



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2019

Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat

**IDENTIFICATION DE SOURCE DANS UNE
EDP PARABOLIQUE**

Option

Équations Différentielles et Applications

Présentée par

DJERRAR Ibtissem

ENCADREUR : ALEM Leïla PROF U.B.M. ANNABA
CO-ENCADREUR : CHORFI Lahcène PROF U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRÉSIDENT : CHIBI Ahmed Salah PROF U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : BOUSSETILA Nadjib PROF U.GUELMA
EXAMINATEUR : ZOUYED Fairouz M.C.A U.B.M. ANNABA

Remerciements

Avant tout je remercie DIEU le tout Puissant de m'avoir donné le courage et la volonté pour accomplir ce travail.

J'aimerais tout d'abord remercier grandement mes directeurs de thèse, Madame **Leïla ALEM** et Monsieur **Lahcène CHORFI**, Professeurs à l'université d'Annaba de m'avoir encadrée tout au long de cette thèse, je tiens à les remercier aussi pour leur grande disponibilité, pour leur rigueur scientifique ainsi que pour leur patience. Leurs conseils précieux et leurs encouragements m'ont toujours motivée. Qu'ils soient aussi remerciés pour leur gentillesse et leurs aides.

Je tiens également à remercier Monsieur **Chibi Ahmed-salah** Professeur à l'université d'Annaba de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie Professeur **Boussetila Nadjib** et Dr. **Zouyed Fairouz** d'avoir accepté de faire partie du jury et d'examiner ma thèse.

Mes remerciements ne peuvent pas s'achever avant que j'adresse mes plus profonds et chaleureux remerciements à toute ma famille, à mes parents, à mon frère et ma sœur pour leurs encouragements et leur soutien durant ces années.

Un remerciement tout particulier à mon père et à ma mère pour leur patience et tous les sacrifices qu'ils ont consentis à mon égard.

À la fin, je tiens à remercier mes amis et tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette thèse.

ملخص

المذكورة تتكون من جزئين، في الجزء الأول سندرس مسألة عكسية لتوصيل الحرارة داخل حلقة نصف قطرها $a \leq r \leq b$ في حالة تناظر محوري لمعادلة الحرارة. نريد تعيين درجة الحرارة على المساحة الداخلية انطلاقاً من معطيات كوشي على المساحة الخارجية. هذه المسألة هي مسألة معتلة.

نقوم بحل المسألة المباشرة باستعمال تحويل لابلاس والمشكل المعاكس يؤول الى معادلة تكاملية من الصنف الأول. نطبق طريقة تنظيم تيخونوف لتقريب حل المعادلة التكاملية المتحصل عليها في حالة المعطيات الغير دقيقة. في الأخير نقدم بعض الأمثلة العددية من اجل توضيح استقرار الطريقة المطروحة.

في الجزء الثاني نهتم بالحل المقرب لمسألة معاكسة لتوصيل الحرارة داخل أسطوانة نصف قطرها $0 \leq r \leq b$ ، في هذه المسألة نهدف الى تحديد درجة الحرارة على السطح الخارجي للأسطوانة انطلاقاً من درجة الحرارة المقاسة في نقطة داخلية معينة وهذا بالاعتماد على نفس الطريقة المتبعة في الجزء الأول.

الكلمات المفتاحية:

مسائل معتلة، معادلة الحرارة في حالة تناظر مركزي، تحويل لابلاس، تنظيم تيخونوف.

Résumé

La thèse est composée de deux parties. Dans la première partie on étudie un problème inverse axisymétrique pour l'équation de la chaleur dans une couronne ($a \leq r \leq b$). On désire déterminer la température de surface intérieure ($r = a$) à partir de la donnée de Cauchy sur la surface extérieure ($r = b$). Ce problème est mal-posé. En utilisant la transformée de Laplace, on résout le problème direct. Alors le problème inverse se réduit en une équation intégrale de Volterra de première espèce. Une méthode de régularisation de Tikhonov standard est appliquée pour l'approximation de cette équation intégrale lorsque la donnée n'est pas exacte. Quelques exemples numériques sont donnés pour illustrer la stabilité de la méthode proposée.

La deuxième partie est consacrée à la résolution numérique d'un autre problème inverse de conduction de la chaleur dans un cylindre de rayon b ($0 \leq r \leq b$). Notre but est de déterminer la température de surface extérieure $f(t) = u(b, t)$ à partir de la température mesurée $g^\delta(t)$ sur une région intérieure $0 < r_1 < b$. Pour cela on va suivre la même procédure que dans la première partie.

Mots-clés :

problèmes mal-posés, équation de la chaleur à symétrie radiale, transformation de Laplace, régularisation de Tikhonov.

Abstract

The thesis is composed of two parts. In the first part we consider an axisymmetric inverse problem for the heat equation inside the annulus $a \leq r \leq b$. We wish to determine the surface temperature on the interior surface $\{r = a\}$ from the Cauchy data on the exterior surface $\{r = b\}$. This problem is ill-posed. Using the Laplace transform we solve the direct problem. Then the inverse problem is reduced to a Volterra integral equation of the first-kind. A standard Tikhonov regularization method is applied to the approximation of this integral equation when the data is not exact. Some numerical examples are given to illustrate the stability of the proposed method.

The second part is devoted to the numerical resolution of an other inverse heat conduction problem inside the cylinder $0 \leq r \leq b$. Our aim is to reconstruct the temperature $f(t) = u(b, t)$ on the boundary $r = b$ from the measured temperature $g^\delta(t)$ in the interior region $0 < r_1 < b$. For that we will follow the same procedure as in the first part.

Keywords :

Ill-posed problem, Radially symmetric heat equation, Laplace transform, Tikhonov regularization.

Table des matières

Introduction	xiii
0.1 Thème de recherche	xiv
0.2 Contenu de la thèse	xvi
1 Préliminaires	1
1.1 Problème direct et problème inverse	1
1.2 Problème bien-posé et mal-posé	1
1.3 Théorie de régularisation	3
1.3.1 Régularisation de Tikhonov	5
1.3.2 Principe de Morozov	6
1.4 Décomposition en valeurs singulières	6
1.5 Mollification	8
1.6 Transformée de Laplace	10
1.6.1 Transformée de Laplace des fonctions [20]	10
1.6.2 Transformée de Laplace inverse	12
1.7 Formule d'inversion complexe	13
2 Méthode de régularisation pour un problème inverse de conduction de la chaleur à symétrie radiale	15
2.1 L'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques	15
2.2 Milieu axisymétrique	15

2.3	Position du problème	16
2.4	Problème direct	17
2.4.1	Reconstruction de la solution	18
2.4.2	Approximation par la méthode des différences finies	27
2.4.3	Tests Numériques	30
2.5	Problème inverse	32
2.5.1	L'équation intégrale	32
2.5.2	Régularisation de Tikhonov	35
2.6	Tests Numériques	37
3	Identification de la température de surface extérieure à partir de mesure intérieure donnée	43
3.1	Position du problème	43
3.2	Problème direct	44
3.2.1	Unicité de la solution	45
3.2.2	Représentation de la solution	45
3.2.3	Approximation de la solution par la méthode des différences finies	47
3.3	Exemples numériques	49
3.4	La résolution du problème inverse	51
3.5	Tests Numériques	51
	Conclusion et perspectives	61
A	Rappel sur les fonctions de Bessel	63
A.0.1	Les fonctions de Bessel J_ν et Y_ν	63
A.0.2	Les fonctions de Bessel modifiées I_ν et K_ν	64
A.1	Propriétés	65
A.2	Relations de dérivation	65

A.3 Comportement asymptotique	68
Bibliographie	73

Table des figures

1.1	La mollification d'une donnée perturbée g^δ	9
1.2	Contour d'intégration C_n	14
2.1	Milieu axisymétrique	16
2.2	Test 1. Comparaison entre la solution exacte $u(b, t)$ et la solution approchée du problème direct.	31
2.3	Test 2. Comparaison entre la solution exacte $u(b, t)$ et la solution approchée du problème direct.	32
2.4	Le noyau de la chaleur k	34
2.5	Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0, N = 40$ et $T = 3$	37
2.6	Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.001, N = 40$ et $T = 3$	37
2.7	Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0, N = 50$ et $T = 3$	38
2.8	Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.001, N = 50$ et $T = 3$	38
2.9	Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.01, N = 30$ et $T = 5$ (sans mollification).	39
2.10	Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.01, N = 30$ et $T = 5$ (avec mollification, $\nu = 0.1$).	39

2.11	Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.01$, $N = 30$ et $T = 5$ (sans mollification).	40
2.12	Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.01$, $N = 30$ et $T = 5$ (avec mollification, $\nu = 0.1$).	40
3.1	Test 1 . Comparaison entre la solution exacte $u(r_1, t) = g(t)$ et la solution approchée du problème direct avec $N = 40$ et $T = 3$.	50
3.2	Test 2 . Comparaison entre la solution exacte $u(r_1, t) = g(t)$ et la solution approchée du problème direct avec $N = 40$ et $T = 3$.	50
3.3	Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0$, $N = 40$ et $T = 3$.	52
3.4	Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.001$, $N = 40$ et $T = 3$.	52
3.5	Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0$, $N = 40$ et $T = 3$.	53
3.6	Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.001$, $N = 40$ et $T = 3$.	53
3.7	Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0$, $N = M = 80$, $r_1 = 1$, $T = 5$. a) Test 1, b) Test 2	54
3.8	Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec un bruit $\delta = 0.01$, $N = M = 80$, $r_1 = 1$, $T = 5$, sans mollification. a) Test 1, b) Test 2.	55
3.9	Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec un bruit $\delta = 0.01$, $N = M = 80$, $r_1 = 1$, avec mollification ($\nu = 0.1$). a) Test 1, b) Test 2.	56
3.10	Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec mollification $\nu = 0.1$, $r_1 = 0.4$. a) Test 1, b) Test 2.	57

3.11	Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec mollification $\nu = 0.1$, $r_1 = 1.8$. a) Test 1, b) Test 2.	58
A.1	a) Fonctions de Bessel de première espèce J_ν b) Fonctions de Bessel de deuxième espèce Y_ν	66
A.2	a) Fonctions de Bessel modifiées de première espèce I_ν b) Fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce K_ν	67

Introduction

Actuellement, les problèmes inverses sont bien reconnus et motivent de nombreuses recherches en mathématiques.

Ces problèmes consistent à déterminer les propriétés d'un système étudié à partir des données observées, c.à.d, ce problème est dit l'inverse du problème direct qui consiste à déduire les effets à partir des causes connues.

Il existe différents types de problèmes inverses :

- Identification de source.
- Reconstruction de la condition initiale.
- Reconstruction de conditions aux limites.
- La géométrie du domaine...

Les problèmes inverses jouent un rôle important dans différents domaines comme l'imagerie médicale (scanners, échographie, ...), l'ingénierie pétrolière (identification des perméabilités dans un réservoir), le traitement d'images (restauration des images flous).

Ces problèmes possèdent une caractéristique importante, celle d'être mal-posés, c.à.d les conditions d'existence, d'unicité et/ou de la continuité de la solution par rapport aux données (stabilité), ne sont pas toutes vérifiées. Le problème d'existence de la solution peut être rétabli en élargissant l'espace des solutions et s'il existe plusieurs solutions (non unicité), dans ce cas il est nécessaire d'ajouter des informations supplémentaires pour discriminer entre elles. Par contre, la stabilité de la solution est la propriété la plus délicate dans l'étude des problèmes inverses, ce qui nous conduit à l'utilisation des méthodes dites de régularisation.

Une bonne connaissance du problème direct est nécessaire pour l'étude des problèmes inverses, l'étude du problème direct est basée sur des méthodes classiques : méthodes

analytiques (géométrie simple), ou méthodes numériques (géométrie complexe).

Dans notre travail on va s'intéresser à un problème inverse de conduction de la chaleur.

La conduction est le mode de transfert de la chaleur provoqué par la différence de température entre deux régions d'un milieu donné, en particulier dans un domaine solide (métal, paroi, ...), ou encore entre deux milieux en contact physique.

Si la température sur la surface d'un solide ou le flux de la chaleur sont connus comme une fonction de temps, alors la distribution de la température peut être déterminée. Cela est dit un problème direct de conduction de la chaleur.

Dans de nombreuses situations de transfert de la chaleur, le flux de la chaleur et la température sur la surface d'un solide doivent être déterminés à partir des mesures de température transitoires en une ou plusieurs positions intérieures, dans ce cas, le problème est dit problème inverse de conduction de la chaleur.

Ce problème a plusieurs applications dans différentes branches de la science et de la technologie, comme exemples, on peut citer :

- Transfert de la chaleur à partir de barres de combustible nucléaire.
- Transfert de la chaleur dans un tuyau double.

0.1 Thème de recherche

Dans notre sujet de recherche, on s'intéresse aux problèmes inverses de conduction de la chaleur à symétrie radiale (géométrie cylindrique), ça consiste à déterminer la température ou le flux de la chaleur des deux côtés de la frontière lorsque l'un des côtés est inaccessible aux mesures.

Le modèle mathématique de notre problème peut être décrit par l'équation de la chaleur axisymétrique suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, t), \quad r \in (a, b), \quad t > 0, \quad (1)$$

avec les conditions aux limites

$$u(b, t) = g(t), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(b, t) = h(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

et la condition initiale

$$u(r, 0) = 0, \quad r \in (a, b), \quad (3)$$

où r est la coordonnée radiale et $0 < a < b$.

Notre but est de déterminer la condition aux limites

$$u(a, t) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

à partir des données de Cauchy mesurées (g, h) avec $(h = 0)$. Il est connu que ce problème est sévèrement mal-posé, dans le sens où si la solution existe elle ne dépend pas continûment de la donnée g . En effet une petite perturbation dans la donnée peut causer une grande erreur dans la solution $u(., t)$. Par conséquent, une méthode de régularisation est nécessaire.

Le problème standard de conduction de la chaleur en coordonnées cartésiennes suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in [0, 1], t > 0, \\ u(0, t) = f(t), \\ u_x(0, t) = 0, \end{cases}$$

est bien étudié avec plusieurs méthodes. La méthode de Fourier est utilisée dans [2, 11, 12]. La méthode de mollification et la régularisation par projection basées sur la transformation de Laplace et la transformation de Fourier sont appliquées respectivement dans [21] et [23].

Pour les problèmes axisymétriques, on doit mentionner les articles récents. Dans [4, 8] les auteurs traitent le cas d'identification de source à partir de la donnée finale. Xiang [22] a étudié le problème d'identification d'une condition aux limites par la méthode de quasi-réversibilité. Une méthode de régularisation de Tikhonov modifiée a été appliquée pour une équation de la chaleur axisymétrique (backward) dans [7].

Lesnic et ses collègues [15] ont étudié la méthode des solutions fondamentales (MFS) avec une régularisation de Tikhonov pour une équation de la chaleur axisymétrique.

Dans [5, 6] les auteurs considèrent un problème inverse de conduction de la chaleur (IHCP) axisymétrique pour déterminer la température de surface à partir d'une position fixée à l'intérieur du cylindre par la méthode de Fourier.

Tout les travaux cités ci-dessus sont basés sur la méthode de transformée de Fourier, la méthode de séparation de variables ainsi que la méthode de solutions fondamentales, à notre connaissance la méthode de la transformée de Laplace n'a pas été utilisée.

0.2 Contenu de la thèse

Cette thèse est composée d'une introduction, trois chapitres et une annexe.

On commence tout d'abord par une introduction générale sur le problème étudié dans ce document de recherche.

Ensuite dans **le premier chapitre**, on donne un aperçu sur les problèmes inverses et les problèmes mal-posés ainsi que la théorie de régularisation.

On introduit la méthode de mollification, on termine ce chapitre par un rappel de quelques notions sur la transformée de Laplace.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème inverse pour l'équation de la chaleur dans un domaine axisymétrique.

On commence par l'étude du problème direct, on construit la solution analytique et numérique du problème, ensuite pour le problème inverse, on propose la méthode de régularisation de Tikhonov qui va permettre d'avoir une solution approchée stable.

