

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR
ANNABA

Année: 2017

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Appliquées



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

**SUR LE NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES
LIMITES DES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
DE LIÉNARD ET BIFURCATION DE HOPF**

Option

Systemes Dynamiques

Présentée par:

Bendib El Ouahma

DIRECTEUR DE THÈSE : Badi Sabrina M.C.A U.8.MAI. GUELMA
CO-DIRECTEUR DE THÈSE: Makhlouf Amar Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury :

PRÉSIDENT : Salmi Abdelouaheb M.C.A U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Ellaggoune Fateh Prof. U.8.MAI. GUELMA
EXAMINATEUR : Ferchichi Med Rédha M.C.A U.B.M. ANNABA

REMERCIEMENTS

En préambule, je voudrais remercier Dieu qui m'a donné la puissance et la volonté d'achever cet humble travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers mon encadreur Mme. BADI SABRINA et envers mon co-encadreur le professeur MAKHLOUF AMAR. Il est certain que cette thèse n'aurait pas pu être obtenue sans eux. Je tiens à remercier avec une profonde sincérité ma directrice de thèse Mme. BADI qui a accepté de diriger mon travail, sa confiance en moi, ses conseils et ses suggestions me donnaient plus de courage pour aller plus loin, pour son aide précieuse et pour le temps qu'elle m'a consacré. C'est avec la même sincérité que je tiens particulièrement à remercier mon co-encadreur Mr. MAKHLOUF aussi bien pour sa compétence, son regard critique, sa grande disponibilité et ses précieux conseils.

J'adresse mes remerciements à Mr. SALMI ABDELOUAHEB, Maître de conférences A à l'université Badji Mokhtar Annaba, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je remercie très sincèrement mes examinateurs Mr. ELLAGGOUNE FATEH, Professeur à l'université de Guelma et Mr. FERCHICHI MOUHAMED RÉDHA, Maître de conférences A à l'université Badji Mokhtar-Annaba, d'avoir accepté de faire partie du jury, et d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger cette thèse.

Je remercie vivement Mr. HAIOUR MOHAMED, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba, et Mr. BENCHETTAH AZZEDINE, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba pour ses aides précieuses, ses soutiens et ses encouragements.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à ma famille : Mon père Amor pour l'éducation qu'il m'a donnée et aussi de m'avoir épaulé et encouragé tout au long de cette thèse, ma mère Mariem, mon oncle Ahmed, ma tante, mes sœurs, mon frère Louai Nadji et tous mes proches et amis, qui m'ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé.

**** Merci à tous ****

Résumé

Dans la première partie de cette thèse, on utilise la théorie de moyennisation d'ordre un et deux pour étudier le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard de la forme

$$\dot{x} = y - f_1(x)y, \quad \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x, y)y,$$

où $f_1(x) = \varepsilon f_{11}(x) + \varepsilon^2 f_{12}(x)$, $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y) + \varepsilon^2 f_{22}(x, y)$ et $g_2(x) = \varepsilon g_{21}(x) + \varepsilon^2 g_{22}(x)$, où f_{1i} , f_{2i} et g_{2i} sont de degré l, n et m respectivement pour $i = 1, 2$, et ε suffisamment petit.

Dans la seconde partie, nous étudions le nombre maximum de cycles limites qui se produit par bifurcation de Hopf à l'origine d'un système quadratique dans \mathbb{R}^3 de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3)x - by + \sum_{i+j+k=2} a_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} A_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} A'_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \frac{dy}{dt} = bx + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3)y + \sum_{i+j+k=2} b_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} B'_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \frac{dz}{dt} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3)z + \sum_{i+j+k=2} c_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} C_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} C'_{ijk}x^i y^j z^k, \end{array} \right.$$

où $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}, A'_{ijk}, B'_{ijk}, C'_{ijk}$ pour $i + j + k = 2$, $a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3$ et b sont des paramètres réels, et ε suffisamment petit. On utilise la théorie de moyennisation d'ordre trois pour démontrer nos résultats.

Mots clés : Equation différentielle de Liénard, cycle limite, bifurcation de Hopf, théorie de moyennisation.

Abstract

In this thesis, first we apply the averaging theory of first and second order to study the maximum number of limit cycles for a class of polynomial differential systems that can bifurcate from the periodic orbits of the linear center $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbed inside a class of the generalized Liénard polynomial differential systems of the form

$$\dot{x} = y - f_1(x)y, \quad \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x, y)y,$$

where $f_1(x) = \varepsilon f_{11}(x) + \varepsilon^2 f_{12}(x)$, $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y) + \varepsilon^2 f_{22}(x, y)$ and $g_2(x) = \varepsilon g_{21}(x) + \varepsilon^2 g_{22}(x)$, where f_{1i} , f_{2i} and g_{2i} have degree l, n and m respectively for each $i = 1, 2$, and ε is a small parameter.

Secondly, we study the maximum number of limit cycles which bifurcate by a Hopf bifurcation from the origin of the quadratic differential system in \mathbb{R}^3 of the form

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3)x - by + \sum_{i+j+k=2} a_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} A_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} A'_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \frac{dy}{dt} = bx + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3)y + \sum_{i+j+k=2} b_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} B'_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \frac{dz}{dt} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3)z + \sum_{i+j+k=2} c_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} C_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} C'_{ijk}x^i y^j z^k, \end{array} \right.$$

where $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}, A'_{ijk}, B'_{ijk}, C'_{ijk}$ for $i + j + k = 2$, $a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3$ and b are real parameters, and ε is a small parameter. We use the averaging theory of third order to prove our results.

Key words : Liénard differential equation, limit cycle, Hopf bifurcation, averaging theory.

المخلص

في الجزء الأول لهذه الأطروحة , نستعمل نظرية المتوسط من الرتبة الأولى و الثانية لدراسة العدد الأعظمي للدورات المنتهية التي تشعب المسارات الدورية للمركز الخطي $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ بواسطة فئة من الجمل التفاضلية كثيرة الحدود لليينارد من الشكل :

$$\dot{x} = y - f_1(x)y, \quad \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x,y)y,$$

حيث $g_2(x) = \varepsilon g_{21}(x) + \varepsilon^2 g_{22}(x)$ و $f_2(x,y) = \varepsilon f_{21}(x,y) + \varepsilon^2 f_{22}(x,y)$, $f_1(x) = \varepsilon f_{11}(x) + \varepsilon^2 f_{12}(x)$

حيث f_{1i} , f_{2i} و g_{2i} من الدرجة m و n, l على التوالي من اجل $i = 1, 2$ و ε وسيط ذو قيمة صغيرة .

في الجزء الثاني, سندرس العدد الأعظمي للدورات المنتهية التي تتفرع من المركز بتشعب هوف لجملة تربيعية في \mathbb{R}^3 من الشكل :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3)x - by + \sum_{i+j+k=2} a_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} A_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} A'_{ijk}x^i y^j z^k , \\ \frac{dy}{dt} = bx + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3)y + \sum_{i+j+k=2} b_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} B'_{ijk}x^i y^j z^k , \\ \frac{dz}{dt} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3)z + \sum_{i+j+k=2} c_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} C_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} C'_{ijk}x^i y^j z^k , \end{array} \right.$$

حيث $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}, A'_{ijk}, B'_{ijk}, C'_{ijk}$ من اجل $i + j + k = 2$ و $a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3, b$ و ثوابت حقيقية و ε وسيط ذو قيمة صغيرة, باستعمال نظرية المتوسط من الرتبة الثالثة لنبرهن على نتائجنا.

الكلمات المفتاحية : معادلة تفاضلية من نوع ليينارد, الدورات المنتهية, تشعب هوف, نظرية المتوسط .

Table des matières

Introduction générale	vi
1 Notions préliminaires	1
1.1 Equations différentielles	1
1.1.1 Existence et unicité de la solution	1
1.1.2 Stabilité de la solution	2
1.2 Systèmes dynamiques	4
1.3 Notion du flot	5
1.4 Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes	5
1.4.1 Point critique et linéarisation	6
1.4.2 Classification et nature des points critiques	7
1.4.3 Plan et portrait de phase	8
1.4.4 Orbites périodiques et cycles limites	8
1.4.5 Existence et non-existence des cycles limites	10
1.5 Bifurcation de Hopf	12
2 Théorie de moyennisation	17
2.1 Perturbation	18
2.2 Théorie de moyennisation dans le cas périodique	19
2.2.1 Théorie de moyennisation du premier ordre	20
2.2.2 Théorie de moyennisation du second ordre	24
2.3 Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer	28
2.3.1 Rappels sur le degré de Brouwer	28
2.3.2 Théorie de moyennisation d'ordre un, deux et trois dans \mathbb{R}^n	29
3 Cycles limites pour une classe généralisée des systèmes de Liénard	34
3.1 Résultats introductifs	35
3.2 Nombre maximum de cycles limites pour une classe généralisée des systèmes de Liénard par la théorie de moyennisation	36

4 La bifurcation de Hopf pour un système différentiel quadratique en dimension trois	46
4.1 Nombre maximum de cycles limites bifurquant par bifurcation de Hopf pour un système différentiel quadratique dans \mathbb{R}^3 par la théorie de moyennisation d'ordre trois	47
4.2 Application affirmant l'atteinte de la borne de cycles limites	59
Conclusions et perspectives	71
Appendice	72
Bibliographie	96

Introduction générale

La théorie des systèmes dynamiques prend une place de plus en plus importante en mathématiques. Généralement, un système est dit dynamique lorsqu'il évolue au cours du temps. On représente cette évolution par des équations différentielles ou des applications. Ainsi, l'étude des systèmes dynamiques traite donc l'évolution temporelle des systèmes chimiques, physiques, biologiques ou économiques sans pour autant faire référence à la théorie sous jacente qui détermine leurs équations d'évolution.

Plusieurs chercheurs : mathématiciens, physiciens, chimistes, biologistes, économistes et ingénieurs, ... etc furent intéressés aux effets dynamiques des non linéarités. On note que la dynamique non linéaire était à l'origine une branche de la physique. Elle s'est exprimée avant tout dans les équations du mouvement de **Newton**. À la fin de 19^{ème} siècle, début du 20^{ème} siècle, la théorie des systèmes dynamiques non linéaires a été considérée particulièrement par **Poincaré** et **Lyapunov** dans leurs travaux sur les problèmes de mécanique. Cette théorie a fait un très important développement en 1930 avec les écoles russe d'**Andronov** et de **Bogliubov-Mitropolski** [4, 2]. En effet, les développements de l'étude analytique des systèmes dynamiques non linéaires, ont été fait par l'école de **Kiev**.

En 1881, **Henri Poincaré** [40] créa la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires. Cette théorie se trouve dans la première partie de son mémoire intitulé "Sur les courbes définies par une équation différentielle" qui paraît dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*. **Poincaré** s'est intéressé aux points d'équilibres, aux cycles limites et leur stabilité.

Les équations différentielles sont au cœur de l'analyse depuis des siècles et possèdent donc un rôle éminent pour les mathématiques. Historiquement, l'étude de ces équations différentielles est un domaine des mathématique qui a fait l'objet d'abondantes recherches. En général, on utilise les équations différentielles d'évolution dans les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Le concept d'équation différentielle pendant les deux premiers siècles de son apparition a fait l'objet d'études afin d'arriver à une résolution algébrique. Jusqu'au 19^{ème} siècle et depuis l'arrivée en scène de **J. Liouville** (1809-1882), les mathématiciens ne s'arrêtaient pas de cher-

cher une méthode de résolution applicable à toute sorte d'équations différentielles.

Un des plus importants problèmes de la théorie des équations différentielles est l'étude de l'existence des cycles limites. En effet, un cycle limite dans le plan pour une équation différentielle est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des orbites périodiques de l'équation différentielle. Les cycles limites ont apparu d'abord en 1881 dans le mémoire le plus connu de **H. Poincaré** [40] intitulé "Sur les courbes définies par une équation différentielle". Par conséquent, un des principaux théorèmes de la dynamique non linéaire est le théorème de **Poincaré-Bendixson** qui assure que dans une région bornée et compacte du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un cycle limite ou un point critique.

L'importance de pouvoir déterminer une borne maximum K pour le nombre de cycles limites qu'un système polynomial planaire de degré n puisse avoir, fait l'objet de la seconde partie du 16^{ème} problème de **Hilbert**. On note par $H(n)$ ce nombre maximal. En 1923, **Dulac** [14] proposa une démonstration assurant que $H(n)$ est fini pour tout n . Ensuite, en 1985 **Ilyashenko** a détecté une erreur dans l'article de **Dulac**. Plus tard, la résolution de ce problème de **Dulac** a été faite dans deux longs travaux publiés par **Ilyashenko** [18] en 1991 et **Ecalte** [17] en 1992 prouvant indépendamment les affirmations de **Dulac**.

En 1997, dans la conférence prononcée à l'occasion du 60^{ème} anniversaire d'**Arnold**, **Steve Smale** a proposé 18 problèmes mathématiques parmi eux le treizième problème qui est le 16^{ème} problème de **Hilbert**. Il s'est concentré sur une classe spéciale des systèmes planaires qui sont les système de **Liénard**. Mais aucune borne supérieure des cycles limites n'est connue pour le moment.

En 1928, l'ingénieur français **Liénard** [26] établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour un système portant son nom de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -G(x), \end{cases} \quad (1)$$

où $F(x)$ et $G(x)$ sont deux polynômes de degré m et n respectivement. Notons que ce système inclut l'équation de **Van Der Pol** $\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$. **Liénard** montra que si $G(x) = x$ et si $F(x)$ est une fonction continue et impaire qui a une unique racine positive en $x = a$ et qui est strictement croissante pour $x \geq a$, alors le système (1) possède un unique cycle limite.

- En 1975, **Rychkov** [43] a montré que si le polynôme $F(x)$ est de degré cinq et impaire et si de plus $G(x) = x$, alors le système (1) a au plus deux cycles limites.

-
- En 1977, **Lins, De Melo** et **Pugh** [27] ont montré, que si $m = 3$ et $n = 1$, sous certaines conditions, l'existence d'un unique cycle limite. De plus ils ont conjecturé que si $G(x) = x$, alors il y a au plus $E\left(\frac{m-1}{2}\right)$ cycles limites ($E(x)$ est la partie entière du réel x). Mais cette conjecture s'est fausée pour $n \geq 6$.
 - En 1981, **Zhang** [51] a étudié le résultat de **Rychkov** (1975) à des fonctions non polynômiales :
 - Si $G(x) = x$, si $F(x)$ et sa dérivée $f(x)$ sont continues.
 - De plus si la dérivée $f(x)$ est paire et a deux racines $a_1, a_2 > 0$ telle que $a_1 < a_2$ et $F(a_1) > 0, F(a_2) < 0$.
 - Si $f(x)$ est strictement croissante pour $x > a_2$.
 Alors le système (1) a au plus deux cycles limites.
 - En 1983, **Xianwu** [49] a prouvé la conjecture pour le cas $m = 4$ et $n = 1$.
 - En 1990, **Dumortier** et **Rousseau** [16] ont montré que $H(3, 1) = 1$.
 - En 1997, **Duman** et **Li** [15] ont prouvé que $H(2, 2) = 1$.
 - En 2002, **Wang** et **Jing** [48] ont prouvé que $H(3, 2) = 3$.
 - En 2012, **Li. Chengzhi** et **J. Llibre** [11] ont prouvé que $H(1, 3) = 1$.

D'autres chercheurs essayent de trouver des valeurs minimales à $H(m, n)$ en ne considérant que des cycles limites de petite amplitude qui seraient créés par bifurcation de Hopf autour d'un point d'équilibre. Ainsi, ils ont trouvé un nombre maximum de cycles limites locaux noté $\hat{H}(m, n)$. En effet, un aspect fondamental de l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie de la bifurcation. Cette notion intervient lorsqu'un changement des paramètres du système produit un changement qualitatif de la dynamique de ce dernier. Donc la théorie de la bifurcation consiste en l'étude des changements de comportement d'un système quand ses paramètres changent, par exemple déstabilisation d'un point équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle limite.

Le terme de bifurcation a été introduit par **Poincaré** [41] en 1892 pour décrire les changements qualitatifs des points d'équilibres d'une équation, obtenue selon une faible variation d'un paramètre. Ensuite, elle a été étudiée par **Andronov** et **Witt** [3] et leurs collègues à partir de 1930. Dans cette thèse on s'intéresse à un type de bifurcations locales qui est la bifurcation de Hopf. Cette bifurcation est valable pour des systèmes d'ordre supérieur ou égal à deux. Avec cette considération, effectivement plusieurs chercheurs ont obtenu des nombreux résultats. Citons ceux correspondant au système de **Liénard** généralisé :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y, \end{cases} \quad (2)$$

où f et g sont deux polynômes de degré n et m respectivement.

Blows, Lloyd [5] en 1984 et **Lynch** [35, 36] (1988, 1995) ont prouvé que

- Si g est impair alors $\hat{H}(m, n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- Si f est pair alors $\hat{H}(m, n) = n$, quelque soit g .
- Si f est impair alors $\hat{H}(m, 2n + 1) = \lfloor \frac{(m-2)}{2} \rfloor + n$.
- Si $g(x) = x + g_e(x)$ où g_e est pair, alors $\hat{H}(2m, 2) = m$.

• En 1998, **Gasull** et **Torregrosa** [20] ont amélioré certains résultats et ont obtenu une borne supérieure pour $\hat{H}(7, 6)$, $\hat{H}(6, 7)$, $\hat{H}(7, 7)$ et $\hat{H}(4, 20)$.

• En 1999, **Christopher** et **Lynch** [12, 37] ont montré que :

- $\hat{H}(m, 2) = \lfloor \frac{(2m+1)}{3} \rfloor$.
- $\hat{H}(2, n) = \lfloor \frac{(2n+1)}{3} \rfloor$.
- $\hat{H}(m, 3) = 2 \lfloor \frac{(3m+2)}{8} \rfloor$ pour tout $1 < m \leq 50$.
- $\hat{H}(3, n) = 2 \lfloor \frac{(3n+2)}{8} \rfloor$ pour tout $1 < n \leq 50$.

• $\hat{H}(4, k) = \hat{H}(k, 4)$ pour $k = 6, 7, 8, 9$ et $\hat{H}(5, 6) = \hat{H}(6, 5)$.

• En 2006, **Yu** et **Han** [50] ont prouvé que $\hat{H}(m, n) = \hat{H}(n, m)$ pour $n = 4$, $m = 10, 11, 12, 13$; $n = 5, m = 6, 7, 8, 9$; $n = 6, m = 5, 6$. Voir aussi **Llibre** [31] pour un tableau avec toutes les valeurs spécifiques.

Cependant, certains chercheurs furent intéressés au nombre maximum de cycles limites noté $\tilde{H}(m, n)$ appelé "Medium limit cycles".

En 2010, **J. Llibre et al.** [31] ont réussi à obtenir des bornes inférieures pour le nombre de cycles limites pour $m, n \geq 1$. Plus précisément, ils ont étudié le nombre maximum de cycles limites $\tilde{H}(m, n)$ qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbé par des équations différentielles de **Liénard**. Ils ont donné des estimations inférieures pour $\tilde{H}(m, n)$, et selon ces estimations, ils ont obtenu que $\tilde{H}_k(m, n) \leq \hat{H}(m, n)$ pour $k = 1, 2, 3$ pour des valeurs en lesquelles $\hat{H}(m, n)$ sont connus.

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude des cycles limites pour deux types des systèmes différentiels non linéaires :

i) Les systèmes de Liénard.

ii) Les systèmes polynomiaux quadratiques dans \mathbb{R}^3 .

On étudie le nombre maximum de cycles limites \tilde{H} pour le premier type ainsi que le nombre maximum de cycles limites de faible amplitude pour le deuxième type.

Tout au long de notre étude, on va utiliser une théorie de perturbation très efficace, connue sous le nom de théorie de moyennisation. Cette théorie permet de prouver l'existence des solutions périodiques pour les systèmes périodiques.

Cette thèse est scindée en quatre chapitres :

Le chapitre 1 est un rappel sur les notions de base de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. On introduira des définitions élémentaires tels que : le système dynamique, les points critiques et leurs natures, la linéarisation au voisinage d'un point critique, le cycle limite ainsi que des théorèmes sur l'existence et la non-existence des cycles limites. On introduira aussi un rappel succinct sur la bifurcation de Hopf.

Le chapitre 2 est dédié à l'illustration de l'outil principal utilisé dans nos différentes démonstrations, qui est la théorie de moyennisation. Cette théorie qui a permis ces dernières années à faire un pas très important dans l'étude des cycles limites.

Le chapitre 3 s'intéresse aux cycles limites des systèmes de Liénard. On détermine le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire perturbé par une certaine classe généralisée d'équations différentielles de Liénard et ceci en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un et deux. Cette étude a fait l'objet d'une publication intitulée :

"**S. Badi, E. Bendib and A. Makhlouf**, On the maximum number of limit cycles for a generalization of polynomial Liénard differential systems via averaging theory. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. ISSN 0973-1768 Volume 12, Number 4(2016), pp. 2971-2985."

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de la bifurcation de Hopf pour des champs de vecteurs dans \mathbb{R}^3 . On démontre un résultat sur le nombre maximum de cycles limites qui se produit par une bifurcation de Hopf autour de l'origine d'un système quadratique dans \mathbb{R}^3 . Nous traitons cette étude en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre trois. De plus nous donnons un exemple pour lequel ce nombre est atteint. Cette étude a fait l'objet d'une publication intitulée :

"**E. Bendib, S. Badi and A. Makhlouf**, On the 3-Dimensional Hopf bifurcation via averaging theory of third order. *Turk J Math* (2017) 41 : 1053-1071."

1.1 Equations différentielles

Depuis trois siècles et demi, la théorie des équations différentielles est considérée comme une importante théorie dans les différents domaines de mathématiques. D'abord, on donne quelques définitions essentielles sur les équations différentielles

Définition 1.1.1. (Equation différentielle ordinaire). Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \rightarrow y(t)$ et ses dérivées y' , y'' , \dots , $y^{(n)}$ au point t définie par

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1.1.2. (Equation différentielle normale). On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Définition 1.1.3. (Solution). On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de \mathbb{R} , toute fonction y définie sur cet intervalle I , n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I . On notera en général cette solution par (y, I) .

1.1.1 Existence et unicité de la solution

Définition 1.1.4. Considérons la fonction $f(t, x)$ avec $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $|t - t_0| \leq a$, et D un ouvert de \mathbb{R}^n . On dit que la fonction $f(t, x)$ est Lipschitzienne par rapport à x si $\exists K > 0$ telle que :

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|, \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times D.$$

La constante K est appelée constante de Lipschitz.

Théorème 1.1.1. *On considère le système différentiel :*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

et on suppose que la fonction vectorielle $f(t, x)$ est Lipschitzienne de rapport K par rapport à x , uniformément en $t \in [-a, a]$. Soit x_0 une donnée initiale, il existe une seule solution $x(t)$ du système différentiel qui satisfait $x(0) = x_0$ et qui est définie sur l'intervalle $[-c, c]$ avec $c < \min(a, \frac{1}{K})$.

Preuve. Cette solution satisfait l'équation intégrale

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(u, x(u)) du,$$

on considère l'espace des fonctions continues $y \in C^0([-a, a])$ muni de la norme $\|y\| = \max_{t \in [-a, a]} \|y(t)\|$. Soit $L : C^0([-a, a]) \rightarrow C^0([-a, a])$ l'opérateur linéaire défini par

$$L(y)(t) = x(0) + \int_0^t f(u, y(u)) du,$$

cet opérateur satisfait

$$L(y)(t) - L(y')(t) = \int_0^t [f(u, y(u)) - f(u, y'(u))] du,$$

et donc

$$\|L(y) - L(y')\| \leq cK \|y - y'\|.$$

Si on pose $c < \min(a, \frac{1}{K})$, on constate que l'opérateur L est une contraction. Il possède donc un unique point fixe dans l'espace fonctionnel $C^0([-a, a])$. Cet unique point fixe est une fonction continue qui est solution du système différentiel et ceci démontre l'existence et l'unicité cherchées.

1.1.2 Stabilité de la solution

Un des principaux problèmes de la théorie des équations différentielles est l'étude de la stabilité des solutions. Cette notion a été étudiée par **Lyapunov** (1857-1918), voir le livre [39].

Soit le système des équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

On suppose que $f(t, x)$ satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définition 1.1.5. Une solution $\Phi(t)$ du système (1.1) telle que $\Phi(t_0) = \Phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que pour toute solution $x(t)$ de (1.1) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifie

$$\|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \implies \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si de plus, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0,$$

alors la solution $\Phi(t)$ est dite asymptotiquement stable.

Remarque 1.1.1. La solution $\Phi(t)$ qui n'est pas stable est dite instable.

Exemple 1.1.1. On considère le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x - y, \\ \dot{y}(t) = x - y, \end{cases} \quad (1.2)$$

avec la condition initiale $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

La solution $(\Phi_1(t), \Phi_2(t))$ du système (1.2) qui vérifie $(\Phi_1(0), \Phi_2(0)) = (0, 0)$ est la solution nulle $(0, 0)$.

Soit $(x(t), y(t))$ une solution de (1.2) telle que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, cette solution est donnée par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t) \\ x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) \end{pmatrix}.$$

On a

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que :

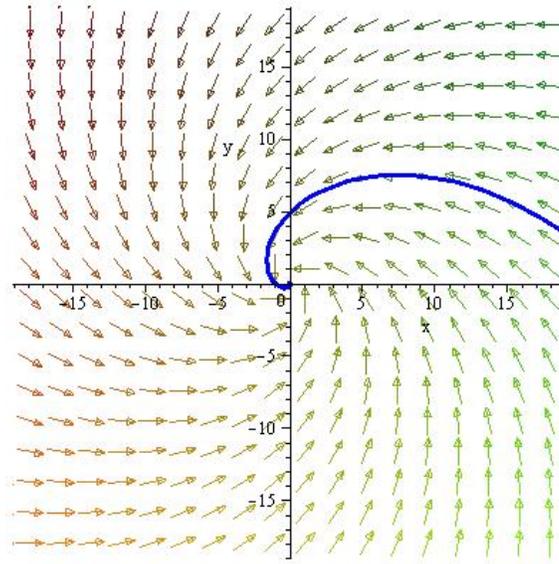
$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \implies \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = \left\| e^{-t} \begin{pmatrix} x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t) \\ x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) \end{pmatrix} \right\| \leq 2(|x_0| + |y_0|) < 2\delta \leq \varepsilon \text{ (on peut choisir } \delta = \varepsilon/2).$$

Donc la solution $\Phi(t)$ est stable au sens de Lyapunov.

De plus, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| e^{-t} \begin{pmatrix} x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t) \\ x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) \end{pmatrix} \right\| = 0.$$

Alors $\Phi(t)$ est de plus asymptotiquement stable, on le voit bien dans la figure (1.1).

FIGURE 1.1 – Stabilité asymptotique de la solution $(0, 0)$.

1.2 Systèmes dynamiques

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Mathématiquement, on définit un système dynamique par

Définition 1.2.1. *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :*

- 1) $U(., x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- 2) $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- 3) $U(0, x) = x$.
- 4) $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)), \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.2.1. *Soit le système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ et A est une matrice constante. Soit $x(t) = e^{tA}x_0$ une solution du système (1.3). Il est simple de vérifier que cette solution engendre un système dynamique $U(t, x) = e^{tA}x$ sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.2.2. *Un système dynamique U sur \mathbb{R}^n est linéaire si :*

$$U(t, \alpha x + \beta y) = \alpha U(t, x) + \beta U(t, y),$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.3 Notion du flot

On représente la notion du *flot* pour deux types de systèmes d'équations différentielles.

a) Système d'équations différentielles linéaires

Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

où A une matrice constante. La solution du système (1.4) avec la valeur initiale $x(0) = x_0$ est $x(t) = e^{tA}x_0$.

Définition 1.3.1. *L'ensemble des applications $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé le flot du système (1.4).*

Définition 1.3.2. *Si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles non nulles alors le flot $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dit hyperbolique et dans ce cas le système (1.4) est dit système linéaire hyperbolique.*

b) Système d'équations différentielles non linéaires

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

On note par $I(x_0)$ l'intervalle maximum d'existence de la solution $\Phi(t, x_0)$ du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Définition 1.3.3. *Soit E un sous ensemble ouvert dans \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$, et soit pour $x_0 \in E$ la solution $\Phi(t, x_0)$ du problème (1.5) définie sur $I(x_0)$. Alors pour $t \in I(x_0)$, l'ensemble des applications Φ_t définit par*

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0),$$

est appelé le flot du système différentiel (1.5).

1.4 Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes

Dans cette section, on considère le système non linéaire autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.6)$$

1.4.1 Point critique et linéarisation

Définition 1.4.1. (Point critique). On appelle point critique ou point d'équilibre (ou aussi un point singulier) du système (1.6), tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$f(x_0) = 0.$$

Remarque 1.4.1. Un point qui n'est pas critique est dit régulier.

Définition 1.4.2. Un point critique $x = a$ du système (1.6) est appelé attracteur positif s'il existe un voisinage V_a de a tel que si :

$$x(t_0) \in V_a \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a.$$

Si cette implication est satisfaite quand $t \rightarrow -\infty$, alors $x = a$ est appelé attracteur négatif.

Définition 1.4.3. (Linéarisation). Considérons le système non linéaire (1.6). Le système

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.7}$$

où

$$A = Df(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

est appelé le système linéarisé de (1.6) en x_0 .

Exemple 1.4.1. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - y, \\ \dot{y} = x + 3y^2, \end{cases} \tag{1.8}$$

l'origine est le seul point critique pour ce système .

La matrice jacobienne associée à (1.8) calculée en $(0, 0)$ est

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient le système linéarisé

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

de (1.8) en $(0, 0)$.

Définition 1.4.4. On appelle point critique hyperbolique de (1.6) tout point critique x_0 tel que aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.

1.4.2 Classification et nature des points critiques

Définition 1.4.5. *On considère le système :*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et soit x_0 son point critique.

- *Le point critique x_0 est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.*
- *Le point x_0 est dit **puits (sink)** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives.*
- *Le point x_0 est une **source** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives.*

Exemple 1.4.2. *Soit le système non linéaire autonome*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y^2, \\ \dot{y} = 3x^3 + y. \end{cases} \quad (1.9)$$

Le système (1.9) a un seul point d'équilibre qui est l'origine $(0,0)$, et le système linéarisé en ce point est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ce système a deux valeurs propres réelles positives $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$. Alors le point d'équilibre $(0,0)$ est une source.

