وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2018 /2019

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Option
Systèmes Dynamiques

SOLUTIONS PERIODIQUES DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES

Présentée Par

Feddaoui Amina

DIRECTEUR DE THÈSE : Makhlouf Ammar Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :	Ghanem Radouane	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATRICE :	Badi Sabrina	M.C.A	U.8 MAI GUELMA
EXAMINATEUR:	Hadidi Elbahi	M.C.A	U.B.M. ANNABA

Remerciements

Avant tout je tiens à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse **Pr. Amar Makhlouf** pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour sa disponibilité et sa patience, pour ses qualités humaines et scientifiques. Un grand merci de m'avoir donné la chance de réaliser ce modeste travail.

Mes plus sincères remerciements vont également à **Pr. Ghanem Radouane** qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ainsi que Madame **Badi Sabrina** et Monsieur **Hadidi Elbahi** pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Je remercie chaleureusement mes chers parents, mon époux et mes soeurs qui m'ont toujours encouragé au long de mon parcours.

Je tiens à exprimer mes remerciements à tous les miens qui m'ont soutenu par leur amour et leur confiance. À mes amis qui trouveront ici toute ma reconnaissance pour leurs aides et encouragements à terminer cette thèse.

Ces remerciements ne peuvent s'achever sans remercier ma famille, Sa présence et ses encouragements sont pour moi les piliers fondateurs de ce que je suis et de ce que je fais !

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions l'existence des solutions périodiques de cinq problèmes de systèmes différentiels ordinaires perturbés.

Premièrement nous considérons le centre isochrone uniforme

$$\dot{x} = -y + x^4 y, \quad \dot{y} = x + x^2 y^2,$$

et nous le perturbons par les polynômes homogènes de degré 5.

Deuxièmement, nous étudions les conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques pour les systèmes différentiels

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = -y - \varepsilon F(t, x, y, z), \quad \text{et}$$

$$x' = y, \quad y' = -x - \varepsilon G(t, x, y, z, u), \quad z' = u, \quad u' = -z - \varepsilon H(t, x, y, z, u),$$

où F, G et H sont des fonctions 2π-périodiques et ε est un petit paramètre.

Troisièmement, nous étudions les conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques et leur stabilité de la classe des équations différentielles du quatrième ordre non autonomes de la forme

$$\ddddot{u} + (a_1 u + a_0)\dddot{u} + (b_1 u + 1 + b_0)\ddot{u} + (c_1 u + a_0)\dot{u} + c_2 u^2 + b_0 u = \varepsilon^2 F(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u}, \varepsilon),$$

où $a_0, a_1, b_0, b_1, c_1, c_2$ sont des paramètres arbitraires réels, et la fonction $F : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^4$ est de classe C^2, où Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$, $(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u}) \in \mathbb{R}^4$ et $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ avec $\varepsilon_0 > 0$ petit.

Quatrièmement, nous étudions les conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques de la classe des équations différentielles de Duffing de la forme

$$x'' + c(t)x' + a(t)x + b(t)x^3 = h(t, x),$$

où les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ et $h(t, x)$ sont C^2 et T-périodiques.

Cinquièmement, nous étudions l'existence des solutions périodiques bifurquant de l'origine des coordonnées des systèmes différentiels d'un polynôme dans $\mathbb{R}^4$ non-linéaire homogènes cubiques de la forme

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^{2}\varepsilon^j X_j(x,y,z,w),\\
\dot{y} &= (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^{2}\varepsilon^j Y_j(x,y,z,w),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^{2}\varepsilon^j Z_j(x,y,z,w),\\
\dot{w} &= (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^{2}\varepsilon^j W_j(x,y,z,w),
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
X_j(x,y,z,w) &= a_{j0}x^3 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}x^2w + a_{j4}xy^2 + a_{j5}xyz + a_{j6}xyw\\
&\quad + a_{j7}xz^2 + a_{j8}xzw + a_{j9}xw^2 + a_{j10}y^3 + a_{j11}y^2z + a_{j12}y^2w + a_{j13}\\
&\quad yz^2 + a_{j14}yzw + a_{j15}yw^2 + a_{j16}z^3 + a_{j17}z^2w + a_{j18}zw^2 + a_{j19}w^3,
\end{aligned}
$$

$Y_j(x,y,z,w)$, $Z_j(x,y,z,w)$ et $W_j(x,y,z,w)$ ont la même expression que $X_j(x,y,z,w)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji}, c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0,1,2$ et $i = 0,1,\ldots,19$, respectivement. Les coefficients $a_{ji}, b_{ji}, c_{ji}, d_{ji}, a_1, a_2, b, b_1, b_2,\ c_1, c_2, d_1, d_2$ sont des paramètres réels avec $b \neq 0$.

Mots-clés: Solution périodique, Système différentiel, Equation différentielle, Méthode de la moyennisation.

Classification AMS: 37G15, 37C80, 37C30, 34C07, 34C05, 34C40.

Abstract

In this thesis, we study the existence of periodic solutions of five problems of ordinary differential systems.

Firstly we consider the uniform isochronous center

$$\dot{x} = -y + x^4 y, \quad \dot{y} = x + x^2 y^2,$$

and we perturb it by the homogeneous polynomials of degree 5.

Secondly, we study the sufficient conditions for the existence of periodic solutions for the differential systems

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = -y - \varepsilon F(t, x, y, z), \quad \text{and}$$

$$x' = y, \quad y' = -x - \varepsilon G(t, x, y, z, u), \quad z' = u, \quad u' = -z - \varepsilon H(t, x, y, z, u),$$

where F, G and H are 2π–periodic functions in the variable t and ε is a small parameter.

Thirdly, we study the sufficient conditions for the existence of periodic solutions and their stability of the class of non autonomous 4-order differential equations of the form

$$\ddddot{u} + (a_1 u + a_0)\dddot{u} + (b_1 u + 1 + b_0)\ddot{u} + (c_1 u + a_0)\dot{u} + c_2 u^2 + b_0 u = \varepsilon^2 F(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u}, \varepsilon),$$

where $a_0, a_1, b_0, b_1, c_1, c_2$ are real arbitrary parameters, and the function $F : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^4$ is of class C^2 where Ω is an open subset of $\mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$, $(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u}) \in \mathbb{R}^4$ and $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ with $\varepsilon_0 > 0$ small.

Fourthly, we study the sufficient conditions for the existence of periodic solutions of the class of Duffing differential equations of the form

$$x'' + c(t)x' + a(t)x + b(t)x^3 = h(t, x),$$

where the functions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ and $h(t, x)$ are C^2 and T-periodic.

Fifthly, we study the existence of periodic solutions bifurcating from the origin of coordinates of a polynomial differential systems in $\mathbb{R}^4$ with cubic homogeneous non-linear of the form

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j X_j(x,y,z,w),\\
\dot{y} &= (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j Y_j(x,y,z,w),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j Z_j(x,y,z,w),\\
\dot{w} &= (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j W_j(x,y,z,w),
\end{aligned}
$$

where

$$
\begin{aligned}
X_j(x,y,z,w) &= a_{j0}x^3 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}x^2w + a_{j4}xy^2 + a_{j5}xyz + a_{j6}xyw\\
&\quad + a_{j7}xz^2 + a_{j8}xzw + a_{j9}xw^2 + a_{j10}y^3 + a_{j11}y^2z + a_{j12}y^2w + a_{j13}\\
&\quad yz^2 + a_{j14}yzw + a_{j15}yw^2 + a_{j16}z^3 + a_{j17}z^2w + a_{j18}zw^2 + a_{j19}w^3,
\end{aligned}
$$

$Y_j(x,y,z,w)$, $Z_j(x,y,z,w)$ and $W_j(x,y,z,w)$ have the same expression as $X_j(x,y,z,w)$ by replacing a_{ji} by b_{ji}, c_{ji} and d_{ji} for $j = 0,1,2$ and $i = 0,1,\ldots,19$, respectively. The coefficients $a_{ji}, b_{ji}, c_{ji}, d_{ji}, a_1, a_2, b, b_1, b_2,\ c_1, c_2, d_1, d_2$ are real parameters with $b \neq 0$.

Key words: Periodic solution, Differential equation, Differential system, Averaging method.

Classification AMS: 37G15, 37C80, 37C30, 34C07, 34C05, 34C40.

ملخص

في هذه الأطروحة ندرس وجود حلول دورية من خمسة مشاكل من الأنظمة التفاضلية العادية المضطربة

أولا نعتبر مركز متزامن منتظم

$$\dot{x} = -y + x^4 y, \quad \dot{y} = x + x^2 y^2,$$

المضطرب من جانب كثيرات الحدود المتجانسة من الدرجة 5.

ثانيا، ندرس الشروط الكافية لوجود حلول دورية للأنظمة التفاضلية من الشكل

$$x' = y, \qquad y' = z, \qquad z' = -y - \varepsilon F(t, x, y, z),$$

و $$x' = y, \;\; y' = -x - \varepsilon G(t, x, y, z, u), \;\; z' = u, \;\; u' = -z - \varepsilon H(t, x, y, z, u)$$

حيث F, G و H دوال 2π-دورية و ε وسيط صغير .

ثالثا، ندرس الشروط الكافية لوجود و استقرار حلول دورية لقسم من المعادلات التفاضلية من الدرجة الرابعة الغير المستقلة من الشكل

$$\ddddot{u} + (a_1 u + a_0)\dddot{u} + (b_1 u + 1 + b_0)\ddot{u} + (c_1 u + c_0)\dot{u} + c_2 u^2 + b_0 u = \varepsilon^2 F(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u}, \varepsilon),$$

حيث $\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \mathrm{c}_0, \mathrm{c}_1$ وسائط عشوائية حقيقية و الدالة $F: \mathbb{R} \times \boldsymbol{\Omega} \times (-\varepsilon_{\mathbf{0}}, \varepsilon_{\mathbf{0}}) \to \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ من الفئة C^2 حيث Ω هي مجموعة مفتوحة من$\mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$, $(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ و $\varepsilon \in (-\varepsilon_{\mathbf{0}}, \varepsilon_{\mathbf{0}})$ مع $\varepsilon_{\mathbf{0}} > \mathbf{0}$ صغير .

رابعا، ندرس الشروط الكافية لوجود حلول دورية لقسم من المعادلات التفاضلية ديفنغ من الشكل

$$x'' + c(t)x' + a(t)x + b(t)x^3 = h(t, x),$$

حيث الدوال $a(t), b(t), c(t), h(t, x)$ من الفئة C^2 و T- دورية.

خامسا، نقوم بدراسة وجود حلول دورية لنظم التفاضلية من الشكل

$$\dot{x} = \left(a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2\right)x - \left(b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2\right)y + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j X_j(x, y, z, w),$$

$$\dot{y} = \left(b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2\right)x + \left(a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2\right)y + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w),$$

$$\dot{z} = \left(c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2\right)z + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w),$$

$$\dot{w} = \left(d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2\right)w + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j W_j(x, y, z, w),$$

حيث

$$X_j(x,y,z,w) = a_{j0}x^3 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}x^2w + a_{j4}xy^2 + a_{j5}xyz + a_{j6}xyw$$
$$+ a_{j7}xz^2 + a_{j8}xzw + a_{j9}xw^2 + a_{j10}y^3 + a_{j11}y^2z + a_{j12}y^2w + a_{j13}yz^2$$
$$+ a_{j14}yzw + a_{j15}yw^2 + a_{j16}z^3 + a_{j17}z^2w + a_{j18}zw^2 + a_{j19}w^3,$$

حيث

$Y_j(x,y,z,w)$ و $Z_j(x,y,z,w)$, $W_j(x,y,z,w)$ لهم نفس شكل $X_j(x,y,z,w)$ بتعويض a_{ji} بـ b_{ji} , c_{ji} و d_{ji} من أجل $i = 0,1,\ldots\ldots,19$ و $j = 0,1,2$ بالترتيب، المعاملات $b_{ij}, c_{ij} d_{ij}, a_1, a_2, b_1, b_2,$ c_1, c_2, d_1, d_2 وسائط حقيقية مع $b \neq 0$.

الكلمــات المفتــاحية :

الحل الدوري، المعادلات التفاضلية، الأنظمة التفاضلية، نظرية المتوسط.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles jouent un rôle essentiel pour la modélisation des systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques ou économiques.

Cette notion apparait chez les mathématiciens à la fin du $17^{ème}$ siècle. A cette époque, les équations différentielles s'introduisaient par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique comme par exemple: le mouvement du pendule circulaire, problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation newtonienne, le problème du mouvement des corps élastriques, le problème de l'équation de la courbe décrivant la forme prise par une corde, suspendue aux deux extrémités et soumise à son propre poids...

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de la différentiation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

L'un des problème principaux de la théorie qualitative des équations différentielles est la détermination des cycles limites. Un cycle limite d'un système différentiel est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de ce système. Les cycles limites des champs de vecteurs planaires ont été définis par H. Poincaré. A la fin des années 1920, Van Der Pol, Liénard et Andronov ont prouvé qu'une trajectoire fermée d'une oscillation arrivant dans un circuit de tube vide était un cycle limite .

Après ces travaux, la non-existence, l'existence, l'unicité et d'autres propriétés des cycles limites ont été étudiées largement par des mathématiciens, des physiciens et plus récemment par des chimistes, des biologistes, et des économistes, etc...

En 1881-1886 Poincaré a défini la notion d'un centre comme étant un point isolé singulier entouré par des orbites périodiques. Alors une façon de produire des cycles limites est de perturber un système qui a un centre.

Il y a cinq méthodes pour analyser le nombre de cycles limites bifurquant des orbites périodiques ayant un centre.

La première méthode est basée sur l'application de retour de Poincaré.

La deuxième méthode est basée sur l'intégrale de Poincaré Melnikov.

La troisième est basée sur l'intégrale Abélienne.

La quatrième est la méthode du facteur intégrant inverse.

La cinquième est la méthode de la moyennisation. Celle-ci donne la forme des cycles limites bifurqués.

Les chercheurs ont étudié plusieurs équations différentielles planaires en utilisant les méthodes précédentes pour la détermination des cycles limites.

En général, obtenir des solutions périodiques est un problème difficile et souvent impossible. La méthode de la moyennisation réduit ce problème difficile des systèmes différentiels à la recherche des racines positives d'un système algébrique non linéaire. Cette méthode est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des solutions périodiques des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par Krylov et Bogoliubov en 1937 [27] et Bogoliubov et Mitropolskii (1961) [8]. Elle a été ensuite développée par Verhulst [49], Sanders et Verhulst [46], Malkin (1956) [44], Roseau (1966) [45], Llibre et Buica (2004) [9]...

L'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \tag{i}$$

où t$\in I \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon << 1$ et f est T-périodique en t, et de déterminer l'équation moyennée associée à cette équation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(x), \tag{ii}$$

où

$$F(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,x,0)dt,$$

et chercher les solutions périodiques de l'équation (i).

Cette thèse comporte sept chapitres:

Le premier chapitre est un rappel des notions essentielles utilisées pour l'étude des systèmes dynamiques.

Dans le second chapitre, nous avons introduit la théorie de la moyennisation pour chercher les cycles limites des systèmes différentiels. Nous avons illustré les résultats par des exemples.

Dans le troisième chapitre, on donne le nombre maximum des cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux suivant

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + x^4 y + \varepsilon \sum_{k=0}^{5} a_k x^{5-k} y^k,\\
\dot{y} &= x + x^3 y^2 + \varepsilon \sum_{k=0}^{5} b_k x^{5-k} y^k;
\end{aligned}$$

où ε est un petit paramètre, en appliquant la théorie de la moyennisation du premier ordre.

Dans le quatrième chapitre, on étudie l'existence des solutions périodiques pour les systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = -y - \varepsilon F(t,x,y,z), \quad \text{et}$$

$$x' = y, \quad y' = -x - \varepsilon G(t,x,y,z,u), \quad z' = u, \quad u' = -z - \varepsilon H(t,x,y,z,u),$$

où F, G et H sont des fonctions 2π-périodiques et ε est un petit paramètre, en utilisant la théorie de la moyennisation du premier ordre. Cette étude est illustrée par des applications.

Dans le cinquième chapitre, nous avons donné les conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques de la classe des équations différentielles du quatrième ordre non autonomes

$$\ddddot{u} + (a_1 u + a_0)\dddot{u} + (b_1 u + 1 + b_0)\ddot{u} + (c_1 u + a_0)\dot{u} + c_2 u^2 + b_0 u = \varepsilon^2 F(t,u,\dot{u},\ddot{u},\dddot{u},\varepsilon),$$

où $a_0, a_1, b_0, b_1, c_1, c_2$ sont des paramètres arbitraires réels, et la fonction $F : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^4$ est de classe C^2, où Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$, $(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u}) \in \mathbb{R}^4$ et $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ avec $\varepsilon_0 > 0$ petit, en appliquant la théorie de la moyennisation du premier ordre.

Dans le sixième chapitre, nous avons donnné les conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques de la classe des équations différentielles de Duffing

$$x^{''} + c(t)x^{'} + a(t)x + b(t)x^3 = h(t, x),$$

où les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ et $h(t, x)$ sont C^2 et T-périodiques, en utilisant la théorie de la moyennisation.

Les chapitres 3, 4, 5 et 6 sont soumis chacun pour publication.

Dans le septième chapitre, on étudie l'existence des solutions périodiques bifurquant de l'origine des coordonnées des systèmes différentiels d'un polynôme dans $\mathbb{R}^4$ non-linéaires homogènes cubiques

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\
\dot{y} &= (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\
\dot{z} &= (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\
\dot{w} &= (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j W_j(x, y, z, w),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
X_j(x, y, z, w) &= a_{j0}x^3 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}x^2w + a_{j4}xy^2 + a_{j5}xyz + a_{j6}xyw \\
&\quad + a_{j7}xz^2 + a_{j8}xzw + a_{j9}xw^2 + a_{j10}y^3 + a_{j11}y^2z + a_{j12}y^2w + a_{j13} \\
&\quad yz^2 + a_{j14}yzw + a_{j15}yw^2 + a_{j16}z^3 + a_{j17}z^2w + a_{j18}zw^2 + a_{j19}w^3,
\end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji}, c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \ldots, 19$, respectivement. Les coefficients $a_{ji}, b_{ji}, c_{ji}, d_{ji}, a_1, a_2, b, b_1, b_2,\ c_1, c_2, d_1, d_2$ sont des paramètres réels avec $b \neq 0$, en utilisant la théorie de la moyennisation du second ordre. Ce chapitre a été accepté dans le journal "International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations".

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire des notions de base sur les systèmes dynamiques qui seront utiles par la suite.

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1.1 *Un système dynamique sur* $\mathbb{R}^n$ *est une application* $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *définie et continue sur tout* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ *, telle que*

i) $U(0, x) = x$

ii) $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ *pour* $t, s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ *est linéaire si*

$$\varphi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(t, x) + \beta\varphi(t, y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 1.1.1 *Soit le système*

$$\dot{x} = Ax, \; x(0) = x_0, \tag{1.1.1}$$

où A *est une matrice constante,* $t \in \mathbb{R}^+$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$. *La solution de (1.1.1) est donnée par*

$$x(t) = e^{tA}x_0,$$

le système (1.1.1) engendre un système dynamique

$$\begin{aligned} U \;&:\; \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ U(t, x) \;&=\; e^{tA}x. \end{aligned}$$

1.2 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.2.1 *Soit le système non linéaire autonome*

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $f(x) \in \mathbb{R}^n$.

On appelle flot du système différentiel (1.2.1), l'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *définies par*

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

où $\phi(t, x_0)$ *est la solution de (1.2.1) telle que* $\phi(0, x_0) = x_0$.

Remarque 1.2.1 *Le flot est dit autonome si* f *ne dépent pas explicitement du temps, sinon il est dit non autonome.*

1.3 Points d'équilibre et linéarisation

Définition 1.3.1 *On appelle point d'équilibre du système (1.2.1) tout point* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que :* $f(x_0) = 0$.

Définition 1.3.2 *On appelle système linéarisé du système (1.2.1) au voisinage du point d'équilibre* x_0*, le système*

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.3.1}$$

où $A= Df(x_0)$ *est la jacobienne de* f *au point* x_0*:*

$$Df(x_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0))_{1 \leq i,j \leq n}. \tag{1.3.2}$$

Définition 1.3.3 *Le point critique* x_0 *est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne* $Df(x_0)$ *n'a de partie réelle nulle.*

Remarque 1.3.1 *La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.*

1.3.1 Nature des points critiques

Soit le système (1.3.1), où A est une matrice 2×2, soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres:

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent alors le point critique $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable.

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe on a trois cas:

   (a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un nœud stable.

   (b) Si $0<\lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un nœud instable.

   (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $x = x_0$ est un nœud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.

3. Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un foyer. Il est stable si $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ et il est instable si $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$.

4. Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $x = x_0$ est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable.

1.4 Portrait de phase

Définition 1.4.1 *Soit le système différentiel*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y), \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

où P, Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d.

Le portrait de phase est l'ensemble des orbites qui représentent les solutions du système (1.4.1) dans l'espace des phases ainsi que ces points critiques qui sont considérés comme des solutions constantes. Le plan (xoy) est appelé plan de phase.

1.5 Orbites périodiques et cycles limites

Définition 1.5.1 *On appelle solution périodique toute solution $x = \phi(t)$ de l'équation (1.2.1) telle qu'il existe un nombre T vérifiant $\phi(t + T) = \phi(t)$.*

Une solution périodique du système (1.2.1) correspond a une orbite (courbe) fermée dans l'espace des phases.

Définition 1.5.2 *Un cycle limite est une solution périodique isolée, c'est à dire qu'il existe un voisinage de ce cycle où on ne peut pas trouver une autre orbite fermée.*

Remarque 1.5.1 *Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite, le cycle limite est dit stable ou attractif, sinon il est dit instable.*

Définition 1.5.3 *L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x de ce cycle limite.*

1.6 Ensemble isochrone

L'ensemble isochrone est un ensemble formé uniquement par des solutions périodiques, qui ont la même période.

1.7 Bifurcation de Hopf

Soit le système planaire

$$\dot{x} = f_\mu(x, y),$$
$$\dot{y} = g_\mu(x, y),$$

où μ est un paramètre. Supposons que $(x, y) = (x_0, y_0)$ est un point d'équilibre qui dépend de μ. Soient $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ les valeurs propres d'un système linéarisé au voisinage de ce point d'équilibre.

Supposons que pour $\mu = \mu_0$, les conditions suivantes sont satisfaites

1. $\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) = \omega \neq 0$ où $sgn(\omega) = sgn[(\partial g_\mu / \partial x)|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)]$ (condition de non hyperbolicité).
2. $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$ (condition de transversalité).
3. $a \neq 0$ où $a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + .g_{yyy}) + \frac{1}{16\omega}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy})$,

avec $f_{xy} = (\partial^2 f_\mu / \partial x \partial y)|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)$ (condition de générécité).

Alors une orbite périodique bifurque du point d'équilibre pour $\mu > \mu_0$ si $ad < 0$ ou pour $\mu < \mu_0$ si $ad > 0$. Le point d'équilibre (x_0, y_0) stable pour $\mu > \mu_0$ (resp $\mu < \mu_0$) et instable pour $\mu < \mu_0$ (resp $\mu > \mu_0$) si $d < 0$ (resp $d > 0$). L'orbite périodique est stable (resp instable) si le point d'équilibre est instable (resp stable). L'amplitude de l'orbite périodique comme $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$, le période temps vers $\frac{2\pi}{|\omega|}$ quand $\mu \longrightarrow \mu_0$.

La bifurcation est dite supercritique si la solution periodique est stable et sous critique si elle est instable.

La théorie de la bifurcation de Hopf s'intéresse à des systèmes différentiels de la forme suivante

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R},$$

où μ est un paramètre réel.

Exemple 1.7.1 *Considérons l'oscillateur $\ddot{x} - (\mu - x^2)\dot{x} + x = 0$ (un exemple d'un système de liénard), avec $u = x, v = \dot{x}$, qui peut s'écrire sous la forme du système de premier ordre*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= -u + (\mu - u^2)v. \end{aligned}$$

L'origine est un point fixe pour chaque μ, avec des valeurs propres $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \frac{1}{2}(\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2})$. Le système a une bifurcation de Hopf en $\mu = 0$. Nous avons $\omega = -1, d = \frac{1}{2}$ et $a = -\frac{1}{8}$, donc la bifurcatoin est supercritique et il y a une orbite périodique isolée stable (cycle limite) si $\mu > 0$ pour chaque μ suffisamment petit.

1.8 Théorème de Bezout

Soient $p_j, j = 1..n$ des polynômes en ces variables $(x_1, x_2, .., x_d)$ de degré $d_j, j = 1..d$.

Considérons le système polynomial suivant

$$\begin{cases} p_1(x_1, x_2, .., x_d) = 0, \\ p_2(x_1, x_2, .., x_d) = 0, \\ \vdots \\ p_n(x_1, x_2, .., x_d) = 0, \end{cases}$$

où $(x_1, x_2, .., x_d) \in \mathbb{R}^d$. Si le nombre de solutions de ce système est fini alors il est borné par $d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_d$.

CHAPITRE 2

Théorie de la moyennisation

2.1 Introduction

La théorie de la moyennisation est un outil classique pour étudier le comportement des systèmes dynamiques non linéaires, et en particulier, de leurs orbites périodiques. Dans ce chapitre nous allons introduire les résultats principaux sur la théorie de la moyennisation et les théorèmes que nous allons utiliser dans notre travail.

Notation

D_xF : La matrice jacobienne de la fonction F par rapport à x;
où $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$, D est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

D_x^2F : Matrice dont les composantes sont les dérivées de deuxième ordre
ou la matrice Hessienne.

$J_F(a)$: Le jacobien de F calculé en (a).

2.2 Méthode de la moyennisation dans le cas périodique

2.2.1 Méthode de la moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon F(t, \mathbf{x}(t)) + \varepsilon^2 R(t, \mathbf{x}(t), \varepsilon),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.2.1}$$

avec $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, D est un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $F(t, \mathbf{x})$ et $R(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ sont $T-$périodiques en t. Le système moyenné associé au système (2.2.1) est défini par

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \varepsilon f^0(\mathbf{y}(t)),\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.2.2}$$

où

$$f^0(\mathbf{y}) = \frac{1}{T}\int_0^T F(s, \mathbf{y})\mathbf{ds}. \tag{2.2.3}$$

Le théorème suivant nous donne les conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné (2.2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.2.1).

