وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DE DOCTORAT EN SCIENCES
Option : Mathématiques Appliquées

Sur l'application des semi-groupes dans le calcul du spectre et le comportement asymptotique des solutions des équations d'évolution

Par

GOUASMIA Okba

Sous la Direction de

ENCADREUR: DIABA Fatma Prof. Université B.M. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT	BOURAS Mohamed Cherif	M.C.A	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR	LASKRI Yamina	Prof.	ESTI ANNABA
EXAMINATEUR	BOUSSETILA Nadjib	Prof.	Univ. de GUELMA

Année : 2017

Thèse de Doctorat
Sur l'application des semi groupes dans le calcul du spectre et le comportement asymptotique des solutions des équations d'évolution

GOUASMIA Okba
Laboratoire de Mathématique Appliquées
Département de Mathématiques, Université de Badji Mokhtar-Annaba

Encadré par Pr F. Diaba

Remerciements

Il m'est particulirement agrable d'avoir la possibilit, grce une tradition bien tablie en matire de mmoire de thse, d'exprimer ma reconnaissance ceux qui m'ont form et aid.

Avant tout, je tiens exprimer ma profonde reconnaissance Madame DIABA Fatma, Professeur l'Universit de Annaba, pour m'avoir accueilli dans son groupe de recherche et pour avoir dirig cette thse qui s'appuie en partie sur certains de ses travaux personnels. Tout au long de ce travail, j'ai t guid par ses nombreux conseils qui m'ont t d'un enseignement prcieux. Je la remercie, en particulier, pour la lecture experte de ma thse. Ces remerciements sont la hauteur du respect et de l'estime que je lui porte. Elle ma donn non seulement un soutien scientifique mais de plus un soutien moral.

Je remercie vivement Monsieur BOURAS Chrif, Matre de confrences de classe A l'Universit de Annaba, de m'avoir fait l'honneur de prsider ce jury. Que Madame LASKRI Yamina Professeur lEcole Prparatoire des Sciences Techniques de Annaba, trouve ici toute ma reconnaissance d'avoir accept de juger mon travail et d'tre membre du jury.

J'adresse galement mes vifs remerciements Monsieur Boussetila Nadjib, Professeur luniversit de 8 Mai 45 Guelma d'avoir accept dtre le rapporteur de ce manuscrit. Je ddie ce travail mes parents qui m'ont soutenu durant toutes mes annes d'tudes.

TABLE DES MATIÈRES

ملخص:

هذه الرسالة تدور حول محورين أساسيين هما تطبيق نموذج فريدريكس لحساب الطيف وتطبيق نصف الزمر في حساب السلوك المقارب لحلول معادلة التطور المقابلة.

لقد درسنا الشذوذ الطيفي لمؤثر شتورم ليوفيل على المستقيم والذي يولد بعض مركبات متزايدة في السلوك المقارب لحلول معادلة التطور المقابل. حيث تحسب هذه المركبات باستعمال نمزذج فر يدريكس و دالة عددية و التي تميز نقطة اللا استمرارية لتحويل فورييه لنمزذج فريدريكس. تم إعطاء مثال

الكلمات المفتاحية:

الشذوذ الطيفي – مؤثر شتورم ليوفيل- دالة وايل – نموذج فريدريكس – الطيف النقطي – السلوك التقاربي

Résumé

Cette thèse s'articule autour de deux grands axes qui sont l'application du modèle de Friedrichs pour le calcul du spectre et l'application des semi groupes dans le calcul du comportement asymptotique de la solution d'équation d'évolution correspondante.

On a étudié les singularités spectrales de l'opérateur de Sturm-Liouville sur la droite qui engendrent certaines composantes croissantes dans le comportement asymptotique de la solution d'équation d'évolution correspondante. On donne le calcul de ces composantes en utilisant le modèle de Friedrichs de l'opérateur Sturm-Liouville et une certaine fonction scalaire qui caractérise le point de discontinuité de la transformation Fourier du modèle de Friedrichs. Un exemple d'illustration est donné.

Les mots clefs :Singularités spectrales – opérateur de Sturm-Liouville – fonction de Weyl- modèle de Friedrich – spectre ponctuel – comportement asymptotic

Summary

This thesis articulates around two main trunk roads which are the application of the model of Friedrichs for the calculation of the spectre and the application of semigroups in the calculation of the asymptotic behavior of the solution of equation of corresponding evolution.

We have studies pectral singularities of Sturm-Liouville operator on the line whose generate some increasing composants in time asymptotic of the solution of corresponding evolution equation. The calculus of these composants is given using Friedrichs' model of Sturm-Liouville operator and some scalar function which characterize the point of discontinuity of Fourier transformation of Friedrichs' model. An example is given.

Keywords:Spectral singularities, Sturm-Liouville operator, Weyl function, Friedrichs'model, point spectrum, asymptotic behavior.

CHAPTER 1

INTRODUCTION

La théorie de Sturm-Liouville joue un rôle important dans la résolution de nombreux problèmes dans la physique mathématique. C'est un domaine actif de recherche en mathématiques pures et appliquées. Ces dernières années, il y a eu un intérêt croissant pour les problèmes de Sturm-Liouville avec des conditions aux limites dépendantes d'une valeur propre. Il existe une large littérature sur ce sujet.

Plusieurs équations de la physique mathématique telles que l'équation des ondes, l'équation de Schrödinger etc... peuvent être traitées grâce à la méthode de séparation de variables qui ramène ces équations aux dérivées partielles, à des équations différentielles linéaires du second ordre de la forme

$$\alpha(x)u'' + \beta(x)u' + \gamma(x)u = \lambda u; \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C}$$

équations dont on cherche les solutions u satisfaisant à des conditions imposées par le problème physique étudié.

En outre, certains problèmes aux limites qui peuvent avoir des discontinuités dans la solution ou dans sa dérivée en un point c intérieur, sont également étudiés. Des conditions aux limites à gauche et à droite sont imposées de solutions et à leurs dérivées à un point c intérieur et sont souvent appelées des conditions de transmission ou des conditions d'interface.

En outre, certains problèmes liés aux conditions de transport résultent des problèmes de conduction thermique pour une plaque mince laminée (par exemple, une plaque composée de matériaux ayant des caractéristiques différentes empilées dans l'épaisseur).

Dans cette classe de problèmes, les conditions de transmission à travers les interfaces doivent être ajoutées lorsque la plaque est laminée. L'étude de la structure de la solution dans la région de la couche correspondante a la solution de base dans la plaque, conduit à l'étude d'un problème aux valeurs propres pour un opérateur différentiel du second ordre avec coefficients continus par morceaux et des conditions de transmissions.

La théorie des opérateurs non auto-adjoints constituent aujourd'hui un des thèmes majeurs dans des domaines différents et variés de la physique mathématique.

Certains problèmes physiques peuvent être directement modélisés par des équations linéaires.

La modélisation mathématique par les équations aux dérivées partielles suivie de l'analyse théorique et numérique laquelle à son tour est confrontée à l'expérience, est devenue une démarche de bases.

De nombreux problèmes spectraux se rencontrent dans les applications (calcul des niveaux d'énergie et des états en mécanique quantique, criticité en neutronique, transmission dans un guide d'onde, une fibre optique, etc...)

La théorie spectrale qui permet de les traiter dépend notamment du spectre continu, source de nombreuses difficultés.

Dans le chapitre 2, on a rappelé quelques notions de base concernant l'analyse complexe, les espaces L^p . On a insisté sur quelques notions de la théorie spectrale, des problèmes de Sturm-Liouville et leurs propriétés lesquelles sont nécessaires pour la suite de notre travail. La notion de semi groupe est aussi une importante définition dans cette thèse.

Le chapitre 3 et 4 est un rappel succinct des résultats et travaux relatifs à l'opérateur de transport et aux problèmes aux limites non locaux. Il est évident que dans ce domaine riche et fertile mais néanmoins difficile que toute avancée minime soit elle représente un intérêt scientifique certain.

Nous y avons également présenté des résultats obtenus par d'autres auteurs ainsi que les différentes méthodes utilisées ayant un lien direct avec notre problématique.

Dans ce chapitre, notre but est l'inclusion de la méthode de Friedrichs appliquée à l'opérateur de Sturm-Liouville dans une série de modèles élaborés [8, 12, 25, 47, 48], et tirer de cela des résultats sur le spectre..

Nous avons aussi exposé quelques résultats sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations d'évolutions (voir [7], [9], [13]).

Ce rappel susdit d'un ensemble de résultats et travaux nous a fortement motivé pour envisager cette étude.

Les résultats sont basés essentiellement sur les travaux [15], [18] indispensables pour l'étude des cas plus généraux. On a indiqué les conditions sur le modèle de Friedrichs qui permettent d'écrire la formule pour le saut de la résolvante. La représentation de la projection orthogonale par la résolvante R_ζ d'un opérateur auto-adjoint

$$E(\Delta) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta + i\varepsilon} \left(R_\zeta - R_{\bar{\zeta}} \right) d\zeta, \Delta \subset (-\infty, +\infty)$$

est bien connue depuis longtemps. Evidemment, le saut de la résolvante

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta + i\varepsilon} \left(\left(R_\zeta - R_{\bar{\zeta}} \right) \varphi, \psi \right), \zeta = \sigma + i\varepsilon, \sigma \in (-\infty, +\infty)$$

est important dans la théorie de la perturbation non auto-adjointe du spectre continu aussi. Dans ce travail, on précise les calculs du saut de la résolvante.

Dans ce chapitre, on a donné aussi l'étude du spectre de l'opérateur de Sturm-Liouville sur la droite à potentiel avec retard (voir le travail [19]), on a considéré dans l'espace $L^2(0, \infty)$, l'opérateur

$$Ly = -y'' + q(x)y(x - \Delta), y(0) = 0, x > 0$$

(où $y(x-\Delta) \equiv 0$, $x \in (0, \Delta)$) avec la condition

$$|q(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon x},\ x > 0,\ \varepsilon > 0$$

Pour l'équation homogène $-y''+q(x)y(x-\Delta)-\sigma y=0$, $\sigma>0$ le comportement asymptotique de la solution $y(x)$ a été obtenu si $x\to\infty$.

Il est naturel de considérer maintenant l'expression $ly=-y''+q(x)y(x-\Delta)$ sur la droite. Ainsi, nous présentons l'opérateur L dans l'espace $L^2(-\infty,\infty)$ engendré par le domaine de définition maximal.

On a donné la condition d'obtention du spectre ponctuel et le spectre continu en appliquant le modèle de Friedrichs en utilisant directement l'expression de la résolvante au lieu des calculs fonctionnels très compliqués.

En 2008, E. V. Cheremnikh a considéré un exemple simple d'un opérateur de Sturm-Liouville sur la demi-droite avec un potentiel trivial et une condition aux limites non locale variable. Le but du travail est de montrer que le problème aux limites a maintenant une condition aux limites locale, mais cette condition contient une fonction rationnelle du paramètre spectral. Les pôles du prolongement analytique de la résolvante sont essentiels ici.

Ces travaux de recherche nous ont beaucoup aidé pour entamer cette étude concernant un domaine riche par ses applications et difficiles par les outils mathématiques appliqués utilisés.

Dans le chapitre 5, on a étudié les singularités spectrales de l'opérateur de Sturm-Liouville sur la droite qui engendrent certaines composantes croissantes dans le comportement asymptotique de la solution d'équation d'évolution correspondante. On a donné le calcul de ces composantes en utilisant le modèle de Friedrichs de l'opérateur Sturm-Liouville et une certaine fonction scalaire qui caractérise le point de discontinuité de transformation Fourier du modèle de Friedrichs. Un exemple d'illustration est donné.

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale: GOUASMIA O., DIABA A., Diaba F., Cheremnikh E. V, Global Journal of Pure and Applied Mathematics., ISSN 0973-1768 Volume 12, Number 6 (2016), pp. 5067–5077. © Research India Publications, http://www.ripublication.com/gjpam.htm

CHAPTER 2

PRÉLIMINAIRE

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base concernant l'analyse complexe, les espaces L^p . On a insisté sur quelques notions de la théorie spectrale, des problèmes de Sturm-Liouville et leurs propriétés lesquelles sont nécessaires pour la suite de notre travail. La notion de semi groupe est aussi une importante définition dans ce chapitre (voir [54], [61], [1], [63], [21], [58], [42], [59]).

2.1 Semi groupe

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{u} = Au & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

si A est un scalaire ou bien une matrice on a

$$u(t) = e^{At} u_0.$$

Donc la forme de la solution dépend de la possibilité de définir la fonction exponentielle.

Definition 1 *Pour tout* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *et pour tout* $t \geq 0$; *la matrice* e^{tA} *est définie* *par*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}. \tag{2.1}$$

Si on choisit une norme de (2.1), la norme correspondante dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, on peut montrer que (2.1) est une suite de Cauchy donc elle converge et elle vérifie

$$\left\| e^{tA} \right\| \leq e^{t\|A\|}, \quad t \geq 0.$$

Proposition 2 *Pour tout $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ l'application*

$$t \in \mathbb{R}^+ \mapsto e^{tA} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}),$$

est continue et vérifie

1. $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$ pour $t, \ s \geq 0$.
2. $e^{0A} = I$.

Definition 3 *On appelle $\left(e^{tA}\right)_{t \geq 0}$ le semi groupe à un paramètre engendré par la matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.*

D'une manière générale on a:

Definition 4 *Soit X un espace de Banach et $\mathcal{L}(X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés dans X.*
Une famille $\{T(t), \ t \geq 0\}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dite semi groupe si

1. $T(0) = Id \quad \{Id: \text{ identité}\}$.
2. $T(t+s) = T(t)\, T(s) \ \ \forall \ t; \ s \geq 0$.

2.1.1 Propriétés du semi groupe

1. Le semi groupe $\{T(t), \ t \geq 0\}$ est dit uniformément continu si

$$\lim_{t \to 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$$

2. Le semi groupe $\{T(t)\,,\ t \geq 0\}$ est dit fortement continu ou bien C_0- semi groupe si
$$\lim_{t \to 0} \|T(t)x - x\|_X = 0,\ \forall x \in X$$
Ou bien
$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x,\ \forall x \in X.$$
L'application $t \to T(t)$ est fortement continue au point $t = 0$ c'est pourquoi on l'appelle C_0 -semi groupe.

2.1.2 Générateur d'un semi groupe

Definition 5 *Le générateur d'un semi groupe* $\{T(t)\,,\ t \geq 0\}$ *est l'opérateur*
$$A : D\ (A) \subset X \to X$$
défini par
$$D\ (A) = \left\{x \in X : \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\right\}$$
et pour tout $x \in D(A)$
$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

2.2 Fonctions holomorphes

Definition 6 *Soient* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un ensemble ouvert,* E *un espace de Banach complexe, et soit* $f : \Omega \to E$ *une fonction continue*
on dit que f *est une fonction holomorphe dans* Ω *si la limite*
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(h)}{h}$$
existe pour tout $z \in \Omega$ *et la fonction* $f' : \Omega \to E$ *est continue.*

Theorem 7 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D, alors pour toute courbe fermée simple γ incluse dans D on a*

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

La formule intégrale de Cauchy permet de représenter la valeur d'une fonction holomorphe f en z en fonction d'une expression intégrale le long d'une courbe fermée qui entoure z; c'est la formule intégrale de Cauchy qui permet d'obtenir le développement en séries entières de f au voisinage des points de son domaine de définition.

Theorem 8 (Formule intégrale de Cauchy) *Soit D un domaine simplement connexe et $f \in H(D)$(l'ensemble des fonctions holomorphes). Alors $\forall\ z_0 \in D$ et pour toute courbe fermée simple γ entourant z_0 incluse dans D, on a:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Definition 9 (Fonction analytique) *Soit f une fonction à variable complexe définie sur U un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que la fonction f est analytique sur U si pour tout $z_0 \in U$, il existe une suite (a_n) de nombres complexes et un réel $r > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, r)$: c'est -à-dire pour tout z dans le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r, supposé inclus dans U, on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n : \forall z \in D$$

2.3 Prolongement analytique

En analyse complexe, la théorie du prolongement analytique détaille l'ensemble des propriétés et techniques concernant le prolongement des fonctions holomorphes (ou analytiques). Elle considère d'abord la question du prolongement dans le plan complexe, puis elle aborde des formes plus générales d'extension qui permettent de prendre en compte les singularités et les complications topologiques qui les accompagnent. La théorie fait alors intervenir soit le concept assez ancien et peu opérant de fonction multiforme, soit le concept plus puissant de la surface de Riemann. Etant donné une fonction analytique complexe dans un domaine D, la théorie se pose essentiellement deux questions

•D'une part, quel est le plus grand domaine où la représentation de la fonction est valable (par exemple, si la fonction est définie par une série entière, le rayon de convergence de cette série; si la fonction est définie par une intégrale ou une équation différentielle ...le domaine de validité de cette représentation).

•Puis, si la représentation peut être étendue à un domaine plus vaste, même au prix d'une extension de la représentation (notions connexes: intégrale prise au sens des parties principales de Cauchy, pseudo fonctions de Hadamard, prolongement radial, étoile de Mittag-Lefler, sommation des séries divergentes au sens de Césaro, de Borel...).

Definition 10 *Soit f une fonction analytique dans un domaine ouvert D_0, soit D_1 un autre domaine ouvert tel que $D_0 \cap D_1 \neq \phi$.*
On dit que f admet un prolongement analytique dans D_1 s'il existe une fonction g, analytique dans D_1, telle que $f = g$ dans $D_0 \cap D_1$. D'après le théorème d'unicité, un tel prolongement est nécessairement unique.

Definition 11 (Prolongement analytique le long d'une courbe γ) *Soit f_0 une fonction analytique dans un disque C_0 centré en a, soit γ une courbe passant par a_0.*
On dit qu'on a prolongé analytiquement f le long de γ si on a trouvé:

a- Des points $a_1, ..., a_n$ de γ et des disques $C_1, ..., C_n$ centrés sur ces points et tels que

$$\forall i; C_i \cap C_{i+1} \neq \phi$$

b- Des fonctions $f_1, ..., f_n$ analytiques respectivement dans $C_1, ..., C_n$ telles que f_1 soit un prolongement de $f_0, ..., f_n$ un prolongement de f_{n-1}. Un tel prolongement s'il existe, il est unique au sens suivant:
Si $b_1, ..., b_P, D_1...D_P$ et $g_1...g_P$ est un autre prolongement, si un point z de γ ap-

partient à C_K et D_q alors

$$f_K \equiv g_q \text{ dans } C_K \cap D_q$$

Theorem 12 *Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, a un point de U connexe (cette hypothèse est essentielle). Alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes:*
1. f est identiquement nulle
2. f est identiquement nulle dans un voisinage de a
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$
4. f est identiquement nulle sur une suite de point présentant un point d'accumulation dans U.

Ce théorème signifie que si une fonction analytique sur un ouvert connexe s'annule sur un disque de rayon si petit soit-il, alors c'est la fonction nulle.

2.4 Quelques notions de la théorie spectrale

Soit E un espace de Banach.

Definition 13 *Soit A un opérateur linéaire dans l'espace C^0 (espace des fonctions continues). Un nombre complexe λ s'appelle valeur propre de l'opérateur A si l'équation $Ax = \lambda x$ admet des solutions non nulles .*

$$(A - \lambda) x = 0 \quad ; \; x \neq 0$$

Un tel vecteur x est alors appelé vecteur propre (ou une fonction propre) associé à la valeur propre λ.

Definition 14 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire borné. On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble:*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \textit{ l'opérateur } \lambda I - A \textit{ est bijectif}\}$$

Le complémentaire de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$, noté par $\sigma(A)$ s'appelle spectre de A.
Ce dernier est composé de parties disjointes deux à deux .

Definition 15 (Le spectre ponctuel) *On appelle spectre ponctuel l'ensemble:*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - A) \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Cet ensemble est formé des valeurs propres de A.

Definition 16 (Le spectre continu)

$$\sigma_c(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ est non borné, } (\lambda I - A) \text{ injectif et } \overline{R(\lambda I - A)} = E\right\}.$$

Cet ensemble est constitué des valeurs propres approchées dans le sens que:

$$\text{pour tout} \quad \varepsilon > 0, \exists u \in E : \|u\| = 1 \ \ \|Au - \lambda u\| < \varepsilon$$

Definition 17 *(Le spectre résiduel)* *L'ensemble*

$$\sigma_r(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ est borné, } (\lambda I - A) \text{ injectif et } \overline{R(\lambda I - A)} \neq E\right\}$$

est appelé le spectre résiduel .

