$

où $\sup_{t\in[0,T]}\Gamma(\alpha)\left[\int_0^t c(s)ds\right]^{-1} =: C$. Si on a la même condition initiale alors $w_1(t)-w_1(t)=0$, et $g(t)-\widetilde{g}(t) = \int_0^1 x\left(v(f,x,t)-v(\widetilde{f},x,t)\right)dx$.
Ainsi,

$$\left\|x\left(f-\widetilde{f}\right)\right\|_{\mathbb{L}^1(0,1)} \leq C\left\|g-\widetilde{g}\right\|_{C_{1-\alpha}[0,T]}; \tag{4.34}$$

Ce qui montre la dépendance continue de la fonction $f(x)$ par rapport à la donnée supplémentaire $g(t)$ pour le problème (4.3)-(4.5). Dans le cas où $w_1(t)-w_1(t)\neq 0$, en vue de la preuve du lemme (4.1) on a

$$\begin{aligned}0 &< \int_0^1 \int_0^t x\left(f(x)-\widetilde{f}(x)\right)\frac{c(s)}{\Gamma(\alpha)}dsdx\\ &\leq \int_0^1\left[\int_0^t x\left(f(x)-\widetilde{f}(x)\right)\frac{c(s)}{\Gamma(\alpha)}ds + x\left(\varphi(x)-\psi(x)\right)\right]dx\\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} t^{1-\alpha}\left[(v(t)-\widetilde{v}(t))+(w_1(t)-w_2(t))\right] = \left\|g-\widetilde{g}\right\|_{C_{1-\alpha}[0,T]};\end{aligned}$$

ce qui donne (4.34).
Alors, on conclut immédiatement que $f(x)$ peut être obtenue presque partout sur $[0,1]$ par la donnée output $g(t)$. □

Remarque 4.2. *Pour l'unicité de la solution du problème inverse, considérons* $\{u(x,t); f(x)\}$ *et* $\left\{\widetilde{u}(x,t);\widetilde{f}(x)\right\}$ *deux solutions du problème inverse alors par une simple approximation on obtient*

$$\begin{aligned}|u(x,t)-\widetilde{u}(x,t)| &\leq \left|\sum_{n\geq 1}(f_n-\widetilde{f}_n)X_n(x)K_n(t)\right| \\ &\leq K\left|f(x)-\widetilde{f}(x)\right|,\ t>0,\ x\in[0,1].\end{aligned} \tag{4.35}$$

où

$$
\begin{aligned}
K_n(t) &= \int_0^t c(s)\frac{(n\pi)^2}{(n\pi)^2}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(-(n\pi)^2(t-s)^\alpha\right)ds \\
&\leq M_1\int_0^t \frac{c(s)}{(n\pi)^2}ds \leq K.
\end{aligned}
$$

Alors le résultat est obtenu entre les inégalités (4.34) et (4.35).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cette étude s'inscrit dans la démarche de l'application des outils d'analyse aux équations différentielles d'ordre fractionnaire en temps dont l'efficacité dans la modélisation des problèmes à mémoire a été prouvé. Le premier chapitre nous a permis de nous familiariser avec l'outil fractionnaire et a fourni quelques résultats élémentaires certes, mais utiles pour notre étude, en plus de certains rappels de l'analyse fonctionnelle et celle de Fourier.

Le deuxième chapitre de cette thèse est dédié aux problèmes de diffusion et sous diffusion dans le cas unidimensionnel. Pour les problèmes de diffusion, l'approche classique de Fourier est rappelée. Pour les problèmes de sous-diffusion par manque de bibliographie dans le domaine des résultats assez basique d'existence, d'unicité et de régularités pris de deux articles différents sont exposés.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'un problème parabolique inverse aux limites, nous avons établie des résultats d'existence et d'unicité de la solution classique. La dépendance continue de solutions par rapport aux données a été également discutée. Une synthèse de ces résultats à fait l'objectif d'une publication dans une revue internationale. Les difficultés résident dans le terme de contrôle et la dépendance du temps pour le terme source inconnu.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'un problème inverse parabolique pondéré, on a déterminé l'existence, l'unicité et la régularité de la solution faible. Nous avons utilisé l'outil de l'application input-output pour pouvoir déterminer le terme source inconnu dépendant de l'espace, ce qui est une des difficultés.

De plus, le fait que la dérivation fractionnaire soit celle de Riemann-Liouville avec condition initiale pondéré a compliqué le travail qui a était soumis à un journal [3].

Comme perspectives, nous projetons en plus de continuer à explorer ce domaine en développant d'éventuels modèles numériques correspondant aux problèmes présentés dans ce travail. En espérant que cette contribution guidera d'autres chercheurs suivant cet axe qui promet beaucoup d'horizons.

ANNEXE A

A Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou encore théorème du point fixe de Picard, est apparu pour la première fois en 1922 dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale.

Théorème A.7. *(Principe de contraction de Banach, 1922) Soit (X,d) un espace métrique complet. Soit $T : X \longrightarrow X$ une application contractante de constante k. Alors*

$$\exists ! x \in X \text{ tel que } Tx = x.$$

B Principe Duhamel

Si $V(x,t;\tau)$ est une solution du problème

$$\begin{cases} \partial^{\alpha}_{\tau+} V(x,t;\tau) = \partial_{xx} V(x,t;\tau) & (x,t) \times (\tau, T); \\ V \mid_{t=\tau} = D^{1-\alpha}_{0+} f(x,\tau), \\ \partial_x V(0,t;\tau) = 0, -\partial_x V(1,t;\tau) = 0. \end{cases}$$

la solution du problème

$$\begin{cases} \partial^{\alpha}_{0+} v(x,t) = \partial_{xx} v(x,t) + f(x,t) & (x,t) \times (0,T) \\ v(x,0) = 0, \\ \partial_x v(0,t) = 0, -\partial_x v(1,t) = 0, \end{cases}$$

prend la forme $v(x,t) = \displaystyle\int_0^t V(x,t;\tau) d\tau$. Pour plus de détails voir [66].

Bibliographie

[1] T. S. Aleroev, M. Kirane, and S.A Malik. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determininig condition. *EJDE*, 270 :1–16, 2013.

[2] A. Ashyralyev, I. Karatay, and P. E. Sobolevskii. On well-posedness of the nonlocal boundary value problem for parabolic difference equations. *Hindawi publishing corporation. Discrete dynamics in nature and society*, 2 :273–286, 2004.

[3] R. Atmania and L. Settara. Determination of a space source term in a cauchy weighted problem for a time -fractional diffusion equation by an over determination integral data "submitted".

[4] R. Bagley and J.Torvik. Fractional calculus-a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA journal*, 21(5) :741–748, 1983.

[5] K. Balachandran and J.Y.Park. Existence of solutions of second order nonlinear differential equations with nonlocal conditions in banach spaces. *Indian J.Pure Appl. Math.*, 12 :1883–1891, 2001.

[6] A. Benrabah. *Etude d'un problème d'évolution non locale et régularisation d'un problème elliptique mal posé*. PhD thesis, Université Badji-Mokhtar Annaba, 2012.

[7] A. Bouziani. Mixed problem with integral conditions for a certain parabolic equation. *J.of Appl. Math. and Stoch. Anal.*, 9 :323–330, 1996.

[8] A. Bouziani and N.E.Benouar. Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques. *Comptes Rendus de l'academie des sciences, Paris*, pages 1177–1182, 1995.

[9] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[10] L. Byszewski and V. Lakshmikantham. Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract cauchy problem in a banach space. *Appl. Anal*, 1 :11–19, 1991.

[11] J. R. Cannon, Y.Lin, and S.Wang. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation. *J. Austral. Math. Soc. Ser*, pages 149–163, 1991.

[12] J. Cheng, J. Nakagawa, M. Yamamoto, and T. Yamazaki. Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation. *Inverse problems*, 25(11) :115002, 2009.