On termine ce chapitre par des tests numériques.

Dans **le troisième chapitre**, on traite un autre problème inverse dans un cylindre $0 \leq r \leq b$.

Le but est de déterminer la température $u(b, t) = f(t)$ à partir d'une donnée in-

térieure $u(r_1, t) = g(t)$ avec $r_1 < b$, en suivant le même principe que dans le chapitre 2.

On termine cette thèse par une annexe pour faciliter la lecture.

Dans l'annexe A, on donne un rappel sur les fonctions de Bessel.

Publications issues de cette thèse :

Le troisième chapitre est publié dans le journal [10]

- I. Djerrar, L. Alem, L. Chorfi, *Regularization method for the radially symmetric inverse heat conduction problem. Boundary Value Problems*, page :159, 2017.

Le quatrième chapitre a été présenté à la conférence ICOT 2018.

- I. Djerrar, L. Alem, L. Chorfi, *Numerical solution of axisymmetric inverse heat conduction problem. International conference on operator theory*, Tunis, 30 April- 03 May 2018.

Cette communication paraîtra dans un proceeding sous la direction de "De Gruyter".

Préliminaires

1.1 Problème direct et problème inverse

Deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause.

Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues. Nous sommes plus habitués à étudier des problèmes directs et nous avons appris à poser, puis résoudre des problèmes pour lesquels les causes sont données, et l'on en cherche alors les effets. La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct.

1.2 Problème bien-posé et mal-posé

En 1923, Hadamard a introduit la notion de problème bien-posé. Il s'agit d'un problème dont :

- La solution existe.
- La solution est unique.
- La solution dépend continûment des données.

Un problème qui n'est pas bien-posé au sens de la définition ci-dessus est dit problème mal-posé.

Beaucoup de problèmes inverses peuvent être formulés en une équation intégrale

$$Ax = y.$$

Soit $A : U \rightarrow V$ un opérateur de U sous espace d'un espace normé X dans V sous espace d'un espace normé Y . L'équation $Ax = y$ est dite bien-posée si A est bijectif et $A^{-1} : V \rightarrow U$ est continu, autrement $Ax = y$ est dite mal-posée. Dans les années récentes beaucoup de problèmes de la physique mathématique sont en réalité mal-posés.

Théorème 1.2.1. *Soit X un espace normé, l'opérateur identité $I : X \rightarrow X$ est compact si et seulement si X est de dimension finie.*

Théorème 1.2.2. *Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur compact entre espaces de Hilbert, $R(A)$ est fermé si et seulement s'il est de dimension finie.*

Théorème 1.2.3. *Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur compact avec X et Y des espaces normés. Alors $Ax = y$ est mal-posée si X est de dimension infinie.*

Preuve. On suppose que A^{-1} existe et est continu. Alors $I = A^{-1}A : X \rightarrow X$ est un opérateur compact, par conséquent X est de dimension finie. ■

Remarque 1.2.1.

- Si $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire compact entre espaces de Hilbert avec $R(A)$ de dimension infinie, alors $R(A)$ est non fermé (ce qui implique que A^{-1} est non borné). Dans ce cas l'équation intégrale $Ax = y$ est mal-posée.
- En général pour les opérateurs intégraux compacts avec un noyau non-dégénéré, $R(A)$ est non fermé.

Les problèmes inverses ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre des trois conditions introduites par Hadamard mais la problématique la plus importante est le manque de continuité, qui se traduit par l'instabilité lors de la résolution numérique.

Dans le but de construire une solution approchée stable d'un problème mal-posé, cela nécessite l'application des méthodes dites méthodes de régularisation.

1.3 Théorie de régularisation

Soit A un opérateur linéaire borné compact, on veut approcher la solution x de l'équation $Ax = y$, en pratique le second membre $y \in Y$ n'est jamais connu exactement mais seulement avec une erreur $\delta > 0$. Alors le but c'est de résoudre l'équation perturbée

$$Ax^\delta = y^\delta, \quad (1.1)$$

avec

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta.$$

On suppose que $y \in R(A)$ et que l'opérateur A est injectif, ce qui implique l'existence et l'unicité de la solution x de l'équation exacte $Ax = y$.

On généralise l'équation (1.1) n'est pas solvable car on ne peut pas supposer que $y^\delta \in R(A)$, alors comment construire une approximation x^δ de x qui dépend continûment de y^δ ?

Définition 1.3.1. Soient X et Y des espaces normés et soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné injectif. Alors la famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : Y \rightarrow X$, $\alpha > 0$, telle que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Ax = x$$

pour tout $x \in X$ est appelée schéma de régularisation de A , le paramètre α est dit paramètre de régularisation.

Les opérateurs $R_\alpha y \rightarrow A^{-1}y$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$ pour tout $y \in R(A)$.

D'après la définition si-dessus et la compacité de l'opérateur A , on a le théorème suivant [3].

Théorème 1.3.1. *Soient X et Y des espaces normés et soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur compact injectif, on suppose que X est de dimension infinie, alors on a*

- (i) R_α n'est pas borné uniformément, i.e., il existe une suite α_j telle que $\|R_{\alpha_j}\| \rightarrow \infty$ lorsque $j \rightarrow \infty$.
- (ii) $R_\alpha Ax$ ne converge pas uniformément, i.e., $R_\alpha A$ ne converge pas en norme vers l'opérateur identité I .

Preuve.

- (i) Supposons le contraire, alors il existe $c > 0$ tel que $\|R_\alpha\| \leq c$ quand $\alpha \rightarrow 0$. Donc pour tout $y \in R(A)$ et $\alpha > 0$, on a $\|R_\alpha y\| \leq c\|y\|$. Puisque $R_\alpha y \rightarrow A^{-1}y$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$, on en déduit que $\|A^{-1}\| \leq c\|y\|$ pour tout $y \in R(A)$, donc A^{-1} est un opérateur borné ce qui implique que $I = A^{-1}A : X \rightarrow X$ est compact, alors d'après le théorème 1.2.1 X est de dimension finie ce qui est une contradiction avec $\dim X = \infty$.
- (ii) supposons que $R_\alpha A$ converge en norme, i.e., $\|R_\alpha A - I\| \rightarrow 0$, lorsque $\alpha \rightarrow 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\|R_\alpha A - I\| < \frac{1}{2}$ et pour tout $y \in R(A)$ on a

$$\begin{aligned} \|A^{-1}y\| &= \|A^{-1}y - R_\alpha AA^{-1}y + R_\alpha y\| \\ &\leq \|A^{-1}y - R_\alpha AA^{-1}y\| + \|R_\alpha y\| \\ &\leq \|A^{-1}y\| \|I - R_\alpha A\| + \|R_\alpha\| \|y\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|A^{-1}y\| + \|R_\alpha\| \|y\|, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|A^{-1}y\| \leq 2\|R_\alpha\| \|y\|,$$

i.e., A^{-1} est borné, donc I est un opérateur compact, ce qui conduit encore à une contradiction. ■

On définit un schéma de régularisation qui approche x solution de l'équation $Ax = y$ par :

$$x^{\alpha,\delta} := R_\alpha y^\delta.$$

En écrivant

$$x^{\alpha,\delta} - x = R_\alpha y^\delta - R_\alpha y + R_\alpha Ax - x,$$

on aura l'estimation suivante

$$\|x^{\alpha,\delta} - x\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha Ax - x\|.$$

Alors la stratégie (principe de Morozov (voir section 1.3.2)) est de choisir $\alpha = \alpha(\delta)$ de telle sorte que $x^{\alpha,\delta} \rightarrow x$, lorsque $\delta \rightarrow 0$.

1.3.1 Régularisation de Tikhonov

La méthode de régularisation la plus courante est la méthode de Tikhonov.

Théorème 1.3.2. *Soient X et Y des espaces de Hilbert et soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur compact. L'opérateur $\alpha I + A^*A : X \rightarrow X$ est bijectif et admet un inverse borné pour tout $\alpha > 0$.*

De plus, si A est injectif alors

$$R_\alpha := (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*, \quad (1.2)$$

définit un schéma de régularisation avec $\|R_\alpha\| \leq 1/2\sqrt{\alpha}$.

Définition 1.3.2. *Soient X et Y des espaces de Hilbert, $A : X \rightarrow Y$ et $y \in Y$, la fonction J_α définie par*

$$J_\alpha(x) := \|Ax - y\|^2 + \alpha\|x\|^2, \quad \text{pour } x \in X \quad (1.3)$$

est dite la fonctionnelle de Tikhonov.

Théorème 1.3.3. *Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur compact entre espaces de Hilbert et soit $\alpha > 0$, alors pour tout $y \in Y$ il existe un unique $x^\alpha \in X$ tel que*

$$\|Ax^\alpha - y\|^2 + \alpha\|x^\alpha\|^2 = \inf_{x \in X} J_\alpha(x),$$

i.e., x^α est l'unique minimum de la fonctionnelle de Tikhonov (1.3), de plus x^α est l'unique solution de l'équation normale

$$(\alpha I + A^*A)x^\alpha = A^*y,$$

et peut être écrite sous la forme $x^\alpha = R_\alpha y$ avec R_α donnée par (1.2).

1.3.2 Principe de Morozov

Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur compact entre espaces de Hilbert, injectif et à image dense, soit $y = Ax$ et $y^\delta \in Y$ satisfaisant

$$\|y^\delta - y\| \leq \delta,$$

alors il existe un unique $\alpha = \alpha(\delta)$ tel que

$$\|Ax^{\alpha,\delta} - y^\delta\| = \delta$$

et

$$x^{\alpha,\delta} \rightarrow x, \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0.$$

Voir ([16] Théorème 2.17).

1.4 Décomposition en valeurs singulières

Définition 1.4.1. Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur compact entre espaces de Hilbert avec $A^* : Y \rightarrow X$, l'opérateur adjoint et soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ les valeurs propres de l'opérateur compact auto-adjoint $A^*A : X \rightarrow X$, les racines carrées $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$ sont dites valeurs singulières de A .

Théorème 1.4.1. Soient X et Y deux espaces de Hilbert, $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire compact avec A^* l'opérateur adjoint. Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$, la suite des valeurs singulières de A telle que

$$\mu_1 \geq \mu_2 \dots > 0$$

alors il existe $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ et $(y_n)_{n \geq 1} \subset Y$ des systèmes orthonormés avec

$$Ax_n = \mu_n y_n \text{ et } A^* y_n = \mu_n x_n.$$

La décomposition en valeurs singulières de chaque $x \in X$ est donnée par

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x, x_n) x_n,$$

avec $x_0 \in N(A)$ et

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x, x_n) y_n.$$

Le système (μ_n, x_n, y_n) est dit système singulier de A .

Remarque 1.4.1. La solution de l'équation $Ax = y$ est donnée par le théorème de Picard (Voir [16]) comme suit

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (y, y_n) x_n.$$

Théorème 1.4.2. Soit (μ_n, x_n, y_n) un système singulier pour l'opérateur A . L'opérateur $R_\alpha : Y \rightarrow X$ est défini par

$$R_\alpha y := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_n)}{\mu_n} (y, y_n) x_n, \quad y \in Y \quad (1.4)$$

avec $q : \mathbb{R}_+ \times (0, \|A\|) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction filtre qui a les propriétés suivantes :

- 1) q est bornée.
- 2) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} q(\alpha, \mu) = 1, \quad 0 < \mu \leq \|A\|.$
- 3) $|q(\alpha, \mu)| \leq C_\alpha \mu, \quad 0 < \mu \leq \|A\|.$

1.5 Mollification

Dans cette partie, on introduit le concept de mollification [21].

La méthode de mollification consiste à régulariser des fonctions (donner une approximation lisse) grâce au produit de convolution.

On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et soit x un point de \mathbb{R}^n , on définit la fonction $w(x)$ satisfaisant :

- i) $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- ii) $w(x) \equiv 0$ pour $\|x\| \geq 1$ et $w(x) \geq 0$ pour $\|x\| < 1$.
- iii) $\int_{\mathbb{R}^n} w(x) dx = 1$.

On note que $w \in C_0^\infty(B)$ avec $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ (la boule unité centrée en 0, de rayon 1).

Exemple 1.5.1.

$$w(x) = \begin{cases} C e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \text{pour } \|x\| < 1, \\ 0, & \text{pour } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

avec C une constante choisie de telle sorte que la fonction w satisfait (iii).

Définition 1.5.1. Pour tout nombre réel $\delta > 0$, on définit la famille de fonctions

$$w_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} w\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

On a $w_\delta \in C_0^\infty(B(0, \delta))$ avec $B(0, \delta)$ la boule unité de centre 0 et de rayon δ , de plus,

$$\int_{\Omega} w_\delta(x) dx = 1.$$

Définition 1.5.2. Pour une fonction f localement intégrable sur Ω , le mollificateur J_δ est défini par

$$J_\delta f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} w_\delta(x-y) f(y) dy,$$

la fonction $J_\delta f$ est définie en tout point $x \in \Omega$ tel que $\text{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{z \in \partial\Omega} \|x-z\| > \delta$.

Théorème 1.5.1. Soit f une fonction localement intégrable sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors $J_\delta f \in C^\infty(\Omega)$.

Théorème 1.5.2. Si $f \in L^p(\Omega)$, alors $\|J_\delta f\|_{p,\Omega} \leq \|f\|_{p,\Omega}$.

Théorème 1.5.3. Si f est une fonction continue en $x \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |J_\delta f(x) - f(x)| = 0,$$

la convergence devient uniforme sur tout ensemble compact de points de continuité.

Théorème 1.5.4. Si $f \in L^p(\Omega)$, alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|J_\delta f - f\|_{p,\Omega} = 0.$$

Application : On considère la fonction $g(x) = \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$.

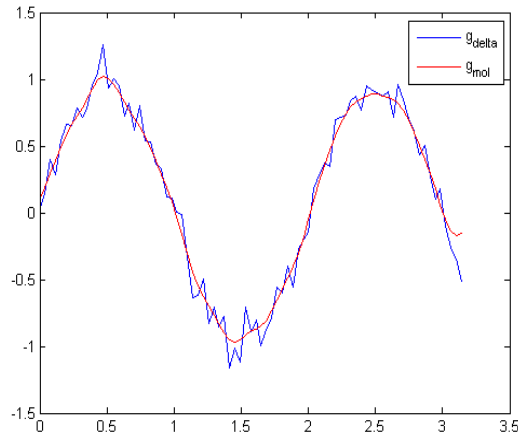


FIGURE 1.1 – La mollification d’une donnée perturbée g^δ .

La fonction g^δ est la donnée perturbée, avec $g^\delta = g + \delta \text{randn}(\text{size}(g))$, g_{mol} représente la donnée après la mollification. La méthode de mollification a permis de donner une fonction plus lisse (voir figure 1.1).

1.6 Transformée de Laplace

Cette partie est consacrée à l'étude d'une transformation intégrale d'un usage fréquent : la transformée de Laplace. C'est en gros la généralisation de la transformée de Fourier. La classe des fonctions admettant une transformée de Laplace est plus vaste que celle des fonctions pour lesquelles la transformée de Fourier est définie. La transformée de Laplace est un outil très efficace pour résoudre des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles ainsi que des équations fonctionnelles ou intégrales.

1.6.1 Transformée de Laplace des fonctions [20]

Définition 1.6.1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), une fonction localement sommable. On appelle transformée de Laplace de $f(x)$ la fonction notée $\mathcal{L}(f(x))$ ou $F(s)$ de la variable complexe $s = \sigma + i\omega$ définie par

$$\mathcal{L}(f(x)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \quad (1.5)$$

La fonction f est appelée originale de F et F l'image de f .

Remarque 1.6.1. Il faut noter que $F(s)$ n'existe pas toujours. Comme exemple on peut choisir la fonction $f(x) = e^{x^2}$, pour cette fonction l'intégrale ci-dessus n'est pas définie.

Définition 1.6.2. Une fonction f telle que $f(x) = 0$ pour $x < 0$ est dite causale. Évidemment, on peut rendre une fonction causale en la multipliant par la fonction de Heaviside $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Remarque 1.6.2. Les valeurs de f pour $x < 0$, n'interviennent pas dans la définition 1.6.1.