Definition 18 (Le spectre essentiel) *Soient X un espace de Hilbert et $T : D(T) \subset X \to X$ un opérateur auto-adjoint. Le spectre essentiel noté $\sigma_{ess}(T)$ est le sous ensemble du spectre défini par :*

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda \in \sigma_{ess}(T) \text{ si et seulement si } \ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(T) \\ \text{telle que} : \|u_n\| = 1 \text{ et } \|Tu_n - \lambda u_n\| \to 0 \text{ si } u_n \to 0 \text{ converge faiblement} \end{array}\right\}$$

(La suite u_n est dite singulière).

Definition 19 (Le spectre discret) *On appelle spectre discret de A, noté $\sigma_d(A)$ l'ensemble des valeurs propres isolées de A de multiplicité finie.*

Lemma 20 *(L'identité de la résolvante).* *Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(X)$ alors on a les assertions suivantes*

i) $\forall \lambda \in \rho(A)$, on définit l'opérateur résolvant $R_\lambda(A) \in \mathcal{L}(X)$ par

$$R_\lambda(A) := (\lambda - A)^{-1}.$$

satisfaisant

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)\ R_\lambda(A)\ R_\mu(A)$$

$\forall \lambda,\ \mu \in \rho(A)$.

2i) L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$ et l'application

$$\begin{array}{rcl} \rho(A) & \rightarrow & \mathcal{L}(X) \\ \lambda & \mapsto & R_\lambda(A) \end{array}$$

est continue

3i) L'application $\rho(A) \rightarrow \mathcal{L}(X) : \lambda \mapsto R_\lambda(A)$ est holomorphe

2.5 Quelques propriétés des opérateurs définis sur un espace de Hilbert

2.5.1 L'espace dual d'un espace de Hilbert

Definition 21 *Soit H un espace de Hilbert. On note H^* l'espace de fonctionnelles continues sur H, c'est-à-dire l'espace de formes linéaires continues de H dans $\mathbb{C}$. On appelle H^* le dual topologique de H et on le munit de la norme naturelle*

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|$$

pour toute fonctionnelle $\varphi \in H^*$.

Theorem 22 *(Représentation de Riesz) Pour tout élément $\varphi \in H^*$ il existe un unique vecteur $y \in H$ tel que*

$$\varphi_y(x) = (x,\ y) \text{ pour tout } x \in H$$

de plus

$$\left\|\varphi_y\right\| = \|y\|$$

2.5.2 Spectre d'un opérateur normal

Definition 23 ***(Opérateur normal).*** *Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur linéaire borné $A : H \to H$ est appelé*

- **Normal** si $A^*A = AA^*$.
- **Auto-adjoint** si $A^* = A$.
- **Unitaire** si $A^*A = AA^* = I$.

Donc chaque opérateur auto-adjoint est un opérateur normal.

Lemma 24 ***(Caractérisation des opérateurs normaux).*** *Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $A : H \to H$ un opérateur linéaire borné alors les assertions suivantes sont satisfaites*

i) A est un opérateur unitaire si et seulement si $\|A^*x\| = \|Ax\| = \|x\| \ \forall \ x \in H$.

ii) A est un opérateur normal si et seulement si $\|A^*x\| = \|Ax\| \ \forall \ x \in H$.

Theorem 25 ***(Spectre d'un opérateur normal).****Soit H un espace de Hilbert complexe différent de zéro et $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Alors les assertions suivantes sont satisfaites*

i) $\|A^n\| = \|A\|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\|A\| = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

iii) $\sigma_r(A^*) = \sigma_r(A) = \phi$ et $\sigma_p(A^*) = \left\{ \overline{\lambda} \setminus \lambda \in \sigma_p(A) \right\}$.

2.6 Spectre d'un opérateur auto-adjoint

Soient X et Y deux espaces de Hilbert réels et soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné. Alors

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y^2 = \sup_{\|x\|=1} \langle x,\ T^*Tx \rangle_X \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2$$

et donc

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \langle x,\ T^*Tx\rangle_X = \|T^*T\| \tag{2.2}$$

Theorem 26 *Soit H un espace de Hilbert complexe différent de zéro et $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors on a*

i) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

2i) $\sup \sigma(A) = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle x,\ Ax\rangle$.

3i) $\inf \sigma(A) = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle x,\ Ax\rangle$.

4i) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle x,\ Ax\rangle|$.

Definition 27 *Soient $X,\ Y$ deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(X,\ Y)$. Un nombre réel $\lambda \geq 0$ est appelé une valeur singulière de T si $\lambda^2 \in \sigma(T^*T)$.*

Donc les valeurs singulières de T sont les racines carrées non négatives des valeurs spectrales de l'opérateur auto-adjoint $T^*T : X \to X$. L'équation (2.2) montre que le supremum des valeurs singulières est la norme de T.

CHAPTER 3

QUELQUES TRAVAUX SUR LE MODÈLE DE FRIEDRICHS ET L'OPÉRATEUR DE TRANSPORT

Dans ce chapitre, nous allons donner un rappel succinct sur l'application du modèle de Friedrichs à l'opérateur de Sturm-Liouville et quelques résultats sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations.

3.1 Quelques travaux sur le modèle de Friedrichs

En 1938, K.O. Friedrichs [24] a considéré l'opérateur

$$H = H_0 + \varepsilon V$$

où H_0 est l'opérateur de multiplication par la variable indépendante dans $L^2(-1, 1)$,

$$H_0 f(x) = x f(x), \qquad -1 < x < 1 \tag{3.1}$$

et V est un opérateur intégral

$$V f(x) = \int v(x, y) f(y) \, dy.$$

Le noyau $v\,(x, y)$ est une fonction continue, satisfaisant la condition de Hölder et vérifiant

$$v(-1, y) = v(1, y) = v(x, -1) = v(x, 1) = 0.$$

L'auteur a démontré que pour un ε petit, les opérateurs H_0, H sont unitairement équivalents, c'est-à-dire qu'il existe U tel que

$$U^*U = UU^* = E, \qquad HU = UH_0$$

Ensuite, en 1948 dans [25] l'auteur a généralisé ce modèle pour l'intervalle non borné et pour les fonctions qui peuvent prendre des valeurs dans un espace de Hilbert auxiliaire.

En 1964 L.D. Faddeev [23] a considéré le cas auto-adjoint mais sans la condition que ε soit petit et que la condition de Hölder $\geq \dfrac{1}{2}$, il a démontré que l'opérateur perturbé H possède un nombre fini de valeurs propres et que

$$U^*U = E, UU^* = E - P, \qquad \varphi(H)U = U\varphi(H_0)$$

où P est la projection sur le sous espace engendré par les éléments propres et φ une certaine fonction bornée.

En 1970 (voir [50]), V.E Ljancé a étudié les projecteurs propres de l'opérateur

$$T = S + V$$

où V est une perturbation régulière. En particulier, ici on décrit les vecteurs généralisés de l'opérateur T et on exprime la dimension de chacun de leurs sous-espaces racines en termes de la multiplicité de la valeur propre (singularité spectrale) comme racine de la perturbation déterminante correspondante.

Nous rappelons que les "projecteurs propres" $P_{\sigma_\pm}$ correspondant à une singularité spectrale σ ont été définis comme opérateurs agissant de l'espace des éléments réguliers à son espace conjugué.

Plus bas, on construit une extension linéaire de l'opérateur $P_{\sigma_\pm}$ qui agit dans un espace simple et satisfait la condition $P_{\sigma_\pm}^2 = P_{\sigma_\pm}$, c-à-d, il est réellement un projecteur.

Dans le cas d'une perturbation complètement régulière, il découle de l'équation de Parseval que des fonctions suffisamment lisses dans H sont déterminées d'une manière unique par leur transformée de Fourier F sur le spectre continu et leurs coefficients de Fourier correspondant au spectre discret.

Ceci se produit, par exemple, dans le cas où il y a une singularité spectrale qui n'est pas une valeur propre.

En 1997, dans Cheremnikh E.V.[12], a repris ce modèle de Friedrichs pour l'opérateur de Sturm-Liouville mais dans l'espace $L^2(0,+\infty)$ sous des conditions qui le permettent d'étudier la transformée de Fourier d'un certain opérateur de Sturm-Liouville. Il considère l'espace $H = L^2_\rho(0,+\infty)$ et l'opérateur

$$T = S + V$$

où S est l'opérateur non perturbé défini par $S\varphi(\tau) = \tau\varphi(\tau), \tau > 0$ de domaine maximal $D(S)$ et la perturbation admet la factorisation $V = A^*B$ où les opérateurs A, B agissent dans un espace de Hilbert auxiliaire G tels que

$$A\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)\,\alpha(s)\,\rho(s)\,ds, \qquad B\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)\,\beta(s)\,\rho(s)\,ds \tag{3.2}$$

où $\alpha(s)$, $\beta(s) \in G$ sont certaines fonctions vectorielles, et $\|.\|$, $\|.\|_H$ sont les normes dans G, H.

On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites

A_1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{\rho(s)(1+s)} < \infty;$

A_2. Les fonctions $\rho(s)$, $\alpha(s)$, $\beta(s)$ admettent n dérivées continues pour un certain $n \geq 1$;

A_3. $\alpha'(s)$, $\beta'(s)$, $\displaystyle\left(\frac{1}{\rho(s)}\right)' = o(1)$, $\alpha(s)$, $\beta(s) = o\left(\frac{1}{\ln s}\right)$, $s \to \infty$;

A_4. $\sup\limits_{(0,\infty)} \rho(s)\,\|\alpha(s)\| < \infty$, $\sup\limits_{(0,\infty)} \rho(s)\,\|\beta(s)\| < \infty$;

A_5. Pour tout $\varphi \in L^2_\rho$ les intégrales (3.2) convergent dans le sens de la norme de G et définissent les opérateurs bornés de $L^2_\rho \to G$ avec $R(A)$, $R(B)$ denses dans G.

L'auteur a besoin de la fonction $K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*$ où $S_\zeta = (S-\zeta)^{-1}$, cette fonction est connue dans la théorie des opérateurs $T = S + A^*B$

Soit $\Omega_+(\delta) = \{\zeta : |\zeta| \leqslant \delta,\ Im\zeta > 0,\ |\zeta - \sigma| < \delta\}$ et $F_+(\sigma) = \lim\limits_{\tau \searrow 0} F(\sigma + i\tau)$ pour une fonction analytique $F(s)$ dans $\Omega_+(\delta)$.

$$F(\zeta) = \int\limits_a^b \frac{f(s)}{s-\zeta} ds, f \in C^1[a,b], \zeta \notin [a,b].$$

Lemma 28 *Soient* $f(s), f'(s), s > 0$ *sont des fonctions différentiables et* $\dfrac{F(s)}{1+s} \in L^1(0,\infty)$, $f(s) = o\left(\dfrac{1}{\ln s}\right)$, $f'(s) = o(1)$, $s \longrightarrow \infty$. *Alors la fonction*

$$F(\zeta) = \int\limits_0^\infty \frac{f(s)}{s-\zeta} ds$$

a la limite $\lim\limits_{|\zeta| \longrightarrow \infty} F(\zeta) = 0$ *uniformément lorsque* $\arg\zeta \in [a,b]$.

Considérons de nouveau, $S_\zeta = (S-\zeta)^{-1}, \zeta \notin [0,\infty)$ et $K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*$. Il est évident que $A^*c(s) = (c, \alpha(s))$, où $(.,.)$ est le produit scalaire dans G. Alors

$$(K(\zeta)c, d) = (c,d) + \int\limits_0^\infty \frac{(c,\alpha(s))(\beta(s),d)}{s-\zeta} \rho(s) ds, \qquad \zeta \notin [0,\infty)$$

Nous posons $c \in D(K_\pm(\sigma))$ si la fonctionnelle $d \longrightarrow (K(\sigma)c,d)_\pm$ est bornée dans G et nous définissons $K_\pm(\sigma) : G \longrightarrow G$ par la relation

$$(K_\pm(\sigma)c, d) = (K(\sigma)c, d)_\pm, c, d \in G.$$

1. $\lim\limits_{\zeta \longrightarrow \sigma \pm i0} \|K(\zeta) - K_\pm(\sigma)\| = 0$ *et les opérateurs* $K(\zeta) - 1, \zeta \notin [0,\infty)$ *et* $K_\pm(\sigma) - 1, \sigma > 0$, *sont complètement continus.*

2. $\lim\limits_{\zeta \longrightarrow \infty} \|K(\zeta) - 1\| = 0$ *uniformément pour* $\arg\zeta \in [0, 2\pi]$.

L'auteur passe à l'étude du modèle de Friedrichs de l'opérateur maximal, il introduit une notion abstraite de l'opérateur maximal.

Definition 29 *L'opérateur $\tilde{S}$ est appelé maximal correspondant à l'opérateur S si*

$$D(\tilde{S})=\left\{\varphi\in H:\exists c=c(\varphi):\int\limits_{0}^{\infty}\left|\tau\varphi(\tau)+c(\varphi)\right|^{2}\rho(\tau)d\tau<\infty\right\}$$

et

$$\tilde{S}\varphi(\tau)=\tau\varphi(\tau)+c(\varphi)$$

évidemment, pour $\varphi\in D(\tilde{S})$ le nombre $c(\varphi)$ est unique et en plus

$$\varphi\in D(S)\Leftrightarrow c(\varphi)=0.$$

Dans ce travail, l'auteur a étudié les valeurs limites de la résolvante dans le spectre, il suppose que les opérateurs A,B possèdent la même fermeture des domaines de valeurs $G\equiv\overline{R(A)}=\overline{R(B)}\subseteq G_{0}$. Il suppose aussi que les intégrales (3.2) convergent dans l'espace G et définissent les opérateurs bornés $A,B:L_{\rho}^{2}\rightarrow G$. Il suppose que les fonctions $\rho(s),\alpha(s)$, $\beta(s)$, ont des dérivées continues dans l'intervalle $(0,\infty)$ jusqu'un ordre $n\geq2$, pour $0<s<\infty$ on a

$$0<\rho\left(s\right)<Ms^{\gamma_{o}},\left|\rho^{(j)}\left(s\right)\right|<\frac{M}{s^{\gamma_{j}}},j=1,2,...$$

pour $s>1$ on a

$$\left\|\alpha^{(j)}\left(s\right)\right\|,\left\|\beta^{(j)}\left(s\right)\right\|\leq\frac{M}{s^{\delta_{j}}},\quad j=0,1,2,\quad M=const$$

de plus

$$\sup_{(0,\infty)}\rho\left(s\right)\left\|\alpha\left(s\right)\right\|<\infty,\ \sup_{(0,\infty)}\rho\left(s\right)\left\|\beta\left(s\right)\right\|<\infty$$

D'après la proposition suivante le domaine de définition de la résolvante $\tilde{S}_{\sigma}=\left(\tilde{S}-\sigma\right)^{-1}$ contient la variété $C^{1}\left[0,\infty\right)\cap H$ pour chaque $\sigma\in[0,\infty)$.

Proposition 30 *1) L'ensemble image de l'opérateur* $\tilde{S}-\sigma,\sigma\geq 0$ *est*

$$R\left(\tilde{S}-\sigma\right)=\left\{\varphi\in H\middle|\exists\tilde{c}\left(\varphi\right)\in C:\frac{\varphi\left(s\right)-\tilde{c}\left(\varphi\right)}{s-\sigma}\in H\right\}\tag{3.3}$$

et

$$\tilde{S}_{\sigma}\varphi\left(s\right)=\frac{\varphi\left(s\right)-\tilde{c}\left(\varphi\right)}{s-\sigma},\varphi\in R\left(\tilde{S}-\sigma\right)\tag{3.4}$$

2) $\tilde{S}_{\sigma}\varphi=\Re_{\sigma},\varphi\in C^{1}\left[0,\infty\right)\cap H\subset D\left(\tilde{S}_{\sigma}\right)$, *où on note*

$$\Re_{\sigma}\varphi\left(s\right)\equiv\frac{\varphi\left(s\right)-\varphi\left(\sigma\right)}{s-\sigma}\tag{3.5}$$

On suppose que les opérateurs

$$N\left(\sigma\right)=1+B\Re_{\sigma}A^{*},\tilde{N}\left(\sigma\right)=1+A\Re_{\sigma}B^{*}\tag{3.6}$$

possèdent des opérateurs inverses pour tout $\sigma>0$, excepté, peut être, un ensemble fini $\Lambda_{\imath}$.

On a

$$\tilde{T} = \tilde{S} + A^{*}B,\ D\left(\tilde{T}\right) = D\left(\tilde{S}\right) \tag{3.7}$$

On considère l'opérateur

$$\tilde{T}_{\sigma}\varphi \equiv \left(\tilde{T} - \sigma\right)^{-1}\varphi = \tilde{S}_{\sigma}\varphi - \tilde{S}_{\sigma}A^{*}N\left(\sigma\right)^{-1}B\tilde{S}_{\sigma}\varphi, \varphi \in D\left(\tilde{S}_{\sigma}\right), \sigma \notin \Lambda_{o} \tag{3.8}$$

par analogie à

$$T_{\zeta}\varphi \equiv \left(T - \zeta\right)^{-1}\varphi = S_{\zeta}\varphi - S_{\zeta}A^{*}K\left(\zeta\right)^{-1}BS_{\zeta}\varphi, \varphi \in H, \zeta \notin \sigma\left(T\right), \tag{3.9}$$

où

$$S_{\zeta} \equiv \left(S - \zeta\right)^{-1}, K\left(\zeta\right) \equiv 1 + BS_{\zeta}A^{*}, \zeta \notin [0,\infty) \tag{3.10}$$

Les valeurs limites de la fonction (sur le demi-axe $(0,\infty)$) sont notées par

$$K_{\pm}\left(\sigma\right) = \lim_{\tau\downarrow 0} K\left(\sigma + i\tau\right) \tag{3.11}$$

Par analogie, on note par $\left(T_{\sigma}\varphi,\psi\right)_{\pm}$ les valeurs limites de la forme bilinéaire $\left(T_{\zeta}\varphi,\psi\right)_{H}$.

Introduisant des notations suivantes pour les fonctions vectorielles

$$\alpha_{o}\left(\sigma\right) = V.p.\int_{o}^{\infty}\frac{\alpha\left(s\right)\rho\left(s\right)}{s-\sigma}ds, \beta_{o}\left(\sigma\right) = V.p.\int_{o}^{\infty}\frac{\beta\left(s\right)\rho\left(s\right)}{s-\sigma}, \sigma > 0,$$

et pour les fonctions scalaires

$$P\left(\sigma\right) = \left(N\left(\sigma\right)^{-1}\beta\left(\sigma\right),\alpha\left(\sigma\right)\right), \tilde{P} = \left(\beta\left(\sigma\right),\tilde{N}\left(\sigma\right)^{-1}\alpha\left(\sigma\right)\right)$$

$$Q\left(\sigma\right) = 1 + \left(N\left(\sigma\right)^{-1}\beta_{o}\left(\sigma\right),\alpha\left(\sigma\right)\right), \tilde{Q}\left(\sigma\right) = 1 + \left(\beta\left(\sigma\right),\tilde{N}\left(\sigma\right)^{-1}\alpha_{o}\left(\sigma\right)\right)$$

$$\delta_{\pm}(\sigma) = Q(\sigma) \pm \pi i \rho(\sigma) P(\sigma), m_{\pm}(\sigma) = \pm \frac{\pi i \rho(\sigma)}{\tilde{Q}(\sigma)\,\delta_{\pm}(\sigma)},$$

et ainsi que pour les fonctionnelles

$$(a_\sigma, \psi) = \overline{\psi(\sigma)} - \left(\beta(\sigma), \tilde{N}(\sigma)^{-1} A\Re_\sigma \psi\right)$$

$$(\varphi, b_\sigma) = \varphi(\sigma) - \left(N(\sigma)^{-1} B\Re_\sigma \varphi, \alpha(\sigma)\right)$$

$$(R_\sigma, \psi) = \frac{1}{Q(\sigma)}\left[V.p.\int_o^\infty \frac{\overline{\psi(s)}\rho(s)}{s-\sigma}ds - \left(\Re_\sigma A^* N(\sigma)^{-1}\beta_o(\sigma), \psi\right)_H\right]$$

où l'expression $(\cdot,\cdot)$ signifie le produit scalaire dans l'espace G. On note par $\Lambda \subset (0,\infty)$ l'ensemble des valeurs σ, pour lesquelles les fonctionnelles introduites et les fonctions $m_{\pm}(\sigma)$ existent.