[13] V. I. Chesalyn and N.I.Yurchuk. Nonlocal boundary value problems for abstract liav equations. *Izv. AN BSSR. Ser. Phys-Math*, pages 30–35, 1973.

[14] B. Delattre, D.Ivaldi, and C.Stolz. Application du contrôle optimal à l'identification d'un chargement thermique. *Revue Européenne des Eléments*, 11(2-4) :393–404, 2002.

[15] A. A. Dezin. *General questions in theory of boundary value problems*. Moscow. Nauka, English trans, Springer Verlag, 1980.

[16] F. Dubois, A.Galucio, and N.Point. *Introduction à la dérivation fractionnaire :Theorie et applications*. Conservatoire National des Arts et Metiers, Mathematiques, Paris France, 29 mars2010.

[17] G. B. Follard. *Fourier analysis and its applications*. Wadsworth and Brooks, 1992.

[18] I. Gohberg and Kreĭ. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, volume 18. American Mathematical Soc., 1988.

[19] R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti, and G. Paradisi. Discrete random walk models for space-time fractional diffusion. *Chem.Phys.*, 284 :521–541, 2002.

[20] J. Hadamard. Lectures on cauchy's problem in linear partial differential equations. *Dover*, 1952.

[21] K. Haouam. *Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires*. PhD thesis, Université mentouri Constantine, 2007.

[22] E. M. Hernández. A remark on second order differential equations with nonlocal conditions. *Cadernos de Matematica*, pages 299–309, 2003.

[23] C. Huang, L. Hung-Chi, et al. A three-dimensional inverse problem in predicting the heat fluxes distribution in the cutting tools. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 48(10) :1009–1034, 2005.

[24] C. Huang, Tsai, and Yao-Long. A transient 3-d inverse problem in imaging the time-dependent local heat transfer coefficients for plate fin. *Applied Thermal Engineering*, 25(14) :2478–2495, 2005.

[25] V. A. Ii'in. Necessary and sufficient conditions for the subsystem of eigenfunctions and associated functions of keldysh's pencil of ordinary differential operators to form the basis. *Soviet Math. Dokl*, 17 :513–516, 1976.

[26] N. Ionkin. Solution of a boundary-value problem in heat conduction with non-classical boundary condition. *Differential Equations*, 13 :204–211, 1977.

[27] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*, volume 127. Springer, 2006.

[28] M. Ismailov and F. Kanca. An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions. *Mathematical methods in the applied sciences*, 34(6) :692–702, 2011.

[29] M. Ismailov, F. Kanca, and D. Lesnic. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions. *Applied Mathematics and Computation*, 218(8) :4138–4146, 2011.

[30] M. I. Ivanchov. Inverse problems for the heat-conduction equation with non-local boundary condition. *Ukrain. Math.*, 8 :1186–1192, 1993.

[31] M. I. Ivanchov and N.V.Pabyrivska. Simultaneous determination of two coefficients of a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions. *Ukrain. Math. J*, 5 :674–684, 2001.

[32] D. Jackson. Existence and uniqeness of solutions to semilinear nonlocal parabolic equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 172 :256–265, 1993.

[33] R. S. Johnson. An introduction to sturm-liouville theory. *University of Newcastle, Newcastle*, 2006.

[34] V. L. Kamynin. On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition. *Mathematical Notes*, 77(3) :482–493, 2005.

[35] F. Kanca and M. Ismailov. The inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient of the heat equation from integral overdetermination data. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 20(4) :463–476, 2012.

[36] M. V. Keldysh. On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators. *Russian Mathematical Surveys*, 26(4) :15–44, 1971.

[37] A. Kilbas, Srivastava H.Mohan, and J.J.Trujillo. *Theory And Applications of Fractional Differential Equations*, volume 204. Elsevier Science Limited, 2006.

[38] A. Kilbas, J. Trujillo, and A. Voroshilov. Cauchy-type problem for diffusion-wave equation with the riemann-liouville partial derivative. *Fractional Calculus And Applied Analysis*, 8(4) :403–430, 2005.

[39] M. Kirane and A. Salman Malik. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the linear heat equation involving fractional derivative in time. *Appl. Math. Comp*, 1 :13–170, 2013.

[40] M. Kirane, Salman A Malik, and A.Al-Gwaiz. An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions. *Math. Meth. Appl. Sci*, pages 1056–1069, 2013.

[41] G. Koepfler. *Equations aux dérivées partielles*. Université Paris Descartes, 2011.

[42] B. Lecampion. *Sur l'identification des paramètres des lois de comportement des roches argileuses*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2002.

[43] B. Lecampion and A.Constantinescu. Sensitivity analysis for parameter identification in quasi-static poroelasticity. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29(2) :163–185, 2005.

[44] G. Li, J. Zhang, X. Dali, and M. Yamamoto. Simultaneous inversion for the space-dependent diffusion coefficient and the fractional order in the time-fractional diffusion equation. *Inverse Problems*, 29(6) :065014, 2013.

[45] Y. Li-Qin and W. Yuan Di. Parabolic partial differential equations with nonlocal boundary and nonlocal initial conditions. *Comm. Appl. Math. Comput.*, 19 :1–10, 2005.

[46] Y. Luchko. Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 351(1) :218–223, 2009.

[47] Y. Luchko. Initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation. *J. Math. Appl*, pages 538–548, 2011.

[48] F. Mainardi, Y.Luchko, and G.Pagnini. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation. *arXiv preprint cond-mat/0702419*, 2007.

[49] Z. Manaa. Analyse de problèmes de diffusion et sous-diffusion linéaires, mémoire de master, université badji-mokhtar annaba, 2017.

[50] A. Yu. Mokin. On a family of initial-boundary-value prolems for the heat equation, differents. *Uravneniya*, 45 :123–137, 2009.

[51] J. Nakagawa, K. Sakamoto, and M. Yamamoto. Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equations -new mathematical aspects motivated by industrial collaboration. *Journal of Math-industry*, 2 :99–108, 2010.

[52] A. M. Nakhushev. *Equations of mathematical biology*. Vysshaya Shkola, Moscow, 1995.

[53] T. Oussaif and A. Bouziani. An inverse coefficient problem for a parabolic equation under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions. *"International Journal od Partial Differential Equations and Applications*, 2 :38–43, 2014.

[54] E. Ozbilge, A. Demir, and F. Kanca. Determination of the unknown source function in time fractional parabolic equation with dirichlet boundary conditions. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 10(1) :283, 2016.

[55] I. Podlubny. *Fractional differential equations : An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volume 198. Academic press, 1998.

[56] M. Raynaud and J.Bransier. A new finite-difference method for the nonlinear heat conduction problem. *Numerical Heat Transfer*, 9 :27–42, 1986.

[57] H. Reinhard. *Equations aux dérivées partielles*. Dunod, 1987.

[58] K. B. Sabitov and E.M.Sa.n. The inverse problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat*, 4 :55–62, 2010.

[59] Samko, G.Stefan, A.Kilbas, O.Marichev, et al. Fractional integrals and derivatives. *Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon*, 1993, 1993.

[60] K. Schugerl. Bioreaction engineering : Reactions involving microorganisms and cells : Fundamentals, thermodynamics, formal kinetics, idealized reactor types and operation, 1987.

[61] H. Seddiki. Calcul fractionnaire, mémoire de magister, université badji-mokhtar annaba, 2009.

[62] L. Settara and R. Atmania. An inverse coefficient-source problem for a time-fractional diffusion equation. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics™*, 57(3) :68–78, 2018.

[63] C. Sil'chenko and T.Yu. A parabolic equation with nonlocal conditions. *Journal of Mathematical Sciences*, 149(6) :1701–1707, 2008.

[64] S. Tatar. Existence and uniqueness in an inverse source problem for a one-dimensional time-fractional diffusion equation.

[65] V. Tuan. Inverse problem for fractional diffusion equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 14(1) :31–55, 2011.