Définition 1.6.3. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) est une fonction localement sommable, on

définie la transformée de Laplace bilatérale par

$$\mathcal{L}(f(x)) = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-sx} dx \quad (1.6)$$

Notons que la transformée de Laplace de f définie par (1.5) coïncide avec la transformée de Laplace bilatérale de $H(x)f(x)$ où $H(x)$ est la fonction de Heaviside.

Définition 1.6.4. La fonction f est dite de type exponentielle à l'infini s'ils existent des constantes $M > 0$ et σ_0 telles que : $|f(x)| \leq Me^{\sigma_0 x}, \forall x \geq x_0$.

Remarque 1.6.3. Si f est une fonction définie sur \mathbb{R} , nulle pour tout $x < 0$, continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et si elle est de type exponentielle à l'infini, alors la transformée de Laplace existe pour tout $\sigma > \sigma_0$ (Voir [20]).

Proposition 1.6.1. Si l'intégrale (1.5) converge pour $Re(s) = \sigma_0$, alors elle converge pour tout s tel que : $Re(s) \geq \sigma_0$.

Preuve. En effet, on a

$$|f(x)e^{-sx}| = |f(x)|e^{-\sigma x} \leq |f(x)|e^{-\sigma_0 x}.$$

Puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|e^{-\sigma_0 x} dx$ existe, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)e^{-sx}| dx$ existe aussi. Par conséquent, la transformée de Laplace $F(s)$ existe dans le demi-plan défini par $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq \sigma_0\}$, ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 1.6.1. Si l'intégrale (1.5) diverge pour $Re(s) = \sigma_0$, alors elle diverge pour $Re(s) < \sigma_0$.

Définition 1.6.5. Soit $f \in \mathcal{L}_{loc}([0, +\infty[)$. Le nombre

$$\sigma_0 = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : f(x)e^{\sigma x} \in \mathcal{L}_{loc}([0, +\infty[)\},$$

s'appelle abscisse de sommabilité ou abscisse de convergence absolue de la fonction f . Le demi plan de convergence $\{s = \sigma + iw : Re(s) = \sigma > \sigma_0\}$ est le domaine de sommabilité sur lequel $F(s)$ est définie.

Théorème 1.6.1. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, \infty)$ et de type exponentielle à l'infini. Alors $F(s) = \mathcal{L}(f(x))$ est une fonction analytique pour $Re(s) > \sigma_0$.

1.6.1.1 Convolution :

La convolution de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, $x > 0$ joue un rôle important dans différentes applications physique.

Le produit de convolution est donné par l'intégrale

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(\tau)g(x - \tau)d\tau. \quad (1.7)$$

Théorème 1.6.2. *Si $\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$ et $\mathcal{L}(g(x)) = G(s)$, alors*

$$\mathcal{L}((f * g)(x)) = F(s)G(s), \quad \text{Re}(s) > \max\{\sigma_0, \nu_0\},$$

où σ_0, ν_0 sont les indices de sommabilité de f et g respectivement.

Théorème 1.6.3. *(Théorème de dérivation)*

Soit f une fonction localement sommable, on suppose que f est continue sur $(0, \infty)$ de type exponentielle à l'infini ($\exists M > 0$ et σ_0 telles que $|f(x)| \leq Me^{\sigma_0 x}, \forall x \geq x_0$) sa dérivée f' existe et est continue par morceaux sur $[0, +\infty)$.

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(x)) &= s\mathcal{L}(f(x)) - f(0^+), \\ &= sF(s) - f(0^+), \end{aligned} \quad (1.8)$$

avec $\text{Re}(s) > \sigma_0$.

1.6.2 Transformée de Laplace inverse

Dans le but d'appliquer la Transformée de Laplace aux problèmes physiques, il est nécessaire d'introduire la transformée de Laplace inverse.

Définition 1.6.6. *Si $\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$, alors la transformée de Laplace inverse est donnée par*

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x), \quad x \geq 0.$$

Exemple 1.6.1.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) = \sin \omega x, \quad x \geq 0.$$

Théorème 1.6.4. *Si f est une fonction continue sur $[0, \infty)$, alors sa transformée de Laplace inverse est unique.*

1.7 Formule d'inversion complexe

La formule d'inversion complexe est une technique très puissante pour le calcul de la transformée de Laplace inverse.

Le principe de cette technique est basé sur la méthode d'intégration sur un contour.

Lemme 1.7.1. *(Jordan)*

Soit C_n l'arc de cercle (Figure 1.2)

$$|s| = R_n, \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg s \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty.$$

Si sur C_n une fonction $F(s)$ d'une variable complexe s tend uniquement en $\arg s$ vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} F(s) e^{st} ds = 0 \quad \text{pour } t > 0.$$

Lemme 1.7.2. *Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ et que C_n^+ et C_n^- sont respectivement les arcs de cercle*

$$|s| = R_n, \quad 0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \sigma, \quad \operatorname{Im}(s) > 0,$$

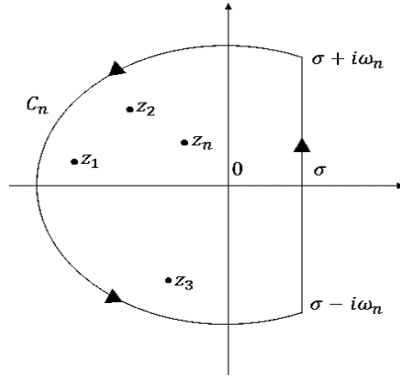
$$|s| = R_n, \quad 0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \sigma, \quad \operatorname{Im}(s) < 0.$$

Si sur les arcs C_n^+ et C_n^- ($n = 1, 2, 3, \dots$) une fonction $F(s)$ est uniformément bornée et tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n^+} F(s) e^{st} ds = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n^-} F(s) e^{st} ds = 0.$$

Lemme 1.7.3. *Soit $F(s)$ une fonction analytique régulière dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma$. Si sur les arcs*

$$|s| = R_n, \quad \frac{-\pi}{2} \leq \arg s \leq \frac{\pi}{2}, \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty \right),$$

FIGURE 1.2 – Contour d'intégration C_n

la fonction $F(s)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ uniformément en $\arg s$, alors pour $t < 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} F(s)e^{st} ds = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)e^{st} ds = 0. \quad (1.9)$$

Proposition 1.7.1. Soit $F(s) = F(\sigma + i\omega)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$. On suppose que $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} |F(s)| = 0$ pour $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ et pour tout $\sigma > \sigma_0$, la fonction

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto F(\sigma + i\omega),$$

est sommable sur \mathbb{R} (c'est-à-dire F est une fonction sommable en ω , pour tout $\sigma > \sigma_0$). Alors l'original f de F est donné par la formule de Bromwich-Wagner suivante :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s) ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(z_k), \quad \sigma > \sigma_0. \quad (1.10)$$

où $\operatorname{Res}(z_k)$ est le résidu de la fonction $e^{st} F(s)$ en $s = z_k$.

Méthode de régularisation pour un problème inverse de conduction de la chaleur à symétrie radiale

2.1 L'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques

L'opérateur de Laplace en coordonnées cylindriques (r, z, θ) s'écrit

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2.2 Milieu axisymétrique

Un domaine axisymétrique est un milieu qui possède une symétrie de révolution autour d'un axe.

On utilise les coordonnées polaires (r, z, θ) , mais l'invariance par rotation fait que la

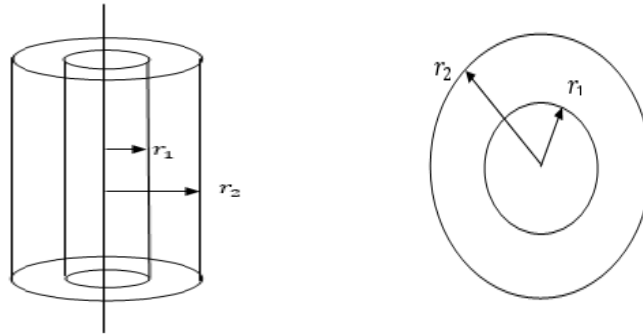


FIGURE 2.1 – Milieu axisymétrique

température ne dépend pas de θ et l'invariance par translation le long de l'axe fait que la température ne dépend pas de z , alors seule la variable r est utile [17].

Dans le cas d'une symétrie radiale l'équation de la chaleur s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

2.3 Position du problème

Le modèle mathématique de notre problème peut être décrit par l'équation de la chaleur axisymétrique suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, t), \quad r \in (a, b), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

avec les conditions au bord :

$$u(b, t) = g(t), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(b, t) = h(t), \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

et la condition initiale

$$u(r, 0) = 0, \quad r \in (a, b), \quad (2.3)$$

où r est la coordonnée radiale et $0 < a < b$.

Notre but est de déterminer la condition au bord :

$$u(a, t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

à partir des données de Cauchy (g, h) . Il est connu que ce problème est sévèrement mal-posé, dans le sens où si la solution existe elle ne dépend pas continûment de la donnée g . En effet une petite perturbation dans la donnée peut causer une grande erreur dans la solution $u(., t)$. Dans ce cas une méthode de régularisation est nécessaire.

2.4 Problème direct

La résolution des problèmes inverses passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite problème direct.

Le problème (2.1)-(2.2) peut être réduit en une équation intégrale, pour cela on suppose que $u(a, t) = f(t)$ est connue et (pour simplifier) $h(t) = 0$. On considère le problème direct suivant :

Pour f donnée, trouver $u(r, t)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(r, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r, t), \quad r \in (a, b), \quad t > 0, \\ u(a, t) = f(t), \\ \frac{\partial u}{\partial r}(b, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(r, 0) = 0, \quad r \in (a, b). \end{array} \right. \quad (2.5)$$

On a le théorème d'unicité suivant :

Théorème 2.4.1. *Le problème (2.5) admet au plus une solution dans l'espace*

$$\mathcal{H} = C^0([0, +\infty[, H^2(]a, b[)) \cap C^1(]0, +\infty[, L^2(]a, b[)).$$

Preuve. Soit $u(r, t)$ la solution du problème homogène (2.5) (avec $f = 0$).

Multipliant l'équation de la chaleur par ru et intégrant par parties sur l'intervalle (a, b) , on obtient

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} ur \, dr + \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 r \, dr = 0.$$

On pose $E(t) = \int_a^b u^2 r \, dr$, $t \geq 0$, alors on a

$$\frac{dE}{dt} = 2 \int_a^b u_t ur \, dr = -2 \int_a^b (u_r)^2 r \, dr \leq 0,$$

donc $E(t) = E(0) = 0$ pour tout $t \geq 0$, et $u(r, t) = 0$, $r \in (a, b)$, $t \geq 0$. ■

2.4.1 Reconstruction de la solution

Pour la représentation de la solution on va appliquer la transformée de Laplace par rapport à la variable t au problème direct.

Soit $f(t)$, $t \geq 0$ une fonction de type exponentielle à l'infini, i.e $|f(t)| \leq Ce^{\sigma t}$ ($\sigma \geq 0$).

La transformée de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ est donnée par

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) \, dt, \quad \text{Re}(s) > \sigma.$$

$F(s)$ est une fonction analytique dans le demi-plan $\text{Re}(s) > \sigma$ et la transformée de Laplace inverse est donnée par la formule d'inversion complexe suivante (voir [9]) :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} F(s) \, ds, \quad t > 0.$$

Soit $U(r, s) = \mathcal{L}u(r, \cdot)$ et $F(s) = \mathcal{L}f(s)$. Le problème (2.5) sera reformulé comme suit :

$$\begin{cases} U'' + \frac{1}{r}U' - sU = 0, & r \in (a, b), \\ U(a, s) = F(s), \\ U'(b, s) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Où $U' = \frac{\partial U}{\partial r}$.

La première équation dans (2.6) est une équation différentielle de Bessel modifiée dont la solution générale est de la forme

$$U(r, s) = C_0 I_0(r\sqrt{s}) + C_1 K_0(r\sqrt{s}). \quad (2.7)$$

D'après les conditions aux limites, on a

$$C_0 I_0(a\sqrt{s}) + C_1 K_0(a\sqrt{s}) = F(s) \quad (2.8)$$

$$C_0 \sqrt{s} I_1(b\sqrt{s}) - C_1 \sqrt{s} K_1(b\sqrt{s}) = 0, \quad (2.9)$$

de l'équation (2.8), on a

$$C_0 = \frac{F(s) - C_1 K_0(a\sqrt{s})}{I_0(a\sqrt{s})}, \quad (2.10)$$

de l'équation (2.9), on a

$$C_1 = \frac{\sqrt{s} I_1(b\sqrt{s}) F(s)}{\sqrt{s} [K_0(a\sqrt{s}) I_1(b\sqrt{s}) + I_0(a\sqrt{s}) K_1(b\sqrt{s})]}, \quad (2.11)$$

d'où

$$C_0 = \frac{\sqrt{s} K_1(b\sqrt{s}) F(s)}{\sqrt{s} [K_0(a\sqrt{s}) I_1(b\sqrt{s}) + I_0(a\sqrt{s}) K_1(b\sqrt{s})]}.$$

En substituant C_0 et C_1 dans l'expression (2.7), la solution du problème (2.6) sera donnée par

$$U(r, s) = F(s) \frac{W(r, s)}{W(a, s)}, \quad (2.12)$$

avec

$$W(r, s) = I_1(b\sqrt{s}) K_0(r\sqrt{s}) + K_1(b\sqrt{s}) I_0(r\sqrt{s}), \quad (2.13)$$

où I_ν, K_ν sont les fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce respectivement [1].

En appliquant la transformée de Laplace inverse et le théorème de convolution (Théorème 1.6.2), on obtient :

$$u(r, t) = \int_0^t f(\tau) k(r, t - \tau) d\tau, \quad (2.14)$$

**CHAPITRE 2: MÉTHODE DE RÉGULARISATION POUR UN
PROBLÈME INVERSE DE CONDUCTION DE LA CHALEUR À
SYMÉTRIE RADIALE**

20

avec le noyau

$$k(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{W(r, s)}{W(a, s)} e^{st} ds, \quad t > 0. \quad (2.15)$$

Lemme 2.4.1. *Soit*

$$G(r, s) = \frac{W(r, s)}{W(a, s)},$$

on a pour $r \in]a, b]$ et $|s| \rightarrow +\infty$,

$$|G(r, s)| = \sqrt{\frac{a}{r}} \exp\left(- (r-a)\rho^{1/2} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\right) + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

où $\rho = |s|$ et $\theta = \arg(s) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Preuve. On utilise le comportement asymptotique à l'infini des fonctions de Bessel J_ν, Y_ν, I_ν et K_ν (voir Annexe A). ■

Lemme 2.4.2. *Les zéros de la fonction*

$$W(s) = I_1(b\sqrt{s})K_0(a\sqrt{s}) + K_1(b\sqrt{s})I_0(a\sqrt{s}) \quad (2.16)$$

sont donnés par :

$$s_n = -\beta_n^2$$

avec

$$\beta_n \sim \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{a\pi}{b-a} \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Preuve. On considère l'opérateur auto-adjoint défini dans $L^2((a, b); r dr)$ avec

$$L^2((a, b), r dr) = \{f :]a, b[\rightarrow \mathcal{R} : f \text{ est Lebesgue mesurable et } r^{1/2}f \in L^2(]a, b[)\}$$

avec la norme

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(r)|^2 r dr \right)^{1/2}$$

par

$$AU = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right),$$

$D(A) = \{U \in H^2(]a, b[); U(a) = U'(b) = 0\}$. Si $AU = \lambda U$ Alors $(AU, U) = \|U'\|^2 = \lambda \|U\|^2$. Puisque A^{-1} est compact, A admet une suite de valeurs propres positives $\lambda_n \rightarrow +\infty$. D'autre part $\lambda_n = -s_n$ coïncident avec les racines de $W(s)$.

En effet, cela peut être vu en résolvant le problème de Sturm-Liouville (problème 2.6) avec $\lambda = -s$ et $F = 0$.