Pour un système plan à coefficients constants

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

où A est une matrice carré constante, l'origine $(0,0)$ est le seul point critique. Considérons λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice A . On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 :

- (1) Si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ sont réelles et de signes différents, l'origine est une selle. Il est toujours instable.
- (2) Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, alors on a trois cas :
 - Si $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$, l'origine est un noeud stable.
 - Si $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$, l'origine est un noeud instable.
 - Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, l'origine est un noeud propre ; il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.

- (3) Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées, alors l'origine est un foyer. Il est stable si $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $Re(\lambda_{1,2}) > 0$.
- (4) Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors l'origine est un centre. Il est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.

1.4.3 Plan et portrait de phase

Définition 1.4.6. Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.10)$$

où P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d .

Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.10) représentent dans le plan (xOy) des courbes appelées orbites.

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (xOy) est dit le plan de phase.

1.4.4 Orbites périodiques et cycles limites

Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.11)$$

Définition 1.4.7. (Orbite périodique). Une orbite périodique est toute trajectoire fermée $\phi(t, x)$ du système (1.11) vérifiant

$$\phi(t + T, x) = \phi(t, x).$$

Le plus petit $T > 0$ qui vérifie cette égalité est appelé période.

Proposition 1.4.1. Toute solution périodique entoure au moins un point d'équilibre.

Définition 1.4.8. (Cycle limite). Pour un système plan, un cycle limite est une orbite périodique fermée isolée dans l'ensemble des orbites périodiques.

Définition 1.4.9. (Amplitude). L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la norme de la variable x du cycle limite.

Théorème 1.4.1. (Stabilité des cycles limites). C étant la trajectoire correspondante au cycle limite, et soit toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de C s'enroulent en spirales autour de C pour $t \rightarrow +\infty$ ou pour $t \rightarrow -\infty$.

1.4. THÉORIE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS NON LINÉAIRES
AUTONOMES

1. Le cycle limite est dit **stable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers C .
2. Le cycle limite est dit **instable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont refoulées de C .

Exemple 1.4.3. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 2x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + 2y - 2y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.12)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(t)$, $y = r \sin(t)$ avec $r > 0$, le système (1.12) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = 2r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

d'où

$$\dot{r} = 0 \implies r = 0 \text{ ou } r = \pm 1.$$

Comme $r > 0$, on n'accepte que la racine positive $r = 1$. Donc, pour $r = 1$ on a la solution périodique $(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$, avec $\theta(0) = \theta_0$.

Dans le plan de phase il y a un seul cycle limite d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et d'amplitude $r = 1$. Voir la figure (1.2).

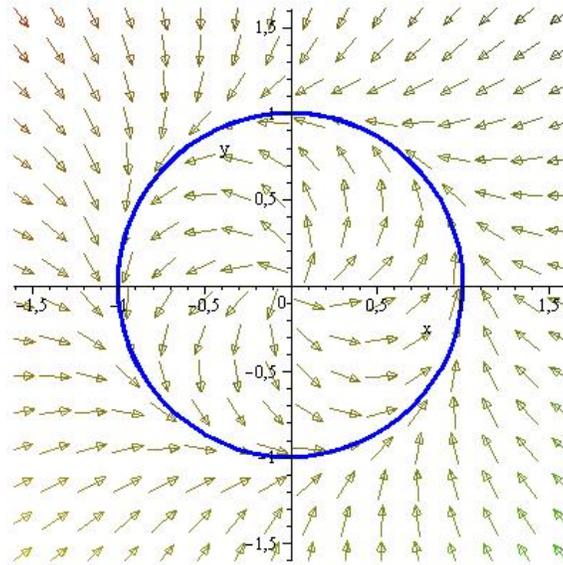


FIGURE 1.2 – Cycle limite du système (1.12).

1.4.5 Existence et non-existence des cycles limites

Soit X un champ de vecteurs de classe C^k sur U un ouvert de \mathbb{R}^n , donné par l'application $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k

$$X : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)). \quad (1.13)$$

On lui associe le système différentiel

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n, \quad (1.14)$$

où les fonctions $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(x)$ (appelées composantes du champ de vecteurs X) sont des fonctions de classe C^k sur l'ouvert U .

Définition 1.4.10. *L'orbite γ du champ de vecteurs X passant par le point x_0 est la courbe différentiable formée des points $x(t)$ de U donnés par la solution $\Phi(x_0, t)$ du système (1.14) avec la donnée initiale x_0 . Cette courbe est orientée selon le sens de variation de t . On distingue éventuellement l'orbite positive $\gamma_+(x_0) = \{\Phi(x_0, t), t \geq 0\}$ et l'orbite négative $\gamma_-(x_0) = \{\Phi(x_0, t), t \leq 0\}$ passant par le point $x(0) = x_0$.*

Définition 1.4.11. *Soit $\gamma(p)$ l'orbite correspondant à la solution $\Phi(p, t)$ du système différentiel (1.14), définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n , qui passe par le point p . On définit l'ensemble des points ω -limite de l'orbite $\gamma(p)$ correspondant à la solution $\Phi(p, t)$ par*

$$\omega(\gamma) = \left\{ q \in U : \text{il existe une suite } t_n \rightarrow +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(p, t_n) = q \right\}.$$

De même, on définit l'ensemble des points α -limite de l'orbite $\gamma(p)$ correspondant à la solution $\Phi(p, t)$ par

$$\alpha(\gamma) = \left\{ q \in U : \text{il existe une suite } t_n \rightarrow -\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(p, t_n) = q \right\}.$$

Théorème 1.4.2. [39](Poincaré-Bendixson). *Soit le système plan suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.15)$$

Supposons que f et g sont des fonctions de classe C^1 sur E , où E est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 , le système (1.15) a une orbite γ telle que l'orbite positive $\gamma_+(p) = \{\Phi(p, t), t \geq 0\}$ passant par le point p est contenue dans un sous ensemble compact F de E . Alors on est dans l'un des trois cas suivants :

- Soit $\gamma_+(p)$ tend vers un point d'équilibre.
- Soit $\gamma_+(p)$ tend vers une orbite périodique.

- Soit $\gamma_+(p)$ est une orbite périodique.

Si F ne contient pas de points critiques alors il existe une orbite périodique du système (1.15).

Théorème 1.4.3. [39] (**Critère de Bendixson**). *Soit le système plan*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

et soit $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans \mathbb{R}^2 . Si la divergence du champ de vecteur F (notée ∇F) est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans E , alors ce système n'a aucune orbite fermée entièrement contenue dans E .

Exemple 1.4.4. *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 2y^4, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - x^2y^3. \end{cases}$$

Soit $F = (2xy - 2y^4, x^2 - y^2 - x^2y^3)^T$. On calcule la divergence du champ de vecteur F , on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F = \nabla F &= \frac{\partial}{\partial x} (2xy - 2y^4) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2 - x^2y^3) \\ &= 2y - 2y - 3x^2y^2 = -3x^2y^2 < 0. \end{aligned}$$

D'où, d'après le critère de Bendixson ce système n'a aucun cycle limite dans \mathbb{R}^2 .

Théorème 1.4.4. [39] (**Critère de Dulac**). *Soit $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans \mathbb{R}^2 . S'il existe une fonction $B \in C^1(E)$ telle que $\nabla(BF)$ est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans E , alors le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

n'admet aucune orbite fermée entièrement contenue dans E .

Exemple 1.4.5. *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2. \end{cases}$$

On doit vérifier la non-existence de cycle limite pour ce dernier système.

Soit $B(x, y) = be^{-2\beta x}$ et $F = (y, -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2)^T$, calculant la divergence de BF , on obtient le résultat suivant

$$\begin{aligned}\nabla(BF) &= \frac{\partial}{\partial x}(be^{-2\beta x}y) + \frac{\partial}{\partial y}be^{-2\beta x}(-ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2) \\ &= -2\beta be^{-2\beta x}y - b^2e^{-2\beta x} + 2\beta be^{-2\beta x}y = -b^2e^{-2\beta x} < 0.\end{aligned}$$

Donc, il n'existe pas de cycle limite pour ce système.

1.5 Bifurcation de Hopf

Les systèmes d'équations différentielles qui dépendent de paramètres peuvent avoir un changement du comportement qualitatif de ces derniers à cause du choix de paramètres et aussi des différents comportements asymptotiques en fonction des valeurs de leurs paramètres, par exemple peuvent tendre vers un cycle limite. Donc, il y a des valeurs pour lesquelles on observe que le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre. Ainsi, ce changement d'état qualitatif est une "*bifurcation*" et la valeur du paramètre associée est appelée "*valeur de bifurcation*".

Il existe deux types de bifurcations : les bifurcations locales et bifurcations globales dues aux collisions. Alors, les bifurcations "locales" paraissent à partir d'une collision de deux objets. Ces bifurcations peuvent être identifiées lors d'une linéarisation du système au voisinage de la solution. De plus, dans ce cas le critère de détection utilisé s'intéresse aux valeurs propres du jacobien. Par contre, les bifurcations "globales" correspondent à la collision de deux variétés, elles sont appelées globales car les linéarisations locales au voisinage de la solution ne seront d'aucune aide. Ces bifurcations, on ne les aborde pas dans cette thèse.

Dans cette thèse, on s'intéresse à une bifurcation locale appelée la *bifurcation de Hopf*. Cette bifurcation qui cause l'apparition d'un cycle limite avec une amplitude infinitésimale mais une période finie, n'existe que pour des systèmes d'ordre supérieur ou égal à deux.

Définition 1.5.1. Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

On dira qu'il y a une bifurcation en μ^* , si en une valeur μ arbitrairement "proche" de μ^* il existe une dynamique qualitativement différente de celle en μ^* .

Considérant l'exemple du système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2. \end{cases}$$

Ce système donne un point d'équilibre stable pour $\mu < 0$, une famille de cercles pour $\mu = 0$ et un point d'équilibre instable pour $\mu > 0$. On dit que le paramètre $\mu = 0$ dans cet exemple est une valeur de bifurcation. μ est la partie réelle de deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ de la matrice définissant le système précédent. Quand ce paramètre change de signe le système change de stabilité et passe de stable à instable.

La théorie de la bifurcation de Hopf s'intéresse à des systèmes différentiels de la forme suivante

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (1.16)$$

où μ est un paramètre réel.

Théorème 1.5.1. [45] (**Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf dans \mathbb{R}^2**)

Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu), \\ \dot{y} = g(x, y, \mu), \end{cases} \quad (1.17)$$

où μ est un paramètre réel. Supposons que $(x, y) = (x_0, y_0)$ est un point d'équilibre qui dépend de μ . Soit $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ les valeurs propres du système linéarisé de (1.17) au voisinage de ce point d'équilibre. Supposons que pour $\mu = \mu^*$, les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\alpha(\mu^*) = 0, \beta(\mu^*) = \omega \neq 0$, où $\text{sgn}(\omega) = \text{sgn} \left[(\partial g / \partial x) \Big|_{\mu=\mu^*}(x_0, y_0) \right]$ (condition de non hyperbolicité).
2. $\frac{\partial \alpha(\mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu^*} = d \neq 0$ (condition de transversalité).
3. $a \neq 0$, où $a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{16\omega}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy})$, où $f_{xy} = (\partial^2 f / \partial x \partial y) \Big|_{\mu=\mu^*}(x_0, y_0)$, etc, (condition de généralité).

Alors, un cycle limite bifurque du point d'équilibre pour $\mu > \mu^*$ si $ad < 0$ où pour $\mu < \mu^*$ si $ad > 0$. De plus, le point d'équilibre (x_0, y_0) est stable pour $\mu > \mu^*$ (resp $\mu < \mu^*$) et instable pour $\mu < \mu^*$ (resp $\mu > \mu^*$) si $d < 0$ (resp $d > 0$). Le cycle limite est stable (resp instable) si le point d'équilibre est instable (resp stable) autour de μ^* où les solutions périodiques existent. L'amplitude du cycle limite augmente comme

$\sqrt{|\mu - \mu^*|}$ lorsque leur période tends vers $\frac{2\pi}{|\omega|}$ quand $\mu \rightarrow \mu^*$.

La bifurcation est dite **bifurcation de Hopf super-critique** si le cycle limite est stable et **bifurcation de Hopf sous-critique** s'il est instable.

Ce théorème est prouvé en dimension arbitraire.

Exemple 1.5.1. On considère le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y - x^3 - xy^2, \\ \dot{y} = -x + \mu y - x^2y - y^3, \end{cases} \quad (1.18)$$

le système (1.18) admet un point d'équilibre unique qui est l'origine. Ce système est composé de deux parties : une partie linéaire et une partie non linéaire. Le système linéarisé au voisinage de l'origine est

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y, \\ \dot{y} = -x + \mu y. \end{cases}$$

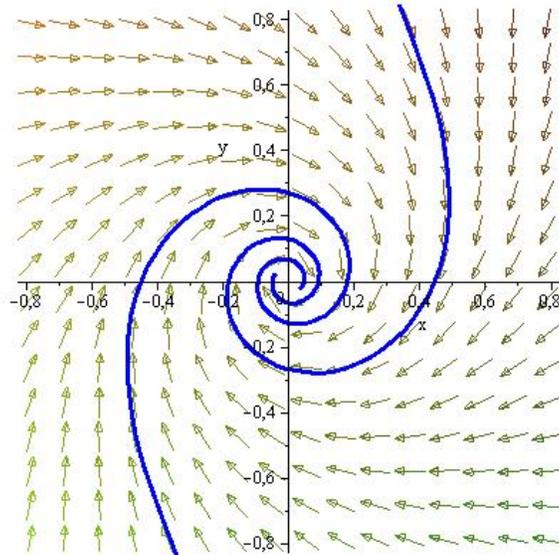
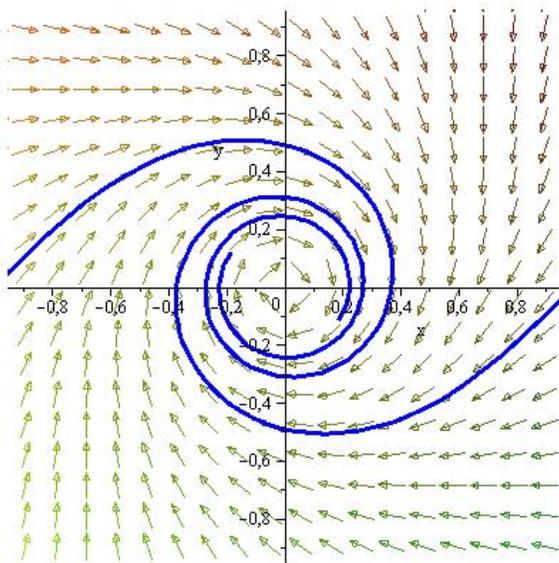
Les valeurs propres de la matrice Jacobienne calculées au point d'équilibre $(0, 0)$ sont complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. La partie réelle des valeurs propres est $\alpha(\mu) = \mu$, et la partie imaginaire est $\beta(\mu) = \pm 1$. On a $\alpha(\mu) = 0 \iff \mu^* = 0$, $\text{sgn}(\omega) = \text{sgn}[-1]$, $\beta(\mu^*) = -1 = \omega \neq 0$, $\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \Big|_{\mu^*=0} = 1 = d \neq 0$ et $a = -1$.

Donc on a une bifurcation de Hopf et la valeur de la bifurcation est $\mu^* = 0$. D'après le Théorème 1.5.8, on a $ad = -1 < 0$, donc il existe un cycle limite pour $\mu > 0$. Comme $d = 1 > 0$, l'origine est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$. Pour $\mu > 0$ le cycle limite est stable d'amplitude $\sqrt{\mu}$. On dit alors qu'on a une **bifurcation de Hopf super-critique**.

En passant en coordonnées polaires, on peut confirmer ce résultat. En effet, pour $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ le système (1.18) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2), \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases}$$

La deuxième équation admet comme solution $\theta(t) = -t + \theta(0)$. Pour $\mu \leq 0$, $\dot{r} < 0 \implies r(t) \searrow$ donc l'origine est un foyer stable. Voir la figure (1.3) et la figure (1.4).

FIGURE 1.3 – Portrait de phase pour $\mu = -0.2$.FIGURE 1.4 – Portrait de phase pour $\mu = 0$.

Pour $\mu > 0$, l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite stable $\Gamma = \sqrt{\mu}(\cos \theta, \sin \theta)^T$ d'amplitude $\sqrt{\mu}$. Voir la figure (1.5).

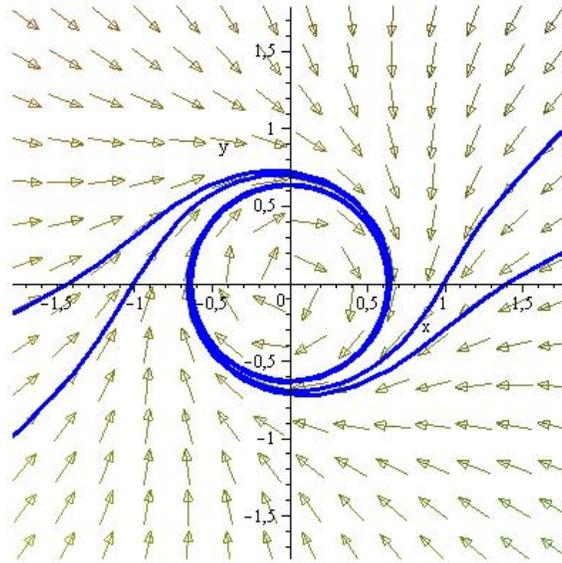


FIGURE 1.5 – Portrait de phase pour $\mu = 0.4$.

On voit que ce cycle limite est apparu pour $\mu > 0$, donc on a une **bifurcation de Hopf super-critique**.

La théorie de moyennisation est l'une des plus importantes théories perturbatives utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Cette théorie est une théorie classique qui donne des conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels ayant un centre. Elle s'applique aux systèmes de la forme $\dot{x} = \varepsilon f(t, x)$ où ε est suffisamment petit, et $f(t, x)$ est T -périodique en la première variable.

Les contributions théoriques essentielles de la théorie de moyennisation ont été faites en 1930 par **Krylov** et **Bogoliubov** [7]. En 1937, la théorie introduite par **Krylov** et **Bogoliubov** [24] permet de trouver le premier ordre de la solution d'équations différentielles non linéaires telles qu'un oscillateur linéaire perturbé par une force extérieure. Ensuite elle est formulée en 1945 par **Bogoliubov** [6], et par **Bogoliubov** et **Mitropolsky** en 1961 [8]. En 1966, **Roseau** [42] donna une démonstration basée sur le lemme de Gronwall. Une étape importante a été franchie ensuite par **Krylov** et **Bogoliubov** qui ont traité le cas quasi-périodique. Pour plus de précision voir le livre de **Sanders, Verhulst** [44].

Buică et **Llibre** [9] en 2004 s'intéressés aussi au problème de la recherche des solutions périodiques pour des systèmes différentiels perturbés. Ils ont réussi à introduire une nouvelle approche pour ce problème. En effet, pour montrer ce résultat, ils ont remplacé le théorème des fonctions implicites par la théorie de degré de Brouwer en utilisant des méthodes topologiques pour résoudre des équations d'opérateurs équivalant à ce problème, sachant que ces équations d'opérateurs sont de dimension finie ou de dimension infinie. De plus, ils ont donné pour la première fois un résultat sur la moyennisation d'ordre trois pour des équations différentielles d'ordre un.

En 2013, **Giné, Grau** et **Llibre** [21] dans un travail récent ont introduit la moyennisation d'ordre arbitraire k pour des équations différentielles d'ordre un.

En 2014, **Llibre, Novaes** et **Teixeira** [30] ont présenté un résultat général qui est la théorie de moyennisation pour la recherche des solutions périodiques d'ordre arbitraire k pour des équations différentielles continues de dimension n .

2.1 Perturbation

Le développement de la théorie de l'influence des petites perturbations pour les solutions des équations différentielles a commencé au 18^{ème} siècle. Depuis 1900, la théorie des perturbations de **Poincaré** a réalisé des découvertes importantes.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $f(t, x, \varepsilon)$ continue par rapport à $t \in \mathbb{R}$ et $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, où ε est un petit paramètre. La fonction f est développable en série relativement à ε . Dans ce cas, f admet un développement en série de Taylor au voisinage de $\varepsilon = 0$, d'où

$$f(t, x, \varepsilon) = f(t, x, 0) + \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 f_2(t, x) + \cdots + \varepsilon^n f_n(t, x) + \cdots . \quad (2.1)$$

Les coefficients f_1, f_2, \cdots, f_n dépendent de t et de x . Les expressions $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^n$, sont appelées des fonctions d'ordre.

Définition 2.1.1. [47] (**Le temps d'échelle**).

Considérons la fonction $f(t, x, \varepsilon)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, et les fonctions d'ordre $\delta_1(\varepsilon)$ et $\delta_2(\varepsilon)$. On dit que

$$f(t, x, \varepsilon) = O(\delta_1(\varepsilon)) \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

sur le temps d'échelle $1/\delta_2(\varepsilon)$ si l'estimation est valide pour $x \in D, 0 \leq \delta_2(\varepsilon)t \leq C$, où C est une constante indépendante de ε .

Exemple 2.1.1. Soit $f(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^2 t \sin x$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, on a
 $f(t, x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ sur le temps d'échelle $1/\varepsilon$,
 $f(t, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{1/2})$ sur le temps d'échelle $1/\varepsilon^{3/2}$.

Théorème 2.1.1. [47] (**Poincaré**). On considère le problème à valeur initiale

$$\dot{y} = F(t, y, \varepsilon), \quad y(t_0) = \mu,$$

où $|t - t_0| \leq h$, $y \in D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$. Si $F(t, y, \varepsilon)$ est continue par rapport à t, y et ε , et si F est développable en série entière convergente par rapport à y et ε pour $\|y\| \leq \rho, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Alors, $y(t)$ est développable en série entière convergente par rapport à ε et μ dans un voisinage de $\varepsilon = \mu = 0$, et convergente sur le temps d'échelle 1.

Preuve. Voir [47].

Avant de présenter les différentes théories de moyennisation, on donne quelques définitions sur la moyenne d'une fonction. Considérons l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon),$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ et ε un petit paramètre.

Définition 2.1.2. *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est continue et T -périodique en la première variable t . On appelle fonction moyennée f^0 de f la fonction définie par*

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt.$$

Définition 2.1.3. *Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On dit que f a une moyenne notée f^0 si la limite suivante existe*

$$f^0(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_t^{t+T} f(\tau, x) d\tau.$$

2.2 Théorie de moyennisation dans le cas périodique

On considère le problème à valeur initiale

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0. \tag{2.2}$$

Supposons que $f(t, x)$ est T -périodique en t et on introduit la moyenne

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt.$$

Considérons le problème à valeur initiale pour l'équation moyennée

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0. \tag{2.3}$$

Théorème 2.2.1. [47] *Considérons les problèmes aux valeurs initiales (2.2) et (2.3) avec $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$. Supposons que*

- a. f, g et $D_x f$ sont continues et bornées par une constante indépendante de ε dans $[0, +\infty) \times D$.
- b. g est Lipschitzienne en $x \in D$.
- c. $f(t, x)$ est T -périodique en t , où T est indépendante de ε .
- d. $y(t) \in D$ pendant un temps d'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors, on a $x(t) - y(t)$ est de l'ordre $O(\varepsilon)$ pendant un temps d'échelle $1/\varepsilon$.

Pour la démonstration, voir [47].

Exemple 2.2.1. On considère l'équation de Mathieu

$$\ddot{x} + (1 + 2\varepsilon \cos(2t))x = 0, \quad (2.4)$$

avec les valeurs initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$. On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} x(t) = y_1(t) \cos(t) + y_2(t) \sin(t), \\ \dot{x}(t) = -y_1(t) \sin(t) + y_2(t) \cos(t), \end{cases} \quad (2.5)$$

on obtient alors le système

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2\varepsilon \sin(t) \cos(2t) (y_1 \cos(t) + y_2 \sin(t)), & y_1(0) = x_0, \\ \dot{y}_2 = -2\varepsilon \cos(t) \cos(2t) (y_1 \cos(t) + y_2 \sin(t)), & y_2(0) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Remarquons que le membre droite du système (2.6) est 2π -périodique en t , donc nous avons le système moyenné

$$\begin{cases} \dot{y}_{10} = -\frac{1}{2}\varepsilon y_{20}, \\ \dot{y}_{20} = -\frac{1}{2}\varepsilon y_{10}. \end{cases} \quad (2.7)$$

On résout le système moyenné (2.7), on obtient les solutions

$$\begin{cases} y_{10}(t) = \frac{1}{2}x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} + \frac{1}{2}x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}, \\ y_{20}(t) = \frac{1}{2}x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} - \frac{1}{2}x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}. \end{cases}$$

L'approximation de $x(t)$ au temps d'échelle $1/\varepsilon$ est

$$x_a(t) = \frac{1}{2}x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} (\cos(t) + \sin(t)) + \frac{1}{2}x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} (\cos(t) - \sin(t)).$$

2.2.1 Théorie de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.8)$$

où $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D est un domaine borné et $t \geq 0$. Supposons que $F(t, x)$ et $R(t, x, \varepsilon)$ sont des fonctions T -périodiques en t .

Le système moyenné associé au système (2.8) est

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (2.9)$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds. \quad (2.10)$$

Théorème 2.2.2. [44] *Soit le système (2.8), on suppose que $F, R, D_x F, D_x^2 F$ et $D_x R$ sont continues et bornées par une constante M dans $[0, \varepsilon) \times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Supposons aussi que F et R sont T -périodiques en t , où T est indépendante de ε . Alors*

(a) *Si p est un point critique pour le système (2.9) tel que*

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0. \quad (2.11)$$

Alors pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x(t, \varepsilon)$ du système (2.8) telle que $x(0, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(b) *Si le point critique $y = p$ du système moyenné (2.9) est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x(t, \varepsilon)$ du système (2.8) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .*

Preuve. Voir [44].

Exemple 2.2.2. (L'équation de Van Der Pol).

Soit

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{y} = y, \\ \dot{x} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases}$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, ce système devient de la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos(\theta) \sin(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)). \end{cases} \quad (2.13)$$

Le système (2.13) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta) + O(\varepsilon^2). \quad (2.14)$$

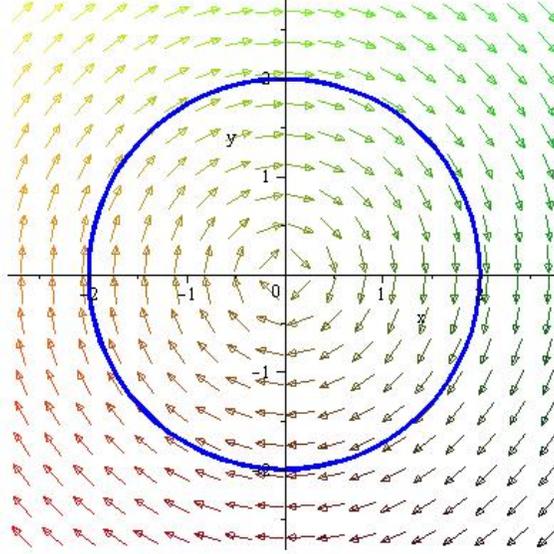
On note que l'équation (2.14) est sous la forme standard (2.8) pour appliquer la théorie de moyennisation si on prend

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(t, x) = -r(1 - r^2 \cos^2(\theta)^2) \sin^2(\theta).$$

On calcule l'équation (2.10), on obtient

$$f^0(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} r(r^2 - 4).$$

$f^0(r)$ a une unique racine positive $r = 2$. Puisque $(df^0/dr)(2) = 1$, par l'hypothèse (a) du théorème 2.2.2 l'équation de Van Der Pol (2.12) a pour $|\varepsilon| \neq 0$ une orbite périodique d'amplitude $r = 2$ du système non perturbé avec $\varepsilon = 0$. De plus, puisque $(df^0/dr)(2) = 1 > 0$ par l'hypothèse (b) du théorème 2.2.2, ce cycle limite est instable. Voir la figure (2.1).


 FIGURE 2.1 – Cycle limite instable de l'équation (2.12) pour $\varepsilon = 0.01$.

Exemple 2.2.3. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(-x + xy + z^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(-y + yz), \\ \dot{z} = \varepsilon(x^2 + yz - 1). \end{cases} \quad (2.15)$$

En coordonnées cylindriques $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ et $z = z$, le système (2.15) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)z^2 - r + rz - rz \cos^2(\theta)), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{1}{r}\varepsilon(rz \cos(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta)z^2 + \cos^3(\theta)r^2 - r^2 \cos(\theta)), \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) + rz \sin(\theta) - 1). \end{cases}$$

Pour écrire le système (2.15) sous la forme standard pour appliquer la théorie de moyennisation on considère θ comme nouvelle variable indépendante. D'où

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)z^2 - r + rz - rz \cos^2(\theta)), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) + rz \sin(\theta) - 1). \end{cases} \quad (2.16)$$

Le système (2.16) est de la forme

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

où F_1, F_2 sont périodiques de période 2π . Calculons maintenant le système moyenné, on obtient

$$\begin{cases} f_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta, z) d\theta = \frac{1}{2}r(z-2), \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta, z) d\theta = \frac{1}{2}r^2 - 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

On résout le système (2.17), on obtient les deux racines

$$(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2), \quad (r_2, z_2) = (-\sqrt{2}, 2).$$

Comme $r > 0$, la solution $(\sqrt{2}, 2)$ c'est la seule qui fournit un cycle limite. On vérifie maintenant que le déterminant calculé en cette racine est non nul.

$$D(r_1, z_1) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z - 1 & \frac{1}{2}r \\ r & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)} = -1 \neq 0.$$

D'après le théorème 2.2.2, le système (2.15) a pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit un seul cycle limite.

Le point singulier $(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)$ du système moyenné (2.17) est hyperbolique, donc la stabilité du cycle limite est de même stabilité que $(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)$. Les valeurs propres ± 1 de $D_{r,z} f^0$ sont de signes différents, alors le point singulier est un point selle qui est toujours instable. Donc, le cycle limite est instable. Voir la figure (2.2).