[66] S. Umarov. On fractional duhamels principle and its applications. *J. Diff. Equations*, 252 :5217–5234, 2012.

[67] V. Vigak. Construction of a solution of the heat-conduction problem with integral conditions. In *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, volume 8, pages 57–60, 1994.

[68] C. Yang. Estimation of the temperature-dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problems. *Applied Mathematical Modelling*, 23 :469–478, 1999.

[69] Y. Zhang and X. Xu. Inverse source problem for a fractional diffusion equation. *Inverse problems*, 27, 2011.

[70] Z. Zhang. An undetermined coefficient problem for a fractional diffusion equation. *Inverse Problems*, 32 :21, 2016.

International Journal of Applied Mathematics and Statistics,
Int. J. Appl. Math. Stat.; Vol. 57; Issue No. 3; Year 2018,
ISSN 0973-1377 (Print), ISSN 0973-7545 (Online)

An inverse coefficient-source problem for a time-fractional diffusion equation

Loubna Settara[1] **and Rahima Atmania**[2]

[1]Lamahis Laboratory, Departement of Mathematics,
University of 20 august 1955, Skikda , Algeria
loubna_math@yahoo.fr

[2]LMA Laboratory, Department of Mathematics,
University of Badji Mokhtar Annaba,
P.O. Box 12, Annaba 23000, Algeria.
atmanira@yahoo.fr

Abstract

In this paper, a unique solution to an inverse source problem for a one-dimensional time-fractional diffusion equation is obtained as a convergent series. This existence and uniqueness result is based on the Fourier method, the fractional calculus and the Banach fixed point principle. The unknown source coefficient is determined uniquely by the additional data which is an integral condition. Then, the continuous dependence of data is proved.

Keywords: Time-fractional diffusion equation, fractional derivative, inverse problem, bi-orthogonal system of functions, Fourier series, Banach fixed point theorem.

2000 Mathematics Subject Classification: 80A23, 65N21, 26A33, 35R30.

1 Introduction

The fractional diffusion equations are believed to be more realistic in describing anomalous diffusion in heterogeneous porus media than the classical diffusion ones. Thus, they have drawn attention of researchers from various disciplines of science and engeneering. The readers may refer to Cheng et al. (2009); J.Nakagawa et al. (2010) and references therein.
Inverse source problems are the problems that consist of finding the unknown source term via an additional data. Some works on fractional inverse diffusion problems have been published. We refer to Aleroev et al. (2013); Cheng et al. (2009); Fatma and Mansur (2012); J.Nakagawa et al. (2010); Ozbilge et al. (2016); Tuan (2011).
Here, we consider the so-called fractional diffusion problem involving the linear nonhomogeneous equation:

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0+,t}\left(u(x,t)-u\left(x,0\right)\right) &= u_{xx}(x,t)+a(t)u(x,t)+c\left(t\right)F(x,t), \\ (x,t) &\in (0,1)\times(0,T]\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

with initial and nonlocal boundary conditions

$$u\left(x,0\right)=\varphi(x), \quad x\in[0,1]\,, \tag{1.2}$$

$$u(0,t)=u(1,t), \quad u_x(1,t)=0, \quad t\in[0,T]\,, \tag{1.3}$$

$D^{\alpha}_{0+,t}$ is the Riemann-Liouville fractional derivative of order $0<\alpha<1$ in the time variable, $a(t), t>0$ is the source control term, $F(x,t)$ is the known source term, $\varphi(x)$ is the initial temperature.
Our inverse problem consists of determining the time dependent unknown coefficient of the source term $c(t)$ and the temperature distribution $u(x,t)$, from the initial temperature (1.2) and the boundary conditions (1.3). $c\left(t\right)$ needs to be determined uniquely by the over-determination condition

$$\int_0^1 u(x,t)dx=E(t), \quad t\in[0,T]\,, \tag{1.4}$$

which is the additional data of the thermal energy $E(t)$. We note that in the papers Aleroev et al. (2013); Fatma and Mansur (2012); Ionkin (1977) the time-dependent source coefficient is determined from such condition.
The used approach is based on the expansion of the solution by using a bi-orthogonal system of functions obtained from the nonlocal boundary conditions. We are motived by the works Aleroev et al. (2013) where the authors considered an inverse time-fractional diffusion problem with $a(t) = 0$ and Fatma and Mansur (2012) where the authors considered an inverse problem for $a(t) = 0$ and $\alpha = 1$.
The outline of the paper is as follows. In Section 2, some necessary preliminaries are given. In Section 3, the existence and uniqueness of the solution of the inverse problem (1.1)-(1.4) is etablished by using the Fourier method and the Banach fixed point theorem. In Section 4, the continuous dependence of the solution of the inverse problem upon the data of $\{a\,(t)\,, F\,(x,t)\,; \varphi\,(x)\,; E\,(t)\}$ is shown.

2 Preliminaries

In this section, we present some useful definitions and results of fractional calculus which can be found in Kilbas et al. (2006).

Definition 2.1. The left sided Riemann-Liouville fractional integral of order $0 < \alpha < 1$ for an integrable function $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, is defined by

$$I_{0+}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \quad t > 0,$$

where $\Gamma(\alpha)$ is the Euler gamma function.

Definition 2.2. The left sided Riemann-Liouville fractional derivative of order $0 < \alpha < 1$ of the integrable function f is defined by

$$D_{0+}^{\alpha} f(t) := \frac{d}{dt} I_{0+}^{1-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds.$$

Proposition 2.1. *For $0 < \alpha < 1$, $f \in AC[0,T]$, the space of absolutely continuous functions,*

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} \left(f(t) - f\,(0)\right) = f(t) - f\,(0)\,;\ D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} f(t) = f(t).$$

Theorem 2.2. *For a sequence of functions $(f_i\,(t))_{i\geq 0}$ defined on $(0,T]$. Suppose the following conditions are fulfilled:*
(i) for a given $\alpha > 0$, $D_{0+}^{\alpha} f_i(t), i \geq 0; t \in (0,T]$ exists,
(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)$ and $\sum_{i=1}^{\infty} D_{0+}^{\alpha} f_i(t)$ are uniformly convergent on $[\varepsilon, T]$ for any $\varepsilon > 0$.
Then the function defined by the series $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)$ is $\alpha-$ differentiable and satisfies

$$D_{0+}^{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} D_{0+}^{\alpha} f_i(t).$$

Let us present some results on The **Mittag-Leffler Function** which is an important tool in the fractional calculus.

Definition 2.3. A two-parameter Mittag-Leffler function is defined by the series expansion

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)};\ \alpha > 0,\ \ \beta > 0,\ \text{with } z \in \mathbb{C}. \tag{2.5}$$

In particular $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$ and $E_1(z) = e^z$.

Proposition 2.3. *For $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, the following hold:*
(1)For $\lambda > 0$, $t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha})$ is completely monotonic function.
(2)For $t \in [0,T]$, we have

$$E_{\alpha,\beta}(-\lambda t^{\alpha}) < \infty \ \textit{ and } \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda\,(t-s)^{\alpha}) ds < \infty.$$

(3) Furthermore, for $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $t \in (0,T]$

$$\lambda t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t^{\alpha}) \leq \frac{1}{t} \frac{\lambda t^{\alpha}}{1+\lambda t^{\alpha}} < \infty.$$

Theorem 2.4. *The solution $u \in AC[0,T]$ of the linear nonhomogeneous fractional problem*

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}\left(u(t)-u(0)\right)+\lambda u(t)=f(t), \quad t\in(0,T], \quad \lambda>0, \\ u(0^{+})=c, \end{cases} \tag{2.6}$$

where $f \in L^1[0,T]$, is given by the integral expression

$$u(t)=cE_{\alpha,1}(-\lambda t^{\alpha})+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-s)^{\alpha})f(s)ds. \tag{2.7}$$

3 Existence and uniqueness result

First, note that for the non-selfadjoint operator $AX=-X"=\lambda_n X$ with $X(0)=X(1);\ X'(1)=0$, the eigenvalues are $\lambda_0=0,\ \lambda_n=(2n\pi)^2;n\geq 1$. Thus, we construct the biorthonormal systems of functions

$$\{X_0(x)=2, X_{1,n}(x)=4\cos(2\pi nx), X_{2,n}(x)=4(1-x)\sin(2\pi nx); n\geq 1\} \tag{3.8}$$

$$\text{and}\quad \{Y_0(x)=x, Y_{1,n}(x)=x\cos(2\pi nx), Y_{2,n}(x)=\sin(2\pi nx); n\geq 1\} \tag{3.9}$$

which are Riesz bases in $L^2[0,1]$. For more details, the reader can consult Aleroev et al. (2013); Il'in (1997); Ionkin (1977).