Theorem 31 *Soit $\varphi, \psi \in C^1[0,\infty) \cap H$, alors*

$$(T_\sigma\varphi, \psi)_{\pm} = (\varphi, b_\sigma)\left[(a_\sigma, \psi)\, m_{\pm}(\sigma) + (R_\sigma, \psi)\right] + \left(\tilde{T}_\sigma \varphi, \psi\right)_H \qquad (3.12)$$

où $\sigma \in \Lambda$.

Il est facile de savoir que $a_\sigma(b_\sigma)$ sont des fonctions propres de T (T^*) et R_σ est la fonction propre de $\widetilde{T}$. Les valeurs $m_{\pm}(\sigma)$ ne sont pas définies comme les valeurs limites d'une fonction, mais quand même, la relation (3.12) peut être appelée formule de séparation de branchement. L'essentiel est qu'après avoir séparé dans $(T_\sigma\varphi,\psi)_{\pm}$ quelques expressions qui contiennent des fonctionnelles propres de $T, \widetilde{T}$, on obtient la forme bilinéaire de la résolvante d'une extension $\widetilde{T}$ de l'opérateur T.

Pour les fonctions sous la forme

$$f(\sigma) = \sum_{j,k} \frac{a_{-k,j}}{(\sigma - \sigma_j)^k} + f_o(\sigma), f_o \in C(0,\infty)$$

on va utiliser les notations de résidu $\underset{\sigma=\sigma_j}{Res} f(\sigma) = a_{-1,j}$ et de l'opérateur de projection $\ddot{I} : f \to f_o$, la valeur σ_j sera appelée pôle généralisé d'ordre correspondant de la fonction $f(\sigma)$.

Definition 32 *Les pôles généralisés des fonctions* $\sigma \to (T_\sigma \varphi, \psi)_\pm$, $\varphi, \psi \in C^\infty[0, \infty), \sigma > 0$ *sont appelés singularités spectrales de l'opérateur* T. *Le plus grand par rapport à* φ, ψ *l'ordre du pôle est appelé ordre de la singularité spectrale. Le point* $\sigma = 0$ *est une singularité spectrale si le plus grand entier* m, *tel que la fonction* $\sigma^m / \det K_\pm(\sigma)$ *est bornée* $\sigma \to 0$ *sera positif.*

En 2005, dans le travail de F. Diaba et E. V. Cheremnikh [18], les auteurs ont considéré dans le l'espace $L^2(D)$ où $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$, l'opérateur

$$(Lf)(x, \mu) = i\mu f_x(x, \mu) + c_0(x) \int_{-1}^{1} f(x, \mu) d\mu, \quad x \in \mathbb{R}, \ \mu \in (-1, 1) \tag{3.13}$$

où le potentiel $c_0(x)$ vérifie la condition

$$|c_0(x)| \leq C e^{-\varepsilon |x|}, \ \varepsilon > 0, \ x \in \mathbb{R}$$

Ils ont étudié le spectre de cet opérateur, pour cela ils commencent par transformer l'opérateur initial pour obtenir le modèle de Friedrichs. En appliquant la transformation de Fourier

$$(Ff)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t) dt, t \in \mathbb{R}.$$

Il résulte

$$(FLf)(x) = \tau \mu u(\tau, \mu) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} c_0(x) \int_{-1}^{1} f(t, \mu) e^{-ix\tau} dx d\mu$$

pour la suite on a besoin les notations.

3.2 Notations

Soit l'espace H défini par

$$H = \left\{ \varphi(s,\mu) : \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^{1} |\varphi(s,\mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu < \infty \right\}$$

L'opérateur $Z : L^2(\mathbb{R}) \to H$, son adjoint

$$(Zc)(s,\mu) = c\left(\frac{s}{\mu}\right), c \in L^2(\mathbb{R}), (Z^*\varphi) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau\mu,\mu) d\mu$$

Et le changement de variables

$$(s,\mu) \to (\tau,\mu) \quad \left\{ \begin{array}{c} \tau = \frac{s}{\mu}, \mu \neq 0 \\ \mu = \mu \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{c} s = \tau\mu \\ \mu = \mu \end{array} \right\}$$

Ce changement de variables définit l'opérateur $F_0 : L^2(D) \to H$ par

$$(F \circ u)(s,\mu) = u(\frac{s}{\mu},\mu)$$

Il a été supposé que le potentiel est factorisé de façon que

$$C_0(x) = C_{01}(x) C_{02}(x), \quad |C_{01}(x)| = |C_{02}(x)| = \sqrt{|C_0(x)|}$$

Les opérateurs $C_{01}, C_{02} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ sont des opérateurs de multiplication par les fonctions respectivement $c_{01}(x), c_{02}(x)$

$$(C_{01}\varphi)(x) = c_{01}(x)\varphi(x), (C_{02}\varphi)(x) = c_{02}(x)\varphi(x)$$

Le modèle de Friedrichs sera défini dans l'espace H comme une certaine perturbation de l'opérateur de multiplication par la variable indépendante

$$\begin{aligned} S &: H \to H \\ (S\varphi)(\tau,\mu) &= \tau\varphi(\tau,\mu), \tau \in \mathbb{R}, \mu \in (-1,1) \end{aligned}$$

avec le domaine de définition maximal $D(S)$.

Lemma 33 *Soit $L : L^2(D) \to L^2(D)$ l'opérateur de domaine de définition maximal défini par* (3.13)*. Alors*

$$ULU^{-1} = S + V : H \to H$$

où l'opérateur

$$\begin{aligned} (V\varphi)(s,\mu) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu'}{|\mu'|}\int_{\mathbb{R}}\tilde{c}_0(x)\left(\frac{s'}{\mu'}-\frac{s}{\mu}\right)\varphi(s',\mu')ds' \\ \tilde{c}_0(y) &= \int_{\mathbb{R}} c_0(x)e^{ixy}dx \end{aligned}$$

est borné dans H et admet la factorisation $V = A^*B$ avec $A, B : H \to L^2(\mathbb{R})$ où

$$A = C_{01}F^{-1}Z^*, B = C_{02}F^{-1}Z^* \tag{3.14}$$

Definition 34 *On appelle l'opérateur*

$$T = S + V, V = A^*B \tag{3.15}$$

modèle de Friedrichs dans l'espace H.

Corollary 35 *On obtient*

$$L = U^{-1}TU$$

où l'opérateur $L : L^2(D) \to L^2(D)$ (voir (3.13)*) est unitairement équivalent au modèle de Friedrichs* (3.15) .

En 2010, Comme suite de l'article précédent Diaba F. et Cheremnikh E.V., Ivasyk G. V.[15] ont étudié les opérateurs d'évolution. Ils ont considéré dans l'espace $L^2(D), D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ l'opérateur de transport

$$Lf = -i\mu\frac{\partial f}{\partial x} + a(x)b_1(\mu)\int_{-1}^{1} b(\mu')f(x,\mu')d\mu'. \tag{3.16}$$

avec le domaine de définition maximal $D(L)$ sous les conditions suivantes:
Il existe des constantes $M > 0$, $\epsilon > 0$ telles que

$$|a(x)| < Me^{-\epsilon|x|}, x \in \mathbb{R} \tag{3.17}$$

et les fonctions $b(\mu), b_1(\mu)$ admettent un prolongement analytique de l'intervalle $(-1, 1)$ dans le cercle $|z| < 1 + \epsilon$. Notons que $b_1(\mu) \equiv 1$ et $b_0(\mu) \equiv b(\mu) \equiv 1$.

Ils ont étudié l'équation d'évolution de transport suivante

$$\begin{cases} \dot{u} = iLu, t > 0 \\ u \mid_{t=0} = u(0), u(0) \in D(L) \end{cases} \tag{3.18}$$

et ils ont obtenu le terme principal du comportement asymptotique des solutions de ces équations correspondant aux valeurs propres de l'opérateur L. Ils supposent que l'opérateur L n'a pas des singularités spectrales.

3.2.1 Modèle de Friedrichs de l'opérateur de transport

On transforme l'opérateur L en modèle de Friedrichs.

Soit H l'espace de Hilbert des fonctions $\varphi(s, \mu)$, $(s, \mu) \in D$, $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ avec la norme

$$\|\varphi\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |\varphi(s, \mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu.$$

Soit l'opérateur $F_0 : L^2(D) \to H$, où

$$(F_0 u)(\tau, \mu) = u\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu\right), u \in L^2(D), \tau \in \mathbb{R} \tag{3.19}$$

et l'opérateur $Z : L^2(\mathbb{R}) \to H$, où

$$(Zc)(\tau, \mu) = c\left(\frac{\tau}{\mu}\right), c \in L^2(\mathbb{R}). \tag{3.20}$$

On peut vérifier que

$$\|F_0 u\|_H = \|u\|_{L^2(D)},$$

que F_0 est un opérateur unitaire et que l'opérateur Z est borné, à savoir $\|z\| \le \sqrt{2}$. La transformation de Fourier est notée par

$$(Ff)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-is\tau} f(\tau) d\tau, s \in \mathbb{R}$$

dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et dans l'espace $L^2(D)$ aussi.

Maintenant, on applique à l'égalité (3.16) la transformation de Fourier par rapport à la variable x, alors

$$(FLf)(\tau, \mu) = \tau\mu u(\tau, \mu) + \frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-1}^{1} a(x)b(\mu')f(x,\mu')d\mu' \right) e^{-ix\frac{s}{\mu}} dx,$$

où $u = Ff$.

Ensuite, on applique l'opérateur F_0 (voir (3.19)), c'est-à-dire la substitution $\tau = \dfrac{s}{\mu}$ alors

$$(F_0FLf)(s, \mu) = su(\frac{s}{\mu}, \mu) + \frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-1}^{1} a(x)b(\mu')f(x,\mu')d\mu' \right) e^{-ix\frac{s}{\mu}} dx$$

Notons par $\varphi(s, \mu) = u\left(\dfrac{s}{\mu}, \mu\right)$ où $\varphi = F_0 u = F_0 F f$. Soit $\dfrac{s}{\mu} = \tau$, alors

$$u(\tau, \mu) = \varphi(\tau\mu, \mu) = \left(F_0^{-1}\varphi\right)(\tau, \mu)$$

. C'est pourquoi

$$f(x, \mu) = \left(F^{-1}F_0^{-1}\varphi\right)(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\tau\mu, \mu) e^{i\tau x} d\tau.$$

Le changement de variable $s' = \mu\tau$ (les cas $\mu > 0$ et $\mu < 0$) donne

$$f(x, \mu') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(s', \mu') e^{i\frac{s'}{\mu'}} \frac{ds'}{|\mu'|}$$

Finalement, on obtient

$$\left(F_0FLF^{-1}F_0^{-1}\varphi\right)(s,\mu) = s\varphi\,(s,\mu) + V\varphi(s,\mu), \tag{3.21}$$

où

$$V\varphi(s,\mu) = \frac{b_1(\mu)}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1} a(x)b(\mu')\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\,(s',\mu')\,e^{i\dfrac{s'}{\mu'}}\right)\frac{d\mu'}{|\mu'|}e^{-ix\dfrac{s}{\mu}}dx \tag{3.22}$$

On choisit une certaine factorisation pour la fonction $a(x)$ telle que

$$a(x) = \overline{a_1(x)}a_2(x), |a_1(x)| = |a_2(x)| \tag{3.23}$$

Soit $G = L^2(\mathbb{R})$ alors $V = A^*B$ (voir (3.22)), où les opérateurs $A, B : H \to G$ sont donnés par les expressions

$$\begin{cases} A^*c(s,\mu) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}b_1(\mu)\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}}\overline{a_1(x)}c(x)e^{-ix\dfrac{s}{\mu}}dx \\ B\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}a_2(x)\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1} b(\mu')\varphi\,(s',\mu')\,e^{i\dfrac{s'}{\mu'}}\dfrac{d\mu'}{|\mu'|}ds' \end{cases} \tag{3.24}$$

Evidemment, l'opérateur $U = F_0F : L^2(D) \to H$ (voir (3.19)) est unitaire. Alors, le théorème suivant est prouvé.

Theorem 36 *Soit* $L : L^2(D) \to L^2(D)$ *l'opérateur avec le domaine de la définition maximal donné par l'expression* (3.16). *Alors*

$$ULU^{-1} = T : H \to H$$

où

$$T = S + V, V = A^*B$$

$(S\varphi)(\tau,\mu) \equiv \tau\varphi(\tau,\mu), \tau \in \mathbb{R}, \mu \in (-1,1)$ *et les opérateurs* A, B *agissent de* H *vers* $G = L^2(\mathbb{R})$. (*voir* (3.24)) .

Lemma 37 *Les opérateurs $A, B : H \to G$, à savoir*

$$\left\{\begin{array}{l} A\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} a_1(x) \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} b_1(\mu)\varphi(s,\mu)\, e^{ix\frac{s}{\mu}} \frac{d\mu}{|\mu|} ds \\ B\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} a_2(x) \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} b(\mu)\varphi(s',\mu)\, e^{ix\frac{s}{\mu}} \frac{d\mu}{|\mu|} ds \end{array}\right. \tag{3.25}$$

sont bornés.

Proposition 38 *Si $a(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$ et $b_1(\mu) = b(\mu), \mu \in (-1, 1)$, alors le modèle de Friedrichs $T = S + V$ est un opérateur auto-adjoint $T^* = T$.*

3.2.2 Spectre de modèle de Friedrichs

On considère la résolvante de l'opérateur

$$T = S + A^*B$$

L'équation

$$(T - \zeta)\,\varphi = \psi, \psi \in H, \zeta \notin \mathbb{R},$$

prend la forme

$$(S - \zeta)\,\varphi + A^*B\varphi = \psi.$$

Notons

$$S_\zeta = (S - \zeta)^{-1}, T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}.$$

Comme $\zeta \notin \mathbb{R}$, alors l'opérateur S_ζ existe et est borné et l'équation prend la forme

$$\varphi + S_\zeta A^* B\varphi = S_\zeta \psi \tag{3.26}$$

En appliquant l'opérateur B, on obtient $(1 + BS_\zeta A^*)\, B\varphi = BS_\zeta\psi$. Soit

$$K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*, \zeta \notin \mathbb{R} \tag{3.27}$$

Alors pour l'expression $B\varphi$ dans (3.26) , on obtient

$$B\varphi = K^{-1}(\zeta)BS_\zeta\psi.$$

En prenant en considération la bornitude des opérateurs A et B, on a la proposition suivante.

Proposition 39 *Si l'opérateur $K(\zeta)$, $\zeta \notin \mathbb{R}$ a un opérateur inverse borné $K(\zeta)^{-1}$, alors la valeur ζ appartient à l'ensemble résolvant de l'operateur T et*

$$T_\zeta = S_\zeta - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} BS_\zeta \tag{3.28}$$

Lemma 40 *L'opérateur $K(\zeta)$ (voir (3.27)) admet la représentation*

$$((K(\zeta) - 1)\, c)\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} k(x, y, \zeta)c(y)dy, \zeta \notin \mathbb{R}, \tag{3.29}$$

où

$$k(x, y, \zeta) = \frac{1}{2} a_2(x)\overline{a_1(y)} I(x - y, \zeta$$

et

$$I(u, \zeta) = \int\limits_{\mathbb{R}} l(\tau, \zeta)e^{iu\tau}d\tau, l(\tau, \zeta) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{b(\mu')b_1(\mu')}{\tau\mu' - \zeta} d\mu' \tag{3.30}$$

Theorem 41 *L'opérateur $K(\zeta) - 1 : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \zeta \notin \mathbb{R}$ est compact et*

$$\|K(\zeta) - 1\| \to 0, |\zeta| \to \infty$$

uniformément dans le domaine $|\mathrm{Im}\, \zeta| > 0$ pour chaque $\nu > 0$.

Theorem 42 *L'opérateur $K(\zeta) - 1$ admet un prolongement analytique l'opérateur $K_\pm(\zeta) - 1$ au-dessus des demi-axes $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$ et*

$$\|K_\pm(\zeta) - 1\| \to 0, |\zeta| \to \infty$$

uniformément dans le domaine $|\mathrm{Im}\, \zeta| < \epsilon$ pour chaque $\epsilon_1 < \dfrac{\epsilon}{2}$.

3.3 Construction du semi groupe $\exp(itT)$

Il est connu que le problème de Cauchy $\dot{u} = Mu$, $u\mid_{t=0} = u(0)$, où l'opérateur M est tel que le demi plan $\operatorname{Re}\zeta > \gamma > 0$ appartient à son ensemble résolvant, admet sous une certaine condition près la représentation de la solution

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\zeta t}R(\zeta, M)u(0)d\zeta, \quad R(\zeta, M) = (M-\zeta)^{-1}$$

Considérons le problème

$$\begin{cases} \dot{u} = iTu, t > 0 \\ u\mid_{t=0} = u(0), u(0) \in D(T) \end{cases} \tag{3.31}$$

Notons $\zeta = \gamma + i\theta, -\infty < \theta < \infty$, alors $(iT-\zeta)^{-1} = -iT_{\theta-i\gamma}$.

Au lieu de cela, une vérification difficile d'une certaine condition suffisante sur l'opérateur T, on propose directement de choisir la solution sous la forme

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(\gamma+i\theta)t}T_{\theta-i\gamma}u(0)d\theta \tag{3.32}$$

Notons par

$$h(t,\theta) = e^{(\gamma+i\theta)t}$$

et l'élément $u(0) = \varphi(\tau,\mu) \in H$ simplement par $u(0) = \varphi$. Alors, on doit prouver que l'opérateur

$$U(t)\varphi = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t,\theta)T_{\theta-i\gamma}d\theta, t > 0 \tag{3.33}$$

définit le semi groupe correspondant au problème (3.31).

Theorem 43 *Si $\varphi \in D(T)$ alors l'intégrale (3.33) admet la représentation*

$$U(t)\varphi = \varphi - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t,\theta)}{\theta - i\gamma} T_{\theta - i\gamma} T\varphi d\theta, t > 0 \tag{3.34}$$

où l'intégrale converge au sens de la norme de H.

Lemma 44 *Si $\varphi \in D(T)$ alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t,\theta)}{\theta - i\gamma} T_{\theta - i\gamma} T\varphi d\theta = T\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t,\theta)}{\theta - i\gamma} T_{\theta - i\gamma}\varphi d\theta \tag{3.35}$$

Lemma 45 *Si $\varphi \in H$, alors*

$$s - \lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta - i\gamma} \frac{\Delta h}{\Delta t} T_{\theta - i\gamma}\varphi d\theta = i\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\theta) T_{\theta - i\gamma} d\theta \tag{3.36}$$

Theorem 46 *Let $\varphi \in D(T)$, alors*

$$U'(t)\varphi = iTU(t)\varphi, t > 0, \tag{3.37}$$

où $U'(t)$ signifie la dérivée forte.

Theorem 47 *Soit $\varphi \in D(T)$, alors*

$$\lim_{t \to 0} \|U(t)\varphi - \varphi\| = 0 \tag{3.38}$$

Theorem 48 *Le problème*

$$\begin{cases} \dot{u} = iTu, t > 0 \\ u \mid_{t=0} = \varphi, \quad \varphi \in D(T) \end{cases}$$

a une solution unique $u(t) = U(t)\varphi$, donnée par le semi groupe

$$U(t)\varphi = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\gamma + i\theta)t} T_{\theta - i\gamma}\varphi d\theta$$

En 2014, F. Diaba, A. Zemmouri, E. V. Cheremnikh [19] ont étudié l'opérateur de Sturm-Liouville perturbé par un opérateur intégral, défini par l'expression :

$$Ly = -y'' + q(x)y(x - \Delta), -\infty < x < \infty, x \in (-\infty, \infty)$$

où $q(x)$ est une fonction à valeurs complexes qui satisfait la condition

$$|q(x)| \leq C \exp(-\varepsilon |x|), \varepsilon > 0, C = const, x \in (-\infty, \infty)$$

Ils ont trouvé la décomposition spectrale de l'opérateur perturbé sur l'axe tout entier en utilisant le modèle de Friedrichs.