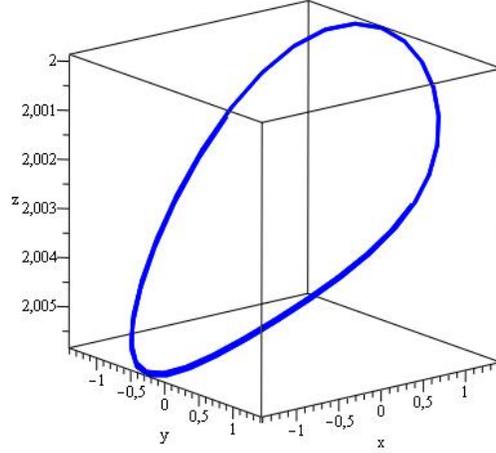


FIGURE 2.2 – Cycle limite instable du système (2.15) pour $\varepsilon = 0.001$.

2.2.2 Théorie de moyennisation du second ordre

Le théorème suivant fournit une approximation du second ordre pour les solutions de certains systèmes différentiels périodiques.

Théorème 2.2.3. [44] *On considère les deux problèmes de Cauchy*

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 G(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.18)$$

et

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 [f^{10}(y) + g^0(y)], \quad y(0) = x_0, \quad (2.19)$$

où $F_1, F_2 : [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : [0, +\infty) \times D \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues T -périodique en la première variable t , et D un ouvert de \mathbb{R}^n . f^0, f^{10} et g^0 sont des fonctions moyennées correspondantes à F_1, F_2 et G respectivement.

Soit

$$f_1(t, x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y_1(t, x) - \frac{\partial y_1}{\partial x} f^0(x),$$

où

$$y_1(t, x) = \int_0^t [F_1(s, x) - f^0(x)] ds + z(x),$$

et $z(x)$ est une fonction différentiable de moyenne nulle. Supposons que

- (a) $\frac{\partial F_1}{\partial x}, F_2$ et G sont Lipschitziennes relativement à x et continues dans leur domaine de définition.
- (b) $|G(t, x, \varepsilon)|$ est bornée par une constante M positive dans $[0, \frac{M}{\varepsilon}] \times D \times (0, \varepsilon_0]$.

(c) T est indépendante de ε .

(d) $y(t) \in D$ pendant un temps d'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y_1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2),$$

pendant un temps d'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$.

Corollaire 2.2.1. [44] *Si les hypothèses du théorème 2.2.3 sont satisfaites, et de plus*

$$f^0(y) = 0.$$

Alors

1. *Si p est un point d'équilibre du système moyenné (2.19) tel que*

$$\frac{\partial}{\partial y} (f^{10}(y) + g^0(y))_{y=p} \neq 0, \quad (2.20)$$

alors, il existe une solution T -périodique $\phi(t, \varepsilon)$ du système (2.18) telle que $\phi(0, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. *Si (2.20) est négative, la solution périodique $\phi(t, \varepsilon)$ du système (2.18) est asymptotiquement stable pour ε suffisamment petit. Si (2.20) est positive, cette solution est instable.*

Exemple 2.2.4. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (x^2 - 4xy), \\ \dot{y} = x + \varepsilon^2 (y^2x + y^5x - 2y + 6y^3 - y^5). \end{cases} \quad (2.21)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(-4r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^3(\theta)) + \varepsilon^2(r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) - r^3 \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\ \quad + 2r \cos^2(\theta) - r^6 \cos^7(\theta) + r^5 \cos^6(\theta) - 2r + 6r^3 + r^6 \cos(\theta) - r^5 - 3r^6 \cos^3(\theta) \\ \quad + 3r^5 \cos^2(\theta) - 12r^3 \cos^2(\theta) + 3r^6 \cos^5(\theta) - 3r^5 \cos^4(\theta) + 6r^3 \cos^4(\theta)), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon(4r \cos(\theta) - 4r \cos^3(\theta) - r \cos^2(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^2(-\cos(\theta)r^4 \sin(\theta) \\ \quad + \sin(\theta)r^5 \cos^6(\theta) - 6 \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^2 + \sin(\theta)r^5 \cos^2(\theta) - 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 2 \sin(\theta)r^5 \cos^4(\theta) - \cos^4(\theta)r^2 - \sin(\theta) \cos^5(\theta)r^4 + r^2 \cos^2(\theta) + 2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^4 \\ \quad + 6r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)). \end{cases}$$

Considérons maintenant θ comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3), \quad (2.22)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= -4r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^3(\theta), \\ F_2(r, \theta) &= 15r^3 \sin(\theta) \cos^3(\theta) - 15r^3 \cos(\theta)^5 \sin(\theta) + r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) + r^6 \sin^2(\theta) \cos^5(\theta) \\ &\quad - r^5 \sin^2(\theta) \cos^4(\theta) - 8r^3 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) - 2r^6 \sin^2(\theta) \cos^3(\theta) + 2r^5 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\ &\quad - 6r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + r^6 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - r^5 \sin^2(\theta) - 2r \sin^2(\theta) + 6r^3 \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème 2.2.3, on calcule la fonction moyennée

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = 0.$$

On peut passer à la théorie de moyennisation d'ordre deux, on calcule

$$\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) = -8r \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 2r \cos^3(\theta),$$

ensuite

$$\int_0^\theta F_1(r, s) ds = -\frac{4}{3}r^2 + \frac{4}{3}r^2 \cos^3(\theta) + \frac{1}{3}r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \frac{2}{3}r^2 \sin(\theta).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds + F_2(r, \theta) \right] d\theta \\ &= r \left(-\frac{5}{16}r^4 + \frac{7}{4}r^2 - 1 \right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation (2.23) et on obtient deux racines positives $r_1 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 + 10\sqrt{29})}$, $r_2 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 - 10\sqrt{29})}$.

Comme

$$\frac{d}{dr} f^{10}(r) = -\frac{25}{16}r^4 + \frac{21}{4}r^2 - 1.$$

D'où

$$\frac{d}{dr} f^{10}(r_1) = -13.33923079 \neq 0,$$

et

$$\frac{d}{dr} f^{10}(r_2) = 1.739230730 \neq 0.$$

Donc il existe deux cycles limites, et d'après l'hypothèse (2) du corollaire 2.2.1 on a $\frac{d}{dr} f^{10}(r_1) = -13.33923079 < 0$ et $\frac{d}{dr} f^{10}(r_2) = 1.739230730 > 0$. Alors, le premier cycle limite est stable d'amplitude $r_1 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 + 10\sqrt{29})}$ et le deuxième cycle limite est instable d'amplitude $r_2 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 - 10\sqrt{29})}$ pour ε suffisamment petit. Voir la figure (2.3) et la figure (2.4).

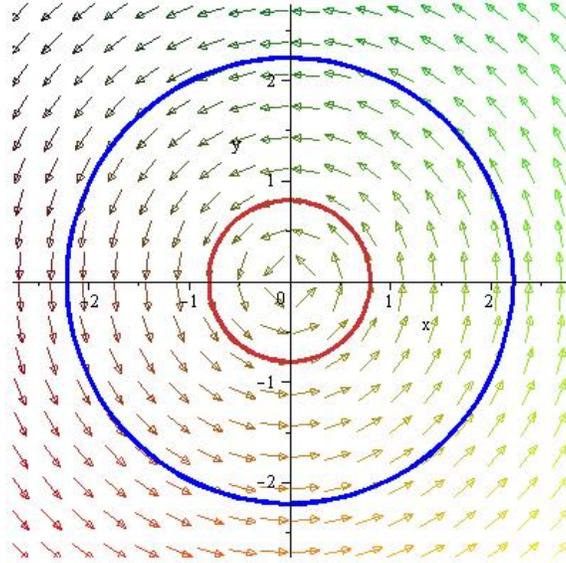


FIGURE 2.3 – Deux cycles limites du système (2.21) pour $\varepsilon = 0.001$.

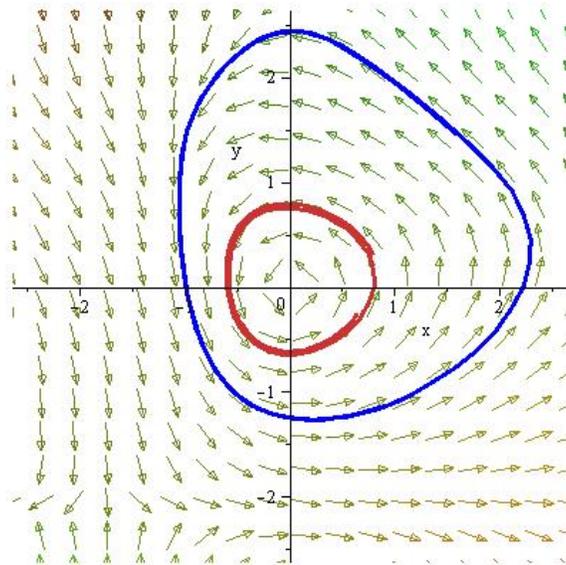


FIGURE 2.4 – Deux cycles limites du système (2.21) pour $\varepsilon = 0.18$.

2.3 Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer

Dans cette section, on s'intéresse à la théorie de moyennisation pour la recherche des solutions périodiques d'un système différentiel suivant le degré de Brouwer.

2.3.1 Rappels sur le degré de Brouwer

Définition 2.3.1. (Degré de Brouwer). Soit D un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et V un sous ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^n tel que $V \subset D$, et soit $f : \bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction telle que $0 \notin f(\partial V, \varepsilon)$ pour un certain ε . Nous appelons $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0)$ le **degré de Brouwer** de la fonction $f(\cdot, \varepsilon)$ par rapport à l'ensemble V et le point 0.

Propriété 2.3.1. Si $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0) \neq 0$ alors l'équation $f(\cdot, \varepsilon) = 0$ a une solution dans V .

Définition 2.3.2. (Degré de Brouwer pour des fonctions de classe C^1). Soit $g \in C^1(t)$, $\bar{V} \subset D$ et $Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\}$. Supposons aussi que $J_g(z) \neq 0$ pour tout $z \in Z_g$ où $J_g(z)$ est le déterminant jacobien de g en z . Ce qui assure que Z_g est fini, alors

$$d_B(g, V, 0) = \sum_{z \in Z_g} \text{sign}(J_g(z)).$$

(Voir le théorème 1.1.2 de [34]).

Remarque 2.3.1. Soit $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 , avec $g(a) = 0$, où D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in D$. Si $J_g(a) \neq 0$, il existe un voisinage V de a tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et on a

$$d_B(g, V, 0) \in \{-1, 1\}.$$

Exemple 2.3.1. Soit la fonction $f(z) = z^2$, le degré de Brouwer de f est égale à 0. Cette fonction a une seule racine $z = 0$ et $f'(0) = 0$.

Pour calculer le degré de Brouwer de f , on considère une constante $\lambda > 0$, l'intervalle $V = (-2\lambda, 2\lambda)$ et la fonction

$$g(z) = z^2 - \lambda^2.$$

Alors, la fonction g a deux racines dans V qui sont $z_1 = \lambda$ et $z_2 = -\lambda$. La matrice jacobienne en z_1 est $g'(z_1) = 2\lambda > 0$ et en z_2 est $g'(z_2) = -2\lambda < 0$.

Donc, $d_B(g, V, 0) = 0$.

2.3. THÉORIE DE MOYENNISATION SUIVANT LE DEGRÉ DE BROUWER

Lemme 2.3.1. [9] *On considère les fonctions continues : $f_i : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$, pour $i = 0, \dots, k$ et $f, g, r : \bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ données par*

$$g(\cdot, \varepsilon) = f_0(\cdot) + \varepsilon f_1(\cdot) + \varepsilon^2 f_2(\cdot) + \dots + \varepsilon^k f_k(\cdot), \quad (2.24)$$

et

$$f(\cdot, \varepsilon) = g(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} r(\cdot, \varepsilon). \quad (2.25)$$

Supposons que

$$g(\cdot, \varepsilon) \neq 0 \text{ pour tout } z \in \partial V, \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\}. \quad (2.26)$$

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0)$ est bien défini et de plus

$$d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0) = d_B(g(\cdot, \varepsilon), V, 0).$$

Pour la démonstration voir [9].

2.3.2 Théorie de moyennisation d'ordre un, deux et trois dans \mathbb{R}^n

Théorème 2.3.1. [30] *On considère le système différentiel*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x) + \varepsilon^4 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.27)$$

où $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques en la première variable, et D un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . Supposons que les hypothèses (i) et (ii) sont vérifiées.

(i) $F_1(t, \cdot) \in C^2(D), F_2(t, \cdot) \in C^1(D)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. $F_1, F_2, F_3, R, D_x^2 F_1, D_x F_2$ sont localement Lipschitziennes par rapport à x , et R est deux fois différentiable par rapport à ε .

On définit $F_{k0} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour $k = 1, 2, 3$

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) \, ds,$$

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z F_1(s, z) \cdot y_1(s, z) + F_2(s, z)] \, ds,$$

$$\begin{aligned} F_{30}(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} y_1(s, z)^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(s, z) y_1(s, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial z}(s, z) y_2(s, z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F_2}{\partial z}(s, z) (y_1(s, z)) + F_3(s, z) \right] \, ds, \end{aligned}$$

où

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(t, z) dt,$$

et

$$y_2(s, z) = \int_0^s \left[\frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) \int_0^t F_1(r, z) dr + F_2(t, z) \right] dt.$$

(ii) Pour $V \subset D$ un sous ensemble ouvert et pour chaque $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$, il existe $a_\varepsilon \in V$ telle que :

$$F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) + \varepsilon^2 F_{30}(a_\varepsilon) = 0 \text{ et } d_B(F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30}, V, a_\varepsilon) \neq 0.$$

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ du système (2.27) telle que $\varphi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$.

L'expression $d_B(F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30}, V, a_\varepsilon) \neq 0$ signifie que le degré de Brouwer de la fonction $F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ au point d'équilibre a_ε est non nul.

Si F_{10} est non nulle. Alors les racines de $F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30}$ sont principalement les racines de F_{10} pour ε suffisamment petit. Dans ce cas le résultat précédent est celui de la *Théorie de moyennisation d'ordre un*.

Si F_{10} est nulle et F_{20} est non nulle. Alors les racines de $F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30}$ sont principalement les racines de F_{20} pour ε suffisamment petit. Dans ce cas le résultat précédent est celui de la *Théorie de moyennisation d'ordre deux*.

Si F_{10} et F_{20} sont nulles et F_{30} est non nulle. Alors les racines de $F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30}$ sont principalement les racines de F_{30} pour ε suffisamment petit. Dans ce cas le résultat précédent est celui de la *Théorie de moyennisation d'ordre trois*.

Notons que l'hypothèse (i) du théorème 2.3.1 affirme l'existence et l'unicité de la solution pour chaque problème à valeur initiale sur l'intervalle $[0, T]$, voir [9]. D'où, pour chaque $z \in D$ on note par $x(\cdot, z, \varepsilon)$ la solution du (2.27) avec la valeur initiale $x(\cdot, z, \varepsilon) = z$.

On considère la fonction $\xi : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par

$$\xi(z, \varepsilon) = \int_0^T (\varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x) + \varepsilon^4 R(t, x, \varepsilon)) dt.$$

Pour chaque $z \in D$, on a

$$x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon) = \xi(z, \varepsilon).$$

De plus, la fonction ξ peut s'écrire sous la forme

$$\xi(z, \varepsilon) = \varepsilon F_{10}(z) + \varepsilon^2 F_{20}(z) + \varepsilon^3 F_{30}(z) + O(\varepsilon^4),$$

2.3. THÉORIE DE MOYENNISATION SUIVANT LE DEGRÉ DE BROUWER

où F_{10}, F_{20} et F_{30} sont définies dans le théorème 2.3.1, et $O(\varepsilon^4)$ est une fonction bornée sur chaque sous ensemble compact de $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$ multiplié par ε^4 .

La stabilité des cycles limites associés à la racine simple a_ε est déterminée suivant les valeurs propres de la matrice jacobienne de $\xi(z, \varepsilon)$ évaluées en a_ε et d'après le théorème 3.5.1 de [44], on sait que le cycle limite associé à la racine a_ε de F_{30} quand $F_{10} = 0$ et $F_{20} = 0$ est donné par l'expression

$$x(t, a_\varepsilon, \varepsilon) = a_\varepsilon + \varepsilon y_1(t, a_\varepsilon) + \varepsilon^2 y_2(t, a_\varepsilon) + O(\varepsilon^3). \quad (2.28)$$

Exemple 2.3.2. *On considère le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(x^2 - 2x^4), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon^3(x^2 + y - y^3). \end{cases} \quad (2.29)$$

En coordonnées polaires (r, θ) avec $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $r > 0$, le système (2.29) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(-r^2 \cos^3(\theta) + 2r^4 \cos^5(\theta)) + \varepsilon^3(-\sin(\theta)r^2 \cos^2(\theta) - r + r^3 \\ \quad - 2r^3 \cos^2(\theta) + r \cos^2(\theta) + r^3 \cos^4(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(-2 \sin(\theta)r^3 \cos^4(\theta) + \sin(\theta)r \cos^2(\theta)) + \varepsilon^3(\cos(\theta) \times \\ \quad r^2 \sin(\theta) - \sin(\theta)r^2 \cos^3(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta) - r \cos^3(\theta)). \end{cases} \quad (2.30)$$

Considérant θ comme nouvelle variable, le système (2.30) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + \varepsilon^3 F_3(r, \theta) + O(\varepsilon^4), \quad (2.31)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) &= r^2 \cos^3(\theta) - 2r^4 \cos^5(\theta), \\ F_2(r, \theta) &= 4 \sin(\theta) \cos^9(\theta) r^7 - 4 \sin(\theta) \cos^7(\theta) r^5 + \sin(\theta) \cos^5(\theta) r^3, \\ F_3(r, \theta) &= \sin(\theta) r^2 \cos^2(\theta) - 8r^{10} \cos^{13}(\theta) \sin^2(\theta) + 12r^8 \cos^{11}(\theta) \sin^2(\theta) \\ &\quad - 6r^6 \cos^9(\theta) \sin^2(\theta) + r^4 \cos^7(\theta) \sin^2(\theta) + r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\ &\quad - r^3 \sin^2(\theta) + r \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Premièrement, on calcule

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = 0,$$

ensuite on doit calculer f_2 et pour cela, on calcule l'expression $\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \int_0^\theta F_1(r, t) dt$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \int_0^\theta F_1(r, t) dt &= r(2 \cos^3(\theta) - 8r^2 \cos^5(\theta)) \cdot \left(\frac{r^2}{3} \sin(\theta) \cos^2(\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2r^2}{3} \sin(\theta) + r^4 \left(-\frac{2}{5} \cos^4(\theta) \sin(\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{8}{15} \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \frac{16}{15} \sin(\theta) \right) \right). \end{aligned}$$

D'où

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, t) dt + F_2(r, \theta) \right] d\theta = 0.$$

Maintenant, en appliquant la théorie de moyennisation d'ordre trois et pour cela, on calcule la fonction moyennée suivante

$$\begin{aligned} f_3(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}(r, \theta) \cdot (y_1(r, \theta))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_2(r, \theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F_2}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_1(r, \theta) + F_3(r, \theta) \right] d\theta, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} y_1(r, \theta) &= \int_0^\theta F_1(r, s) ds, \\ y_2(r, \theta) &= \int_0^\theta \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, s) \cdot \int_0^s F_1(r, t) dt + F_2(r, s) \right] ds. \end{aligned}$$

Premièrement, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}(r, \theta) \cdot (y_1(r, \theta))^2 &= (\cos^3(\theta) - 12r^2 \cos^5(\theta)) \cdot \left(\frac{1}{3} \sin(\theta) r^2 \cos^2(\theta) \right) \\ &\quad + \frac{2}{3} r^2 \sin(\theta) - \frac{2}{5} r^4 \cos^4(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad - \frac{8}{15} r^4 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \frac{16}{15} r^4 \sin(\theta)^2, \end{aligned}$$

ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_2(r, \theta) &= \left(\frac{1}{2} (2r \cos^3(\theta) - 8r^3 \cos^5(\theta)) \right) \cdot \left(\frac{602}{225} r^7 - \frac{38}{15} r^5 + \frac{11}{18} r^3 \right) \\ &\quad - \frac{18}{25} r^7 \cos^1 0(\theta) + \frac{14}{15} r^5 \cos^8(\theta) - \frac{8}{15} r^7 \cos^8(\theta) \\ &\quad - \frac{5}{18} r^3 \cos^6(\theta) - \frac{64}{45} r^7 \cos^6(\theta) + \frac{16}{15} r^5 \cos^6(\theta) \\ &\quad + \frac{8}{15} r^5 \cos^4(\theta) - \frac{1}{3} r^3 \cos^4(\theta), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_1(r, \theta) &= (28 \sin(\theta) \cos^9(\theta) r^6 - 20 \sin(\theta) \cos^7(\theta) r^4) \\ &\quad + 3 \sin(\theta) \cos^5(\theta) r^2 \cdot \left(\frac{r^2}{3} \sin(\theta) \cos^2(\theta) + \frac{2}{3} r^2 \sin(\theta) \right) \\ &\quad - \frac{2}{5} r^4 \cos^4(\theta) \sin(\theta) - \frac{8}{15} r^4 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \frac{16}{15} r^4 \sin(\theta). \end{aligned}$$

2.3. THÉORIE DE MOYENNISATION SUIVANT LE DEGRÉ DE BROUWER

Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation

$$f_3(r) = \frac{1}{2}r \left(1 - \frac{3}{4}r^2\right) = 0. \quad (2.32)$$

L'équation (2.32) a une seule racine positive $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Selon le théorème 2.3.1, pour avoir un cycle limite on doit vérifier que $\frac{d}{dr}f_3(r)\Big|_{r=\frac{2}{3}\sqrt{3}} = -1 \neq 0$, ce qui est fait.

On conclut que le système (2.29) a un seul cycle limite d'amplitude $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Voir la figure (2.5).

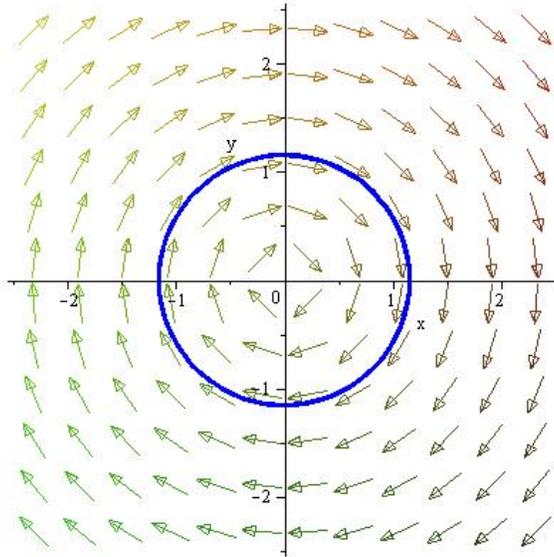


FIGURE 2.5 – Cycle limite du système (2.29) pour $\varepsilon = 0.001$.

Chapitre 3

Cycles limites pour une classe généralisée des systèmes de Liénard

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux cycles limites d'un système différentiel non linéaire de Liénard. On donne un résultat concernant le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard et ceci en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un et deux. Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans le journal " *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*".

S. Badi, E. Bendib and A. Makhlof, On the maximum number of limit cycles for a generalization of polynomial Liénard differential systems via averaging theory. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. ISSN 0973-1768 Volume 12, Number 4(2016), pp. 2971-2985.

3.1 Résultats introductifs

Les équations différentielles du deuxième ordre surviennent dans de nombreux domaines de la science et de la technologie. En 1922, l'ingénieur hollandais **Balthasar Van der Pol** étudiait les propriétés électriques des tubes à néon. Pendant ce temps, l'oscillographe n'existait pas pour pouvoir visualiser graphiquement un signal électrique, il contrôlait l'évolution de son circuit en écoutant les changements de tonalité dans un combiné téléphonique. Il modélisa les charges du tube par l'équation

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0.$$

Ensuite, l'ingénieur français **Liénard** fonde un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour une classe générale de l'équation de **Van der Pol** qui porte son nom

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0,$$

où $f(x)$ est un polynôme de degré n . **Liénard** a transformé cette équation en un système, obtenu en posant $\dot{x} = z$

$$\dot{x} = z, \quad \dot{z} = -x - f(x)z.$$

Le problème fondamental lié au système de **Liénard** est le nombre de cycles limites qui peuvent exister en même temps. Il y a plusieurs résultats importants dans cette étude qui ont été publiés.

En 2012, **Alavez-Ramirez et al** [1] ont étudié un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon g_{11}(x) - \varepsilon^2 g_{12}(x), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y) - \varepsilon^2(g_{22}(x) + f_{22}(x)y), \end{cases}$$

où g_{1i}, g_{2i}, f_{2i} pour $i = 1, 2$ sont de degré l, m et n respectivement, et ε est un petit paramètre. Ils ont prouvé qu'au plus

$$\frac{1}{2} (\max \{O(m+n), E(l+m) - 1\} - 1)$$

(où $O(k)$ est le plus grand entier impair $\leq k$ et $E(k)$ est le plus grand entier pair $\leq k$) cycles limites bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.

Dans [32], **J. Llibre** et **C. Valls** ont utilisé la théorie de moyennisation d'ordre un et deux pour étudier un système plus général

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y) - \varepsilon^2(g_{12}(x) + f_{12}(x)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y) - \varepsilon^2(g_{22}(x) + f_{22}(x)y), \end{cases}$$

3.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE LIÉNARD

où $g_{1i}, f_{1i}, g_{2i}, f_{2i}$ pour $i = 1, 2$ sont de degré l, k, m et n respectivement, et ε est un petit paramètre. Ils ont montré qu'au plus

$$\lambda = \max \left[\mu + [(m-1)/2], \mu + [l/2], [(n-1)/2] + [m/2], [k/2] + [m/2] - 1, \right. \\ \left. [(n-1)/2] + [(l-1)/2] + 1, [k/2] + [(l-1)/2] \right]$$

(où $\mu = \min\{[n/2], [(k-1)/2]\}$) cycles limites bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$.

En 2013, **Llibre** et **Valls** [33] ont étudié le système différentiel polynomial

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_1(x)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x)y, \end{cases}$$

où $f_1(x) = \varepsilon f_{11}(x) + \varepsilon^2 f_{12}(x) + \varepsilon^3 f_{13}(x)$, $g_2(x) = \varepsilon g_{21}(x) + \varepsilon^2 g_{22}(x) + \varepsilon^3 g_{23}(x)$, et $f_2(x) = \varepsilon f_{21}(x) + \varepsilon^2 f_{22}(x) + \varepsilon^3 f_{23}(x)$ où f_{1i}, f_{2i} et g_{2i} sont de degré l, n et m respectivement pour $i = 1, 2, 3$, et ε suffisamment petit.

Ils ont trouvé une borne supérieure du nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques d'un centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre trois.

3.2 Nombre maximum de cycles limites pour une classe généralisée des systèmes de Liénard par la théorie de moyennisation

Nous allons utiliser la théorie de moyennisation d'ordre un et deux pour étudier le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$, perturbé par une classe généralisée d'équations différentielles de Liénard de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_1(x)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x, y)y, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f_1(x) = \varepsilon f_{11}(x) + \varepsilon^2 f_{12}(x)$, $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y) + \varepsilon^2 f_{22}(x, y)$ et $g_2(x) = \varepsilon g_{21}(x) + \varepsilon^2 g_{22}(x)$, où f_{1i}, f_{2i} et g_{2i} sont de degré l, n et m respectivement pour $i = 1, 2$, et ε suffisamment petit. Notons que ce système est plus général que celui étudié dans [33].

3.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE LIÉNARD

Notre résultat principal est

Théorème 3.2.1. *Pour ε suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites pour la classe généralisée du système de Liénard (3.1) qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ est*

- (a) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un.
 (b) $\frac{1}{2} \max \{2O(n) - 2, O(n) + E(m) - 1, O(n) + O(l) - 2, E(n)\}$ en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre deux, où $O(i)$ est le plus grand entier impair inférieur ou égal à i et $E(i)$ le plus grand entier pair inférieur ou égal à i .

Preuve de la partie (a) du Théorème 3.2.1.

Dans cette preuve, on utilise la théorie de moyennisation d'ordre un. Supposons que

$$f_{11}(x) = \sum_{i=0}^l a_{i,1}x^i, \quad f_{21}(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij,2}x^i y^j, \quad g_{21}(x) = \sum_{i=0}^m b_{i,2}x^i.$$

En coordonnées polaires (r, θ) , où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, le système (3.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = -\varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \cos^i(\theta) \sin(\theta) \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin(\theta) \right), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \cos^{i+1}(\theta) \right. \\ \quad \left. - \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} \cos^i(\theta) \sin^2(\theta) \right). \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (3.2) s'écrit sous la forme standard du théorème de moyennisation d'ordre un

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2), \quad (3.3)$$

où

$$F(r, \theta) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \cos^i(\theta) \sin(\theta) \\ + \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin(\theta).$$

3.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE LIÉNARD

Maintenant, on calcule la fonction moyennée

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta,$$

on utilise les formules suivantes

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ impair,} \\ \pi \alpha_{ij}, & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \end{cases}$$

où α_{ij} est une constante non nulle, d'où

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2} \sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} \alpha_{ij} r^{i+j+1}, \quad (3.4)$$

où i et j sont pairs. On voit que le polynôme $F_{10}(r)$ a au plus $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ racines positives. De plus ce polynôme peut admettre exactement $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ racines positives simples si nous choisissons convenablement les coefficients a_{ij} . Cela complète la preuve de la partie (a) du Théorème 3.2.1.

Exemple 3.2.1. *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(\sqrt{2} + 5x^4)y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + x + (3 + xy^2 - \frac{1}{2}y^2)y). \end{cases} \quad (3.5)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, le système (3.5) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sin(\theta) (1 + ((\sqrt{2} + 1) \cos(\theta) + 3 \sin(\theta))r - \frac{1}{2} \sin^3(\theta)r^3 \\ \quad + \cos(\theta) \sin^3(\theta)r^4 + 5 \cos^5(\theta)r^5), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r} (\cos(\theta) + (\cos^2(\theta) + 3 \cos(\theta) \sin(\theta) - \sqrt{2} \sin^2(\theta))r \\ \quad - \frac{1}{2} \cos(\theta) \sin^3(\theta)r^3 + 5 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta)r^4 - 5 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta)r^5). \end{cases}$$

Pour déterminer les cycles limites, on résout l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{r}{2} \left(3 - \frac{3}{8}r^2 \right) = 0. \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) possède une racine positive $r = 2\sqrt{2}$. D'après (a) du théorème 3.2.1, le système (3.5) a exactement un unique cycle limite qui bifurque des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$. Voir la figure (3.1).