Let us define the following space:

$$C^{2,\alpha}([0,1]\times(0,T])=\Big\{u(t,x)\in C^2[0,1];\ t\in(0,T] \text{ and } D_{0+,t}^{\alpha}\left(u(x,t)-u(x,0)\right)\in C(0,T];\ x\in[0,1]\Big\}.$$

The functions a, φ, F and E satisfy the following assumptions

(A1) $a(t)\in C[0,T]$.

(A2) $F(x,.)\in C[0,T]$ and for $t\in[0,T], F(.,t)\in C^4[0,1]; F(0,t)=F(1,t),\ F_x(1,t)=0,\ F_{xx}(0,t)=F_{xx}(1,t),\ F_{xxx}(1,t)=0$ and $f(t)=\int_0^1 F(x,t)\,dx\neq 0$.

(A3) $\varphi\in C^4[0,1]$; $\varphi(1)=\varphi(0)$, $\varphi'(1)=0$, $\varphi''(1)=\varphi''(0)$ and $\varphi^{(3)}(1)=0$.

(A4) $E\in AC[0,T]$ and $\int_0^1\varphi(x)dx=E(0)$.

From the above, there exist some positive constants $L_j, j=1,2;\ M_i, i=0,...,5;\ K$ such that

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \max_{0\leq t\leq T} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha});\ L_2 := \max_{0\leq s<t\leq T} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^{\alpha});\\
M_0 &:= \|a\|_{C[0,T]};\ M_1 := \left\|f^{-1}\right\|_{C[0,T]};\\
M_2 &:= \max\left(\left\|D_{0+}^{\alpha}\left(E(t)-E(0)\right)\right\|_{C[0,T]}, \|E\|_{C[0,T]}\right);\ M_3 := \|c\|_{C[0,T]};\\
M_4 &:= \max\left(\|F_0\|_{C[0,T]};\ \|F_{i,n}\|_{C[0,T]}\right);\ i=1,2;\ n=1,...;\\
M_5 &:= \max\ (|\varphi_0|\ ;\ |\varphi_{i,n}|);\ i=1,2;\ n=1,...;
\end{aligned}$$

$$\max_{0<s<t\leq T}\lambda_n(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^{\alpha})\leq K. \tag{3.10}$$

Theorem 3.1. *Let (A1)-(A4) be satisfied. Then the inverse problem (1.1)-(1.4) has a unique solution $(u(x,t),c(t))$ for some small T. Furthermore this solution is in $\left[C^{2,\alpha}([0,1]\times(0,T])\cap C([0,1]\times[0,T])\right]$.*

Proof. Let us start with the existence of the solution of the direct problem.

Step1 : Determination of $u(x,t)$ for arbitrary $c(t)$ in $C[0,T]$.

By applying the Fourier method, the solution $u(x,t)$ of the problem (1.1)-(1.3) can be expanded in a uniformly convergent series in term of eigenfunctions of (3.8) in $L^2(0,1)$ of the form

$$u(x,t)=u_0(t)X_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}u_{1,n}(t)X_{1,n}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}u_{2,n}(t)X_{2,n}(x). \tag{3.11}$$

The coefficients $u_0(t), u_{1,n}(t), u_{2,n}(t)$ for $n\geq 1$ are to be found by making use of the orthogonality of the eigenfunctions. Namely, we multiply (1.1) by the eigenfunctions of (3.9) and integrate over $(0,1)$. Recall that the scalar product in $L^2(0,1)$ is defined by $(f,g):=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Let us note the expansion coefficients of $F(x,t)$ and $\varphi(x)$ in the eigenfunctions of (3.9) for $n \geq 1$ respectively by

$$\left\{\begin{array}{c} F_0(t) = (F(x,t), Y_0(x)), \\ F_{1,n}(t) = (F(x,t), Y_{1,n}(x)), \\ F_{2,n}(t) = (F(x,t), Y_{2,n}(x)) \end{array}\right. \quad \text{and} \quad \left\{\begin{array}{c} \varphi_0 = (\varphi(x), Y_0(x)), \\ \varphi_{1,n} = (\varphi(x), Y_{1,n}(x))\, dx, \\ \varphi_{2,n} = (\varphi(x), Y_{2,n}(x)). \end{array}\right.$$

We obtain in view of (1.1) and with $(u(x,t), Y_0(x)) = u_0(t)$

$$\left\{\begin{array}{c} D^{\alpha}_{0+}\left(u_0(t) - u_0(0)\right) = a(t)u_0(t) + c\,(t)\, F_0\,(t)\,; \\ u_0(0) = \varphi_0. \end{array}\right. \tag{3.12}$$

For $u_{1,n}(t) = (u(x,t), Y_{1,n}(x))$; $n \geq 1$, in view of (1.1), we have

$$\begin{aligned} & \Big(D^{\alpha}_{0+}\left(u(x,t) - u(x,0)\right), Y_{1,n}(x)\Big) \\ = {} & \left(u_{xx}(x,t) + a(t)u(x,t) + c\,(t)\, F(x,t), Y_{1,n}(x)\right) \\ = {} & \left(u_{1,n}(t)X\text{"}_{1,n}\,(x) + u_{2,n}(t)X\text{"}_{2,n}\,(x)\,, Y_{1,n}(x)\right) + a(t)u_{1,n}(t) + c\,(t)\, F_{1,n}(t) \\ = {} & -\lambda_n u_{1,n}(t) - 4n\pi u_{2,n}(t) + a(t)u_{1,n}(t) + c\,(t)\, F_{1,n}(t). \end{aligned}$$

The linear fractional differential equations satisfied by $u_{1,n}(t)$; $n \geq 1$ are

$$\left\{\begin{array}{c} D^{\alpha}_{0+}\left(u_{1,n}(t) - u_{1,n}(0)\right) = -\lambda_n u_{1,n}(t) - 4n\pi u_{2,n}(t) \\ +a(t)u_{1,n}(t) + c\,(t)\, F_{1,n}(t); \\ u_{1,n}(0) = \varphi_{1,n}\;. \end{array}\right. \tag{3.13}$$

Also, the linear fractional differential equations satisfied by $u_{2,n}(t)$; $n \geq 1$, are

$$\left\{\begin{array}{c} D^{\alpha}_{0+}\left(u_{2,n}(t) - u_{2,n}(0)\right) = -\lambda_n u_{2,n}(t) + a(t)u_{2,n}(t) + c\,(t)\, F_{2,n}(t); \\ u_{2,n}(0) = \varphi_{2,n}. \end{array}\right. \tag{3.14}$$

Applying I^{α}_{0+} to (3.12), we get the following Volterra integral equation satisfied by the solution

$$u_0(t) = \varphi_0 + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} c\,(s)\, F_0(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} a(s)u_0(s)ds. \tag{3.15}$$

This solution is bounded in $C[0,T]$ in view of (A1)-(A3). We have

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{C[0,T]} \leq {} & |\varphi_0| + \frac{T^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|F_0\|_{C[0,T]} \|c\|_{C[0,T]} \\ & + \frac{T^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|a\|_{C[0,T]} \|u_0\|_{C[0,T]}\,. \end{aligned}$$