Théorème 2.2.1 *Considérons le système (2.2.1) et supposons que les fonctions vectorielles* $F, R, D_{\mathbf{x}}F, D^2_{\mathbf{x}}F$, *et* $D_{\mathbf{x}}R$ *sont continues et bornées par une constante* M *(indépendante de* ε*) dans* $[0, \infty[\times D$ *avec* $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. *De plus, on suppose que* F *et* R *sont T-périodiques en* t *avec* T *est indépendante de* ε.

a) Si $p \in D$ *est un point singulier du système moyenné (2.2.2) tel que*

$$\det(D_{\mathbf{x}} f^0(p)) \neq 0, \tag{2.2.4}$$

alors pour $\mid \varepsilon \mid > 0$ *suffisamment petit, il existe une solution T-périodique* $x_\varepsilon(t)$ *du système (2.2.1) telle que* $x_\varepsilon(t) \to p$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

b) Si le point singulier y=p du système moyenné (2.2.2) est hyperbolique alors pour $\mid \varepsilon \mid > 0$ *suffisamment petit, la solution périodique correspondante* $x_\varepsilon(t)$ *du système (2.2.1) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que p.*

Exemple 2.2.1 *Considérons l'équation de Van der Pol*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

En utilisant les coordonnées polaire (r, θ) où $x = rcos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin^2(\theta), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon\cos(\theta)(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin(\theta). \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin^2(\theta) + O(\varepsilon).$$

D'après (2.2.3) on obtient

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin^2(\theta)d\theta = \frac{1}{8}r(r^2 - 4).$$

La seule racine positive de $f^0(r)$ est r=2. Comme $(\frac{df^0}{dr})(2) = 1$, d'après le théorème 2.2.1 il suit que le système (2.2.5) pour $\mid \varepsilon \mid \neq 0$ suffisamment petit, admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon 2 du système non perturbé (2.2.5) avec $\varepsilon = 0$. De plus, comme $(\frac{df^0}{dr})(2) = 1 > 0$, ce cycle limite est instable.

Exemple 2.2.2 *On considère le système*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(-2 + x - xy + x^2 + y^2)y. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

En coordonnées polaires, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r\sin^2(\theta)(2r^2 - 2 + r\cos(\theta) - r^2\sin(\theta)\cos(\theta) - r^2\cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon(r^2(2\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos^3(\theta)\sin(\theta) - \cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) \\ \qquad +r\sin(\theta)\cos^2(\theta)) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)). \end{cases}$$

Ou d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \sin^2(\theta)(2r^2 - 2 + r\cos(\theta) - r^2 \sin(\theta)\cos(\theta) - r^2\cos^2(\theta) + O(\varepsilon^2).$$

On trouve

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi}(-2r\pi + \frac{7}{4}r^3\pi) = 0,$$

cette équation admet un seul racine positive $r = \frac{2}{7}\sqrt{14}$, *alors pour* $\mid \varepsilon \mid > 0$ *suffisamment petit le système (2.2.6) admet un seul cycle limite.*

2.2.2 Méthode de la moyennisation du second ordre

Considérons les deux problèmes aux valeurs initiales

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t,x) + \varepsilon^2 F_2(t,x) + \varepsilon^3 F_3(t,x,\varepsilon), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.2.7}$$

où F_1 et $F_2 : [0,+\infty) \times D \to \mathbb{R}^n$, $F_3 : [0,+\infty) \times D \times [0,\varepsilon_0] \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T périodiques par rapport à t et D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 f^{10}(y) + \varepsilon^2 g^0(y), \quad y(0) = y_{0,} \tag{2.2.8}$$

où f^0, f^{10} et g^0 sont les fonctions moyennées de F_1, f^1 et F_2 respectivement.

Théorème 2.2.2 *Soit*

$$f^1(t,x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y^1(t,x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(x)$$

où

$$y^1(t,x) = \int_0^t [F_1(s,x) - f^0(x)]ds + z(x)$$

avec $z(x)$ *est une fonction de classe* C^1 *telle que la moyenne de* y^1 *est nulle.*

Supposons que :

a) $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, F_2 *et* F_3 *sont continues sur leurs domaines de définitions et lipchitziennes en* x.

b) $F_3(t,x,\varepsilon)$ *est uniformément bornée par une constante* M *dans* $[0, \frac{M}{\varepsilon}) \times D \times (0, \varepsilon_0]$.

c) T *est indépendante de* ε.

d) $y(t) \in D$ sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2)$$

sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$.

Corollaire 2.2.1 *Si les hypothèses du théorème 2.2.2 sont satisfaites et de plus $f^0(y) = 0$, alors*

1. Si p est le point d'équilibre du système moyenné (2.2.8) tel que

$$\frac{\partial}{\theta y}(f^{10}(y) + g^0(y)) \mid_{y=p} \neq 0, \tag{2.2.9}$$

alors il existe une solution T-périodique $x_\varepsilon(t)$ de l'équation (2.2.7) telle que $x_\varepsilon(t) \to p$ quand $\varepsilon \to 0$.

2. Si p est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique $x_\varepsilon(t)$ de (2.2.7) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p.

Exemple 2.2.3 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(y^2 + 8xy - 2x^2) + \varepsilon^2 ax, \\ \dot{y} = x + 4\varepsilon xy + \varepsilon^2 ay. \end{cases} \tag{2.2.10}$$

En coordonnées polaires, le système (2.2.10) peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(8r\cos^2\theta\sin\theta - 7r\cos^3\theta + 5r\cos\theta + \varepsilon a\ ), \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon r\sin\theta + 7\varepsilon r\cos^2\theta\sin\theta + 8\varepsilon r\cos\theta - 8\varepsilon r\cos\theta, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r(8r\cos^2\theta\sin\theta - 7r\cos^3\theta + 5r\cos\theta + \varepsilon a\ )}{1 - \varepsilon r\sin\theta + 7\varepsilon r\cos^2\theta\sin\theta + 8\varepsilon r\cos\theta - 8\varepsilon r\cos\theta},$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= -r^2\cos\theta(-8\cos\theta\sin\theta + 7\cos^2\theta - 5)\varepsilon + r(-15r^2\cos^5\theta\sin\theta \\ &\quad +5\cos\theta\sin\theta + 22r^2\cos^3\theta\sin\theta + 112r^2\cos^6\theta - 160r^2\cos^4\theta \\ &\quad +48r^2\cos^2\theta + a)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme (2.2.7) avec

$$\begin{aligned}
F_1(\theta,r) &= -r^2\cos\theta(-8\cos\theta\sin\theta+7\cos^2\theta-5),\\
F_2(\theta,r) &= r(-15r^2\cos^5\theta\sin\theta+5\cos\theta\sin\theta+22r^2\cos^3\theta\sin\theta\\
&\quad +112r^2\cos^6\theta-160r^2\cos^4\theta+48r^2\cos^2\theta+a),\\
F_3(\theta,r,\varepsilon) &= O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Donc nous allons appliquer le théorème précédent

$$\begin{aligned}
f^0(r) &= \frac{-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta(-8\cos\theta\sin\theta+7\cos^2\theta-5)d\theta\\
&= 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta,r) &= -2r\cos\theta(-8\cos\theta\sin\theta+7\cos^2\theta-5),\\
\int_0^\theta F_1(s,r)ds &= \frac{r^2}{3}(8-8\cos^3\theta-7\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta).
\end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned}
f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta,r)\int_0^\theta F_1(s,r)ds+F_2(\theta,r)]d\theta.\\
&= r(a-r^2).
\end{aligned}$$

L'équation $f^{10}(r)=0$ a une seule racine positive $r=+\sqrt{a}$ et on a $\frac{d}{dr}f^{10}(r)=a-3r^2$.

1. Si $a>0$, alors le système différentiel (2.2.10) a un cycle limite stable d'amplitude $r=\sqrt{a}$ car $\frac{d}{dr}f^{10}(\sqrt{a})=-2a<0$.

2. Si $a\leq 0$, alors l'équation $f^{10}(r)=0$ n'a pas de racine simple positive, donc le système différentiel (2.2.10) n'a pas de cycle limite.

2.2.3 Autre méthode de la moyennisation du premier ordre

On considère le problème de bifurcation des solutions T-périodiques du système différentiel de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t,\mathbf{x})+\varepsilon F_1(t,\mathbf{x})+\varepsilon^2F_2(t,\mathbf{x},\varepsilon). \tag{2.2.11}$$

avec ε suffisamment petit.

Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe C^2, $T-$périodiques en t et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que le système non perturbé

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t, \mathbf{x}), \tag{2.2.12}$$

a une sous-variété de dimension k de solutions périodiques.

Soit $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ la solution du système non-perturbé (2.2.12) telle que $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}) = \mathbf{z}$. La linéarisation du système non-perturbé (2.2.12) au long de la solution périodique $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ est écrite comme

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}} F_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}))\mathbf{y}. \tag{2.2.13}$$

Notons par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.2.13). Supposons qu'il existe un ensemble ouvert W avec $CL(W) \subset \Omega$, tel que pour chaque $z \in CL(W)$, $\mathbf{x}(t, z, 0)$ est T-périodique, où $\mathbf{x}(t, z, 0)$ est la solution du système non perturbé (2.2.12) avec $\mathbf{x}(0, z, 0) = z$. L'ensemble $CL(W)$ est isochrone pour le système (2.2.11); c'est à dire il est un ensemble formé seulement par des orbites périodiques, toutes ayant la même période.

On note par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur ses k premières coordonnées; c.à.d. $\xi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k)$.

Théorème 2.2.3 *Soit $W \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert borné, $\beta : CL(W) \to \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe C^2. On suppose que*

(i) $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)),\ \alpha \in CL(W)\} \subset \Omega$ *et que pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathbf{Z}$ la solution $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)$ de (2.2.12) est $T-$périodique.*

(ii) pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathbf{Z}$ il existe une matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ de (2.2.13) telle que la matrice $M^{-1}_{\mathbf{z}_\alpha}(0) - M^{-1}_{\mathbf{z}_\alpha}(T)$ a dans le coin supérieur droit la matrice nulle de dimension $k \times (n-k)$, et dans le coin inférieur droit une matrice Δ_α de dimension $(n-k) \times (n-k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $\mathcal{F} : CL(W) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \xi(\frac{1}{T}\int_0^T M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t)F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha, 0))dt). \tag{2.2.14}$$

S'il existe $a \in W$ *telle que* $\mathcal{F}(a) = 0$ *et* $det((D\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, *alors il existe une solution T-périodique* $x(t, \varepsilon)$ *du système (2.2.11) telle que* $x(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{z}_a$ *quand* $\varepsilon \rightarrow 0$.

De plus, si toute les valeurs propres de la matrice jacobienne $(D\mathcal{F}/d\alpha)(a)$ *a la partie réelle négative alors la solution périodique* $x(t, \varepsilon)$ *est asymptotiquement stable. Si une des valeurs propres a la partie réelle positive alors la solution périodique* $x(t, \varepsilon)$ *est instable.*

Si $k = n$ on a le corollaire suivant.

Théorème 2.2.4 *On suppose qu'il existe un ensemble ouvert et borné* W *avec* $CL(W) \subset \Omega$ *tel que pour chaque* $\mathbf{z} \in CL(W)$, *la solution* $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ *est* $T-$*périodique, on considère la fonction* $\mathcal{F} : CL(W) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \frac{1}{T}\int_0^T M_{\mathbf{z}}^{-1}(t)F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}))dt. \tag{2.2.15}$$

S'il existe un $a \in W$ *telle que* $\mathcal{F}(a) = 0$ *et*

$$\det((D\mathcal{F}/dz)\,(a)) \neq 0, \tag{2.2.16}$$

alors il existe une solution $T-$*périodique* $x(t, \varepsilon)$ *du système (2.2.11) telle que* $x(0, \varepsilon) \rightarrow a$ *quand* $\varepsilon \rightarrow 0$.

De plus, si toute les valeurs propres de la matrice jacobienne $(D\mathcal{F}/dz)\,(a)$ *a la partie réelle négative alors la solution périodique* $x(t, \varepsilon)$ *est asymptotiquement stable. Si une des valeurs propres a la partie réelle positive alors la solution périodique* $x(t, \varepsilon)$ *est instable.*

Soit $\xi^{\perp} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur ses $n - k$ premières coordonnées; c.à.d. $\xi^{\perp}(x_1, ..., x_n) = (x_{k+1}, ..., x_n)$.

Théorème 2.2.5 *Soit* $W \subset \mathbb{R}^m$ *un ouvert borné,* $\beta : CL(W) \rightarrow \mathbb{R}^m$ *une fonction de classe* C^2 *tels que* $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)) \in \mathbb{R}^n : \alpha \in CL(W)\} \subset \Omega$ *avec* $n = 2m$. *On suppose que pour chaque* $\mathbf{z}_\alpha \in \mathbf{Z}$ *la solution* $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha, 0)$ *de* (2.2.12) *avec* $\varepsilon = 0$ *est*

$T-$périodique et il existe une matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ de (2.2.13) telle que la matrice $M^{-1}_{\mathbf{z}_\alpha}(0) - M^{-1}_{\mathbf{z}_\alpha}(T)$ a dans le coin supérieur droit une matrice Δ_α de dimension $m \times m$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$, et dans le coin inférieur droit la matrice nulle de dimension $m \times m$.

On considère la fonction $\mathcal{G} : CL(W) \to \mathbb{R}^m$ par

$$\mathcal{G}(\alpha) = \xi^{\perp}\left(\frac{1}{T}\int_0^T M^{-1}_{z_\alpha}(t)F_1(t, x(t, z_\alpha))dt\right). \tag{2.2.17}$$

Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour chaque $a \in W$ tels que $\mathcal{G}(a) = 0$ et satisfaisant que

$$\det((D\mathcal{G}/d\alpha)(a)) \neq 0, \tag{2.2.18}$$

il existe une solution T-périodique $x(t, \varepsilon)$ du système (2.2.11) telle que $x(0, \varepsilon) \to \mathbf{z}_a$ quand $\varepsilon \to 0$.

De plus, si toute les valeurs propres de la matrice jacobienne $(D\mathcal{G}/d\alpha)(a)$ a la partie réelle négative alors la solution périodique $x(t, \varepsilon)$ est asymptotiquement stable. Si une des valeurs propres a la partie réelle positive alors la solution périodique $x(t, \varepsilon)$ est instable.

Exemple 2.2.4 *On considère l'équation suivante*

$$\dddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \tag{2.2.19}$$

Si

$$y = \dot{x}, z = \ddot{x}.$$

L'équation (2.2.19) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = z - y + x + \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \end{cases} \tag{2.2.20}$$

Le système (2.2.20) a un point singulier unique, l'origine, lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système (2.2.20) avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont $\pm i$ *et 1. En faisant un changement de variable linéaire*

$$(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T,$$

on écrit le système (2.2.20) de telle manière que la partie linéaire à l'origine sera à sa forme normale réelle de Jordan, c.à.d. $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^T = J(X, Y, Z)^T$, *la forme normale réelle de Jordan de la matrice* A *est*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2.21}$$

On a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0,$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T$*, c.à.d.*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} - \dot{y}, \\ \dot{Y} = -\dot{y} + \dot{z}, \\ \dot{Z} = \dot{x} + \dot{z}. \end{cases} \tag{2.2.22}$$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X - Y + Z \\ -X - Y + Z \\ -X + Y + Z \end{pmatrix}. \tag{2.2.23}$$

On remplace (2.2.20) et (2.2.23) dans (2.2.22), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \breve{F}(X, Y, Z, t), \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \breve{F}(X, Y, Z, t), \end{cases} \tag{2.2.24}$$

où $\breve{F} = \breve{F}(X, Y, Z, t) = F(x, y, z, t)$.

Pour $\varepsilon = 0$, *la solution du système* $(2.2.24)_{\varepsilon=0}$ *est*

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}.$$

On applique le théorème 2.2.3 au système différentiel (2.2.24), le système (2.2.24) peut être écrit en tant que système (2.2.11) en prenant

$$x = (X, Y, Z), F_1(x, t) = (0, \breve{F}, \breve{F}) \text{ et } F_1(x, t, \varepsilon) = (0, 0, 0).$$

Soit $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$ *la solution du système (2.2.24) telle que*

$$x(0; X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

Il est clair que le système non-perturbé (2.2.24) avec $\varepsilon = 0$ *admet un centre à l'origine dans le plan (X, Y). Les solutions* $2\pi-$*périodiques correspondantes sont* $x(t, X_0, Y_0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t))$ *telle que*

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice fondamentale $M(t)$ du système non perturbé (2.2.24) avec $\varepsilon = 0$ est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix},$$

comme $1 - e^{-2\pi} \neq 0$, toutes les hypothèses du théorème 2.2.3 sont vérifiées. Par conséquent, nous allons étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premières composantes de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée par

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M^{-1}(t)F_1(x(t, z_\alpha), t)dt), \quad \textit{avec } \xi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2),$$

c.à.d.

$$\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha)).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t)\breve{F}\left(x(t; X_0, Y_0, 0, 0), t\right) dt, \qquad (2.2.25) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t)F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)\breve{F}\left(x(t; X_0, Y_0, 0, 0), t\right) dt, \qquad (2.2.26) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt. \end{aligned}$$

On pose $\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$. En remplaçant la fonction F dans (2.2.25) et (2.2.26), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) &= -\frac{1}{16}\left(X_0 + Y_0\right)\left(6X_0^2 + X_0 + 6Y_0^2 - Y_0\right), \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) &= \frac{3}{8}\left(-Y_0X_0^2 + Y_0^2X_0\right) - \frac{3}{8}\left(-Y_0^3 + X_0^3\right) + \frac{1}{8}\left(-Y_0^2 + X_0^2\right) - \frac{1}{8}Y_0X_0. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0,$ *on trouve*

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

De plus

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(X_0, Y_0)}\Big|_{(X_0,Y_0)=\left(X_0^*,Y_0^*\right)}\right) = \frac{3}{2048} \neq 0.$$

Alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ *avec* $\varepsilon_0 > 0$ *suffisamment petit, il y a une solution isolée* $2\pi-$*périodique* $x(t, \varepsilon)$ *de l'équation différentielle (2.2.19) telle que*

$$x(0, \varepsilon) \to -\frac{1}{4}, \dot{x}(0, \varepsilon) \to 0, \ddot{x}(0, \varepsilon) \to \frac{1}{4},$$

quand $\varepsilon \to 0$.

2.3 Méthode de la moyennisation via le degré du Brouwer

Définition 2.3.1 (Degré de Brouwer pour des fonctions de $\mathbf{C}^1$) *Soient* $g \in C^1(D)$, $\bar{V} \subset D$ *et* $Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\}$. *Supposons aussi que* $J_g(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in Z_g$ *avec* $J_g(z)$ *le déterminant jacobien de* g *en* z. *Ce qui assure que* Z_g *est finie, alors*

$$d_B(g, V, 0) = \sum_{z \in Z_g} sign(J_g(z)).$$

Remarque 2.3.1 *Soit* $g : D \to \mathbb{R}^n$ *fonction de classe* C^1 *avec* $g(a) = 0$, *où* D *est un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $a \in D$, *pour* $J_g(a) \neq 0$, *il existe un voisinage* V *de* a *tel que* $g(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$. *Alors*

$$d_B(g, V, 0) \in \{-1, 1\}.$$

2.3.1 La théorie de la moyennisation du premier ordre

Théorème 2.3.1 *On considère le système différentiel suivant*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t,x) + \varepsilon^2 R(t,x,\varepsilon), \tag{2.3.1}$$

où $F_1 : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_{f,}\varepsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ *sont des fonctions continues,* $T-$*périodiques par rapport à la première variable et* D *est un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *On défini* $f_1 : D \to \mathbb{R}^n$ *comme suit*

$$f_1(z) = \frac{1}{T}\int_0^T F_1(s,z)ds, \tag{2.3.2}$$

et on suppose que:

(*i*) F_1 *et* R *sont localement lipschitzienne par rapport à* x.

(*ii*) *Pour* $a \in D$ *avec* $f_1(a) = 0$, *il existe un voisinage* V *de* a *tel que* $f_1(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ *et* $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ *suffisamment petit, il existe une solution* $T-$*périodique* $x(\cdot,\varepsilon)$ *du système (2.3.1) tel que* $x(0,\varepsilon) \to a$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

2.3.2 La théorie de la moyennisation du second ordre

Théorème 2.3.2 *On considère le système différentiel suivant*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t,x) + \varepsilon^2 F_2(t,x) + \varepsilon^3 R(t,x,\varepsilon), \tag{2.3.3}$$

où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ *sont des fonctions continues,* $T-$*périodiques par rapport à la première variable et* D *est un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Nous supposons que*

(*i*) $F_1(t,\cdot) \in C^1(D)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, F_1, F_2, R *et* $D_x F_1$ *sont localement Lipschitziennes par rapport à* x, *et* R *est différentiable par rapport à* ε.

On a f_1, $f_2 : D \to \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \tfrac{1}{T}\int_0^T F_1(s,z)\,ds \equiv 0, \\ f_2(z) &= \tfrac{1}{T}\int_0^T \left[D_z F_1(s,z)\int_0^s F_1(t,z)\,dt + F_2(s,z)\right] ds. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

(ii) Pour $V \subset D$ un ensemble ouvert et borné, et pour chaque $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$, il existe $a \in V$ tel que $f_2(a) = 0$ et $d_B(f_2, V, 0) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $T-$périodique $x(\cdot, \varepsilon)$ du système (2.3.3) tel que $x(0, \varepsilon) \to a$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

CHAPITRE 3

Bifurcation des orbites périodiques d'un centre isochrone uniforme

3.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce chapitre, nous donnons le nombre maximum des cycles limites qui peuvent bifurquer des solutions périodiques d'un centre isochrone uniforme différentiel polynômial de degré 5 quand il est perturbé par des polynômes homogènes de degré 5. Plus précisément, nous considérons le système différentiel polynômial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^{n-1}y, \\ \dot{y} &= x + x^{n-2}y^2, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

de degré $n \geq 2$. Ce système possède un centre isochrone uniforme à l'origine des coordonnées. En coordonnées polaires (r, θ), où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, ce système s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^n \cos^{n-2}\theta \sin\theta, \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

Puisque $\dot{\theta} = 1$ le centre (3.1.1) est uniforme et isochrone. On écrit

$$\frac{dr}{d\theta} = r' = r^n \cos^{n-2}\theta \sin\theta. \tag{3.1.2}$$

Un calcul facile prouve que les solutions périodiques $r(\theta, r_0)$ qui entourent le centre $r = 0$ telles que $r(0, r_0) = r_0$ sont

$$r(\theta, r_0) = r_0(1 - r_0^{n-1} + r_0^{n-1}\cos^{n-1}\theta)^{\frac{1}{1-n}}, \tag{3.1.3}$$

avec $0 < r_0 < 1$ si n est impair, et $0 < r_0 < 2^{\frac{1}{(1-n)}}$ si n est pair. Le système (3.1.1) a l' intégrale première rationnelle

$$H = \frac{(1 - x^{n-1})^2}{(x^2 + y^2)^{n-1}}.$$

Ainsi les solutions périodiques du centre (3.1.1) sont des ovales algébriques de degré $2(n-1)$.

Nous recherchons le nombre maximum des cycles limites qui peuvent bifurquer des solutions périodiques entourant le centre isochrone uniforme $r = 0$ de degré $n = 5$ quand nous le perturbons par des polynômes homogènes de degré 5. Plus précisément, nous voulons étudier le nombre maximum des cycles limites du système différentiel polynômial suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^4 y + \varepsilon \sum_{k=0}^{5} a_k x^{5-k} y^k, \\ \dot{y} &= x + x^3 y^2 + \varepsilon \sum_{k=0}^{5} b_k x^{5-k} y^k; \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

où ε est un petit paramètre.

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 3.1.1 *Pour* $|\varepsilon| \neq 0$ *suffisamment petit et en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre, le système* (3.1.4) *a au plus 3 cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre* (3.1.1) *où* $n = 5$. *Ce nombre peut être atteint.*

Corollaire 3.1.1 *Considérons le système* (3.1.4) *où* $a_0 = -9.039237962, a_2 = 1, a_4 = 2, b_1 = -42.80858585, b_3 = 80.00385681, b_5 = 1$. *En utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre, on prouve que ce système possède 3 cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques.*

3.2 Preuve

Preuve du théorème 3.1.1. En considérant des coordonnées polaires (r, θ), où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, le système (3.1.4) devient

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= r^5\cos^3\theta\sin\theta + \varepsilon r^5(a_0\cos^6\theta + (a_1+b_0)\cos^5\theta\sin\theta + (a_2+b_1)\cos^4\theta \\
&\quad \sin^2\theta + (a_3+b_2)\cos^3\theta\sin^3\theta + (a_4+b_3)\cos^2\theta\sin^4\theta + (a_5+b_4)\cos\theta \\
&\quad \sin^5\theta + b_5\sin^6\theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= 1 + \varepsilon r^4(b_0\cos^6\theta - (a_0-b_1)\cos^5\theta\sin\theta - (a_1-b_2)\cos^4\theta\sin^2\theta - (a_2 \\
&\quad -b_3)\cos^3\theta\sin^3\theta - (a_3-b_4)\cos^2\theta\sin^4\theta - (a_4-b_5)\cos\theta\sin^5\theta - a_5 \\
&\quad \sin^6\theta).
\end{aligned}$$

Prenons θ comme une variable indépendante, on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned}
r' &= r^5\cos^3\theta\sin\theta + \varepsilon(a_0 r^5\cos^6\theta + (a_1+b_0)r^5\cos^5\theta\sin\theta \\
&\quad - b_0 r^9\cos^9\theta\sin\theta + (a_2+b_1)r^5\cos^4\theta\sin^2\theta + (a_0 - \\
&\quad b_1)r^9\cos^8\theta\sin^2\theta + (a_3+b_2)r^5\cos^3\theta\sin^3\theta + (a_1 - \\
&\quad b_2)r^9\cos^7\theta\sin^3\theta + (a_4+b_3)r^5\cos^2\theta\sin^4\theta + (a_2 - \\
&\quad b_3)r^9\cos^6\theta\sin^4\theta + (a_5+b_4)r^5\cos\theta\sin^5\theta + (a_3 - \\
&\quad b_4)r^9\cos^5\theta\sin^5\theta + b_5 r^5\sin^6\theta + (a_4-b_5)r^9\cos^4\theta \\
&\quad \sin^6\theta + a_5 r^9\cos^3\theta\sin^7\theta) + O(\varepsilon^2). \\
&= F_0(\theta, r) + \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2). \qquad (3.2.1)
\end{aligned}$$

Cette équation est sous la forme normale (2.2.11) pour appliquer la théorie de la moyennisation.