Maintenant, nous donnons le comportement de s_n . En utilisant les relations entre les fonctions de Bessel :

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz) \text{ et } K_n(z) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [J_n(iz) + iY_n(iz)], \text{ pour } n \in \mathbb{N},$$

on obtient, pour $s = -\beta^2$,

$$W(-\beta^2) = \frac{i\pi}{2} [J_0(a\beta)Y_1(b\beta) - J_1(b\beta)Y_0(a\beta)] \quad (2.17)$$

En utilisant le comportement asymptotique à l'infini des fonctions de Bessel (voir Annexe A) pour β grand, on obtient

$$W(-\beta^2) \sim \frac{i}{\sqrt{ab}\beta} \cos\left[\left(\frac{b}{a} - 1\right)\beta\right],$$

d'où les zéros de $W(s)$ est une suite $s_n = -\beta_n^2, n = 1, 2, \dots$, telle que

$$\beta_n \sim \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{a\pi}{b-a} \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

■

Lemme 2.4.3. *Le noyau de la chaleur $k(r, t)$ satisfait les propriétés suivantes :*

(i)

$$k(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{W(r, s_n)}{W'(a, s_n)} e^{s_n t} \quad \text{pour } r > a, t > 0, \quad (2.18)$$

avec

$$W(r, s_n) = J_0\left(\frac{r}{a}\beta_n\right)Y_1(\lambda\beta_n) - J_1(\lambda\beta_n)Y_0\left(\frac{r}{a}\beta_n\right), \quad \lambda = \frac{b}{a},$$

$$W'(a, s_n) = J_1(\beta_n)Y_1(\lambda\beta_n) - J_1(\lambda\beta_n)Y_1(\beta_n) + \quad (2.19)$$

$$\lambda[J_0(\lambda\beta_n)Y_0(\beta_n) - J_0(\beta_n)Y_0(\lambda\beta_n)],$$

où J_ν et Y_ν sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce respectivement et $s_n = -\beta_n^2$, $n = 1, 2, \dots$ est la suite des zéros de $W(a, s)$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ et $a < r \leq b$,

$$\frac{\partial^n k}{\partial t^n}(r, 0) = 0. \quad (2.20)$$

Preuve.

(i) Considérons le contour $C_R = [-iR, iR] \cup \{Re^{i\theta}, \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\}$ et utilisant le comportement asymptotique

$$\left| \frac{W(r, s)}{W(a, s)} e^{st} \right| = O(e^{-\mu|s|^{1/2}}),$$

lorsque $|s| \rightarrow \infty$ (voir Lemme 2.4.1), l'intégrale (2.15) peut être écrite pour $t > 0$ et $a < r \leq b$, de la manière suivante :

$$k(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{W(r, s)}{W(a, s)} e^{st} ds. \quad (2.21)$$

La fonction $W(a, s)$ est analytique par rapport à la variable $p = \sqrt{s}$ et possède une suite de racines simples p_n situées sur l'axe imaginaire telle que

$$p_n = -i\beta_n$$

où $\beta_n \simeq (n - \frac{1}{2})\frac{a\pi}{b-a}$, $n = 1, 2, \dots$, (voir Lemme 2.4.2).

D'où la formule (2.18).

(ii) En dérivant l'intégrale (2.15) par rapport à t on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^n k}{\partial t^n}(r, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} s^n \frac{W(r, s)}{W(a, s)} ds, \quad r > a. \quad (2.22)$$

- La fonction $G_n(r, s) = s^n \frac{W(r, s)}{W(a, s)}$ est analytique dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ sauf à l'origine où $\lim_{s \rightarrow 0} G_0(r, s) = 1$ et $\lim_{s \rightarrow 0} G_n(r, s) = 0$ pour $n \geq 1$ et possède le comportement

$$|G_n(r, s)| = O\left(\rho^n \exp\left(- (r - a)\rho^{1/2} \cos \frac{\theta}{2}\right)\right), \quad (2.23)$$

lorsque $\rho = |s| \rightarrow +\infty$ uniformément pour $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Alors on peut utiliser le théorème de Cauchy avec un contour adéquat pour avoir

$$\frac{\partial^n k}{\partial t^n}(r, 0) = 0 \text{ pour } r \in]a, b], \quad (2.24)$$

d'où le résultat. ■

Par conséquent l'intégrale (2.14) s'écrit sous la forme d'une série :

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{W(r, s_n)}{W'(a, s_n)} e^{s_n t} \int_0^t f(\tau) e^{-s_n \tau} d\tau, \quad r > a, t > 0. \quad (2.25)$$

Théorème 2.4.2. *Supposant que $f(t) \in C^1([0, +\infty[)$ telle que $f(0) = 0$ et $f(t) = 0$ pour $t \geq T$. Alors la série (2.25) converge dans $L^2(]a, b[)$ pour tout $t \geq 0$ et définit une solution pour le problème (2.5) dans \mathcal{H} .*

Preuve. En intégrant par parties (2.25) on peut écrire u sous la forme

$$u(r, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} \frac{W(r, s_n)}{W'(a, s_n)} e^{s_n t} \int_0^t f'(\tau) e^{-s_n \tau} d\tau + f(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} \frac{W(r, s_n)}{W'(a, s_n)}. \quad (2.26)$$

**CHAPITRE 2: MÉTHODE DE RÉGULARISATION POUR UN
PROBLÈME INVERSE DE CONDUCTION DE LA CHALEUR À
SYMÉTRIE RADIALE**

24

En utilisant le comportement asymptotique (voir annexe A),

$$\frac{W(r, s_n)}{W'(a, s_n)} = \frac{(-1)^n \sqrt{a}}{\sqrt{r}(1-\lambda)} \cos\left(\frac{b-r}{a}n\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2.27)$$

et l'estimation

$$\left| \int_0^t f(\tau) e^{s_n(t-\tau)} d\tau \right| \leq M/\beta_n^2, \quad M = \sup |f(t)|,$$

la première série dans (2.26) est uniformément convergente et le second terme est de la même nature que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{r}} \cos\left(n\left(\lambda - \frac{r}{a}\right)\right),$$

avec $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{\beta_n}$.

Montrons que cette dernière converge dans $L^2([a, b], r dr)$ En effet, la somme partielle

$$S_N(r) = \sum_{n=0}^N \frac{\alpha_n}{\sqrt{r}} \cos\left(\frac{(b-r)n}{a}\right)$$

est une suite de Cauchy, en effet pour tout $q \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_a^b |S_{N+q} - S_N|^2 r dr &= \int_a^b \left| \sum_{n=N}^{N+q-1} \alpha_n \cos\left(n\left(\lambda - \frac{r}{a}\right)\right) \right|^2 dr \\ &= \int_0^{\lambda-1} \left| a \sum_{n=N}^{N+q-1} \alpha_n \cos(nz) \right|^2 dz \\ &\leq l \int_0^{\pi} \left| \sum_{n=N}^{N+q-1} \alpha_n \cos(nz) \right|^2 dz = \frac{l\pi}{2} \sum_{n=N}^{N+q-1} |\alpha_n|^2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

(lorsque $N \rightarrow \infty$).

À la dernière étape on a utilisé l'orthogonalité du système $\{\cos(nz)\}$ dans $L^2([0, \pi])$ et l est un entier choisi tel que $\lambda - 1 \leq l\pi$.

En outre

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{W(r, s_n)}{W'(a, s_n)} \int_0^t f'(\tau) e^{s_n(t-\tau)} d\tau, \quad (2.29)$$

qui converge de la même manière que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{(b-r)n}{a}$, avec $|\alpha_n| \leq M'/\beta_n$,

$$M' = \sup |f'(t)|.$$

Donc $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(]a, b[)$.

Maintenant on va montrer que u est une solution faible pour l'équation aux dérivées partielles dans le problème (2.5).

Pour cela considérons la suite

$$u_N(r, t) = \int_0^t f(\tau) k_N(r, t - \tau) d\tau, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (2.30)$$

avec

$$k_N(r, t) = \sum_{n=1}^N \beta_n \frac{W(r, s_n)}{W'(a, s_n)} e^{s_n t}. \quad (2.31)$$

On définit l'opérateur différentiel $Pv := \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$, on a

$$Pu_N(r, t) = f(t)k_N(r, 0) + \int_0^t f(\tau)Pk_N(r, t - \tau)d\tau.$$

Mais $Pk_N(r, t) = 0$, alors $Pu_N(r, t) = f(t)k_N(r, 0)$.

D'après le lemme 2.4.3 on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} k_N(r, 0) = k(r, 0) = 0.$$

Posons $\mathbf{Q} =]a, b[\times]0, +\infty[$, d'autre part $P : \mathcal{D}'(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{Q})$, est un opérateur continu, alors $Pu = \lim_{N \rightarrow \infty} Pu_N = 0$ (au sens des distributions). Il reste à montrer que $u \in \mathcal{H}$.

Puisque $\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = ru_{rr} + u_r = ru_t$ dans $\mathcal{D}'(]a, b[)$, pour t fixé, alors $u_r \in H^1(]a, b[)$ et $u(\cdot, t) \in H^2(]a, b[)$.

Finalement, il est facile de vérifier que $t \mapsto u(\cdot, t)$ est C^1 de $]0, T[$ à valeurs dans $L^2(]a, b[)$. ■

Remarque 2.4.1. *Si $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ une fonction non régulière ($f \notin C^1$), la différentiation de la série (2.25) par rapport à la variable r ou t présente quelques difficultés. On peut juste dire d'après la preuve précédente que u est une solution faible dans $L^2(]a, b[)$. Cependant, si on sait que u est différentiable par rapport à la variable t , alors u est régulière par rapport aux deux variables (r, t) .*

2.4.2 Approximation par la méthode des différences finies

Le principe de la méthode des différences finies consiste à écrire l'équation aux dérivées partielles aux points de discrétisations (r_i, t_n) , puis à approcher l'opérateur différentiel par un quotient différentiel.

On en déduit un système d'inconnues discrètes sensées représenter des approximations de u aux points de discrétisation. Le problème (2.5) peut être discrétisé comme suit :

Considérons une grille uniforme sur le plan (r, t) avec

$$\begin{cases} r_i = a + ih, & i = \overline{0, N}, & h = (b - a)/N, \\ t_n = n\tau, & n = \overline{0, M}, & \tau = T/M. \end{cases}$$

Soit $u_i^n = u(r_i, t_n)$.

Pour discrétiser l'équation différentielle de la chaleur dans (2.5), on approche l'opérateur différentiel $\frac{\partial u}{\partial t}$ par le schéma d'Euler progressif suivant

$$\frac{u(r_i, t_{n+1}) - u(r_i, t_n)}{\tau}, \quad i = 1, \dots, N - 1, n = 0, \dots, M - 1.$$

On approche l'opérateur différentiel $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ par l'opérateur central d'ordre 2 :

$$\frac{u(r_{i+1}, t_n) - 2u(r_i, t_n) + u(r_{i-1}, t_n))}{h^2}, \quad i = 1, \dots, N - 1, n = 1, \dots, M.$$

Pour l'opérateur $\frac{\partial u}{\partial r}$ on utilise un schéma centré

$$\frac{u(r_{i+1}, t_n) - u(r_{i-1}, t_n))}{2h}, \quad i = 1, \dots, N - 1, n = 1, \dots, M.$$

Les u_i^n sont des inconnues discrètes, les valeurs $u(r_i, t_0)$, $u(r_0, t_n)$ et $u(r_N, t_n)$, sont connues, puisque elle sont données par les conditions aux limites dans (2.5).

Le système (2.5) est discrétisé par le schéma aux différences finies suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{1}{2r_i h}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \phantom{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} =} \phantom{\frac{1}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) +} \phantom{\frac{1}{2r_i h}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}, \quad n = 0, \dots, M-1, \\ \\ u_i^0 = 0, \quad i = 0, \dots, N, \\ \\ u_0^n = f_n, \quad u_N^n = u_{N-1}^n, \quad n = 0, \dots, M. \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Le schéma (2.32) est explicite, la solution u_i^{n+1} est facile à trouver :

$$u_i^{n+1} = R \left(1 + \frac{h}{2r_i} \right) u_{i+1}^n + (1 - 2R)u_i^n + R \left(1 - \frac{h}{2r_i} \right) u_{i-1}^n, \quad (2.33)$$

avec $R = \frac{\tau}{h^2}$.

On peut montrer le résultat suivant concernant la stabilité du schéma (2.32).

Théorème 2.4.3. 1. Le schéma aux différences finis (2.32) est consistant d'ordre $O(\tau + h)$.

2. Si les conditions

$$R = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \frac{h}{2r_i} \leq 1,$$

sont vérifiées, alors le schéma (2.32) est L^∞ -stable.

Preuve. 1) On suppose que la solution est assez régulière $C^{4,2}$ et utilisons le développement de Taylor.

Soit $u_i^n = u(r_i, t_n)$ la solution exacte en (r_i, t_n) .

On définit l'erreur de consistance R_i^n comme suit :

$$R_i^n = \widehat{R}_i^n + \overline{R}_i^n$$

avec \widehat{R}_i^n l'erreur de consistance en temps et \overline{R}_i^n l'erreur de consistance en espace.

L'erreur de consistance en temps est donnée par

$$\widehat{R}_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{\partial u}{\partial t}(r_i, t_n).$$

Un développement de Taylor en temps nous donne

$$u_i^{n+1} = u(r_i, t_n + \tau) = u_i^n + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r_i, t_n + \eta\tau), \quad 0 < \eta < 1, \quad (2.34)$$

d'où

$$\widehat{R}_i^n = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r_i, t_n + \eta\tau), \quad 0 < \eta < 1. \quad (2.35)$$

L'erreur de consistance en espace est donnée par

$$\overline{R}_i^n = \frac{1}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{1}{2r_i h}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r_i, t_n) - \frac{1}{r_i} \frac{\partial u}{\partial r}(r_i, t_n)$$

Un développement de Taylor en espace nous donne

$$u_{i+1}^n = u(r_i + h, t_n) = u_i^n + h \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_i^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)_i^n + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \right)_i^n + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}(r_i + \xi_1 h, t_n).$$

$$u_{i-1}^n = u(r_i - h, t_n) = u_i^n - h \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_i^n + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)_i^n - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \right)_i^n + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}(r_i + \xi_2 h, t_n).$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \frac{1}{2r_i h}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)_i^n + \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_i^n + \\ &+ \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}(r_i + \xi_3 h, t_n) + \frac{h^2}{6r_i} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}(r_i + \xi_4 h, t_n). \end{aligned}$$

d'où

$$\overline{R}_i^n = \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial r^4}(r_i + \xi_3 h, t_n) + \frac{h^2}{6r_i} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}(r_i + \xi_4 h, t_n), \quad (2.36)$$

avec $\xi_i \in]0, 1[$, $i = \overline{1, 4}$.

(2.35) et (2.36) montrent que $R_i^n = O(\tau + h^2)$. Au point r_N on utilise une discrét-

**CHAPITRE 2: MÉTHODE DE RÉGULARISATION POUR UN
PROBLÈME INVERSE DE CONDUCTION DE LA CHALEUR À
SYMÉTRIE RADIALE**

30

tisation centrée pour l'approximation de la condition de Neumann en introduisant un point fictif r_{N+1} situé en dehors de l'intervalle de définition, le schéma (2.33) est donc consistant d'ordre $O(\tau + h)$.

2) Cela peut être démontré de la même manière que dans [14].

Il est facile de voir que $R(1 + \frac{h}{2r_i}) \geq 0$ et il faut que $1 - 2R \geq 0$ et $R(1 - \frac{h}{2r_i}) \geq 0$, pour $i = 0, \dots, N$.

Si $R = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{h}{2r_i} \leq 1$, on peut voir de (2.33) que u_i^{n+1} est une combinaison convexe de $u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n$.

Soit $M^n = \max_{i=1, \dots, N} |u_i^n|$, alors on a

$$|u_i^{n+1}| \leq |R(1 - \frac{h}{2r_i})|M^n + |1 - 2R|M^n + |R(1 + \frac{h}{2r_i})|M^n,$$

alors on a $|u_i^{n+1}| \leq M^n$. En prenant le maximum, on déduit que $M^{n+1} \leq M^n$.