3.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE
GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE LIÉNARD

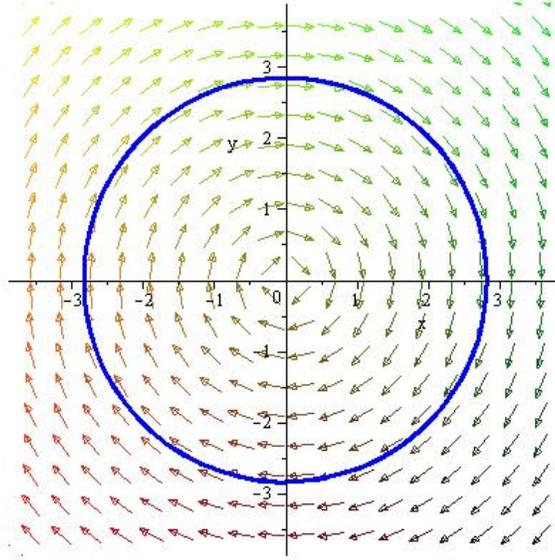


FIGURE 3.1 – Cycle limite du système (3.5) pour $\varepsilon = 0.0001$.

Preuve de la partie (b) du Théorème 3.2.1.

En utilisant la théorie de moyennisation d'ordre deux, et en prenant f_{11} , f_{21} et g_{21} de la preuve de la partie (a) du Théorème 3.2.1, et

$$f_{12}(x) = \sum_{i=0}^l c_{i,1}x^i, \quad f_{22}(x, y) = \sum_{i+j=0}^n c_{ij,2}x^i y^j, \quad g_{22}(x) = \sum_{i=0}^m d_{i,2}x^i,$$

le système (3.1) en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -I(r, \theta)\varepsilon - II(r, \theta)\varepsilon^2, \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{1}{r} \left[I_1(r, \theta)\varepsilon + II_1(r, \theta)\varepsilon^2 \right], \end{cases} \quad (3.7)$$

où

$$\begin{aligned} I(r, \theta) &= \sum_{i+j=0}^n a_{ij,2}r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2}r^i \cos^i(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad + \sum_{i=0}^l a_{i,1}r^{i+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin(\theta), \\ II(r, \theta) &= \sum_{i+j=0}^n c_{ij,2}r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) + \sum_{i=0}^m d_{i,2}r^i \cos^i(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad + \sum_{i=0}^l c_{i,1}r^{i+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin(\theta), \end{aligned}$$

3.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE
GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE LIÉNARD

et

$$\begin{aligned}
 I_1(r, \theta) &= \sum_{i+j=0}^n a_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \cos^{i+1}(\theta) \\
 &\quad - \sum_{i=0}^l a_{i,1} r^{i+1} \cos^i(\theta) \sin^2(\theta), \\
 II_1(r, \theta) &= \sum_{i+j=0}^n c_{ij,2} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \sum_{i=0}^m d_{i,2} r^i \cos^{i+1}(\theta) \\
 &\quad - \sum_{i=0}^l c_{i,1} r^{i+1} \cos^i(\theta) \sin^2(\theta).
 \end{aligned}$$

Considérons maintenant θ comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3), \quad (3.8)$$

où

$$\begin{aligned}
 F_1(r, \theta) &= I(r, \theta), \\
 F_2(r, \theta) &= II(r, \theta) - \frac{1}{r} I(r, \theta) I_1(r, \theta).
 \end{aligned}$$

Déterminons la fonction moyennée suivante

$$F_{20}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dr} F_1(r, \theta) y_1(r, \theta) + F_2(r, \theta) \right] d\theta,$$

où $y_1(r, \theta) = \int_0^\theta F_1(r, s) ds$. Pour cela, on a besoin d'annuler la fonction moyennée F_{10} , donc on pose $a_{ij,2} = 0$ pour tout i pair et j pair. Premièrement, on calcule

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) &= \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair ou} \\ j \text{ impair}}}^n (i+j+1) a_{ij,2} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \\
 &\quad + \sum_{i=0}^m i b_{i,2} r^{i-1} \cos^i(\theta) \sin(\theta) + \sum_{i=0}^l (i+1) a_{i,1} r^i \cos^{i+1}(\theta) \sin(\theta),
 \end{aligned}$$

3.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE
GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE LIÉNARD

et

$$\begin{aligned}
y_1(r, \theta) = & a_{10,2}r^2(\alpha_{110} \sin(\theta) + \alpha_{210} \sin(3\theta)) + \cdots + a_{ce,2}r^{c+e+1}(\alpha_{1ce} \sin(\theta) \\
& + \alpha_{2ce} \sin(3\theta) + \cdots + \alpha_{\frac{(c+e+2)+1}{2}ce} \sin((c+e+2)\theta)) + a_{01,2}r^2(\alpha_{101} \\
& + \alpha_{201} \cos(\theta) + \alpha_{301} \cos(3\theta)) + \cdots + a_{pq,2}r^{p+q+1}(\alpha_{1pq} + \alpha_{2pq} \cos(\theta) \\
& + \alpha_{3pq} \cos(3\theta) + \cdots + \alpha_{\frac{(p+q+2)+3}{2}pq} \cos((p+q+2)\theta)) + a_{11,2}r^3(\alpha_{111} \\
& + \alpha_{211} \cos(2\theta) + \alpha_{311} \cos(4\theta)) + \cdots + a_{cq,2}r^{c+q+1}(\alpha_{1cq} + \alpha_{2cq} \cos(2\theta) \\
& + \alpha_{3cq} \cos(4\theta) + \cdots + \alpha_{\frac{(c+q+2)+2}{2}cq} \cos((c+q+2)\theta)) \\
& + \sum_{i=0}^m \frac{1}{i+1} b_{i,2} r^i (1 - \cos^{i+1}(\theta)) + \sum_{i=0}^l \frac{1}{i+2} a_{i,1} r^{i+1} (1 - \cos^{i+2}(\theta)),
\end{aligned}$$

où c est le plus grand nombre impair et e est le plus grand nombre pair tels que $c+e \leq n$, p est le plus grand nombre pair et q est le plus grand nombre impair tels que $p+q \leq n$, α_{ijk} sont les constantes réelles obtenues durant le calcul de $\int_0^\theta \cos^i(s) \sin^{j+2}(s) ds$ pour tout i et j .

Après l'intégration du produit $\frac{d}{dr} F_1(r, \theta) y_1(r, \theta)$ entre 0 et 2π par rapport à θ , seulement les intégrales suivantes sont différentes de zéro

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \sin((2h+1)\theta) d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ impair et } j \in \mathbb{N}, \\ \pi A_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & h = 0, 1, \dots, \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \cos((2h+1)\theta) d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ impair et } i \in \mathbb{N}, \\ \pi B_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & h = 0, 1, \dots, \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+2}(\theta) d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ impair et } i, k \in \mathbb{N}, \\ \pi C_{ijk} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ pair et } k \text{ pair,} \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos^{i+k+2}(\theta) \sin^{j+2}(\theta) d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ impair et } i, k \in \mathbb{N}, \\ \pi D_{ijk} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ pair et } k \text{ impair} \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin(\theta) \sin((2h+1)\theta) d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ impair, } h = 0, 1, \dots, \\ \pi E_i^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } h = 0, 1, \dots, \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) \sin(\theta) \sin((2h+1)\theta) d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ pair, } h = 0, 1, \dots, \\ \pi E_{i+1}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } h = 0, 1, \dots, \end{cases}
\end{aligned}$$

où A_{ij}^{2h+1} , B_{ij}^{2h+1} , C_{ijk} , D_{ijk} , E_i^{2h+1} et E_{i+1}^{2h+1} sont des constantes différentes de zéro. En utilisant ces intégrales, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dr} F_1(r, \theta) y_1(r, \theta) \right] d\theta = \frac{1}{2} r H_1(r),$$

3.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE
GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE LIÉNARD

où

$$\begin{aligned}
H_1(r) = & \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^n (i+j+1)a_{ij,2}r^{i+j-1} [a_{10,2}r^2 (\alpha_{110}A_{ij}^1 + \alpha_{210}A_{ij}^3) \\
& + \cdots + a_{ce,2}r^{c+e+1}(\alpha_{1ce}A_{ij}^1 + \alpha_{2ce}A_{ij}^3 + \cdots + \alpha_{\frac{(c+e+2)+1}{2}ce}A_{ij}^{c+e+2})] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^n (i+j+1)a_{ij,2}r^{i+j-1}[a_{01,2}r^2(\alpha_{201}B_{ij}^1 + \alpha_{301}B_{ij}^3) + \cdots \\
& + a_{pq,2}r^{p+q+1}(\alpha_{2pq}B_{ij}^1 + \alpha_{3pq}B_{ij}^3 + \cdots + \alpha_{\frac{(p+q+2)+3}{2}pq}B_{ij}^{p+q+2})] \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^n \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^m \frac{i+j+1}{k+1} a_{ij,2}b_{k,2}r^{i+j+k-1}C_{ijk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^l \frac{i+j+1}{k+2} a_{ij,2}a_{k,1}r^{i+j+k}D_{ijk} \\
& + \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ pair}}}^m ib_{i,2}r^{i-2}[a_{10,2}r^2(\alpha_{110}E_i^1 + \alpha_{210}E_i^3) + \cdots \\
& + a_{ce,2}r^{c+e+1}(\alpha_{1ce}E_i^1 + \alpha_{2ce}E_i^3 + \cdots + \alpha_{\frac{(c+e+2)+1}{2}ce}E_i^{c+e+2})] \\
& + \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^l (i+1)a_{i,1}r^{i-1}[a_{10,2}r^2(\alpha_{110}E_{i+1}^1 + \alpha_{210}E_{i+1}^3) \\
& + \cdots + a_{ce,2}r^{c+e+1}(\alpha_{1ce}E_{i+1}^1 + \alpha_{2ce}E_{i+1}^3 + \cdots + \alpha_{\frac{(c+e+2)+1}{2}ce}E_{i+1}^{c+e+2})].
\end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned}
F_2(r, \theta) = & \sum_{i+j=0}^n c_{ij,2}r^{i+j+1} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) + \sum_{i=0}^m d_{i,2}r^i \cos^i(\theta) \sin(\theta) \\
& + \sum_{i=0}^l c_{i,1}r^{i+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin(\theta)
\end{aligned}$$

3.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE
GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE LIÉNARD

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } \\ j \text{ impair}}}^n \sum_{\substack{k+h=0 \\ k \text{ impair ou } \\ h \text{ impair}}}^n a_{ij,2} a_{kh,2} r^{i+j+k+h+1} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{i+h+3}(\theta) \\
& - 2 \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } \\ j \text{ impair}}}^n \sum_{k=0}^m a_{ij,2} b_{k,2} r^{i+j+k} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \\
& + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } \\ j \text{ impair}}}^n \sum_{k=0}^l a_{ij,2} a_{k,1} r^{i+j+k+1} \cos^{i+k}(\theta) \sin^{j+4}(\theta) \\
& - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m b_{i,2} b_{j,2} r^{i+j-1} \cos^{i+j+1}(\theta) \sin(\theta) + \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^l b_{i,2} a_{j,1} r^{i+j} \cos^{i+j}(\theta) \sin^3(\theta) \\
& - \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } \\ j \text{ impair}}}^n \sum_{k=0}^l a_{ij,2} a_{k,1} r^{i+j+k+1} \cos^{i+k+2}(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \\
& - \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m a_{i,1} b_{j,2} r^{i+j} \cos^{i+j+2}(\theta) \sin(\theta) + \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l a_{i,1} a_{j,1} r^{i+j+1} \cos^{i+j+1}(\theta) \sin^3(\theta).
\end{aligned}$$

Après l'intégration de $F_2(r, \theta)$ entre 0 et 2π par rapport à θ , on ne prend que les intégrales qui sont différentes de zéro, i.e.,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ impair,} \\ \pi F_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos^{i+k+1}(\theta) \sin^{j+h+3}(\theta) d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{si } i+k \text{ pair ou } j+h \text{ pair,} \\ \pi G_{ijkh}, & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\ & \text{\textit{k} pair et } h \text{ impair,} \\ \pi \bar{G}_{ijkh}, & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ & \text{\textit{k} impair et } h \text{ pair,} \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} \cos^{i+k}(\theta) \sin^{j+4}(\theta) d\theta &= \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ impair, } i, k \in \mathbb{N} \\ \pi H_{ijk} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ pair et } k \text{ impair,} \end{cases}
\end{aligned}$$

où F_{ij} , G_{ijkh} , \bar{G}_{ijkh} et H_{ijk} sont des constantes différentes de zéro.

On obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta = \frac{1}{2} r H_2(r), \tag{3.9}$$

3.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE
GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE LIÉNARD

où

$$\begin{aligned}
H_2(r) = & \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair}, j \text{ pair}}}^n c_{ij,2} r^{i+j} F_{ij} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^n \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ pair}, h \text{ impair}}}^n a_{ij,2} a_{kh,2} r^{i+j+k+h} G_{ijkh} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^n \sum_{\substack{k+h=1 \\ k \text{ impair}, h \text{ pair}}}^n a_{ij,2} a_{kh,2} r^{i+j+k+h} \bar{G}_{ijkh} \\
& - 2 \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^n \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^m a_{ij,2} b_{k,2} r^{i+j+k-1} C_{ijk} \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^l a_{ij,2} a_{k,1} r^{i+j+k} H_{ijk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^l a_{ij,2} a_{k,1} r^{i+j+k} D_{ijk}.
\end{aligned}$$

Finalement, pour trouver les racines positives de F_{20} , il faut chercher les racines du polynôme $H_1(r) + H_2(r)$.

On conclut que F_{20} a au plus

$$\frac{1}{2} \max \{2O(n) - 2, O(n) + E(m) - 1, O(n) + O(l) - 2, E(n)\}$$

racines positives, où $O(i)$ est le plus grand entier impair inférieur ou égal à i et $E(i)$ est le plus grand entier pair inférieur ou égal à i . Cela complète la preuve de la partie (b) du Théorème 3.2.1.

Exemple 3.2.2. *On considère le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(x^3 - 2x)y - \varepsilon^2 \frac{1}{2} x^3 y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(4x^2 + (x - xy^2 + 2x^2 y - xy^3 + x^3)y) - \varepsilon^2(x^2 \\ - x + (-xy + 2x^2 + 3y + y^4)y). \end{cases} \quad (3.10)$$

3.2. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE GÉNÉRALISÉE DES SYSTÈMES DE LIÉNARD

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, le système (3.10) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = - \left[\varepsilon((2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta) \sin^2(\theta))r^2 + (\cos^4(\theta) \sin(\theta) \right. \\ \quad - \cos(\theta) \sin^4(\theta) + 2 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + \cos^3(\theta) \sin^2(\theta))r^4 - \cos(\theta) \sin^5(\theta)r^5 \\ \quad + \varepsilon^2(-\cos(\theta) \sin(\theta)r + (\cos^2(\theta) \sin(\theta) + 3 \sin^3(\theta))r^2 + (2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\ \quad - \cos(\theta) \sin^3(\theta))r^3 + \frac{1}{2} \cos^4(\theta) \sin(\theta)r^4 + \sin^6 r^5) \left. \right], \\ \dot{\theta} = -1 - \left[\varepsilon((4 \cos^3(\theta) + \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 2 \cos(\theta) \sin^2(\theta))r + (\cos^4(\theta) \sin(\theta) \right. \\ \quad - \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + \cos^3(\theta) \sin^2(\theta))r^3 - \cos^2(\theta) \sin^4(\theta)r^4) + \varepsilon^2(-\cos^2(\theta) \\ \quad + (\cos^3(\theta) + 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta))r + (2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) - \cos^2(\theta) \sin^2(\theta))r^2 \\ \quad \left. - \frac{1}{2} \cos^3(\theta) \sin^2(\theta)r^3 + \cos(\theta) \sin^5(\theta)r^4) \right]. \end{cases}$$

Pour déterminer les cycles limites, on résout l'équation

$$F_{20}(r) = r^3 \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{16}r^2 - \frac{1}{64}r^4 \right) = 0. \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) possède deux racines positives $r_1 = -1 + \sqrt{5}$ et $r_2 = 1 + \sqrt{5}$. D'après (b) du théorème 3.2.1, le système (3.10) a exactement deux cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre deux. Voir la figure (3.2).

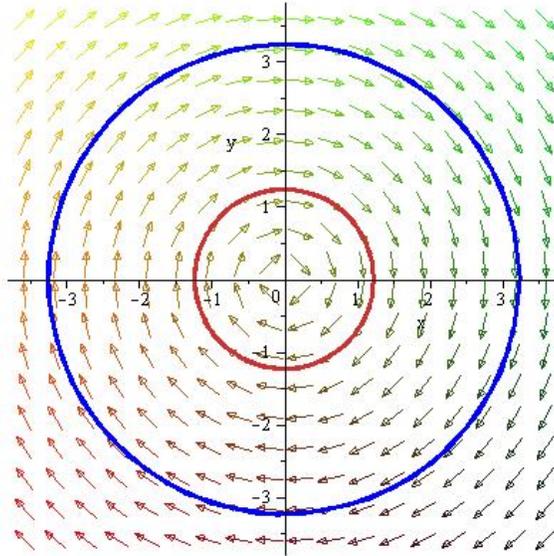


FIGURE 3.2 – Les deux cycles limites du système (3.10) pour $\varepsilon = 0.0001$.

Chapitre 4

La bifurcation de Hopf pour un système différentiel quadratique en dimension trois

En appliquant la théorie de moyennisation d'ordre trois à un système différentiel polynomial quadratique dans \mathbb{R}^3 pour étudier la bifurcation de Hopf qui se produit à l'origine pour ce type de système. On prouve qu'au plus dix cycles limites peuvent bifurquer par bifurcation de Hopf d'un point d'équilibre ayant des valeurs propres de la forme $\pm bi$ et 0. En plus, on donne un exemple d'un système différentiel polynomial quadratique pour lequel exactement dix cycles limites bifurquent de l'origine. Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans le journal "*Turkish Journal of Mathematics*".

E. Bendib, S. Badi and A. Makhlouf, On the 3-Dimensional Hopf bifurcation via averaging theory of third order. Turk J Math (2017) 41 : 1053-1071.

4.1 Nombre maximum de cycles limites bifurquant par bifurcation de Hopf pour un système différentiel quadratique dans \mathbb{R}^3 par la théorie de moyennisation d'ordre trois

On étudie dans ce chapitre la bifurcation de Hopf pour des champs de vecteurs dans \mathbb{R}^3 , On s'intéresse à l'étude du nombre maximum de cycles limites qui se produit par une bifurcation de Hopf autour de l'origine d'un système quadratique dans \mathbb{R}^3 . En générale, la bifurcation de Hopf est étudiée pour des points singuliers ayant des valeurs propres de la forme $\alpha(\varepsilon) \pm \beta(\varepsilon)i$ avec $\alpha(0) = 0$ et $\alpha'(0) \neq 0$. La bifurcation de Hopf des cycles limites a été considérée par plusieurs auteurs, voir [22, 23, 25]. Dans notre travail, on considère des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques dans \mathbb{R}^3 , dont la partie linéaire du point d'équilibre à l'origine $(0, 0, 0)$ a des valeurs propres de la forme $(\varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^3 a_3) \pm bi$ et $\varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \varepsilon^3 c_3$, où ε est un petit paramètre.

Notre système est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3)x - by + \sum_{i+j+k=2} a_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} A_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} A'_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \frac{dy}{dt} = bx + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3)y + \sum_{i+j+k=2} b_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} B_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} B'_{ijk}x^i y^j z^k, \\ \frac{dz}{dt} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3)z + \sum_{i+j+k=2} c_{ijk}x^i y^j z^k + \varepsilon \sum_{i+j+k=2} C_{ijk}x^i y^j z^k \\ \quad + \varepsilon^2 \sum_{i+j+k=2} C'_{ijk}x^i y^j z^k, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}, A'_{ijk}, B'_{ijk}$ et C'_{ijk} pour $i + j + k = 2$, $a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3$ et b sont des paramètres réeles.

En 2007, **Llibre et al.** [10] ont étudié en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un, la bifurcation de Hopf pour des champs de vecteurs dans \mathbb{R}^3 . Ils ont obtenu qu'au plus un cycle limite peut bifurquer de l'origine de tels systèmes. Ils ont fait des applications sur les systèmes de Lorenz et Rössler.

Le système (4.1) est plus général que celui étudié en 2009 par **Libre et al.** [29]. Ils ont utilisé la théorie de moyennisation d'ordre deux pour étudier aussi la bifurcation de Hopf pour des champs de vecteurs dans \mathbb{R}^3 , ils ont obtenu qu'au plus trois cycles limites peuvent bifurquer de l'origine de tels système, de plus ils ont donné un exemple pour lequel cette borne est atteinte.

L'objectif de cette partie est consisté à utiliser la théorie de moyennisation d'ordre trois, pour étudier aussi la bifurcation de Hopf pour des champs de vecteurs dans \mathbb{R}^3 . On donne un résultat sur le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent de l'origine du système différentiel polynomial quadratique (4.1) et on détermine aussi leur stabilité. On donne aussi un exemple d'un système différentiel polynomial quadratique pour lequel cette borne est atteinte.

Notre résultat est le suivant :

Théorème 4.1.1.

- (a) *Au plus dix cycles limites bifurquent de l'origine du système (4.1) quand $\varepsilon = 0$ en appliquant la théorie de moyennisation d'ordre trois.*
- (b) *On donne un exemple d'un système différentiel quadratique de la forme (4.1) pour lequel exactement dix cycles limites bifurquent de l'origine pour $\varepsilon = 0$.*

Preuve de la partie (a) du Théorème 4.1.1.

En coordonnées cylindriques $x = R \cos(\theta)$, $y = R \sin(\theta)$ et $z = z$, le système (4.1) devient

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \varepsilon(a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2)R + h_{11}(\theta)R^2 + h_{12}(\theta)Rz + h_{13}(\theta)z^2, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} [bR + h_{21}(\theta)R^2 + h_{22}(\theta)Rz + h_{23}(\theta)z^2], \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon(c_1 + c_2\varepsilon + c_3\varepsilon^2)z + h_{31}(\theta)R^2 + h_{32}(\theta)Rz + h_{33}(\theta)z^2, \end{cases} \quad (4.2)$$

où

$$\begin{aligned} h_{11}(\theta) &= (a_{200} + \varepsilon A_{200} + \varepsilon^2 A'_{200}) \cos^3(\theta) + [(a_{020} + b_{110}) + \varepsilon(A_{020} + B_{110}) \\ &\quad + \varepsilon^2(A'_{020} + B'_{110})] \sin^2(\theta) \cos(\theta) + [(a_{110} + b_{200}) + \varepsilon(A_{110} + B_{200}) \\ &\quad + \varepsilon^2(A'_{110} + B'_{200})] \cos^2(\theta) \sin(\theta) + (b_{020} + \varepsilon B_{020} + \varepsilon^2 B'_{020}) \sin^3(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{12}(\theta) &= (a_{101} + \varepsilon A_{101} + \varepsilon^2 A'_{101}) \cos^2(\theta) + [(a_{011} + b_{101}) + \varepsilon(A_{011} + B_{101}) \\
&\quad + \varepsilon^2(A'_{011} + B'_{101})] \sin(\theta) \cos(\theta) + (b_{011} + \varepsilon B_{011} + \varepsilon^2 B'_{011}) \sin^2(\theta), \\
h_{13}(\theta) &= (a_{002} + \varepsilon A_{002} + \varepsilon^2 A'_{002}) \cos(\theta) + (b_{002} + \varepsilon B_{002} + \varepsilon^2 B'_{002}) \sin(\theta), \\
h_{21}(\theta) &= (b_{200} + \varepsilon B_{200} + \varepsilon^2 B'_{200}) \cos^3(\theta) + [(b_{020} - a_{110}) + \varepsilon(B_{020} - A_{110}) \\
&\quad + \varepsilon^2(B'_{020} - A'_{110})] \sin^2(\theta) \cos(\theta) + [(b_{110} - a_{200}) + \varepsilon(B_{110} - A_{200}) \\
&\quad + \varepsilon^2(B'_{110} - A'_{200})] \cos^2(\theta) \sin(\theta) - (a_{020} + \varepsilon A_{020} + \varepsilon^2 A'_{020}) \sin^3(\theta), \\
h_{22}(\theta) &= (b_{101} + \varepsilon B_{101} + \varepsilon^2 B'_{101}) \cos^2(\theta) + [(b_{011} - a_{101}) + \varepsilon(B_{011} - A_{101}) \\
&\quad + \varepsilon^2(B'_{011} - A'_{101})] \cos(\theta) \sin(\theta) - (a_{011} + \varepsilon A_{011} + \varepsilon^2 A'_{011}) \sin^2(\theta), \\
h_{23}(\theta) &= (b_{002} + \varepsilon B_{002} + \varepsilon^2 B'_{002}) \cos(\theta) - (a_{002} + \varepsilon A_{002} + \varepsilon^2 A'_{002}) \sin(\theta), \\
h_{31}(\theta) &= (c_{200} + \varepsilon C_{200} + \varepsilon^2 C'_{200}) \cos^2(\theta) + (c_{020} + \varepsilon C_{020} + \varepsilon^2 C'_{020}) \sin^2(\theta) \\
&\quad + (c_{110} + \varepsilon C_{110} + \varepsilon^2 C'_{110}) \sin(\theta) \cos(\theta), \\
h_{32}(\theta) &= (c_{101} + \varepsilon C_{101} + \varepsilon^2 C'_{101}) \cos(\theta) + (c_{011} + \varepsilon C_{011} + \varepsilon^2 C'_{011}) \sin(\theta), \\
h_{33}(\theta) &= c_{002} + \varepsilon C_{002} + \varepsilon^2 C'_{002}.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant θ comme une nouvelle variable indépendante, le système (4.2) devient

$$\begin{cases} \frac{dR}{d\theta} = \frac{[\varepsilon(a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2)R + h_{11}(\theta)R^2 + h_{12}(\theta)Rz + h_{13}(\theta)z^2]R}{bR + h_{21}(\theta)R^2 + h_{22}(\theta)Rz + h_{23}(\theta)z^2}, \\ \frac{dz}{d\theta} = \frac{[\varepsilon(c_1 + c_2\varepsilon + c_3\varepsilon^2)z + h_{31}(\theta)R^2 + h_{32}(\theta)Rz + h_{33}(\theta)z^2]R}{bR + h_{21}(\theta)R^2 + h_{22}(\theta)Rz + h_{23}(\theta)z^2}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Posons

$$(R, z) = (\rho\varepsilon, \xi\varepsilon),$$

le système (4.1) devient sous la forme standard pour appliquer la théorie de moyennisation. En considérant les variables (ρ, ξ) , le système (4.3) se produit

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon F_{11}(\theta, \rho, \xi) + \varepsilon^2 F_{21}(\theta, \rho, \xi) + \varepsilon^3 F_{31}(\theta, \rho, \xi) + O(\varepsilon^4), \\ \frac{d\xi}{d\theta} = \varepsilon F_{12}(\theta, \rho, \xi) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, \rho, \xi) + \varepsilon^3 F_{32}(\theta, \rho, \xi) + O(\varepsilon^4), \end{cases} \quad (4.4)$$

où $F_{11}, F_{21}, F_{31}, F_{12}, F_{22}$ et F_{32} sont données dans l'appendice.

Le système (4.4) est équivalent au système (2.27) avec $x = (\rho, \xi), t = \theta$,

$$F_1(t, x) = (F_{11}(\theta, \rho, \xi), F_{12}(\theta, \rho, \xi)), F_2(t, x) = (F_{21}(\theta, \rho, \xi), F_{22}(\theta, \rho, \xi)),$$

$$F_3(t, x) = (F_{31}(\theta, \rho, \xi), F_{32}(\theta, \rho, \xi)) \text{ et } T = 2\pi.$$

Maintenant on applique la théorie de moyennisation d'ordre un et on calcule la fonction moyennée suivante

$$f_{1i}(\rho, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{1i}(\theta, \rho, \xi) d\theta,$$

4.1. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES BIFURQUANT PAR
BIFURCATION DE HOPF

pour $i = 1, 2$. On obtient

$$\begin{cases} f_{11}(\rho, \xi) = \frac{\rho(2a_1 + (a_{101} + b_{011})\xi)}{2b} = 0, \\ f_{12}(\rho, \xi) = \frac{(c_{020} + c_{200})\rho^2 + 2\xi(c_1 + c_{002}\xi)}{2b} = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

La seule racine positive simple du système (4.5) produit un unique cycle limite qui bifurque de l'origine du système (4.1). (*C'est le résultat obtenu par Llibre en 2007 "Discrete Contin. DYN. Syst" [10]*).