La solution périodique $r(\theta, r_0)$ donnée dans (3.1.3) de l'équation non perturbée (3.1.2) pour $n = 5$ est

$$r(\theta, r_0) = \frac{r_0}{(1 \ - \ r_0^4 \ + \ r_0^4 \cos^4\theta)^{\frac{1}{4}}}. \tag{3.2.2}$$

L'équation variationnelle de l'équation (3.2.1) correspondant à la solution périodique (3.2.2), s'écrit

$$\frac{dM}{d\theta} = \frac{5 \ r_0^4 \cos^3\theta \sin\theta}{1 \ - \ r_0^4 \ + \ r_0^4 \cos^4\theta} M.$$

Sa solution telle que $M(0) = 1$ est

$$M(\theta) = \frac{1}{(1 \ - \ r_0^4 \ + \ r_0^4 \cos^4\theta)^{\frac{5}{4}}}.$$

Maintenant nous devons calculer la fonction moyennée (2.2.15), qui dans notre cas est

$$I(r_0) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{M(\theta)} F_1(\theta, r(\theta, r_0)) d\theta.$$

Un calcul facile montre que

$$\begin{aligned}
I(r_0) \quad = \quad & \int_0^{2\pi} (a_0 r_0^5 \cos^6\theta + (a_1 + b_0) r_0^5 \cos^5\theta \sin\theta + (a_2 + b_1) r_0^5 \cos^4\theta \sin^2\theta \\
& + (a_3 + b_2) r_0^5 \cos^3\theta \sin^3\theta + (a_4 + b_3) r_0^5 \cos^2\theta \sin^4\theta + (a_5 + b_4) r_0^5 \\
& \cos\theta \sin^5\theta + b_5 r_0^5 \sin^6\theta + \frac{1}{1 \ - \ r_0^4 \ + \ r_0^4 \cos^4\theta} (-b_0 \ r_0^9 \ \cos^9\theta \sin\theta \\
& + (a_0 - b_1) \ r_0^9 \ \cos^8\theta \sin^2\theta + (a_1 - b_2) \ r_0^9 \ \cos^7\theta \sin^3\theta + (a_2 - b_3) \\
& r_0^9 \ \cos^6\theta \sin^4\theta + (a_3 - b_4) \ r_0^9 \ \cos^5\theta \sin^5\theta + (a_4 - b_5) \ r_0^9 \ \cos^4\theta \\
& \sin^6\theta + a_5 \ r_0^9 \ \cos^3\theta \sin^7\theta)) d\theta \\
= \quad & \frac{1}{8}\pi(5a_0 + a_2 + a_4 + b_1 + b_3 + 5b_5) f_0(r_0) + \frac{1}{8}\pi(a_0 - b_1) f_1(r_0) \qquad (3.2.3) \\
& + \frac{1}{8}\pi(a_2 - b_3) f_2(r_0) + \frac{1}{8}\pi(a_4 - b_5) f_3(r_0),
\end{aligned}$$

où

$f_0(r_0) = r_0^5,$

$$\begin{aligned}
f_1(r_0) &= \frac{r_0}{\sqrt{2\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\,-\,2\,r_0^4\,+\,2}\,\sqrt{-\,r_0^4\,+1}} \\
&\quad (\,9\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\sqrt{2\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\,-\,2\,r_0^4\,+\,2}\,\,r_0^4 \\
&\quad -\,8\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\sqrt{2\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\,-\,2\,r_0^4\,+\,2} \\
&\quad +\,16\,r_0^8\,-\,32\,r_0^4\,+\,16),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(r_0) &= -\frac{r_0}{\sqrt{2\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\,-\,2\,r_0^4\,+\,2}\,\sqrt{-\,r_0^4\,+1}} \\
&\quad (\,23\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\sqrt{2\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\,-\,2\,r_0^4\,+\,2}\,\,r_0^4 \\
&\quad -\,24\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\sqrt{2\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\,-\,2\,r_0^4\,+\,2} \\
&\quad -\,16\,r_0^4\sqrt{-\,r_0^4\,+1}+\,32\,r_0^8\,+\,16\,\sqrt{-\,r_0^4\,+1} \\
&\quad -\,64\,r_0^4\,+\,32), \\
f_3(r_0) &= \frac{r_0}{\sqrt{2\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\,-\,2\,r_0^4\,+\,2}\,\sqrt{-\,r_0^4\,+1}} \\
&\quad (\,45\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\sqrt{2\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\,-\,2\,r_0^4\,+\,2}\,\,r_0^4 \\
&\quad -\,40\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\sqrt{2\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\,-\,2\,r_0^4\,+\,2} \\
&\quad -\,32\,r_0^4\sqrt{-\,r_0^4\,+1}\,+\,64\,r_0^8\,+\,32\,\sqrt{-\,r_0^4\,+1} \\
&\quad -\,112\,r_0^4\,+\,48).
\end{aligned}$$

Afin de trouver le nombre maximum des zéros simples de la fonction $I(r_0)$ nous devons montrer que les quatre fonctions $f_i(r_0) : (0,1) \to \mathbb{R}$, $i \in \{0,...,3\}$ données dans (3.2.3) sont un ECT-système et selon le théorème 3.2.1 c'est le cas si chaque wronskien $W_j(f_0,...,f_j) \neq 0$, $j \in \{0,...,3\}$. Plus précisément, nous avons

$W_0 = r_0^5$,

$$
\begin{aligned}
W_1 \; = \; & -\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2}\,\left(-r_0^4+\sqrt{-r_0^4+1}+1\right)} \\
& \frac{1}{\sqrt{-r_0^4+1}}\Big(16\Big(-\sqrt{-r_0^4+1}\,r_0^8+4r_0^8-3\sqrt{-r_0^4+1}\,r_0^4 \\
& +2\sqrt{-r_0^4+1}\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2}\;r_0^4+4-8r_0^4 \\
& +2r_0^4\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2}\;+4\sqrt{-r_0^4+1} \\
& -2\sqrt{-r_0^4+1}\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2} \\
& -2\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2}\;\Big)r_0^5\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_2 \; = \; & \frac{1}{\left(-r_0^4+\sqrt{-r_0^4+1}+1\right)^3}\Big(768\,r_0^{12}\Big(3\sqrt{-r_0^4+1}\;r_0^4+8r_0^4-8 \\
& -2\,r_0^4\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2}\;-8\sqrt{-r_0^4+1} \\
& +5\sqrt{-r_0^4+1}\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2} \\
& +3\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2}\;\Big)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_3 \; = \; & \frac{1}{(r_0^4-1)^2\left(-r_0^4+\sqrt{-r_0^4+1}+1\right)^5}\Big(24576\Big(-43\sqrt{-r_0^4+1}\;r_0^4 \\
& +20\,r_0^8+14\sqrt{-r_0^4+1}\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2}\;r_0^4+50 \\
& +24\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2}\;r_0^4+46\sqrt{-r_0^4+1}-70\,r_0^4 \\
& -24\sqrt{-r_0^4+1}\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2} \\
& -24\sqrt{2\sqrt{-r_0^4+1}-2r_0^4+2}\;\Big)\,r_0^{22}\Big).
\end{aligned}
$$

Pour $r_0 \in (0,1)$ nous avons que tous les wronskiens ci-dessus sont différents de zéro. D'ailleurs le rang de la matrice jacobienne des coefficients de f_i, $i=0,\ldots,3$ dans $I(r_0)$

des variables $a_0, a_2, a_4, b_1, b_3, b_5$ est 4. En appliquant la théorie de la moyennisation du premier ordre et le théorème 3.2.1 on montre qu'il y a au plus 3 cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre (3.1.1) pour $n = 5$ et ce nombre peut être atteint. ■

Proposition 3.2.1 *Soient $f_0, ..., f_n$ des fonctions analytiques définies sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Si $f_0, ..., f_n$ sont linéairement indépendant alors il existe $s_1, ..., s_n \in I$ et $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que pour chaque $j \in \{1, ..., n\}$ nous avons que s_j est un zéro simple de la fonction $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, f_i(s)$.*

Nous disons que les fonctions $(f_0, ..., f_n)$ définies sur l'intervalle I forme un système prolongé de Tchebychev ou ET-système sur I, si et seulement si, n'importe quelle combinaison linéaire non triviale de ces fonctions a au plus n des zéros comptant leurs multiplicities et ce nombre est atteint. Les fonctions $(f_0, ..., f_n)$ sont un système complet prolongé de Tchebychev ou un ECT-système I si et seulement si $\forall\ k \in \{0, 1, ..., n\}, (f_0, ..., f_k)$ forme un ET-système.

Théorème 3.2.1 *Soient $f_0, ..., f_n$ des fonctions analytiques définies sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Alors $(f_0, ..., f_n)$ est un ECT-système sur I si et seulement si pour chacun $k \in \{0, 1, ..., n\}$ et tous $y \in I$ le wronskien*

$$W(f_0, ..., f_k)(y) = \begin{vmatrix} f_0(y) & f_1(y) & \dots & f_k(y) \\ f_0'(y) & f_1'(y) & \dots & f_k'(y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(k)}(y) & f_1^{(k)}(y) & \dots & f_k^{(k)}(y) \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Preuve du corollaire 3.1.1. Si $a_0 = -9.039237962, a_2 = 1, a_4 = 2, b_1 = -42.80858585, b_3 = 80.00385681, b_5 = 1$. Alors la fonction (3.2.3) est donnée par

$$\begin{aligned} I(r_0) \;&=\; -0.0001148562500\pi f_0(r_0) + \frac{1}{8}\pi(33.76934789) f_1(r_0) \\ &\quad -9.875482101\pi f_2(r_0) + \frac{1}{8}\pi f_3(r_0). \end{aligned}$$

L'équation $I(r_0) = 0$ a trois zéros positifs r_0^* données par $0.1565448836, 0.2849134969$ et 0.4460619548. Puisque les dérivés $\frac{dI(r_0)}{dr_0}$ pour les trois solutions précédentes sont respectivement -7.03152074910^{-7}, 0.000006157730863 et -0.0002654360728, le système (3.1.4) a trois cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre (3.1.1) avec $n = 5$. Le premier cycle limite est stable, le deuxième est instable et le troisième est stable. ■

CHAPITRE 4

Solutions périodiques pour les systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$

4.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce chapitre nous étudions premièrement les conditions suffisantes pour l'existence des orbites périodiques des systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = -y - \varepsilon F(t, x, y, z), \tag{4.1.1}$$

où F est une fonction 2π-périodique et ε est un petit paramètre. Ces systèmes différentiels peuvent s'écrire sous la forme d'une équation différentielle du troisième ordre suivante

$$x''' + x' + \varepsilon F(t, x, x', x'') = 0, \tag{4.1.2}$$

où $y = x'$ et $z = x''$.

Notre résultat principal pour l'étude des solutions périodiques du système (4.1.1) est le suivant.

Théorème 4.1.1 *Nous définissons*

$$\mathcal{F}_1(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t,A(t),B(t),C(t))(\cos t-1)dt,$$
$$\mathcal{F}_2(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t,A(t),B(t),C(t))\sin t\,dt,$$
$$\mathcal{F}_3(x_0,y_0,z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t,A(t),B(t),C(t))\cos t\,dt,$$

où $A(t)=x_0+y_0\sin t+z_0(1-\cos t)$, $B(t)=y_0\cos t+z_0\sin t$ et $C(t)=-y_0\sin t+z_0\cos t$. Si la fonction $F(t,x,x',x'')$ est 2π-périodique en t, alors pour chaque (x_0^*,y_0^*,z_0^*) solution du système $\mathcal{F}_k(x_0,y_0,z_0)=0$ pour $k=1,2,3$, satisfaisant

$$\det\left(\left.\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*)}\right)\neq 0,$$

l'équation différentielle (4.1.2) a une solution $2\pi-$périodique $x(t,\varepsilon)$ qui tend vers la solution 2π–périodique $x_0(t)$ donnée par $x_0(t)=x_0^*+y_0^*\sin t+z_0^*(1-\cos t)$ de $x'''+x'=0$ quand $\varepsilon\to 0$.

Corollaire 4.1.1 *Considérons les oscillateurs généralisés de mémoire donnés par l'équation (4.1.2) avec $F(t,x,x',x'')=x''-(b_0+b_1x+b_2x^2)\sin t$. Si $b_2\neq 0$, $4+3b_1^2-12b_0b_1>0$ et $-4+b_1^2-4b_0b_2>0$, alors cette équation a quatre solutions périodiques $x_k(t,\varepsilon)$ pour $k=1,2,3,4$, qui tendent vers les solutions périodiques $x_k(t)$ où*

$$\begin{aligned} x_{1,2}(t) = &\quad \frac{-b_1\mp 2\sqrt{-4+b_1^2-4b_0b_2}}{2b_2}-\frac{2}{b_2}\sin t\pm\frac{\sqrt{-4+b_1^2-4b_0b_2}}{b_2}(1-\cos t),\\ x_{3,4}(t) = &\quad -\frac{b_1}{2b_2}-\frac{2\pm\sqrt{4+3b_1^2-12b_0b_2}}{3b_2}\sin t, \end{aligned}$$

de $x'''+x'=0$ quand $\varepsilon\longrightarrow 0$.

Notre deuxième résultat est l'étude des conditions suffisantes pour l'existence des orbites périodiques des systèmes différentiels dans $\mathbb{R}^4$ de la forme

$$x'=y,\quad y'=-x-\varepsilon G(t,x,y,z,u),\quad z'=u,\quad u'=-z-\varepsilon H(t,x,y,z,u), \qquad (4.1.3)$$

où G et H sont des fonctions 2π–périodiques en t et ε est un petit paramètre.

Théorème 4.1.2 *Nous définissons*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x_0,y_0,z_0,u_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t,A(t),B(t),C(t),D(t))\sin t\,dt,\\
\mathcal{F}_2(x_0,y_0,z_0,u_0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t,A(t),B(t),C(t),D(t))\cos t\,dt,\\
\mathcal{F}_3(x_0,y_0,z_0,u_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t,A(t),B(t),C(t),D(t))\sin t\,dt,\\
\mathcal{F}_4(x_0,y_0,z_0,u_0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t,A(t),B(t),C(t),D(t))\cos t\,dt,
\end{aligned}$$

où $A(t) = x_0\cos t + y_0\sin t$, $B(t) = -x_0\sin t + y_0\cos t$, $C(t) = z_0\cos t + u_0\sin t$ *et* $D(t) = -z_0\sin t + u_0\cos t$. *Alors pour chaque* $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*)$ *solution du système* $\mathcal{F}_k(x_0,y_0,z_0,u_0) = 0$ *pour* $k = 1,2,3,4$, *satisfaisant*

$$\det\left(\left.\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3,\mathcal{F}_4)}{\partial(x_0,y_0,z_0,u_0)}\right|_{(x_0,y_0,z_0,u_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*,u_0^*)}\right) \neq 0,$$

le système différentiel (4.1.3) *a une solution* 2π*–périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), u(t,\varepsilon))$ *qui tend vers la solution* 2π*–périodique* $(x_0(t), y_0(t), z_0(t), u_0(t))$ *donnée par* $x_0(t) = x_0^*\cos t + y_0^*\sin t$, $y_0(t) = -x_0^*\sin t + y_0^*\cos t$, $z_0(t) = z_0^*\cos t + u_0^*\sin t$, $u_0(t) = -z_0^*\sin t + u_0^*\cos t$, *du système non perturbé* (4.1.3) *avec* $\varepsilon = 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Corollaire 4.1.2 *Considérons le système différentiel* (4.1.3) *avec* $G(t,x,y,z,u) = (-1 - x^2 + z^2)\sin t$ *et* $H(t,x,y,z,u) = (1 - x^2)\cos t$. *Alors ce système différentiel a 8 solutions périodiques* $(x_k(t,\varepsilon), y_k(t,\varepsilon), z_k(t,\varepsilon), u_k(t,\varepsilon))$ *pour* $k = 1,\ldots,8$, *qui tendent vers les solutions périodiques* $(x_k(t), y_k(t), z_k(t), u_k(t))$ *où*

$$\begin{aligned}
(x_{1,2}(t), y_{1,2}(t), z_{1,2}(t), u_{1,2}(t)) &= (\pm 2\sin t, \pm 2\cos t, -4\cos t, 4\sin t),\\
(x_{3,4}(t), y_{3,4}(t), z_{3,4}(t), u_{3,4}(t)) &= \left(\mp\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t, -\frac{4}{3}\sin t, -\frac{4}{3}\cos t\right),\\
(x_{5,6}(t), y_{5,6}(t), z_{5,6}(t), u_{5,6}(t)) &= \left(\pm 2\sin t, \pm 2\cos t, -\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t, -\frac{4}{\sqrt{3}}\cos t\right),\\
(x_{7,8}(t), y_{7,8}(t), z_{7,8}(t), u_{7,8}(t)) &= \left(\mp\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t, -\frac{4}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{4}{\sqrt{3}}\sin t\right),
\end{aligned}$$

de $x' = y$, $y' = -x$, $z' = u$, $u' = -z$, *quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$.

4.2 Preuve

Preuve du Théorème 4.1.1. Pour $\varepsilon = 0$ tous les points singuliers du système différentiel (4.1.1) sont dans l'axe des x, c.à.d. $(x, 0, 0)$ sont les points singuliers du système (4.1.1). Les valeurs propres du système linéarisé en ces points singuliers sont $\pm i$, 0. Les solutions 2π–périodiques $(x(t), y(t), z(t))$ du système non perturbé (c.à.d. système (4.1.1) avec $\varepsilon = 0$) telles que $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ sont

$$(x_0 + y_0 \sin t + z_0(1 - \cos t), y_0 \cos t + z_0 \sin t, -y_0 \sin t + z_0 \cos t). \tag{4.2.1}$$

En utilisant les notations présentées dans la section (2.2.3), nous avons que $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{z} = (x_0, y_0, z_0)$, $F_0(\mathbf{x}, t) = (y, z, -y)$, $F_1(\mathbf{x}, t) = \Big(0, 0, -F\Big)$ et $F_2(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = (0, 0, 0)$. La solution fondamentale de la matrice $M_{\mathbf{z}}(t)$ est indépendante de $\mathbf{z}$ et nous la désignons par $M(t)$. Un calcul facile montre que

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sin t & 1 - \cos t \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Selon le théorème 2.2.4 nous étudions les zéros $\alpha = (x_0, y_0, z_0)$ des trois composantes de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée dans (2.2.15). Plus précisément nous avons $\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha), \mathcal{F}_3(\alpha))$, telles que

$$\mathcal{F}_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t, x(t), y(t), z(t))(\cos t - 1)dt,$$
$$\mathcal{F}_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t, x(t), y(t), z(t)) \sin t\, dt,$$

$$\mathcal{F}_3(\alpha) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t, x(t), y(t), z(t)) \cos t\, dt,$$

où $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont donnés par (4.2.1). Maintenant le reste de la preuve du théorème 4.1.1 découle directement de l'énoncé du théorème 2.2.4. ■

Preuve du corollaire 4.1.1. Nous devons appliquer le théorème 4.1.1 avec $F(t, x, y, z) = z - \sin t\,(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$. Nous Calculons la fonction $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$

du théorème 4.1.1 nous obtenons

$$\mathcal{F}_1(x_0,y_0,z_0)) = \frac{1}{4}(2b_1y_0 + 2z_0 + b_2y_0(4x_0+5z_0)),$$
$$\mathcal{F}_2(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{8}(-4b_0 - 4y_0 - 4b_1(x_0+z_0) - b_2(4x_0^2+3y_0^2+8x_0z_0+5z_0^2)),$$
$$\mathcal{F}_3(x_0,y_0,z_0) = -\frac{1}{4}(2+b_2y_0)z_0.$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = 0$ a six solutions (x_0^*, y_0^*, z_0^*) données par

$$\left(\frac{-b_1 \mp 2\sqrt{-4+b_1^2-4b_0b_2}}{2b_2}, -\frac{2}{b_2}, \pm\frac{\sqrt{-4+b_1^2-4b_0b_2}}{b_2}\right),$$
$$\left(-\frac{b_1}{2b_2}, -\frac{2\pm\sqrt{4+3b_1^2-12b_0b_2}}{3b_2}, 0\right), \quad \left(-\frac{b_1\pm\sqrt{b_1^2-4b_0b_2}}{2b_2}, 0, 0\right).$$

Les deux dernières solutions en revenant à l'équation $x''' + x' = 0$ donnent des points d'équilibre au lieu des solutions périodiques, ainsi nous ne les considérons pas. Puisque le jacobien

$$\det\left(\left.\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}\right|_{(x_0,y_0,z_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*)}\right)$$

pour ces quatre solutions (x_0^*, y_0^*, z_0^*) est $\frac{1}{8}(-4+b_1^2-4b_0b_2)$ et $\frac{1}{72}(4+3b_1^2-12b_0b_2)(1+\frac{1}{2}\sqrt{4+3b_1^2-12b_0b_2})$ respectivement, nous obtenons en utilisant le théorème 4.1.1 les quatre solutions périodiques données dans l'énoncé du corollaire. ■

Preuve du Théorème 4.1.2. Considérons le système (4.1.3). Son système non perturbé est le système (4.1.3) avec $\varepsilon = 0$, ce qui donne le point singulier $(x,y,z,u) = (0,0,0,0)$. Les valeurs propres du système linéarisé en ce point singulier sont $\pm i$, de multiplicité deux. Les solutions périodiques $(x(t),y(t),z(t),u(t))$ du système non perturbé telles que $(x(0),y(0),z(0),u(0)) = (x_0,y_0,z_0,u_0)$ sont

$$(x_0\cos t + y_0\sin t, -x_0\sin t + y_0\cos t, z_0\cos t + v_0\sin t, -z_0\sin t + v_0\cos t). \tag{4.2.2}$$

Notons que toutes ces solutions sont périodiques de période 2π. En utilisant les notations présentées dans la section (2.2.3), nous avons que $\mathbf{x} = (x,y,z,u)$, $\mathbf{z} = (x_0,y_0,z_0,u_0)$,

$F_0(\mathbf{x},t) = (y,-x,u,-z)$, $F_1(\mathbf{x},t) = \Big(0,-G,0,-H\Big)$ et $F_2(\mathbf{x},t,\varepsilon) = (0,0,0,0)$. La solution fondamentale de la matrice $M_{\mathbf{z}}(t)$ correspondant au système (2.2.12) pour notre système (4.1.3) est indépendante de $\mathbf{z}$ et nous la désignons par $M(t)$. Un calcul facile montre que

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Selon le théorème 2.2.4 nous étudions les zéros $\alpha = (x_0, y_0, z_0, u_0)$ des quatre composantes de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ données dans (2.2.15). Plus précisément nous avons $\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha), \mathcal{F}_3(\alpha), \mathcal{F}_4(\alpha))$, telles que

$$\mathcal{F}_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t,x(t),y(t),z(t),u(t))\sin t\,dt,$$

$$\mathcal{F}_2(\alpha) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t,x(t),y(t),z(t),u(t))\cos t\,dt,$$

$$\mathcal{F}_3(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t,x(t),y(t),z(t),u(t))\sin t\,dt,$$

$$\mathcal{F}_4(\alpha) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(t,x(t),y(t),z(t),u(t))\cos t\,dt,$$

où $(x(t), y(t), z(t), u(t))$ est la solution périodique donnée dans (4.2.2). Maintenant le reste de la preuve du théorème 4.1.2 découle directement de l'énoncé du théorème 2.2.4.

■

Preuve du corollaire 4.1.2. Nous devons appliquer le théorème 4.1.2 avec $G(t,x,y,z,u) = (-1 - x^2 + z^2)\sin t$ et $H(t,x,y,z,u) = (1 - x^2)\cos t$. Nous calculons la fonction $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)$ du théorème 2.2.4 et nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0)) &= \frac{1}{8}(-4 + 3u_0^2 - x_0^2 - 3y_0^2 + z_0^2),\\
\mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{4}(x_0 y_0 - u_0 z_0),\\
\mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0) &= -\frac{1}{4}x_0 y_0,\\
\mathcal{F}_4(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{8}(-4 + 3x_0^2 + y_0^2).
\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = 0$ a seize solutions $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*)$ données par

$$(0, \pm 2, \pm 4, 0), \quad \left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \pm\frac{4}{3}, 0\right), \quad \left(0, \pm 2, 0, \pm\frac{4}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(\pm\frac{2}{3}, 0, \pm\frac{4}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Puisque le jacobien

$$\det\left(\left.\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, z_0, u_0)}\right|_{(x_0,y_0,z_0,u_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*,u_0^*)}\right)$$

pour ces solutions $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, u_0^*)$ est $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{12}$ respectivement, nous obtenons en utilisant le théorème 2.2.4 seize solutions périodiques, mais seulement huit d'entre elles sont différentes parce que toutes les solutions périodiques sont répétées quand nous changeons $t \to t + \pi$. Nous obtenons les huit solutions périodiques données dans l'énoncé du corollaire. ∎

CHAPITRE 5

Orbites périodiques et leur stabilité pour une classe d'équations différentielles du quatrième ordre non autonomes

5.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce chapitre nous étudions les conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques de la classe des équations différentielles du quatrième ordre non autonomes de la forme

$$\ddot{\ddot{u}} + (a_1u + a_0)\dddot{u} + (b_1u + 1 + b_0)\ddot{u} + (c_1u + a_0)\dot{u} + c_2u^2 + b_0u = \varepsilon^2 F(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u}, \varepsilon), \quad (5.1.1)$$

où $a_0, a_1, b_0, b_1, c_1, c_2$ sont des paramètres arbitraires réels, et la fonction $F : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^4$ est de classe C^2, où Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$, $(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u}) \in \mathbb{R}^4$ et $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ avec $\varepsilon_0 > 0$ petit.