De la même façon, on pose $m^n = \min_{i=1, \dots, N} |u_i^n|$, alors

$$u_i^{n+1} \geq |R(1 - \frac{h}{2r_i})|m^n + |1 - 2R|m^n + |R(1 + \frac{h}{2r_i})|m^n,$$

et $|u_i^{n+1}| \geq m^n$. En prenant le minimum, on obtient $m^{n+1} \geq m^n$.

Par conséquent

$$\max_{i=1, \dots, N} |u_i^{n+1}| \leq \max_{i=1, \dots, N} |u_i^0|, \quad \text{et} \quad \min_{i=1, \dots, N} |u_i^{n+1}| \geq \min_{i=1, \dots, N} |u_i^0|,$$

ce qui établit la stabilité. ■

2.4.3 Tests Numériques

Dans cette partie on représentera numériquement la solution exacte et la solution approchée pour les exemples suivants :

Posons $a = 1$, $b = 2$ et $T = 3$.

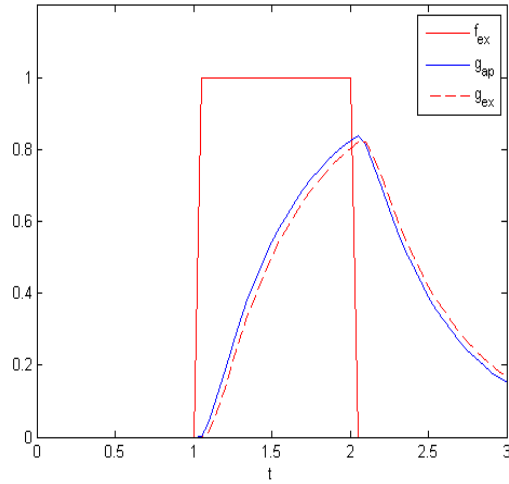


FIGURE 2.2 – Test 1. Comparaison entre la solution exacte $u(b, t)$ et la solution approchée du problème direct.

2.4.3.1 Test 1 :

Soit $u(a, t) = f(t) = \chi_{[1,2]}$, avec $\chi_{[1,2]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[1, 2]$.

2.4.3.2 Test 2 :

$$\text{Soit } f(t) = \begin{cases} 2(t-1), & 1 < t < 1.5 \\ 2(2-t), & 1.5 < t < 2 \\ 0, & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

Dans les figures 2.2 et 2.3 on appelle g_{ex} la solution donnée par la série tronquée (avec $N \leq 40$) et g_{app} la solution approchée calculée par la méthode des différences finies avec les paramètres $N = 30$ et $M = 12000$.

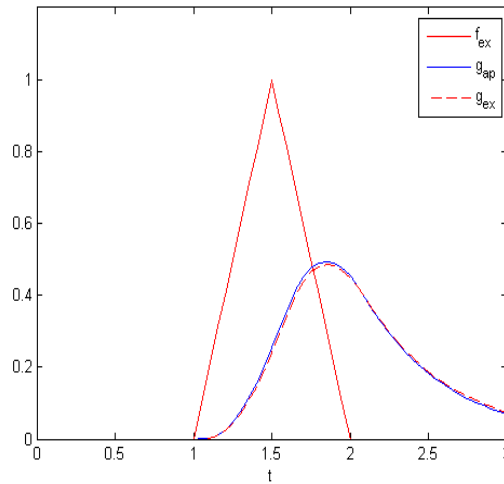


FIGURE 2.3 – Test 2. Comparaison entre la solution exacte $u(b, t)$ et la solution approchée du problème direct.

2.5 Problème inverse

Souvent les problèmes inverses ne vérifient pas l'une ou l'autre des trois conditions introduites par Hadamard, mais la problématique la plus importante est le manque de continuité, en particulier pour la résolution numérique.

Dans le but de construire une solution approchée stable d'un problème mal-posé, cela nécessite l'application des méthodes dites méthodes de régularisation. Pour notre problème on va utiliser la méthode de régularisation de Tikhonov.

2.5.1 L'équation intégrale

La fonction $u(b, t) = g(t)$ étant connue, alors la résolution du problème inverse (2.1)-(2.4) peut être réduite à la résolution de l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$Af(t) := \int_0^t k(t - \tau)f(\tau)d\tau = g(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.37)$$

avec le noyau

$$k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{W(b, s_n)}{W'(a, s_n)} e^{s_n t}.$$

La fonction $k(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ satisfaisant :

- $k(0) = 0$,
- $|k(t)| \leq C_1 e^{-C_2 t}$, où C_1, C_2 deux constantes, pour $t \geq 1$ et $k \in C^\infty([0, +\infty[)$.

Alors $A \in \mathcal{L}(H)$, $H = L^2([0, T])$.

$\mathcal{R}(A)$ est non fermé dans H (A est compact et non dégénéré). Cela veut dire que l'équation (2.37) est mal-posée.

Le problème est, de plus, sévèrement mal-posé puisque toutes les dérivées du noyau $k(t)$ tendent vers zéro d'après le lemme 2.4.3 (ii) (voir aussi [18]).

Donc, une sorte de procédure de régularisation est nécessaire pour résoudre le problème dans le cas d'une donnée perturbée g^δ ($\|g - g^\delta\| \leq \delta$, δ : niveau de bruit, (paramètre de perturbation)).

Pour la résolution numérique de l'équation (2.37), on approche le noyau k par la série tronquée

$$k_N(t) = \sum_{n=1}^N \beta_n \frac{W(b, s_n)}{W'(a, s_n)} e^{s_n t}. \quad (2.38)$$

Remarque 2.5.1. *L'erreur de troncature (le reste $R_N = k - k_N$ de la série) est estimée par :*

$$\begin{aligned} |R_N(t)| &\leq C_1 \sum_{n \geq N} n e^{-C_2 n^2 t} \\ &\leq C_1 \sum_{n \geq N} n e^{-C_2 n \epsilon} \\ &\leq \frac{C_1 N e^{-C_2 \epsilon N}}{(1 - e^{-C_2 \epsilon})^2}, \quad \text{pour } Nt \geq \epsilon, \end{aligned} \quad (2.39)$$

avec $C_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}(\lambda - 1)^2}$, $C_2 = \left(\frac{\pi}{\lambda - 1}\right)^2$. Ce qui signifie que pour t proche de 0, nous devons calculer plus de termes dans la série.

Pour le calcul on choisit $N = 40$ pour $\tau < t \leq 0.1$, $N = 20$ pour $0.1 \leq t \leq 1$ et

**CHAPITRE 2: MÉTHODE DE RÉGULARISATION POUR UN
PROBLÈME INVERSE DE CONDUCTION DE LA CHALEUR À
SYMÉTRIE RADIALE**

34

$N = 10$ pour $t \geq 1$. Pour $0 \leq t \leq \tau$ on peut prendre $k(t) = 0$, puisque on connaît de (2.20) que $k(b, t)$ est proche de zéro lorsque $t \rightarrow 0$ (voir figure 2.4).

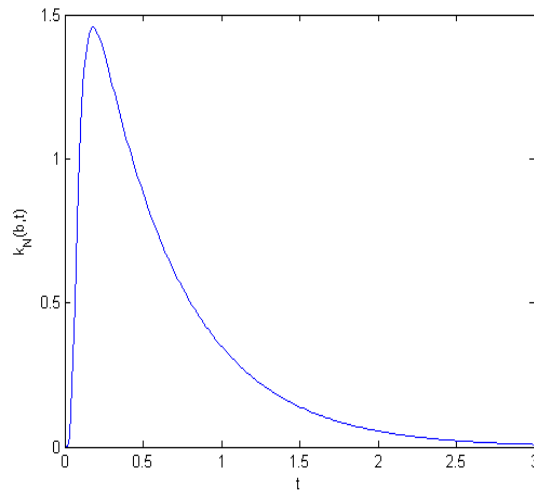


FIGURE 2.4 – Le noyau de la chaleur k .

Le paramètre $\tau = \frac{T}{M}$ est le pas du temps (on suppose que $\tau \geq \frac{\epsilon}{N}$).

On note par A_N l'opérateur avec le noyau k_N .

Proposition 2.5.1. A_N converge vers A dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(X)$, $X = C[0, T]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Preuve. En utilisant la formule asymptotique (2.27) avec $r = b$, on peut écrire

$$R_N(t) = \sum_{n \geq N} \left((-1)^n \frac{\beta_n}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)} + \gamma_n \right) e^{-\beta_n^2 t},$$

avec γ_n bornée, alors

$$|R_N(t)| \leq C_3 \beta_N e^{-\beta_N^2 t} + C_4 \sum_{n \geq N} e^{-\beta_n^2 t}, \quad C_4 = \sup |\gamma_n|.$$

En utilisant (2.39) avec $\epsilon = 1$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_0^T |R_N(t)| dt &= \int_0^{1/N} |R_N(t)| dt + \int_{1/N}^T |R_N(t)| dt \\ &\leq C_3 \int_0^{1/N} \beta_N e^{-\beta_N^2 t} dt + O(Ne^{-C_2 N}) = O(1/\beta_N), \end{aligned}$$

qui conduit à

$$\forall t \in [0, T], \quad |(A - A_N)f(t)| \leq \|f\|_\infty \int_0^T |R_N(t)| dt,$$

et $\|A - A_N\|_{\mathcal{L}(X)} = O(1/N)$. ■

2.5.2 Régularisation de Tikhonov

l'équation approchée $A_N f = g$ est résolue par la méthode de régularisation de Tikhonov. Rappelons le principe de la méthode.

On suppose que $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur compact dans un espace de Hilbert, injectif et à image dense. L'équation $Af = g$ est mal posée i.e., $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \rightarrow H$ est non borné (une petite erreur dans la donnée g génère une importante perturbation dans la solution calculée f).

La méthode de régularisation de Tikhonov consiste à résoudre l'équation normale

$$(A^*A + \alpha I)f^\alpha = A^*g, \quad (2.40)$$

où $\alpha > 0$ est le paramètre de régularisation, I est l'opérateur d'identité.

De manière équivalente f^α est l'unique minimum de la fonctionnelle de Tikhonov

$$J^\alpha[f] = \|Af - g\|_H^2 + \alpha \|f\|_H^2.$$

La solution f^α peut être écrite comme suit

$$f^\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1} A^*g,$$

et qui peut être présentée en terme de système singulier $(\mu_j, u_j, v_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ comme

$$f^\alpha := R_\alpha g = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j} (g, v_j) u_j.$$

avec $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \alpha}$.

A présent soit $g \in \mathcal{R}(A)$ et $g^\delta \in H$ des données mesurées avec $\|g - g^\delta\|_H \leq \delta$.

On définit

$$f^{\alpha, \delta} = R_\alpha g^\delta,$$

a posteriori, le paramètre α est choisi par le principe de Morosov qui permet le choix de α (solution de l'équation $\|A f^{\alpha, \delta} - g^\delta\|_H = \delta$).

La théorie de la régularisation de Tikhonov standard (voir [16], Théorème 2.17) montre la convergence de $f^{\alpha, \delta} \rightarrow f$ dans H lorsque $\delta \rightarrow 0$ avec la stratégie $\alpha = \alpha(\delta)$.

Pour d'autre méthode on cite les articles ([19], [18]) qui donnent un aperçu sur la méthode de régularisation pour les équations de Volterra de première espèce.

2.6 Tests Numériques

Dans cette partie on va tester numériquement l'efficacité de la méthode pour les mêmes exemples 1 et 2.

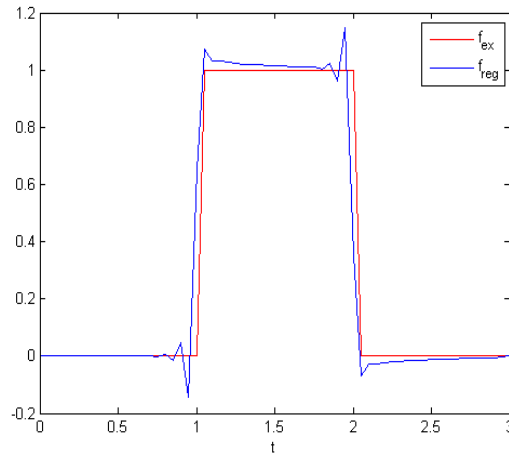


FIGURE 2.5 – Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0$, $N = 40$ et $T = 3$.

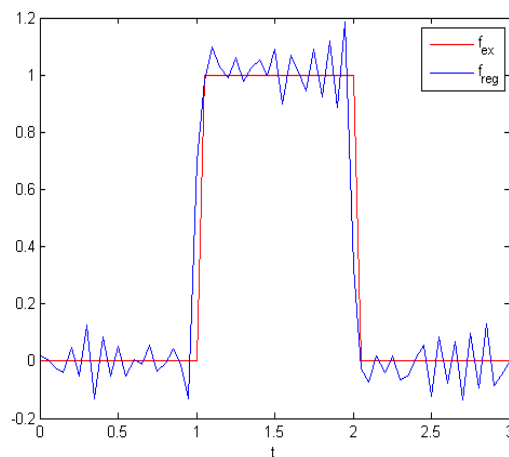


FIGURE 2.6 – Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.001$, $N = 40$ et $T = 3$.

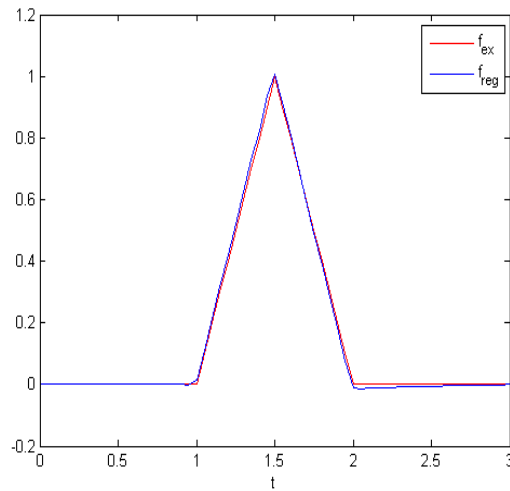


FIGURE 2.7 – Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0$, $N = 50$ et $T = 3$.

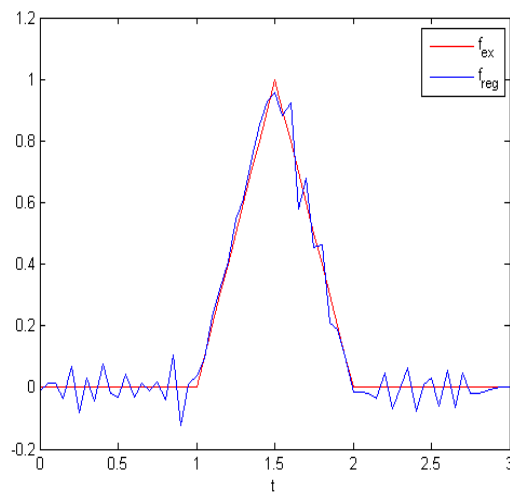


FIGURE 2.8 – Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.001$, $N = 50$ et $T = 3$.

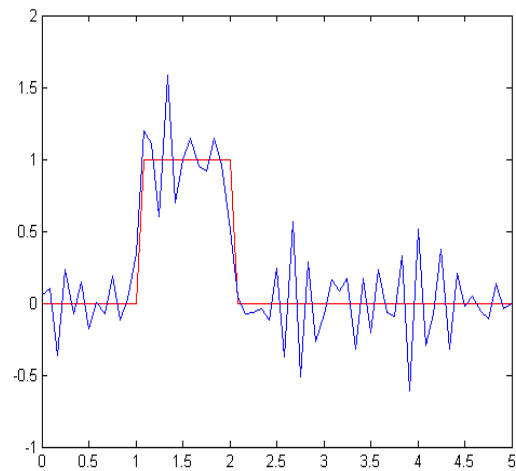


FIGURE 2.9 – Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.01$, $N = 30$ et $T = 5$ (sans mollification).