Hence,

$$\|u_0\|_{C[0,T]} \leq \left[M_5 + \frac{T^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} M_4 M_3\right] [1 - \ \Psi_0]^{-1} =: \psi_0 \tag{3.16}$$

for

$$\Psi_0 := \frac{T^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} M_0 < \frac{1}{2}. \tag{3.17}$$

In view of Theorem 2.4, the problem (3.14) admits a solution in $C[0,T]$ satisfying

$$\begin{aligned} u_{2,n}(t) = {} & \varphi_{2,n} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^{\alpha}) \\ & \times \left(a(s)u_{2,n}(s) + c\,(s)\, F_{2,n}(s)\right) ds. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Under (A1)-(A3), $u_{2,n}\,(t)$ is bounded in $C[0,T]$ as follows

$$\begin{aligned} \|u_{2,n}\|_{C[0,T]} \leq {} & |\varphi_{2,n}|\, L_1 + L_2 \frac{T^{\alpha}}{\alpha} \|F_{2,n}\|_{C[0,T]} \|c\|_{C[0,T]} \\ & + L_2 \frac{T^{\alpha}}{\alpha} \|a\|_{C[0,T]} \|u_{2,n}\|_{C[0,T]}\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Then, we have for $n \geq 1$

$$\begin{aligned} & \|u_{2,n}\|_{C[0,T]} \\ \leq & \left[M_5 L_1 + L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} M_4 M_3\right] [1-\Psi_1]^{-1} =: \psi_2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

for

$$\Psi_1 := L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} M_0 < \frac{1}{2}. \tag{3.21}$$

The problem (3.13) admits a solution which is the solution in $C[0,T]$ of the integral equation

$$\begin{aligned} u_{1,n}(t) &= \varphi_{1,n} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) \\ & -4\pi n \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^\alpha) u_{2,n}(s)\, ds \\ & + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^\alpha) \left(a(s) u_{1,n}(s) + c(s) F_{1,n}(s)\right) ds. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Under conditions (A1)-(A3), $u_{1,n}(t)$ is bounded in $C[0,T]$ as follows

$$\begin{aligned} \|u_{1,n}\|_{C[0,T]} &\leq |\varphi_{1,n}| L_1 + L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \|F_{1,n}\|_{C[0,T]} \|c\|_{C[0,T]} \\ & +T \frac{K}{\pi n} \|u_{2,n}\|_{C[0,T]} + L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} \|a\|_{C[0,T]} \|u_{1,n}\|_{C[0,T]}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

As previous we get for $n \geq 1$

$$\|u_{1,n}\|_{C[0,T]} \leq \left[M_5 L_1 + L_2 \frac{T^\alpha}{\alpha} M_4 M_3 + T \frac{K}{\pi} \psi_2\right] [1-\Psi_1]^{-1}. \tag{3.24}$$

Let us use the product Banach space $[C[0,T]]^3$ endowed with its norme to prove the existence and uniquness of the solution under this form $(u_0, u_{1,n}, u_{2,n}) \in [C[0,T]]^3$. Define the operator Γ on $[C[0,T]]^3$ by $\Gamma(u_0, u_{1,n}, u_{2,n})(t) = (P_0 u_0(t), P_1 u_{1,n}(t), P_2 u_{2,n}(t))$ where the operators P_0, P_1, P_2 are defined on $C[0,T]$ by the right side of (3.15), (3.22) and (3.18), respectively.
In view of (3.16), (3.24) and (3.20) $\Gamma : [C[0,T]]^3 \to [C[0,T]]^3$.
Prove that Γ is a contraction on $[C[0,T]]^3$. So, for each $(u_0, u_{1,n}, u_{2,n}); (v_0, v_{1,n}, v_{2,n}) \in [C[0,T]]^3$ we have

$$\begin{aligned} & \|\Gamma(u_0, u_{1,n}, u_{2,n}) - \Gamma(v_0, v_{1,n}, v_{2,n})\|_{[C[0,T]]^3} \\ \leq & \max\Big(\|P_0 u_0 - P_0 v_0\|_{C[0,T]}; \|P_1 u_{1,n} - P_1 v_{1,n}\|_{C[0,T]}; \\ & \|P_2 u_{2,n} - P_2 v_{2,n}\|_{C[0,T]}\Big). \end{aligned}$$

First, we get easly

$$\|P_0 u_0 - P_0 v_0\|_{C[0,T]} \leq \frac{T^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \|a\|_{C[0,T]} \|u_0 - v_0\|_{C[0,T]} \leq \Psi_0 \|u_0 - v_0\|_{C[0,T]}. \tag{3.25}$$

For P_1, by (3.10) we have for each $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} & |P_1 u_{1,n}(t) - P_1 v_{1,n}(t)| \\ \leq & \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^\alpha) |a(s)| |u_{1,n}(s) - v_{1,n}(s)| ds \\ & +4\pi n \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^\alpha) |u_{2,n}(s) - v_{2,n}(s)| ds \\ \leq & L_2 \frac{t^\alpha}{\alpha} \|a\|_{C[0,T]} \|u_{1,n} - v_{1,n}\|_{C[0,T]} + t \frac{K}{\pi n} \|u_{2,n} - v_{2,n}\|_{C[0,T]}. \end{aligned}$$

Hence, for $n \geq 1$

$$\|P_1 u_{1,n} - P_1 v_{1,n}\|_{C[0,T]} \leq \Psi_1 \|u_{1,n} - v_{1,n}\|_{C[0,T]} + T \frac{K}{\pi n} \|u_{2,n} - v_{2,n}\|_{C[0,T]}. \tag{3.26}$$

Similarly, for each $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} & \left|P_2 u_{2,n}(t) - P_2 v_{2,n}(t)\right| \\ \leq & \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n (t-s)^{\alpha}) \left|a(s)\right| \left|u_{2,n}(s) - v_{2,n}(s)\right| ds \end{aligned}$$

which gives for $n \geq 1$

$$\left\|P_2 u_{2,n} - P_2 v_{2,n}\right\|_{C[0,T]} \leq \Psi_1 \left\|u_{2,n} - v_{2,n}\right\|_{C[0,T]}. \tag{3.27}$$

Consequently,

$$\begin{aligned} & \left\|\Gamma(u_0, u_{1,n}, u_{2,n}) - \Gamma(v_0, v_{1,n}, v_{2,n})\right\|_{[C[0,T]]^3} \\ \leq & \max\Big[\Big(\Psi_0 \left\|u_0 - v_0\right\|_{C[0,T]}; \Psi_1 \left\|u_{1,n} - v_{1,n}\right\|_{C[0,T]}; \Psi_1 \left\|u_{2,n} - v_{2,n}\right\|_{C[0,T]}\Big) \\ & + T\frac{K}{\pi n}\Big(0; \left\|u_{2,n} - v_{2,n}\right\|_{C[0,T]}; 0\Big)\Big] \\ \leq & \left[\max(\Psi_0; \Psi_1) + T\frac{K}{\pi}\right] \left\|(u_0, u_{1,n}, u_{2,n}) - (v_0, v_{1,n}, v_{2,n})\right\|_{[C[0,T]]^3}. \end{aligned}$$

According to (3.17) and (3.21)

$$\max(\Psi_0; \Psi_1) + \frac{T}{\alpha}\frac{K}{\pi} < 1 \text{ for } \quad T\frac{K}{\alpha\pi} < \frac{1}{2}. \tag{3.28}$$

Then, Γ is a contraction on $[C[0,T]]^3$ and has a unique fixed point which is the coefficients $(u_0, u_{1,n}, u_{2,n})$ of the solution (3.11). Then, there exists a unique solution of (1.1)-(1.3) for arbitrary $c(t)$ bounded in $C[0,T]$.

Step 2: Determination of the coefficient $c(t)$ in $C[0,T]$.