Nos résultats principaux pour l'étude des solutions périodiques de l'équation (5.1.1) sont les suivants.

Théorème 5.1.1 *On suppose $a_0^2 - 4b_0 > 0$ et $b_0 \neq 0$. On définit*

$$\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(F_0(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) + E(t)\big) \cos t \, dt,$$

$$\mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(F_0(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) + E(t)\big) \sin t \, dt,$$

où $F_0(t, x, y, z, v)$ est le terme d'ordre zéro en ε quand nous développons en série de Taylor la fonction $F(t, \varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z, \varepsilon v, \varepsilon)$ à $\varepsilon = 0$, et

$$\begin{aligned}
A(t) = \quad & -C(t) = \frac{(-a_0X_0 + (b_0-1)Y_0)\cos t + ((b_0-1)X_0 + a_0Y_0)\sin t}{a_0^2 + (b_0-1)^2}, \\
B(t) = \quad & -D(t) = \frac{((b_0-1)X_0 + a_0Y_0)\cos t + (a_0X_0 - (b_0-1)Y_0)\sin t}{a_0^2 + (b_0-1)^2}, \\
E(t) = \quad & \frac{1}{(a_0^2 + (b_0-1)^2)^2}\Big(((a_0X_0 - (b_0-1)Y_0)\cos t + (-(b_0-1)X_0 - a_0Y_0)\sin t) \\
& ((a_1(-(b_0-1)X_0 - a_0Y_0) + a_0((b_1-c_2)X_0 + c_1Y_0) + (b_0-1)(c_1X_0 \\
& +(c_2-b_1)Y_0))\cos t + ((1-b_0)((b_1-c_2)X_0 + (c_1-a_1)Y_0) + a_0((c_2-b_1)Y_0 \\
& -(a_1-c_1)X_0))\sin t)\Big).
\end{aligned}$$

Alors pour chaque (X_0^*, Y_0^*) solution du système $\mathcal{F}_k(X_0, Y_0) = 0$, $k = 1, 2$, satisfaisant

$$\det\left(\left.\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(X_0, Y_0)}\right|_{(X_0,Y_0)=(X_0^*,Y_0^*)}\right) \neq 0, \tag{5.1.2}$$

l'équation différentielle (5.1.1) a une solution 2π–périodique $u(t, \varepsilon)$ telle que

$$u(0, \varepsilon) = \varepsilon\frac{(b_0-1)Y_0^* - a_0X_0^*}{a_0^2 + (b_0-1)^2} + O(\varepsilon^2).$$

Si toutes les valeurs propres de la matrice

$$\left(\left.\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(X_0, Y_0)}\right|_{(X_0,Y_0)=(X_0^*,Y_0^*)}\right) \tag{5.1.3}$$

ont les parties réelles négatives alors la solution périodique $u(t,\varepsilon)$ est asymptotiquement stable. Si une des valeurs propres a la partie réelle positive alors la solution périodique $u(t,\varepsilon)$ est instable.

Deux applications du théorème 5.1.1 sont les suivantes.

Corollaire 5.1.1 *Considérons l'équation différentielle* (5.1.1) *avec* $F(t,\varepsilon u,\varepsilon\dot{u},\varepsilon\ddot{u},\varepsilon\dddot{u},\varepsilon) = (\dot{u}-1)(2-\cos t)$, $a_0^2-4b_0>0$ *et* $b_0\neq 0$. *Alors cette équation différentielle a une solution périodique* $u(t,\varepsilon)$ *telle que* $u(0,\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$, *qui est asymptotiquement stable si* $b_0-1<0$, *et instable si* $b_0-1>0$.

Corollaire 5.1.2 *Considérons l'équation différentielle* (5.1.1) *avec* $F(t,\varepsilon u,\varepsilon\dot{u},\varepsilon\ddot{u},\varepsilon\dddot{u},\varepsilon) = (u-1)(1+\cos t)$, $a_0^2-4b_0>0$ *et* $b_0\neq 0$. *Alors cette équation différentielle a une solution périodique* $u(t,\varepsilon)$ *telle que* $u(0,\varepsilon)=O(\varepsilon)$, *qui est asymptotiquement stable si* $a_0>0$, *et instable si* $a_0<0$.

Le deuxième résultat principal sur les solutions périodiques de l'équation différentielle du 4–ordre non-autonome (5.1.1) est le suivant.

Théorème 5.1.2 *On suppose* $a_0=0$ *et* $b_0=p^2/q^2\neq 1$, *où* p *et* q *sont des nombres entiers positifs. On définit*

$$\mathcal{F}_1(X_0,Y_0,Z_0,V_0) = \frac{1}{2q\pi}\int_0^{2q\pi}\big(F_0(t,A(t),B(t),C(t),D(t))+E(t)\big)\cos t\,dt,$$

$$\mathcal{F}_2(X_0,Y_0,Z_0,V_0) = -\frac{1}{2q\pi}\int_0^{2q\pi}\big(F_0(t,A(t),B(t),C(t),D(t))+E(t)\big)\sin t\,dt,$$

$$\mathcal{F}_3(X_0,Y_0,Z_0,V_0) = \frac{1}{2q\pi}\int_0^{2q\pi}\big(F_0(t,A(t),B(t),C(t),D(t))+E(t)\big)\cos(\sqrt{b_0}t)dt,$$

$$\mathcal{F}_4(X_0,Y_0,Z_0,V_0) = -\frac{1}{2q\pi}\int_0^{2q\pi}\big(F_0(t,A(t),B(t),C(t),D(t))+E(t)\big)\sin(\sqrt{b_0}t)dt,$$

où $F_0(t,x,y,z,v)$ *est le terme d'ordre zéro en* ε *quand nous développons en série de Taylor la fonction* $F(t,\varepsilon x,\varepsilon y,\varepsilon z,\varepsilon v,\varepsilon)$ *à* $\varepsilon=0$, *et*

$$\begin{aligned}
A(t) = &\ \frac{-\sqrt{b_0}(X_0\sin t+Y_0\cos t)+Z_0\sin\left(\sqrt{b_0}t\right)+V_0\cos\left(\sqrt{b_0}t\right)}{(1-b_0)\sqrt{b_0}},\\
B(t) = &\ \frac{X_0\cos t-Y_0\sin t-Z_0\cos\left(\sqrt{b_0}t\right)+V_0\sin\left(\sqrt{b_0}t\right)}{b_0-1},\\
C(t) = &\ \frac{-X_0\sin t-Y_0\cos t+\sqrt{b_0}\left(V_0\cos\left(\sqrt{b_0}t\right)+Z_0\sin\left(\sqrt{b_0}t\right)\right)}{b_0-1},\\
D(t) = &\ \frac{-X_0\cos t+Y_0\sin t+b_0\left(Z_0\cos\left(\sqrt{b_0}t\right)-V_0\sin\left(\sqrt{b_0}t\right)\right)}{b_0-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(t) = &\ \frac{1}{(b_0-1)^2b_0}\left(V_0\cos\left(\sqrt{b_0}t\right)-\sqrt{b_0}(Y_0\cos t+X_0\sin t)+Z_0\sin\left(\sqrt{b_0}t\right)\right)\\
&\Big(\left((b_0b_1-c_2)V_0+\sqrt{b_0}(a_1b_0-c_1)Z_0\right)\cos\left(\sqrt{b_0}t\right)+\sqrt{b_0}((-a_1X_0+c_1X_0\\
&+(c_2-b_1)Y_0)\cos t+(-b_1X_0+c_2X_0+(a_1-c_1)Y_0)\sin t)\\
&+\left(-a_1V_0b_0^{3/2}+b_1Z_0b_0+c_1V_0\sqrt{b_0}-c_2Z_0\right)\sin\left(\sqrt{b_0}t\right)\Big).
\end{aligned}$$

Alors pour chaque $(X_0^*,Y_0^*,Z_0^*,V_0^*)$ *solution du système* $\mathcal{F}_k(X_0,Y_0,Z_0,V_0)=0$, $k=1,2,3,4$, *satisfaisant*

$$\det\left(\left.\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3,\mathcal{F}_4)}{\partial(X_0,Y_0,Z_0,V_0)}\right|_{(X_0,Y_0,Z_0,V_0)=(X_0^*,Y_0^*,Z_0^*,V_0^*)}\right)\neq 0, \tag{5.1.4}$$

l'équation différentielle (5.1.1) *a une* $2q\pi-$ *périodique solution* $u(t,\varepsilon)$ *telle que*

$$u(0,\varepsilon)=\varepsilon\frac{\sqrt{b_0}Y_0^*-V_0^*}{(b_0-1)\sqrt{b_0}}+O(\varepsilon^2).$$

Si toutes les valeurs propres de la matrice

$$\left(\left.\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3,\mathcal{F}_4)}{\partial(X_0,Y_0,Z_0,V_0)}\right|_{(X_0,Y_0,Z_0,V_0)=(X_0^*,Y_0^*,Z_0^*,V_0^*)}\right) \tag{5.1.5}$$

ont des parties réelles négatives alors la solution périodique $u(t,\varepsilon)$ *est asymptotiquement stable. Si une des valeurs propres a la partie réelle positive alors la solution périodique* $u(t,\varepsilon)$ *est instable.*

Deux applications du théorème 5.1.2 sont les suivantes.

Corollaire 5.1.3 *Considérons l'équation différentielle* (5.1.1) *avec* $F(t, \varepsilon u, \varepsilon \dot{u}, \varepsilon \ddot{u}, \varepsilon \dddot{u}, \varepsilon) = (\dot{u}-1)(2-\cos t)$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1/4$ *et* $a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0$. *Alors cette équation différentielle a une solution périodique* $u(t,\varepsilon)$ *telle que*

$$u(0,\varepsilon) = O(\varepsilon^2),$$

qui est instable.

Corollaire 5.1.4 *Considérons l'équation différentielle* (5.1.1) *avec* $F(t, \varepsilon u, \varepsilon \dot{u}, \varepsilon \ddot{u}, \varepsilon \dddot{u}, \varepsilon) = (u-1)(1+\cos t)$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1/4$ *et* $a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0$. *Alors cette équation différentielle a une solution périodique* $u(t,\varepsilon)$ *telle que*

$$u(0,\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Notre troisième résultat principal est le suivant.

Théorème 5.1.3 *On suppose* $a_0 = 0$ *et* $b_0 = 1$. *On définit*

$$\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} \big(4F_0(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) + E(t)\big)(\cos t + t\sin t)dt,$$
$$\mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} \big(4F_0(t, A(t), B(t), C(t), D(t)) + E(t)\big)(t\cos t - \sin t)dt,$$

où $F_0(t,x,y,z,v)$ *est le terme d'ordre zéro en* ε *quand nous développons en série de Taylor la fonction* $F(t, \varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z, \varepsilon v, \varepsilon)$ *à* $\varepsilon = 0$, *et*

$$\begin{aligned}
A(t) = &\quad -C(t) = \frac{1}{2}(Y_0\cos t + X_0\sin t),\\
B(t) = &\quad -D(t) = \frac{1}{2}(X_0\cos t - Y_0\sin t),\\
E(t) = &\quad (Y_0\cos t + X_0\sin t)\\
&\quad \big((a_1X_0 - c_1X_0 + (b_1-c_2)Y_0)\cos t + (b_1X_0 - c_2X_0 + (c_1-a_1)Y_0)\sin t\big).
\end{aligned}$$

Alors pour chaque (X_0^*, Y_0^*) *solution du système* $\mathcal{F}_k(X_0, Y_0) = 0$, $k = 1, 2$, *satisfaisant* (5.1.2) *l'équation différentielle* (5.1.1) *a une* 2π*–périodique solution* $u(t, \varepsilon)$ *telle que*

$$u(0, \varepsilon) = \varepsilon \frac{Y_0^*}{2} + O(\varepsilon^2).$$

Si toutes les valeurs propres de la matrice (5.1.3) *ont des parties réelles négatives alors la solution périodique* $u(t, \varepsilon)$ *est asymptotiquement stable. Si une des valeurs propres a la partie réelle positive alors la solution périodique* $u(t, \varepsilon)$ *est instable.*

Deux applications du théorème 5.1.3 sont les suivantes.

Corollaire 5.1.5 *Considérons l'équation différentielle* (5.1.1) *avec* $F(t, \varepsilon u, \varepsilon \dot{u}, \varepsilon \ddot{u}, \varepsilon \dddot{u}, \varepsilon) = (\dot{u} - 1)(2 - \cos t)$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ *et* $a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0$. *Alors cette équation différentielle a une solution périodique* $u(t, \varepsilon)$ *telle que*

$$u(0, \varepsilon) = \varepsilon \frac{66\pi}{35 + 36\pi^2} + O(\varepsilon^2),$$

qui est instable.

Corollaire 5.1.6 *Considérons l'équation différentielle* (5.1.1) *avec* $F(t, \varepsilon u, \varepsilon \dot{u}, \varepsilon \ddot{u}, \varepsilon \dddot{u}, \varepsilon) = (u - 1)(1 + \cos t)$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ *et* $a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0$. *Alors cette équation différentielle a une solution périodique* $u(t, \varepsilon)$ *telle que*

$$u(0, \varepsilon) = \varepsilon \frac{9\,(13 - 4\pi^2)}{13 - 36\pi^2} + O(\varepsilon^2),$$

qui est instable.

5.2 Preuves

Preuve du théorème 5.1.1. On va faire le changement de variables $(x, y, z, v) = (u, \dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u})$. L'équation différentielle du 4-ordre (5.1.1) devient le système différentiel du premier-ordre

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= z, \\
\dot{z} &= v, \\
\dot{v} &= -(b_0 x + a_0 y + (1+b_0)z + a_0 v + c_2 x^2 + c_1 xy + b_1 xz + a_1 xv) \\
&\quad + \varepsilon^2 F(t, x, y, z, v, \varepsilon),
\end{aligned}
$$

définie dans le sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^4$, où la fonction $F : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^4$ est de classe C^2 avec $t \in \mathbb{R}$, $(x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4$ et $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ avec $\varepsilon_0 > 0$ petit.

On va faire le changement de variables (rescaling)

$$
(x, y, z, v) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, \varepsilon V) \tag{5.2.1}
$$

nous obtenons le système

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= z, \\
\dot{z} &= v, \\
\dot{v} &= -b_0 x - a_0 y - (1+b_0)z - a_0 v + \varepsilon(-c_2 x^2 - c_1 xy - b_1 xz - a_1 xv \\
&\quad + F_0(t, x, y, z, v)) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{5.2.2}
$$

où la fonction $F_0(t, x, y, z, v)$ a été définie dans l'énoncé du théorème 5.1.1 et nous notons les nouvelles variables (X, Y, Z, V) encore par (x, y, z, v). Le système différentiel (5.2.2) avec $\varepsilon = 0$ s'appelle le système différentiel non perturbé.

l'origine est l'unique point singulier du system (5.2.2) lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix},
$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b_0 & -a_0 & -(1+b_0) & -a_0 \end{pmatrix}. \tag{5.2.3}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm i$ et $-(a_0 \pm \sqrt{a_0^2 - 4b_0})/2$. On va faire un changement de variable linéaire

$$(X, Y, Z, V)^T = B(x, y, z, v)^T, \tag{5.2.4}$$

telle que dans les nouvelles variables (X, Y, Z, V), le système (5.2.2) avec $\varepsilon = 0$ a sa partie linéaire égale à sa forme normale de Jordan c.à.d. $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{V})^T = J(X, Y, Z, V)^T$.

La forme normale réelle de Jordan de la matrice A est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a_0 - \sqrt{a_0^2 - 4b_0})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(a_0 + \sqrt{a_0^2 - 4b_0})/2 \end{pmatrix}.$$

On a $$BAB^{-1} = J \rightarrow \; BA - JB = 0$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & a_0 & 1 \\ b_0 & a_0 & 1 & 0 \\ -N & 1 & -N & 1 \\ -L & 1 & -L & 1 \end{pmatrix},$$

où $L = -\frac{1}{2}(a_0 + \sqrt{a_0^2 - 4b_0})$, $N = \frac{1}{2}(-a_0 + \sqrt{a_0^2 - 4b_0})$,

par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z, V)^T = B(x, y, z, v)^T$c.à.d.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{V} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
\dot{X} &= b_0\dot{y} + a_0\dot{z} + \dot{v} \quad , \\
\dot{Y} &= \; b_0\dot{x} + a_0\dot{y} + \dot{z}, \\
\dot{Z} &= \; \frac{1}{2}(a_0 + \sqrt{a_0^2 - 4b_0})\dot{x} + \dot{y} + \frac{1}{2}(a_0 + \sqrt{a_0^2 - 4b_0})\dot{z} + \dot{v}, \\
\dot{V} &= \; \frac{1}{2}(a_0 - \sqrt{a_0^2 - 4b_0})\dot{x} + \dot{y} + \frac{1}{2}(a_0 - \sqrt{a_0^2 - 4b_0})\dot{z} + \dot{v},
\end{aligned}
\tag{5.2.5}
$$

on a

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix},
$$

on obtient

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
-\frac{a_0}{(a_0^2+(b_0-1)^2)}X + \frac{(b_0-1)}{(a_0^2+(b_0-1)^2)}Y + \frac{a_0(\sqrt{a_0^2-4b_0}+a_0)-2b_0+2}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)}Z \\
+\frac{a_0(\sqrt{a_0^2-4b_0}-a_0)+2b_0-2}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)}V \\
\frac{(b_0-1)}{(a_0^2+(b_0-1)^2)}X + \frac{a_0}{(a_0^2+(b_0-1)^2)}Y - \frac{(\sqrt{a_0^2-4b_0}(b_0-1)+a_0(b_0+1))}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)}Z \\
-\frac{(\sqrt{a_0^2-4b_0}(b_0-1)-a_0(b_0+1))}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)}V \\
-\frac{(b_0-1)}{(a_0^2+(b_0-1)^2)}X + \frac{a_0}{(a_0^2+(b_0-1)^2)}Y - \frac{(\sqrt{a_0^2-4b_0}(b_0-1)+a_0(b_0+1))}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)}Z \\
-\frac{(\sqrt{a_0^2-4b_0}(b_0-1)-a_0(b_0+1))}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)}V \\
-\frac{(b_0-1)}{(a_0^2+(b_0-1)^2)}X - \frac{a_0}{(a_0^2+(b_0-1)^2)}Y + \frac{(\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+b_0^2-b_0)-a_0(a_0^2+b_0^2-3b_0))}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)}Z \\
-\frac{(\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+b_0^2-b_0)+a_0(a_0^2+b_0^2-3b_0))}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)}V
\end{pmatrix}.
\tag{5.2.6}
$$

On remplace (5.2.2) et (5.2.6) dans (5.2.5), on trouve

$$
\begin{aligned}
\dot{X} &= \; -Y + \varepsilon G(t, X, Y, Z, V) + O(\varepsilon^2), \\
\dot{Y} &= \; X, \\
\dot{Z} &= \; LZ + \varepsilon G(t, X, Y, Z, V) + O(\varepsilon^2), \\
\dot{V} &= \; NV + \varepsilon G(t, X, Y, Z, V) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}
\tag{5.2.7}
$$

avec

$$\begin{aligned} G(t,X,Y,Z,V) = \;& F_0(t,a(X,Y,Z,V),b(X,Y,Z,V),c(X,Y,Z,V),\\ & d(X,Y,Z,V)) + e(X,Y,Z,V), \end{aligned}$$

où $a(X,Y,Z,V)$, $b(X,Y,Z,V)$, $c(X,Y,Z,V)$ et $d(X,Y,Z,V)$ sont

$$\frac{(a_0^2-2b_0+2)(V-Z)+\sqrt{a_0^2-4b_0}(2(b_0-1)Y+a_0(V-2X+Z))}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)},$$

$$\frac{\sqrt{a_0^2-4b_0}(-b_0V+V+2(b_0-1)X+2a_0Y-b_0Z+Z)-a_0(b_0+1)(V-Z)}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)},$$

$$\frac{(a_0^2+2(b_0-1)b_0)(V-Z)+\sqrt{a_0^2-4b_0}(-2(b_0-1)Y-a_0(V-2X+Z))}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)},$$

$$\frac{\sqrt{a_0^2-4b_0}\,((V+Z)a_0^2-2Ya_0+(b_0-1)(b_0(V+Z)-2X))-a_0\,(a_0^2+(b_0-3)b_0)\,(V-Z)}{2\sqrt{a_0^2-4b_0}(a_0^2+(b_0-1)^2)},$$

respectivement, et $e(X,Y,Z,V)$ est égal à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4(a_0^2-4b_0)(a_0^2+(b_0-1)^2)^2}\Big(2\big(a_1(V(X-2Z)+XZ)a_0^5-\big(2b_1(V-X)(X-Z)\\
&+c_2\big(V^2-2XV+2X^2+Z^2-2XZ\big)+Y(c_1(V-2X+Z)+a_1((b_0-2)V+2X\\
&+(b_0-2)Z))\big)a_0^4+\big(a_1\big(V^2+\big(\big(b_0^2-4b_0-1\big)X-2\big(b_0^2-5b_0+1\big)Z\big)V\\
&-2(b_0-1)X^2+2b_0Y^2-2Y^2+Z^2+\big(b_0^2-4b_0-1\big)XZ\big)\\
&+2\big(c_1\big(-X^2+ZX+Y^2+V(X-Z)\big)-(b_1-c_2)Y(V-2X+Z)\big)\\
&+b_0\big(2(b_1-c_2)Y(V-2X+Z)+c_1\big(V^2-2XV+2X^2-2Y^2+Z^2-2XZ\big)\big)\big)a_0^3\\
&+\big(-b_1\big(\big(Z^2-2Y^2\big)b_0^2+4\big(2X^2-2ZX+Y^2\big)b_0+\big(b_0^2+1\big)V^2-2Y^2+Z^2\\
&-2V\big(Zb_0^2+4(X-Z)b_0+Z\big)\big)-2c_2\big((1-2b_0)V^2+(4b_0X-2Z)V+b_0^2Y^2\\
&+Y^2+Z^2-2b_0\big(2X^2-2ZX+Y^2+Z^2\big)\big)+Y\big(c_1(V-2X+Z)(b_0+1)^2\\
&+a_1\big(-(V+Z)b_0^3+2(3V+X+3Z)b_0^2+(-9V+4X-9Z)b_0+2X\big)\big)\big)a_0^2\\
&+(b_0-1)\big(-8b_0(b_1-c_2)Y(V-2X+Z)+a_1b_0\big((b_0+3)V^2-2(2(b_0+1)X
\end{aligned}$$

$$-3(b_0-1)Z)V+8X^2-8Y^2+b_0Z^2+3Z^2-4(b_0+1)XZ\big)-c_1\big((3b_0+1)V^2$$
$$-2(4b_0X-b_0Z+Z)V+Z^2+b_0\big(8X^2-8ZX-8Y^2+3Z^2\big)\big)\big)a_0$$
$$+2(b_0-1)^2\big(2a_1Y(V+Z)b_0^2+\big(b_1\big(V^2-2ZV-4Y^2+Z^2\big)+2Y(-2a_1X+2c_2Y$$
$$-c_1(V-2X+Z))\big)b_0-c_2(V-Z)^2\big)\big)-2\sqrt{a_0^2-4b_0}(V-Z)\big(a_1Xa_0^4+((c_1-a_1b_0)Y$$
$$+c_2(V-2X+Z))a_0^3+\big(-2c_2Y+a_1\big(Xb_0^2-4Xb_0+V+X+Z\big)$$
$$-b_0(c_1(V-2X+Z)-2c_2Y)\big)a_0^2+(b_0-1)\big(-\big(a_1\big(b_0^2-3b_0-2\big)+(b_0+3)c_1\big)Y$$
$$+(b_0+1)b_1(V-2X+Z)-2c_2(V-2X+Z)\big)a_0-(b_0-1)^2(-2(b_0b_1+b_1-2c_2)Y$$
$$-c_1(V-2X+Z)+a_1(b_0(V+Z)-2X)))\Big).$$

Nous étudions les solutions périodiques du système différentiel (5.2.7).

On utilise la notation du théorème 2.2.3. D'aprés le système (5.2.7), on a

$$x=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\V\end{pmatrix},\quad F_0=\begin{pmatrix}-Y\\X\\LZ\\NV\end{pmatrix},\quad F_1=\begin{pmatrix}G(t,X,Y,Z,V)\\0\\G(t,X,Y,Z,V)\\G(t,X,Y,Z,V)\end{pmatrix}.$$

Les solutions périodiques du système (5.2.7) avec $\varepsilon=0$ sont

$$\begin{pmatrix}X(t)\\Y(t)\\Z(t)\\V(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_0\cos t-Y_0\sin t\\X_0\sin t+Y_0\cos t\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{5.2.8}$$

Cet ensemble de solutions périodiques est de dimension deux, tous ayant la période 2π. Pour chercher les solutions périodiques du système différentiel (5.2.7) avec $|\varepsilon|\neq 0$ suffisamment petit nous devons calculer les zéros $z=(X_0,Y_0,0,0)$ de la fonction $\mathcal{F}(z)$ définie dans (2.2.14).

La matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel non perturbé (5.2.7) est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(Lt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(Nt) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, un calcul simple donne

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\exp(-2\pi L) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\exp(-2\pi N) \end{pmatrix}.$$

Puisque $b_0 \neq 0$, toutes les hypothèses du théorème 2.2.3 sont vérifiées. Par conséquent nous allons étudier les zéros de la fonction $\mathcal{F}(X_0, Y_0) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ où

$$\mathcal{F}(X_0, Y_0) = \xi \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{-1}(t) F_1(t, X(t), Y(t), Z(t), V(t)) dt \right)$$

où $X(t), Y(t), Z(t), V(t)$ sont donnés dans (5.2.8). Par conséquent après quelques calculs nous obtenons les fonctions $\mathcal{F}_k(X_0, Y_0)$ pour $k = 1, 2$ de l'énoncé du théorème 5.1.1.