Pour appliquer la théorie de moyennisation d'ordre deux, on annule $(f_{11}(\rho, \xi), f_{12}(\rho, \xi))$ et pour ceci on considère

$$a_1 = 0, \quad b_{011} = -a_{101}, \quad c_{200} = -c_{020}, \quad c_{002} = 0, \quad c_1 = 0,$$

ensuite, on calcule l'expression suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \int_0^s F_{11}(\theta, \rho, \xi) d\theta \\ \int_0^s F_{12}(\theta, \rho, \xi) d\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{21}(s, \rho, \xi) \\ F_{22}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix},$$

on intègre cette expression entre 0 et 2π et on la divise par 2π , on obtient le système suivant

$$\begin{cases} f_{21}(\rho, \xi) = \frac{1}{b^2} \rho [U_0 + U_1 \xi + U_2 \rho^2 + U_3 \xi^2], \\ f_{22}(\rho, \xi) = \frac{1}{b^2} [V_0 \xi + V_1 \rho^2 + V_2 \xi^2 + V_3 \rho^2 \xi + V_4 \xi^3], \end{cases} \quad (4.6)$$

où

$$U_0 = a_2 b,$$

$$U_1 = \frac{b(A_{101} + B_{011})}{2},$$

$$U_2 = [a_{110}a_{200} + a_{020}(a_{110} + 2b_{020}) - 2a_{200}b_{200} - b_{110}(b_{020} + b_{200}) - c_{020}(a_{011} + b_{101}) - c_{110}a_{101}]/8,$$

$$U_3 = b_{002}(c_{101} - a_{200} - \frac{1}{2}b_{110}) + a_{002}(\frac{1}{2}a_{110} + b_{020} - c_{011}),$$

$$V_0 = bc_2,$$

$$V_1 = b(C_{020} + C_{200})/2,$$

$$V_2 = bC_{002},$$

$$V_3 = [c_{011}(a_{020} + a_{200}) + c_{020}(a_{011} + b_{101}) - c_{101}(b_{020} + b_{200}) + a_{101}c_{110}]/2,$$

$$V_4 = a_{002}c_{011} - b_{002}c_{101}.$$

Pour trouver les cycles limites, on résout le système

$$\begin{cases} f_{21}(\rho, \xi) = 0, \\ f_{22}(\rho, \xi) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

En résolvant la première équation par rapport à ρ et éliminant le cas $\rho = 0$, on obtient les deux solutions suivantes

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{-U_0 - U_1\xi - U_3\xi^2}}{\sqrt{U_2}}, \quad \rho_2 = -\frac{\sqrt{-U_0 - U_1\xi - U_3\xi^2}}{\sqrt{U_2}}.$$

Comme ρ doit être positif, on n'accepte que ρ_1 . Alors la seconde équation du système (4.6) devient

$$\frac{U_2V_4 - U_3V_3}{U_2}\xi^3 + \frac{U_2V_2 - U_3V_1 - U_1V_3}{U_2}\xi^2 + \frac{U_2V_0 - U_1V_1 - U_0V_3}{U_2}\xi - \frac{U_0V_1}{U_2} = 0.$$

On voit que cette équation cubique peut admettre trois racines. Donc, si nous choisissons les coefficients du système (4.1), cette équation peut prendre des coefficients avec des valeurs pour lesquels elle admet trois racines réelles.

Supposons que $(\bar{\rho}, \bar{\xi})$ est une racine du système (4.7) où $\bar{\xi}$ est une des racines de l'équation cubique. Pour obtenir un cycle limite d'après le théorème 2.3.1, nous devons avoir

$$D(\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{21}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_{22}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{22}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \Big|_{(\rho, \xi) = (\bar{\rho}, \bar{\xi})} \neq 0. \quad (4.8)$$

Selon les hypothèses du théorème 2.3.1, les solutions $(\bar{\rho}, \bar{\xi})$ du système (4.7) doivent être vérifiées (4.8). D'où, le système (4.4) a au plus trois cycles limites. Donc, d'après la théorie de moyennisation d'ordre deux et $(R, z) = (\rho\varepsilon, \xi\varepsilon)$ le système (4.1) a au plus trois cycles limites qui bifurquent de l'origine. (*C'est le résultat obtenu par Llibre, Makhlouf et Badi en 2009 " Discrete Contin. DYN. Syst" [29]*).

Exemple 4.1.1. *En considérant un système différentiel polynomial quadratique dans \mathbb{R}^3 de la même forme du système (4.1) qui est*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon^2x - y + x^2 - 2xy - xz + 5\varepsilon z^2 - \varepsilon^2yz, \\ \frac{dy}{dt} = x + \frac{1}{2}\varepsilon^2y + y^2 - z^2 + 4xy - xz + yz + \varepsilon^2xy, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{-1}{4}\varepsilon^2z - 2x^2 + 2y^2 + xz + 4yz - 4\varepsilon z^2 + \varepsilon^2x^2. \end{cases} \quad (4.9)$$

4.1. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES BIFURQUANT PAR
BIFURCATION DE HOPF

On cherche les cycles limites du système (4.9) qui peuvent bifurquer par bifurcation de Hopf de l'origine, en utilisant la théorie moyennisation d'ordre deux.

Le système (4.9) a un seul point critique qui est l'origine $(0, 0, 0)$, et les valeurs propres en ce point sont $\frac{\varepsilon^2}{2} \pm i$ et $\frac{-\varepsilon^2}{4}$.

Le système (4.4) associé à (4.9) comprend les fonctions :

$$\begin{aligned}
 F_{11}(\theta, \rho, \xi) &= \rho^2(\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)) + 2\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta)(2 \sin(\theta) - \cos(\theta)) - \rho\xi \cos(2\theta) \\
 &\quad - \rho\xi \cos(\theta) \sin(\theta) - \xi^2 \sin(\theta), \\
 F_{21}(\theta, \rho, \xi) &= \frac{1}{2}\rho - 3\rho^3 \cos^5(\theta) \sin(\theta) + 3\rho^3 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) - 6\rho^3 \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) \\
 &\quad - 15\rho^3 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) - 3\rho^3 \cos(\theta) \sin^5(\theta) + \rho^2 \xi \cos^5(\theta) - \rho^2 \xi \cos^4(\theta) \sin(\theta) \\
 &\quad + 17\rho^2 \xi \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) - 7\rho^2 \xi \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) - 5\rho^2 \xi \cos(\theta) \sin^4(\theta) \\
 &\quad - \rho\xi^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + 10\rho\xi^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + 2\rho\xi^2 \cos(\theta) \sin^3(\theta) \\
 &\quad - \xi^3 \cos^3(\theta) - 2\xi^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 3\xi^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - \frac{\xi^4}{\rho} \cos(\theta) \sin(\theta) \\
 &\quad + 5\xi^2 \cos(\theta), \\
 F_{12}(\theta, \rho, \xi) &= -2\rho^2 \cos^2(\theta) + 2\rho^2 \sin^2(\theta) + \rho\xi \cos(\theta) + 4\rho\xi \sin(\theta), \\
 F_{22}(\theta, \rho, \xi) &= \frac{-1}{4}\xi - 4\xi^2 + 6\rho^3 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 6\rho^3 \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) \\
 &\quad - 6\rho^3 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) - 6\rho^3 \cos(\theta) \sin^4(\theta) - 2\rho^2 \xi \cos^4(\theta) \\
 &\quad + \rho^2 \xi \cos^3(\theta) \sin(\theta) - 13\rho^2 \xi \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) - 16\rho^2 \xi \cos(\theta) \sin^3(\theta) \\
 &\quad - \rho\xi^2 \cos^3(\theta) + 2\rho\xi^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 6\rho\xi^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + \xi^3 \cos^2(\theta) \\
 &\quad + 4\xi^3 \cos(\theta) \sin(\theta).
 \end{aligned}$$

Maintenant pour déterminer les cycles limites, on résout le système

$$\begin{cases} f_{21}(\rho, \xi) = \frac{\rho}{2} \left[1 - \rho^2 + 4\xi^2 \right] = 0, \\ f_{22}(\rho, \xi) = \xi \left[\frac{-1}{4} - 4\xi + \xi^2 + \frac{1}{2}\rho^2 \right] = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Le système moyennée (4.10) possède les racines suivantes : $(0, 0)$; $(0, \frac{(4 + \sqrt{17})}{2})$; $(0, \frac{(4 - \sqrt{17})}{2})$; $(1, 0)$; $(-1, 0)$; $(\frac{1}{3}\sqrt{38 + 8\sqrt{13}}, \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{13})$; $(\frac{1}{3}\sqrt{38 - 8\sqrt{13}}, \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{13})$; $(-\frac{1}{3}\sqrt{38 + 8\sqrt{13}}, \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{13})$; $(-\frac{1}{3}\sqrt{38 - 8\sqrt{13}}, \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{13})$.

Puisque ρ doit être strictement positif et ξ réel, les seules racines acceptées sont

$$(1, 0); \left(\frac{1}{3}\sqrt{38 + 8\sqrt{13}}, \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{13}\right); \left(\frac{1}{3}\sqrt{38 - 8\sqrt{13}}, \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{13}\right).$$

4.1. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES BIFURQUANT PAR
BIFURCATION DE HOPF

On vérifie que le déterminant calculé en ces racines est non nul, où

$$D(\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \det(M) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3\bar{\rho}^2}{2} + 2\bar{\xi}^2 & 4\bar{\rho}\bar{\xi} \\ \bar{\rho}\bar{\xi} & \frac{-1}{4} - 8\bar{\xi} + 3\bar{\xi}^2 + \frac{1}{2}\bar{\rho}^2 \end{pmatrix}.$$

On obtient les résultats suivants

$$D(1, 0) = \frac{-1}{4},$$

$$D\left(\frac{1}{3}\sqrt{38 + 8\sqrt{13}}, \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{13}\right) = -\frac{455}{27} - \frac{128}{27}\sqrt{13},$$

$$D\left(\frac{1}{3}\sqrt{38 - 8\sqrt{13}}, \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{13}\right) = -\frac{455}{27} + \frac{128}{27}\sqrt{13}.$$

Donc, le système (4.9) a exactement trois cycles limites qui bifurquent de l'origine. Voir la figure (4.1) et la figure (4.2).

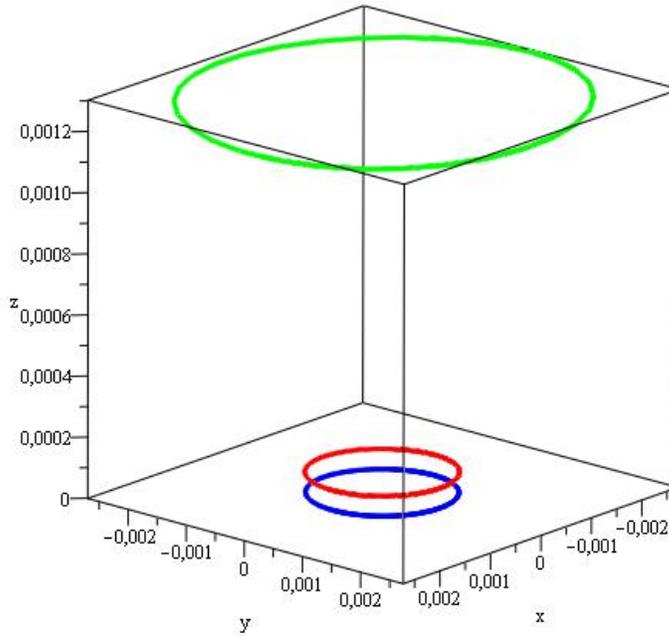


FIGURE 4.1 – Les trois cycles limites du système (4.9) pour $\varepsilon = 0.001$.

4.1. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES BIFURQUANT PAR
BIFURCATION DE HOPF

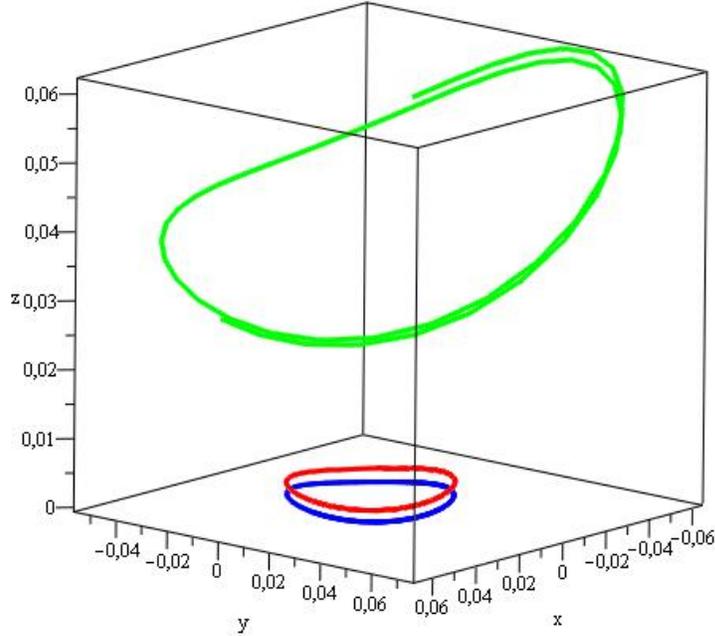


FIGURE 4.2 – Les trois cycles limites du système (4.9) pour $\varepsilon = 0.025$.

On passe maintenant à l'étude de la stabilité de ces trois cycles limites. On doit calculer les valeurs propres de la matrice M aux points $(1, 0)$; $(\frac{1}{3}\sqrt{38 + 8\sqrt{13}}, \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{13})$; $(\frac{1}{3}\sqrt{38 - 8\sqrt{13}}, \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{13})$. On obtient respectivement en chaque point

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4}, -1 \right), \\ & \left(-\frac{5}{9}\sqrt{13} + \frac{\sqrt{36065 + 9944\sqrt{13}} - 95}{36}, -\frac{5}{9}\sqrt{13} - \frac{\sqrt{36065 + 9944\sqrt{13}} + 95}{36} \right), \\ & \left(\frac{5}{9}\sqrt{13} + \frac{\sqrt{36065 - 9944\sqrt{13}} - 95}{36}, \frac{5}{9}\sqrt{13} - \frac{\sqrt{36065 - 9944\sqrt{13}} + 95}{36} \right). \end{aligned}$$

D'où, les cycles limites correspondants sont semistable, semistable et stable, respectivement.

Les cycles limites Γ_i pour $i = 1, 2, 3$ du système (4.3) associés au système (4.9) et correspondants au zéros $(\bar{\rho}, \bar{\xi})$ donnés par (4.10) s'écrivent comme suit $\{(R_i(\theta), z_i(\theta)), \theta \in S^1\}$. On a

$$\begin{pmatrix} R_i(\theta) \\ z_i(\theta) \end{pmatrix} = \varepsilon \left[\begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \int_0^\theta F_{11}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \\ \int_0^\theta F_{12}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\varepsilon^2) \\ O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} \right],$$

où

$$\begin{pmatrix} \int_0^\theta F_{11}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \\ \int_0^\theta F_{12}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\xi}^2 - \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{\xi} + (\bar{\xi}^2 - \bar{\rho}^2) \cos(\theta) - \bar{\rho}^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \\ 2\bar{\rho}^2 \sin(\theta) + \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{\xi} \cos^2(\theta) + \bar{\rho}^2 \cos^3(\theta) - \bar{\rho}\bar{\xi} \cos(\theta) \sin(\theta) \\ 4\bar{\rho}\bar{\xi}(1 - \cos(\theta)) + \bar{\rho}\bar{\xi} \sin(\theta) - 2\bar{\rho}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Donc, le cycle limite Γ_1 s'écrit

$$\begin{cases} R_1(\theta) = \varepsilon + \varepsilon^2(\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 2 \sin(\theta)) + O(\varepsilon^3), \\ Z_1(\theta) = -2\varepsilon^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + O(\varepsilon^3). \end{cases}$$

Le cycle limite Γ_2 s'écrit

$$\begin{cases} R_2(\theta) = \frac{\sqrt{38 + 8\sqrt{13}}}{3} \varepsilon + \varepsilon^2 \left(\left(\frac{29}{36} + \frac{2\sqrt{13}}{9} \right) (\cos(\theta) - 1) + \frac{38 + 8\sqrt{13}}{9} (\cos^3(\theta) \right. \\ \left. - \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 2 \sin(\theta) - \cos(\theta)) + \sqrt{38 + 8\sqrt{13}} \left(\frac{4 + \sqrt{13}}{18} \right) \left(\frac{1}{2} (\cos^2(\theta) - 1) \right. \right. \\ \left. \left. - \cos(\theta) \sin(\theta) \right) \right) + O(\varepsilon^3), \\ Z_2(\theta) = \frac{4 + \sqrt{13}}{6} \varepsilon + \varepsilon^2 \left(\sqrt{38 + 8\sqrt{13}} \left(\frac{4 + \sqrt{13}}{18} \right) (4(1 - \cos(\theta)) + \sin(\theta)) \right. \\ \left. - \frac{2(38 + 8\sqrt{13})}{9} \cos(\theta) \sin(\theta) \right) + O(\varepsilon^3). \end{cases}$$

Le dernier cycle limite Γ_3 s'écrit

$$\begin{cases} R_3(\theta) = \frac{\sqrt{38 - 8\sqrt{13}}}{3} \varepsilon + \varepsilon^2 \left(\left(\frac{29}{36} - \frac{2\sqrt{13}}{9} \right) (\cos(\theta) - 1) + \frac{38 - 8\sqrt{13}}{9} (\cos^3(\theta) \right. \\ \left. - \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 2 \sin(\theta) - \cos(\theta)) + \sqrt{38 - 8\sqrt{13}} \left(\frac{4 - \sqrt{13}}{18} \right) \left(\frac{1}{2} (\cos^2(\theta) \right. \right. \\ \left. \left. - 1) - \cos(\theta) \sin(\theta) \right) \right) + O(\varepsilon^3), \\ Z_3(\theta) = \frac{4 - \sqrt{13}}{6} \varepsilon + \varepsilon^2 \left(\sqrt{38 - 8\sqrt{13}} \left(\frac{4 - \sqrt{13}}{18} \right) (4(1 - \cos(\theta)) + \sin(\theta)) \right. \\ \left. - \frac{2(38 - 8\sqrt{13})}{9} \cos(\theta) \sin(\theta) \right) + O(\varepsilon^3). \end{cases}$$

Le but de la suite de ce travail qui représente notre contribution principale est de savoir ce qui se passe si on passe à l'ordre trois par la théorie de moyennisation.

Pour ce faire, on annule le système moyenné du second ordre $(f_{21}(\rho, \xi), f_{22}(\rho, \xi))$. Prenons

$$a_2 = 0, \quad c_2 = 0, \quad a_{200} = 0, \quad a_{020} = 0, \quad a_{002} = 0, \quad a_{011} = -b_{101}, \quad b_{002} = 0,$$

$$b_{200} = -b_{020}, \quad c_{110} = 0, \quad A_{101} = -B_{011}, \quad C_{020} = -C_{200}, \quad C_{002} = 0.$$

Pour appliquer la théorie de moyennisation d'ordre trois, on doit calculer les deux quantités suivantes :

Premièrement, on calcule

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \xi) & y_{12}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \rho \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \xi \partial \rho} & \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix} \right] +$$

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{21}(s, \rho, \xi) \\ y_{22}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{21}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{21}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix}$$

$$+ F_{31}(s, \rho, \xi),$$

et

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \xi) & y_{12}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \rho \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \xi \partial \rho} & \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix} \right] +$$

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{12}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{21}(s, \rho, \xi) \\ y_{22}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{22}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{22}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix}$$

$$+ F_{32}(s, \rho, \xi),$$

où

$$\begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^s F_{11}(\theta, \rho, \xi) d\theta \\ \int_0^s F_{12}(\theta, \rho, \xi) d\theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_{21}(s, \rho, \xi) \\ y_{22}(s, \rho, \xi) \end{pmatrix} = \left(\int_0^s \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \int_0^t F_{11}(\theta, \rho, \xi) d\theta \\ \int_0^t F_{12}(\theta, \rho, \xi) d\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{21}(t, \rho, \xi) \\ F_{22}(t, \rho, \xi) \end{pmatrix} \right] dt \right).$$

On intègre maintenant les deux quantités entre 0 et 2π et divisons par 2π , on obtient le système moyenné

$$\begin{cases} f_{31}(\rho, \xi) = \frac{1}{2b^3}\rho \left[I_0 + I_1\rho^2\xi + I_2\rho^2 + I_3\xi^2 + I_4\xi \right], \\ f_{32}(\rho, \xi) = \frac{1}{2b^3} \left[J_0\xi + J_1\rho^4 + J_2\rho^3\xi + J_3\rho^2\xi^2 + J_4\rho^2\xi + J_5\rho^2 + J_6\xi^3 + J_7\xi^2 \right], \end{cases}$$

où

$$I_0 = 2b^2a_3,$$

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{71}{384}a_{101}(a_{110}^2 - b_{110}^2) - \frac{29}{96}a_{101}b_{020}^2 - \frac{1}{24}a_{101}c_{011}(7a_{110} + 10b_{020}) \\ & + a_{101}\left(\frac{7}{24}c_{101}b_{110} + \frac{7}{32}a_{110}b_{020}\right) + \frac{1}{4}b_{101}(b_{110}c_{011} - c_{101}a_{110} - 2c_{101}b_{020}) \\ & + \frac{1}{8}a_{101}(c_{011}^2 - c_{101}^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = & b\left[\frac{1}{24}a_{110}(A_{200} - B_{110} + 5A_{020}) + \frac{1}{6}b_{020}(A_{200} - B_{110} + 2A_{020})\right. \\ & \left. + \frac{1}{24}b_{110}(A_{110} - B_{020} - 5B_{200}) - \frac{1}{4}c_{020}(A_{011} + B_{101}) - \frac{1}{8}a_{101}C_{110}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 = & b\left[\frac{1}{8}a_{101}(A_{011} + B_{101}) + \frac{1}{4}A_{002}(3a_{110} + 6b_{020}) - \frac{3}{4}b_{110}B_{002} + 2(c_{101}B_{002}\right. \\ & \left. - c_{011}A_{002})\right], \end{aligned}$$

$$I_4 = b^2(A'_{101} + B'_{011}),$$

$$J_0 = 2b^2c_3,$$

$$\begin{aligned} J_1 = & \frac{1}{192}c_{020}(a_{110}^2 - b_{110}^2) + \frac{5}{48}c_{020}b_{020}^2 + \frac{1}{12}c_{020}c_{011}(a_{110} + b_{020}) \\ & + \frac{1}{16}a_{110}c_{020}b_{020} - \frac{1}{12}c_{020}c_{101}b_{110} + \frac{1}{8}c_{020}(c_{101}^2 - c_{011}^2), \end{aligned}$$

$$J_2 = \frac{1}{12}c_{101}(a_{110}^2 + 2b_{020}^2) + \frac{1}{4}b_{020}c_{101}a_{110} - \frac{1}{12}b_{110}c_{011}(a_{110} + b_{020}),$$

$$\begin{aligned} J_3 = & \frac{9}{8}a_{101}(c_{101}^2 - c_{011}^2) + \frac{1}{6}a_{101}c_{011}(5a_{110} - b_{020}) - \frac{1}{8}b_{101}c_{101}(a_{110} + 2b_{020}) \\ & + \frac{1}{8}b_{110}b_{101}c_{011} - \frac{5}{6}b_{110}a_{101}c_{101}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_4 = & b\left[a_{101}C_{110} + \frac{1}{2}(C_{011}c_{101} - C_{101}c_{011}) + \frac{3}{4}c_{020}(A_{011} + B_{101}) + \frac{1}{8}c_{101}(A_{110}\right. \\ & \left. - 7B_{200} - 5B_{020}) + \frac{1}{8}c_{011}(7A_{020} - B_{110} + 5A_{200})\right], \end{aligned}$$

$$J_5 = b^2(C'_{200} + C'_{020}),$$

$$J_6 = \frac{3}{2}b(c_{011}A_{002} - c_{101}B_{002}),$$

$$J_7 = 2b^2C'_{002}.$$

4.1. NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES BIFURQUANT PAR
BIFURCATION DE HOPF

Pour trouver les cycles limites, on résout le système

$$\begin{cases} f_{31}(\rho, \xi) = 0, \\ f_{32}(\rho, \xi) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

En résolvant la première équation par rapport à ρ en considérant $\rho > 0$, on obtient les deux solutions

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{-I_3\xi^2 - I_4\xi - I_0}}{\sqrt{I_1\xi + I_2}}, \quad \rho_2 = -\frac{\sqrt{-I_3\xi^2 - I_4\xi - I_0}}{\sqrt{I_1\xi + I_2}}.$$

Comme ρ doit être positif, on n'accepte que ρ_1 . On remplace maintenant ρ_1 dans la seconde équation $f_{32}(\rho, \xi) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Lambda} \left[K_0^2 \xi^{10} + \Lambda_0 \xi^9 + \Lambda_1 \xi^8 + \Lambda_2 \xi^7 + \Lambda_3 \xi^6 + \Lambda_4 \xi^5 + \Lambda_5 \xi^4 + \Lambda_6 \xi^3 + \Lambda_7 \xi^2 \right. \\ & \left. + 2K_4 K_5 \xi + K_5^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda = & 2b^3(I_1\xi + I_2)^2 \left((K_0\xi^5 + K_1\xi^4 + K_2\xi^3 + K_3\xi^2 + K_4\xi + K_5) - (-J_2 I_3 \xi^3 \right. \\ & \left. - J_2 I_4 \xi^2 - J_2 I_0 \xi) \sqrt{-I_3 \xi^2 - I_4 \xi - I_0} \sqrt{I_1 \xi + I_2} \right), \end{aligned}$$

$$\Lambda_0 = 2K_0 K_1 + J_2^2 I_3^3 I_1,$$

$$\Lambda_1 = 3J_2^2 I_3^2 I_4 I_1 + J_2^2 I_3^3 I_2 + 2K_0 K_2 + K_1^2,$$

$$\Lambda_2 = 2K_0 K_3 + 2K_1 K_2 + 3J_2^2 I_3 I_4^2 I_1 + 3J_2^2 I_3^2 I_4 I_2 + 3J_2^2 I_3^2 I_0 I_1,$$

$$\Lambda_3 = 3J_2^2 I_3 I_4^2 I_2 + K_2^2 + 2K_1 K_3 + J_2^2 I_4^3 I_1 + 2K_0 K_4 + 6J_2^2 I_3 I_4 I_0 I_1 + 3J_2^2 I_3^2 I_0 I_2,$$

$$\Lambda_4 = J_2^2 I_4^3 I_2 + 3J_2^2 I_3 I_0^2 I_1 + 2K_2 K_3 + 6J_2^2 I_3 I_4 I_0 I_2 + 2K_1 K_4 + 2K_0 K_5 + 3J_2^2 I_4^2 I_0 I_1,$$

$$\Lambda_5 = 3J_2^2 I_3 I_0^2 I_2 + 3J_2^2 I_4 I_0^2 I_1 + K_3^2 + 2K_2 K_4 + 2K_1 K_5 + 3J_2^2 I_4^2 I_0 I_2,$$

$$\Lambda_6 = 3J_2^2 I_4 I_0^2 I_2 + 2K_3 K_4 + 2K_2 K_5 + J_2^2 I_0^3 I_1,$$

$$\Lambda_7 = J_2^2 I_0^3 I_2 + K_4^2 + 2K_3 K_5,$$

et

$$K_0 = J_6 I_1^2 - J_3 I_3 I_1,$$

$$K_1 = J_1 I_3^2 + 2J_6 I_1 I_2 - J_4 I_3 I_1 - J_3 I_3 I_2 + J_7 I_1^2 - J_3 I_4 I_1,$$

$$K_2 = J_6 I_2^2 - J_3 I_0 I_1 - J_4 I_4 I_1 + 2J_7 I_1 I_2 - J_5 I_3 I_1 + J_0 I_1^2 + 2J_1 I_3 I_4 - J_3 I_4 I_2 - J_4 I_3 I_2,$$

$$K_3 = 2J_0 I_1 I_2 - J_4 I_0 I_1 - J_5 I_3 I_2 - J_5 I_4 I_1 + 2J_1 I_3 I_0 - J_3 I_0 I_2 + J_1 I_4^2 - J_4 I_4 I_2 + J_7 I_2^2,$$

$$K_4 = J_0 I_2^2 - J_4 I_0 I_2 + 2J_1 I_4 I_0 - J_5 I_0 I_1 - J_5 I_4 I_2,$$

$$K_5 = J_1 I_0^2 - J_5 I_0 I_2.$$

Remarquons que cette équation peut admettre dix racines. Alors, si nous choisissons arbitrairement les coefficients du système (4.1), cette équation peut prendre des coefficients avec des valeurs pour lesquels elle admet dix racines réelles.

Soit $(\bar{\rho}, \bar{\xi})$ une solution du système (4.11) où $\bar{\xi}$ une des racines de cette équation. Pour obtenir un cycle limite d'après le théorème 2.3.1, la solution $(\bar{\rho}, \bar{\xi})$ doit satisfaire

$$D(\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{31}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{31}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_{32}}{\partial \rho} & \frac{\partial f_{32}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \Big|_{(\rho, \xi) = (\bar{\rho}, \bar{\xi})} \neq 0. \quad (4.12)$$

D'après les hypothèses du théorème 2.3.1, les solutions $(\bar{\rho}, \bar{\xi})$ du système (4.11) doivent être vérifiées (4.12). Donc, le système (4.4) a au plus dix cycles limites. On conclut que selon la théorie de moyennisation d'ordre trois et $(R, z) = (\rho\varepsilon, \xi\varepsilon)$ le système (4.1) a au plus dix cycles limites qui bifurquent de l'origine. Cela complète la preuve de la partie (a) du Théorème 4.1.1.

4.2 Application affirmant l'atteinte de la borne de cycles limites

Dans cette section, on donne un système quadratique de la même forme du système (4.1) et on montre que le nombre de cycles limites de ce système qui bifurquent de l'origine pour $\varepsilon = 0$ est atteint.