Le résultat essentiel établit l'existence du spectre ponctuel de l'opérateur de Sturm-Liouville et qui est fini. Ce résultat est donné par:

Lemma 49 *le point unique $\zeta = 0$ peut être le point d'accumulation du spectre continu de l'opérateur L.*

Theorem 50 *Supposons que les conditions*

$1-$ *s'il existe $N > 0$ tel que*

$$\operatorname{supp} q(x) \subset [-N, N] \tag{3.39}$$

$2-$

$$C(N) \|\sqrt{q}\|^2 < 1 \tag{3.40}$$

sont vérifiées où

$$C(N) = \frac{1}{2} \sup_{|s|,|t|<N} \left| \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left[\exp\left(i|s-t-\Delta|\sqrt{\zeta} \right) - 1 \right] \right|, \quad |\sqrt{\zeta}| < a \quad \textit{est finie}$$

Et

$$\left((1 + Q(0))^{-1} \overline{q}_1, q_2 \right) \neq 0 \tag{3.41}$$

où l'opérateur $Q(0)$ est donné par

$$Q(0)c(s) = -\frac{1}{2} q_1(s) \int_{-\infty}^{\infty} c(t) q_2(t) |s - t - \Delta| dt$$

Alors il existe a_1 tel que le cercle $|\zeta| < a_1$ ne contient pas un point du spectre continu de l'opérateur L.

D'après les conditions (3.39), (3.40) et (3.41), l'opérateur L a un spectre ponctuel fini.

En 2016, LARRIBI N., DIABA F. et CHEREMNIKH E.V. [20] ont étudié le spectre ponctuel d'un opérateur de transport avec un potentiel matriciel 2×2, défini par: $L : L^2(D, \mathbb{C}^2) \to L^2(D, \mathbb{C}^2)$

$$\begin{cases} L : L^2(D, \mathbb{C}^2) \to L^2(D, \mathbb{C}^2) \\ Lu = -i\mu\frac{\partial u}{\partial x} + c(x)\int\limits_{-1}^{1} u(x, \mu')d\mu', \end{cases}$$

dans l'espace $L^2(D, \mathbb{C}^2)$, où $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$, avec un domaine de définition maximal et un potentiel matriciel $c(x)$ des fonctions complexes qui décroit exponentiellement défini par:

$$c(x) = \begin{pmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

Ils ont utilisé un modèle technique appelé modèle de Friedrichs et la transformée de Fourier appliquée à l'opérateur de transport, où ils montrent que l'opérateur de transport est unitairement équivalent au modèle de Friedrichs.

Ceci leur permet d'étudier directement le spectre ponctuel de l'opérateur à l'aide de la résolvante au lieu des calculs compliqués du modèle fonctionnel.

Ils ont donné quelques conditions suffisantes pour que le spectre ponctuel soit fini.

CHAPTER 4

QUELQUES TRAVAUX SUR LA FONCTION DE WEYL POUR L'OPÉRATEUR DE STURM-LIOUVILLE NON AUTO-ADJOINT

Il existe de nombreux travaux concernant des problèmes avec des paramètres spectraux dans la condition aux limites. Une approche laquelle a été développée dans [39] et basée sur la notion fondamentale d'une fonction spectrale contient divers problèmes avec paramètres et sans paramètres tous les deux dans la condition aux limites. Quelques références aux problèmes avec un paramètre spectral dans la condition aux limites (spectre discret, etc.) peuvent être trouvées dans [5].

E. V. CHEREMNIKH.[14] a considéré un exemple simple d'un opérateur de Sturm-Liouville sur la demi-droite avec un potentiel trivial et une condition aux limites non locale variable. Le but du travail est de montrer que le problème aux limites admet maintenant une condition aux limites locale, mais cette condition contient une fonction rationnelle du paramètre spectral. Les pôles du prolongement analytique de la résolvante sont essentiels ici.

4.1 Problème non local de Sturm-Liouville avec un potentiel trivial

L'auteur a considéré le problème

$$\begin{cases} -v'' - \zeta v = u, & x > 0 \\ v(0) + (v,\ \eta)_{L^2(0,\ \infty)} = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

$u(x),\ \eta(x)$ sont des fonctions données de l'espace $L^2(0,\ \infty)$.
L'opérateur de Sturm-Liouville L engendré par l'expression $Lv = -v''$, $v(0) = 0$ est diagonalisé par la transformation $\mathcal{F} : L^2(0,\ \infty) \longrightarrow L_p^2(0,\ \infty)$, $\rho(\tau) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\tau}$

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \mathcal{F}u(\tau) = \int_0^\infty u(x) \frac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}} dx, \\ u(x) &= \mathcal{F}^{-1}\varphi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\tau) \sin x\sqrt{\tau} d\tau \end{aligned} \tag{4.2}$$

Le produit scalaire dans $L^2(0,\ \infty)$ et $L_\rho^2(0,\ \infty)$ est désigné par $(.,.)_{L^2(0,\ \infty)}$ et $(.,.)$. L'intégration par partie donne

$$\mathcal{F}(-v'')(\tau) = \tau\mathcal{F}v(\tau) - v(0) \tag{4.3}$$

Si $v(0) = 0$, alors (4.3) signifie l'égalité $\mathcal{F}^{-1}S\mathcal{F} = L$ tel que

$$S\varphi(\tau) = \tau\varphi(\tau),\ \tau > 0.$$

On introduit l'opérateur $\widetilde{S} : L_p^2(0,\ \infty) \longrightarrow L_p^2(0,\ \infty)$ comme suit

$$\begin{cases} D\left(\widetilde{S}\right) &= \left\{\psi \in L_\rho^2(0,\ \infty)\ /\exists c = c(\psi) : \int_0^\infty |\tau\psi(\tau) + c(\psi)|^2 \rho(\tau)\, d\tau < \infty\right\} \\ \widetilde{S}\psi(\tau) &= \tau\psi(\tau) + c(\psi),\ \psi \in D\left(\widetilde{S}\right) \end{cases}.$$

Si $v(0) \neq 0$, alors (4.3) signifie l'égalité $\mathcal{F}^{-1}\widetilde{S}\mathcal{F} = L_{\max}$ où $L_{\max}$ est l'opérateur maximal correspondant de l'opérateur différentiel L.

Les valeurs $c(\psi)$ définissent une fonctionnelle dans l'espace $L^2_\rho(0,\ \infty)$, d'après (4.2) et (4.3), $c(\psi) = -v(0)$.
Soient

$$\varphi = \mathcal{F}u,\ \psi = \mathcal{F}v,\ \gamma = \mathcal{F}\eta \tag{4.4}$$

On introduit l'opérateur $T : L^2_\rho(0,\ \infty) \longrightarrow L^2_\rho(0,\ \infty)$ comme suit

$$\begin{cases} D(T) &= \{\psi \in L^2(0,\ \infty) : -c(\psi) + (\psi,\ \gamma) = 0\} \\ T\psi &= \widetilde{S}\psi,\ \psi\ \in D(T). \end{cases} \tag{4.5}$$

Donc le problème (4.1) prend la forme

$$(T-\zeta)\psi = \varphi,\ \psi\ \in L^2_\rho(0,\ \infty) \tag{4.6}$$

En prenant la dérivée de la deuxième égalité dans (4.2) nous obtenons formellement $u'(0) = (\varphi,\ 1)$. Donc, on a besoin des opérateurs $S,\ T$ et des fonctionnelles

$$c(\psi) = -v(0),\ (\psi,\ 1) = v'(0),\ \psi = \mathcal{F}v. \tag{4.7}$$

Le problème (4.1) en raison de (4.3), (4.4) prend la forme

$$(\tau-\zeta)\psi + (\psi,\ \gamma) = \varphi(\tau),\ \tau > 0.$$

Soit $S_\zeta = (S-\zeta)^{-1},\ T_\zeta = (T-\zeta)^{-1}$ et $E_\zeta = \dfrac{1}{\tau-\zeta},\ \zeta \notin [0,\ \infty)$. Alors

$$\psi + (\psi,\ \gamma)E_\zeta = S_\zeta\varphi.$$

En multipliant par γ on obtient $(\psi,\ \gamma)[1+(E_\zeta,\ \gamma)] = (S_\zeta\varphi,\ \gamma)$.
On note par

$$\delta(\zeta) = 1 + (E_\zeta,\ \gamma) = 1 + \int_0^\infty \frac{\overline{\gamma(\tau)}}{\tau-\zeta}\rho(\tau)\ d\tau, \tag{4.8}$$

alors

$$\psi = T_\zeta\varphi = S_\zeta\varphi - \frac{1}{\delta(\zeta)}(S_\zeta\varphi,\ \gamma)E_\zeta,\ \zeta \notin [0,\ \infty),\ \delta(\zeta) \neq 0. \tag{4.9}$$

L'opérateur T_ζ est borné, donc T_ζ est la résolvante.

On a besoin de quelques limites des valeurs si $\zeta \to \sigma, \ \mathrm{Im}\,\zeta \to \pm 0$, lesquelles sont notées par

$$\delta_{\pm}(\sigma) = \lim_{\zeta\to\sigma} \delta(\zeta)$$

et

$$(T_\sigma \varphi, \ \psi)_{\pm} = \lim_{\zeta\to\sigma} (T_\zeta \varphi, \ \psi), \quad \delta_{\pm}(\sigma) \neq 0. \tag{4.10}$$

Ces valeurs existent si, par exemple $\varphi, \ \psi, \ \gamma \in C^1[0, \ \infty)$.
Soient

$$\begin{array}{rcl} (\varphi, \ b_\sigma) & = & \delta_-(\sigma)\varphi(\sigma) - (S_\sigma\varphi, \ \gamma)_- \\ (a_\sigma, \ \psi) & = & \dfrac{1}{\delta_+(\sigma)}(E_\sigma, \ \psi)_+ - \dfrac{1}{\delta_-(\sigma)}(E_\sigma, \ \psi)_+ \end{array} \tag{4.11}$$

Lemma 51 *Si* $\gamma \in C^1[0, \ \infty) \cap L_p^2(0, \ \infty)$ *alors la résolvante* T_ζ *a le saut sur la demi-droite* $(0, \ \infty)$,

$$(T_\sigma\varphi, \ \psi)_+ - (T_\sigma\varphi, \ \psi)_- = (\varphi, \ b_\sigma)(a_\sigma, \ \psi), \tag{4.12}$$

où $\varphi, \ \psi \in C^1[0, \ \infty) \cap L_p^2(0, \ \infty)$ *et* $\delta_+(\sigma)\delta_-(\sigma) \neq 0$.

Evidemment, la fonction $E_\zeta(\tau)$ est la transformation de Fourier de la fonction

$$e_\zeta(x) = e^{i\sqrt{\zeta}x}, \ \mathrm{Im}\sqrt{\zeta} > 0, \tag{4.13}$$

i.e., $\mathcal{F}(e_\zeta)(\tau) = \frac{1}{\tau - \zeta} = E_\zeta(\tau)$.
En prenant la dérivée de la dernière égalité par rapport à ζ, on obtient que la transformation de Fourier $\gamma = \mathcal{F}\eta$ de sommes finies

$$\eta(x) = \sum p_k(x) e^{\alpha_k x}, \quad \mathrm{Re}\,\alpha_k < 0,$$

où $p_k(x)$ sont des polynômes arbitraires, est une fonction rationnelle $\gamma(\tau)$, bornée sur $[0, \ \infty)$ et telle que $\gamma(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau}\right), \ \tau \to \infty$. En raison de l'identité élémentaire pour le produit scalaire,

$$\left(\frac{1}{\tau - \zeta}, \ \frac{1}{\tau - \overline{\zeta_1}}\right) = \frac{i}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta_1}}, \quad \mathrm{Im}\sqrt{\zeta} > 0, \ \mathrm{Im}\sqrt{\zeta_1} > 0, \tag{4.14}$$

la fonction $\delta(\zeta)$, ou $\gamma = \mathcal{F}\eta$, est une fonction rationnelle sur $\sqrt{\zeta}$, $\operatorname{Im}\sqrt{\zeta} > 0$. Plus bas, nous considérons uniquement une telle fonction $\delta(\zeta)$ et aussi on suppose que les fonctions $\varphi(\tau) = \mathcal{F}u(\tau)$, $\psi(\tau) = \mathcal{F}v(\tau)$ sont des fonctions rationnelles aussi.

Theorem 52 *Supposons que $\delta(\zeta) \neq 0$, $\zeta \notin [0, \infty)$ et $\delta_+(\sigma)\delta_-(\sigma) \neq 0$, $\sigma \geq 0$. Alors*

$$(\varphi, \psi)_{L^2(0, \infty)} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty (\varphi, b_\sigma)(a_\sigma, \psi)\, d\sigma \tag{4.15}$$

E. V. CHEREMNIKH.[16] a considéré la relation entre la fonction de Weyl pour Sturm-Liouville avec l'opérateur de Sturm-Liouville pour la même différentielle sur les intervalles $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ et $(-\infty, \infty)$ en appliquant le modèle de Friedrichs.

Quelques applications du modèle de Friedrichs sont données dans le travail [[10]-[12]] . Dans ce sens, la considération de l'auteur est proche à la contribution développée dans [29] où le cas général à étudier pour le potentiel à valeurs opératorielles et pour l'opérateur de Sturm-Liouville auto-adjoint.

On rappelle quelques résultats du travail [10]. Soit l'expression différentielle

$$ly = -y'' + q(x)y, \quad x \in (0, \infty) \tag{4.16}$$

sur la demi-droite. Premièrement l'auteur a supposé que $q(x) \equiv 0$. Pour diagonaliser l'opérateur correspondant dans $L^2(0, \infty)$ et il a utilisé un opérateur unitaire (voir [55])
$\mathcal{F} : L^2(0, \infty) \longrightarrow L^2_p(0, \infty)$, $\rho(\tau) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\tau}$ donné par les expressions suivantes

$$\varphi(\tau) = \mathcal{F}u(\tau) = \int_0^\infty u(x)\frac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}}dx, \ u(x) = \mathcal{F}^{-1}\varphi(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\tau)\sin x\sqrt{\tau}d\tau \tag{4.17}$$

Il a défini deux opérateurs, l'opérateur maximal $L_{\max}$ et l'opérateur L. Soient

$$\begin{cases} D(L_{\max}) &= \{y \in L^2(0, \infty) : y' - \text{abs cont.}, y'' \in L^2(0, \infty)\} \\ L_{\max}y &= -y'', \ y \in D(L_{\max}) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(L) &= \{u \in D(L_{\max}), u(0) = 0\} \\ Ly &= -y'',\ y \in D(L) \end{cases}$$

Après la relation simple

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty u''(x) \frac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}} dx &= -u(0) + \tau \int_0^\infty u(x) \frac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}} dx \\ &= -u(0) + \tau \mathcal{F}u(\tau),\ u,\ u'' \in L^2(0,\ \infty) \end{aligned} \tag{4.18}$$

On a les définitions

$$\begin{cases} D(S_{\max}) &= \left\{\varphi \in L^2(0,\ \infty)\ /\exists c = c(\varphi) : \int_0^\infty |\tau\varphi(\tau) + c(\varphi)|^2 \rho(\tau)\, d\tau < 0\right\} \\ S_{\max}\varphi(\tau) &= \tau\varphi(\tau) + c(\varphi),\ \varphi \in D(S_{\max}) \end{cases} \tag{4.19}$$

et

$$\begin{cases} D(S) &= \{\varphi \in D(S_{\max}) : c(\varphi) = 0\} \\ S\varphi(\tau) &= \tau\varphi(\tau),\ \varphi \in D(S) \end{cases}$$

il est facile de vérifier que

$$\mathcal{F}L_{\max}\mathcal{F}^{-1} = S_{\max},\ \mathcal{F}L\mathcal{F}^{-1} = S. \tag{4.20}$$

On a besoin de la fonctionnelle $(.,\ 1)$ définie par la relation

$$(\varphi,\ 1) = \lim_{N\to\infty} (\varphi,\ 1_N)_H, \quad 1_N(x) = \chi_{[0,\ n]}(x),\ x > 0\ \varphi \in D(S) \tag{4.21}$$

où $H = L^2_\rho(0,\ \infty)$
En comparant de (4.18) et (4.19) et la dérivée en (4.17), on obtient l'égalité

$$c(\varphi) = -y(0),\ (\varphi,\ 1) = y'(0) \tag{4.22}$$

où $\varphi = \mathcal{F}y.$, A vrai dire la valeur $(\varphi,\ 1)$ est définie pour $\varphi \in D(S)$ (voir (4.21)). Comme $D(S_{\max}) = D(S) \dot{+} \mathfrak{L}\left(\frac{1}{1+\tau}\right)$ on peut définir $\left(\frac{1}{1+\tau},\ 1\right)$ arbitrairement.

Comme $\mathcal{F}\left(e^{-x}\right)(\tau)=\dfrac{1}{1+\tau}$ nous devons poser

$$\left(\frac{1}{1+\tau},\ 1\right)=-1 \tag{4.23}$$

pour maintenir la relation (4.22). Donc, les deux fonctionnelles $c\left(\varphi\right),\ \left(\varphi,\ 1\right)$ sont définies dans $D\left(S_{\max}\right)$.

Chaque valeur $\zeta\notin[0,\ \infty)$ est une valeur propre de l'opérateur $S_{\max}$ avec un vecteur propre $h_{0,\zeta}=\dfrac{1}{\tau-\zeta}$ normalisé par la condition $c\left(h_{0,\zeta}\right)=-1$. Si $S_{\zeta}=\left(S-\zeta\right)^{-1}$ alors $h_{0,\zeta}=S_{\zeta}1$ par analogie à (4.21). La fonction $m_0\left(\zeta\right)=\left(S_{\zeta}1,\ 1\right)=\left(h_{0,\zeta},1\right)$ en raison de la décomposition

$$h_{0,\zeta}\left(\tau\right)=\frac{1}{1+\tau}+\left(\frac{1}{\tau-\zeta}-\frac{1}{1+\tau}\right)$$

est (voir (4.23))

$$m_0\left(\zeta\right)=-1+\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{\tau-\zeta}-\frac{1}{1+\tau}\right)\rho\left(\tau\right)d\tau. \tag{4.24}$$

Pour chaque $\sigma\in(0,\ \infty)$ l'opérateur inverse $S_{\max,\sigma}=\left(S_{\max}-\sigma\right)^{-1}$existe et pour les éléments lisses $\varphi\left(\tau\right)$ on a $S_{\max,\sigma}\varphi\left(\tau\right)=\dfrac{\left(\varphi\left(\tau\right)-\varphi\left(\sigma\right)\right)}{\tau-\sigma}$.