Les zéros (X_0^*, Y_0^*) de la fonction $\mathcal{F}(X_0, Y_0)$ satisfaisant (5.1.2) fournissent des solutions périodiques du système (5.2.7) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Du théorème 2.2.3 la solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon), Z(t,\varepsilon), V(t,\varepsilon))$ du système differentiel (5.2.7) donnée par le zéro (X_0^*, Y_0^*) satisfait

$$(X(0,\varepsilon), Y(0,\varepsilon), Z(0,\varepsilon), V(0,\varepsilon)) = (X_0^*, Y_0^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

En revenant par les changements des variables (5.2.1) et (5.2.4) nous obtenons la solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ du système différentiel (5.2.7) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit satisfaisant

$$(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon), z(0,\varepsilon), v(0,\varepsilon)) = \varepsilon(x^*, y^*, z^*, v^*) + O(\varepsilon^2),$$

où
$$x^* = -z^* = \frac{(b_0-1)Y_0^* - a_0X_0^*}{a_0^2+(b_0-1)^2}, \;\; y^* = -v^* = \frac{(b_0-1)X_0^* + a_0Y_0^*}{a_0^2+(b_0-1)^2}.$$
Par conséquent nous avons une solution périodique $u(t,\varepsilon)$ de l'équation différentielle du 4–ordre (5.1.1) avec $a_0^2-4b_0>0$ et $b_0\neq 0$, telle que $u(0,\varepsilon)=\varepsilon\dfrac{(b_0-1)Y_0^*-a_0X_0^*}{a_0^2+(b_0-1)^2}+O(\varepsilon^2)$.
■

Preuve du corollaire 5.1.1. Nous devons appliquer le théorème 5.1.1 avec $F_0(t,x,y,z,v) = (y-1)(2-\cos t)$. Après quelques calculs faciles les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ du théorème 5.1.1 sont
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(X_0,Y_0) = &\; \frac{a_0^2+2Y_0a_0+(b_0-1)(b_0+2X_0-1)}{2\left(a_0^2+(b_0-1)^2\right)},\\ \mathcal{F}_2(X_0,Y_0) = &\; -\frac{a_0X_0-b_0Y_0+Y_0}{a_0^2+(b_0-1)^2}.\end{aligned}$$
Le système $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2=0$ a seulement une solution $(X_0^*,Y_0^*)=((1-b_0)/2,-a_0/2)$, et les valeurs propres de la matrice jacobienne pour cette solution sont $\big((b_0-1)\pm a_0i\big)/\big((b_0-1)^2+a_0^2\big)$. Par conséquent d'après le théorème 2.2.3 la solution périodique correspondante qui est associée au zéro $((1-b_0)/2,-a_0/2)$ est asymptotiquement stable si $b_0-1<0$, et est instable si $b_0-1>0$. Le reste de la preuve suit en utilisant le théorème 5.1.1. ■

Preuve du corollaire 5.1.2. Nous devons appliquer le théorème 5.1.1 avec $F_0(t,x,y,z,v) = (x-1)(1+\cos t)$. Après quelques calculs faciles les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ du théorème 5.1.1 sont
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(X_0,Y_0) = &\; -\frac{a_0^2+X_0a_0+(b_0-1)(b_0-Y_0-1)}{2\left(a_0^2+(b_0-1)^2\right)},\\ \mathcal{F}_2(X_0,Y_0) = &\; -\frac{(b_0-1)X_0+a_0Y_0}{2\left(a_0^2+(b_0-1)^2\right)}.\end{aligned}$$
Le système $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2=0$ a seulement une solution $(X_0^*,Y_0^*)=(-a_0,b_0-1)$ et les valeurs propres de la matrice jacobienne (5.1.3) sont $(-a_0\pm|b_0-1|i)/(2(a_0^2+(b_0-1)^2)$. Maintenant d'après le théorème 2.2.3 la solution périodique correspondante qui est associée au zéro $(-a_0,b_0-1)$ est asymptotiquement stable si $a_0>0$, et est instable si $a_0<0$. Encore le reste de la preuve suit en utilisant le théorème 5.1.1. ■

Preuve du théorème 5.1.2. En suivant la preuve du théorème 5.1.1, avec les hypothèses du théorème 5.1.2 nous avons le système

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \ y, \\ \dot{y} = & \ z, \\ \dot{z} = & \ v, \\ \dot{v} = & \ -b_0x - (1+b_0)z + \varepsilon(-c_2x^2 - c_1xy - b_1xz - a_1xv \\ & +F_0(t,x,y,z,v)) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

au lieu du système (5.2.2), où la fonction $F_0(t,x,y,z,v)$ a été définie dans l'énoncé du théorème 5.1.2. Le système non perturbé a un point singulier unique, l'origine. La partie linéaire du système avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b_0 & 0 & -(1+b_0) & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2.10}$$

Puisque $b_0 > 0$ et $b_0 \neq 1$. Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm i$ et $\pm\sqrt{b_0}\, i$. On va faire un changement de variable linéaire

$$(X,Y,Z,V)^T = B(x,y,z,v)^T, \tag{5.2.11}$$

telle que dans les nouvelles variables (X,Y,Z,V), le système (5.2.9) avec $\varepsilon = 0$ a sa partie linéaire égale à sa forme normale de Jordan c.à.d. $(\dot{X},\dot{Y},\dot{Z},\dot{V})^T = J(X,Y,Z,V)^T$.

La forme normale réelle de Jordan de la matrice A est $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{b_0} \\ 0 & 0 & \sqrt{b_0} & 0 \end{pmatrix}$.

On a $$BAB^{-1} = J \to \ BA - JB = 0$$
d'où
$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & 0 & 1 \\ b_0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{b_0} & 0 & \sqrt{b_0} & 0 \end{pmatrix}.$$
Le système différentiel (5.2.9) devient
$$\begin{aligned} \dot{X} = &\ -Y + \varepsilon G(t, X, Y, Z, V) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{Y} = &\ X, \\ \dot{Z} = &\ -\sqrt{b_0}V + \varepsilon G(t, X, Y, Z, V) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{V} = &\ \sqrt{b_0}Z, \end{aligned} \tag{5.2.12}$$
avec
$$\begin{aligned} G(t, X, Y, Z, V) = &\ F_0(t, a(X, Y, Z, V), b(X, Y, Z, V), c(X, Y, Z, V), d(X, Y, Z, V)) \\ &+ e(X, Y, Z, V), \end{aligned}$$
où
$$\begin{aligned} a(X, Y, Z, V) &= \frac{\sqrt{b_0}Y - V}{(b_0 - 1)\sqrt{b_0}}, \\ b(X, Y, Z, V) &= \frac{X - Z}{b_0 - 1}, \\ c(X, Y, Z, V) &= \frac{\sqrt{b_0}V - Y}{b_0 - 1}, \\ d(X, Y, Z, V) &= \frac{b_0 Z - X}{b_0 - 1}, \end{aligned}$$
respectivement, et $e(X, Y, Z, V)$ est égal à
$$\frac{\left(V - \sqrt{b_0}Y\right)\left(a_1 Z b_0^{3/2} + b_1 V b_0 - (a_1 X - c_1 X + b_1 Y - c_2 Y + c_1 Z)\sqrt{b_0} - c_2 V\right)}{(b_0 - 1)^2 b_0}.$$

Nous étudions les solutions périodiques du système différentiel (5.2.12). On utilise la notation du théorème 2.2.4. D'aprés le système (5.2.12), on a

$$x = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ -\sqrt{b_0}V \\ \sqrt{b_0}Z \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} G(t,X,Y,Z,V) \\ 0 \\ G(t,X,Y,Z,V) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions périodiques du système non perturbé (5.2.12) sont

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ X_0 \sin t + Y_0 \cos t \\ Z_0 \cos\left(\sqrt{b_0}t\right) - V_0 \sin\left(\sqrt{b_0}t\right) \\ Z_0 \sin\left(\sqrt{b_0}t\right) + V_0 \cos\left(\sqrt{b_0}t\right) \end{pmatrix}. \tag{5.2.13}$$

Puisque $b_0 = p^2/q^2 \neq 1$ l'ensemble de solutions périodiques du système non perturbé a la dimension quatre, tous ayant la période $T = 2q\pi$. Pour chercher les solutions périodiques du système différentiel (5.2.12) avec $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit nous devons calculer les zéros $z = (X_0, Y_0, Z_0, V_0)$ de la fonction $\mathcal{F}(z)$ définie dans (2.2.15).

La matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel non perturbé (5.2.12) le long de toute solution périodique (5.2.13) est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\sqrt{b_0}t\right) & -\sin\left(\sqrt{b_0}t\right) \\ 0 & 0 & \sin\left(\sqrt{b_0}t\right) & \cos\left(\sqrt{b_0}t\right) \end{pmatrix}.$$

Puisque $b_0 = p^2/q^2 \neq 1$ avec p et q sont des nombres entiers positifs toutes les hypothèses du théorème 2.2.4 sont vérifiées. Par conséquent nous devons étudier les zéros de la fonction $\mathcal{F}(z) = (\mathcal{F}_1(z), \mathcal{F}_2(z), \mathcal{F}_3(z), \mathcal{F}_4(z))$ où $z = (X_0, Y_0, Z_0, V_0)$, et

$$\mathcal{F}(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = \frac{1}{2q\pi} \int_0^{2q\pi} M^{-1}(t) F_1(t, X(t), Y(t), Z(t), V(t))dt,$$

où $X(t), Y(t), Z(t), V(t)$ sont donnés dans (5.2.13). Par conséquent après quelques calculs nous obtenons les fonctions $\mathcal{F}_k(X_0, Y_0, Z_0, V_0)$ données dans l'énoncé du théorème 5.1.2. De zéros $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)$ de la fonction $\mathcal{F}(X_0, Y_0, Z_0, V_0)$ satisfaisant (5.1.4) fournissent les solutions périodiques du système (5.2.12) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Du théorème 2.2.4 la solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon), Z(t,\varepsilon), V(t,\varepsilon))$ du système différentiel (5.2.12) donnée par le zéro $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)$ satisfait

$$(X(0,\varepsilon), Y(0,\varepsilon), Z(0,\varepsilon), V(0,\varepsilon)) = (X_0^*, Y_0^* Z_0^*, V_0^*) + O(\varepsilon).$$

En revenant par les changements des variables (5.2.1) et (5.2.11) nous obtenons la solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ du système différentiel (5.2.12) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit satisfaisant $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon), z(0,\varepsilon), v(0,\varepsilon)) = \varepsilon(x^*, y^*, z^*, v^*) + O(\varepsilon^2)$, où

$$x^* = \frac{\sqrt{b_0}Y_0^* - V_0^*}{(b_0-1)\sqrt{b_0}}, \quad y^* = \frac{X_0^* - Z_0^*}{b_0 - 1}, \quad z^* = \frac{\sqrt{b_0}V_0^* - Y_0^*}{b_0-1}, \quad z^* = \frac{b_0 Z_0^* - X_0^*}{b_0 - 1}.$$

Par conséquent nous avons une solution périodique $u(t,\varepsilon)$ de l'équation différentielle du 4–ordre (5.1.1) avec $a_0 = 0$, $b_0 = p^2/q^2 \neq 1$, p et q sont des nombres entiers positifs, telle que $u(0,\varepsilon) = \varepsilon \dfrac{\sqrt{b_0}Y_0^* - V_0^*}{(b_0-1)\sqrt{b_0}} + O(\varepsilon^2)$. ■

Preuve du corollaire 5.1.3. Nous devons appliquer le théorème 5.1.2 avec $F_0(t,x,y,z,v) = (y-1)(2-\cos t)$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1/4$ et $a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0$. Après quelques calculs faciles les fonctions $\mathcal{F}_k$ pour $k = 1,2,3,4$ du théorème 5.1.2 sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(X_0, Y_0, Z_0, V_0) =&\ \frac{3 - 8X_0}{6}, \\
\mathcal{F}_2(X_0, Y_0, Z_0, V_0) =&\ -\frac{4}{3}Y_0, \\
\mathcal{F}_3(X_0, Y_0, Z_0, V_0) =&\ Z_0, \\
\mathcal{F}_4(X_0, Y_0, Z_0, V_0) =&\ \frac{5}{3}V_0.
\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_k = 0$ pour $k = 1,2,3,4$ a seulement une solution

$$(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*) = \left(\frac{3}{8}, 0, 0, 0\right),$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne (5.1.5) correspondant à cette solution sont

$$\frac{5}{3}, 1, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}.$$

.

Par conséquent d'après le théorème 2.2.4 la solution périodique correspondant au zéro $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)$ est instable. Le reste de la preuve suit en utilisant le théorème 5.1.2. ∎

Preuve du corollaire 5.1.4. Nous devons appliquer le théorème 5.1.2 avec $F_0(t,x,y,z,v) = (x-1)(1+\cos t)$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1/4$ et $a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0$. Après quelques calculs les fonctions $\mathcal{F}_k$ pour $k = 1,2,3,4$ du théorème 5.1.2 sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(X_0,Y_0,Z_0,V_0) = &\ \frac{-3-4Y_0}{6},\\
\mathcal{F}_2(X_0,Y_0,Z_0,V_0) = &\ \frac{2}{3}X_0,\\
\mathcal{F}_3(X_0,Y_0,Z_0,V_0) = &\ 2V_0,\\
\mathcal{F}_4(X_0,Y_0,Z_0,V_0) = &\ -\frac{2}{3}Z_0.
\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_k = 0$ pour $k = 1,2,3,4$ a seulement une solution

$$(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*) = \left(0, -\frac{3}{4}, 0, 0\right),$$

et les valeurs propres de la matrice jacobienne (5.1.5) correspondant à cette solution sont

$$\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\,i, \quad \pm\frac{2}{3}\,i.$$

Par conséquent d'après le théorème 2.2.4 nous ne pouvons pas déterminer la stabilité de la solution périodique correspondante associée au zéro $(X_0^*, Y_0^*, Z_0^*, V_0^*)$. Le reste de la preuve suit en utilisant le théorème 5.1.2. ∎

Preuve du théorème 5.1.3. Encore en suivant la preuve du théorème 5.1.1, sous les hypothèses du théorème 5.1.3 nous avons le système

$$\begin{aligned}
\dot{x} = &\ y,\\
\dot{y} = &\ z,\\
\dot{z} = &\ v,\\
\dot{v} = &\ -b_0x - (1+b_0)z + \varepsilon(-c_2x^2 - c_1xy - b_1xz - a_1xv\\
&\ + F_0(t,x,y,z,v)) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

au lieu du système (5.2.2), où la fonction $F_0(t,x,y,z,v)$ a été définie dans l'énoncé du théorème 5.1.3. Le système non perturbé a un point singulier unique, l'origine des coordonnées.

La partie linéaire du système avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2.15}$$

Puisque $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm i$ avec la multiplicité deux. On va faire un changement de variable linéaire

$$(X, Y, Z, V)^T = B(x, y, z, v)^T, \tag{5.2.16}$$

telle que dans les nouvelles variables (X, Y, Z, V), le système (5.2.14) avec $\varepsilon = 0$ a sa partie linéaire égale à sa forme normale de Jordan c.à.d. $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \dot{V})^T = J(X, Y, Z, V)^T$.

La forme normale réelle de Jordan de la matrice A est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $$BAB^{-1} = J \rightarrow \; BA - JB = 0$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel (5.2.14) devient

$$
\begin{aligned}
\dot{X} &= -Y + Z + \varepsilon G(t, X, Y, Z, V) + O(\varepsilon^2),\\
\dot{Y} &= X + V,\\
\dot{Z} &= -V,\\
\dot{V} &= Z - \varepsilon G(t, X, Y, Z, V) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned}
\tag{5.2.17}
$$

où

$$
\begin{aligned}
G(t, X, Y, Z, V) = {} & F_0\left(t, \frac{Y}{2}, \frac{V+X}{2}, Z - \frac{Y}{2}, \frac{1}{2}(-3V - X)\right)\\
& -\frac{1}{4}Y(c_1(V+X) - a_1(3V+X) - b_1 Y + c_2 Y + 2b_1 Z).
\end{aligned}
$$

Nous étudions les solutions périodiques du système différentiel (5.2.17). On utilise la notation du théorème 2.2.5. D'aprés le système (5.2.17), on a

$$
x = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} -Y + Z \\ X + V \\ -V \\ Z \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} G(t, X, Y, Z, V) \\ 0 \\ 0 \\ -G(t, X, Y, Z, V) \end{pmatrix}.
$$

Les solutions périodiques du système (5.2.17) avec $\varepsilon = 0$ sont celles données dans (5.2.8). Cet ensemble de solutions périodiques a la dimension deux, toutes ayant la période 2π. Pour chercher les solutions périodiques du système différentiel (5.2.17) avec $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit nous devons calculer les zéros $z = (X_0, Y_0, 0, 0)$ de la fonction $\mathcal{G}(z)$ définie dans (5.1.2). La matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel non perturbé (5.2.17) le long de toute solution périodique (5.2.8) satisfaisant $M(0)$ est la matrice d'identité 4×4 est

$$
M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & t\cos t & -t\sin t \\ \sin t & \cos t & t\sin t & t\cos t \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.
$$

Ainsi

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & -t\cos t & -t\sin t \\ -\sin t & \cos t & t\sin t & -t\cos t \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

et la matrice $M^{-1}(t)$ vérifies

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi toutes les hypothèses du théorème 2.2.5 sont vérifiées. Par conséquent nous devons étudier les zéros de la fonction $\mathcal{G}(X_0, Y_0) = (\mathcal{G}_1(X_0, Y_0), \mathcal{G}_2(X_0, Y_0))$ où

$$\mathcal{G}(X_0, Y_0) = \xi^{\perp}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M^{-1}(t)F_1(t, X(t), Y(t), Z(t), V(t))dt\right),$$

où $X(t), Y(t), Z(t), V(t)$ sont donnés dans (5.2.8). Par conséquent après quelques calculs nous obtenons les fonctions $\mathcal{G}_k(X_0, Y_0)$ pour $k = 1, 2$ de l'énoncé du théorème 5.1.3. Les zéros (X_0^*, Y_0^*) de la fonction $\mathcal{G}(X_0, Y_0)$ satisfaisant (5.1.2) fournissent des solutions périodiques du système (5.2.17) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Du théorème 2.2.5 la solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon), Z(t,\varepsilon), V(t,\varepsilon))$ du système différentiel (5.2.17) donnée par le zéro (X_0^*, Y_0^*) satisfait

$$(X(0,\varepsilon), Y(0,\varepsilon), Z(0,\varepsilon), V(0,\varepsilon)) = (X_0^*, Y_0^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

En revenant par le changements des variables (5.2.1) et (5.2.16) nous obtenons la solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ du système différentiel (5.2.17) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit satisfaisant $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon), z(0,\varepsilon), v(0,\varepsilon)) = \varepsilon(x^*, y^*, z^*, v^*) + O(\varepsilon^2)$,

où

$$x^* = -z^* = \frac{Y_0^*}{2}, \qquad y^* = -v^* = \frac{X_0^*}{2}.$$

Par conséquent nous avons une solution périodique $u(t,\varepsilon)$ de l'équation différentielle du 4–ordre (5.1.1) avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, telle que

$$u(0,\varepsilon) = \varepsilon\frac{Y_0^*}{2} + O(\varepsilon^2).$$

■

Preuve du corollaire 5.1.5. Nous devons appliquer le théorème 5.1.3 avec $F_0(t,x,y,z,v) = (y-1)(2-\cos t)$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0$. Après quelques calculs les fonctions $\mathcal{G}_k$ pour $k = 1, 2$ du théorème 5.1.3 sont

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = & \ \frac{1}{12}(5X_0 - 6\pi Y_0 + 27), \\ \mathcal{G}_2(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = & \ \frac{1}{12}(6\pi(X_0 + 1) + 7Y_0). \end{aligned}$$

Le système $\mathcal{G}_k = 0$ pour $k = 1, 2$ a seulement une solution

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(-\frac{9\,(21 + 4\pi^2)}{35 + 36\pi^2}, \frac{132\pi}{35 + 36\pi^2}\right).$$

Les valeurs propres de la matrice jacobienne (5.1.3) correspondant à cette solution sont $\left(6 \pm \sqrt{36\pi^2 - 1}\, i\right)/12$. Par conséquent d'après le théorème 2.2.5 la solution périodique correspondante associée au zéro (X_0^*, Y_0^*) est instable. Le reste de la preuve suit en utilisant le théorème 5.1.3. ■

Preuve du corollaire 5.1.6. Nous devons appliquer le théorème 5.1.3 avec $F_0(t,x,y,z,v) = (x-1)(1+\cos t)$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0$. Après quelques calculs les fonctions $\mathcal{G}_k$ pour $k = 1, 2$ du théorème 5.1.3 sont

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = & \ \frac{1}{4}\left(\pi X_0 - \frac{Y_0}{6} + 3\right), \\ \mathcal{G}_2(X_0, Y_0, Z_0, V_0) = & \ \frac{1}{24}(6\pi(Y_0 - 2) - 13X_0). \end{aligned}$$

Le système $\mathcal{G}_k = 0$ pour $k = 1, 2$ a seulement une solution

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(\frac{96\pi}{13 - 36\pi^2}, \frac{18\,(13 - 4\pi^2)}{13 - 36\pi^2}\right).$$

Les valeurs propres de la matrice jacobienne (5.1.3) correspondant à cette solution sont $\left(6\pi \pm \sqrt{13}\right)/24$. Par conséquent d'après le théorème 2.2.5 la solution périodique correspondante associée au zéro (X_0^*, Y_0^*) est instable. Le reste de la preuve suit en utilisant le théorème 5.1.3. ■

CHAPITRE 6

Solutions périodiques pour une classe périodique des équations différentielles de Duffing

6.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce chapitre nous étudions les solutions périodiques de la classe des équations de Duffing données par

$$x'' + c(t)x' + a(t)x + b(t)x^3 = h(t, x), \tag{6.1.1}$$

où les fonctions $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ et $h(t, x)$ sont C^2 et T-périodiques en t.

Au lieu du travail avec l'équation différentielle de Duffing T-périodique (6.1.1) nous travaillerons avec le système différentiel du premier ordre T-périodique suivant

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -c(t)y - a(t)x - b(t)x^3 + h(t, x). \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Nous supposons que les fonctions suivantes sont T-périodiques en t

$$k(t)=\int_0^t c(s)ds,\ m(t)=\int_0^t a(s)e^{k(s)}ds,$$
$$n(t)=\int_0^t b(s)e^{k(s)}ds,\ g(t,x)=\int_0^t h(s,x)e^{k(s)}ds.$$

Nos résultats sur les solutions périodiques du système différentiel (6.1.2) sont les suivants.

Théorème 6.1.1 *Nous considérons le système différentiel* (6.1.2) *où les fonctions* $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ *et* $h(t,\ x)$ *sont* C^2 *et* T*-périodiques en* t*. Alors, on a les affirmations suivantes pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit.*

(**1**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$-x_0^3\int_0^T n(t)e^{-k(t)}dt - x_0\int_0^T m(t)e^{-k(t)}dt + \int_0^T g(t,x_0)e^{-k(t)}dt + y_0\int_0^T e^{-k(t)}dt = 0,$$
$$-3x_0^5\int_0^T n(t)^2e^{-k(t)}dt - x_0^3\int_0^T n(t)(4m(t)-g_x(t,x_0))e^{-k(t)}dt + 3x_0^2y_0\int_0^T n(t)$$
$$e^{-k(t)}dt + 3x_0^2\int_0^T n(t)g(t,x_0)e^{-k(t)}dt - x_0\int_0^T m(t)(m(t)-g_x(t,x_0))e^{-k(t)}dt$$
$$+\int_0^T g(t,x_0)(m(t)-g_x(t,x_0))e^{-k(t)}dt + y_0\int_0^T (m(t)-g_x(t,x_0))e^{-k(t)}dt = 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* (x_0^*, y_0^*).

(**2**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$-x_0^3\int_0^T n(t)e^{-k(t)}dt - x_0\int_0^T m(t)e^{-k(t)}dt + y_0\int_0^T e^{-k(t)}dt = 0,$$
$$-3x_0^5\int_0^T n(t)^2e^{-k(t)}dt - 4x_0^3\int_0^T n(t)m(t)e^{-k(t)}dt + 3x_0^2y_0\int_0^T n(t)e^{-k(t)}dt -$$
$$x_0\int_0^T m(t)^2e^{-k(t)}dt + \int_0^T h(t,x_0)e^{k(t)}dt + y_0\int_0^T m(t)e^{-k(t)}dt = 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* (x_0^*, y_0^*).

(**3**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$-x_0 \int_0^T m(t)e^{-k(t)}dt + \int_0^T g(t,x_0)e^{-k(t)}dt + y_0 \int_0^T e^{-k(t)}dt = 0,$$

$$-x_0^3 \int_0^T b(t)e^{k(t)}dt - x_0 \int_0^T m(t)(m(t) - g_x(t,x_0))e^{-k(t)}dt + \int_0^T g(t,x_0)(m(t)-$$

$$g_x(t,x_0))e^{-k(t)}dt + y_0 \int_0^T (m(t) - g_x(t,x_0))e^{-k(t)}dt = 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* (x_0^*, y_0^*).

(**4**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$-x_0^3 \int_0^T n(t)e^{-k(t)}dt + \int_0^T g(t,x_0)e^{-k(t)}dt + y_0 \int_0^T e^{-k(t)}dt = 0,$$

$$-3x_0^5 \int_0^T n(t)^2 e^{-k(t)}dt + x_0^3 \int_0^T n(t)g_x(t,x_0)e^{-k(t)}dt + 3x_0^2 y_0 \int_0^T n(t)e^{-k(t)}dt +$$

$$3x_0^2 \int_0^T n(t)g(t,x_0)e^{-k(t)}dt - \ x_0 \int_0^T a(t)e^{k(t)}dt - \int_0^T g(t,x_0)g_x(t,x_0)e^{-k(t)}dt$$

$$-y_0 \int_0^T g_x(t,x_0)e^{-k(t)}dt = 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* (x_0^*, y_0^*).

(**5**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$-x_0 \int_0^T m(t)e^{-k(t)}dt + y_0 \int_0^T e^{-k(t)}dt = 0,$$

$$-x_0^3 \int_0^T b(t)e^{k(t)}dt - x_0 \int_0^T m(t)^2 e^{-k(t)}dt + \int_0^T h(t,x_0)e^{k(t)}dt + y_0 \int_0^T m(t)e^{-k(t)}dt$$

$$= 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* (x_0^*, y_0^*).