Considérons pour cela le système différentiel quadratique dans \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}\varepsilon^3 x - y + 2xy - 4xz - \frac{199}{36}yz - 2\varepsilon x^2 + \varepsilon y^2 + \varepsilon^2 y^2 \\ \quad + 3\varepsilon xy + 3\varepsilon yz - \varepsilon^2 xz, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{1}{4}\varepsilon^3 y - 2x^2 + 2y^2 + \frac{199}{36}xz + 4yz + \varepsilon x^2 + 2\varepsilon^2 x^2 \\ \quad - 2\varepsilon y^2 + 5\varepsilon xz + 3\varepsilon xy - \varepsilon^2 yz, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{8}\varepsilon^3 z + 2x^2 - 2y^2 - yz - xz + 24\varepsilon xz - 2\varepsilon yz + \varepsilon^2 x^2 \\ \quad + \varepsilon^2 y^2 - 9\varepsilon^2 z^2. \end{cases} \quad (4.13)$$

Les valeurs propres du point singulier $(0, 0, 0)$ du système (4.13) sont $-\frac{1}{4}\varepsilon^3 \pm i$ et $\frac{1}{8}\varepsilon^3$. Le système (4.4) associé à (4.13) comprend les fonctions :

$$\begin{aligned}
 F_{11}(\theta, \rho, \xi) &= -4\rho\xi \cos^2(\theta) + 2\rho^2 \sin^3(\theta) + 4\rho\xi \sin^2(\theta), \\
 F_{21}(\theta, \rho, \xi) &= -2\rho^2 \cos^3(\theta) + 4\rho^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 4\rho^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) \\
 &\quad + 8\rho\xi \cos(\theta) \sin(\theta) - 2\rho^2 \sin^3(\theta) - 8\rho^2\xi \cos^5(\theta) \\
 &\quad + 32\rho\xi^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + \frac{199}{9}\rho\xi^2 \cos^4(\theta) + 8\rho^2\xi \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) \\
 &\quad - 32\rho\xi^2 \cos(\theta) \sin^3(\theta) - \frac{199}{9}\rho\xi^2 \sin^4(\theta) + 4\rho^3 \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) \\
 &\quad - 16\rho^2\xi \cos(\theta) \sin^4(\theta) - \frac{199}{18}\rho^2\xi \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) - \frac{199}{18}\rho^2\xi \sin^5(\theta), \\
 F_{31}(\theta, \rho, \xi) &= -\frac{1}{4}\rho - \rho\xi + \rho^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 2\rho^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \frac{271}{18}\rho^2\xi \cos^5(\theta) \\
 &\quad - \frac{1387}{18}\rho^2\xi \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) - \frac{1207}{18}\rho^2\xi \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) \\
 &\quad + \frac{269}{9}\rho^2\xi \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 20\rho\xi^2 \cos^4(\theta) - 96\rho\xi^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\
 &\quad - 6\rho^3 \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) + (2\rho^3 + \frac{39601}{324}\rho\xi^3) \sin^6(\theta) + (10\rho^3 \\
 &\quad + \frac{3184}{9}\rho\xi^3) \cos(\theta) \sin^5(\theta) + (-10\rho^3 + \frac{122545}{324}\rho\xi^3) \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) \\
 &\quad + \frac{379}{18}\rho^2\xi \sin^5(\theta) + \frac{125}{9}\rho^2\xi \cos(\theta) \sin^4(\theta) + 12\rho\xi^2 \sin^4(\theta) + (-4\rho^3 \\
 &\quad - \frac{39601}{324}\rho\xi^3) \cos^6(\theta) + (8\rho^3 - \frac{3184}{9}\rho\xi^3) \cos^5(\theta) \sin(\theta) - \frac{398}{9}\rho\xi^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\
 &\quad - \frac{398}{9}\rho\xi^2 \cos(\theta) \sin^3(\theta) + (8\rho^3 - \frac{122545}{324}\rho\xi^3) \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) - 16\rho^3\xi \cos^8(\theta) \\
 &\quad + 128\rho^2\xi^2 \cos^6(\theta) \sin(\theta) + \frac{796}{9}\rho^2\xi^2 \cos^7(\theta) + 8\rho^4 \cos^6(\theta) \sin^3(\theta) \\
 &\quad - 64\rho^3\xi \cos^4(\theta) \sin^4(\theta) - \frac{398}{9}\rho^3\xi \cos^5(\theta) \sin^3(\theta) - \frac{398}{9}\rho^3\xi \cos^3(\theta) \sin^5(\theta) \\
 &\quad + \frac{81073}{324}\rho^2\xi^2 \cos^2(\theta) \sin^5(\theta) + \frac{796}{9}\rho^2\xi^2 \cos^3(\theta) \sin^4(\theta) + \frac{1592}{9}\rho^2\xi^2 \cos(\theta) \sin^6(\theta) \\
 &\quad - \frac{43343}{648}\rho^2\xi^2 \cos^4(\theta) \sin^3(\theta) + 16\rho^3\xi \cos^6(\theta) \sin^2(\theta) + \frac{39601}{648}\rho^2\xi^2 \sin^7(\theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{12}(\theta, \rho, \xi) &= 2\rho^2 \cos^2(\theta) - 2\rho^2 \sin^2(\theta) - \rho\xi \cos(\theta) - \rho\xi \sin(\theta), \\
 F_{22}(\theta, \rho, \xi) &= 24\rho\xi \cos(\theta) - 2\rho\xi \sin(\theta) + 4\rho^3 \cos^5(\theta) - 18\rho^2\xi \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\
 &\quad - \frac{235}{18}\rho^2\xi \cos^4(\theta) - 4\rho^3 \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) + 16\rho^2\xi \cos(\theta) \sin^3(\theta) \\
 &\quad + \frac{199}{18}\rho^2\xi \sin^4(\theta) + \frac{487}{36}\rho\xi^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + \frac{487}{36}\rho\xi^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\
 &\quad + \frac{199}{36}\rho\xi^2 \cos^3(\theta) + \frac{199}{36}\rho\xi^2 \sin^3(\theta), \\
 F_{32}(\theta, \rho, \xi) &= \frac{1}{8}\xi + \rho^2 - 9\xi^2 + 39\rho^2\xi \cos^4(\theta) - \frac{3167}{18}\rho\xi^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\
 &\quad - \frac{383}{3}\rho\xi^2 \cos^3(\theta) - \frac{359}{3}\rho\xi^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + 2\rho^2\xi \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\
 &\quad + \frac{145}{18}\rho\xi^2 \sin^3(\theta) + (-2\rho^3 - \frac{39601}{1296}\rho\xi^3) \cos^5(\theta) + (12\rho^3 \\
 &\quad - \frac{138385}{648}\rho\xi^3) \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + (12\rho^3 - \frac{138385}{648}) \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) \\
 &\quad - (10\rho^3 + \frac{154225}{1296}\rho\xi^3) \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 16\rho^2\xi \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\
 &\quad - (2\rho^3 + \frac{39601}{1296}\rho\xi^3) \sin^5(\theta) - (10\rho^3 + \frac{154225}{1296}\rho\xi^3) \cos(\theta) \sin^4(\theta) \\
 &\quad - 7\rho^2\xi \sin^4(\theta) - 6\rho^2\xi \cos(\theta) \sin^3(\theta) + 8\rho^4 \cos^8(\theta) - 68\rho^3\xi \cos^6(\theta) \sin(\theta) \\
 &\quad - \frac{434}{9}\rho^3\xi \cos^7(\theta) + \frac{157609}{648}\rho^2\xi^2 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) + 231\rho^2\xi^2 \cos^5(\theta) \sin(\theta) \\
 &\quad + \frac{199}{9}\rho^2\xi^2 \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) + \frac{53929}{648}\rho^2\xi^2 \cos^6(\theta) - \frac{122545}{648}\rho^2\xi^2 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) \\
 &\quad - 8\rho^4 \cos^6(\theta) \sin^2(\theta) + 64\rho^3\xi \cos^4(\theta) \sin^3(\theta) + \frac{398}{9}\rho^3\xi \cos^3(\theta) \sin^4(\theta) \\
 &\quad - \frac{1592}{9}\rho^2\xi^2 \cos(\theta) \sin^5(\theta) - \frac{39601}{648}\rho^2\xi^2 \sin^6(\theta).
 \end{aligned}$$

Pour déterminer les cycles limites, on résout le système

$$\begin{cases}
 f_{31}(\rho, \xi) = \frac{1}{2}\rho \left[-\frac{1}{2} + \rho^2\xi - 4\xi^2 - 2\xi + 3\rho^2 \right] = 0, \\
 f_{32}(\rho, \xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{-17}{24}\rho^4 - 2\rho^3\xi + \frac{455}{48}\rho^2\xi^2 + \rho^2\xi + 2\rho^2 - 18\xi^2 + \frac{1}{4}\xi \right] = 0.
 \end{cases} \quad (4.14)$$

En résolvant la première équation par rapport à ρ en considérant $\rho > 0$, on obtient les deux solutions

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(3+\xi)(1+8\xi^2+4\xi)}}{2(3+\xi)}, \quad \rho_2 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{(3+\xi)(1+8\xi^2+4\xi)}}{2(3+\xi)}.$$

Comme ρ doit être positif, on n'accepte que ρ_1 . Alors la seconde équation devient

$$\frac{1}{L(\xi)} \left(13249600\xi^{10} + 72682944\xi^9 + 70849632\xi^8 - 165550520\xi^7 - 219277487\xi^6 \right. \\ \left. + 105231662\xi^5 + 121637617\xi^4 - 35209606\xi^3 - 3958090\xi^2 + 797824\xi + 73441 \right),$$

où

$$L(\xi) = -192(3 + \xi)^2 \left((-3640\xi^5 - 10308\xi^4 + 3405\xi^3 + 11275\xi^2 - 1472\xi - 271) \right. \\ \left. - ((384\xi^3 + 192\xi^2 + 48\xi)\sqrt{2}\sqrt{(3 + \xi)(1 + 8\xi^2 + 4\xi)}) \right).$$

On résout cette équation, on obtient les racines suivantes

$$\xi_1 = 0.2075448556, \quad \xi_2 = 0.2648446151, \quad \xi_3 = 0.7360098291, \quad \xi_4 = 1.245269006,$$

$$\xi_5 = -0.1024648022, \quad \xi_6 = -0.1060657437, \quad \xi_7 = -1.080408535, \quad \xi_8 = -1.337103376,$$

$$\xi_9 = -2.433134674, \quad \xi_{10} = -2.880161987.$$

Puisque ρ doit être positif et ξ réel, les seules racines du système (4.14) acceptées sont

$$(0.5822454911, 0.2075448556); \quad (0.6335012386, 0.2648446151);$$

$$(1.052534750, 0.7360098291); \quad (1.471578806, 1.245269006);$$

$$(0.3410699520, -0.1024648022); \quad (0.3391500426, -0.1060657437);$$

$$(1.251863940, -1.080408535); \quad (1.730050696, -1.337103376);$$

$$(5.837133551, -2.433134674); \quad (15.26399619, -2.880161987).$$

4.2. APPLICATION AFFIRMANT L'ATTEINTE DE LA BORNE DE CYCLES
LIMITES

D'après le théorème 4.1.1, le système a au plus dix cycles limites. On vérifie que le déterminant calculé en chaque racine est non nul avec :

$$D(\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\bar{\rho}^2\bar{\xi} - 2\bar{\xi}^2 - \bar{\xi} + \frac{9}{2}\bar{\rho}^2 & \frac{1}{2}\bar{\rho}^3 - 4\bar{\rho}\bar{\xi} - \bar{\rho} \\ \frac{-17}{12}\bar{\rho}^3 - 3\bar{\rho}^2\bar{\xi} + \frac{455}{48}\bar{\rho}\bar{\xi}^2 + \bar{\rho}\bar{\xi} + 2\bar{\rho} & -\bar{\rho}^3 + \frac{455}{48}\bar{\rho}^2\bar{\xi} + \frac{1}{2}\bar{\rho}^2 - 18\bar{\xi} + \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

on obtient

$$D(0.5822454911, 0.2075448556) = -2.233224452,$$

$$D(0.6335012386, 0.2648446151) = -3.446707469,$$

$$D(1.052534750, 0.7360098291) = -9.92066588,$$

$$D(1.471578806, 1.245269006) = 110.2318284,$$

$$D(0.3410699520, -0.1024648022) = 0.7518306652,$$

$$D(0.3391500426, -0.1060657437) = 0.7607482745,$$

$$D(1.251863940, -1.080408535) = -81.87173135,$$

$$D(1.730050696, -1.337103376) = -442.0333741,$$

$$D(5.837133551, -2.433134674) = -61762.27228,$$

$$D(15.26399619, -2.880161987) = 3.291647160 \cdot 10^6.$$

D'où, le système (4.13) a exactement dix cycles limites qui bifurquent de l'origine. Cela complète la démonstration de la partie (b) du Théorème 4.1.1. Voir la figure (4.3).

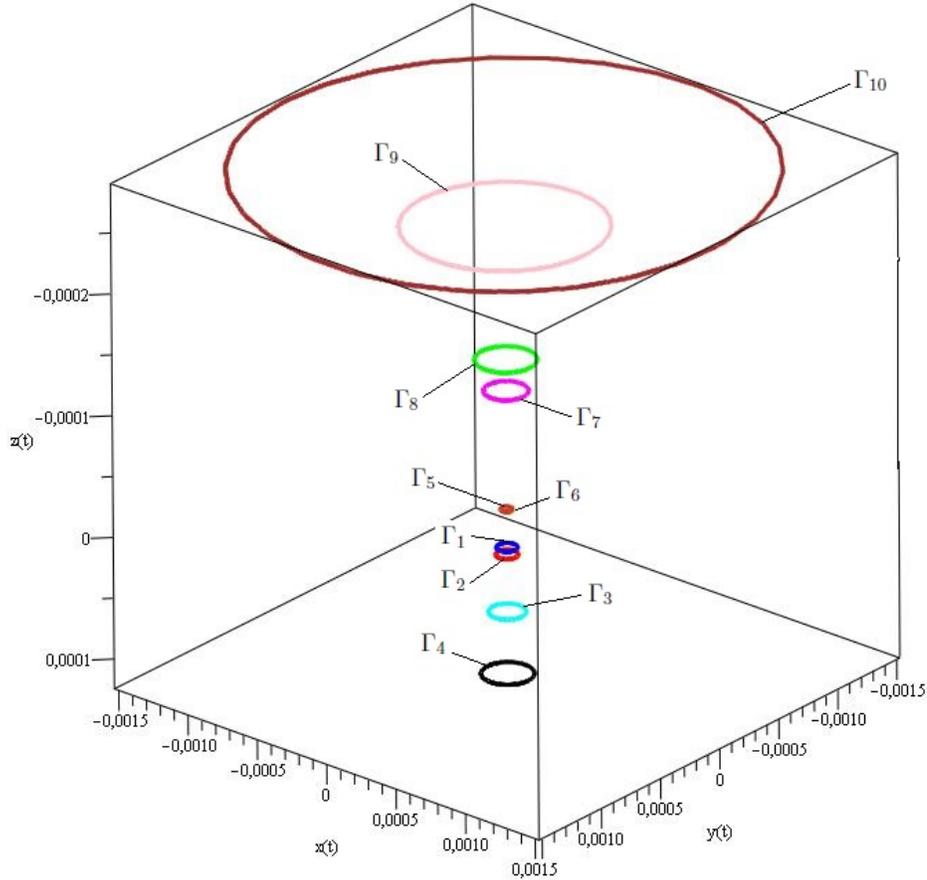


FIGURE 4.3 – Les dix cycles limites du système (4.13) pour $\varepsilon = 0.0001$.

On étudie maintenant la stabilité des dix cycles limites.
La matrice jacobienne du système moyenné (4.14) est de la forme suivante

$$M(\bar{\rho}, \bar{\xi}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\bar{\rho}^2\bar{\xi} - 2\bar{\xi}^2 - \bar{\xi} + \frac{9}{2}\bar{\rho}^2 & \frac{1}{2}\bar{\rho}^3 - 4\bar{\rho}\bar{\xi} - \bar{\rho} \\ \frac{-17}{12}\bar{\rho}^3 - 3\bar{\rho}^2\bar{\xi} + \frac{455}{48}\bar{\rho}\bar{\xi}^2 + \bar{\rho}\bar{\xi} + 2\bar{\rho} & -\bar{\rho}^3 + \frac{455}{48}\bar{\rho}^2\bar{\xi} + \frac{1}{2}\bar{\rho}^2 - 18\bar{\xi} + \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice M calculées aux points
(0.5822454911, 0.2075448556); (0.6335012386, 0.2648446151); (1.052534750, 0.7360098291);
(1.471578806, 1.245269006); (0.3410699520, -0.1024648022); (0.3391500426, -0.1060657437);
(1.251863940, -1.080408535); (1.730050696, -1.337103376); (5.837133551, -2.433134674);
(15.26399619, -2.880161987) sont

4.2. APPLICATION AFFIRMANT L'ATTEINTE DE LA BORNE DE CYCLES
LIMITES

(0.8244374073, -2.7087859343); (1.01563922728, -3.39363366); (2.3514989, -4.2188689); (5.1809028 ± 9.1318165i); (0.419430749, 1.79250249535); (0.408750104, 1.86115738); (12.112016, -6.75954614); (15.7026074, -28.1503168); (63.788027488, -968.24239); (-351.3102078, -9369.63141676) respectivement.

Donc les cycles limites Γ_i pour $i = 1, \dots, 10$ sont comme suit : Γ_1 semistable, Γ_2 semistable, Γ_3 semistable, Γ_4 instable, Γ_5 instable, Γ_6 instable, Γ_7 semistable, Γ_8 semistable, Γ_9 semistable et Γ_{10} stable.

Les cycles limites Γ_i pour $i = 1, \dots, 10$ du système (4.3) associés au système (4.13) et correspondants au zéros $(\bar{\rho}, \bar{\xi})$ donnés par (4.14) s'écrivent comme suit $\{(R_i(\theta), z_i(\theta)), \theta \in S^1\}$, à partir de l'expression

$$\begin{pmatrix} R_i(\theta) \\ z_i(\theta) \end{pmatrix} = \varepsilon \left[\begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \int_0^\theta F_{11}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \\ \int_0^\theta F_{12}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \int_0^\theta F_{21}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \\ \int_0^\theta F_{22}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\varepsilon^3) \\ O(\varepsilon^3) \end{pmatrix} \right],$$

où

$$\begin{pmatrix} \int_0^\theta F_{11}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \\ \int_0^\theta F_{12}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\bar{\rho}^2(1 - \cos(\theta)) - 4\bar{\rho}\bar{\xi} \cos(\theta) \sin(\theta) - \frac{2}{3}\bar{\rho}^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) \\ \bar{\rho}\bar{\xi}(\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1) + 2\bar{\rho}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} \int_0^\theta F_{21}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \\ \int_0^\theta F_{22}(s, \bar{\rho}, \bar{\xi}) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{32}{5}\bar{\rho}^2\bar{\xi} \cos^4(\theta) \sin(\theta) - \frac{8}{15}\bar{\rho}^2\bar{\xi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\ +\frac{199}{9}\bar{\rho}\bar{\xi}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - 4\bar{\rho}\bar{\xi} \cos^2(\theta) \\ -\frac{199}{54}\bar{\xi}\bar{\rho}^2 \cos^3(\theta) + 16\bar{\rho}\bar{\xi}^2 \cos^2(\theta) \\ -16\bar{\rho}\bar{\xi}^2 \cos^4(\theta) - \frac{16}{3}\bar{\rho}^2\bar{\xi} \sin^3(\theta) \\ +\frac{199}{18}\bar{\xi}\bar{\rho}^2 \cos(\theta) - 2\bar{\rho}^2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) \\ -\frac{16}{15}\bar{\rho}^2\bar{\xi} \sin(\theta) - 2\bar{\rho}^2 \cos^3(\theta) \\ +2\bar{\rho}^2 \cos(\theta) + \frac{2}{3}\bar{\rho}^3 \cos^6(\theta) - \bar{\rho}^3 \cos^4(\theta) \\ +4\bar{\rho}\bar{\xi} + \frac{1}{3}\bar{\rho}^3 - \frac{199}{27}\bar{\rho}^2\bar{\xi} \\ \\ 2\bar{\rho}\bar{\xi}(\cos(\theta) + 12 \sin(\theta) - 1) \\ +\frac{295}{36}\bar{\rho}\bar{\xi}^2 - \frac{1}{2}\bar{\rho}^2\bar{\xi} - \frac{8}{3}\bar{\rho}\bar{\xi}^2 \cos^3(\theta) - \\ \frac{1}{2}\bar{\rho}^2\bar{\xi} \cos^3(\theta) \sin(\theta) - \frac{425}{36}\bar{\rho}^2\bar{\xi} \cos(\theta) \sin(\theta) \\ -\frac{3}{4}\bar{\rho}^2\bar{\xi}\theta + \frac{199}{36}\bar{\rho}\bar{\xi}^2 (\sin(\theta) - \cos(\theta)) \\ +\frac{17}{2}\bar{\rho}^2\bar{\xi} \cos^4(\theta) + \frac{8}{5}\bar{\rho}^3 \cos^4(\theta) \sin(\theta) \\ +\frac{4}{5}\bar{\rho}^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \frac{8}{5}\bar{\rho}^3 \sin(\theta) \\ +\frac{8}{3}\bar{\rho}\bar{\xi}^2 \sin^3(\theta) - 8\bar{\rho}^2\bar{\xi} \cos^2(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le cycle limite Γ_1 est de la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1(\theta) = 0.5822454911\varepsilon + \varepsilon^2(0.4520130825(1 - \cos(\theta)) - 0.4833682256 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 0.2260065413 \cos(\theta) \sin^2(\theta)) + \varepsilon^3(0.0305865093 - 0.0820858714 \cos^2(\theta) \\ \quad - 0.9373083043 \cos^3(\theta) - 0.5986692886 \cos^4(\theta) - 0.3752519598 \sin^3(\theta) \\ \quad + 1.45588566 \cos(\theta) - 0.7155448198 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 0.07505039196 \sin(\theta) \\ \quad - 0.4503023517 \sin(\theta) \cos^4(\theta) + 0.554549920 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 0.1315912896 \cos^6(\theta)) + O(\varepsilon^4), \\ \\ z_1(\theta) = 0.2075448556\varepsilon + \varepsilon^2(0.1208420564(\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1) \\ \quad + 0.6780196238 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^3(-0.07134611163 + 0.103046632 \cos(\theta) \\ \quad + 3.354665929 \sin(\theta) - 0.06688039237 \cos^3(\theta) - 0.03517987123 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 0.8306358485 \cos(\theta) \sin(\theta) - 0.05276980684\theta + 0.598057810 \cos^4(\theta) \\ \quad + 0.315819095 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 0.1579095475 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 0.0668803923 \sin^3(\theta) \\ \quad - 0.5628779397 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^4). \end{array} \right.$$

Et le cycle limite Γ_2 s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} R_2(\theta) = 0.6335012386\varepsilon + \varepsilon^2(0.5350984257(1 - \cos(\theta)) - 0.6711175668 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 0.2675492129 \cos(\theta) \sin^2(\theta)) + \varepsilon^3(-0.0275213153 + 0.0398499279 \cos^2(\theta) \\ \quad - 1.194340269 \cos^3(\theta) - 0.9652066313 \cos^4(\theta) - 0.5668717467 \sin^3(\theta) \\ \quad + 1.97772553 \cos(\theta) - 0.8593348133 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 0.1133743493 \sin(\theta) \\ \quad - 0.6802460960 \sin(\theta) \cos^4(\theta) + 0.9825175795 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 0.1694927577 \cos^6(\theta)) + O(\varepsilon^4), \\ \\ z_2(\theta) = 0.2648446151\varepsilon + \varepsilon^2(0.1677793917(\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1) \\ \quad + 0.8026476386 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^3(-0.02457903235 + 0.089929388 \cos(\theta) \\ \quad + 4.67911741 \sin(\theta) - 0.1184945825 \cos^3(\theta) - 0.05314422625 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 1.254794231 \cos(\theta) \sin(\theta) - 0.07971633938\theta + 0.903451846 \cos^4(\theta) \\ \quad + 0.4067826186 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 0.203391309 \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 0.1184945825 \sin^3(\theta) - 0.8503076200 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^4). \end{array} \right.$$

Le cycle limite Γ_3 s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} R_3(\theta) = 1.052534750\varepsilon + \varepsilon^2(1.477105867(1 - \cos(\theta)) - 3.098703686 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 0.7385529333 \cos(\theta) \sin^2(\theta)) + \varepsilon^3(-2.522223413 + 6.024001794 \cos^2(\theta) \\ \quad - 5.220460507 \cos^3(\theta) - 10.28873442 \cos^4(\theta) - 4.348657746 \sin^3(\theta) \\ \quad + 11.2300639 \cos(\theta) - 2.650524575 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 0.8697315493 \sin(\theta) \\ \quad - 5.218389295 \sin(\theta) \cos^4(\theta) + 12.60707216 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 0.7773526273 \cos^6(\theta)) + O(\varepsilon^4), \\ \\ z_3(\theta) = 0.7360098291\varepsilon + \varepsilon^2(0.7746759215(\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1) \\ \quad + 2.215658800 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^3(2.715180445 - 1.602416196 \cos(\theta) \\ \quad + 23.60963647 \sin(\theta) - 1.520450913 \cos^3(\theta) - 0.4076866637 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 9.625935116 \cos(\theta) \sin(\theta) - 0.6115299956\theta + 6.930673283 \cos^4(\theta) \\ \quad + 1.865646306 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 0.9328231528 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 1.520450913 \sin^3(\theta) \\ \quad - 6.522986619 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^4). \end{array} \right.$$

Le cycle limite Γ_4 est

$$\left\{ \begin{array}{l} R_4(\theta) = 1.471578806\varepsilon + \varepsilon^2(2.887392243(1 - \cos(\theta)) \\ \quad - 7.330045908 \cos(\theta) \sin(\theta) - 1.443696121 \cos(\theta) \sin^2(\theta)) + \varepsilon^3(-11.48326538 \\ \quad + 29.18147001 \cos^2(\theta) - 14.26887216 \cos^3(\theta) - 39.69828484 \cos^4(\theta) \\ \quad - 14.38232027 \sin^3(\theta) + 34.14443976 \cos(\theta) - 5.769320391 \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 2.876464054 \sin(\theta) - 17.25878433 \sin(\theta) \cos^4(\theta) + 50.45688658 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 2.12451261 \cos^6(\theta)) + O(\varepsilon^4), \\ \\ z_4(\theta) = 1.245269006\varepsilon + \varepsilon^2(1.832511477(\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1) \\ \quad + 4.33108836 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^3(13.68610882 - 8.949198696 \cos(\theta) \\ \quad + 61.69332737 \sin(\theta) - 6.085252653 \cos^3(\theta) - 1.348342526 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 31.83586519 \cos(\theta) \sin(\theta) - 2.022513788\theta + 22.92182293 \cos^4(\theta) \\ \quad + 5.098830275 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 2.549415138 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 6.085252653 \sin^3(\theta) \\ \quad - 21.57348041 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^4). \end{array} \right.$$

Et le cycle limite Γ_5 s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} R_5(\theta) = 0.3410699520\varepsilon + \varepsilon^2(0.1551049496(1 - \cos(\theta)) + 0.1397906607 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 0.07755247480 \cos(\theta) \sin^2(\theta)) + \varepsilon^3(-0.03871339576 + 0.1970851503 \cos^2(\theta) \\ \quad - 0.1887314966 \cos^3(\theta) - 0.09697071785 \cos^4(\theta) + 0.0635711919 \sin^3(\theta) \\ \quad + 0.100879641 \cos(\theta) - 0.2263003052 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 0.0127142383 \sin(\theta) \\ \quad + 0.0762854303 \sin(\theta) \cos^4(\theta) + 0.0791778015 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 0.0264508188 \cos^6(\theta)) + O(\varepsilon^4), \\ \\ z_5(\theta) = -0.1024648022\varepsilon + \varepsilon^2(-0.3494766517(\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1) \\ \quad + 0.2326574244 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^3(0.10519866 - 0.08968978073 \cos(\theta) \\ \quad - 0.7554675485 \sin(\theta) - 0.009549081597 \cos^3(\theta) + 0.00595979924 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 0.140717482 \cos(\theta) \sin(\theta) + 0.008939698868\theta - 0.1013165872 \cos^4(\theta) \\ \quad + 0.0634819652 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 0.0317409826 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 0.00954908159 \sin^3(\theta) \\ \quad + 0.09535678792 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^4). \end{array} \right.$$

Le cycle limite Γ_6 s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} R_6(\theta) = 0.3391500426\varepsilon + \varepsilon^2(0.1533636685(1 - \cos(\theta)) + 0.1438888060 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 0.07668183427 \cos(\theta) \sin^2(\theta)) + \varepsilon^3(-0.04096715784 + 0.204935498 \cos^2(\theta) \\ \quad - 0.1850863406 \cos^3(\theta) - 0.1000566639 \cos^4(\theta) + 0.06506652624 \sin^3(\theta) \\ \quad + 0.0951680161 \cos(\theta) - 0.2235388502 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 0.0130133052 \sin(\theta) \\ \quad + 0.0780798314 \sin(\theta) \cos^4(\theta) + 0.08436313808 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 0.02600664736 \cos^6(\theta)) + O(\varepsilon^4), \\ \\ z_6(\theta) = -0.1060657437\varepsilon + \varepsilon^2(-0.03597220149(\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1) \\ \quad + 0.2300455028 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^3(0.1093096231 - 0.09303518750 \cos(\theta) \\ \quad - 0.7798260976 \sin(\theta) - 0.01017444881 \cos^3(\theta) + 0.00609998683 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 0.1440274669 \cos(\theta) \sin(\theta) + 0.009149980252\theta - 0.1036997762 \cos^4(\theta) \\ \quad + 0.0624159536 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 0.0312079768 \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 0.01017444881 \sin^3(\theta) + 0.09759978936 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^4). \end{array} \right.$$

Le cycle limite Γ_7 s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} R_7(\theta) = 1.251863940\varepsilon + \varepsilon^2(2.089551099(1 - \cos(\theta)) + 5.410097940 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 1.044775549 \cos(\theta) \sin^2(\theta)) + \varepsilon^3(7.723199348 + 28.79056189 \cos^2(\theta) \\ \quad + 3.105342788 \cos^3(\theta) - 25.34233920 \cos^4(\theta) + 9.03027536 \sin^3(\theta) \\ \quad - 15.58468166 \cos(\theta) - 2.231299112 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 1.80605507 \sin(\theta) \\ \quad + 10.83633044 \sin(\theta) \cos^4(\theta) + 32.3105022 \cos(\theta) \sin(\theta) + 1.30791683 \cos^6(\theta)) \\ \quad + O(\varepsilon^4), \\ \\ z_7(\theta) = -1.080408535\varepsilon + \varepsilon^2(-1.352524485(\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1) \\ \quad + 3.134326648 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^3(15.52600685 - 10.78267454 \cos(\theta) \\ \quad - 21.24396166 \sin(\theta) - 3.896743992 \cos^3(\theta) + 0.846588315 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 19.9888907 \cos(\theta) \sin(\theta) + 1.269882473\theta - 14.39200136 \cos^4(\theta) \\ \quad + 3.139000406 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 1.569500203 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 3.896743992 \sin^3(\theta) \\ \quad + 13.54541305 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^4). \end{array} \right.$$

Et le cycle limite Γ_8 s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} R_8(\theta) = 1.730050696\varepsilon + \varepsilon^2(3.990767215(1 - \cos(\theta)) + 9.25302650 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 1.995383607 \cos(\theta) \sin^2(\theta)) + \varepsilon^3(21.96963076 + 58.74203840 \cos^2(\theta) \\ \quad + 8.762149108 \cos^3(\theta) - 54.66718410 \cos^4(\theta) + 21.34427326 \sin^3(\theta) \\ \quad - 38.25874897 \cos(\theta) - 3.851723496 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 4.26885465 \sin(\theta) \\ \quad + 25.61312792 \sin(\theta) \cos^4(\theta) + 68.39106506 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 3.452114799 \cos^6(\theta)) + O(\varepsilon^4), \\ \\ z_8(\theta) = -1.337103376\varepsilon + \varepsilon^2(-2.313256626(\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1) \\ \quad + 5.986150822 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^3(31.97347379 - 21.72427952 \cos(\theta) \\ \quad - 30.13531723 \sin(\theta) - 8.248168651 \cos^3(\theta) + 2.001025618 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 47.2464382 \cos(\theta) \sin(\theta) + 3.001538428\theta - 34.01743551 \cos^4(\theta) \\ \quad + 8.285075517 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 4.142537758 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 8.248168651 \sin^3(\theta) \\ \quad + 32.0164099 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^4). \end{array} \right.$$

Le cycle limite Γ_9 est

$$\left\{ \begin{array}{l} R_9(\theta) = 5.837133551\varepsilon + \varepsilon^2(45.42950412(1 - \cos(\theta)) + 56.81012816 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 22.71475206 \cos(\theta) \sin^2(\theta)) + \varepsilon^3(620.5033991 + 609.7168989 \cos^2(\theta) \\ \quad + 237.3652471 \cos^3(\theta) - 751.7903327 \cos^4(\theta) + 442.1444068 \sin^3(\theta) \\ \quad - 848.3842537 \cos(\theta) - 23.92981550 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 88.42888136 \sin(\theta) \\ \quad + 530.5732881 \sin(\theta) \cos^4(\theta) + 764.086440 \cos(\theta) \sin(\theta) + 132.5890413 \cos^6(\theta)) \\ \quad + O(\varepsilon^4), \\ \\ z_9(\theta) = -2.433134674\varepsilon + \varepsilon^2(-14.20253204(\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1) \\ \quad + 68.14425618 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^3(353.0288407 - 219.4266741 \cos(\theta) \\ \quad + 168.374540 \sin(\theta) - 92.15112845 \cos^3(\theta) + 41.45103814 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 978.7050671 \cos(\theta) \sin(\theta) + 62.1765572\theta - 704.6676483 \cos^4(\theta) \\ \quad + 318.2136992 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 159.1068496 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 92.15112845 \sin^3(\theta) \\ \quad + 663.216610 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^4). \end{array} \right.$$

Le cycle limite Γ_{10} s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{10}(\theta) = 15.26399619\varepsilon + \varepsilon^2(310.65277(1 - \cos(\theta)) + 175.8511264 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 155.3263865 \cos(\theta) \sin^2(\theta)) + \varepsilon^3(5955.469872 + 2201.770044 \cos^2(\theta) \\ \quad + 2006.95599 \cos^3(\theta) - 5582.270975 \cos^4(\theta) + 3578.921231 \sin^3(\theta) \\ \quad - 6952.826310 \cos(\theta) - 108.0870363 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 715.7842462 \sin(\theta) \\ \quad + 4294.705477 \sin(\theta) \cos^4(\theta) + 2799.70739 \cos(\theta) \sin(\theta) + 2370.901371 \cos^6(\theta)) \\ \quad + O(\varepsilon^4), \\ \\ z_{10}(\theta) = -2.880161987\varepsilon + \varepsilon^2(-43.96278160(\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1) \\ \quad + 465.979159 \cos(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^3(1461.029430 - 787.8524117 \cos(\theta) \\ \quad + 5334.98338 \sin(\theta) - 337.6531531 \cos^3(\theta) + 335.5238654 \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 7922.091267 \cos(\theta) \sin(\theta) + 503.285798\theta - 5703.905712 \cos^4(\theta) \\ \quad + 5690.163291 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + 2845.081646 \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\ \quad + 337.6531531 \sin^3(\theta) + 5368.381846 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^4). \end{array} \right.$$

Conclusions et perspectives

L'objectif des deux travaux que nous avons étudiés dans cette thèse porte sur l'étude de l'existence et du nombre maximum de cycles limites pour des systèmes dynamiques non linéaires.