Applying D_{0+}^{α} to the over-determination condition (1.4), we obtain the following equation

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}(E(t) - E(0)) &= \int_0^1 D_{0+,t}^{\alpha}(u(x,t) - u(x,0))\, dx \\ &= c(t)\int_0^1 F(x,t)dx + u_x(0,t) + a(t)E(t), \end{aligned}$$

which yields

$$c(t) = [f(t)]^{-1}\left[D_{0+}^{\alpha}(E(t) - E(0)) - a(t)E(t) - u_x(0,t)\right].$$

Next, we calculate $f(t) = \int_0^1 F(x,t)dx$ and find

$$\begin{aligned} f(t) &= F_0(t)\int_0^1 X_0(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} F_{1,n}(t)\int_0^1 X_{1,n}(x)\,dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} F_{2,n}(t)\int_0^1 X_{2,n}(x)\,dx \\ &= 2F_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}F_{2,n}(t). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Then, we derive (3.11) with respect to x and get $u_x(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 8\pi n u_{2,n}(t)$; where $u_{2,n}(t); n \geq 1$ are given by (3.18). The obtained equation is an integral equation with respect to $c(t)$

$$\begin{aligned} c(t) &= H_0(t) + H_1(t) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\pi n}{f(t)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^{\alpha})a(s)u_{2,n}(s)ds \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\pi n}{f(t)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^{\alpha})c(s)F_{2,n}(s)ds \end{aligned} \tag{3.30}$$

where

$$\begin{aligned} H_0(t) &= \frac{1}{f(t)}\left(D_{0+}^{\alpha}\left(E(t)-E(0)\right)-a(t)E(t)\right), \\ H_1(t) &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\pi n}{f(t)}\varphi_{2,n}E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^{\alpha}). \end{aligned}$$

We have under (A1)-(A4) and (3.10)

$$\begin{aligned} \|H_0\|_{C[0,T]} &\le (1+M_0)M_1M_2; \\ \|H_1\|_{C[0,T]} &\le 4M_1L_1\sum_{n=1}^{\infty}2\pi n\left|\varphi_{2,n}\right|. \end{aligned}$$

Under (A1)-(A3) $\sum_{n=1}^{\infty}2\pi n\left|\varphi_{2,n}\right|$ is convergent. In fact, we have $\varphi\in C^4[0,1]$ and $\varphi_{2,n}=\frac{\varphi_{2,n}^{(4)}}{(2n\pi)^4}$ where $\varphi_{2,n}^{(4)}$ are the coefficient of Fourier series of the function $\varphi^{(4)}$ with respect to the basis (3.9) . The Cauchy-Schwartz inequality yields

$$\begin{aligned} K_1 &:= \sum_{n=1}^{\infty}2n\pi\left|\varphi_{2,n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_{2,n}^{(4)}\right|}{(2n\pi)^3} \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n\pi)^6}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{2,n}^{(4)}\right|^2\right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Recall that by the Bessel's inequality, we have $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{2,n}^{(4)}\right|^2\le C\left\|\varphi^{(4)}\right\|_{L^2(0,1)}^2$. Thus,

$$\begin{aligned} \|c\|_{C[0,T]} &\le \|H_0\|_{C[0,T]}+\|H_1\|_{C[0,T]}+2M_1KM_0T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|u_{2,n}\|_{C[0,T]}}{n\pi} \\ &\quad +2M_1KT\|c\|_{C[0,T]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|F_{2,n}\|_{C[0,T]}}{n\pi} \end{aligned}$$

where

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|u_{2,n}\|_{C[0,T]}}{n\pi}\le\frac{L_1}{[1-\Psi_1]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_{2,n}|}{n\pi}+\frac{L_2T^{\alpha}\|c\|_{C[0,T]}}{\alpha[1-\Psi_1]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|F_{2,n}\|_{C[0,T]}}{n\pi}. \tag{3.31}$$

The convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_{2,n}|}{n\pi}=:K_3 \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|F_{2,n}\|_{C[0,T]}}{n\pi}=:K_2$$

is clear by the Cauchy-Schwartz inequality. Hence, for

$$\Psi_c := 2M_1KTK_2\left[1+\frac{L_2M_0T^{\alpha}}{\alpha[1-\Psi_1]}\right]<1, \tag{3.32}$$

we have

$$\begin{aligned} &\|c\|_{C[0,T]}\le\left[(1+M_0)M_1M_2+4M_1L_1K_1\right][1-\Psi_c]^{-1} \\ &+\frac{2M_1M_0TKL_1K_3}{[1-\Psi_1][1-\Psi_c]}. \end{aligned}$$

Hence, $c(t)$ is bounded in $C[0,T]$. Now, we define the operator P on $C[0,T]$ by the right side of (3.30). Let us show that P is a contraction mapping in $C[0,T]$. For each $c,b\in C[0,T]$ with $u_{2,n},v_{2,n}$ defined by (3.18) relatively to c,b respectively, we have

$$\|u_{2,n}-v_{2,n}\|_{C[0,T]}\le L_2\frac{T^{\alpha}}{\alpha[1-\Psi_1]}\|c-b\|_{C[0,T]}\|F_{2,n}\|_{C[0,T]}$$

and

$$\begin{aligned}\|Pc - Pb\|_{C[0,T]} &\leq 2M_1KT\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|F_{2,n}\|_{C[0,T]}}{n\pi}\|c-b\|_{C[0,T]} \\ &\quad +2M_1KM_0T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|u_{2,n}-v_{2,n}\|_{C[0,T]}}{n\pi} \\ &\leq 2M_1KTK_2\left[1+\frac{M_0L_2T^{\alpha}}{\alpha\left[1-\Psi_1\right]}\right]\|c-b\|_{C[0,T]}.\end{aligned}$$

According to (3.32) the operator P has a unique fixed point $c(t)$ in $C[0,T]$, by the Banach fixed point theorem.

Step 3: Estimation of the time of the local existence.

According to (3.17), (3.21), (3.32) and (3.28) T^* must satisfy this approximation

$$T^* < \inf\left[\left(\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{2M_0}\right)^{1/\alpha};\left(\frac{\alpha}{2M_0L_2}\right)^{1/\alpha};\frac{\alpha\pi}{2K};\frac{1}{4M_1KK_2};\left(\frac{\alpha}{2M_0L_2K_2}\right)^{1/\alpha+1}\right];$$

to ensure the existence of the solution on $[0,T]$ for each $T<T^*$.

Step 4: Convergence of the solution series (3.11).

As it was proved, in view of (A1)-(A4), the coefficients $u_0(t)$, $u_{1,n}(t)$ and $u_{2,n}(t); n\geq 1$ are bounded in $C[0,T]$. Thus, the series expression (3.11) of $u(x,t)$ gives

$$\sup_{x\in[0,1]}|u(x,t)| = |u(t)| \leq 2\left|u_0(t)\right| + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{1,n}(t)\right| + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_{2,n}(t)\right|. \tag{3.33}$$

(A2)-(A3) implies that $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_{i,n}\right|, \sum_{n=1}^{\infty}2n\pi\left|\varphi_{i,n}\right|$ converge and $\sum_{n=1}^{\infty}\left|F_{i,n}(t)\right|$; $\sum_{n=1}^{\infty}2n\pi\left|F_{i,n}(t)\right| i=1,2$ converge uniformly.