(**6**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$-x_0^3 \int_0^T n(t)e^{-k(t)}dt + y_0 \int_0^T e^{-k(t)}dt = 0,$$
$$-3x_0^5 \int_0^T n(t)^2 e^{-k(t)}dt + 3x_0^2 y_0 \int_0^T n(t)e^{-k(t)}dt - x_0 \int_0^T a(t)e^{k(t)}dt + \int_0^T h(t,x_0)e^{k(t)}dt$$
$$= 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* (x_0^*, y_0^*).

(**7**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*
$$\int_0^T g(t,x_0)e^{-k(t)}dt + y_0 \int_0^T e^{-k(t)}dt = 0,$$
$$-x_0^3 \int_0^T b(t)e^{k(t)}dt - x_0 \int_0^T a(t)e^{k(t)}dt - \int_0^T g(t,x_0)g_x(t,x_0)e^{-k(t)}dt - y_0 \int_0^T g_x(t,x_0)$$
$$e^{-k(t)}dt = 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* (x_0^*, y_0^*).

(**8**) *Pour chaque zéro simple* x_0^* *de la fonction*
$$-x_0^3 \int_0^T b(t)e^{k(t)}dt - x_0 \int_0^T a(t)e^{k(t)}dt + \int_0^T h(t,x_0)e^{k(t)}dt$$
le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* $(x_0^*, 0)$.

Dans l'énoncé du théorème suivant nous supposons que les fonctions suivantes sont T-périodiques en t
$$m(t) = \int_0^t a(s)ds,\ n(t) = \int_0^t b(s)ds,\ g(t,x) = \int_0^t h(s,x)ds.$$

Théorème 6.1.2 *Nous considérons le système différentiel* (6.1.2) *où les fonctions* $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ *et* $h(t,\ x)$ *sont* C^2 *et* T*-périodiques en* t*. Alors, on a les affirmations suivantes pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit.*

(**1**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$-x_0^3\int_0^T n(t)dt - x_0\int_0^T m(t)dt + \int_0^T g(t,x_0)dt + T\ y_0 = 0,$$

$$-3x_0^5\int_0^T n(t)^2dt - x_0^3\int_0^T n(t)(4m(t) - g_x(t,x_0) - c(t))dt + 3x_0^2y_0\int_0^T n(t)dt +$$

$$3x_0^2\int_0^T n(t)g(t,x_0)dt - x_0\int_0^T m(t)(m(t) - g_x(t,x_0) - c(t))dt + \int_0^T g(t,x_0)(m(t)$$

$$-g_x(t,x_0) - c(t))dt + y_0\int_0^T (m(t) - \ g_x(t,x_0) - c(t))dt = 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t),y(t))$ *telle que* $(x(0),y(0))$ *est proche de* (x_0^*,y_0^*).

(**2**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*,y_0^*) *du système*

$$-x_0^3\int_0^T n(t)dt - x_0\int_0^T m(t)dt + T\ y_0 = 0,$$

$$-3x_0^5\int_0^T n(t)^2dt - x_0^3\int_0^T n(t)(4m(t) - c(t))dt + 3x_0^2y_0\int_0^T n(t)dt - x_0\int_0^T m(t)(m(t) -$$

$$c(t))dt + \int_0^T h(t,x_0)dt + y_0\int_0^T (m(t) - c(t))dt = 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t),y(t))$ *telle que* $(x(0),y(0))$ *est proche de* (x_0^*,y_0^*).

(**3**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*,y_0^*) *du système*

$$-x_0\int_0^T m(t)dt + \int_0^T g(t,x_0)dt + T\ y_0 = 0,$$

$$-x_0^3\int_0^T b(t)dt - x_0\int_0^T m(t)(m(t) - g_x(t,x_0) - c(t))dt + \int_0^T g(t,x_0)(m(t) - \ g_x(t,x_0) -$$

$$c(t))dt + y_0\int_0^T (m(t) - g_x(t,x_0) - c(t))dt = 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t),y(t))$ *telle que* $(x(0),y(0))$ *est proche de* (x_0^*,y_0^*).

(**4**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$-x_0^3 \int_0^T n(t)dt + \int_0^T g(t,x_0)dt + T\ y_0 = 0,$$

$$-3x_0^5 \int_0^T n(t)^2 dt + x_0^3 \int_0^T n(t)(g_x(t,x_0) + c(t))dt + 3x_0^2 y_0 \int_0^T n(t)dt + 3x_0^2 \int_0^T n(t)$$
$$g(t,x_0)dt - x_0 \int_0^T a(t)dt - \int_0^T g(t,x_0)(g_x(t,x_0) + c(t))dt - y_0 \int_0^T (g_x(t,x_0) + c(t))dt$$
$$= 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* (x_0^*, y_0^*).

(**5**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$-x_0 \int_0^T m(t)dt + T\ y_0 = 0,$$

$$-x_0^3 \int_0^T b(t)dt - x_0 \int_0^T m(t)(m(t) - c(t))dt + \int_0^T h(t,x_0)dt + y_0 \int_0^T (m(t) - c(t))dt = 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* (x_0^*, y_0^*).

(**6**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$-x_0^3 \int_0^T n(t)dt + T\ y_0 = 0,$$

$$-3x_0^5 \int_0^T n(t)^2 dt + x_0^3 \int_0^T c(t)n(t)dt + 3x_0^2 y_0 \int_0^T n(t)dt - x_0 \int_0^T a(t)dt + \int_0^T h(t,x_0)dt -$$
$$y_0 \int_0^T c(t)dt = 0,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* (x_0^*, y_0^*).

(**7**) *Pour chaque zéro simple* (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$\int_0^T g(t,x_0)dt + T\ y_0 = 0,$$

$$-x_0^3\int_0^T b(t)dt - x_0\int_0^T a(t)dt - \int_0^T g(t,x_0)(g_x(t,x_0)+c(t))dt - \ y_0\int_0^T (g_x(t,x_0)+$$
$c(t))dt = 0,$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* (x_0^*, y_0^*).

(**8**) *Pour chaque zéro simple* x_0^* *de la fonction*

$$-x_0^3\int_0^T b(t)dt - x_0\int_0^T a(t)dt + \int_0^T h(t,x_0)dt,$$

le système (6.1.2) *a une solution périodique* $(x(t), y(t))$ *telle que* $(x(0), y(0))$ *est proche de* $(x_0^*, 0)$.

6.2 Preuve

Preuve du théorème 6.1.1. Nous faisons le rescaling suivant des fonctions et des variables qui apparaissent dans le système différentiel (6.1.2)

$$\begin{array}{rcl} x &=& X, \\ y &=& \varepsilon^{m_2}Y, \\ a(t) &=& \varepsilon^{n_1}A(t), \\ b(t) &=& \varepsilon^{n_2}B(t), \\ c(t) &=& \varepsilon^{n_3}C(t), \\ h(t,x) &=& \varepsilon^{n_4}H(t,X), \end{array} \tag{6.2.1}$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre, alors le système différentiel (6.1.2) devient

$$\begin{array}{rcl} X' &=& \varepsilon^{m_2}Y, \\ Y' &=& -\varepsilon^{n_3}C(t)Y - \varepsilon^{n_1\,-\,m_2}A(t)X \\ && -\varepsilon^{n_2\,-m_2}B(t)X^3 + \varepsilon^{n_4\,-\,m_2}H(t,X), \end{array} \tag{6.2.2}$$

où nous supposons $0 \le n_3$, $0 \le m_2 \le n_1$, $m_2 \le n_2$, $m_2 \le n_4$, et $\{\ n_1 - m_2,\ n_2 - m_2, n_4 - m_2\} \cap \{1\} \ne \emptyset$. Nous distinguons les deux cas suivants avec leurs sous-cas correspondants Cas **I :** $m_2 = 1$ et $n_3 = 0$. Cas **II :** $m_2 = 1$ et

$n_3 = 1$. Nous avons partagé les cas **I** et **II** en les huit cas suivants

$(\alpha.1)$ $n_1 - m_2 = 0$, $n_2 - m_2 = 0$, $n_4 - m_2 = 0$,

$(\alpha.2)$ $n_1 - m_2 = 0$, $n_2 - m_2 = 0$, $n_4 - m_2 = 1$,

$(\alpha.3)$ $n_1 - m_2 = 0$, $n_2 - m_2 = 1$, $n_4 - m_2 = 0$,

$(\alpha.4)$ $n_1 - m_2 = 1$, $n_2 - m_2 = 0$, $n_4 - m_2 = 0$,

$(\alpha.5)$ $n_1 - m_2 = 0$, $n_2 - m_2 = 1$, $n_4 - m_2 = 1$,

$(\alpha.6)$ $n_1 - m_2 = 1$, $n_2 - m_2 = 0$, $n_4 - m_2 = 1$,

$(\alpha.7)$ $n_1 - m_2 = 1$, $n_2 - m_2 = 1$, $n_4 - m_2 = 0$,

$(\alpha.8)$ $n_1 - m_2 = 1$, $n_2 - m_2 = 1$, $n_4 - m_2 = 1$,

où $\alpha \in \{\mathbf{I}, \mathbf{II}\}$.

Nous supposons que les fonctions suivantes sont T-périodiques en t

$K(t) = \int_0^t C(s)ds$, $M(t) = \int_0^t A(s)e^{Ks)}ds$,

$N(t) = \int_0^t B(s)e^{K(s)}ds, G(t, X_0) = \int_0^t H(s, X_0)e^{K(s)}ds.$

Preuve de l'énoncé (1). Pour le cas (**I.1**), c.à.d. pour $n_3 = 0$, $m_2 = n_1 = n_2 = n_4 = 1$, alors le système différentiel (6.2.2) s'écrit

$$\begin{aligned} X' &= \varepsilon Y, \\ Y' &= -C(t)Y - A(t)X - B(t)X^3 + H(t, X). \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Ce système est sous la forme normale (2.2.11) pour appliquer la théorie de la moyennisation. Plus précisément, nous avons x $=(X, Y)$,

$F_0(t, \mathrm{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -C(t)Y - A(t)X - B(t)X^3 + H(t, X) \end{pmatrix}$, $F_1(t,\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$F_2(t, \mathrm{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En résolvant le système différentiel (2.2.12) nous obtenons les solutions périodiques

$$(X(t), Y(t)) = (X_0, (Y_0 - X_0M(t) - X_0^3N(t) + G(t, X_0))e^{-K(t)}),$$

pour tout $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Toutes les solutions du système différentiel (2.2.12) sont T-périodiques. Maintenant en posant z $= (X_0, Y_0)$ et en résolvant l'équation variationnelle

(2.2.13) nous obtenons la matrice fondamentale

$$M_z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-M(t) - 3X_0^2 N(t) + G_x(t, X_0))e^{-K(t)} & e^{-K(t)} \end{pmatrix}.$$

Nous calculons la fonction $\mathcal{F}(\mathrm{z}) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ définie dans (2.2.15) et nous obtenons

$$\mathcal{F}_1 = -X_0^3 \int_0^T N(t)e^{-K(t)}dt - X_0 \int_0^T M(t)e^{-K(t)}dt + \int_0^T G(t, X_0)e^{-K(t)}dt +$$
$$Y_0 \int_0^T e^{-K(t)}dt,$$
$$\mathcal{F}_2 = -3X_0^5 \int_0^T N(t)^2 e^{-K(t)}dt - X_0^3 \int_0^T N(t)(4M(t) - G_x(t, X_0))e^{-K(t)}dt +$$
$$3X_0^2 Y_0 \int_0^T N(t)e^{-K(t)}dt + 3X_0^2 \int_0^T N(t)G(t, X_0)e^{-K(t)}dt - X_0 \int_0^T M(t)$$
$$(M(t) - G_x(t, X_0))e^{-K(t)}dt + \int_0^T G(t, X_0)(M(t) - G_x(t, X_0))e^{-K(t)}dt$$
$$+Y_0 \int_0^T (M(t) - G_x(t, X_0))e^{-K(t)}dt.$$

D'après le théorème 2.2.4 le système différentiel (6.2.3) a une solution périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon))$ telle que $(X(0, \varepsilon), Y(0, \varepsilon)) \to (X_0^*, Y_0^*)$ quand $\varepsilon \to 0$, pour chaque zéro (X_0^*, Y_0^*) du système $\mathcal{F}_1 = 0, \mathcal{F}_2 = 0$, dont le jacobien est différent de zéro, c.à.d (X_0^*, Y_0^*) est un zéro simple du système $\mathcal{F}_1 = 0, \mathcal{F}_2 = 0$. En revenant au système différentiel (6.1.2) par le changement de variable (6.2.1) l'énoncé (1) suit.

Preuve de l'énoncé (2). Pour le cas (**I.2**), c.à.d. pour $n_3 = 0$, $m_2 = n_1 = n_2 = 1$, $n_4 = 2$ alors le système différentiel (6.2.2) s'écrit

$$\begin{aligned} X' &= \varepsilon Y, \\ Y' &= -C(t)Y - A(t)X - B(t)X^3 + \varepsilon H(t, X). \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Ce système est sous la forme normale (2.2.11) pour appliquer la théorie de la moyennisation.

En résolvant le système différentiel (2.2.12) nous obtenons les solutions périodiques

$$(X(t), Y(t)) = (X_0, (-X_0 M(t) - X_0^3 N(t) + Y_0)e^{-K(t)}),$$

pour tout $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Toutes les solutions du système différentiel (2.2.12) sont T-périodiques. Maintenant en posant z $= (X_0, Y_0)$ et en résolvant l'équation variationnelle (2.2.13) nous obtenons la matrice fondamentale

$$M_{\text{z}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-M(t) - 3X_0^2 N(t))e^{-K(t)} & e^{-K(t)} \end{pmatrix}.$$

Nous calculons la fonction $\mathcal{F}(\text{z}) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ définie dans (2.2.15) et nous obtenons

$$\mathcal{F}_1 = -X_0^3 \int_0^T N(t)e^{-K(t)}dt - X_0 \int_0^T M(t)e^{-K(t)}dt + Y_0 \int_0^T e^{-K(t)}dt,$$

$$\mathcal{F}_2 = -3X_0^5 \int_0^T N(t)^2 e^{-K(t)}dt - 4X_0^3 \int_0^T N(t)M(t)e^{-K(t)}dt + 3X_0^2 Y_0 \int_0^T N(t)$$
$$e^{-K(t)}dt - X_0 \int_0^T M(t)^2 e^{-K(t)}dt + \int_0^T H(t, X_0)e^{K(t)}dt + Y_0 \int_0^T M(t)e^{-K(t)}dt.$$

D'après le théorème 2.2.4 le système différentiel (6.2.4) a une solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ telle que $(X(0,\varepsilon), Y(0,\varepsilon)) \to (X_0^*, Y_0^*)$ quand $\varepsilon \to 0$, pour chaque zéro (X_0^*, Y_0^*) du système $\mathcal{F}_1 = 0, \mathcal{F}_2 = 0$, dont le jacobien est différent de zéro, c.à.d (X_0^*, Y_0^*) est un zéro simple du système $\mathcal{F}_1 = 0, \mathcal{F}_2 = 0$. En revenant au système différentiel (6.1.2) par le changement de variable (6.2.1) l'énoncé (2) suit.

Preuve de l'énoncé (3). Pour le cas (**I.3**), c.à.d. pour $n_3 = 0$, $m_2 = n_1 = n_4 = 1$, $n_2 = 2$ le système différentiel (6.2.2) s'écrit

$$\begin{aligned} X' &= \varepsilon Y, \\ Y' &= -C(t)Y - A(t)X + H(t,X) - \varepsilon B(t)X^3. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Ce système est sous la forme normale (2.2.11) pour appliquer la théorie de la moyennisation.

En résolvant le système différentiel (2.2.12) nous obtenons les solutions périodiques

$$(X(t), Y(t)) = (X_0, (-X_0 M(t) + G(t, X_0) + Y_0)e^{-K(t)}),$$

pour tout $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Toutes les solutions du système différentiel (2.2.12) sont T-périodiques. Maintenant en posant z $= (X_0, Y_0)$ et en résolvant l'équation variationnelle (2.2.13) nous obtenons la matrice fondamentale

$$M_z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-M(t) + G_x(t, X_0))e^{-K(t)} & e^{-K(t)} \end{pmatrix}.$$

Nous calculons la fonction $\mathcal{F}(z) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ définie dans (2.2.15) et nous obtenons

$$\mathcal{F}_1 = -X_0 \int_0^T M(t)e^{-K(t)}dt + \int_0^T G(t, X_0)e^{-K(t)}dt + Y_0 \int_0^T e^{-K(t)}dt,$$

$$\mathcal{F}_2 = -X_0^3 \int_0^T B(t)e^{K(t)}dt - X_0 \int_0^T M(t)(M(t) - G_x(t, X_0))e^{-K(t)}dt + \int_0^T G(t, X_0)$$

$$(M(t) - G_x(t, X_0))e^{-K(t)}dt + Y_0 \int_0^T (M(t) - \ G_x(t, X_0))e^{-K(t)}dt.$$

D'après le théorème 2.2.4 le système différentiel (6.2.5) a une solution périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon))$ telle que $(X(0, \varepsilon), Y(0, \varepsilon)) \to (X_0^*, Y_0^*)$ quand $\varepsilon \to 0$, pour chaque zéro (X_0^*, Y_0^*) du système $\mathcal{F}_1 = 0, \mathcal{F}_2 = 0$, dont le jacobien est différent de zéro. En revenant au système différentiel (6.1.2) par le changement de variable (6.2.1) l'énoncé (3) suit.

Preuve de l'énoncé (4). Pour le cas (**I.4**), c.à.d. pour $n_3 = 0$, $m_2 = n_2 = n_4 = 1$, $n_1 = 2$ le système différentiel (6.2.2) s'écrit

$$\begin{aligned} X' &= \varepsilon Y, \\ Y' &= -C(t)Y - B(t)X^3 + H(t, X) - \varepsilon A(t)X. \end{aligned} \qquad (6.2.6)$$

Ce système est sous la forme normale (2.2.11) pour appliquer la théorie de la moyennisation.

En résolvant le système différentiel (2.2.12) nous obtenons les solutions périodiques

$$(X(t), Y(t)) = (X_0, (-X_0^3 N(t) + G(t, X_0) + Y_0)e^{-K(t)}),$$

pour tout $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Toutes les solutions du système différentiel (2.2.12) sont T-périodiques. Maintenant en posant z $= (X_0, Y_0)$ et en résolvant l'équation variationnelle (2.2.13) nous obtenons la matrice fondamentale

$$M_z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-3X_0^2 N(t) + G_x(t, X_0))e^{-K(t)} & e^{-K(t)} \end{pmatrix}.$$

Nous calculons la fonction $\mathcal{F}(z) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ définie dans (2.2.15) et nous obtenons

$$\mathcal{F}_1 = -X_0^3 \int_0^T N(t)e^{-K(t)}dt + \int_0^T G(t, X_0)e^{-K(t)}dt + Y_0 \int_0^T e^{-K(t)}dt,$$

$$\mathcal{F}_2 = -3X_0^5 \int_0^T N(t)^2 e^{-K(t)}dt + X_0^3 \int_0^T N(t)G_x(t, X_0)e^{-K(t)}dt + 3X_0^2 Y_0 \int_0^T N(t)$$
$$e^{-K(t)}dt + 3X_0^2 \int_0^T N(t)G(t, X_0)e^{-K(t)}dt - X_0 \int_0^T A(t)e^{K(t)}dt - \int_0^T G(t, X_0)$$
$$G_x(t, X_0)e^{-K(t)}dt - Y_0 \int_0^T G_x(t, X_0)e^{-K(t)}dt.$$

D'après le théorème 2.2.4 le système différentiel (6.2.6) a une solution périodique $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon))$ telle que $(X(0, \varepsilon), Y(0, \varepsilon)) \to (X_0^*, Y_0^*)$ quand $\varepsilon \to 0$, pour chaque zéro (X_0^*, Y_0^*) du système $\mathcal{F}_1 = 0, \mathcal{F}_2 = 0$, dont le jacobien est différent de zéro. En revenant au système différentiel (6.1.2) par le changement de variable (6.2.1) l'énoncé (4) suit.

Preuve de l'énoncé (5). Pour le cas (**I.5**), c.à.d. pour $n_3 = 0$, $m_2 = n_1 = 1$, $n_2 = n_4 = 2$ le système différentiel (6.2.2) s'écrit

$$\begin{aligned} X' &= \varepsilon Y, \\ Y' &= -C(t)Y - A(t)X + \varepsilon H(t, X) - \varepsilon B(t)X^3. \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Ce système est sous la forme normale (2.2.11) pour appliquer la théorie de la moyennisation.

En résolvant le système différentiel (2.2.12) nous obtenons les solutions périodiques

$$(X(t), Y(t)) = (X_0, (-X_0 M(t) + Y_0)e^{-K(t)}),$$

pour tout $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Toutes les solutions du système différentiel (2.2.12) sont T-périodiques. Maintenant en posant $z = (X_0, Y_0)$ et en résolvant l'équation variationnelle (2.2.13) nous obtenons la matrice fondamentale

$$M_z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -M(t)e^{-K(t)} & e^{-K(t)} \end{pmatrix}.$$

Nous calculons la fonction $\mathcal{F}(\mathrm{z}) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ définie dans (2.2.15) et nous obtenons

$$\mathcal{F}_1 = -X_0 \int_0^T M(t)e^{-K(t)}dt + Y_0 \int_0^T e^{-K(t)}dt,$$

$$\mathcal{F}_2 = -X_0^3 \int_0^T B(t)e^{K(t)}dt - X_0 \int_0^T M(t)^2 e^{-K(t)}dt + \int_0^T H(t, X_0)e^{K(t)}dt +$$

$$Y_0 \int_0^T M(t)e^{-K(t)}dt.$$

D'après le théorème 2.2.4 le système différentiel (6.2.7) a une solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ telle que $(X(0,\varepsilon), Y(0,\varepsilon)) \to (X_0^*, Y_0^*)$ quand $\varepsilon \to 0$, pour chaque zéro (X_0^*, Y_0^*) du système $\mathcal{F}_1 = 0, \mathcal{F}_2 = 0$, dont le jacobien est différent de zéro. En revenant au système différentiel (6.1.2) par le changement de variable (6.2.1) l'énoncé (5) suit.

Preuve de l'énoncé (**6**). Pour le cas (**I.6**), c.à.d. pour $n_3 = 0$, $m_2 = n_2 = 1$, $n_1 = n_4 = 2$ alors le système différentiel (6.2.2) s'écrit

$$\begin{aligned} X' &= \varepsilon Y, \\ Y' &= -C(t)Y - B(t)X^3 - \varepsilon A(t)X + \varepsilon H(t, X). \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

Ce système est sous la forme normale (2.2.11) pour appliquer la théorie de la moyennisation.

En résolvant le système différentiel (2.2.12) nous obtenons les solutions périodiques

$$(X(t), Y(t)) = (X_0, (-X_0^3 N(t) + Y_0)e^{-K(t)}),$$

pour tout $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Toutes les solutions du système différentiel (2.2.12) sont T-périodiques. Maintenant en posant $\mathrm{z} = (X_0, Y_0)$ et en résolvant l'équation variationnelle (2.2.13) nous obtenons la matrice fondamentale

$$M_z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3X_0^2 N(t)e^{-K(t)} & e^{-K(t)} \end{pmatrix}.$$

Nous calculons la fonction $\mathcal{F}(\mathrm{z}) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ définie dans (2.2.15) et nous obtenons

$$\mathcal{F}_1 = -X_0^3 \int_0^T N(t)e^{-K(t)}dt + Y_0 \int_0^T e^{-K(t)}dt,$$

$$\mathcal{F}_2 = -3X_0^5 \int_0^T N(t)^2 e^{-K(t)}dt + 3X_0^2 Y_0 \int_0^T N(t)e^{-K(t)}dt - X_0 \int_0^T A(t)e^{K(t)}dt + \int_0^T H(t, X_0)e^{K(t)}dt.$$

D'après le théorème 2.2.4 le système différentiel (6.2.8) a une solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ telle que $(X(0,\varepsilon), Y(0,\varepsilon)) \to (X_0^*, Y_0^*)$ quand $\varepsilon \to 0$, pour chaque zéro (X_0^*, Y_0^*) du système $\mathcal{F}_1 = 0, \mathcal{F}_2 = 0$, dont le jacobien est différent de zéro. En revenant au système différentiel (6.1.2) par le changement de variable (6.2.1) l'énoncé (6) suit.

Preuve de l'énoncé (**7**). Pour le cas (**I.7**), c.à.d. pour $n_3 = 0$, $m_2 = n_4 = 1$, $n_1 = n_2 = 2$ le système différentiel (6.2.2) s'écrit

$$\begin{aligned} X' &= \varepsilon Y, \\ Y' &= -C(t)Y + H(t,X) - \varepsilon A(t)X - \varepsilon B(t)X^3. \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

Ce système est sous la forme normale (2.2.11) pour appliquer la théorie de la moyennisation.

En résolvant le système différentiel (2.2.12) nous obtenons les solutions périodiques

$$(X(t), Y(t)) = (X_0, (G(t, X_0) + Y_0)e^{-K(t)}),$$

pour tout $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Toutes les solutions du système différentiel (2.2.12) sont T-périodiques. Maintenant en posant z $= (X_0, Y_0)$ et en résolvant l'équation variationnelle (2.2.13) nous obtenons la matrice fondamentale

$$M_z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ G_x(t, X_0)e^{-K(t)} & e^{-K(t)} \end{pmatrix}.$$

Nous calculons la fonction $\mathcal{F}(\mathrm{z}) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ définie dans (2.2.15) et nous obtenons

$$\mathcal{F}_1 = \int_0^T G(t, X_0)e^{-K(t)}dt + Y_0 \int_0^T e^{-K(t)}dt,$$

$$\mathcal{F}_2 = -X_0^3 \int_0^T B(t)e^{K(t)}dt - X_0 \int_0^T A(t)e^{K(t)}dt - \int_0^T G(t, X_0)G_x(t, X_0)e^{-K(t)}dt -$$
$$Y_0 \int_0^T G_x(t, X_0)e^{-K(t)}dt.$$

D'après le théorème 2.2.4 le système différentiel (6.2.9) a une solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ telle que $(X(0,\varepsilon), Y(0,\varepsilon)) \to (X_0^*, Y_0^*)$ quand $\varepsilon \to 0$, pour chaque zéro (X_0^*, Y_0^*) du système $\mathcal{F}_1 = 0, \mathcal{F}_2 = 0$, dont le jacobien est différent de zéro. En revenant au système différentiel (6.1.2) par le changement de variable (6.2.1) l'énoncé (7) suit.