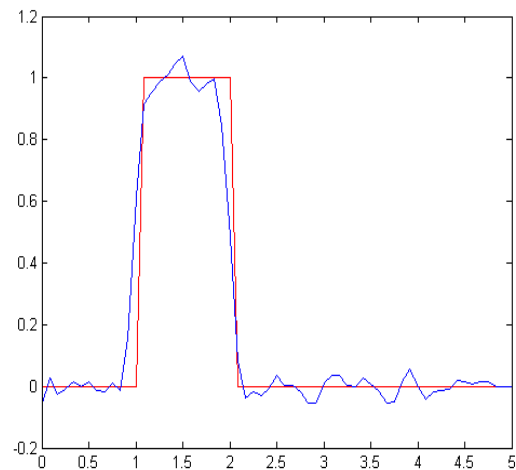


FIGURE 2.10 – Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.01$, $N = 30$ et $T = 5$ (avec mollification, $\nu = 0.1$).

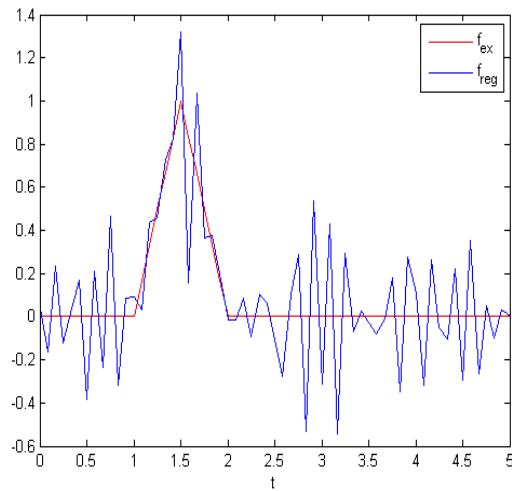


FIGURE 2.11 – Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.01, N = 30$ et $T = 5$ (sans mollification).

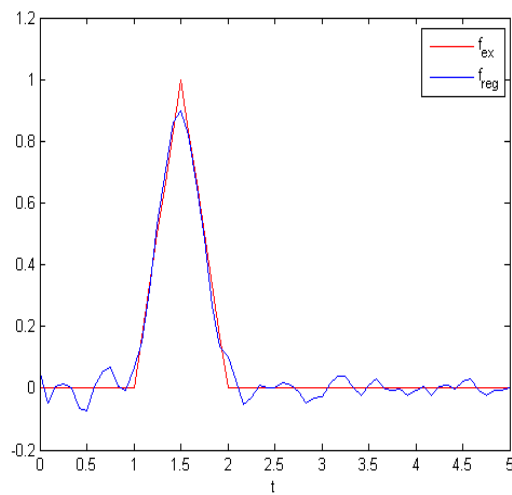


FIGURE 2.12 – Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.01, N = 30$ et $T = 5$ (avec mollification, $\nu = 0.1$).

Remarques

Les résultats numériques donnés par les figures 2.5, 2.6, 2.7, et 2.8 confirment la stabilité de la méthode lorsque le bruit $\delta < 0.01$. Cependant N doit être suffisamment grand (ici $N \geq 30$) pour assurer la convergence de l'algorithme de Tikhonov. Les oscillations sont dues au fait que le problème est sévèrement mal-posé.

La figure 2.11 montre que pour $\delta = 0.01$, les oscillations augmentent ce qui exige une nouvelle régularisation. En effet, si on utilise la méthode de mollification, les oscillations sont amortis (voir figure 2.12).

L'opération consiste à utiliser la convolution $g_\nu = \rho_\nu * g$ avec

$$\rho_\nu(t) = \frac{1}{\nu\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{\nu^2}\right) \quad (2.41)$$

où $\nu \rightarrow 0$ est le rayon de mollification. Si g est proche des extrémités de l'intervalle $[0, T]$, alors g_ν est une fonction lisse et est une bonne approximation de g , ce fait est réalisé si le temps T est assez grand (en pratique, on prend $T = 2T_0$ si $\text{supp } f \subset [0, T_0]$). Avec l'existence du bruit, d'après l'analyse dans [21], on choisit $\nu = c\sqrt{\delta}$ avec $c = 1$ estimée par le test.

CHAPITRE 2: MÉTHODE DE RÉGULARISATION POUR UN
PROBLÈME INVERSE DE CONDUCTION DE LA CHALEUR À
SYMÉTRIE RADIALE

Identification de la température de surface extérieure à partir de mesure intérieure donnée

Dans ce chapitre on va considérer un autre problème inverse axisymétrique pour l'équation de la chaleur dans un cylindre $0 \leq r \leq b$.

Notre objectif est de reconstruire la température $f(t) = u(b, t)$ en $r = b$ à partir de la température mesurée $g^\delta(t)$ au point intérieur $0 < r_1 < b$.

3.1 Position du problème

Notre but est d'étudier un problème inverse de conduction de la chaleur axisymétrique en utilisant la méthode de transformée de Laplace. Le modèle mathématique peut être décrit comme suit :

Trouver la température $u(r, t)$ à l'intérieur du disque

$D(0, b) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, r^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq b^2\}$, tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, & r \in (0, b), \quad t \geq 0, \\ u(r, t) \text{ est bornée pour } r \rightarrow 0, & t \geq 0, \\ u(r_1, t) = g(t), & 0 < r_1 < b, \\ u(r, 0) = 0, & r \in [0, b]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Où r est la coordonnée radiale.

On cherche à déterminer la condition aux limites suivante :

$$f(t) = u(b, t), \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

à partir de la température $g^\delta(t)$ avec $\|g - g^\delta\| \leq \delta$, δ est le bruit. Ce problème est sévèrement mal-posé, dans le sens où si la solution existe, elle ne dépend pas continûment de la donnée g . En effet une petite perturbation dans la donnée peut causer une grande erreur dans la solution $u(., t)$.

3.2 Problème direct

On suppose que $u(b, t) = f(t)$ est connue et on considère le problème direct suivant :

Trouver la température $u(r, t)$ à l'intérieur du disque, tel que

$D(0, b) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, r^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq b^2\}$, et

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, & r \in]0, b[, \quad t \geq 0 \\ u(r, t) \text{ est bornée pour } r \rightarrow 0, & t \geq 0 \\ u(b, t) = f(t) \\ u(r, 0) = 0, & r \in [0, b] \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2.1 Unicité de la solution

Théorème 3.2.1. *Le problème (3.3) admet au plus une solution dans l'espace*

$$\mathcal{H} = C^0([0, +\infty[, H^2(0, b; r dr)) \cap C^1(]0, +\infty[, L^2(0, b; r dr)).$$

Preuve. L'unicité de la solution du problème (3.3) a été démontrée dans le chapitre 2 (Théorème 2.4.1). ■

3.2.2 Représentation de la solution

Pour résoudre le problème direct (3.3), on va appliquer la transformée de Laplace par rapport à la variable t .

La transformée de Laplace $F(s) = \mathcal{L}f(s)$ de $f(t)$ est définie par

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(s) > \sigma.$$

On suppose que f est une fonction continue par morceaux de type exponentielle à l'infini (Voir Définition 1.6.4).

Soit $U(r, s) = \mathcal{L}u(r, \cdot)$ et $F(s) = \mathcal{L}f(t)$.

Le problème (3.3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} U'' + \frac{1}{r}U' - sU = 0, \quad r \in (0, b), \\ U(b, s) = F(s), \\ U(r, s) \text{ bornée pour } r \rightarrow 0, \quad t \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

où $U' = \frac{\partial U}{\partial r}$.

L'équation dans (3.4) est une équation différentielle de Bessel modifiée dont la solution générale est donnée par

$$U(r, s) = C_0 I_0(\sqrt{sr}) + C_1 K_0(\sqrt{sr}). \quad (3.5)$$

D'après les conditions aux limites on a

$$u(r_1, s) = C_0 I_0(\sqrt{s}r_1) + C_1 K_0(\sqrt{s}r_1) = F(s),$$

avec $u(r, s)$ est bornée lorsque $r \rightarrow 0$, d'où $C_1 = 0$.

Alors

$$C_0 = \frac{F(s)}{I_0(b\sqrt{s})}.$$

La solution du problème (3.4) est comme suit

$$U(r, s) = F(s) \frac{I_0(r\sqrt{s})}{I_0(b\sqrt{s})}, \quad (3.6)$$

où I_0, K_0 sont les fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce respectivement.

En utilisant les propriétés des fonctions de Bessel (Annexe A), la solution sera présentée comme suit

$$U(r, s) = F(s) \frac{J_0(ir\sqrt{s})}{J_0(ib\sqrt{s})}. \quad (3.7)$$

La fonction $J_0(ib\sqrt{s})$ possède une suite de racines simples s_n telle que

$$s_n = -i \frac{\alpha_n}{b},$$

où $\alpha_n \simeq (n + \frac{3}{4})\pi$, $n \rightarrow +\infty$. En appliquant la transformée de Laplace inverse et le théorème de convolution [9], on obtient :

$$u(r, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b^2} \frac{J_0(\alpha_n \frac{r}{b})}{J_1(\alpha_n)} e^{s_n t} \int_0^t f(\tau) e^{-s_n \tau} d\tau, \quad (s_n = -(\frac{\alpha_n}{b})^2). \quad (3.8)$$

Proposition 3.2.1. *Supposons que $f(t) \in C^1([0, +\infty[)$ telle que $f(0) = 0$ et $f(t) = 0$ pour $t \geq T$. Alors la série (3.8) définit une solution u dans \mathcal{H} .*

Preuve. On utilise les même arguments que dans (chapitre 2, Théorème 2.4.2). ■

3.2.3 Approximation de la solution par la méthode des différences finies

Dans ce paragraphe on veut approcher le problème (3.3) par la méthode des différences finies [14] avec un schéma implicite.

Afin de surmonter la singularité en $r = 0$, on utilise le changement de variable $r = 2\sqrt{x}$.

On pose $v(x, t) = u(2\sqrt{x}, t)$, on aura :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{r}{2} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial x}{\partial r} = x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Le problème direct devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad x \in [0, b_1], \quad t \geq 0, \quad (b_1 = b^2/4) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ v(b_1, t) = f(t), \\ v(x, 0) = 0, \quad x \in [0, b_1], \end{array} \right. \quad (3.9)$$

La condition de Neumann homogène en $x = 0$ découle d'un argument de symétrie.

Discrétisation :

Avec les notations suivantes : k pas du temps, h pas de l'espace, $T = Mk$, $b = Nh$, $t_n = nk$, $x_i = ih$ et $v_i^n = v(x_i, t_n)$, on propose le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{k} = \frac{x_i}{h^2}(v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}) + \frac{1}{2h}(v_{i+1}^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ v_i^0 = 0, \\ v_N^n = f_n, \quad v_1^n = v_0^n, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} n = 1, \dots, M \\ i = 0, \dots, N, \\ n = 0, \dots, M. \end{array} \quad (3.10)$$

Le schéma est implicite, en effet, on a :

$$\left(\frac{1}{2}\beta - Rx_i\right)v_{i-1}^{n+1} + (1 - 2Rx_i)v_i^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\beta + Rx_i\right)v_{i+1}^{n+1} = v_i^n, \quad (3.11)$$

avec $R = \frac{k}{h^2}$, $\beta = \frac{k}{h}$.

Théorème 3.2.2. 1. *Le schéma (3.10) est inconditionnellement stable.*
 2. *Le schéma (3.10) est consistant d'ordre $O(k + h)$.*

Preuve. On suppose que la solution est assez régulière ($C^{4,2}$).

Soit $u_i^n = u(r_i, t_n)$ la solution exacte en (r_i, t_n) , et soit $R_i^n = \widehat{R}_i^n + \overline{R}_i^n$ l'erreur de consistance (Voir la preuve du Théorème 2.4.3).

L'erreur de consistance en temps est donnée par

$$\widehat{R}_i^n = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{k} - \frac{\partial v}{\partial t}(x_i, t_n).$$

En utilisant le développement de Taylor en temps donné par (2.34) on aura

$$\widehat{R}_i^n = \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t}(r_i, t_n + \eta\tau), \quad 0 < \eta < 1. \quad (3.12)$$

L'erreur de consistance en espace est donnée par

$$\overline{R}_i^n = \frac{x_i}{h^2}(v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}) + \frac{1}{h}(v_{i+1}^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}) - x_i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, t_n) - \frac{\partial v}{\partial x}(x_i, t_n).$$

Un développement de Taylor en espace nous donne

$$v_{i+1}^{n+1} = v_i^{n+1} + h \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_i^{n+1} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_i^{n+1} + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right)_i^{n+1} + \dots$$

$$v_{i-1}^{n+1} = v_i^{n+1} - h \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^{n+1} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)_i^{n+1} + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right)_i^{n+1} (x_i + \xi_2 h, t_{n+1}),$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^n + k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^n + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^n (x_i, t_n + \eta_1 k),$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_i^n + k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_i^n + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_i^n (x_i, t_n + \eta_2 k),$$

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)_i^n + k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)_i^n + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)_i^n (x_i, t_n + \eta_3 k),$$

avec $\eta_i \in]0, 1[$, $i = \overline{1, 3}$.

Ce qui donne

$$\overline{R}_i^n = x_i k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_i^n + x_i R_1 + k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_i^n + R_2 + \frac{h^2}{3!} k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)_i^n + R_3, \quad (3.13)$$

avec $|R_1| \leq C(h^2 + k^2)$, $|R_2| \leq Ck^2$ et $|R_3| \leq Ch^2k^2$.

Les relations (3.12) et (3.13) montrent que l'erreur de consistance du schéma est d'ordre un en temps et d'ordre deux en espace. En utilisant une discrétisation centrée pour la condition de Neumann au point x_0 en introduisant un point fictif x_{-1} , l'erreur de consistance du schéma (3.10) est donnée par $R_i^n = O(k + h)$. ■

3.3 Exemples numériques

Remarques

On calcul $g(t) = u(r_1, t)$, ($r_1 < b$) par deux méthodes.

Dans la Figure 3.1 et la figure 3.2, g_{ex} est la solution donnée par (3.8) avec une série tronquée et g_{ap} est la solution approchée par le schéma des différences finies implicite avec $N = 40$ points dans l'intervalle $[0, b]$ avec $b = 2$ et $M = 70$ points dans $[0, T]$.

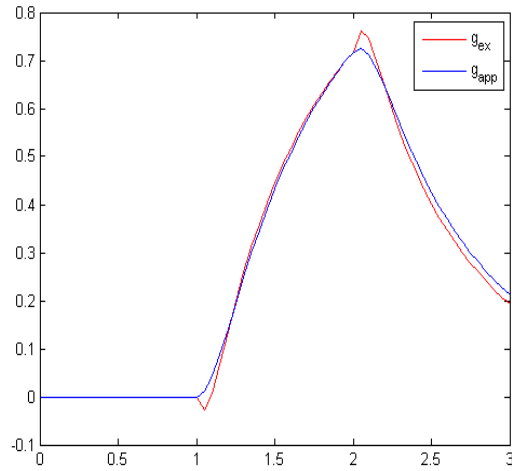


FIGURE 3.1 – Test 1 . Comparaison entre la solution exacte $u(r_1, t) = g(t)$ et la solution approchée du problème direct avec $N = 40$ et $T = 3$.

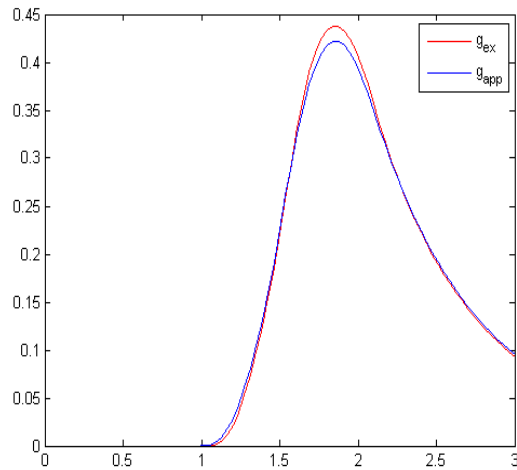


FIGURE 3.2 – Test 2 . Comparaison entre la solution exacte $u(r_1, t) = g(t)$ et la solution approchée du problème direct avec $N = 40$ et $T = 3$.