On garde la même notation dans l'espace complexe pour un prolongement analytique

$$S_{\max,\zeta}\varphi\left(\tau\right)=\frac{\left(\varphi\left(\tau\right)-\varphi\left(\zeta\right)\right)}{\tau-\zeta} \tag{4.25}$$

si la valeur $\varphi\left(\zeta\right)$ existe pour une valeur donnée ζ. L'identité

$$\frac{\varphi\left(\tau\right)}{\tau-\zeta}=\varphi\left(\zeta\right)\frac{1}{\tau-\zeta}+\frac{\varphi\left(\tau\right)-\varphi\left(\zeta\right)}{\tau-\zeta},\ \frac{\overline{\varphi\left(\tau\right)}}{\tau-\zeta}=\overline{\varphi\left(\overline{\zeta}\right)}\frac{1}{\tau-\zeta}+\frac{\overline{\varphi\left(\tau\right)}-\overline{\varphi\left(\overline{\zeta}\right)}}{\tau-\zeta}$$

signifie les relations suivantes

$$\begin{cases} S_{\zeta}\varphi & = & \varphi\left(\zeta\right)h_{0,\zeta}+S_{\max,\zeta}\varphi \\ \left(h_{0,\zeta},\psi\right)_H & = & \overline{\psi\left(\overline{\zeta}\right)}m_0\left(\zeta\right)+\left(R_{0,\zeta},\psi\right) \end{cases} \tag{4.26}$$

où

$$(R_{0,\zeta},\psi)=\int\limits_0^\infty \frac{\overline{\varphi(\tau)}-\overline{\varphi(\overline{\zeta})}}{\tau-\zeta}\rho(\tau)\,d\tau$$

et la fonctionnelle $R_{0,\zeta}$ est un vecteur propre de l'opérateur $S_{\max}$ associé au point $\sigma\in(0,\ \infty)$ du spectre de S.
On va calculer $S_{\max}^{*}$. On a (voir (4.19))

$$(S_{\max}\varphi,\ \psi)=(\tau\varphi(\tau)+c(\varphi),\ \psi)=(\varphi,\ \tau\psi)+c(\varphi)(1,\ \psi)$$

si $\tau\varphi(\tau)\in H$. Donc $|(S_{\max}\varphi,\ \psi)|\leqslant C\,\|\varphi\|$ si $c(\psi)=(1,\ \psi)=0$. On va définir $S_{\min}:T\rightarrow H$ comme suit

$$\begin{array}{lcl} D(S_{\min}) & = & \{\psi\in D(S_{\max}):c(\psi)=(1,\ \psi)=0\} \\ S\min\varphi(\tau) & = & \tau\varphi(\tau),\varphi\in D(S_{\min}) \end{array}.$$

Finalement

$$S_{\min}\subset S\subset S_{\max}\quad;\quad S^{*}\max=S\min\ .$$

Maintenant, on revient à $(R_{0,\zeta},\psi)$ (voir (4.26)):

$$\begin{array}{rcl} (R_{0,\zeta},(S\min-\sigma)\psi) & = & \displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{(\tau-\sigma)\overline{\psi(\tau)}}{\tau-\sigma}\rho(\tau)\,d\tau \\ & = & \int_0^\infty \overline{\psi(\tau)}\rho(\tau)\,d\tau=(1,\ \psi(\tau))=0, \qquad \varphi\in D(S_{\min}) \end{array}$$

donc, la fonctionnelle $R_{0,\zeta}$ est une fonction propre de $S_{\max}$ correspondant au point $\sigma\in(0,\ \infty)$ du spectre continu de S
De plus

$$S_{\max,\zeta}(S-\zeta)\varphi=\varphi,\ \varphi\in D(S)\ \text{ et }\ (S_{\max}-\zeta)S_{\max,\zeta}\varphi=\varphi,\ S_{\max,\zeta}\varphi\in D(S_{\max}) \tag{4.27}$$

On considère un opérateur perturbé

$$T=S+A^{*}B \tag{4.28}$$

sous certaines conditions sur les opérateurs $A^{*},\ B:H\ \rightarrow\ G,\ G$ un espace de

Hilbert auxiliaire. L'équation $(T-\zeta)\psi=\varphi$ ou $(S-\zeta)\psi+A^{*}B\psi=\varphi$ signifie que

$$\psi+S_{\zeta}A^{*}B=S_{\zeta}\varphi \tag{4.29}$$

En appliquant l'opérateur B , on obtient $(1+BS_{\zeta}A^{*})\,B\psi=BS_{\zeta}\varphi$.
On note

$$K(\zeta)=1+BS_{\zeta}A^{*},$$

donc $B\psi=K(\zeta)^{-1}BS_{\zeta}\varphi$. On remplace $B\psi=K(\zeta)^{-1}BS_{\zeta}\varphi$ dans (4.29). On obtient la résolvante.

$$T_{\zeta}\varphi=S_{\zeta}\varphi-S_{\zeta}A^{*}K(\zeta)^{-1}B_{\zeta}. \tag{4.30}$$

Par analogie, On note $N(\zeta)=1+BS_{\max,\zeta}A^{*}$ (voir (4.25)) et

$$T_{\max,\zeta}\varphi=S_{\max,\zeta}\varphi-S_{\max,\zeta}A^{*}N(\zeta)^{-1}BS_{\max,\zeta}\varphi. \tag{4.31}$$

L'opérateur

$$T_{\max}=S_{\max}+V$$

est appelé l'opérateur maximal pour l'opérateur $T=S+V,\ V=A^{*}B$.
Comme le cas d'un opérateur non perturbé, on va introduire

$$h_{\zeta}=T_{\zeta}1,\quad m(\zeta)=(T_{\zeta}1,\ 1)=(h_{\zeta},\ 1),\quad \zeta\in\rho(T). \tag{4.32}$$

Par analogie à (4.26) on a la propriété suivante

$$\begin{cases} T_{\zeta}\varphi &= \left(\varphi,\ b_{\overline{\zeta}}\right)h_{\zeta}+T_{\max,\zeta}\varphi \\ (h_{\zeta},\ \psi)_{H} &= (a_{\zeta},\ \psi)\,m(\zeta)+(R_{\zeta},\ \psi) \end{cases} \quad \zeta\in\rho(T) \tag{4.33}$$

où $(a_{\zeta},\ \psi)$, $\left(\varphi,\ b_{\overline{\zeta}}\right)$, $(R_{\zeta},\ \psi)$ sont des valeurs des fonctions propres respectivement des opérateurs $T,\ T^{*},\ T_{\max}$ si $\zeta=\sigma\in(0,\ \infty)$ et définissent une fonction analytique dans un certain domaine, contenant la demi-droite $(0,\ \infty)$ et dépendant de la perturbation V. De plus,

$$T_{\max,\zeta}(T-\zeta)\varphi=\varphi,\quad \varphi\in D(T),\quad (T_{\max}-\zeta)\,T_{\max,\zeta}\varphi=\varphi,\ T_{\max,\zeta}\varphi\in D(T_{\max}). \tag{4.34}$$

Pour obtenir la décomposition (4.33) nous appliquer la résolvante
$T_\zeta = (T-\zeta)^{-1}$ et $T_\zeta^* = (T^*-\zeta)^{-1}$ en utilisant les fonctionnelles $c(\varphi), (\varphi, 1)$ seulement. Premièrement on va résoudre l'équation $(T_{\max}-\sigma)\varphi = \psi$ et on obtient la " résolvante " $T_{\max,\sigma} = (T_{\max}-\sigma)^{-1}$ par l'expression (4.31) où $\zeta = \sigma$ (le symbole " résolvante" signifie que l'opérateur inverse n'est pas borné). Donc

$$(T_{\max}-\sigma)\, T_{\max,\sigma}\varphi = \varphi.$$

Pour les éléments lisses φ le côté droit de (4.31) admet un prolongement analytique alors

$$(T_{\max}-\zeta)\, T_{\max,\zeta}\varphi = \varphi,\ \ T_{\max,\zeta}\varphi \in D\left(T_{\max}\right).$$

D'après la définition (4.31)

$$(T_{\max}-\zeta)\,\psi = (T-\zeta)\,\psi + c\left(\psi\right)$$

donc

$$(T-\zeta)\, T_{\max,\zeta}\varphi + c\left(T_{\max,\zeta}\varphi\right).1 = \varphi$$

d'où

$$T_{\max,\zeta}\varphi + c\left(T_{\max,\zeta}\varphi\right) T_\zeta 1 = T_\zeta\varphi.$$

C'est la première équation de (4.33) avec

$$\left(\varphi,\ b_{\overline{\zeta}}\right) = c\left(T_{\max,\zeta}\varphi\right). \tag{4.35}$$

L'équation (4.33) pour l'opérateur adjoint T^*

$$T_\zeta^*\psi = \overline{\left(a_{\overline{\zeta}},\ \psi\right)} h_\zeta^* + T_{\max,\zeta}^*\psi, \qquad h_\zeta^* = \left(T^*-\zeta\right)^{-1} 1$$

d'où

$$\left(h_\zeta,\ \psi\right) = \left(T_\zeta 1,\ \psi\right) = \overline{\left(T_{\overline{\zeta}}^* 1,\ \psi\right)} = \left(a_\zeta,\ \psi\right) \overline{\left(h_{\overline{\zeta}}^*,\ \psi\right)} + \left(1,\ T_{\max,\overline{\zeta}}^*\psi\right).$$

C'est la deuxième équation dans (4.33) , donc

$$(a_\zeta,\ \psi) = \overline{c\left(T^*_{\max,\bar{\zeta}}1,\ \psi\right)}, \qquad (R_\zeta, \psi) = \left(1,\ T^*_{\max,\bar{\zeta}}\psi\right) \tag{4.36}$$

4.2 Modèle de Friedrichs pour l'opérateur de Sturm-Liouville sur la droite

On considère dans l'espace $L^2(-\infty,\ \infty)$ l'opérateur de Sturm-Liouville

$$Ly = -y'' + q(x)\,y, \qquad -\infty < x < \infty \tag{4.37}$$

avec le domaine de définition maximal. On suppose que le potentiel à valeurs complexes $q(x)$ satisfait la condition

$$|q(x)| \leq C\ e^{-\varepsilon|x|},\ \varepsilon > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

On note $\hat{H} = L^2(0,\ \infty) \oplus L^2(0,\ \infty)$ où

$$\hat{H} = \hat{H}^{(1)} \oplus \hat{H}^{(2)}, \quad \hat{H}^{(k)} = L^2(0,\ \infty),\ k = 1, 2. \tag{4.38}$$

Un élément de $\hat{H}$ est de la forme

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y_k \in \hat{H}^{(k)},\ k = 1, 2$$

Soit $Z : L^2(-\infty,\ \infty) \to \hat{H}$ l'opérateur suivant

$$\hat{y} = Zy(x) = \begin{pmatrix} y(-x) \\ y(x) \end{pmatrix},\ x > 0 \tag{4.39}$$

avec $D(Z) = L^2(-\infty,\ \infty)$. Evidemment, l'opérateur Z est unitaire, $R(Z) = \hat{H}$ et l'opérateur inverse est

$$y = Z^{-1}\hat{y} = Z^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} y_1(-x),\ x < 0 \\ y_2(x), \quad x > 0 \end{cases} \tag{4.40}$$

Soit $q_1(x) = q(-x)$, $x > 0$ et $q_2(x) = q(x), x > 0$. On définit dans l'espace $\hat{H}^{(k)} = L^2(0, \infty)$ l'opérateur de Sturm-Liouville de domaine de définition maximal

$$L_{\max}^{(k)} y = -y'' + q_k(x), \qquad y \in D\left(L_{\max}^{(k)}\right) \subset \hat{H}^{(k)}, \qquad k = 1, 2. \tag{4.41}$$

Si $y \in D(L)$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Zy$ alors $y_1(x) = y(x), y_2(x) = y(x)$. Donc $y_1(0) = y_2(0)$, $-y_1'(0) = y_2'(0)$ ou (d'après (4.33)) l'élément $\varphi_k = \mathcal{F} y_k$ satisfait les conditions

$$c(\varphi_1) = c(\varphi_2), \qquad (\varphi_1, 1) = -(\varphi_2, 1). \tag{4.42}$$

Soit la projection $P_k : \hat{H}^{(1)} \oplus \hat{H}^{(2)} \to \hat{H}^{(k)}$ alors

$$P_k Z L y = L_{\max}^{(k)} y_k = L_{\max}^{(k)} P_k Z y$$

Notez que si y parcourt tout $D(L)$ alors $y_k = P_k Z y$ parcourt tout $\mathrm{D}\left(L_{\max}^{(k)}\right)$ et la paire correspondante $(y_k(0), y_k'(0))$ parcourt tout $\mathbb{C}^2$. Par conséquent

$$ZLZ^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{\max}^{(1)} y_1 \\ L_{\max}^{2} y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in ZD(L) \tag{4.43}$$

On introduit l'espace $H = \mathcal{F}\hat{H}$ par la relation (voir (4.38)) $\mathcal{F}\hat{H} = \mathcal{F}\hat{H}^{(1)} \oplus \mathcal{F}\hat{H}^{(2)}$ ou, en d'autre notation

$$H = H^{(1)} \oplus H^{(2)}, \quad H^{(k)} = L_\rho^2(0, \infty), \quad \rho(\tau) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\tau}. \tag{4.44}$$

Un élément $\varphi \in H$ est noté

$$\varphi = \mathcal{F} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F} y_1 \\ \mathcal{F} y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

D'après (4.19)-(4.20) et (4.42)

$$\mathcal{F} Z L Z^{-1} \mathcal{F}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau\varphi_1(\tau) + c(\varphi_1) + \mathcal{F}(q_1 \mathcal{F}^{-1} \varphi_1) \\ \tau\varphi_2(\tau) + c(\varphi_2) + \mathcal{F}(q_2 \mathcal{F}^{-1} \varphi_2) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} c(\varphi_1) = c(\varphi_2) \\ (\varphi_1, 1) = -(\varphi_2, 1) \end{matrix} \tag{4.45}$$

On introduit l'opérateur $S_{\max} : H \to H$ par la relation

$$\begin{cases} D\left(S_{\max}\right) & = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in H : \begin{pmatrix} \tau\varphi_1\left(\tau\right) + c\left(\varphi_1\right) \\ \tau\varphi_2\left(\tau\right) + c\left(\varphi_2\right) \end{pmatrix} \in H \right\} \\ S_{\max}\varphi\left(\tau\right) & = \begin{pmatrix} \tau\varphi_1\left(\tau\right) + c\left(\varphi_1\right) \\ \tau\varphi_2\left(\tau\right) + c\left(\varphi_2\right) \end{pmatrix}, \varphi \in D\left(S_{\max}\right) \end{cases}$$

Definition 53 *L'opérateur $S : H \to H$ est donné par les relations*

$$\begin{cases} D\left(S\right) & = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in H : \varphi \in D\left(S_{\max}\right), \left(\varphi_1,\ 1\right) = -\left(\varphi_2,\ 1\right) \right\} \\ S\varphi\left(\tau\right) & = \begin{pmatrix} \tau\varphi_1\left(\tau\right) + c\left(\varphi_1\right) \\ \tau\varphi_2\left(\tau\right) + c\left(\varphi_2\right) \end{pmatrix}, \varphi \in D\left(S\right) \end{cases} \tag{4.46}$$

En d'autres termes $S = S_{\max}\big|_{D(S)}$. Maintenant la relation (4.45) prend la forme

$$\mathcal{F}ZLZ^{-1}\mathcal{F}^{-1}\varphi = S\varphi + V\varphi, \qquad \varphi \in D\left(S\right)$$

où

$$V\varphi = \begin{pmatrix} V\varphi_1 \\ V\varphi_2 \end{pmatrix}, \qquad V_k\varphi_k = \mathcal{F}\left(q_k\mathcal{F}^{-1}\varphi_k\right),\ k = 1, 2 \tag{4.47}$$

On note

$$T = S + V, \quad D\left(T\right) = D\left(S\right) \tag{4.48}$$

le modèle de Friedrichs, alors

$$L = Z^{-1}\mathcal{F}^{-1}T\mathcal{F}Z \tag{4.49}$$

Donc, la proposition suivante est prouvée.

Proposition 54 *L'opérateur $L : L^2\left(-\infty,\ \infty\right) \to L^2\left(-\infty,\ \infty\right)$ (voir (4.37)) est unitairement équivalent à l'opérateur $T : H \to H$.*

Soit L_0 l'opérateur (4.37) si $q\left(x\right) \equiv 0$, alors $V = 0$ et

$$L_0 = Z^{-1}\mathcal{F}^{-1}S\mathcal{F}Z$$

Donc $S^{*}=S$ comme $L_0^{*}=L_0$.
Notez que, si on définit l'opérateur $S^{(k)}:H^{(k)}\to H^{(k)}$
comme $S^{(k)}\varphi_k(\tau)=\tau\varphi_k(\tau)\,,\ \tau>0$ avec

$$D\left(S^{(k)}\right)=\varphi_k\in H^{(k)}:\int_0^\infty \tau\left|\varphi_k(\tau)\right|^2\rho(\tau)\ d\tau<\infty$$

alors

$$S_{\max}=S_{\max}^{(1)}\oplus S_{\max}^{(2)} \tag{4.50}$$

mais $S\neq S^{(1)}\oplus S^{(2)}$.

4.3 Fonction de Weyl pour le modèle de Friedrichs

Soit Ω un domaine contenant la demi-droite $[0,\ \infty)\subset\Omega$, par exemple une bande. Soit $\Phi\subset H$ un sous-espace des éléments φ qui admettent le prolongement analytique $\varphi(\zeta)\,,\ \zeta\in\Omega$.

Maintenant le but est de généraliser la décomposition (4.33) pour notre modèle de Friedrichs T c'est-à-dire pour garder les propriétés suivantes: la fonction $(T_{\max}\varphi,\psi)_H$, les fonctions propres $\left(\varphi,\ b_{\overline{\zeta}}\right),\ (a_\zeta,\ \psi)\,,\ (R_\zeta,\ \psi)$ pour $\varphi,\psi\in\Phi$ sont analytiques dans Ω et la fonction $m(\zeta)$ est analytique dans $\Omega\setminus[0,\ \infty)\,,\ m_+(\sigma)-m_-(\sigma)\neq 0,\ \sigma\in(0,\ \infty)$ où

$$m_{+}(\sigma)=\lim_{\varepsilon\ \to\ +0}m(\sigma\pm i)\,\varepsilon,\ \sigma\in(0,\ \infty) \tag{4.51}$$

Soit (voir (4.41)) $q_k(x)=\overline{q_{k,1}(x)}\ q_{k,2}(x)\,,\ |q_{k,1}(x)|=|q_{k,2}(x)|\,,\ x>0$ et $Q_{k,j}:H^{(k)}:\to H^{(k)}$ définit l'opérateur de multiplication par $q_{k,j}$, alors

$$V_k=A_k^{*}B_k,\ A_k=Q_{k,1}\mathcal{F}^{-1},\quad B_k=Q_{k,2}\mathcal{F}^{-1},\quad k=1,2 \tag{4.52}$$

Plus bas, on introduit l'opérateur $T^{(k)}:H^{(k)}:\to H^{(k)}$ par la relation

$$T^{(k)}\varphi_k(\tau)=\tau\varphi_k(\tau)+V_k\varphi_k(\tau)\,,\ k=1,\ 2 \tag{4.53}$$

alors

$$T\varphi=\begin{pmatrix}\tau\varphi_1(\tau)+c(\varphi_1)+V_1\varphi_1(\tau)\\ \tau\varphi_2(\tau)+c(\varphi_2)+V_2\varphi_2(\tau)\end{pmatrix},c(\varphi_1)=c(\varphi_2)\,,\ (\varphi_1,\ 1)=-(\varphi_2,\ 1)\,.$$

L'équation $(T-\zeta)\,\psi=\varphi$ devient

$$\begin{cases}\left(T^{(1)}-\zeta\right)\psi_1+c(\psi_1)=\varphi_1\\ \left(T^{(1)}-\zeta\right)\psi_2+c(\psi_2)=\varphi_2\end{cases}$$

ou

$$\begin{cases}\psi_1+c(\psi_1)\ h_\zeta^{(1)}=T_\zeta^{(1)}\varphi_1\\ \psi_2+c(\psi_2)\ h_\zeta^{(2)}=T_\zeta^{(2)}\varphi_2\end{cases}c(\psi_1)=c(\psi_2)\,,\quad(\psi_1,\ 1)=-(\psi_2,\ 1)\tag{4.54}$$

où $h_\zeta^{(k)}=T_\zeta^{(k)}1$. Comme $|q(x)|\leq C\ e^{-\varepsilon|x|}$, $\varepsilon>0$, $-\infty<x<\infty$ alors la représentation (4.33) est satisfaite. Selon (4.33) on a

$$T_\zeta^{(k)}\varphi_k=\left(\varphi_k,\ b_{\overline{\zeta}}^{(k)}\right)h_\zeta^{(k)}+T_{\max,\zeta}^{(k)}\varphi_k\tag{4.55}$$

$$\left(h_\zeta^{(k)},\ \psi_k\right)_{H^{(k)}}=\left(a_\zeta^{(k)},\ \psi_k\right)m^{(k)}(\zeta)+\left(R_\zeta^{(k)},\ \psi_k\right)\tag{4.56}$$

ou $m^{(k)}(\zeta)=\left(h_\zeta^{(k)},\ 1\right)$. On peut expliquer (4.56) par analogie à (4.55) pour l'opérateur T^*. En effet

$$\left(h_\zeta^{(k)},\ \psi_k\right)_{H^{(k)}}=\left(T_\zeta^{(k)}1,\ \psi_k\right)=\left(1,\ T_{\overline{\zeta}}^{*(k)}\psi_k\right)=\overline{\left(T_{\overline{\zeta}}^{*(k)}\psi_k,\ 1\right)}$$

$$=\overline{\left(\psi_k,\ a_{\overline{\zeta}}^{(k)}\right)}\,\overline{\left(h_\zeta^{*(k)},\ 1\right)}+\overline{\left(T_{\max,\ \zeta}^{*(k)}\psi_k,\ 1\right)}$$

et en conséquence

$$\left(R_\zeta^{(k)},\ \psi_k\right)=\left(1,\ T_{\max,\zeta}^{*(k)}\psi_k\right).\tag{4.57}$$

On note aussi

$$\left(\varphi_k,\ R_{\overline{\zeta}}^{*(k)}\right)=\left(T_{\max,\ \zeta}^{(k)}\varphi_k,\ 1\right)\tag{4.58}$$

Maintenant on peut revenir à (4.54) et appliquer la fonctionnelle (., 1)

$$\begin{cases} (\psi_1,\ 1) + c(\psi_1)\ m^{(1)}(\zeta) & = & \left(T_\zeta^{(1)}\varphi_1,\ 1\right) \\ (\psi_2,\ 1) + c(\psi_2)\ m^{(2)}(\zeta) & = & \left(T_\zeta^{(2)}\varphi_1,\ 1\right) \end{cases}$$