In consequent, by (3.23), (3.19) and (3.31) the series $u(x,t)$ and its partial derivative $u_x(x,t)$ are uniformly convergent in $[0,1]\times[\varepsilon,T]$ for any $\varepsilon>0$. Therefore, their sums are in $C[0,T]$ for $x\in[0,1]$. Also, its second partial derivative $u_{xx}(x,t)$ is uniformly convergent in $[0,1]\times[\varepsilon,T]$, for any $\varepsilon>0$ by the Cauchy-Schwartz inequality and the Bessel's inequality in view of the fact that $\varphi_{2,n}=\dfrac{\varphi_{2,n}^{(4)}}{(2n\pi)^4}$ and $F_{i,n}(t)=\dfrac{F_{i,n}^{(4)}(t)}{(2n\pi)^4}; i=1,2$. Then, the uniformly convergence of $\sum_{n=1}^{\infty}u_{i,n}(t), \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_{i,n}(t); i=1,2$ and the inequalities

$$\begin{aligned}\left\|D_{0_+}^{\alpha}\left(u_0(t)-u_0(0)\right)\right\|_{C[0,T]} &\leq M_0\left\|u_0\right\|_{C[0,T]}+M_4M_3; \\ \left\|D_{0+}^{\alpha}\left(u_{1,n}(t)-u_{1,n}(0)\right)\right\|_{C[0,T]} &\leq \left(\lambda_n+M_0\right)\left\|u_{1,n}\right\|_{C[0,T]} \\ &\quad +4n\pi\left\|u_{2,n}\right\|_{C[0,T]}+M_3\left\|F_{1,n}\right\|_{C[0,T]}; \\ \left\|D_{0+}^{\alpha}\left(u_{2,n}(t)-u_{2,n}(0)\right)\right\|_{C[0,T]} &\leq \left(\lambda_n+M_0\right)\left\|u_{2,n}\right\|_{C[0,T]}+M_3\left\|F_{2,n}\right\|_{C[0,T]}\end{aligned}$$

obtained from (3.12),(3.13) and (3.14), imply that $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{i,n}(t)-u_{i,n}(0)\right)$ and $\sum_{n=1}^{\infty}D_{0+}^{\alpha}\left(u_{i,n}(t)-u_{i,n}(0)\right), i=1,2$ are uniformly convergent on $[\varepsilon,T]$ for any $\varepsilon>0$.

In view of Theorem 2.2, the α-partial derivative $D_{0+,t}^{\alpha}$ of the series (3.11) is uniformly convergent for $t\in[\varepsilon,T]$,for any $\varepsilon>0$ and $x\in[0,1]$.

Thus, $u(x,t)\in C^{2,\alpha}[0,1]\times(0,T]\cap C([0,1]\times[0,T])$ and satisfies the conditions (1.2)-(1.3) for arbitrary $c(t)\in C[0,T]$.

Step 5: Uniqueness of the solution $(u(x,t),c(t))$.

Assume that the pairs of functions $(u(x,t),c(t))$ and $(v(x,t),b(t))$ are solutions of the inverse problem (1.1)-(1.4). Let us use the product Banach space $[C[0,T]]^4$ endowed with its norme to prove the uniquness of the solutions under this form $(u_0,u_{1,n},u_{2,n},c)\in[C[0,T]]^4$. We have

$$\begin{aligned}&\left\|(u_0,u_{1,n},u_{2,n},c)-(v_0,v_{1,n},v_{2,n},b)\right\|_{[C[0,T]]^4} \\ \leq\ &\max\left(\Psi_0;\Psi_1;\Psi_c\right)\left\|(u_0,u_{1,n},u_{2,n},c)-(v_0,v_{1,n},v_{2,n},b)\right\|_{[C[0,T]]^4}.\end{aligned}$$

In view of (3.17), (3.21) and (3.32)

$$\|(u_0, u_{1,n}, u_{2,n}, c) - (v_0, v_{1,n}, v_{2,n}, b)\|_{[C[0,T]]^4} = 0.$$

This implies that $u(x,t) = v(x,t)$ and $c(t) = b(t), t \in [0,T]$. This completes the proof.

□

4 Continuous Dependence on the Data

Theorem 4.1. *Under assumption (A1)-(A4), the solution $(u(x,t), c(t))$ of the problem (1.1)-(1.4) depends continuously upon the data of $\Phi(t) = \{a(t), F(x,t); \varphi(x); E(t)\}$.*

Proof. Let $(u(x,t), c(t)); (\overline{u}(x,t), \overline{c}(t))$ be the solutions of the inverse problem (1.1)-(1.4), corresponding to the data $\Phi(t)$, and $\bar{\Phi}(t)$ respectively.
Let us denote$\|\Phi\| = \|a\|_{C[0,T]} + \|E\|_{AC[0,T]} + \|\varphi\|_{C[0,1]} + \|F\|_{C([0,1]\times[0,T])}$.
First, we estimate each coefficient of $u(x,t) - \bar{u}(x,t)$ in $C[0,T]$.
We will use this form $\left|AG - \overline{AG}\right| = \left|AG - A\overline{G} + A\overline{G} - \overline{AG}\right| \leq |A|\left|G - A\overline{G}\right| + \left|\overline{G}\right|\left|A - \overline{A}\right|$. Then, for some constants $\theta_i, i = 1, ..., 4$;

$$\begin{aligned} \|u_0 - \bar{u}_0\|_{C[0,T]} &\leq \frac{\theta_1}{[1-\Psi_0]}|\varphi_0 - \overline{\varphi}_0| + \frac{\theta_2}{[1-\Psi_0]}\|c - \overline{c}\|_{C[0,T]} \\ &+ \frac{\theta_3}{[1-\Psi_0]}\left\|F_0 - \overline{F}_0\right\|_{C[0,T]} \\ &+ \frac{\theta_4}{[1-\Psi_0]}\|a - \overline{a}\|_{C[0,T]}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

By similar calculus we can obtain for some constants $\beta_i, i = 1, ..., 5$ and $\delta_i, i = 1, ..., 4$

$$\begin{aligned} &\|u_{1,n} - \overline{u}_{1,n}\|_{C[0,T]} \\ \leq\ &\frac{\beta_1}{[1-\Psi_1]}\left|\varphi_{1,n} - \overline{\varphi}_{1,n}\right| + \frac{\beta_2\|F_{1,n}\|_{C[0,T]}}{[1-\Psi_1]}\|c - \overline{c}\|_{C[0,T]} \\ &+ \frac{\beta_3}{[1-\Psi_1]}\left\|F_{1,n} - \overline{F}_{1,n}\right\|_{C[0,T]} + \frac{\beta_4\|u_{1,n}\|_{C[0,T]}}{[1-\Psi_1]}\|a - \overline{a}\|_{C[0,T]} \\ &+ \frac{\beta_5}{[1-\Psi_1]}\|u_{2,n} - \overline{u}_{2,n}\|_{C[0,T]} \end{aligned} \tag{4.35}$$

and

$$\begin{aligned} &\|u_{2,n} - \overline{u}_{2,n}\|_{C[0,T]} \\ \leq\ &\frac{\delta_1}{[1-\Psi_1]}\left|\varphi_{2,n} - \overline{\varphi}_{2,n}\right| + \frac{\delta_2\|F_{2,n}\|_{C[0,T]}}{[1-\Psi_1]}\|c - \overline{c}\|_{C[0,T]} \\ &+ \frac{\delta_3}{[1-\Psi_1]}\left\|F_{2,n} - \overline{F}_{2,n}\right\|_{C[0,T]} + \frac{\delta_4\|u_{2,n}\|_{C[0,T]}}{[1-\Psi_1]}\|a - \overline{a}\|_{C[0,T]}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

We use (4.34), (4.35) and (4.36) in (3.33) to get for some positive constants $\eta_i; i = 1, ..., 4$, the estimate of $u(x,t) - \bar{u}(x,t)$ in $C([0,1]\times[0,T])$

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}\|_{C([0,1]\times[0,T])} &\leq \eta_1\|\varphi - \overline{\varphi}\|_{C^2[0,1]} + \eta_2\|c - \overline{c}\|_{C[0,T]} \\ &+ \eta_3\|F - \overline{F}\|_{C^2([0,1]\times[0,T])} + \eta_4\|a - \overline{a}\|_{C[0,T]}. \end{aligned}$$