L'intérêt de la première partie concerne l'étude des systèmes de Liénard. On a donné un résultat sur le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire perturbé par une classe généralisée du système de Liénard. De plus, on a montré que la borne supérieure du nombre des cycles limites est atteinte.

Dans la seconde partie on a étudié un système quadratique dans \mathbb{R}^3 . On a montré un résultat sur le nombre maximum de cycles limites de faible amplitude qui se produit par une bifurcation de Hopf autour de l'origine pour ce type de système. Une application a été proposée dans cette étude prouvant que la borne supérieure du nombre des cycles limites est atteinte. On a utilisé la théorie de moyennisation d'ordre trois.

Un outil très important a été utilisé pour prouver nos résultats est la théorie de moyennisation. Cette théorie a été abondamment utilisée ces dernières années pour l'étude des cycles limites des systèmes perturbés. Nous notons que les calculs dans cette thèse ont été faits par le logiciel mathématique Maple.

En perspective, on prévoit d'étudier la bifurcation de Hopf d'un système différentiel perturbé dans \mathbb{R}^4 , en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre trois.

Appendice

Dans cet appendice, nous présentons deux programmes effectués avec le logiciel Maple, pour affirmer les résultats de l'exemple 3.2.2 page 44, ainsi que les résultats obtenus dans la section 4.2 page 59.

À la fin de cet appendice vous trouverez les fonctions $F_{11}, F_{21}, F_{31}, F_{12}, F_{22}$ et F_{32} mentionnées dans le système (4.4) page 49. On a préféré les mettre ici pour ne pas gêner le lecteur puisqu'elles comportent des expressions trop longues.

1) Les deux cycles limites de l'exemple 3.2.2. page 44.

```

> restart;
> dx := y - ε · ( x3 - 2 · x ) · y - ε2 · (  $\frac{1}{2}$  · x3 ) · y;
                                dx := y - ε ( x3 - 2 x ) y -  $\frac{1}{2}$  ε2 x3 y (1)
> dy := -x - ε · ( 4 · x2 + ( x - x · y2 + 2 x2 · y - x · y3 + x3 ) · y ) - ε2 · ( x2 - x + ( -x · y + 2 · x2 + 3 · y
                                + y4 ) · y );
dy := -x - ε ( 4 x2 + ( x - x y2 + 2 x2 y - x y3 + x3 ) y ) - ε2 ( x2 - x + ( -x y + 2 x2 + 3 y
                                + y4 ) y ) (2)
> rd := collect( expand( simplify( subs( x = r · cos( θ ), y = r · sin( θ ), (  $\frac{x \cdot dx + y \cdot dy}{r}$  ) ) ) ), ε );
rd := ( -  $\frac{1}{2}$  r4 sin( θ ) cos( θ )4 - 3 r2 sin( θ ) + cos( θ ) r sin( θ ) + r3 cos( θ ) sin( θ )
                                - r3 sin( θ ) cos( θ )3 + 2 r5 sin( θ )2 cos( θ )2 - 2 r3 sin( θ )2 cos( θ )2 - r5 sin( θ )2 cos( θ )4
                                + 2 r2 sin( θ ) cos( θ )2 - r5 sin( θ )2 ) ε2 + ( - 2 r4 sin( θ )2 cos( θ )3 + r5 sin( θ ) cos( θ )5
                                + sin( θ ) r5 cos( θ ) + r4 sin( θ ) cos( θ )4 - r2 sin( θ )2 cos( θ ) - 2 r2 sin( θ ) cos( θ )2
                                - 2 sin( θ ) r4 cos( θ )2 + r4 sin( θ )2 cos( θ ) - 2 sin( θ ) r5 cos( θ )3 ) ε

```

> $\theta d := \text{collect}\left(\text{expand}\left(\text{simplify}\left(\text{subs}\left(x=r\cdot\cos(\theta), y=r\cdot\sin(\theta), \left(\frac{x\cdot dy - y\cdot dx}{r^2}\right)\right)\right)\right), \varepsilon\right);$

$$\theta d := -1 + \left(-2 r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 + \cos(\theta)^2 + 2 r^4 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 - \frac{1}{2} \cos(\theta)^5 r^3\right. \quad (4)$$

$$\left. + r^2 \cos(\theta)^2 + \frac{1}{2} r^3 \cos(\theta)^3 - 3 r \cos(\theta) - \sin(\theta) \cos(\theta)^5 r^4 - r^4 \sin(\theta) \cos(\theta)\right. \\ \left. + 2 \cos(\theta)^3 r - \cos(\theta)^4 r^2\right) \varepsilon^2 + \left(\cos(\theta)^5 r^3 - r \sin(\theta) \cos(\theta)^2 - 2 r^3 \sin(\theta) \cos(\theta)^4\right. \\ \left. - 2 r^4 \cos(\theta)^4 - 2 r \cos(\theta) + r^3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - r^3 \cos(\theta)^3 + \cos(\theta)^6 r^4 - 2 \cos(\theta)^3 r\right. \\ \left. + r^4 \cos(\theta)^2\right) \varepsilon$$

> $e := \text{expand}\left(\text{simplify}\left(\text{series}\left(\frac{rd}{\theta d}, \varepsilon=0, 3\right)\right)\right);$

$$e := \left(2 r^4 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^3 - r^5 \sin(\theta) \cos(\theta)^5 - \sin(\theta) r^5 \cos(\theta) - r^4 \sin(\theta) \cos(\theta)^4\right. \quad (5) \\ \left. + r^2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta) + 2 r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 + 2 \sin(\theta) r^4 \cos(\theta)^2 - r^4 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)\right. \\ \left. + 2 \sin(\theta) r^5 \cos(\theta)^3\right) \varepsilon + \left(-\cos(\theta) r \sin(\theta) - 4 r^3 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 - r^3 \cos(\theta) \sin(\theta)\right. \\ \left. + \frac{1}{2} r^4 \sin(\theta) \cos(\theta)^4 + 3 r^2 \sin(\theta) + r^5 \sin(\theta)^2 - 2 r^5 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^4\right. \\ \left. - 2 r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 - 10 r^5 \sin(\theta) \cos(\theta)^5 - 2 \sin(\theta) r^5 \cos(\theta)^3\right. \\ \left. - 8 r^7 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^6 + 4 r^6 \sin(\theta) \cos(\theta)^8 - 2 r^8 \sin(\theta) \cos(\theta)^{10}\right. \\ \left. - 8 \sin(\theta) r^8 \cos(\theta)^6 + 7 r^8 \sin(\theta) \cos(\theta)^8 - 6 r^9 \sin(\theta) \cos(\theta)^7\right. \\ \left. + 4 r^7 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^8 - r^9 \sin(\theta) \cos(\theta)^{11} + 2 \sin(\theta)^2 r^6 \cos(\theta)^3\right. \\ \left. + 8 r^8 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^5 - 10 r^8 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^7 + 4 r^8 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^9\right. \\ \left. + 2 r^6 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^7 - 6 r^6 \sin(\theta) \cos(\theta)^6 - 6 r^5 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^6\right. \\ \left. + 4 r^9 \sin(\theta) \cos(\theta)^9 + 4 \sin(\theta) r^9 \cos(\theta)^5 + 2 \sin(\theta) r^6 \cos(\theta)^2\right. \\ \left. - 2 \sin(\theta)^2 r^8 \cos(\theta)^3 + 3 \sin(\theta) r^8 \cos(\theta)^4 - \sin(\theta) r^9 \cos(\theta)^3 + 3 r^7 \sin(\theta) \cos(\theta)^9\right. \\ \left. - 5 r^7 \sin(\theta) \cos(\theta)^7 + 8 r^5 \sin(\theta) \cos(\theta)^7 - 4 r^6 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^5\right. \\ \left. - 4 r^3 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^4 - 3 r^3 \sin(\theta) \cos(\theta)^5 + 3 \sin(\theta)^2 r^7 \cos(\theta)^4\right. \\ \left. + 3 \sin(\theta) r^7 \cos(\theta)^5 - \sin(\theta) r^7 \cos(\theta)^3\right) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

> $F1 := \text{op}(1, e);$

$$F1 := 2 r^4 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^3 - r^5 \sin(\theta) \cos(\theta)^5 - \sin(\theta) r^5 \cos(\theta) - r^4 \sin(\theta) \cos(\theta)^4 \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& -55 r^8 \cos(s)^{11} - 110 r^7 \cos(s)^{10} - 60 r \cos(s)^2 - 56 r^6 \sin(s) \cos(s) \\
& + 290 r^6 \sin(s) \cos(s)^4 - 336 r^4 \sin(s) \cos(s)^6 + 40 r^2 \cos(s) \sin(s) + 30 r^7 \sin(s) \cos(s) \\
& - 60 r^5 \sin(s) \cos(s) + 112 r^6 \sin(s) \cos(s)^3 - 200 r^2 \sin(s) \cos(s)^4 + 8 r^6 \cos(s) \\
& - 44 r^4 \cos(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> f2 := collect\left(eval\left(simplify\left(\frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \text{int}(g, s = 0 .. 2 \cdot \text{Pi}) \right) \right), r \right); \\
f2 := -\frac{1}{64} r^7 + \frac{3}{16} r^5 - \frac{1}{4} r^3
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
> solve(f2 = 0, r); \\
0, 0, 0, -1 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}, \sqrt{5} + 1, 1 - \sqrt{5}
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
> evalf(\%); \\
0., 0., 0., 1.236067977, -3.236067977, 3.236067977, -1.236067977
\end{aligned} \tag{13}$$

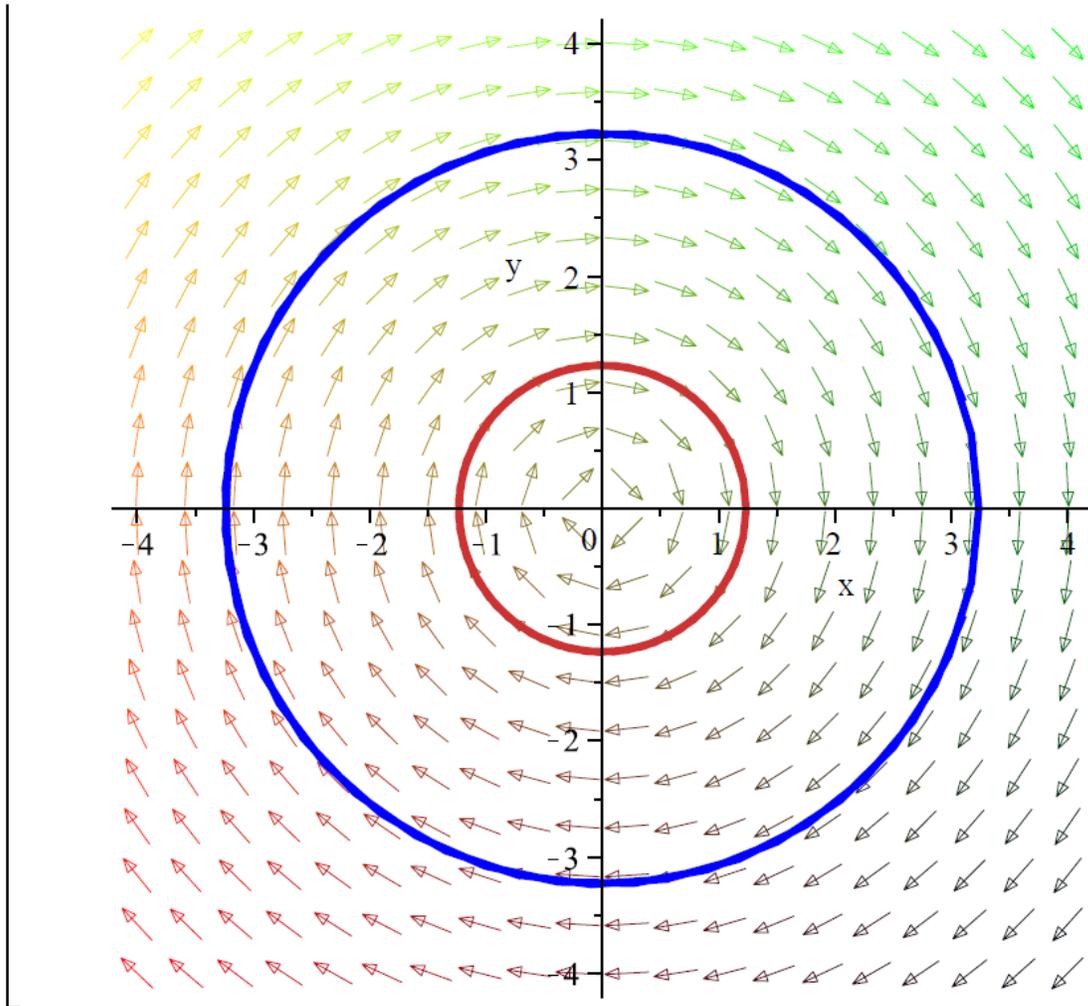
$$\begin{aligned}
> e := \frac{\partial}{\partial r} f2; \\
e := -\frac{7}{64} r^6 + \frac{15}{16} r^4 - \frac{3}{4} r^2
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
> evalf(subs(r = -1 + \text{sqrt}(5), e)); \\
0.652475840
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
> evalf(subs(r = 1 + \text{sqrt}(5), e)); \\
-30.65247576
\end{aligned} \tag{16}$$

> with(DEtools):

$$\begin{aligned}
> DEplot\left(\left[\text{diff}(x(t), t) = y(t) - 0.0001 \cdot (x(t)^3 - 2 \cdot x(t)) \cdot y(t) - 0.0001^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x(t)^3\right) \cdot y(t), \right. \right. \\
\text{diff}(y(t), t) = -x(t) - 0.0001 \cdot (4 \cdot x(t)^2 + (x(t) - x(t) \cdot y(t))^2 + 2 x(t)^2 \cdot y(t) - x(t) \cdot y(t)^3 \\
+ x(t)^3) \cdot y(t) - 0.0001^2 \cdot (x(t)^2 - x(t) + (-x(t) \cdot y(t) + 2 \cdot x(t)^2 + 3 \cdot y(t) + y(t)^4) \\
\cdot y(t)), [x(t), y(t)], t = -6 .. 6, [[x(0) = -1 + \text{sqrt}(5), y(0) = 0], [x(0) = 1 + \text{sqrt}(5), \\
y(0) = 0]], x(t) = -4 .. 4, y(t) = -4 .. 4, stepsize = 0.2, color = \left[-x(t) - 0.0001 \cdot (4 \cdot x(t)^2 \right. \\
+ (x(t) - x(t) \cdot y(t))^2 + 2 x(t)^2 \cdot y(t) - x(t) \cdot y(t)^3 + x(t)^3) \cdot y(t) - 0.0001^2 \cdot (x(t)^2 \\
- x(t) + (-x(t) \cdot y(t) + 2 \cdot x(t)^2 + 3 \cdot y(t) + y(t)^4) \cdot y(t), y(t) - 0.0001 \cdot (x(t)^3 - 2 \\
\cdot x(t)) \cdot y(t) - 0.0001^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x(t)^3\right) \cdot y(t), 0.1 \left. \right], linecolor = \frac{t}{2}, arrows = MEDIUM, \\
method = rkf45, linecolor = [orange, blue] \left. \right);
\end{aligned}$$



2) Les dix cycles limites trouvés dans la section 4.2 page 59.

```

> restart;
> xt := -1/4 * ε³ * x - y + 2 * x * y - 4 * x * z - 199/36 * y * z + ε * (-2 * x² + y² + 3 * y * z + 3 * x * y) + ε² * (y² - x * z);

```

$$xt := -\frac{1}{4} \epsilon^3 x - y + 2xy - 4xz - \frac{199}{36} yz + \epsilon (-2x^2 + y^2 + 3yz + 3xy) + \epsilon^2 (y^2 - xz) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} > yt := x - \frac{1}{4} \epsilon^3 \cdot y - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 4 \cdot y \cdot z + \frac{199}{36} \cdot x \cdot z + \epsilon \cdot (x^2 - 2 \cdot y^2 + 5 \cdot x \cdot z + 3 \cdot x \cdot y) + \epsilon^2 \\ & \cdot (2 \cdot x^2 - y \cdot z); \end{aligned}$$

$$yt := x - \frac{1}{4} \epsilon^3 y - 2x^2 + 2y^2 + 4yz + \frac{199}{36} xz + \epsilon (x^2 - 2y^2 + 5xz + 3xy) + \epsilon^2 (2x^2 - yz) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} > zt := \frac{1}{8} \cdot \epsilon^3 \cdot z + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot y^2 - y \cdot z - x \cdot z + \epsilon \cdot (24 \cdot x \cdot z - 2 \cdot y \cdot z) + \epsilon^2 \cdot (x^2 + y^2 - 9 \cdot z^2); \end{aligned}$$

$$zt := \frac{1}{8} \epsilon^3 z + 2x^2 - 2y^2 - yz - xz + \epsilon (24xz - 2yz) + \epsilon^2 (x^2 + y^2 - 9z^2) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} > Rt := collect\left(expand\left(simplify\left(subs\left(x = R \cdot \cos(\theta), y = R \cdot \sin(\theta), z = z, \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \frac{(x \cdot xt + y \cdot yt)}{R} \right) \right) \right) \right), \epsilon \right); \end{aligned}$$

$$Rt := -\frac{1}{4} R \epsilon^3 + (R^2 \cos(\theta) - R^2 \cos(\theta)^3 - Rz + 2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 R^2) \epsilon^2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & + (8 \cos(\theta) R \sin(\theta) z + 6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 R^2 - 2 R^2 \sin(\theta) + 4 R^2 \cos(\theta) \\ & - 6 R^2 \cos(\theta)^3) \epsilon + 4 Rz - 8 R \cos(\theta)^2 z + 2 R^2 \sin(\theta) - 2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > thetat := collect\left(expand\left(simplify\left(subs\left(x = R \cdot \cos(\theta), y = R \cdot \sin(\theta), z = z, \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \frac{(x \cdot yt - y \cdot xt)}{R^2} \right) \right) \right) \right), \epsilon \right); \end{aligned}$$

$$thetat := (2R \cos(\theta)^3 - R \sin(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 R) \epsilon^2 + (6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 R - R \sin(\theta) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & - 3z + 8 \cos(\theta)^2 z + 6 R \cos(\theta)^3 - 5 R \cos(\theta)) \epsilon + 8 \cos(\theta) \sin(\theta) z - 2 R \cos(\theta)^3 \\ & + \frac{199}{36} z + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > Zt := collect(expand(simplify(subs(x = R \cdot \cos(\theta), y = R \cdot \sin(\theta), z = z, zt))), \epsilon); \end{aligned}$$

$$Zt := \frac{1}{8} \epsilon^3 z + (-9z^2 + R^2) \epsilon^2 + \epsilon (24R \cos(\theta) z - 2R \sin(\theta) z) + 4R^2 \cos(\theta)^2 \quad (6)$$

$$- R \sin(\theta) z - 2R^2 - R \cos(\theta) z$$

$$\begin{aligned} > \rho d := collect\left(expand\left(simplify\left(subs\left(R = \rho \cdot \epsilon \right), z = \xi \cdot \epsilon, \frac{Rt}{\epsilon} \right) \right) \right), \epsilon \right); \end{aligned}$$

$$\rho d := \left(\rho^2 \cos(\theta) - \rho^2 \cos(\theta)^3 - \rho \xi + 2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 - \frac{1}{4} \rho \right) \epsilon^3 \quad (7)$$

$$+ (8 \cos(\theta) \rho \sin(\theta) \xi - 6 \rho^2 \cos(\theta)^3 + 6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 - 2 \rho^2 \sin(\theta)$$

$$+ 4 \rho^2 \cos(\theta)) \epsilon^2 + (-2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 + 4 \rho \xi - 8 \rho \cos(\theta)^2 \xi + 2 \rho^2 \sin(\theta)) \epsilon$$

$$\begin{aligned} > \xi d := collect\left(expand\left(simplify\left(subs\left(R = \rho \cdot \epsilon, z = \xi \cdot \epsilon, \frac{Zt}{\epsilon} \right) \right) \right), \epsilon \right); \end{aligned}$$

$$\xi d := \left(-9 \xi^2 + \rho^2 + \frac{1}{8} \xi \right) \varepsilon^3 + \left(-2 \rho \sin(\theta) \xi + 24 \rho \cos(\theta) \xi \right) \varepsilon^2 + \left(-\rho \cos(\theta) \xi + 4 \rho^2 \cos(\theta)^2 - \rho \sin(\theta) \xi - 2 \rho^2 \right) \varepsilon \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &> \text{thetad} := \text{collect}(\text{expand}(\text{simplify}(\text{subs}(R = \rho \cdot \text{epsilon}, z = \xi \cdot \text{epsilon}, \text{thetat}))), \text{epsilon}); \\ \text{thetad} &:= 1 + \left(-\rho \sin(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho + 2 \rho \cos(\theta)^3 \right) \varepsilon^3 + \left(-\rho \sin(\theta) - 3 \xi + 8 \cos(\theta)^2 \xi + 6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho - 5 \rho \cos(\theta) + 6 \rho \cos(\theta)^3 \right) \varepsilon^2 \\ &+ \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi \right) \varepsilon \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &> e1 := \text{series}\left(\frac{\rho d}{\text{thetad}}, \text{epsilon} = 0, 4\right); \\ e1 &:= \left(-2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 + 4 \rho \xi - 8 \rho \cos(\theta)^2 \xi + 2 \rho^2 \sin(\theta) \right) \varepsilon + \left(8 \cos(\theta) \rho \sin(\theta) \xi - 6 \rho^2 \cos(\theta)^3 + 6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 - 2 \rho^2 \sin(\theta) + 4 \rho^2 \cos(\theta) \right. \\ &+ \left. \left(2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 - 4 \rho \xi + 8 \rho \cos(\theta)^2 \xi - 2 \rho^2 \sin(\theta) \right) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi \right) \right) \varepsilon^2 + \left(\rho^2 \cos(\theta) - \rho^2 \cos(\theta)^3 - \rho \xi + 2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 \right. \\ &- \frac{1}{4} \rho + \left. \left(2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 - 4 \rho \xi + 8 \rho \cos(\theta)^2 \xi - 2 \rho^2 \sin(\theta) \right) \left(-\rho \sin(\theta) - 3 \xi + 8 \cos(\theta)^2 \xi + 6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho - 5 \rho \cos(\theta) + 6 \rho \cos(\theta)^3 \right) \right) + \left(\right. \\ &- 8 \cos(\theta) \rho \sin(\theta) \xi + 6 \rho^2 \cos(\theta)^3 - 6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 + 2 \rho^2 \sin(\theta) - 4 \rho^2 \cos(\theta) \\ &- 16 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^3 \rho^2 \xi + 4 \sin(\theta) \cos(\theta)^5 \rho^3 - \frac{199}{18} \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 \xi \\ &+ 32 \rho \xi^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - 8 \rho^2 \xi \cos(\theta)^3 + \frac{199}{9} \rho \xi^2 - 64 \rho \cos(\theta)^3 \xi^2 \sin(\theta) \\ &+ 16 \rho^2 \cos(\theta)^5 \xi - \frac{398}{9} \rho \cos(\theta)^2 \xi^2 + 16 \rho^2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta) \xi - 4 \rho^3 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \\ &\left. + \frac{199}{18} \rho^2 \sin(\theta) \xi \right) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi \right) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &> e2 := \text{series}\left(\frac{\xi d}{\text{thetad}}, \text{epsilon} = 0, 4\right); \\ e2 &:= \left(-\rho \cos(\theta) \xi + 4 \rho^2 \cos(\theta)^2 - \rho \sin(\theta) \xi - 2 \rho^2 \right) \varepsilon + \left(-2 \rho \sin(\theta) \xi + 24 \rho \cos(\theta) \xi + \left(\rho \cos(\theta) \xi - 4 \rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho \sin(\theta) \xi + 2 \rho^2 \right) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi \right) \right) \varepsilon^2 + \left(-9 \xi^2 + \rho^2 + \frac{1}{8} \xi + \left(\rho \cos(\theta) \xi - 4 \rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho \sin(\theta) \xi + 2 \rho^2 \right) \left(-\rho \sin(\theta) - 3 \xi + 8 \cos(\theta)^2 \xi + 6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho - 5 \rho \cos(\theta) \right) \right) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& + 6 \rho \cos(\theta)^3) + \left(2 \rho \sin(\theta) \xi - 24 \rho \cos(\theta) \xi - 8 \rho \cos(\theta)^2 \xi^2 \sin(\theta) \right. \\
& + 2 \rho^2 \cos(\theta)^4 \xi - \frac{199}{36} \rho \cos(\theta) \xi^2 + 34 \rho^2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \xi - 8 \rho^3 \cos(\theta)^5 \\
& + \frac{199}{9} \rho^2 \cos(\theta)^2 \xi - 8 \rho \sin(\theta)^2 \xi^2 \cos(\theta) - \frac{199}{36} \rho \sin(\theta) \xi^2 \\
& - 16 \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi + 4 \rho^3 \cos(\theta)^3 - \frac{199}{18} \rho^2 \xi \left. \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi - 2 \rho \cos(\theta)^3 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{199}{36} \xi \right) \right) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)
\end{aligned}$$

> $F11 := op(1, e1);$

$$F11 := -2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 + 4 \rho \xi - 8 \rho \cos(\theta)^2 \xi + 2 \rho^2 \sin(\theta) \quad (12)$$

> $F21 := op(3, e1);$

$$\begin{aligned}
F21 := & 8 \cos(\theta) \rho \sin(\theta) \xi - 6 \rho^2 \cos(\theta)^3 + 6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 - 2 \rho^2 \sin(\theta) + 4 \rho^2 \cos(\theta) \quad (13) \\
& + \left(2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 - 4 \rho \xi + 8 \rho \cos(\theta)^2 \xi - 2 \rho^2 \sin(\theta) \right) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi \right. \\
& \left. - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi \right)
\end{aligned}$$