A l'aide de la condition aux limites dans (4.19) on obtient

$$c(\psi_1) = c(\psi_2) = \frac{1}{m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta)} \left[\left(T_\zeta^{(1)}\varphi_1,\ 1\right) + \left(T_\zeta^{(2)}\varphi_2,\ 1\right)\right]$$

On note par

$$m = m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta)$$

En utilisant (4.55) et la notation (4.52), on obtient par l'application de la fonctionnelle (., 1)

$$\left(T_\zeta^{(k)}\varphi_k,\ 1\right) = \left(\varphi_k,\ b_{\overline{\zeta}}^{(k)}\right) m^{(k)}(\zeta) + \left(\varphi_k,\ R_{\overline{\zeta}}^{*(k)}\right). \tag{4.59}$$

Comme $\psi = T_\zeta\varphi$, alors (4.54) donne

$$\begin{cases} (T_\zeta\varphi)_1 & = & T_\zeta^{(1)}\varphi_1 - \frac{1}{m}\left[\left(T_\zeta^{(1)}\varphi_1,\ 1\right) + \left(T_\zeta^{(2)}\varphi_2,\ 1\right)\right] h_\zeta^{(1)} \\ (T_\zeta\varphi)_2 & = & T_\zeta^{(2)}\varphi_2 - \frac{1}{m}\left[\left(T_\zeta^{(1)}\varphi_1,\ 1\right) + \left(T_\zeta^{(2)}\varphi_2,\ 1\right)\right] h_\zeta^{(2)} \end{cases}$$

ou (voir (4.59))

$$(T_\zeta\varphi)_1 = \left(\varphi_1,\ b_{\overline{\zeta}}^{(1)}\right) h_\zeta^{(1)} + T_{\max,\zeta}^{(1)}\varphi_1 -$$

$$-\frac{1}{m}\left[\left(\varphi_1,\ b_{\overline{\zeta}}^{(1)}\right) m^{(1)}(\zeta) + \left(\varphi_1,\ R_{\overline{\zeta}}^{*(1)}\right) + \left(\varphi_2,\ b_{\overline{\zeta}}^{(2)}\right) m^{(2)}(\zeta) + \left(\varphi_2,\ R_{\overline{\zeta}}^{*(2)}\right)\right] h_\zeta^{(1)} =$$

$$= T_{\max,\zeta}^{(1)}\varphi_1 + \frac{1}{m}\left[\left(\left(\varphi_1,\ b_{\overline{\zeta}}^{(1)}\right) - \left(\varphi_2,\ b_{\overline{\zeta}}^{(2)}\right)\right) m^{(2)}(\zeta) - \left(\varphi_1,\ R_{\overline{\zeta}}^{*(1)}\right) - \left(\varphi_2,\ R_{\overline{\zeta}}^{*(2)}\right)\right]. \tag{4.60}$$

Par analogie

$$(T_\zeta\varphi)_2 = T_{\max,\zeta}^{(2)}\varphi_2 + \frac{1}{m}\left[\left(\left(\varphi_2,\ b_{\overline{\zeta}}^{(2)}\right) - \left(\varphi_1,\ b_{\overline{\zeta}}^{(1)}\right)\right) m^{(1)}(\zeta) - \left(\varphi_1,\ R_{\overline{\zeta}}^{*(1)}\right) - \left(\varphi_2,\ R_{\overline{\zeta}}^{*(2)}\right)\right] \tag{4.61}$$

on note par

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\varphi,\ f_1\left(\overline{\zeta}\right)\right)=\left(\varphi_1,\ b_{\overline{\zeta}}^{(1)}\right)-\left(\varphi_2,\ b_{\overline{\zeta}}^{(2)}\right) \\ \left(\varphi,\ f_2\left(\overline{\zeta}\right)\right)=\left(\varphi_1,\ R_{\overline{\zeta}}^{*(1)}\right)+\left(\varphi_2,\ R_{\overline{\zeta}}^{*(2)}\right) \end{array} \right. \tag{4.62}$$

alors (4.60)-(4.61) prennent la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(T_\zeta\varphi\right)_2=T_{\max,\zeta}^{(1)}\varphi_1+\frac{1}{m}\left[\left(\varphi,\ f_1\left(\overline{\zeta}\right)\right)m^{(2)}\left(\zeta\right)-\left(\varphi,\ f_2\left(\overline{\zeta}\right)\right)\right]h_\zeta^{(1)} \\ \left(T_\zeta\varphi\right)_2=T_{\max,\zeta}^{(2)}\varphi_2+\frac{1}{m}\left[-\left(\varphi,\ f_1\left(\overline{\zeta}\right)\right)m^{(1)}\left(\zeta\right)-\left(\varphi,\ f_2\left(\overline{\zeta}\right)\right)\right]h_\zeta^{(2)} \end{array} \right. .$$

Maintenant en multipliant par $\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$, alors

$$\left(T_\zeta\varphi,\ \psi\right)=\left(T_{\max,\zeta}\varphi,\ \psi\right)+\frac{1}{m}\left\{\left[\left(\varphi,\ f_1\left(\overline{\zeta}\right)\right)m^{(2)}\left(\zeta\right)-\left(\varphi,\ f_2\left(\overline{\zeta}\right)\right)\right]\left(h_\zeta^{(1)},\ \psi_1\right)+\right.$$

$$\left.+\left[-\left(\varphi,\ f_1\left(\overline{\zeta}\right)\right)m^{(1)}\left(\zeta\right)-\left(\varphi,\ f_2\left(\overline{\zeta}\right)\right)\right]\left(h_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right)\right\}=$$

$$=\left(T_{\max,\zeta}\varphi,\ \psi\right)+\frac{1}{m}\left[\left(\varphi,\ f_1\left(\overline{\zeta}\right)\right)A-\left(\varphi,\ f_2\left(\overline{\zeta}\right)\right)B\right] \tag{4.63}$$

où (voir 4.56)

1)

$$\begin{aligned} A &= m^{(2)}\left(\zeta\right)\left(h_\zeta^{(1)},\ \psi_1\right)-m^{(1)}\left(\zeta\right)\left(h_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right)= \\ &= m^{(1)}\left(\zeta\right)m^{(2)}\left(\zeta\right)\left[\left(a_\zeta^{(1)},\ \psi_1\right)-\left(a_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right)\right]+ \\ & \quad m^{(2)}\left(\zeta\right)\left(R_\zeta^{(1)},\ \psi_1\right)-m^{(1)}\left(\zeta\right)\left(R_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right). \end{aligned}$$

Notons

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(f_1^*\left(\zeta\right),\ \psi\right)=\left(a_\zeta^{(1)},\ \psi_1\right)-\left(a_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right) \\ \left(f_2^*\left(\zeta\right),\ \psi\right)=\left(R_\zeta^{(1)},\ \psi_1\right)+\left(R_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right) \end{array} \right. \tag{4.64}$$

alors

$$A=m^{(1)}\left(\zeta\right)m^{(2)}\left(\zeta\right)\left(f_1^*\left(\zeta\right),\ \psi\right)+m^{(2)}\left(\zeta\right)\left(f_2^*\left(\zeta\right),\ \psi\right)-m\left(R_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right)$$

2)

$$\begin{aligned}
B &= \left(h_\zeta^{(1)},\ \psi_1\right) + \left(h_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right) = m^{(1)}(\zeta)\left(a_\zeta^{(1)},\ \psi_1\right) + \\
&\quad m^{(2)}(\zeta)\left(a_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right) + \left(f_2^*(\zeta),\ \psi\right) \\
&= m^{(1)}(\zeta)\left[\left(a_\zeta^{(1)},\ \psi_1\right) - \left(a_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right)\right] + \\
&\quad \begin{pmatrix} m^{(1)}(\zeta) + \\ m^{(2)}(\zeta) \end{pmatrix}\left(a_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right) + \left(f_2^*(\zeta),\ \psi\right) \\
&= m^{(1)}(\zeta)\left(f_1^*(\zeta),\ \psi\right) + m\left(a_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right) + \left(f_2^*(\zeta),\ \psi\right)
\end{aligned}$$

On a le vecteur suivant (voir (4.63))

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\begin{pmatrix} A \\ -B \end{pmatrix} &= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta) & m^{(2)}(\zeta) \\ -m^{(1)}(\zeta) & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(f_1^*(\zeta),\ \psi\right) \\ \left(f_2^*(\zeta),\ \psi\right) \end{pmatrix} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} -\left(R_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right) \\ -\left(a_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On note la matrice

$$M(\zeta) = \frac{1}{m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta)}\begin{pmatrix} m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta) & m^{(2)}(\zeta) \\ -m^{(1)}(\zeta) & -1 \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

et les vecteurs suivants dans $\mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned}
\left(\varphi,\ f\left(\overline{\zeta}\right)\right) &= \begin{pmatrix} \left(\varphi,\ f_1\left(\overline{\zeta}\right)\right) \\ \left(\varphi,\ f_2\left(\overline{\zeta}\right)\right) \end{pmatrix}, \left(\left(f^*(\zeta),\ \psi\right)\right) = \begin{pmatrix} \left(f_1^*(\zeta),\ \psi\right) \\ \left(f_2^*(\zeta),\ \psi\right) \end{pmatrix}, \quad (4.66) \\
\left(R_\zeta,\ \psi\right) &= \begin{pmatrix} -\left(R_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right) \\ -\left(a_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On note que (4.66) représentent les fonctions propres respectivement pour les opérateurs T^*, T et $T_{\max}$ et toutes les fonctionnelles dans (4.66) sont analytiques dans le domaine Ω pour $\varphi,\ \psi \in \Phi$.

On doit expliquer le sens de la définition formelle de $T_{\max}$ (voir (4.50)) et $M(\zeta)$

(voir (4.65))

Definition 55 *L'opérateur* $T_{\max}$ *est appelé maximal pour l'opérateur* T *si*
1) L'opérateur inverse $T_{\max,\ \sigma} = (T_{\max} - \sigma)^{-1}$ *existe, le domaine* $D(T_{\max,\ \sigma})$ *ne dépend pas de* $\sigma \in (0,\ \infty)$ *et il existe un prolongement* $T_{\max,\ \zeta}\varphi$ *dans* $\Omega \supset (0,\ \infty)$ *pour* $\varphi \in \Phi$, *où* $\overline{\Phi} = H$.
2) La différence $(T_\zeta\varphi,\ \psi) - (T_{\max,\zeta}\varphi,\ \psi)$ *est une forme bilinéaire des fonctions propres des opérateurs* $T^*,\ T,\ T_{\max}$.

Definition 56 *La matrice* $M(\zeta) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *est appelée la fonction de Weyl pour l'opérateur* T *si*
1) La matrice $M(\zeta)$ *est analytique en* $\Omega\backslash[0,\ \infty)$, $M_+(\sigma) - M_-(\sigma) \neq 0$
(voir (4.51))
2) Il existe un opérateur maximal $T_{\max}$ *et la différence* $(T_\zeta\varphi,\ \psi) - (T_{\max,\zeta}\varphi,\ \psi)$ *est une forme bilinéaire de la matrice* $M(\zeta)$, $\zeta \in \Omega\backslash[0,\ \infty)$, *et des fonctions propres de* T, T^* *analytiques dans* Ω.

Theorem 57 *La matrice* $M(\zeta) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *(voir (4.65)) est une fonction de Weyl pour l'opérateur* T, *à savoir*

$$(T_\zeta\varphi,\ \psi) = \left(\left(\varphi,\ f\left(\overline{\zeta}\right)\right),\ \overline{M(\zeta)\left(f^*(\zeta),\ \psi\right) + \left(R(\zeta),\ \psi\right)}\right)_{\mathbb{C}^2} + (T_{\max,\ \zeta}\varphi,\ \psi) \tag{4.67}$$

Proof. Résultats de (4.63) ■
Comme (voir (4.65))

$$\begin{pmatrix} m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta) & m^{(2)}(\zeta) \\ -m^{(1)}(\zeta) & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^{(2)}(\zeta) \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m^{(1)}(\zeta) & -1 \end{pmatrix}$$

alors dans les relations (4.66)-(4.67) on a

$$M(\zeta)\left(f^*(\zeta),\ \psi\right) = \frac{1}{m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta)}\left(\left(f_1^*(\zeta),\ \psi\right)m^{(1)}(\zeta) + \left(f_2^*(\zeta),\ \psi\right)\right)\begin{pmatrix} m^{(2)}(\zeta) \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\left(\varphi,\ f\left(\overline{\zeta}\right)\right),\ \overline{M(\zeta)\left(f^*(\zeta),\ \psi\right)}\right)_{\mathbb{C}^2} = \frac{1}{m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta)}\times$$

$$\times\left[\left(\varphi,\ f_1\left(\overline{\zeta}\right)\right)m^{(2)}(\zeta)-\left(\varphi,\ f_2\left(\overline{\zeta}\right)\right)\right]\left[\left(f_1^*(\zeta),\ \psi\right)m^{(1)}(\zeta)-\left(f_2^*(\zeta),\ \psi\right)\right]$$

Donc, une autre forme de (4.67) donne l'égalité.

Corollary 58 *La relation suivante est satisfaite*

$$(T_\zeta\varphi,\ \psi)=\frac{1}{m^{(1)}(\zeta)+m^{(2)}(\zeta)}\times$$

$$\times\left[\left(\varphi,\ f_1\left(\overline{\zeta}\right)\right)m^{(2)}(\zeta)-\left(\varphi,\ f_2\left(\overline{\zeta}\right)\right)\right]\left[\left(f_1^*(\zeta),\ \psi\right)m^{(1)}(\zeta)-\left(f_2^*(\zeta),\ \psi\right)\right]-$$
$$-\left(\varphi,\ f_1\left(\overline{\zeta}\right)\right),\ \left(R_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right)-\left(\varphi,\ f_2\left(\overline{\zeta}\right)\right)\left(a_\zeta^{(2)},\ \psi_2\right)+\left(T_{\max,\ \zeta}\varphi,\ \psi\right)\qquad(4.68)$$

On note que $M(\zeta)$ n'a pas une matrice inverse, $\det M(\zeta)=0$ mais le « saut » est une matrice inversible.
Supposons que (voir (4.51))

$$M_+^{(k)}(\sigma)-M_-^{(k)}(\sigma)=2\pi i\rho_k(\sigma),\quad \sigma\in(0,\ \infty),\quad k=1,2$$

Theorem 59 *L'égalité suivante est satisfaite*

$$\det\left(M_+(\sigma)-M_-(\sigma)\right)=-4\pi^2\rho_1(\sigma)\,\rho_2(\sigma),\quad \sigma\in(0,\ \infty)$$

Proof. Résulte de (4.65) par les calculs élémentaires. ■

4.4 Calcul des opérateurs de Sturm-Liouville

Notre but est de réécrire la décomposition (4.67) en termes de l'opérateur initial L (voir (4.37)). Donc, nous avons besoin de toutes les expressions dans (4.55)-(4.58) ou (4.66). Ces expressions décrivent l'opérateur $T^{(k)}$ (voir (4.53)) qui correspondent à l'expression différentielle (4.16) avec $q(x)=q_k(x)$. Donc, nous devons décrire (4.32)-(4.33) en termes d'opérateur différentiel dans l'espace $L^2(0,\ \infty)$

$$Mu=-u''+q(x)\,u,\ u(0)=0,\ u\in L^2(0,\ \infty).\qquad(4.69)$$

Si $q(x)=\overline{q_1(x)}q_2(x)$ alors les opérateurs $A,\ B:L^2(0,\ \infty)\to L^2(0,\ \infty)$,

$G = L^2(0,\ \infty)$ (voir (4.52)) prennent la forme

$$A\varphi(x) = \int_0^\infty \varphi(\tau)\,\alpha(\tau,\ x)\ d\tau,\ B\varphi(x) = \int_0^\infty \varphi(\tau)\,\beta(\tau,\ x)\ d\tau,$$

où $\alpha(\tau,\ x) = q_1(x)\dfrac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}},\ \beta(\tau,\ x) = q_2(x)\dfrac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}}.$
D'après (4.35), (4.30) on a

$$m(\zeta) = m_0(\zeta) - \left(K(\zeta)^{-1}\beta_0(\zeta),\ \alpha_0(\zeta)\right) \tag{4.70}$$

où

$$\alpha_0(\zeta)(x) = \int_0^\infty \frac{\alpha(\tau,\ x)}{\tau-\zeta}\rho(\tau)\ d\tau,\ \beta_0(\zeta)(x) = \int_0^\infty \frac{\beta(\tau,\ x)}{\tau-\zeta}\rho(\tau)\ d\tau \in L^2(0,\ \infty)$$

Il est plus commode de réécrire l'expression (4.70) par des fonctions propres du spectre continu de l'opérateur M, c'est-à-dire par les solutions de l'équation

$$-u'' + q(x)\,u = \zeta u$$

Nous désignons par $e\left(x,\ \sqrt{\zeta}\right)$ la solution telle que $e\left(x,\ \sqrt{\zeta}\right) = e^{i\sqrt{\zeta}x}\left[1 + o(1)\right],$
$x \to +\infty,\ \operatorname{Im}\sqrt{\zeta} > 0$ et par $s(x,\ \zeta),\ c(x,\ \zeta)$ les solutions qui satisfont aux conditions $s(0,\ \zeta) = 0,\ s'(0,\ \zeta) = 1$ et $c(0,\ \zeta) = 1,\ c'(0,\ \zeta) = 0.$
On note $e\left(\sqrt{\zeta}\right) = e\left(0,\ \sqrt{\zeta}\right)$ alors (voir [55])

$$s(x,\ \zeta) = \frac{1}{2i\sqrt{\zeta}}\left[e\left(-\sqrt{\zeta}\right)e\left(x,\ \sqrt{\zeta}\right) - e\left(\sqrt{\zeta}\right)e\left(x,\ -\sqrt{\zeta}\right)\right] \tag{4.71}$$

La résolvante $M_\zeta = (M-\zeta)^{-1}$ est de la forme

$$(M_\zeta v)(x) = \frac{e\left(x,\ \sqrt{\zeta}\right)}{e\left(\sqrt{\zeta}\right)}\int_0^\infty s(t,\ \zeta)\,v(t)\,dt + s(x,\zeta)\int_0^\infty \frac{e\left(t,\ \sqrt{\zeta}\right)}{e\left(\sqrt{\zeta}\right)}v(t)\,dt \tag{4.72}$$

Si nous utilisons pour la première intégrale la décomposition $(0,\ x) = (0,\ \infty)\backslash(x,\ \infty)$

alors

$$(M_\zeta v)(x) = \frac{e\left(x,\ \sqrt{\zeta}\right)}{e\left(\sqrt{\zeta}\right)} \int_0^\infty s(t,\ \zeta)\, v(t)\, dt + (M_{\max,\zeta} v)(x) \tag{4.73}$$

où

$$(M_{\max,\zeta} v)(x) = \int_x^\infty k(x,\ t,\ \zeta)\, v(t)\, dt \tag{4.74}$$

et

$$k(x,\ t,\ \zeta) = \frac{1}{2i\sqrt{\zeta}} \left[e\left(x, \sqrt{\zeta}\right) e\left(t,\ -\sqrt{\zeta}\right) - e\left(x,\ \sqrt{\zeta}\right) e\left(t,\ \sqrt{\zeta}\right) \right] \tag{4.75}$$

On peut vérifier que la fonction $u = M_{\max,\sigma} v$ satisfait l'équation

$$-u'' + q(x)\, u = \sigma u + v, \quad \sigma \in (0,\ \infty) \tag{4.76}$$

et $u \in L^2(0,\ \infty)$. Donc, l'opérateur $M_{\max,\sigma} = (M_{\max} - \sigma)^{-1}$, $\sigma > 0$ est la résolvante de l'opérateur différentiel maximal $M_{\max}$. Dans l'espace de transformation de Fourier, où

$$\varphi = \mathcal{F}u, \quad \psi = \mathcal{F}v$$

l'équation (4.76) prend la forme

$$T_{\max}\varphi = \sigma\varphi + \psi$$

Nous calculons $h_\zeta = T_\zeta 1$ par la relation $(T_\zeta 1,\ \psi)_H = (1,\ (T_\zeta)^* \psi)_H$ ce que signifie (voir (4.22)) la dérivée en zéro de $(M_\zeta)^* v(x)$ (voir (4.72)) donc $\left(\mathcal{F}^{-1} h_{\zeta}\right)(x) = \dfrac{e\left(x\sqrt{\zeta}\right)}{e\left(\sqrt{\zeta}\right)}$. Plus bas $m(\zeta) = \left(h_{\zeta},\ 1\right) = \left.\dfrac{e'_x\left(x\sqrt{\zeta}\right)}{e\left(\sqrt{\zeta}\right)}\right|_{x=0} = \dfrac{e'_x\left(x\sqrt{\zeta}\right)}{e\left(\sqrt{\zeta}\right)}$, donc l'égalité (4.73) est la première équation dans (4.33). L'égalité élémentaire

$$\frac{e\left(x\sqrt{\zeta}\right)}{e\left(\sqrt{\zeta}\right)} = s(x,\ \zeta)\, \frac{e'_x\left(\sqrt{\zeta}\right)}{e\left(\sqrt{\zeta}\right)} + c(x,\ \zeta) \tag{4.77}$$

est la deuxième équation dans (4.33).