In addition, we have

$$\begin{aligned} &\left|D^{\alpha}_{0+,t}(u(x,t) - u(x,0)) - D^{\alpha}_{0+,t}(\bar{u}(x,t) - \bar{u}(x,0))\right| \\ \leq\ &\|u_{xx} - \bar{u}_{xx}\|_{C([0,1]\times[0,T])} \\ &+ \|a - \overline{a}\|_{C[0,T]}\|u\|_{C([0,1]\times[0,T])} + \|\overline{a}\|_{C[0,T]}\|u - \bar{u}\|_{C([0,1]\times[0,T])} \\ &+ \|c - \overline{c}\|_{C[0,T]}\|F\|_{C([0,1]\times[0,T])} + \|\overline{c}\|_{C[0,T]}\|F - \overline{F}\|_{C([0,1]\times[0,T])}. \end{aligned}$$

we get for some positive constants $B_1; B_2$

$$\|u-\bar{u}\|_{C^{2,\alpha}([0,1]\times(0,T])} \leq B_1\|\Phi-\bar{\Phi}\| + B_2\|c-\bar{c}\|_{C[0,T]}. \quad (4.37)$$

Next, we have to estimate each term of the difference $|c(t)-\bar{c}(t)|$. Let us note $E(t)-E(0)=A(t)$, then we have by (3.30)

$$\begin{aligned}\left\|H_0-\overline{H}_0\right\|_{C[0,T]} \leq\ & M_1\left\|D^{\alpha}_{0+}A(t)-D^{\alpha}_{0+}\overline{A}(t)\right\|_{C[0,T]} + M_1^2M_2\left\|\overline{f}-f\right\|_{C[0,T]} \\ & + M_1M_2\|\overline{a}-a\|_{C[0,T]} + M_0M_1\left\|E-\overline{E}\right\|_{C[0,T]} \\ & + M_0M_1^2M_2\left\|\overline{f}-f\right\|_{C[0,T]}.\end{aligned}$$

Also, we get by (3.30)

$$\left\|H_1-\overline{H}_1\right\|_{C[0,T]} \leq 8M_1L_1\sum_{n=1}^{\infty} n\pi\left|\varphi_{2,n}-\overline{\varphi}_{2,n}\right| + 8M_1^2L_1\sum_{n=1}^{\infty} n\pi\left|\overline{\varphi}_{2,n}\right|\left\|\overline{f}-f\right\|_{C[0,T]}.$$

The estimate of the first integral part is

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=1}^{\infty} 8\pi n\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n(t-s)^{\alpha})\left[\frac{c(s)F_{2,n}(s)}{f(t)}-\frac{\overline{c}(s)\overline{F}_{2,n}(s)}{\overline{f}(t)}\right]ds\right| \\ \leq\ & 2TKM_1M_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\|F_{2,n}-\overline{F}_{2,n}\right\|_{C[0,T]}}{n\pi} + 2TKM_1\|c-\overline{c}\|_{C[0,T]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\|\overline{F}_{2,n}\right\|_{C[0,T]}}{n\pi} \\ & + 2TKM_1^2M_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\|\overline{F}_{2,n}\right\|_{C[0,T]}}{n\pi}\left\|\overline{f}-f\right\|_{C[0,T]}.\end{aligned}$$

For some positive constants $\Pi_i, i=1,...,6$, we have

$$\begin{aligned}\|c-\overline{c}\|_{C[0,T]} \leq\ & \frac{\Pi_1}{[1-\Psi_c]}\left\|E-\overline{E}\right\|_{AC[0,T]} + \frac{\Pi_2}{[1-\Psi_c]}\sum_{n=1}^{\infty} n\pi\left|\varphi_{2,n}-\overline{\varphi}_{2,n}\right| \\ & + \frac{\Pi_3}{[1-\Psi_c]}\left\|\overline{f}-f\right\|_{C[0,T]} + \frac{\Pi_4}{[1-\Psi_c]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\|F_{2,n}-\overline{F}_{2,n}\right\|_{C[0,T]}}{n\pi} \\ & + \frac{\Pi_5}{[1-\Psi_c]}\|\overline{a}-a\|_{C[0,T]} + \frac{\Pi_6}{[1-\Psi_c]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|u_{2,n}-\overline{u}_{2,n}\|_{C[0,T]}}{n\pi}.\end{aligned}$$

we can obtain for some positive constants B_3 and B_4 and with (4.37)

$$\begin{aligned}\|c-\overline{c}\|_{C[0,T]} &\leq B_3\|\Phi-\bar{\Phi}\| + B_4\|u-\bar{u}\|_{C^{2,\alpha}([0,1]\times(0,T])} \\ &\leq [B_3+B_4B_1]\|\Phi-\bar{\Phi}\| + B_4B_2\|c-\overline{c}\|_{C[0,T]}.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\|c-\overline{c}\|_{C[0,T]} &\leq \frac{[B_3+B_4B_1]}{1-B_4B_2}\|\Phi-\bar{\Phi}\|; \\ \|u-\bar{u}\|_{C^{2,\alpha}([0,1]\times(0,T])} &\leq \left[B_1+\frac{[B_3+B_4B_1]}{1-B_4B_2}\right]\|\Phi-\bar{\Phi}\|.\end{aligned}$$

The theorem has been proved. □

5 Conclusion

The inverse problem regarding the simultaneous identification of the time-dependent source coefficient with the temperature distribution in a one-dimensional sub-diffusion equation with nonlocal boundary and integral overdetermination conditions has been considered. The nonlocal boundary conditions, the Riemann-Liouville fractional derivative and the control coefficient made our problem more difficult. The conditions for the existence, uniqueness and continuous dependence upon the data of the problem have been established by using the Fourier method with some bi-orthogonal system, an associated Riemann-Liouville fractional derivative which contains an initial data and the Banach fixed point theorem for a product of Banach spaces.

Acknowledgment

The authors thank the reviewers and the editor, for their careful reading as well as for their helpful coments that improved this paper.

References

Aleroev, T. S., Kirane, M. and Malik, S. A. (2013). Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition, *Electronic Journal of Differential Equations* **2013**(270): 1–16.

Chadha, A. and Pandey, D. (2014). Existence, uniqueness and approximation of solution for the fractional semilinear integro-differential equation, *International Journal of Applied Mathematics and StatisticsâĎć* **52**(3): 73–89.

Cheng, J., Nakagawa, J., Yamamoto, M. and Yamazaki, T. (2009). Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation, *Inverse problems* **25**(11): 115002.

Duan, J.-S. (2017). The boundary value problems for fractional ordinary differential equations with robin boundary conditions, *International Journal of Applied Mathematics and StatisticsâĎć* **57**(1): 200–214.

Fatma, K. and Mansur, I. (2012). The inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient of the heat equation from integral overdetermination data, *Inverse Problems in Science and Engineering* **20**(4): 463–476.

Il'in, V. (1997). How to express basis conditions and conditions for the equiconvergence with trigonometric series of expansions related to non-self-adjoint differential operators, *Computers & Mathematics with Applications* **34**(5-6): 641–647.

Ionkin, N. (1977). Solution of a boundary-value problem in heat conduction with non-classical boundary condition, *Differential Equations* **13**: 204–211.

J.Nakagawa, K.Sakamoto and M.Yamamoto (2010). Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equations -new mathematical aspects motivated by industrial collaboration, *Journal of Math-industry* **2**: 99–108.

Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. (2006). *Theory And Applications of Fractional Differential Equations*, Vol. 204, Elsevier Science Limited.

Kirane, M. and Malik, S. A. (2013). Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the linear heat equation involving fractional derivative in time, *Appl. Math. Comp* **1**: 13–170.

Mokin, A. (2009). On a family of initial-boundary-value prolems for the heat equation, differents, *Uravneniya* **45**: 123–137.

Ozbilge, Ebru, Demir, Ali, Kanca, F. and Özbilge, E. (2016). Determination of the unknown source function in time fractional parabolic equation with dirichlet boundary conditions, *Applied Mathematics & Information Sciences* **10**(1): 283.

Tuan, V. (2011). Inverse problem for fractional diffusion equation, *Fractional Calculus and Applied Analysis* **14**(1): 31–55.

Z.Zhang (2016). An undetermined coefficient problem for a fractional diffusion equation, *Inverse Problems* **32**: 21.