3.4 La résolution du problème inverse

La fonction $u(r_1, t) = g(t)$ est connue, la résolution du problème inverse (3.1) se réduit à la résolution de l'équation intégrale de Volterra de première espèce suivante :

$$Af(t) := \int_0^t k(t - \tau)f(\tau)d\tau = g(t), \quad (3.14)$$

avec le noyau

$$k(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b^2} \frac{J_0(\alpha_n \frac{r_1}{b})}{J_1(\alpha_n)} e^{s_n t}. \quad (3.15)$$

Pour la résolution numérique de l'équation (3.14), on approche le noyau k par la série tronquée

$$k_N(t) = 2 \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{b^2} \frac{J_0(\alpha_n \frac{r_1}{b})}{J_1(\alpha_n)} e^{s_n t}. \quad (3.16)$$

L'équation approchée $A_N f = g$ est résolue par la méthode de régularisation de Tikhonov.

3.5 Tests Numériques

On considère les exemples suivants :

Test 1 :

Soit $f(t) = \chi_{[1,2]}(t)$. La donnée exacte g est calculée par la méthode des différences finies, la donnée perturbée g^δ est une donnée perturbée.

Test 2 :

On considère l'exemple donné par :

$$f(t) = \begin{cases} 2(t - 1), & 1 < t < 1.5 \\ 2(2 - t), & 1.5 < t < 2 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

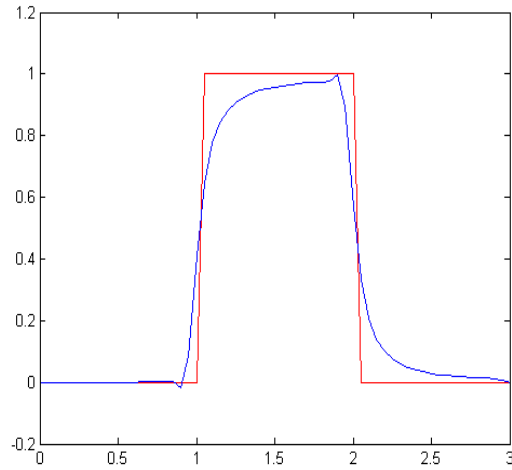


FIGURE 3.3 – Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0$, $N = 40$ et $T = 3$.

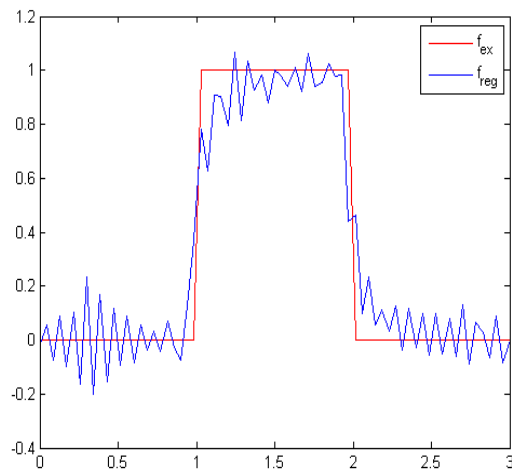


FIGURE 3.4 – Test 1. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.001$, $N = 40$ et $T = 3$.

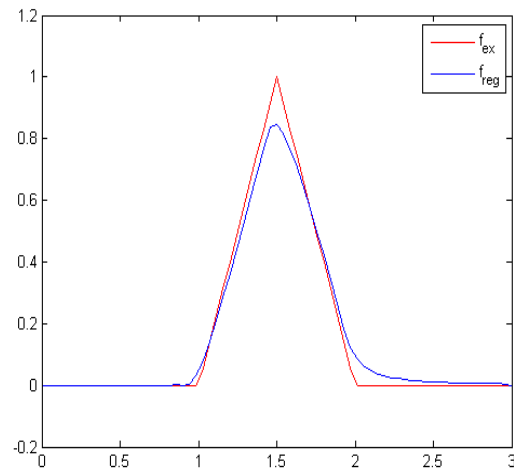


FIGURE 3.5 – Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0$, $N = 40$ et $T = 3$.

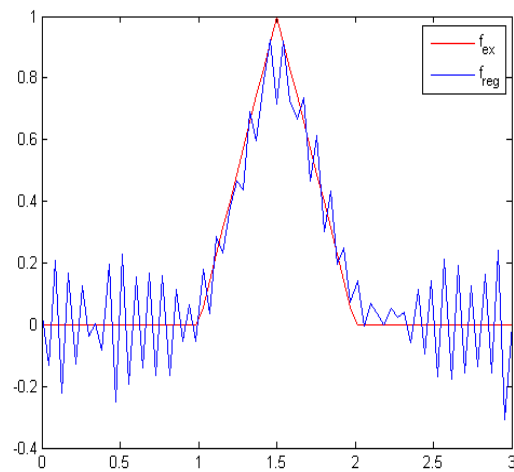


FIGURE 3.6 – Test 2. Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0.001$, $N = 40$ et $T = 3$.

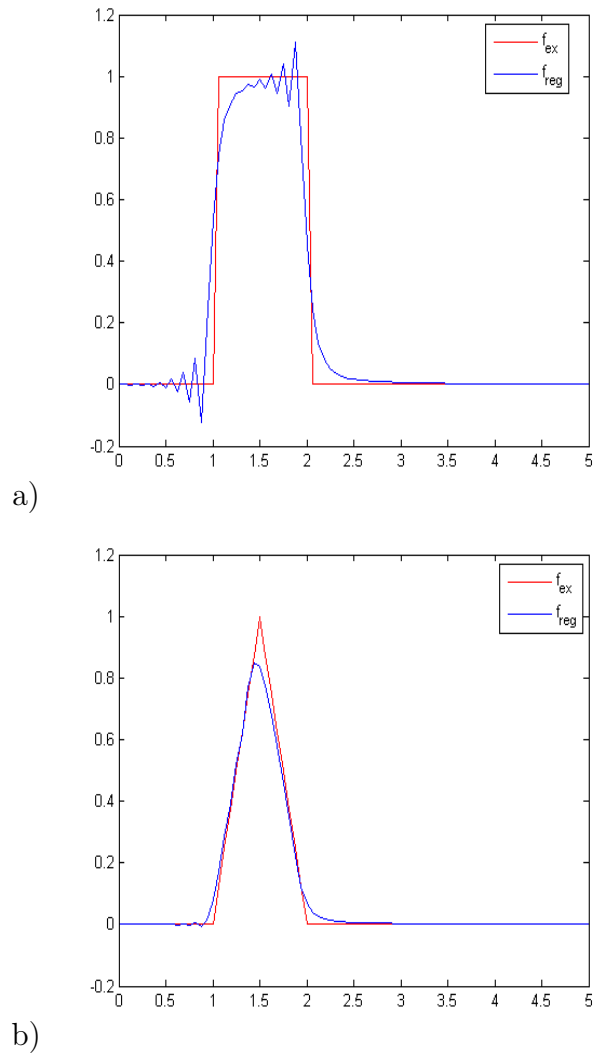


FIGURE 3.7 – Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec $\delta = 0$, $N = M = 80$, $r_1 = 1$, $T = 5$. a) Test 1, b) Test 2

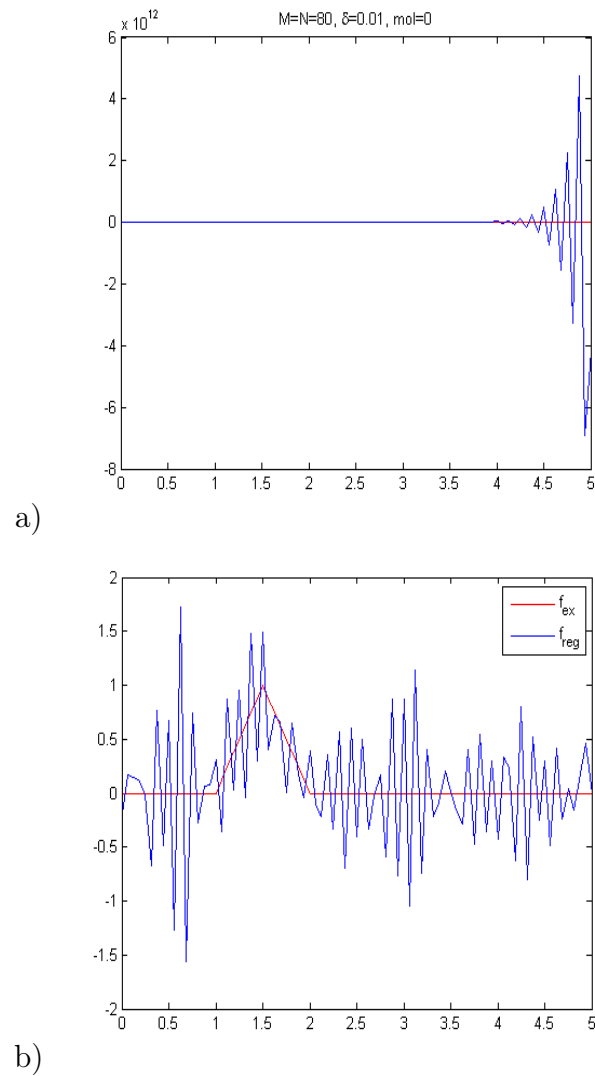


FIGURE 3.8 – Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec un bruit $\delta = 0.01$, $N = M = 80$, $r_1 = 1$, $T = 5$, sans mollification. a) Test 1, b) Test 2.

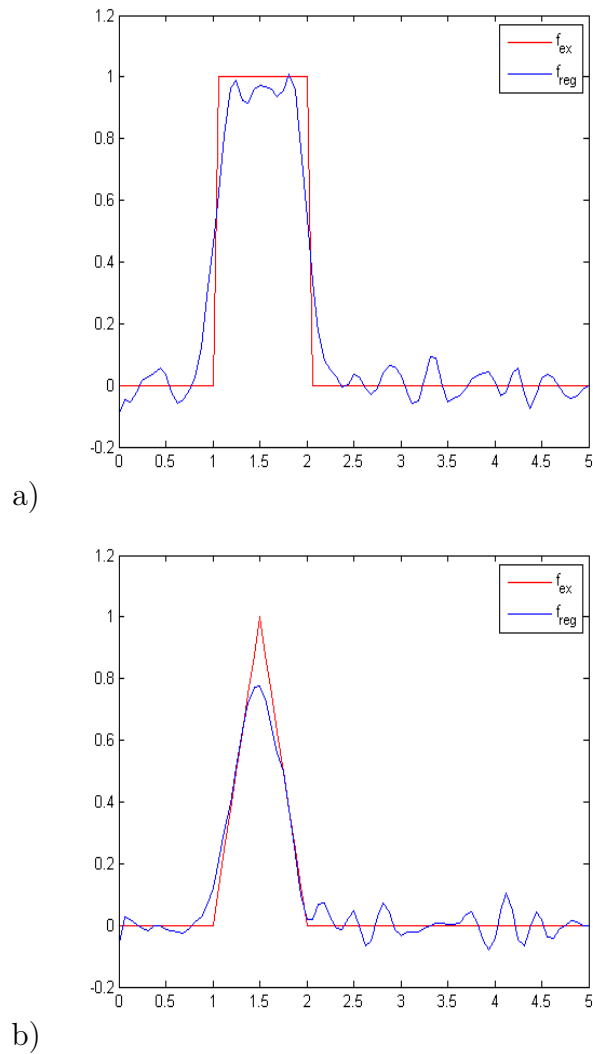


FIGURE 3.9 – Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec un bruit $\delta = 0.01$, $N = M = 80$, $r_1 = 1$, avec mollification ($\nu = 0.1$). a) Test 1, b) Test 2.

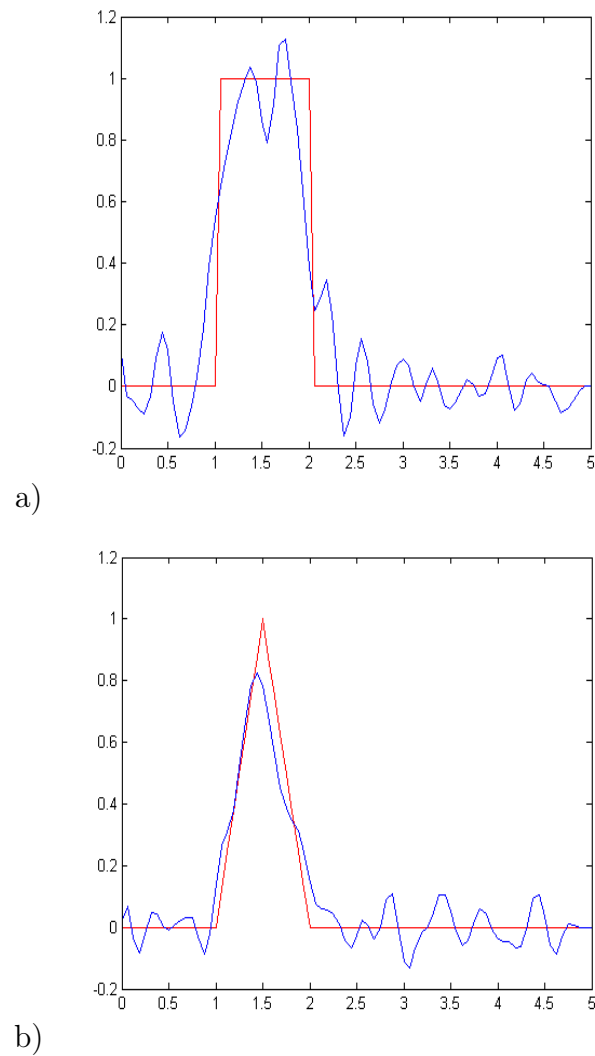


FIGURE 3.10 – Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec mollification $\nu = 0.1$, $r_1 = 0.4$. a) Test 1, b) Test 2.

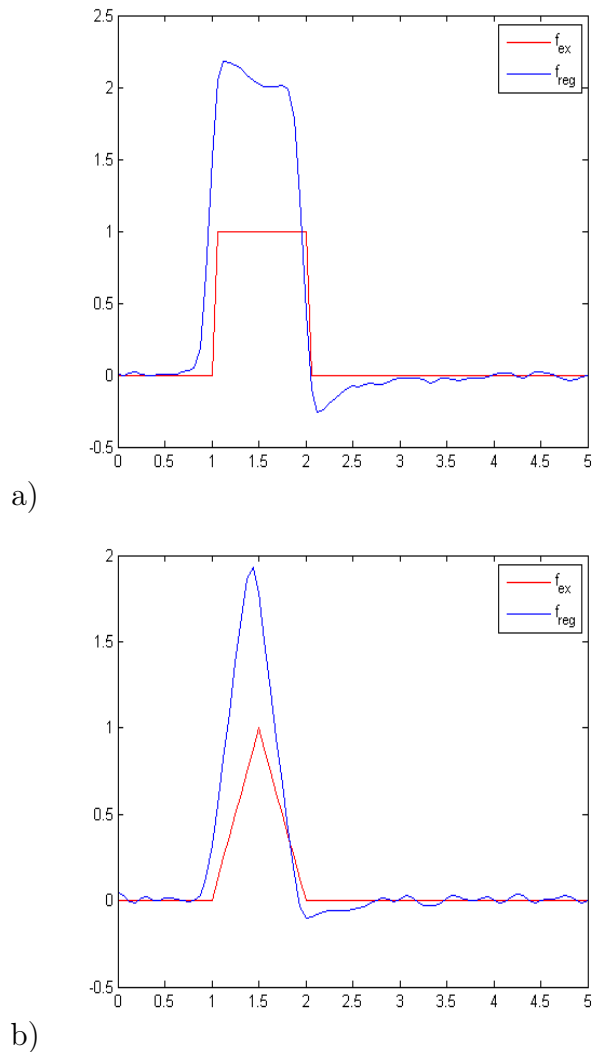


FIGURE 3.11 – Comparaison entre la solution exacte et la solution régularisée du problème inverse avec mollification $\nu = 0.1$, $r_1 = 1.8$. a) Test 1, b) Test 2.