En 2014, Diaba. F, Zemmouri. A, Cheremnikh E. [19], ont étudié le spectre ponctuel et continu de l'opérateur de Sturm-Liouville L en utilisant le modèle de Friedrichs

$$Ly = -y'' + q(x)y(x - \Delta), -\infty < x < \infty, x \in (-\infty, \infty)$$

Où $q(x)$ est une fonction à valeurs complexes qui satisfait la condition

$$|q(x)| \leq C \exp(-\varepsilon\, |x|), \varepsilon > 0, C = const, x \in (-\infty, \infty)$$

Les résultats essentiels sont établis par les théorèmes suivants

Theorem 60 *le point unique $\zeta = 0$ peut être le point d'accumulation du spectre continu de l'opérateur L.*

Theorem 61 *Supposons que les conditions*

1) s'il existe $N > 0$ tel que

$$\operatorname{supp} q(x) \subset [-N, N] \tag{4.78}$$

2)

$$C(N)\|\sqrt{q}\|^2 < 1 \tag{4.79}$$

sont vérifiées

$$C(N) = \frac{1}{2} \sup_{|s|,|t|<N} \left| \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left[\exp\left(i|s - t - \Delta|\sqrt{\zeta} \right) - 1 \right] \right|, \quad |\sqrt{\zeta}| < a \text{ est finie}$$

et

$$\left((1 + Q(0))^{-1}\, \overline{q}_1, q_2 \right) \neq 0 \tag{4.80}$$

où l'opérateur $Q(0)$ est donné par

$$Q(0)c(s) = -\frac{1}{2} q_1(s) \int_{-\infty}^{\infty} c(t) q_2(t) |s - t - \Delta| dt \tag{4.81}$$

(4.81). Alors il existe a_1 tel, que le cercle $|\zeta| < a_1$ ne contient pas un point de spectre continu de l'opérateur L.

Theorem 62 *D'après les conditions* (4.78), (4.79) *et* (4.80), *l'opérateur* L *a un spectre ponctuel fini.*

CHAPTER 5

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU TEMPS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE D'OPÉRATEUR DE STURM-LIOUVILLE SUR LA DROITE

Dans ce chapitre, on considère le cas où les singularités spectrales de l'opérateur de Sturm-Liouville sur la droite génèrent certaines composantes croissantes en temps asymptotique de la solution de l'équation d'évolution correspondante.
Le calcul de ces composantes est donné à l'aide du modèle de Friedrichs de l'opérateur de Sturm-Liouville et une certaine fonction scalaire qui caractérise le point de discontinuité de la transformation de Fourier du modèle de Friedrichs. Un exemple est donné.

5.1 Introduction

Il existe de nombreux travaux concernant les opérateurs avec singularités spectrales dans le spectre continu (voir par exemple [9], [45, 46, 55]). Dans les travaux [9, 12, 16] le modèle de Friedrichs a été utilisé pour obtenir une analyse spectrale des opérateurs de Sturm-Liouville. Nous continuons le travail dans cette direction. Notre but est d'étudier l'influence de la singularité spectrale dans le comportement asymptotique de la solution de l'équation d'évolution correspondante. Le cas de l'opérateur de Sturm-Liouville sur la demi-droite a été considéré dans le travail [9]. En utilisant [9], nous obtenons maintenant de la même manière une analogie dans le cas de la droite. Des questions proches ont été considérées dans le travail [15] pour un certain opérateur de transport sans singularité spectrale.

Dans la deuxième section, la fonction de Weyl est présentée suivant le travail [16]. Après avoir eu le ≪saut≫ de la fonction de Weyl, nous avons donc le ≪saut≫ de la résolvante et nous écrivons l'égalité de Parseval. La preuve de cette égalité peut être réalisée à l'aide des travaux concernant l'opérateur différentiel non auto-adjoint (voir [41]). Dans la troisième section une fonction auxiliaire qui décrit la nature des points de discontinuité est donnée dans [9]. Le comportement asymptotique de la solution de l'équation d'évolution correspondante est donnée dans la quatrième section en utilisant un exemple où le spectre ponctuel est fini, les vecteurs propres et les fonctionnelles propres sont données explicitement.

5.2 Fonction de Weyl et l'égalité de Parseval

Nous considérons dans l'espace $L^2(-\infty,\ \infty)$ l'opérateur de Sturm-Liouville

$$Ly = -y'' + q(x)\, y, \qquad -\infty < x < \infty \tag{5.1}$$

avec un domaine de définition maximal. Nous supposons que le potentiel à valeurs complexes $q(x)$ satisfait la condition

$$|q(x)| \leq C\ e^{-\varepsilon|x|},\ \varepsilon > 0, \qquad -\infty < x < \infty \tag{5.2}$$

On va considérer l'expression différentielle (5.1) séparément sur les demi-axes $(-\infty,\ 0)$ et $(0,\ \infty)$. Les éléments de l'espace

$$\hat{H} = L^2(0,\ \infty) \oplus L^2(0,\ \infty)$$

sont désignés par $\hat{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Soit $Z : L^2(-\infty,\ \infty) \to \hat{H}$ l'opérateur défini par la relation suivante

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Zy\,(x) = \begin{pmatrix} y\,(-x) \\ y\,(x) \end{pmatrix},\ x > 0 \tag{5.3}$$

avec $D\,(Z) = L^2\,(-\infty,\ \infty)$. Evidemment, l'opérateur Z est unitaire et

$$y = Z^{-1}\hat{y} = Z^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} y_1\,(-x)\,,\ x < 0 \\ y_2\,(x)\,, \quad x > 0 \end{cases}$$

Nous définissons dans l'espace $L^2\,(0,\ \infty)$ deux opérateurs maximaux de Sturm-Liouville

$$L^{(k)}_{\max} y = -y'' + q_k\,(x)\,y, \quad y \in D\left(L^{(k)}_{\max}\right) \subset \hat{H}^{(k)}, \quad k = 1,2 \tag{5.4}$$

où $q_1\,(x) = q\,(-x)\,,\, q_2\,(x) = q\,(x)\,,\ x > 0$. Alors l'opérateur $\hat{L} : \hat{H} \to \hat{H}$ où

$$\hat{L}\hat{y} = \begin{pmatrix} L^{(1)}_{\max} y_1 \\ L^{(2)}_{\max} y_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{y} \in D\left(\hat{L}\right) \tag{5.5}$$

et

$$D\left(\hat{L}\right) = \left\{\hat{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ y_k \in D\left(L^{(k)}_{\max}\right),\ k = 0,1,\ y_1\,(0) = y_2\,(0)\,,\ -y_1'\,(0) = y_2'\,(0)\right\}$$

est unitairement équivalent à l'opérateur initial $L : L^2\,(-\infty,\ \infty) \to L^2\,(-\infty,\ \infty)$ (voir (5.1)). Rappelons la définition de la fonction de Weyl $m_\pm\,(\lambda)$ pour l'opérateur L (voir [52]). Soit $\varphi\,(x,\ \lambda)\,, \theta\,(x,\ \lambda)$ sont les solutions sur l'intervalle $(-\infty,\ \infty)$ de l'équation $-y'' + q\,(x)\,y = \lambda y$ qui satisfont les conditions aux limites

$$\begin{cases} \varphi\,(0,\ \lambda) = 0,\ \theta\,(0,\ \lambda) = 1 \\ \varphi'_x\,(0,\ \lambda) = -1,\ \theta'_x\,(0,\ \lambda) = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Alors les relations

$$\theta\,(x,\ \lambda) + m_-\,(\lambda)\,\varphi\,(x,\ \lambda) \in L^2\,(-\infty, 0) \tag{5.7}$$

et

$$\theta(x,\ \lambda)+m_{+}(\lambda)\,\varphi(x,\ \lambda)\in L^{2}(0,\infty) \tag{5.8}$$

définissent les fonctions $m_{\pm}(\lambda)$ d'une manière unique.
Nous changeons $x\to -x$ dans (5.1). Comme $(\varphi(-x,\ \lambda))'=-\varphi'_{x}(-x,\ \lambda)$ dans la condition (5.6) pour $\varphi(-x,\ \lambda)$ la valeur (-1) est changée par 1.
L'équation $-\varphi''(x)+q(x)\,\varphi(x)=\lambda\varphi(x)$ est homogène alors la fonction -$\varphi(-x,\ \lambda)$ est aussi une solution. Évidemment, la solution $(\theta(-x,\ \lambda))\,,\ -\varphi(-x,\ \lambda)$ satisfait (5.6). Nous définissons la fonction $m^{(1)}(\lambda)$ par la relation

$$\theta(-x,\ \lambda)+m^{(1)}(\lambda)\,(-\varphi(-x,\ \lambda))\in L^{2}(-\infty,0)\,,\quad q_{1}(x)=q(-x) \tag{5.9}$$

Si nous changeons $x\to -x$ dans (5.7), on obtient

$$\theta(-x,\ \lambda)+m_{-}(\lambda)\,\varphi(-x,\ \lambda)\in L^{2}(-\infty,0)$$

Donc $m^{(1)}(\lambda)=-m_{-}(\lambda)$. Nous définissons $m^{(2)}(\lambda)$ par la condition $\theta(x,\ \lambda)+m^{(2)}(\lambda)\,\varphi(x,\ \lambda)\in L^{2}(0,\infty)\,,\quad q_{2}(x)=q(x)\,.$ Alors $m^{(2)}(\lambda)=-m_{+}(\lambda)\,.$
Nous rappelons que si $e_{k}(x,\ \lambda)$ est la solution de Yost de l'équation (voir [52])

$$-y''+q_{k}(x)\,y=\lambda y,\quad x\in(0,\infty)\,,\ k=0,\ 1. \tag{5.10}$$

alors

$$m^{(k)}(\lambda)=\frac{e'_{k,x}(0,\ \lambda)}{e_{k}(0,\ \lambda)} \tag{5.11}$$

Le modèle de Friedrichs de l'opérateur L est donné dans [16] par la manière suivante. Soit l'opérateur unitaire $\mathcal{F}:L^{2}(0,\ \infty)\longrightarrow L^{2}_{p}(0,\ \infty)\,,\ \rho(\tau)=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\tau}$ tell que

$$\varphi(\tau)=\mathcal{F}u(\tau)=\int\limits_{0}^{\infty}u(x)\,\frac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}}dx,\ u(x)=\mathcal{F}^{-1}\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\tau)\sin x\sqrt{\tau}d\tau \tag{5.12}$$

Notons par H l'espace des $\mathcal{F}$-transformations des éléments $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \hat{H}$:

$$\varphi = \mathcal{F}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}y_1 \\ \mathcal{F}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in L^2_\rho(0,\ \infty) \oplus L^2_\rho(0,\ \infty) \equiv H.$$

Alors l'opérateur $T = ULU^{-1} : H \to H,\ U = \mathcal{F}Z$ est de la forme

$$T = S + V, \qquad \varphi \in D(S) \tag{5.13}$$

où

$$V\varphi = \begin{pmatrix} V_1\varphi_1 \\ V_2\varphi_2 \end{pmatrix},\ V_k\varphi_k = \mathcal{F}\left(q_k\mathcal{F}^{-1}\varphi_k\right), \quad k = 1, 2$$

Pour décrire l'opérateur S dans (5.13) on a besoin de deux fonctionnelles auxiliaires dans l'espace $L^2_\rho(0,\ \infty)$. Le symbole $c(\varphi)$ signifie le nombre tel que

$$\int_0^\infty |\tau\varphi(\tau) + c(\varphi)|^2 \rho(\tau)\ d\tau < \infty, \quad \varphi \in L^2_\rho(0,\ \infty).$$

Soit $S_0 : L^2_\rho(0,\ \infty) \to L^2_\rho(0,\ \infty)$ où $S_0\varphi(\tau) = \tau\varphi(\tau),\ \ \tau > 0$ avec un domaine de définition maximal. Notons que $L^2_\rho(0,\ \infty) = D(S_0) \dotplus \left\{\dfrac{1}{1+\tau}\right\}$. Si $\varphi \in D(S_0)$ nous définissons

$$(\varphi,\ 1) = \lim_{N\to\infty} (\varphi,\ 1_N)_H, \quad 1_N(x) = \chi_{[0,\ n]}(x),\ x > 0\ \varphi \in D(S)$$

et si $\varphi(\tau) = \dfrac{1}{1+\tau}$ alors on définit $\left(\dfrac{1}{1+\tau},\ 1\right) = -1$.
Notons que si $\varphi = \mathcal{F}u$ (voir (5.12)) alors

$$c(\varphi) = -u(0), \quad (\varphi,\ 1) = u'(0) \tag{5.14}$$

Maintenant, on définit l'opérateur $S : H \to H$ par les relations suivantes

$$\begin{cases} D(S) = \left\{ \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in H : \begin{pmatrix} \tau\varphi_1(\tau) + c(\varphi_1) \\ \tau\varphi_2(\tau) + c(\varphi_2) \end{pmatrix} \in H \right\},\ c(\varphi_1) = c(\varphi_2), \\ \qquad\qquad (\varphi_1,\ 1) = -(\varphi_2,\ 1) \\ S\varphi(\tau) = \begin{pmatrix} \tau\varphi_1(\tau) + c(\varphi_1) \\ \tau\varphi_2(\tau) + c(\varphi_2) \end{pmatrix}, \varphi \in D(S) \end{cases}$$

on note $T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$ et $(T_\sigma\varphi,\ \psi)_\pm = \lim\limits_{\epsilon \to 0} (T_{\sigma + i\epsilon}\varphi,\ \psi),\ \sigma > 0$ (voir 5.13).

Permettez-nous d'introduire la fonction de Weyl matricielle

$$M(\zeta) = \frac{1}{m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta)} \begin{pmatrix} m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta) & m^{(2)}(\zeta) \\ -m^{(1)}(\zeta) & -1 \end{pmatrix},\quad \zeta \notin [0,\ \infty) \tag{5.15}$$

alors (voir [44])

$$(T_\sigma\varphi,\ \psi)_+ - (T_\sigma\varphi,\ \psi)_- = \Big((\varphi,\ f(\sigma)),\ \overline{(M_+(\sigma) - M_-(\sigma))\,(\ f^*(\sigma),\ \psi)}\Big)_{\mathbb{C}^2},\ \sigma > 0 \tag{5.16}$$

où les deux vecteurs $(\varphi,\ f(\sigma))$, $(\ f^*(\sigma),\ \psi)$ représentent (en tant que composantes) les fonctions propres du spectre continu respectivement pour le potentiel T^* et T, i.e.

$$(h(T)\varphi,\ f(\sigma)) = h(\sigma)(\varphi,\ f(\sigma)),\ (\ f^*(\sigma),\ h(T^*)\psi) = \overline{h(\sigma)}\,(\ f^*(\sigma),\ \psi) \tag{5.17}$$

pour chaque fonctionnelle rationnelle $h(\sigma)$ bornée sur $[0,\ \infty)$.

5.3 Fonction indicatrice

Ici on suppose que le spectre ponctuel de l'opérateur T est fini i.e il a un nombre fini de valeurs propres $\lambda \notin [0,\ \infty)$ et singularité spectrale $\sigma_0 \in (0,\ \infty)$. Rappelons que le point $\sigma_0 \in (0,\ \infty)$ est appelé singularité spectrale pour l'opérateur T si certaines fonctions $(T_\sigma\varphi,\ \psi)_\pm$ ne sont pas bornées dans le voisinage de σ_0 pour les éléments " lisses" $\varphi,\ \psi\ \in \Phi$ où $\overline{\Phi} = H$.

Notre but est de trouver le comportement asymptotique de l'expression $e^{itT}\varphi$ à l'aide de l'égalité de Parseval de l'opérateur T. Pour simplifier le calcul on suppose que le spectre ponctuel contient un point unique, appelé la singularité spectrale $\sigma_0 \in (0, \ \infty)$ et que dans un voisinage de σ_0 nous avons la représentation

$$M_+(\sigma) - M_-(\sigma) = \frac{M_0(\sigma)}{\sigma - \sigma_0}, \ M_0(\sigma) \neq 0, \ |\sigma - \sigma_0| < \delta \tag{5.18}$$

où $\|M_0(\sigma)\| \leq C, \ |\sigma - \sigma_0| < \delta$ pour un certain $\delta > 0$. L'égalité de Parseval peut être obtenue par la méthode d'intégration des contours. Nous allons voir l'égalité de Parseval pour les éléments

$$\varphi = \left(e^{itT} - e^{it\sigma_0}\right)\varphi_0, \ \varphi_0 \in \Phi$$

et $\psi \ \in \Phi$. Après (5.16)-(5.17), et l'égalité de Parseval prend la forme

$$\left(\left(e^{itT} - e^{it\sigma_0}\right)\varphi_0, \ \psi\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{itT} - e^{it\sigma_0}}{\sigma - \sigma_0}\left((\varphi, \ f(\sigma)), \ \overline{M_0(\sigma)(\ f^*(\sigma), \ \psi)}\right)_{\mathbb{C}^2} d\sigma \tag{5.19}$$

puisque le spectre ponctuel de T contient un point unique σ_0 seulement. Pour motiver l'existence de $e^{itT}\varphi_0$ on peut utiliser les estimations correspondantes pour les fonctionnelles propres et certaines $\lim\limits_{n} h_n(\tau) = e^{it\tau}$ (voir (5.17)).
Notons par $\mathcal{R}_{\sigma_0}$ la transformation

$$\mathcal{R}_{\sigma_0}\varphi(s) \equiv \frac{(\varphi(s) - \varphi(\sigma_0))}{(s - \sigma_0)},$$

par exemple

$$\mathcal{R}_{\sigma_0}\left(e^{its}\right) = \frac{e^{its} - e^{it\sigma_0}}{s - \sigma_0}$$

Les dérivées sont

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!}\left(\frac{d}{ds}\right)^k \mathcal{R}_{\sigma_0}\left(e^{its}\right) &= \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{ds}\right)^k \mathcal{R}_s\left(e^{it\sigma_0}\right) = \mathcal{R}_s^{k+1}\left(e^{it\sigma_0}\right) \\
&= \frac{1}{(\sigma_0 - s)^{k+1}}\left[e^{it\sigma_0} - \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} e^{its}\left(it\left(\sigma_0 - s\right)\right)^j\right] \\
&= t^{k+1} e^{its} l_k\left(t\left(\sigma_0 - s\right)\right),
\end{aligned}$$

où

$$l_k(y) = \frac{1}{y^{k+1}}\left[e^{iy} - \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}(iy)^j\right].$$

Nous indiquerons certaines propriétés de la transformation (appelée fonction indicatrice)

$$\omega_f(t) = \int_0^\infty f(s)\, \mathcal{R}_s\left(e^{its}\right)(\sigma_0)\, ds \tag{5.20}$$

ou, plus généralement

$$\omega_{f,\ k}(t) = \int_0^\infty f(s)\left(\mathcal{R}_s^{k+1}\left(e^{its}\right)\right)(\sigma_0)\, ds, \quad k = 0,\ 1,\ ...,\ f \in L_\rho^2(0,\ \infty),\ \sigma_0 > 0.$$

Les propriétés 1)-5) sont prouvés dans [9].