Preuve de l'énoncé (**8**). Pour le cas (**I.8**), c.à.d. pour $n_3 = 0$, $m_2 = 1$, $n_1 = n_2 = n_4 = 2$ le système différentiel (6.2.2) s'écrit

$$\begin{aligned} X' &= \varepsilon Y, \\ Y' &= -C(t)Y - \varepsilon A(t)X - \varepsilon B(t)X^3 + \varepsilon H(t, X). \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

Ce système est sous la forme normale (2.2.11) pour appliquer la théorie de la moyennisation.

En résolvant le système différentiel (2.2.12) nous obtenons les solutions périodiques

$$(X(t), Y(t)) = (X_0, Y_0e^{-K(t)}),$$

pour tout $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Toutes les solutions du système différentiel (2.2.12) sont T-périodiques. Maintenant en posant $\mathrm{z} = (X_0, Y_0)$ et résolvant l'équation variationnelle (2.2.13) nous obtenons la matrice fondamentale

$$M_{\mathrm{z}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-K(t)} \end{pmatrix}.$$

Nous calculons la fonction $\mathcal{F}(\mathrm{z}) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ définie dans (2.2.15) et nous obtenons

$$\mathcal{F}_1 = Y_0 \int_0^T e^{-K(t)}dt,$$
$$\mathcal{F}_2 = -X_0^3 \int_0^T B(t)e^{K(t)}dt - X_0 \int_0^T A(t)e^{K(t)}dt + \int_0^T H(t, X_0)e^{K(t)}dt.$$

D'après le théorème 2.2.4 le système différentiel (6.2.10) a une solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ telle que $(X(0,\varepsilon), Y(0,\varepsilon)) \to (X_0^*, 0)$ quand $\varepsilon \to 0$, pour chaque zéro simple X_0^* de la fonction $\mathcal{F}_2(X_0)$. En revenant au système différentiel (6.1.2) par le changement de variable (6.2.1) l'énoncé (8) suit. ■

La preuve du théorème 6.1.2 est semblable à la preuve du théorème 6.1.1 .

6.3 Applications

Exemple 6.3.1 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec* $a(t) = -(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos t)\sin t\cos t$, $b(t) = (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos t)\cos t$, $c(t) = \dfrac{\sin t}{2\ +\ \cos t}$ *et* $h(t,x) = x(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos t)\cos t$. *Ces fonctions sont* 2π*-périodiques en* t. *Les fonctions* $k(t) = \int\limits_0^t c(s)ds = -\ln(\dfrac{2\ +\ \cos t}{3})$, $g(t,x) = \int\limits_0^t h(s,x)e^{k(s)}ds = x\sin t$,

$m(t) = \int\limits_0^t a(s)e^{k(s)}ds = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos^2 t$ *et* $n(t) = \int\limits_0^t b(s)e^{k(s)}ds = \sin t$ *sont* 2π*-périodiques en* t, $g_x(t,x) = \sin t$. *Maintenant en appliquant l'énoncé (1) du théorème* 6.1.1 *nous obtenons le système*

$$\frac{1}{3}\pi x_0 + \frac{4}{3}\pi y_0 = 0,\ \frac{8}{3}\pi x_0^3 - \frac{19}{24}\pi x_0 - \frac{1}{3}\pi y_0 = 0.$$

Ce système a cinq solutions

$$(0,0), \pm(\tfrac{1}{6}\sqrt{24-3\sqrt{13}}, -\tfrac{1}{24}\sqrt{24-3\sqrt{13}}),\ \pm(\tfrac{1}{6}\sqrt{24+3\sqrt{13}}, -\tfrac{1}{24}\sqrt{24+3\sqrt{13}}).$$

$(0,0)$ *est le point d'équilibre. Le système différentiel* (6.1.2) *pour cet exemple est invariant par la symétrie* $(X,Y) \to (-X,-Y)$. *Puisque le jacobien* (2.2.16) *est* $\frac{26}{27}\pi^2 - \frac{16}{27}\sqrt{13}\pi^2$ *pour la deuxième et troisième solution, et* $\frac{26}{27}\pi^2 + \frac{16}{27}\sqrt{13}\pi^2$ *pour la quatrième et cinquième solution, le système différentiel* (6.1.2) *pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit a deux solutions périodiques* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telles que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tendent vers*

$(\frac{1}{6}\sqrt{24-3\sqrt{13}}, -\frac{1}{24}\sqrt{24-3\sqrt{13}})$ *et* $(\frac{1}{6}\sqrt{24+3\sqrt{13}}, -\frac{1}{24}\sqrt{24+3\sqrt{13}})$ *quand* $\varepsilon \to 0$, *respectivement.*

Exemple 6.3.2 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = (1 + \frac{1}{2}\sin t)\sin t$, $b(t) = (1 + \frac{1}{2}\sin t)\cos t, c(t) = -\dfrac{\cos t}{2 + \sin t}$, $h(t,x) = x$. *Ces fonctions sont 2π-périodiques en t. Les fonctions*

$k(t) = \int_0^t c(s)ds = -\ln(\dfrac{2 + \sin t}{2})$, $m(t) = \int_0^t a(s)e^{k(s)}ds = 1 - \cos t$ *et* $n(t) = \int_0^t b(s)e^{k(s)}ds = \sin t$ *sont 2π-périodiques en t. Maintenant en appliquant l'énoncé (2) du théorème* 6.1.1 *nous obtenons le système*

$-\frac{1}{2}\pi x_0^3 - 2\pi x_0 + 2\pi y_0 = 0,$

$-3\pi x_0^5 - 2\pi x_0^3 + \frac{3}{2}\pi x_0^2 y_0 - 3\pi x_0 + \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi x_0 + 2\pi y_0 = 0.$

Ce système a trois solutions $(0,0)$, $\pm(\frac{\sqrt{42}}{21}(-42+56\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}, \frac{\sqrt{42}}{882}(-42+56\sqrt{3})^{\frac{3}{4}}+\frac{\sqrt{42}}{21}(-42+56\sqrt{3})^{\frac{1}{4}})$. $(0,0)$ *est le point d'équilibre. Le système différentiel* (6.1.2) *pour cet exemple est invariant par la symétrie* $(X,Y) \to (-X,-Y)$. *Puisque le jacobien* (2.2.16) *est* $\frac{32}{3}\sqrt{3}\pi^2 - 8\pi^2$ *pour la deuxième et troisième solution, le système différentiel* (6.1.2) *pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit a une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\frac{\sqrt{42}}{21}(-42+56\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}, \frac{\sqrt{42}}{882}(-42+56\sqrt{3})^{\frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{42}}{21}(-42+56\sqrt{3})^{\frac{1}{4}})$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.3 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = (1 + \frac{1}{2}\sin t)\cos t$, $b(t) = \cos t$, $c(t) = -\dfrac{\cos t}{2 + \sin t}$, $h(t,x) = (x+1)(1 + \frac{1}{2}\sin t)\sin t$. *Ces fonctions sont 2π-périodiques en t. Les fonctions*

$k(t) = \int_0^t c(s)ds = -\ln(\dfrac{2 + \sin t}{2})$, $m(t) = \int_0^t a(s)e^{k(s)}ds = \sin t$ *et*

$g(t,x) = \int_0^t h(s,x)e^{k(s)}ds = -x\cos t - \cos t + x + 1$ *sont 2π-périodiques en t*, $g_x(t,x) = -\cos t + 1$. *Maintenant en appliquant l'énoncé (3) du théorème* 6.1.1 *nous obtenons le système*

$\frac{3}{2}\pi x_0 + 2\pi y_0 + 2\pi = 0$, $-3\pi x_0 - \frac{3}{2}\pi y_0 - \frac{5}{2}\pi = 0$.

Ce système a une solution unique $(-\frac{8}{15}, -\frac{3}{5})$. *Puisque le jacobien* (2.2.16) *pour cette solution est* $\frac{15}{4}\pi^2$, *le système différentiel* (6.1.2) *pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit a une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(-\frac{8}{15}, -\frac{3}{5})$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.4 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = \sin t + \cos t$, $b(t) = \frac{1}{3}(2+\cos t)\cos t$, $c(t) = \dfrac{\sin t}{2 + \cos t}$, $h(t,x) = \frac{1}{3}x(2+\cos t)\sin t$. *Ces fonctions sont* 2π*-périodiques en* t. *Les fonctions*

$k(t) = \int\limits_0^t c(s)ds = -\ln(\dfrac{2 + \cos t}{3})$, $g(t,x) = \int\limits_0^t h(s,x)e^{k(s)}ds = x - x\cos t$

et $n(t) = \int\limits_0^t b(s)e^{k(s)}ds = \sin t$ *sont* 2π*-périodiques en* t, $g_x(t,x) = 1-\cos t$. *Maintenant en appliquant l'énoncé (4) du théorème* 6.1.1 *nous obtenons le système*

$\pi x_0 + \frac{4}{3}\pi y_0 = 0$, $-2\pi x_0^5 - \frac{22}{3}\pi x_0 + 4\sqrt{3}\pi x_0 - \pi y_0 = 0$.

Ce système a trois solutions $(0,0), \pm(\frac{\sqrt{3}}{6}(-474+288\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}, -\frac{\sqrt{3}}{8}(-474+288\sqrt{3})^{\frac{1}{4}})$. $(0,0)$ *est le point d'équilibre. Le système différentiel* (6.1.2) *pour cet exemple est invariant par la symétrie* $(X,Y) \to (-X,-Y)$. *Puisque le jacobien* (2.2.16) *est* $-\frac{316}{9}\pi^2 + \frac{64}{3}\sqrt{3}\pi^2$ *pour la deuxième et troisième solution, le système différentiel* (6.1.2) *pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit a une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\frac{\sqrt{3}}{6}(-474+288\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}, -\frac{\sqrt{3}}{8}(-474+288\sqrt{3})^{\frac{1}{4}})$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.5 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = 3(1+\sin^2 t)\sin t$, $b(t) = \sin^2 t(1+\cos t)$, $c(t) = -\dfrac{2\sin t\cos t}{1 + \sin^2 t}$, $h(t,x) = (x^3 + 1)\sin^2 t$. Ces fonctions sont 2π-périodiques en t. Les fonctions

$k(t) = \int\limits_0^t c(s)ds = -\ln(1+\sin^2 t)$ et $m(t) = \int\limits_0^t a(s)e^{k(s)}ds = 3 - 3\cos t$

sont 2π-périodiques en t. Maintenant en appliquant l'énoncé (5) du théorème 6.1.1 nous obtenons le système

$-9\pi x_0 + 3\pi y_0 = 0$, $-\frac{153}{4}\pi x_0 + 9\pi y_0 - \sqrt{2}\pi + 2\pi = 0$.

Ce système a une solution unique $(\frac{8}{45} - \frac{4}{45}\sqrt{2}, \frac{8}{15} - \frac{4}{15}\sqrt{2})$. Puisque le jacobien (2.2.16), pour cette solution est $\frac{135}{4}\pi^2$, le système différentiel (6.1.2) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ telle que $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ tend vers $(\frac{8}{45} - \frac{4}{45}\sqrt{2}, \frac{8}{15} - \frac{4}{15}\sqrt{2})$ quand $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.6 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = \sin^2 t,\ b(t) = \cos t(1+\sin^2 t),\ c(t) = -\dfrac{2\sin t\cos t}{1\ +\ \sin^2 t},\ h(t,x) = (x+1)\sin^2 t$. *Ces fonctions sont* 2π*-périodiques en* t*. Les fonctions*

$k(t) = \int\limits_0^t c(s)ds = -\ln(1+\sin^2 t)$ *et* $n(t) = \int\limits_0^t b(s)e^{k(s)}ds = \sin t$ *sont* 2π*-périodiques en* t*. Maintenant en appliquant l'énoncé (6) du théorème* 6.1.1 *nous obtenons le système*

$3\pi y_0 = 0,\ -\frac{21}{4}\pi x_0^5 + 2\pi - \sqrt{2}\pi = 0.$

Ce système a une solution unique $(\frac{1}{21}(-777924\sqrt{2}+1555848)^{\frac{1}{5}}, 0)$*. Puisque le jacobien* (2.2.16)*, pour cette solution est* $\frac{5}{12348}\pi^2(-777924\sqrt{2}+1555848)^{\frac{4}{5}}$*, le système différentiel* (6.1.2) *pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit a une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\frac{1}{21}(-777924\sqrt{2}+1555848)^{\frac{1}{5}}, 0)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.7 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = \sin^2 t,\ b(t) = \cos t(1+\sin^2 t),\ c(t) = -\dfrac{2\sin t\cos t}{1\ +\ \sin^2 t},\ h(t,x) = (x+1)(1+\sin^2 t)\cos t$. *Ces fonctions sont* 2π*-périodiques en* t*. Les fonctions*

$k(t) = \int\limits_0^t c(s)ds = -\ \ln(1+\sin^2 t)$ *et* $g(t,x) = \int\limits_0^t h(s,x)e^{k(s)}ds = (x+1)\sin t$ *sont* 2π*-périodiques en* $t, g_x(t,x) = \sin t$*. Maintenant en appliquant l'énoncé (7) du théorème* 6.1.1 *nous obtenons le système*

$3\pi y_0 = 0,\ -\frac{15}{4}\pi x_0 + \sqrt{2}\pi x_0 - \frac{7}{4}\pi = 0.$

Ce système a une solution unique $(\frac{7}{-15\ +\ 4\sqrt{2}}, 0)$*. Puisque le jacobien* (2.2.16)*, pour cette solution est* $-\frac{3}{4}\pi^2(-15\ +\ 4\sqrt{2})$*, le système différentiel* (6.1.2) *pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit a une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\frac{7}{-15\ +\ 4\sqrt{2}}, 0)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.8 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = 2\cos t,\ b(t) = \cos^2 t,\ c(t) = \dfrac{\sin t}{2\ +\ \cos t},\ h(t,x) = x\cos t\sin^2 t.$

Ces fonctions sont 2π*-périodiques en* t*. La fonction*

$k(t) = \int\limits_0^t c(s)ds = -\ \ln(\frac{2\ +\ \cos t}{3})$ *est* 2π*-périodique en* t*. Maintenant en appliquant l'énoncé (8) du théorème* 6.1.1 *nous obtenons la fonction*

$$-8\sqrt{3}x_0^3\pi + 12x_0^3\pi + 20\sqrt{3}x_0\pi - 33x_0\pi$$

a trois simples zéro 0, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{7-2\sqrt{3}}$. $(0,0)$ *est le point d'équilibre. Par conséquent, le système* (6.1.2) *pour cet exemple est invariant par la symétrie* $(X,Y) \to (-X,-Y)$. *Il a pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\frac{1}{2}\sqrt{7-2\sqrt{3}}, 0)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.9 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = \sin t$, $b(t) = 2\cos t$, $c(t) = 2\sin t + \cos t$, $h(t,x) = x\sin t$. *Ces fonctions sont* 2π*-périodiques en* t. *Les fonctions*

$g(t,x) = \int_0^t h(s,x)ds = x - x\cos t$, $m(t) = \int_0^t a(s)ds = 1 - \cos t$ *et* $n(t) = \int_0^t b(s)ds$ $= 2\sin t$ *sont* 2π*-périodiques en* t, $g_x(t,x) = 1 - \cos t$.

Maintenant en appliquant l'énoncé (1) du théorème 6.1.2 *nous obtenons le système*

$2\pi y_0 = 0, \ -12\pi x_0^5 + 4\pi x_0^3 = 0.$

Ce système a trois solutions $(0,0)$, $\pm(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$. $(0,0)$ *est le point d'équilibre. Puisque le jacobien* (2.2.16) *est* $\frac{16}{3}\pi^2$ *pour deuxième et troisième solution, et le système* (6.1.2) *pour cet exemple est invariant par la symétrie* $(X,Y) \to (-X,-Y)$. *Il a pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.10 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = -\sin t$, $b(t) = \cos t$, $c(t) = \sin t$, $h(t,x) = x$. *Ces fonctions sont* 2π*-périodiques en* t. *Les fonctions*

$m(t) = \int_0^t a(s)ds = -1 + \cos t$ *et* $n(t) = \int_0^t b(s)ds = \sin t$ *sont* 2π*-périodiques en* t.

Maintenant en appliquant l'énoncé (2) du théorème 6.1.2 *nous obtenons le système*

$2\pi x_0 + 2\pi y_0 = 0, \ -3\pi x_0^5 + \pi x_0^3 - \pi x_0 - 2\pi y_0 = 0.$

Ce système a trois solutions $(0,0)$, $\pm(\frac{1}{6}\sqrt{6+6\sqrt{13}}, -\frac{1}{6}\sqrt{6+6\sqrt{13}})$.

$(0,0)$ *est le point d'équilibre. Puisque le jacobian* (2.2.16) *est* $\frac{26}{3}\pi^2 + \frac{2}{3}\pi^2\sqrt{13}$ *pour deuxième et troisième solution, et le système* (6.1.2) *pour cet exemple est invariant par la symétrie* $(X,Y) \to (-X,-Y)$. *Il a pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\frac{1}{6}\sqrt{6+6\sqrt{13}}, -\frac{1}{6}\sqrt{6+6\sqrt{13}})$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.11 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = -\cos t$, $b(t) = \cos t$, $c(t) = \sin t \cos t$, $h(t,x) = (x+1)\cos t$. *Ces fonctions sont* 2π*-périodiques en* t. *Les fonctions*

$g(t,x) = \int_0^t h(s,x)ds = (x+1)\sin t$ *et* $m(t) = \int_0^t a(s)ds = -\sin t$ *sont* 2π*-périodiques en* t, $g_x(t,x) = \sin t$. *Maintenant en appliquant l'énoncé (3) du théorème* 6.1.2 *nous obtenons le système*

$2\pi y_0 = 0,\ -4\pi x_0 - 2\pi = 0.$

Ce système a une solution unique $(-\frac{1}{2}, 0)$. *Puisque le jacobien* (2.2.16), *pour cette solution est* $8\pi^2$, *le système* (6.1.2) *pour cet exemple est invariant par la symétrie* $(X,Y) \to (-X,-Y)$. *Il a pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(-\frac{1}{2}, 0)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.12 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = \cos t$, $b(t) = 2\sin t$, $c(t) = \sin t + \cos t$, $h(t,x) = x\sin t$. *Ces fonctions sont* 2π*-périodiques en* t. *Les fonctions*

$g(t,x) = \int_0^t h(s,x)ds = x - x\cos t$ *et* $n(t) = \int_0^t b(s)ds = 2 - 2\cos t$ *sont* 2π*-périodiques en* t, $g_x(t,x) = 1 - \cos t$. *Maintenant en appliquant l'énoncé (4) du théorème* 6.1.2 *nous obtenons le système*

$-4\pi x_0^3 + 2\pi x_0 + 2\pi y_0 = 0,\ -36\pi x_0^5 + 22\pi x_0^3 + 12\pi x_0^2 y_0 - 2\pi x_0 - 2\pi y_0 = 0.$

Ce système a trois solutions $(0,0)$, $\pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. $(0,0)$ *est le point d'équilibre. Puisque le jacobien* (2.2.16) *est* $12\pi^2$ *pour la deuxième et troisième solution, et le système* (6.1.2) *pour cet exemple est invariant par la symétrie* $(X,Y) \to (-X,-Y)$. *Il a pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.13 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = \sin t$, $b(t) = \cos t$, $c(t) = 1 + \cos t$, $h(t,x) = \sin^2(t+x) + \cos t$. *Ces fonctions sont* 2π*-périodiques en* t. *La fonction*

$m(t) = \int_0^t a(s)ds = 1 - \cos t$ *est* 2π*-périodique en* t. *Maintenant en appliquant l'énoncé (5) du théorème* 6.1.2 *nous obtenons le système*

$-2\pi x_0 + 2\pi y_0 = 0,\ -2\pi x_0 + \pi = 0.$

Ce système a une solution unique $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. *Puisque le jacobien* (2.2.16), *pour cette solution est* $4\pi^2$, *le système* (6.1.2) *pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit a une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.14 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = \sin t,\ b(t) = \cos t,\ c(t) = 1 + \cos t,\ h(t,x) = \sin^2(t + x) + \cos t$. *Ces fonctions sont* 2π*-périodiques en* t. *La fonction*

$n(t) = \int_0^t b(s)ds = \sin t$ *est* 2π*-périodique en* t. *Maintenant en appliquant l'énoncé (6) du théorème* 6.1.2 *nous obtenons le système*

$2\pi y_0 = 0,\ -3\pi x_0^5 - 2\pi y_0 + \pi = 0.$

Ce système a une solution unique $(\frac{1}{3}3^{\frac{4}{5}}, 0)$. *Puisque le jacobien* (2.2.16), *pour cette solution est* $10\pi^2 3^{\frac{1}{5}}$, *le système* (6.1.2) *pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit a une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\frac{1}{3}3^{\frac{4}{5}}, 0)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.15 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = 2,\ b(t) = -\sin^2 t,\ c(t) = \cos t,\ h(t,x) = x\cos t$. *Ces fonctions sont* 2π*-périodiques en* t. *La fonction*

$g(t,x) = \int_0^t h(s,x)ds = x\ \sin t$ *est* 2π*-périodique en* t, $g_x(t,x) = \sin t$. *Maintenant en appliquant l'énoncé (7) du théorème* 6.1.2 *nous obtenons le système*

$2\pi y_0 = 0,\ \pi x_0^3 - 5\pi x_0 = 0.$

Ce système a trois solutions $(0,0)$, $\pm(\sqrt{5}, 0)$. $(0,0)$ *est le point d'équilibre. Puisque le jacobien* (2.2.16) *est* $-20\pi^2$ *pour la deuxième et troisième solution, et le système* (6.1.2) *pour cet exemple est invariant par la symétrie* $(X,Y) \to (-X,-Y)$. *Il a pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\sqrt{5}, 0)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple 6.3.16 *Considérons le système différentiel* (6.1.2) *avec*

$a(t) = -\cos^2 t,\ b(t) = 2,\ c(t) = \cos t,\ h(t,x) = -x\cos t$. *Ces fonctions sont* 2π-*périodiques en* t. *Maintenant en appliquant l'énoncé (8) du théorème* 6.1.2 *nous avons que la fonction* $-4\pi x_0^3 + \pi x_0$ *a trois simples zéro* $0,\ \pm\frac{1}{2}$. $(0,0)$ *est le point d'équilibre. Par conséquent, le système* (6.1.2) *pour cet exemple est invariant par la symétrie* $(X,Y) \to (-X,-Y)$. *Il a pour* $\varepsilon \neq 0$ *suffisamment petit une solution périodique* $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ *telle que* $(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ *tend vers* $(\frac{1}{2},0)$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

CHAPITRE 7

Bifurcation zero-Hopf en dimension 4 pour des systèmes différentiels polynomiaux non-linéaires homogènes et cubiques

7.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'existence des solutions périodiques bifurquant de l'origine des coordonnées des systèmes différentiels polynomiaux dans $\mathbb{R}^4$ non-linéaires homogènes cubiques, c.à.d pour les systèmes différentiels

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j X_j(x, y, z, w),\\
\dot{y} &= (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w),\\
\dot{z} &= (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w),\\
\dot{w} &= (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j W_j(x, y, z, w),
\end{aligned} \tag{7.1.1}
$$

où

$$
\begin{aligned}
X_j(x, y, z, w) &= a_{j0}x^3 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}x^2w + a_{j4}xy^2 + a_{j5}xyz + a_{j6}xyw\\
&\quad + a_{j7}xz^2 + a_{j8}xzw + a_{j9}xw^2 + a_{j10}y^3 + a_{j11}y^2z + a_{j12}y^2w + a_{j13}\\
&\quad yz^2 + a_{j14}yzw + a_{j15}yw^2 + a_{j16}z^3 + a_{j17}z^2w + a_{j18}zw^2 + a_{j19}w^3,
\end{aligned}
$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji}, c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \ldots, 19$, respectivement. Les coefficients $a_{ji}, b_{ji}, c_{ji}, d_{ji}, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ sont des paramètres réels avec $b \neq 0$. Notons que le système (7.1.1) pour $\varepsilon = 0$ à l'origine a les valeurs propres $\pm bi, 0, 0$. Ainsi pour $\varepsilon = 0$ l'origine est un point d'équilibre zero-Hopf.