Discussion. Dans les figures 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6, pour une fonction donnée $g(t) = u(r_1, t)$, on applique le schéma de différences finies.

On distingue deux types de résultats.

- Donnée exacte ($\delta = 0$). Figure 3.7 confirme l'efficacité de l'algorithme.
- Donnée perturbée ($\delta = 0.01$). Figure 3.8 montre que l'algorithme diverge (a) ou les oscillations sont amplifiées dans (b). Dans ce cas un pré-traitement est

utile. Pour cela on utilise la méthode de mollification [21] qui consiste à filtrer la donnée g^δ par la convolution $g_\nu^\delta = \rho_\nu * g^\delta$ avec le noyau donné par (2.41) où $\nu \rightarrow 0$ est le rayon de mollification. On prend $\nu = c\sqrt{\delta}$ avec une constante c choisie par les tests. Figures 3.9 montrent que les oscillations sont amorties. Pour $r_1 = 0.4$ (r_1 proche des extrémités de l'intervalle $[0, b]$), la reconstruction est moins bonne comme le montre la figure 3.10, la reconstruction est également détériorée pour $r_1 = 1.8$ (proche de $r = b$), figure 3.11.

**CHAPITRE 3: IDENTIFICATION DE LA TEMPÉRATURE DE
SURFACE EXTÉRIEURE À PARTIR DE MESURE INTÉRIEURE
DONNÉE**

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, on a traité deux problèmes inverses de conduction de la chaleur à variable radiale (dans un domaine cylindrique).

Concernant le premier problème on a déterminé la température $u(a, t)$ sur la surface intérieure à partir de la donnée $u(b, t)$ (la température sur la surface extérieure). Pour cela on a étudié d'abord le problème direct. On a construit la solution du problème en se basant sur la transformée de Laplace directe et inverse, ensuite on a utilisé la méthode des différences finies avec un schéma explicite pour la résolution numérique du problème.

Le problème inverse s'est réduit en une équation intégrale de Volterra de première espèce avec un noyau très régulier.

La méthode de régularisation de Tikhonov a été appliquée pour résoudre numériquement cette équation pour les données perturbées.

Les résultats numériques montrent que la méthode est efficace lorsque le bruit $\delta = 0.001$. Si $\delta = 0.01$, alors la procédure de mollification est appliquée (après la régularisation) pour la donnée g^δ , mais avec le temps T assez grand.

Pour le deuxième problème on a déterminé la température de surface extérieure $u(b, t)$ à partir d'une température mesurée sur une région intérieure $0 < r_1 < b$. Pour cela on a suivi la même procédure.

Pour la résolution numérique du problème direct on a utilisé la méthode des différences finies avec un schéma implicite. Pour la décomposition singulière et l'algorithme de Tikhonov-Morosov, on a utilisé le package Matlab développé par Hansen [13] avec un bruit discret $g^\delta = g + \delta \text{randn}(\text{size}(g))$.

Comme perspectives on peut considérer les problèmes (IHCP) suivants :

**CHAPITRE 3: IDENTIFICATION DE LA TEMPÉRATURE DE
SURFACE EXTÉRIEURE À PARTIR DE MESURE INTÉRIEURE
DONNÉE**

62

- La généralisation de notre travail en dimension 2 (cas non axi-symétrique).
- Identification de paramètre $k(x)$ dans une équation parabolique en dimension 1 de type :

$$u_t - (ku')' = f(x, t),$$

avec $u' = \frac{du}{dx}$.

- Identification de source f dans un problème parabolique semi-linéaire en dimension 1

$$u_t - u_{xx} = f(u).$$



Rappel sur les fonctions de Bessel

On rencontre les équations différentielles de Bessel dans de nombreux problèmes de physique, particulièrement ceux présentant une symétrie cylindrique.

Dans cet annexe, nous donnons un bref aperçu sur les fonctions de Bessel et de Bessel modifiées, ainsi que leurs principales propriétés (voir [1]).

On désigne par $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, un nombre complexe quelconque.

On note que pour un argument entier, on a la relation

$$\Gamma(n + 1) = 1.2.3\dots(n - 1).n = n!$$

A.0.1 Les fonctions de Bessel J_ν et Y_ν

L'équation différentielle ordinaire de second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} + b^2y = 0 \tag{A.1}$$

est dite **équation différentielle de Bessel**, elle admet pour solution la fonction de Bessel d'ordre ν de première espèce, notée J_ν et la fonction de Bessel d'ordre ν de deuxième espèce, notée Y_ν .

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$y(x) = x^\nu [a_0 J_\nu(bx) + a_1 Y_\nu(bx)], \quad (\text{A.2})$$

avec $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$, $\nu = \frac{1-a}{2}$,.

Pour un nombre réelle ν , J_ν et Y_ν peuvent être représentées comme suit

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n + \nu + 1)n!},$$

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

A.0.2 Les fonctions de Bessel modifiées I_ν et K_ν

L'équation différentielle ordinaire de second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} - b^2y = 0 \quad (\text{A.3})$$

est dite **équation différentielle de Bessel modifiée**, elle admet pour solution la fonction de Bessel d'ordre ν de première espèce modifiée, notée I_ν et la fonction de Bessel d'ordre ν de deuxième espèce modifiée, K_ν .

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$y(x) = x^\nu [a_0 I_\nu(bx) + a_1 K_\nu(bx)], \quad (\text{A.4})$$

avec $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$, $\nu = \frac{1-a}{2}$,.

Pour un nombre réel ν , I_ν et K_ν peuvent être représentées comme suit

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n + \nu + 1)n!},$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} (I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)).$$

A.1 Propriétés

- $J_{-n} = (-1)^{-n} J_n$,
- $Y_{-n} = (-1)^{-n} Y_n$,
- $I_{-n} = I_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- $K_{-\nu} = K_\nu$, pour $\nu \in \mathbb{R}$,
- $K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [J_n(ix) + iY_n(ix)]$,
- $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$.

A.2 Relations de dérivation

Les relations de récurrence et de dérivation suivantes sont valides, pour une fonction spéciale Z représentant l'une des fonctions I, Y, J .

$$\frac{d}{dx}(Z_\nu(mx)) = mZ_{\nu-1}(mx) - \frac{\nu}{x}Z_\nu(mx). \quad (\text{A.5})$$

Les relations de récurrence et de dérivation suivantes sont valides, pour une fonction spéciale Z représentant la fonction K .

$$\frac{d}{dx}(Z_\nu(mx)) = -mZ_{\nu-1}(mx) - \frac{\nu}{x}Z_\nu(mx). \quad (\text{A.6})$$

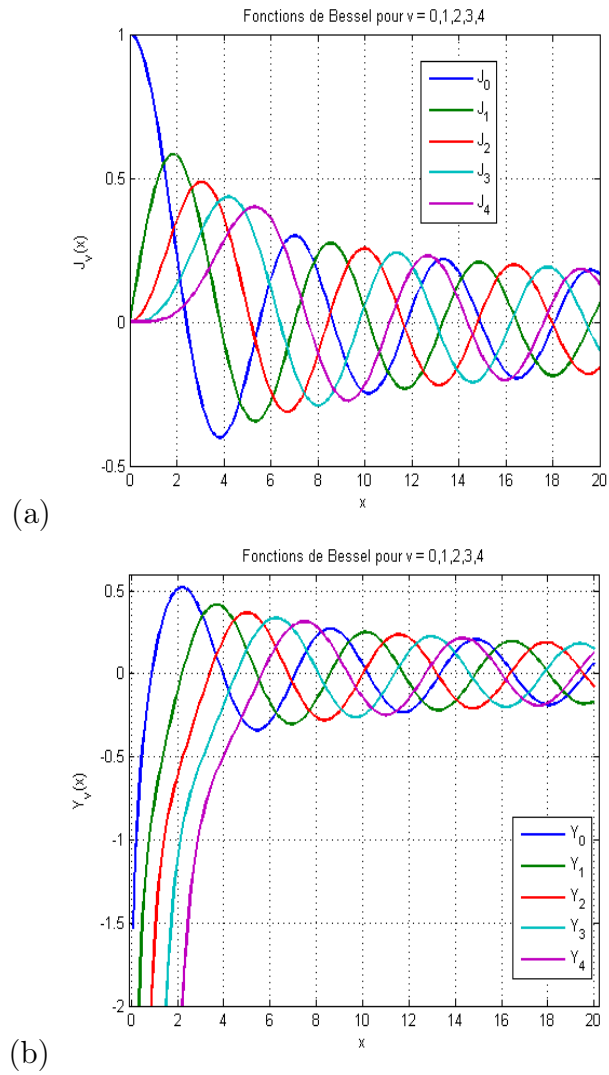


FIGURE A.1 – a) Fonctions de Bessel de première espèce J_ν , b) Fonctions de Bessel de deuxième espèce Y_ν

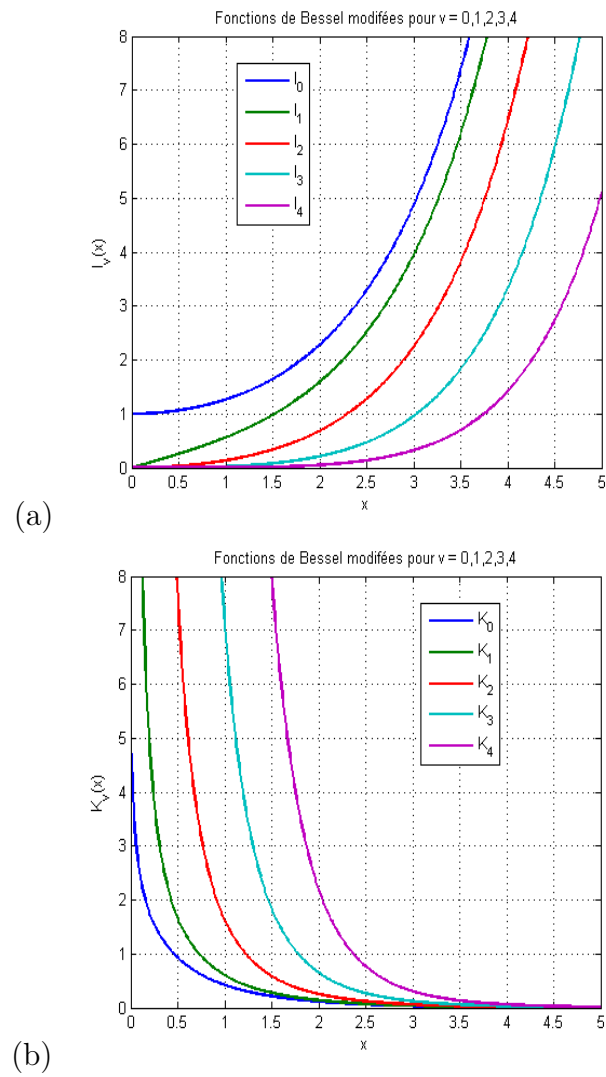


FIGURE A.2 – a) Fonctions de Bessel modifiées de première espèce I_ν , b) Fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce K_ν

A.3 Comportement asymptotique

Comportement à l'origine

Les relations qui suivent donnent les premiers termes du comportement des fonctions de Bessel et de Bessel modifiées lorsque l'argument z tend vers 0. Ici, les indices ν et n sont supposés grands par rapport à l'argument z .

$$J_n(z) = \frac{(z/2)^2}{n!} \left[1 + \frac{(z/2)^2}{(n+1)} + \frac{(z/2)^4}{2!(n+1)(n+2)} + \dots \right],$$

$$Y_n(z) = - \left(\frac{2}{z} \right)^n \frac{(n-1)!}{\pi} \left[1 + \frac{(z/2)^2}{(n-1)} + \frac{(z/2)^4}{2!(n-1)(n-2)} + \dots \right],$$

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} + \dots, \quad \nu \neq -1, -2, -3, \dots,$$

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu)}{2(z/2)^\nu} + \dots, \quad \nu > 0.$$

On trouve en $z = 0$

- $J_0(0) = I_0(0) = 1,$
- $J_\nu(0) = I_\nu(0) = 0, \quad \nu > 0,$
- $\lim_{z \rightarrow 0} Y_\nu(z) = \lim_{z \rightarrow 0} K_\nu(z) = \infty,$ pour $\nu \geq 0.$

Comportement à l'infini

Les relations ci-dessous donnent les premiers termes du comportement des fonctions de Bessel et de Bessel modifiées lorsque l'argument z tend vers l'infini. Ici, les indices ν et n sont supposés petit par rapport à l'argument z .

$$J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \cos \left(z - \frac{\nu \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \dots, \quad |\arg z| < \pi,$$

$$Y_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots, \quad |\arg z| < \pi,$$

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}} \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \dots\right), \quad |\arg z| < \pi/2,$$

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \dots\right), \quad |\arg z| < (3/2)\pi.$$

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [2] F. Berntsson. A spectral method for solving the sideways heat equation. *Inverse Problems*, 15 :891–906, 1999.
- [3] F. Cakoni and D. Colton. *Qualitative methods in inverse scattering theory*,. Springer edition, 2006.
- [4] W. Cheng. Regularization and stability estimates for an inverse source problem of the radially symmetric parabolic equation. *Journal of Inequalities and Applications*, page 2015 :136, 2015.
- [5] W. Cheng and C-L. Fu. Solving the axisymmetric inverse heat conduction problem by a wavelet dual least-squares method. *Boundary Value Problems*, 2009.
- [6] W. Cheng and C-L. Fu. Two regularization methods for an axisymmetric inverse heat conduction problem. *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 17 :159–172., 2009.
- [7] W. Cheng and C-L. Fu. A modified tikhonov regularization method for an axisymmetric backward heat equation. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 26,11 :2157–2164, 2010.
- [8] W. Cheng, L-L. Zhao, and C-L. Fu. Source term identification for an axisymmetric inverse heat conduction problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 59 :142–148, 2010.

-
- [9] V. Ditkine and A. Proudnikov. *Transformation intégrales et calcul opérationnel*. 1978.
- [10] I. Djerrar, L. Alem, and L. Chorfi. Regularization method for the radially symmetric inverse heat conduction problem. *Boundary Value Problems*, page 159, 2017.
- [11] L. Eldén, F. Berntsson, and T. Regińska. Wavelet and fourier methods for solving the sideways heat equation. *SIAM J. Sci. Comput*, 21, 6 :2187–2205, 2000.
- [12] C-L. Fu. Simplified tikhonov and fourier regularization methods on a general sideways parabolic equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 167, 2 :449–463, 2004.
- [13] P. C. Hansen. Regularization tools version 4.0 for matlab 7.3. *Numer. Algorithms, pages (url : www2.imm.dtu.dk/~pcha/Regutools/)*, pages 189–194, 2007.
- [14] R. Herbin. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Engineering school, Marseille (cel.archives-ouvertes.fr/cel-00637008), 2011.
- [15] B. T. Johansson, D. Lesnic, and T. Reeve. A method of fundamental solutions for the radially symmetric inverse heat conduction problem. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39 :887–895, 2012.
- [16] A. Kirsh. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, volume 120 of *AMS*. Springer edition, 2011.
- [17] P. Y. Lagree. Equation de la chaleur en axi et en 3d. *Cours MECAVENIR, EPU*, 2008.
- [18] P. K. Lamm. A survey of regularization methods for first-kind volterra equations. *Preprint of Mathematics Dept, Michigan State University, USA*.
- [19] P. K. Lamm and L. Eldén. Numerical solution of first-kind volterra equations by sequential tikhonov regularization. *SIAM J. Numer. Anal.* 34 no. 4 :1432–1450, 1997.
- [20] A. Lesfari. *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*. Ellipses edition, 2012.

-
- [21] D.A. Murio. *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-posed Problems*,. Interscience edition, 1993.
- [22] X-T. Xiong. On a radially symmetric inverse heat conduction problem. *Applied Mathematical Modelling*, 34 :520–529, 2010.
- [23] N. Yaparova. Numerical methods for solving a boundary-value inverse heat conduction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 22, 5 :832–847, 2014.