1) Soit $\Delta = (\sigma_0 - \delta,\ \sigma_0 + \delta),\ \delta > 0$ et $\chi_\Delta(.)$ est la fonction caractéristique de Δ, alors

$$\omega_{f,\ k}(t) = \omega_{f\chi_\Delta,\ k}(t) + O\left(t^k\right),\ f \in L_\rho^2(0,\ \infty),\ t \to \infty.$$

2) Soit $f \in L_\rho^2(0,\ \infty)$ alors

$$\left|\omega_{f,k}(t)\right| \le C_k\, |t|^{\frac{k+1}{2}}\, \|f\|_{L_\rho^2}$$

et si en plus $f(s)$ est bornée dans un voisinage de σ_0 alors

$$|\omega_{f,k}(t)| \le C_k |t|^k \ln t, \ |t| > 1.$$

Nous écrivons $\omega_f(t) \equiv \omega_{f,0}(t)$ dans un cas particulier $k = 0$.

3) Si la fonction $g(s)$ a des dérivés continus dans σ_0

$$\omega_{f,g}(t) = g(\sigma_0)\,\omega_f(t) + O(1), \ t \to \infty, \ f \in L^2_\rho. \tag{5.21}$$

On note la transformation de Hilbert par

$$H[f](\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(t)}{t-\sigma}dt, \ \sigma > 0.$$

4) Si $f \in L^2_\rho(0, \ \infty)$ alors

$$\omega_{H[f]}(t) = -i.signe\ t.\omega_f(t) + O(1), \ t \to \infty.$$

5) Si la dérivée de $f(s)$ en σ_0 existe alors $\omega_f(t) = O(1), \ t \to \infty$ et si

$$f(s) = \frac{1}{|s-\sigma_0|^\alpha}, \ 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \ \Delta = (\sigma_0 - \delta, \ \sigma_0 + \delta), \tag{5.22}$$

alors

$$\omega_f(t) = signe\ t.C_\alpha |t|^\alpha e^{it\sigma_0} + O(1), \ t \to \infty, \tag{5.23}$$

où

$$C_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iy}-1}{|y|^{1+\alpha}}dy, \ 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la croissance de $\omega_f(t), \ t \to \infty$ caractérise σ_0 comme un point de discontinuité de la fonction $f(s)$.

Corollary 63 *Si la condition initiale φ_0 dans (5.19) est telle que la transformation $f(s) = (\varphi_0, \ f(s))$ possède σ_0 comme un point de discontinuité de type (5.22) alors $e^{itT}\varphi_0$ peut croître comme (5.23).*

Proof. Est évidente parce que l'intégrale (5.20) se réduit à la fonction indicatrice correspondante $\omega_f(t)$. ■

5.4 Exemple

Nous voulons donner l'opérateur avec une seule singularité spectrale. On utilise l'équation

$$\left[-y''^2 + q(x)\right] y = 0, \ x \in (-\infty, \ \infty),$$

où

$$q(x) = -8\gamma^2\theta \frac{e^{2\gamma x}}{\left(1+\theta e^{2\gamma x}\right)^2}, \ \gamma > 0. \tag{5.24}$$

Si $\operatorname{Im}\theta \neq 0$ alors le potentiel $q(x)$ est continu sur $x \in (-\infty, \ \infty)$. Une des solutions de l'équation (voir [45] ou vérifier directement) est

$$e(x, \ k) = e^{ikx}\left[1 - \frac{2i\gamma}{(k+i\gamma)\left(1+\theta e^{2\gamma x}\right)}\right] \tag{5.25}$$

ou

$$e(x, \ k) = e^{ikx}\left[1 - A(k)\, p(x, \ \theta)\right], \tag{5.26}$$

où

$$A(k) = \frac{1}{k+i\gamma}, \ p(x, \ \theta) = \frac{2i\gamma}{1+\theta e^{2\gamma x}} \tag{5.27}$$

Nous considérons l'opérateur (5.13) ou (5.5), où nous gardons pour $q_1(x)$ la notation de paramètre θ dans (5.25) et pour $q_2(x)$ la notation θ^*.
D'autre part, nous utilisons $\gamma = const$ et nous considérons θ comme une variable. Si nous changeons dans (5.26) $x \to -x, \ k \to -k$ nous obtenons la solution proportionnelle à la solution de Yost $e_1(x, \ k)$ dans $(0, \ \infty)$ pour le potentiel $q_1(x) = q(-x)$, ainsi

$$e_1(x, \ k) = \alpha e^{ikx}\left[1 - A(-k)\, p(-x, \ \theta)\right], \ \alpha = const. \tag{5.28}$$

Comme $q(x, \ k) \sim e^{ikx}, \ x \to \infty$ alors

$$\lim_{x\to\infty} \alpha\left[1 - A(-k)\, p(-x, \ \theta)\right] = 1,$$

donc

$$\alpha = \frac{1}{1 - 2i\gamma A(-k)}. \tag{5.29}$$

Si on note par

$$\beta(x,\ k) = \alpha\left[1 - A(-k)\, p(-x,\ \theta)\right] - 1$$

alors (voir (5.28))

$$e_1(x,\ k) = e^{ikx}\left[1 + \beta(x,\ k)\right],\ x > 0. \tag{5.30}$$

Une transformation simple (voir (5.27)) donne $\alpha A(-k) = -A(k)$ et

$$\beta(x,\ k) = -2i\gamma\theta A(k)\,\frac{1}{e^{2\gamma x} + \theta}$$

d'où

$$\beta(0,\ k) = -\frac{2i\gamma\theta A(k)}{1+\theta},\ \beta'(0,\ k) = \frac{4i\gamma^2\theta A(k)}{(1+\theta)^2} \tag{5.31}$$

Comme $\ln e_1(x,\ k) = ikx + \ln(1 + \beta(x,\ k))$ alors

$$\frac{e'_{1x}(x,\ k)}{e_1(x,\ k)} = ik + \frac{\beta'_x(x,\ k)}{1 + \beta(x,\ k)}$$

et (voir (5.31))

$$\frac{e'_{1x}(x,\ k)}{e_1(x,\ k)} = ik + \frac{4i\gamma^2\theta}{1+\theta}.\frac{1}{k + i\gamma + (k - i\gamma)\theta} \tag{5.32}$$

Maintenant, nous considérons le potentiel $q_2(x) = q(x),\ x > 0$ mais avec une autre valeur θ^* au lieu de θ. Soit $e_2(x,\ k)$ est la fonction de Yost correspondante alors après (5.25)

$$e_2(x,\ k) = e^{ikx}\left[1 + \beta^*(x,\ k)\right],\ \beta^*(x,\ k) = -\frac{2i\gamma}{(k + i\gamma)(1 + \theta^* e^{2\gamma x})}.$$

Par analogie au calcul (5.31)-(5.32) on a

$$\frac{e'_{2x}(0,\ k)}{e_2(0,\ k)} = ik + \frac{4i\gamma^2\theta^*}{k - i\gamma + (k + i\gamma)\theta^*}.$$

D'après (5.11) et (5.32) nous introduisons la fonction

$$\begin{aligned} F(k,\ \theta,\ \theta^*) &= m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta) \\ &= 2ik + \frac{4i\gamma^2\theta}{1+\theta}.\frac{1}{k+i\gamma+(k-i\gamma)\theta} + \frac{4i\gamma^2\theta^*}{1+\theta^*}.\frac{1}{k+i\gamma+(k-i\gamma)\theta^*},\ \zeta = k^2. \end{aligned}$$

Désignons la fonction $F_1(k,\ \theta,\ \theta^*)$ par l'identité suivante

$$F(k,\ \theta,\ \theta^*) = F(1,\ \theta,\ \theta^*) + (1-k)\,F_1(k,\ \theta,\ \theta^*)\,.$$

Plus bas, nous définissons $\theta_0,\ \theta_0^*$, où $\operatorname{Im}\theta_0 \neq 0$ comme valeurs qui satisfont l'égalité

$$F(1,\ \theta_0,\ \theta_0^*) = 0 \tag{5.33}$$

Les pôles de $M(\zeta)$ d'après (5.15) satisfont l'équation $m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta) = 0$. Comme $\theta_0,\ \theta_0^*$ satisfaisant (5.33) on a $m^{(1)}(\zeta) + m^{(2)}(\zeta)\big|_{\zeta=1} = F(1,\ \theta_0,\ \theta_0^*) = 0$ donc $\zeta = 1$, c'est-à-dire $\sigma_0 = 1$ est le pôle de $M(\zeta)$ et σ_0 est la singularité spectrale de T.

Theorem 64 *Soient $\theta_0,\ \theta_0^*$ deux valeurs telles que (5.33) est satisfaite. Soit φ_0 un élément, tel que pour $f \in L^2_\rho(0,\ \infty)$, sous la forme (5.22), le produit scalaire $(\varphi_0,\ f(s))$ possède le point de discontinuité de la même forme. Alors l'expression $\left(e^{itT}\varphi_0,\ \psi\right)$ pour une certains ψ est croissante comme l'expression (5.23).*

Proof. Nous utilisons la représentation (5.19), la définition de la fonction indicatrice $\omega_f(t)$ (voir (5.20) et sa propriété (5.21). Si f satisfait (5.22) alors $\omega_f(t)$ satisfait l'estimation (5.23). ■

Remark 65 *L'existence de l'élément φ_0 dans le théorème* 4.1 *signifie l'existence de l'élément $\hat{u}_0 \in \hat{H}$ (voir (5.3)) tel que $u_0(-x) = 0,\ x > 0$ et*

$$\int_0^\infty u_0(x)\,e(x,\ s)\,dx = v(s)$$

où $v(s)$ est définie par (5.22). Selon la transformation de Fourier pour l'opérateur *de Sturm-Liouville (5.1) avec le potentiel (5.24) nous avons*

$$\int_0^\infty e^{ist}\left[1-\frac{2i\gamma}{(s+i\gamma)\left(1+\theta e^{2\gamma x}\right)}\right]u_0\left(x\right)dx=v\left(s\right),$$

ou en utilisant une transformation de Fourier classique, nous obtenons

$$u_0\left(x\right)+Au_0\left(x\right)=v_1\left(x\right)$$

pour un certain opérateur A, où $\|A\|\leq q<1$ pour tout $\gamma>0$ et pour une valeur suffisamment grande θ. Alors, l'élément u_0 existe et est unique.

5.5 Conclusion

Nous avons considéré un opérateur de Sturm-Liouville non-auto-adjoint sur la droite. Si toutes les valeurs propres donnent des termes décroissants dans la décomposition spectrale de $\exp\left(itT\right)\varphi_0$ alors évidemment la fonction vectorielle $\exp\left(itT\right)\varphi_0$ est bornée si $t\to\infty$. A l'aide d'un exemple, nous prouvons que $\exp\left(itT\right)\varphi_0$ peut croître comme $|t|^\alpha$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$ si

a) Il existe une singularité spectrale σ_0 de l'opérateur T

b) Le point σ_0 est un point de discontinuité de la transformation de Fourier de l'élément φ.

BIBLIOGRAPHY

[1] Akhiezer.I.N. and Glazman.I. M., Theory of Linear Operators in Hilbert Space, F. Ungar, New York, 1961.

[2] Beals.R., Topics in Operator Theory, University of Chicago Press, Chicago, 1972.

[3] Berezansky Yu.M., Decomposition on eigenvalues of selfadjoint operators, 1965, 748 p. (Russian).

[4] Berezanskij.YU. M., Expansion on eigenfunctions of selfadjoint operators, Naukova dumka, Kiev,1965 (Russian).

[5] Binding.P.A., Browne.P.J., Watson.B.A., Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter. I, Proc. Edinb. Math. Soc., (2) 45 (2002), no. 3, pp. 631–645.

[6] Bremermann.H, Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms,1965.

[7] Cheremnikh E. V., On time Asymptotic of the solution of some Cauchy's problem with spectral singularities, Mah. Studii, 1993, n. 2, p. 64-72 (Ukrain).

[8] Cheremnikh E. V., On the limit values of the resolvent on continuous spectrum, Visnyk "Lviv Polytechnic" Appl. Math. 4 (1997), no. 320, 196–203. (Ukrain).

[9] Cheremnikh E. V., Asymptotic behaviour of the solution of some evolution equations, Math. meth. and phys.-mech. fields, 40(1997), 75–85.

[10] Cheremnikh E. V., Friedrichs' model and problems with non-local conditions, Math. Meth. and Phys.-Mech. Fields. 43, n.3 (2001), 146–156 (Ukrain).

[11] Cheremnikh E. V., Nonselfadjoint Friedrichs' model and Weyl function, Dokl. Akad. Nauk Ukrain.8 (2001), 22–29 (Ukrain).

[12] Cheremnikh E. V., On normal eigenvalue embedded in continuous spectrum, Meth. Funct. Anal.and Topology. 1 (2001), 1–16.

[13] Cheremnikh E. V., On the stability of space asymptotic behaviour of the solutions of evolution equations, Ukrain. Math. J., 2002, v. 54, n.3, p. 395-401 (Ukrain).

[14] Cheremnikh E. V., " On certain resolvent convergence of one non-local problem to a problem with spectral parameter in boundary condition", Vol. 14 (2008), no. 4, pp. 302–313.

[15] Cheremnikh E. V., Diaba.F, Ivasyk.G.V., On the asymptotic of the solution of transport evolution equation, Mathem. and Computer. model. Phys.-mathem. sciences, 4(2010), 208–223.

[16] Cheremnikh E. V., On Weyl function for Sturm-Liouville operator on the line (in print).

[17] Cheremnikh E. V., Ivasyk.G.V., Sufficient condition of Finiteness of point spectrum (in print).(English).

[18] Diaba.F., Cheremnikh E.V. On the point spectrum of transport operator, Math. Func, Anal. and Topology, v.11, n.1, 2005, 21-36.

[19] Diaba.F., Zemmouri.A, Cheremnikh. E. V., Sturm-Liouville operator on the line with retarded potential, Advanced Research in Dynamical and Control Systems, Vol. 6, Issue. 3, 2014, pp. 53-61 Online ISSN: 1943-023X.

[20] Diaba.F., Larribi.N., Cheremnikh.E.V., Finitness of the point spectrum of transport operator with matricial 2x2 potential. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768 Volume 12, Number 3 (2016), pp. 2561-2571.

[21] Dunford.N. et Schwartz.J.T., Linear Operators, Vols. 1, 2, Interscience, New York, 1957, 1963.

[22] Elsgoltz L. E., Norkin S. B., Introduction in the theory of differential equations with deviated argument. Nauka, 1971, p. 296.

[23] Faddeev.L.D., Sur le modèle de Friedrichs dans la théorie de perturbation du spectre continu, Travaux de l'Inst.Math.Academic des Sciences l'URSS, 1964, V.73, p.292-313.

[24] Friedrichs.K.O., Uber die Spectralzerlegungeines Integral operators. Math.Annal.115, N02,1938, 249-300.

[25] Friedrichs.K.O., On the perturbation of continuous spectrum, Comm.pure .appl.math., 1, $N^0 4$, 1948, 361-406.

[26] Fuhrmann.P.A., Operator measures,self-adjoint operators and dynamical systems, Siam J. Math. Anal. Vol. 11, No. 4, July 1980, 1980 Society for Industrial and Applied Mathematics.

[27] Fuhrmann.P.A., On the corona theorem and its applications to spectral problems in Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc., 132 (1968), pp. 55-66.

[28] Gahov.F. D. , Boundary- value problems, Fizmatgiz, Moscow, 1958, 2nd rev. ed. 1963; English transl., Pergamon Press, Oxford and Addition-Wesley, Reading, Mass., 1966. MR 21 " 2879; MR 27 " 6094; MR 33" 6311.

[29] Gesztesy.F., Eikard.R.W, Zinchenko.M., Initial value problems and Weyl-Titchmarsh theory for Schrodinger operators with operator valued potentials, Operators and matrices. 7, n.2 (2013), 241–283.

[30] Gohberg.I.Z., Krein.M.G., Introduction to the theory of linear non selfadjoint operators, pp. 448, 1965 (Russian).

[31] Gouasmia.O., Diaba.A., Diaba.F., Cheremnikh.E.V., Time asymptotic behavior of exponential function of Sturm-Liouville operator on the line.Volume 12, Number 6 (2016), pp. 5067–5077.

[32] Halmos.P.R., Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, Chelsea, New York, 1951.

[33] Hautus.M.L.J. et Heyman.M., Linearfeedback-An algebraic approach, SIAM J. Control Optim., 16 (1978), pp. 83-105.

[34] Hellinger.E., Die Orthogonalinvariainten Ouadratischer Formen, Inaugural–dissertation, Ghtingen, 1907.

[35] Helson.H., Lectures on Invariant Subspaces, Academic Press, New York, 1964.

[36] Helton.J.W., Discrete time systems, operator models and scattering theory, J. Functional Analysis, 16.

[37] Helton.J.W., Discrete time systems, operator models and scattering theory, J. Functional Analysis, 16 (1974), pp 15-38.

[38] Ivasyk G.V., Cheremnikh E. V., Friedrichís model for transport operator, Journal of National University ìLvivska Politechnikaî, Phys. and math. sciences, v.643, n.643, 2009, 30-36 (Ukrain).

[39] Kac.I. S., Krein.M.G., R-functions – analytic functions mapping the upper half plane into itself, in: F. V. Atkinson, Discrete and Continuous Boundary Problems, Mir, Moscow, 1968, pp. 629–642 (Appendix). (Russian).

[40] Kalman.R.E., Lectures on Controllability and Observability, CIME summer 1968, Cremonese, Roma, 1969.

[41] Kako.T.,Yajima.K., Spectral and scattering theory for a class of nonselfadjoint operators, Sci. Par. Coll. Gen Educ. Univ. Tokyo,26(1976), 73–89.

[42] Kato.T., Perturbation theory for linear operators, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 132, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1966. MR 34 " 3324.

[43] Kuperin Yu.A., Naboko S.N., Romanov R.V., Spectral analysis of a one speed transmission operator and functional model, Funct. anal. and its appl. (1999), v.33, n.2, 47-58 (Russian).

[44] Lamb.G. L., IR, Elements Of Soliton Theory, John Wiley and Sons Inc, New York,1980.

[45] Ljance.V.E., Decomposition on principal function of the operator with spectral singularities, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. XI,8(1966), 921–950.

[46] Ljance.V.E., Decomposition on principal functions of the operator with spectral singularities, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. XI,10(1966), 1187–1224.

[47] Ljance.V.E., A differential operator with spectral singularities, Math. Sb. 64 (106) (1964), 521-561; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 60 (1966); 185-225. MR 30 " 5023.

[48] Ljance.V.E., The inverse problem for a non-selfadjoint operator, Dokl. Akad. Nauk SSSR 166 (1966), 39-33= Sovient Math. Dokl. 7 (1966), 27-30. MR 33 " 4720.

[49] Ljance.V.E., Non-selfadjoint one-dimensional perturbation of the operator of multiplication by the independent variable, Dokl. Akad. Nauk SSSR 182 (1968), 1010-1013= Sovient Math. Dokl. 9 (1968), 1241-1245. MR 38" 1557.

[50] Ljance.V.E., Completement perturbation of continuous spectrum Mat. sb. I 82 (124), 1970, 126-156, II 84 (126), 1971, 141-158 (Russian).

[51] Lehner I., The spectrum of neutron transport operator for the finite slab, I.Math. Mech. 11(1962), n.2, 173-181.

[52] Levitan.B. M. , Sargsian.I.S., Introduction in spectral theory, Nauka, Moscow,1970.

[53] Marčenko.V. A., Expansion in eigenfunctions of non-selfadjoint singular differential operators of second order, Mat. Sb. 52 (94) (1960), 739-788; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 25 (1963), 77-130. MR 23 " A3313.

[54] Nagy-B. Sz. and C. Foais, Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, North-Holland, Amsterdam, 1970.

[55] Naimark.M.A., Linear Differential Operators, Nauka, Moscow, 1969 (Russian).

[56] Nelson.E., Topics in Dynamics I: Flows, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1969.

[57] Pavlov.B. S, Non-physical sheet for Friedrichs' model, Algebra i Analiz 4 (1992), no. 6, 220–233. (Russian).

[58] PAZY, A., "Semigroups of linear opertors and applications to partial differential equations," Springer-Verlag, 1983.

[59] Rudin.W. , Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.

[60] Schwartz.J., Some non-selfadjoint operators, Comm. Pure Appl. Math. 13(1960), 609-639 MR 29" 2656.

[61] Titchmarsh.E. C., Introduction to the theory of Fourier integrals, Clarendon Press, Oxford, 1937; Russian transl.; GITTL, Moscow, 1948.

[62] —–, Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators, Math. Ann. 162 (1965/6th6), 258-279. MR 32 " 8211

[63] Yosida.K., Functional analysis, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 123, Academic Press, New York; Springer -Verlag, Berlin 1965; Russian transl.; "Mir", Moscow 1967. MR 31" 5054; 37 " 725.