Théorème 7.1.1 *En appliquant la théorie de la moyennisation du second ordre le système (7.1.1) peut avoir au moins 9 solutions périodiques bifurquant de l'origine quand* $\varepsilon = 0$ *et ce nombre de solutions périodiques est atteint si et seulement si la condition suivante est satisfaite* $(3a_{00} + a_{04} + b_{01} + 3b_{010})\ b \neq 0.$

7.2 Preuve

Preuve du théorème 7.1.1. Premièrement nous faisons le changement de variables $(x, y, z, w) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, \varepsilon W)$. Deuxièmement nous passons aux coordonnées cylindriques $(X, Y, Z, W) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \eta, \xi)$. Troisièmement nous prenons l'angle θ comme nouvelle variable indépendante. Ainsi en les variables (ρ, η, ξ) le système (7.1.1) s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{d\theta} &= \varepsilon F_{11}(\theta,\rho,\eta,\xi)+\varepsilon^2 F_{21}(\theta,\rho,\eta,\xi)+O(\varepsilon^3),\\
\frac{d\eta}{d\theta} &= \varepsilon F_{12}(\theta,\rho,\eta,\xi)+\varepsilon^2 F_{22}(\theta,\rho,\eta,\xi)+O(\varepsilon^3),\\
\frac{d\xi}{d\theta} &= \varepsilon F_{13}(\theta,\rho,\eta,\xi)+\varepsilon^2 F_{23}(\theta,\rho,\eta,\xi)+O(\varepsilon^3),
\end{aligned} \tag{7.2.1}$$

où

$F_{11}(\theta,\rho,\eta,\xi)=\frac{a_1\rho}{b}$,

$F_{12}(\theta,\rho,\eta,\xi)=\frac{c_1\eta}{b}$,

$$\begin{aligned}
F_{13}(\theta,\rho,\eta,\xi) &= \frac{d_1\xi}{b},\\
F_{21}(\theta,\rho,\eta,\xi) &= \frac{1}{b^2}(-b_1\cos(\theta)^2-b_1\sin(\theta)^2)(a_1\rho\cos(\theta)^2+a_1\rho\sin(\theta)^2)+\\
&\quad \frac{1}{b}((a_{016}\eta^3+a_{017}\eta^2\xi+a_{018}\eta\xi^2+a_{019}\xi^3)\cos(\theta)+(a_2\rho+\\
&\quad a_{07}\eta^2\rho+a_{08}\eta\xi\rho+a_{09}\xi^2\rho)\cos(\theta)^2+(a_{02}\eta\rho^2+a_{03}\xi\rho^2)\\
&\quad \cos(\theta)^3+a_{00}\rho^3\cos(\theta)^4+(b_{016}\eta^3+b_{017}\eta^2\xi+b_{018}\eta\xi^2+\\
&\quad b_{019}\xi^3)\sin(\theta)+((a_{013}+b_{07})\eta^2\rho+(a_{014}+b_{08})\eta\xi\rho+(a_{015}\\
&\quad +b_{09})\xi^2\rho)\cos(\theta)\sin(\theta)+((a_{05}+b_{02})\eta\rho^2+(a_{06}+b_{03})\xi\\
&\quad \rho^2)\cos(\theta)^2\sin(\theta)+(a_{01}+b_{00})\rho^3\cos(\theta)^3\sin(\theta)+(a_2\rho+\\
&\quad b_{013}\eta^2\rho+b_{014}\eta\xi\rho+b_{015}\xi^2\rho)\sin(\theta)^2+((a_{011}+b_{05})\eta\rho^2+\\
&\quad (a_{012}+b_{06})\xi\rho^2)\cos(\theta)\sin(\theta)^2+(a_{04}+b_{01})\rho^3\cos(\theta)^2\\
&\quad \sin(\theta)^2+(b_{011}\eta\rho^2+b_{012}\xi\rho^2)\sin(\theta)^3+(a_{010}+b_{04})\rho^3\\
&\quad \cos(\theta)\sin(\theta)^3+b_{010}\rho^3\sin(\theta)^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{22}(\theta,\rho,\eta,\xi) \;=\;& \frac{1}{b^2}(bc_2\eta + bc_{016}\eta^3 + bc_{017}\eta^2\xi + bc_{018}\eta\xi^2 + bc_{019}\xi^3 + \\
& b(c_{07}\eta^2\rho + c_{08}\eta\xi\rho + c_{09}\xi^2\rho)\cos(\theta) + (-b_1c_1\eta + bc_{02}\eta\rho^2 \\
& +bc_{03}\xi\rho^2)\cos(\theta)^2 + b(c_{013}\eta^2\rho + c_{014}\eta\xi\rho + c_{015}\xi^2\rho) \\
& \sin(\theta) + bc_{00}\rho^3\cos(\theta)^3 + bc_{01}\rho^3\cos(\theta)^2\sin(\theta) + b(c_{05}\eta\rho^2 \\
& +c_{06}\xi\rho^2)\sin(\theta)\cos(\theta) + (-b_1c_1\eta + bc_{011}\eta\rho^2 + bc_{012}\xi\rho^2) \\
& \sin(\theta)^2 + bc_{04}\rho^3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 + bc_{010}\rho^3\sin(\theta)^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{23}(\theta,\rho,\eta,\xi) \;=\;& \frac{1}{b^2}(bd_2\eta + bd_{016}\eta^3 + bd_{017}\eta^2\xi + bd_{018}\eta\xi^2 + bd_{019}\xi^3 + \\
& b(d_{07}\eta^2\rho + d_{08}\eta\xi\rho + d_{09}\xi^2\rho)\cos(\theta) + (-b_1d_1\eta + bd_{02}\eta\rho^2 \\
& +bd_{03}\xi\rho^2)\cos(\theta)^2 + b(d_{013}\eta^2\rho + d_{014}\eta\xi\rho + d_{015}\xi^2\rho) \\
& \sin(\theta) + bd_{00}\rho^3\cos(\theta)^3 + bd_{01}\rho^3\cos(\theta)^2\sin(\theta) + b(d_{05}\eta\rho^2 \\
& +d_{06}\xi\rho^2)\sin(\theta)\cos(\theta) + (-b_1d_1\eta + bd_{011}\eta\rho^2 + bd_{012}\xi\rho^2) \\
& \sin(\theta)^2 + bd_{04}\rho^3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 + bd_{010}\rho^3\sin(\theta)^3).
\end{aligned}$$

Le système (7.2.1) est écrit sous la forme normale (2.3.3) pour appliquer la théorie de la moyennisation.

Prenous

$$\begin{aligned}
x = z &= (\rho,\eta,\xi), \\
t &= \theta, \\
F_1(t,x) &= (F_{11}(\theta,\rho,\eta,\xi), F_{12}(\theta,\rho,\eta,\xi), F_{13}(\theta,\rho,\eta,\xi)), \\
F_2(t,x) &= (F_{21}(\theta,\rho,\eta,\xi), F_{22}(\theta,\rho,\eta,\xi), F_{23}(\theta,\rho,\eta,\xi)), \\
T &= 2\pi.
\end{aligned}$$

De (2.3.4) nous avons que la première fonction moyennée $f_1 = (f_{11}, f_{12}, f_{13})$ est

$$f_{1i}(\rho,\eta,\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_{1i}(\theta,\rho,\eta,\xi)d\theta.$$

Faisant ces calculs nous obtenons que

$$f_{11}(\rho,\eta,\xi)=\frac{a_1\rho}{b},\quad f_{12}(\rho,\eta,\xi)=\frac{c_1\eta}{b},\quad f_{13}(\rho,\eta,\xi)=\frac{d_1\xi}{b}.$$

Puisque nous cherchons des solutions (ρ^*,η^*,ξ^*) de $f_1(\rho,\eta,\xi)=0$ avec $\rho^*>0$, si $a_1\neq 0$ la première fonction moyennée ne fournit aucune information sur les solutions périodiques du système différentiel (2.3.4).

Pour que la deuxième fonction moyennée puisse fournir l'information sur les solutions périodiques du système différentiel (2.3.4) la première fonction moyennée doit être identiquement zéro. Ainsi nous prenons $a_1=c_1=d_1=0$ et calculons la deuxième fonction moyennée.

Alors de (2.3.4) nous avons que $f_2=(f_{21},f_{22},f_{23})=(f_{21}(\rho,\eta,\xi),f_{22}(\rho,\eta,\xi),f_{23}(\rho,\eta,\xi)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \frac{\rho}{8b}(4(a_{07}+b_{013})\eta^2+4(a_{08}+b_{014})\eta\xi+(3a_{00}+a_{04}+b_{01}+3b_{010})\\
&\quad \rho^2+4(a_{09}+b_{015})\xi^2+8a_2),\\
f_{22} &= \frac{1}{2b}(2c_{016}\eta^3+2c_2\eta+2\xi(c_{017}\eta^2+c_{018}\eta\xi+c_{019}\xi^2)+(c_{02}+c_{011})\eta\rho^2\\
&\quad +(c_{03}+c_{012})\rho^2\xi),\\
f_{23} &= \frac{1}{2b}(2d_{016}\eta^3+2d_2\eta+2\xi(d_{017}\eta^2+d_{018}\eta\xi+d_{019}\xi^2)+(d_{02}+d_{011})\eta\\
&\quad \rho^2+(d_{03}+d_{012})\rho^2\xi).
\end{aligned}\tag{7.2.2}$$

Nous isolons ρ^2 de l'équation $f_{21}(\rho,\eta,\xi)=0$, et nous la substituons dans $f_{2i}(\rho,\eta,\xi)=0$ pour $i=2,3$. Alors nous obtenons deux polynômes $(g_{22},g_{23})=(g_{22}(\eta,\xi),g_{23}(\eta,\xi))$ donnés par

$$\begin{aligned}
g_{22} &= \frac{1}{(3a_{00}+a_{04}+b_{01}+3b_{010})b}(C_1\eta+C_2\xi+C_3\eta\xi^2+C_4\eta^2\xi+C_5\eta^3\\
&\quad +C_6\xi^3)=0,\\
g_{23} &= \frac{1}{(3a_{00}+a_{04}+b_{01}+3b_{010})b}(D_1\eta+D_2\xi+D_3\eta\xi^2+D_4\eta^2\xi+D_5\eta^3\\
&\quad +D_6\xi^3)=0,
\end{aligned}$$

où

$C_1 = -4a_2c_{02} - 4a_2c_{011} + 3a_{00}c_2 + a_{04}c_2 + b_{01}c_2 + 3b_{010}c_2,$

$C_2 = -4a_2(c_{03} + c_{012}),$

$C_3 = -2(a_{08}c_{03} + a_{08}c_{012} + a_{09}c_{02} + a_{09}c_{011} + b_{014}c_{03} + b_{014}c_{012} + b_{015}c_{02} + b_{015}c_{011})+$
$3a_{00}c_{018} + a_{04}c_{018} + b_{01}c_{018} + 3b_{010}c_{018},$

$C_4 = -2(a_{07}c_{03} + a_{07}c_{012} + a_{08}c_{02} + a_{08}c_{011} + b_{013}c_{03} + b_{013}c_{012} + b_{014}c_{02} + b_{014}c_{011})+$
$3a_{00}c_{017} + a_{04}c_{017} + b_{01}c_{017} + 3b_{010}c_{017},$

$C_5 = -2(c_{02} + c_{011})(a_{07} + b_{013}) + 3a_{00}c_{016} + a_{04}c_{016} + b_{01}c_{016} + 3b_{010}c_{016},$

$C_6 = 3a_{00}c_{019} + a_{04}c_{019} - 2a_{09}c_{03} - 2a_{09}c_{012} + b_{01}c_{019} + 3b_{010}c_{019} - 2b_{015}c_{03} - 2b_{015}c_{012},$

$D_1 = -4a_2(d_{02} + d_{011}) + 3a_{00}d_2 + a_{04}d_2 + b_{01}d_2 + 3b_{010}d_2,$

$D_2 = -4a_2(d_{03} + d_{012}),$

$D_3 = -2(a_{08}d_{03} + a_{08}d_{012} + a_{09}d_{02} + a_{09}d_{011} + b_{014}d_{03} + b_{014}d_{012} + b_{015}d_{02} + b_{015}d_{011})+$
$3a_{00}d_{018} + a_{04}d_{018} + b_{01}d_{018} + 3b_{010}d_{018},$

$D_4 = -2(a_{07}d_{03} + a_{07}d_{012} + a_{08}d_{02} + a_{08}d_{011} + b_{013}d_{03} + b_{013}d_{012} + b_{014}d_{02} + b_{014}d_{011})+$
$3a_{00}d_{017} + a_{04}d_{017} + b_{01}d_{017} + 3b_{010}d_{017},$

$D_5 = -2(d_{02} + d_{011})(a_{07} + b_{013}) + 3a_{00}d_{016} + a_{04}d_{016} + b_{01}d_{016} + 3b_{010}d_{016},$

$D_6 = 3a_{00}d_{019} + a_{04}d_{019} - 2a_{09}d_{03} - 2a_{09}d_{012} + b_{01}d_{019} + 3b_{010}d_{019} - 2b_{015}d_{03} - 2b_{015}d_{012}.$

Nous supposons que $3a_{00} + a_{04} + b_{01} + 3b_{010} \neq 0$.

Regarder seulement les coefficients du système (7.1.1) qui apparaissent dans C_j et D_j nous voyons que C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 sont tous indépendants parce que le rang de la matrice jacobienne des fonctions C_1 , C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 par rapport aux variables $a_{00,}$ a_{04}, a_{07}, a_{08}, a_{09}, a_2, b_{01}, b_{010}, b_{013}, b_{014}, b_{015}, c_{02}, c_{03}, c_{011}, c_{012}, c_{016}, c_{017}, c_{018}, c_{019}, c_2, d_{02}, d_{03}, d_{011}, d_{012}, d_{016}, d_{017}, d_{018}, d_{019}, d_2 est 12, comme il peut être facilement vérifié en utilisant maple ou mathematica. En résumé, puisque tous les coefficients des polynômes $g_{22}(\eta, \xi) = 0$ et $g_{23}(\eta, \xi) = 0$ sont indépendants ils peuvent être arbitrairement choisi. D'après le théorème de Bezout, ce système $g_{22}(\eta, \xi) = 0, g_{23}(\eta, \xi) = 0$ possède au plus 9 solutions. ■

Nous donnons un exemple de système différentiel polynomial possédant 9 cycles limites.

Exemple 7.2.1 *On considère le système différentiel polynômial suivant*

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 3w^2x + xz^2 + a_{013}yz^2 + a_{016}z^3 + \frac{x\varepsilon^2}{2} - y, \\
\dot{y} &= 4w^2y + (-4)x^2y + 2yz^2 + \frac{y\varepsilon^2}{2} + x, \\
\dot{z} &= -4w^3 + wy^2 + \frac{21w^2z}{4} - \frac{3x^2z}{2} - \frac{3wz^2}{2} + 2z^3 + z\varepsilon^2, \\
\dot{w} &= -7w^2z + x^2z + y^2z - \frac{3wz^2}{4} - \frac{15z^3}{4} - \frac{w\varepsilon^2}{4}.
\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Dans ce cas le système (7.2.2) s'écrit

$$\begin{aligned}
f_{21}(\rho,\eta,\xi) &= \frac{1}{2}\rho(1+3\eta^2+7\xi^2-\rho^2), \\
f_{22}(\rho,\eta,\xi) &= \frac{1}{4}(8\eta^3-6\eta^2\xi+\eta(4+21\xi^2-3\rho^2)+2\xi(-8\xi^2+\rho^2)), \\
f_{23}(\rho,\eta,\xi) &= -\frac{1}{4}\eta(1+15\eta^2+3\eta\xi+28\xi^2-4\rho^2).
\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

En résolvant le système (7.2.4), on trouve neuf solutions $z_i = (\rho_i^*, \eta_i^*, \xi_i^*)$ où $\rho_i^* > 0$ pour $i = 1, \ldots, 9$ données par

$z_1 = (2, -1, 0)$,

$z_2 = (2\sqrt{2}, 0, -1)$,

$z_3 = (1, 0, 0)$,

$z_4 = (2\sqrt{2}, 0, 1)$,

$z_5 = (2, 1, 0)$,

$$z_6 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}(55-13\sqrt{7})}, -\sqrt{3-\sqrt{7}}, \frac{1}{2}\left(-4\sqrt{3-\sqrt{7}} + (3-\sqrt{7})^{\frac{3}{2}}\right)\right),$$

$$z_7 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}(55-13\sqrt{7})}, \sqrt{3-\sqrt{7}}, \frac{1}{2}\left(4\sqrt{3-\sqrt{7}} - (3-\sqrt{7})^{\frac{3}{2}}\right)\right),$$

$$z_8 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}(55+13\sqrt{7})}, -\sqrt{3+\sqrt{7}}, \frac{1}{2}\left(-4\sqrt{3+\sqrt{7}} + (3+\sqrt{7})^{\frac{3}{2}}\right)\right),$$

$$z_9 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}(55+13\sqrt{7})}, \sqrt{3+\sqrt{7}}, \frac{1}{2}\left(4\sqrt{3+\sqrt{7}} - (3+\sqrt{7})^{\frac{3}{2}}\right)\right).$$

Puisque le déterminant

$$\det\left(\left.\frac{\partial(f_{21}, f_{22}, f_{23})}{\partial(\rho,\eta,\xi)}\right|_{(\rho,\eta,\xi)=(\rho_i^*,\eta_i^*,\xi_i^*)}\right), \ \textit{pour } i = 1, \ldots, 9 \tag{7.2.5}$$

pour ces neuf solutions $z_i = (\rho_i^*, \eta_i^*, \xi_i^*)$ *sont* $-\frac{9}{2}$, -6, $\frac{3}{8}$, -6, $-\frac{9}{2}$, $-\frac{9}{8}(-189+67\sqrt{7})$, $-\frac{9}{8}$, $(-189+67\sqrt{7})$, $\frac{9}{8}(189+67\sqrt{7})$, $\frac{9}{8}(189+67\sqrt{7})$ *respectivement, nous obtenons en utilisant la théorie de la moyennisation du deuxième ordre (voir le théorème 2.3.2),* 9 *solutions périodiques* $(\rho_i(\theta,\varepsilon), \eta_i(\theta,\varepsilon), \xi_i(\theta,\varepsilon))$ *du système* (7.2.1) *telles que* $(\rho_i(0,\varepsilon), \eta_i(0,\varepsilon), \xi_i(0,\varepsilon)) \to z_i$ *quand* $\varepsilon \to 0$*. En revenant par les changements de variables, on obtient les 9 cycles limites* $(x_i(t,\varepsilon), y_i(t,\varepsilon), z_i(t,\varepsilon), w_i(t,\varepsilon))$ *du système différentiel* (7.1.1) *tels que*

$$(x_i(t,\varepsilon), y_i(t,\varepsilon), z_i(t,\varepsilon), w_i(t,\varepsilon)) = \varepsilon(\rho_i^* \cos(t), \rho_i^* \sin(t), \eta_i^*, \xi_i^*) + O(\varepsilon^2).$$

Puisque ces conditions initiales tendent à l'origine de $\mathbb{R}^4$ *quand* $\varepsilon \to 0$*, les 9 cycles limites correspondants tendent au point singulier de zero-Hopf localisé à l'origine de* $\mathbb{R}^4$*. Le système différentiel* (7.1.1) *peut avoir une bifurcation de zero-Hopf à l'origine du système (7.2.3) avec au moins 9 cycles limites.*

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons utilisé l'une des plus importantes méthodes perturbatives pour étudier l'existence des solutions périodiques de certains systèmes différentiels polynomiaux de dimension deux, trois et quatre.

Nous continuerons nos recherches des solutions périodiques des équations différentielles perturbées par un paramètre suffisamment petit, en utilisant la théorie de la moyennisation.

Parmi d'autres problèmes, on étudie le nombre de cycles limites d'un centre isochrone non linéaire perturbé par des polynômes de degré entier.

On étudie la bifurcation zero-Hopf d'un sytème avec des paramètre réels.

.

Bibliographie

[1] A. U. Afuwape, *Remarks on Barbashin-Ezeilo problem on third-order nonlinear differential equations,* J. Math. Anal. Appl. *317 (2006), 613–619.*

[2] F. Alfaro, *J. Llibre and E. Pérez-Chavela, A class of galactic potentials: periodic orbits and integrability,* Astrophysics and Space Sciences *344 (2013), 39–44.*

[3] J. Andres, *Existence, uniqueness, and instability of large-period harmonics to the third-order nonlinear differential equations, J. Math. Anal. Appl. 199 (1996), 445–457.*

[4] M. Arribas, A. Elipse, A. Floria and A. Riaguas, *Oscillators in resonance, Chaos,* Solitons and Fractals *27 (2006), 1220–1228.*

[5] R. Benterki and J. Llibre, *Periodic solutions of a class of Duffing differential equations.* (Soumis).

[6] R. Benterki and J. Llibre, *Periodic solutions of the Duffing differential equation revisited via the averaging theory.* (Soumis).

[7] N. N. Bogoliubov and YU. A. Mitropolskii, Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations, Gordon and Breach, New York, 1961.

[8] A. Boulfoul and A. Makhlouf, *On the limit cycles for a class of fourth–order differential equations*, Int. J. Differ. Equ. Appl. 11 No*. 3 (2012), 135–144.*

[9] A. Buica and J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, Bull. Sci. Math., 128(1), 7-22, 2004.

[10] A. Buica, J.P. Françoise and J. Llibre, *Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter*, Commun. Pure Appl. Anal. *6 (2007), 103–111.*

[11] H. Chen and Y. Li, *Rate of decay of stable periodic solutions of Duffing equations*, J. Differential Equations. **236** (2007), 493-503.

[12] H. Chen and Y. Li, *Existence, uniqueness, and stability of periodic solutions of an equation of Duffing type*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **18** (2007), 793-807.

[13] H. Chen and Y. Li, *Bifurcation and stability of periodic solutions of Duffing equations*, Nonlinearity **21** (2008), 2485-2503.

[14] H. B. Chen and Y. Li, *Stability and exact multiplicity of periodic solutions of Duffing equations with cubic nonlinearities*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 3925-3932.

[15] C. Chicone and M. Jacobs, *Bifurcation of limit cycles from quadratic isochronous,* J. Differential Equations 91(1991), 268-326.

[16] R. Conti, *Uniformly isochronous centers of polynomial systems in* $\mathbb{R}^2$, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 152(1994), 21-31.

[17] D. Djeddid, J. Llibre and A. Makhlouf, *4-dimensional zero-Hopf bifurcation via averaging theory.* (Soumis).

[18] G. Duffing, *Erzwungen Schwingungen bei vernä derlicher Eigenfrequenz undihre technisch Bedeutung*, Sammlung Viewg Heft, Viewg, Braunschweig **41/42**, 1918.

[19] A. Feddaoui, J. Llibre, C. Berhail and A. Makhlouf, Periodic solutions for differential systems in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$. (Soumis).

[20] A. Feddaoui, J. Llibre and A. Makhlouf, Periodic orbits and their stability for a class of non–autonomous 4–order differential equations. (Soumis).

[21] A. Feddaoui, J. Llibre and A. Makhlouf, Periodic solutions for periodic class of Duffing differential equations. (Soumis).

[22] A. Feddaoui, J. Llibre and A. Makhlouf, 4-dimensional zero-Hopf bifurcation via averaging theory for polynomial differentials systems with cubic homogeneous non-linearities, accepté dans le journal "International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations".

[23] A. Feddaoui and A. Makhlouf, Bifurcation of periodic orbits from uniform isochronous center. (Soumis).

[24] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Lecture, Second Internat. Conger. Math. (Paris, 1900), Nachr. Ges. Wiss. Gottingen Math. Phys. KL.(1900), 253-297.

[25] Yu. Ilyashenko, *Centennial history of Hilbert's* 16*th problem*, Bull. (New Series) Amer. Math. Soc. $39(2002), 301-354$.

[26] S. Kassa, J. Llibre and A. Makhlouf, *3-dimensional zero-Hopf bifurcation via averaging theory. (Soumis).*

[27] N. M. KRYLOV and N. N. BOGOLIUBOV, Introduction to Nonlinear Mechanics (in Russian), Izd. AN UkSSR, Kiev, 1937. Vvedenie v Nelineinikhu Mekhaniku.

[28] J. Llibre, C.A. Buzzi and P.R. da Silva, *3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory,* Discrete Contin. Dynam. Syst*. 17 (2007), 529–540.*

[29] J. Llibre and J. Itikawa, *Limit cycles for continuous and discontinuous perturbations of uniform isochronous cubic centers*, Journal of Com-putational and Applied Mathematics 277(2015)171-191.

[30] J. Llibre and A. Makhlouf, *Periodic orbits of the fourth-order non-autonomous differential equation* $u'''' + qu'' + pu = \varepsilon F(t, u, u', u'', u''')$, Appl. Math. Comput. **219** (2012), 827–836.

[31] J. Llibre and A. Makhlouf, *On the limit cycles for a class of fourth–order differential equations*, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012) 055214, 16 pp.

[32] J. Llibre and A. Makhlouf, *Limit cycles for a class of fourth–order autonomous differential equations*, J. Differential equations **22** (2012), 1–17.

[33] J. Llibre and A. Makhlouf, *Bifurcation of limit cycles from some uniform isochronous centers*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Mathematical Analysis 22(2015)381-394.

[34] J. Llibre and A. Makhlouf, *Periodic solutions for periodic second-order differential equations with variable potentials*, J Appl Anal. **24** (2018).

[35] J. Llibre, A. Makhlouf and S. Badi, *3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory of the second order.* Discrete Contin. Dynam. Syst. *25(2009), 1287–1295.*

[36] J. Llibre, A.C. Mereu and M.A. Teixeira, *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 148 (2010), 363–383.*

[37] J. Llibre and G. Rodriguez, *Configuration of limit cycles and planar polynomial vector fields*, J.Differential Equations 198(2004), 374-380.

[38] J. Llibre and L. Roberto, *On the periodic solutions of a class of Duffing differential equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems- Series A **33** (2013), 277-282.

[39] J. Llibre, S. Rebollo-Perdomo and J. Torregrosa, *Limit cycles bifurcating from isochronous surfaces of revolution in* R^3, J. Math. Anal. and Appl. *381 (2011), 414–426.*

[40] J. Llibre and G. Swirszcz, *On the limit cycles of polynomial vector fields,* Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Serie A 18(2011), 203-214.

[41] J. Llibre and C. Valls, *Classifucation of the centers and isochronous centers for a class of quartic-like systems*, Nonlinear Anal. 71(2009), 3119-3128.

[42] J. Llibre, J. Yu, and X. Zhang, *Limit cycles for a class of third-order differential equations,* Rocky Mountain J. Math. *40 (2010), 581–594.*

[43] J. Llibre and X. Zhang, *Hopf bifurcation in higher dimensional differential systems via the averaging method differential system in* R^d*, Pacific J. Math. 240 (2009), 321–341.*

[44] I.G. Malkin, *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*, (Russian) Gosudarstv. Izdat.Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.

[45] M. Roseau, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 8 Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.

[46] J. A. Sanders and F. Verhulst, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Applied Mathematical Sciences, Vol 59, Springer, Berlin, 1985.

[47] J. A. Sanders, F. Verhulst and J. Murdock, *Averaging method in nonlinear dynamical systems*, Appl. Math. Sci., Vol. 59, Springer, New York, 2007.

[48] P. J. Torres, *Existence and stability of periodic solutions of a Duffing equation by using a new maximum principale*, Mediterr. J. Math. **1** (2004), 479-486.

[49] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer, New York, 1996.

[50] F. Wang and H. Zhu, *Existence, uniqueness and stability of periodic solutions of a Duffing equation under periodic and anti-periodic eigenvalues conditions.*