> $F31 := op(5, e1);$

$$\begin{aligned}
F31 := & \rho^2 \cos(\theta) - \rho^2 \cos(\theta)^3 - \rho \xi + 2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 - \frac{1}{4} \rho + \left(2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 \right. \quad (14) \\
& \left. - 4 \rho \xi + 8 \rho \cos(\theta)^2 \xi - 2 \rho^2 \sin(\theta) \right) \left(-\rho \sin(\theta) - 3 \xi + 8 \cos(\theta)^2 \xi \right. \\
& \left. + 6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho - 5 \rho \cos(\theta) + 6 \rho \cos(\theta)^3 \right) + \left(-8 \cos(\theta) \rho \sin(\theta) \xi \right. \\
& \left. + 6 \rho^2 \cos(\theta)^3 - 6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 + 2 \rho^2 \sin(\theta) - 4 \rho^2 \cos(\theta) \right. \\
& \left. - 16 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^3 \rho^2 \xi + 4 \sin(\theta) \cos(\theta)^5 \rho^3 - \frac{199}{18} \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 \xi \right. \\
& \left. + 32 \rho \xi^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - 8 \rho^2 \xi \cos(\theta)^3 + \frac{199}{9} \rho \xi^2 - 64 \rho \cos(\theta)^3 \xi^2 \sin(\theta) \right. \\
& \left. + 16 \rho^2 \cos(\theta)^5 \xi - \frac{398}{9} \rho \cos(\theta)^2 \xi^2 + 16 \rho^2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta) \xi - 4 \rho^3 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \right. \\
& \left. + \frac{199}{18} \rho^2 \sin(\theta) \xi \right) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi \right)
\end{aligned}$$

> $F12 := op(1, e2);$

$$F12 := -\rho \cos(\theta) \xi + 4 \rho^2 \cos(\theta)^2 - \rho \sin(\theta) \xi - 2 \rho^2 \quad (15)$$

> $F22 := op(3, e2);$

$$\begin{aligned}
F22 := & -2 \rho \sin(\theta) \xi + 24 \rho \cos(\theta) \xi + \left(\rho \cos(\theta) \xi - 4 \rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho \sin(\theta) \xi \right. \quad (16) \\
& \left. + 2 \rho^2 \right) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi \right)
\end{aligned}$$

> $F32 := op(5, e2);$

$$F32 := -9 \xi^2 + \rho^2 + \frac{1}{8} \xi + (\rho \cos(\theta) \xi - 4 \rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho \sin(\theta) \xi + 2 \rho^2) (-\rho \sin(\theta) \quad (17)$$

$$-3 \xi + 8 \cos(\theta)^2 \xi + 6 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho - 5 \rho \cos(\theta) + 6 \rho \cos(\theta)^3) + (2 \rho \sin(\theta) \xi$$

$$-24 \rho \cos(\theta) \xi - 8 \rho \cos(\theta)^2 \xi^2 \sin(\theta) + 2 \rho^2 \cos(\theta)^4 \xi - \frac{199}{36} \rho \cos(\theta) \xi^2$$

$$+ 34 \rho^2 \cos(\theta)^3 \sin(\theta) \xi - 8 \rho^3 \cos(\theta)^5 + \frac{199}{9} \rho^2 \cos(\theta)^2 \xi - 8 \rho \sin(\theta)^2 \xi^2 \cos(\theta)$$

$$- \frac{199}{36} \rho \sin(\theta) \xi^2 - 16 \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi + 4 \rho^3 \cos(\theta)^3 - \frac{199}{18} \rho^2 \xi)$$

$$(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi)$$

$$> f11 := \text{simplify}\left(\frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \text{int}(F11, \theta = 0 .. 2 \text{Pi})\right);$$

$$f11 := 0$$

(18)

$$> f12 := \text{simplify}\left(\frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \text{int}(F12, \theta = 0 .. 2 \cdot \text{Pi})\right);$$

$$f12 := 0$$

(19)

$$> g1 := \text{int}(F11, \theta = 0 .. s);$$

$$g1 := \frac{4}{3} \rho^2 + \frac{2}{3} \cos(s)^3 \rho^2 - 4 \rho \xi \cos(s) \sin(s) - 2 \rho^2 \cos(s)$$

(20)

$$> g2 := \text{int}(F12, \theta = 0 .. s);$$

$$g2 := -\rho \xi - \rho \sin(s) \xi + 2 \rho^2 \cos(s) \sin(s) + \rho \cos(s) \xi$$

(21)

$$> \text{with(LinearAlgebra)} :$$

$$> \text{with(VectorCalculus)} :$$

$$> A1 := \text{Jacobian}([F11, F12], [\rho, \xi]);$$

$$A1 := \begin{bmatrix} -4 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho + 4 \xi - 8 \cos(\theta)^2 \xi + 4 \rho \sin(\theta) & 4 \rho - 8 \cos(\theta)^2 \rho \\ -\cos(\theta) \xi + 8 \cos(\theta)^2 \rho - \sin(\theta) \xi - 4 \rho & -\rho \cos(\theta) - \rho \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$> M1 := A1 \cdot \langle \text{eval}(g1, [s = \theta]), \text{eval}(g2, [s = \theta]) \rangle + \langle F21, F22 \rangle :$$

$$> H := \text{convert}(M1, \text{Vector}) :$$

$$> f21 := \text{simplify}\left(\frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \text{int}(H[1], \text{theta} = 0 .. 2 \cdot \text{Pi})\right);$$

$$f21 := 0$$

(23)

$$> f22 := \text{simplify}\left(\frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \text{int}(H[2], \text{theta} = 0 .. 2 \cdot \text{Pi})\right);$$

$$f22 := 0$$

(24)

$$> g3 := \text{int}(H[1], \theta = 0 .. s)$$

$$g3 := -4 \rho \cos(s)^2 \xi + 24 \rho \cos(s)^2 \xi^2 - 24 \rho \xi^2 \cos(s)^4 - \frac{32}{3} \rho^2 \xi \sin(s)^3 - \frac{343}{54} \xi \rho^2 \cos(s)^3 \quad (25)$$

$$+ \frac{4}{3} \rho^2 \sin(s) \xi + \frac{271}{18} \xi \rho^2 \cos(s) - 2 \rho^2 \sin(s) \cos(s)^2 + 4 \rho \xi + \frac{19}{9} \rho^3 - \frac{235}{27} \rho^2 \xi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{199}{9} \rho \xi^2 \cos(s) \sin(s) - \frac{16}{3} \rho^3 \cos(s) + \frac{16}{9} \rho^3 \cos(s)^3 + \frac{10}{9} \rho^3 \cos(s)^6 \\
& + \frac{1}{3} \rho^3 \cos(s)^4 - 2 \cos(s)^3 \rho^2 + 2 \rho^2 \cos(s) - \frac{32}{3} \rho^2 \xi \sin(s) \cos(s)^4 \\
& + \frac{8}{3} \rho^2 \xi \sin(s) \cos(s)^2 - \frac{4}{3} \rho^2 \xi \cos(s) \sin(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{> } g4 := \text{int}(H[2], \theta=0..s); \\
g4 & := -\frac{1}{3} \rho^2 \sin(s) \xi + \frac{1}{3} \xi \rho^2 \cos(s) - \frac{2}{3} \rho^3 \sin(s)^3 - 2 \rho \xi - \frac{2}{3} \rho^2 \xi \sin(s) \cos(s)^3 \quad (26) \\
& + \frac{343}{36} \rho \xi^2 - \frac{2}{3} \rho^3 - 4 \rho \xi^2 \cos(s)^3 + \frac{50}{3} \cos(s)^4 \xi \rho^2 + 4 \rho \xi^2 \sin(s)^3 - 17 \cos(s)^2 \xi \rho^2 \\
& + 24 \rho \sin(s) \xi + 2 \rho \cos(s) \xi + \frac{2}{3} \rho^3 \cos(s)^3 + \frac{199}{36} \rho \sin(s) \xi^2 - \frac{199}{36} \rho \cos(s) \xi^2 \\
& + \frac{16}{3} \rho^3 \cos(s) \sin(s) + \frac{8}{3} \rho^3 \sin(s) \cos(s)^4 - 4 \rho^3 \sin(s) \cos(s)^2 \\
& - \frac{217}{18} \rho^2 \xi \cos(s) \sin(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{> } A2 := \text{Jacobian}([F21, F22], [\rho, \xi]); \\
A2 & := \left[\left[8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi - 12 \rho \cos(\theta)^3 + 12 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho - 4 \rho \sin(\theta) + 8 \rho \cos(\theta) \right. \right. \quad (27) \\
& \quad \left. \left. + (4 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho - 4 \xi + 8 \cos(\theta)^2 \xi - 4 \rho \sin(\theta)) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi \right) - 2 \left(2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 - 4 \rho \xi + 8 \rho \cos(\theta)^2 \xi \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2 \rho^2 \sin(\theta) \right) \cos(\theta)^3, 8 \cos(\theta) \rho \sin(\theta) + (-4 \rho + 8 \cos(\theta)^2 \rho) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi \right) + \left(2 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \rho^2 - 4 \rho \xi + 8 \rho \cos(\theta)^2 \xi \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2 \rho^2 \sin(\theta) \right) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{199}{36} \right) \right], \\
& \left[-2 \sin(\theta) \xi + 24 \cos(\theta) \xi + (\cos(\theta) \xi - 8 \cos(\theta)^2 \rho + \sin(\theta) \xi \right. \\
& \quad \left. + 4 \rho) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi \right) - 2 (\rho \cos(\theta) \xi - 4 \rho^2 \cos(\theta)^2 \right. \\
& \quad \left. + \rho \sin(\theta) \xi + 2 \rho^2) \cos(\theta)^3, -2 \rho \sin(\theta) + 24 \rho \cos(\theta) + (\rho \cos(\theta) \right. \\
& \quad \left. + \rho \sin(\theta)) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) \xi - 2 \rho \cos(\theta)^3 + \frac{199}{36} \xi \right) + (\rho \cos(\theta) \xi - 4 \rho^2 \cos(\theta)^2 \right. \\
& \quad \left. + \rho \sin(\theta) \xi + 2 \rho^2) \left(8 \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{199}{36} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\text{> } A3 := \left\langle \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \rho} F11 \middle| \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \xi} F11 \right\rangle, \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \rho} F11 \middle| \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi} F11 \right\rangle \right\rangle;$$

$$A3 := \begin{bmatrix} -4 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 + 4 \sin(\theta) & 4 - 8 \cos(\theta)^2 \\ 4 - 8 \cos(\theta)^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} > A4 := \left\langle \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F12 \middle| \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \xi} F12 \right\rangle, \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \rho} F12 \middle| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} F12 \right\rangle \right\rangle; \\ A4 := \begin{bmatrix} 8 \cos(\theta)^2 - 4 & -\cos(\theta) - \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) - \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} > E1 := A3 \cdot \langle eval(g1, [s=\theta]), eval(g2, [s=\theta]) \rangle; \\ E1 := \left[\left[\left(-4 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 + 4 \sin(\theta) \right) \left(\frac{4}{3} \rho^2 + \frac{2}{3} \rho^2 \cos(\theta)^3 - 4 \cos(\theta) \rho \sin(\theta) \xi \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2 \rho^2 \cos(\theta) \right) + (4 - 8 \cos(\theta)^2) \left(-\rho \xi - \rho \sin(\theta) \xi + 2 \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \rho \cos(\theta) \xi \right) \right], \right. \\ \left. \left[(4 - 8 \cos(\theta)^2) \left(\frac{4}{3} \rho^2 + \frac{2}{3} \rho^2 \cos(\theta)^3 - 4 \cos(\theta) \rho \sin(\theta) \xi - 2 \rho^2 \cos(\theta) \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} > E2 := A4 \cdot \langle eval(g1, [s=\theta]), eval(g2, [s=\theta]) \rangle; \\ E2 := \left[\left[\left(8 \cos(\theta)^2 - 4 \right) \left(\frac{4}{3} \rho^2 + \frac{2}{3} \rho^2 \cos(\theta)^3 - 4 \cos(\theta) \rho \sin(\theta) \xi - 2 \rho^2 \cos(\theta) \right) + \left(\right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. -\cos(\theta) - \sin(\theta) \right) \left(-\rho \xi - \rho \sin(\theta) \xi + 2 \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \rho \cos(\theta) \xi \right) \right], \right. \\ \left. \left[\left(-\cos(\theta) - \sin(\theta) \right) \left(\frac{4}{3} \rho^2 + \frac{2}{3} \rho^2 \cos(\theta)^3 - 4 \cos(\theta) \rho \sin(\theta) \xi - 2 \rho^2 \cos(\theta) \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} > M2 := \frac{1}{2} \cdot \langle eval(g1, [s=\theta]), eval(g2, [s=\theta]) \rangle \cdot E1 + \frac{1}{2} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} F11 \middle| \frac{\partial}{\partial \xi} F11 \right\rangle \cdot \langle eval(g3, [s \\ =\theta]), eval(g4, [s=\theta]) \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} F21 \middle| \frac{\partial}{\partial \xi} F21 \right\rangle \cdot \langle eval(g1, [s=\theta]), eval(g2, [s=\theta]) \rangle \\ + F31 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > M3 := \frac{1}{2} \cdot \langle eval(g1, [s=\theta]), eval(g2, [s=\theta]) \rangle \cdot E2 + \frac{1}{2} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} F12 \middle| \frac{\partial}{\partial \xi} F12 \right\rangle \cdot \langle eval(g3, [s \\ =\theta]), eval(g4, [s=\theta]) \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} F22 \middle| \frac{\partial}{\partial \xi} F22 \right\rangle \cdot \langle eval(g1, [s=\theta]), eval(g2, [s=\theta]) \rangle \\ + F32 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > f31 := simplify\left(\frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \text{int}(M2, \text{theta}=0..2 \cdot \text{Pi})\right); \\ f31 := \frac{1}{4} \rho \left(-1 + 6 \rho^2 - 4 \xi - 8 \xi^2 + 2 \rho^2 \xi \right) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} > f32 := simplify\left(\frac{1}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \text{int}(M3, \text{theta}=0..2 \cdot \text{Pi})\right); \\ f32 := \frac{455}{96} \rho^2 \xi^2 + \rho^2 + \frac{1}{8} \xi - 9 \xi^2 - \rho^3 \xi - \frac{17}{48} \rho^4 + \frac{1}{2} \rho^2 \xi \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} &> \text{solve}(f31=0, \rho); \\ &0, \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(3+\xi)(1+4\xi+8\xi^2)}}{3+\xi}, -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(3+\xi)(1+4\xi+8\xi^2)}}{3+\xi} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} &> w1 := \text{simplify}\left(\text{eval}\left(f32, \rho = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\text{sqrt}(2) \cdot \text{sqrt}((\xi+3) \cdot (1+4 \cdot \xi + 8 \cdot \xi^2)))}{\xi+3}\right)\right); \\ w1 := &-\frac{1}{192} \frac{1}{(3+\xi)^2} \left(-3640 \xi^5 - 10308 \xi^4 + 384 \sqrt{2} \sqrt{(3+\xi)(1+4\xi+8\xi^2)} \xi^3 \right. \\ &+ 3405 \xi^3 + 11275 \xi^2 + 192 \sqrt{2} \sqrt{(3+\xi)(1+4\xi+8\xi^2)} \xi^2 \\ &\left. + 48 \sqrt{2} \sqrt{(3+\xi)(1+4\xi+8\xi^2)} \xi - 1472 \xi - 271\right) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} &> w2 := \text{expand}\left(\left(\left(-3640 \xi^5 - 10308 \xi^4 + 3405 \xi^3 + 11275 \xi^2 - 1472 \xi - 271\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(384 \sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)} \xi^3 + 192 \sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)} \xi^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 48 \sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)} \xi\right) \cdot \left(\left(-3640 \xi^5 - 10308 \xi^4 + 3405 \xi^3 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 11275 \xi^2 - 1472 \xi - 271\right) - \left(384 \sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)} \xi^3 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 192 \sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)} \xi^2 + 48 \sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)} \xi\right)\right); \\ w2 := &73441 + 797824 \xi - 35209606 \xi^3 - 3958090 \xi^2 + 13249600 \xi^{10} + 121637617 \xi^4 \\ &+ 105231662 \xi^5 - 219277487 \xi^6 + 72682944 \xi^9 + 70849632 \xi^8 - 165550520 \xi^7 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}(\text{solve}(w2=0, \xi)); \\ &0.2075448556, 0.2648446151, 0.7360098291, 1.245269006, -0.1024648022, -0.1060657437, \\ &-1.080408535, -1.337103376, -2.433134674, -2.880161987 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}\left(\text{eval}\left(\rho1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\text{sqrt}(2) \cdot \text{sqrt}((\xi+3) \cdot (1+4 \cdot \xi + 8 \cdot \xi^2)))}{\xi+3}, \xi = 0.2075448556\right)\right); \\ &\rho1 = 0.5822454911 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}\left(\text{eval}\left(\rho2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)}}{\xi+3}, \xi = 0.2648446151\right)\right); \\ &\rho2 = 0.6335012386 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}\left(\text{eval}\left(\rho3 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)}}{\xi+3}, \xi = 0.7360098291\right)\right); \\ &\rho3 = 1.052534750 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}\left(\text{eval}\left(\rho4 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)}}{\xi+3}, \xi = 1.245269006\right)\right); \\ &\rho4 = 1.471578806 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}\left(\text{eval}\left(\rho_5 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)}}{\xi+3}, \xi = -0.1024648022\right)\right); \\ &\quad \rho_5 = 0.3410699520 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}\left(\text{eval}\left(\rho_6 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)}}{\xi+3}, \xi = -0.1060657437\right)\right); \\ &\quad \rho_6 = 0.3391500426 \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}\left(\text{eval}\left(\rho_7 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)}}{\xi+3}, \xi = -1.080408535\right)\right); \\ &\quad \rho_7 = 1.251863940 \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}\left(\text{eval}\left(\rho_8 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)}}{\xi+3}, \xi = -1.337103376\right)\right); \\ &\quad \rho_8 = 1.730050696 \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}\left(\text{eval}\left(\rho_9 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)}}{\xi+3}, \xi = -2.433134674\right)\right); \\ &\quad \rho_9 = 5.837133551 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}\left(\text{eval}\left(\rho_{10} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\xi+3)(1+4\xi+8\xi^2)}}{\xi+3}, \xi = -2.880161987\right)\right); \\ &\quad \rho_{10} = 15.26399619 \end{aligned} \tag{47}$$

> with(LinearAlgebra) :

> with(VectorCalculus) :

> A := Jacobian([f31, f32], [ρ, ξ]);

$$A := \left[\left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \rho^2 - \xi - 2\xi^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \xi + \frac{1}{4} \rho (12\rho + 4\rho\xi), \frac{1}{4} \rho (-4 - 16\xi + 2\rho^2) \right], \right. \tag{48}$$

$$\left. \left[\frac{455}{48} \rho \xi^2 + 2\rho - 3\rho^2 \xi - \frac{17}{12} \rho^3 + \rho \xi, \frac{455}{48} \rho^2 \xi + \frac{1}{8} - 18\xi - \rho^3 + \frac{1}{2} \rho^2 \right] \right]$$

> B1 := eval(A, [ρ = 0.5822454911, ξ = 0.2075448556]);

$$B1 := \begin{bmatrix} 1.087389177 & -0.9669202495 \\ 1.032361216 & -2.971737704 \end{bmatrix} \tag{49}$$

> D1 := Determinant(B1);

$$D1 := -2.233224452 \tag{50}$$

> B2 := eval(A, [ρ = 0.6335012386, ξ = 0.2648446151]);

$$B2 := \begin{bmatrix} 1.310259910 & -1.177499237 \\ 1.176955612 & -3.688254343 \end{bmatrix} \tag{51}$$

> D2 := Determinant(B2);

$$D2 := -3.446707469 \tag{52}$$

```

> B3 := eval(A, [ρ = 1.052534750, ξ = 0.7360098291]);
      B3 :=  $\begin{bmatrix} 4.138861526 & -3.568223968 \\ 4.186478962 & -6.006231495 \end{bmatrix}$  (53)
=
> D3 := Determinant(B3);
      D3 := -9.92066588 (54)
=
> B4 := eval(A, [ρ = 1.471578806, ξ = 1.245269006]);
      B4 :=  $\begin{bmatrix} 9.193317597 & -7.208240255 \\ 13.80219617 & 1.168488109 \end{bmatrix}$  (55)
=
> D4 := Determinant(B4);
      D4 := 110.2318283 (56)
=
> B5 := eval(A, [ρ = 0.3410699520, ξ = -0.1024648022]);
      B5 :=  $\begin{bmatrix} 0.3370665379 & -0.1814411772 \\ 0.6606870452 & 1.874866707 \end{bmatrix}$  (57)
=
> D5 := Determinant(B5);
      D5 := 0.7518306652 (58)
=
> B6 := eval(A, [ρ = 0.3391500426, ξ = -0.1060657437]);
      B6 :=  $\begin{bmatrix} 0.3328682805 & -0.1757562511 \\ 0.6598306651 & 1.937039208 \end{bmatrix}$  (59)
=
> D6 := Determinant(B6);
      D6 := 0.7607482745 (60)
=
> B7 := eval(A, [ρ = 1.251863940, ξ = -1.080408535]);
      B7 :=  $\begin{bmatrix} 3.008313344 & 5.139171630 \\ 17.30311716 & 2.344156558 \end{bmatrix}$  (61)
=
> D7 := Determinant(B7);
      D7 := -81.87173137 (62)
=
> B8 := eval(A, [ρ = 1.730050696, ξ = -1.337103376]);
      B8 :=  $\begin{bmatrix} 4.977174996 & 10.11206191 \\ 35.13691652 & -17.42488440 \end{bmatrix}$  (63)
=
> D8 := Determinant(B8);
      D8 := -442.0333741 (64)
=
> B9 := eval(A, [ρ = 5.837133551, ξ = -2.433134674]);
      B9 :=  $\begin{bmatrix} 19.31430799 & 150.4147757 \\ 291.9947155 & -923.7686719 \end{bmatrix}$  (65)
=
> D9 := Determinant(B9);
      D9 := -61762.27228 (66)
=
> B10 := eval(A, [ρ = 15.26399619, ξ = -2.880161987]);

```

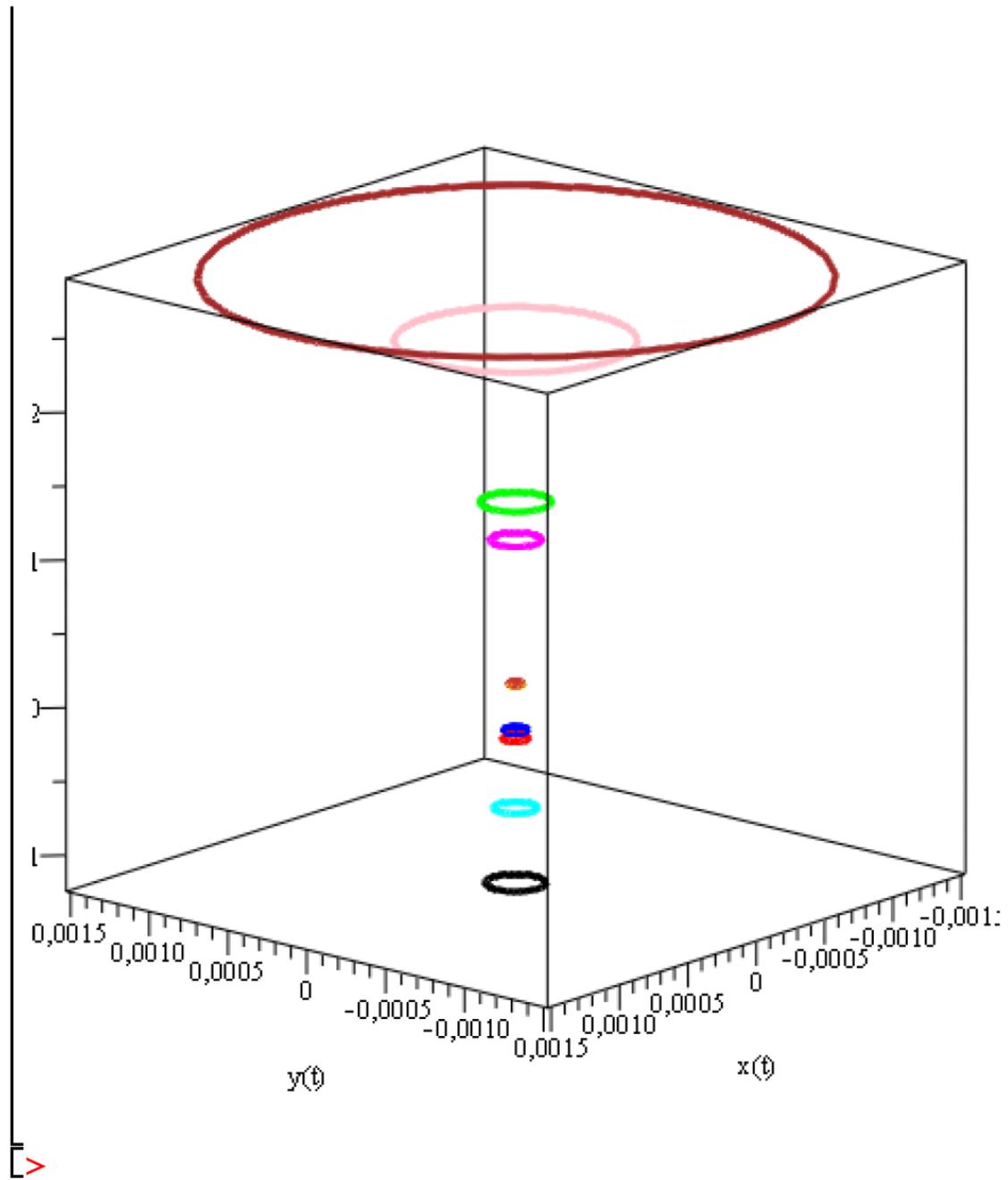
$$B10 := \begin{bmatrix} 27.92100840 & 1938.763159 \\ -1838.205569 & -9748.862633 \end{bmatrix} \quad (67)$$

> D10 := Determinant(B10);

$$D10 := 3.291647160 \cdot 10^6 \quad (68)$$

> with(DEtools) :

> DEplot3d($\left\{ \begin{aligned} D(x)(t) &= -\frac{1}{4} \cdot (0.0001)^3 \cdot x(t) - y(t) + 2 \cdot x(t) \cdot y(t) - 4 \cdot x(t) \cdot z(t) - \frac{199}{36} \cdot y(t) \\ &\cdot z(t) + 0.0001 \cdot (-2 \cdot x^2(t) + y^2(t) + 3 \cdot y(t) \cdot z(t) + 3 \cdot x(t) \cdot y(t)) + (0.0001)^2 \cdot (y^2(t) \\ &- x(t) \cdot z(t)), D(y)(t) = x(t) - \frac{1}{4} \cdot (0.0001)^3 \cdot y(t) - 2 \cdot x^2(t) + 2 \cdot y^2(t) + 4 \cdot y(t) \cdot z(t) \\ &+ \frac{199}{36} \cdot x(t) \cdot z(t) + 0.0001 \cdot (x^2(t) - 2 \cdot y^2(t) + 5 \cdot x(t) \cdot z(t) + 3 \cdot x(t) \cdot y(t)) + (0.0001)^2 \\ &\cdot (2 \cdot x^2(t) - y(t) \cdot z(t)), D(z)(t) = \frac{1}{8} \cdot (0.0001)^3 \cdot z(t) + 2 \cdot x^2(t) - 2 \cdot y^2(t) - y(t) \cdot z(t) \\ &- x(t) \cdot z(t) + 0.0001 \cdot (24 \cdot x(t) \cdot z(t) - 2 \cdot y(t) \cdot z(t)) + (0.0001)^2 \cdot (x^2(t) + y^2(t) - 9 \\ &\cdot z^2(t)) \end{aligned} \right\}, \{x(t), y(t), z(t)\}, t=0..10, [[x(0) = 0.0001 \cdot 0.5822454911, z(0) = 0.0001 \\ \cdot 0.2075448556, y(0) = 0], [x(0) = 0.0001 \cdot 0.6335012386, z(0) = 0.0001 \cdot 0.2648446151, \\ y(0) = 0], [x(0) = 0.0001 \cdot 1.052534750, z(0) = 0.0001 \cdot 0.7360098291, y(0) = 0], [x(0) \\ = 0.0001 \cdot 1.471578806, z(0) = 0.0001 \cdot 1.245269006, y(0) = 0], [x(0) = 0.0001 \\ \cdot 0.3410699520, z(0) = 0.0001 \cdot (-0.1024648022), y(0) = 0], [x(0) = 0.0001 \\ \cdot 0.3391500426, z(0) = 0.0001 \cdot (-0.1060657437), y(0) = 0], [x(0) = 0.0001 \\ \cdot 1.251863940, z(0) = 0.0001 \cdot (-1.080408535), y(0) = 0], [x(0) = 0.0001 \cdot 1.730050696, \\ z(0) = 0.0001 \cdot (-1.337103376), y(0) = 0], [x(0) = 0.0001 \cdot 5.83713355, z(0) = 0.0001 \cdot \\ -2.433134674), y(0) = 0], [x(0) = 0.0001 \cdot 15.26399619, z(0) = 0.0001 \cdot \\ -2.880161987), y(0) = 0]], scene = [x(t), y(t), z(t)], stepsize = 6, orientation = [139, \\ -106], arrows = MEDIUM, method = rkf45, animatecurves = true, linecolor = [blue, red, \\ cyan, black, yellow, orange, magenta, green, pink, brown]);$



3) Les fonctions $F_{11}, F_{21}, F_{31}, F_{12}, F_{22}$ et F_{32} mentionnées dans le système (4.4) page 49.

$$F_{11} = \frac{1}{b} [a_{200}\rho^2 \cos^3(\theta) + \rho(a_1 + a_{101}\xi) \cos^2(\theta) + (a_{110} + b_{200})\rho^2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + a_{002}\xi^2 \cos(\theta) + (a_{020} + b_{110})\rho^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) + (a_{011} + b_{101})\rho\xi \sin(\theta) \cos(\theta) + b_{020}\rho^2 \sin^3(\theta) + \rho(a_1 + b_{011}\xi) \sin^2(\theta) + b_{002}\xi^2 \sin(\theta)],$$

$$F_{21} = \frac{1}{b^2} [a_2 b \rho + A_{002} b \xi^2 \cos(\theta) + (\xi(A_{101} b \rho^2 - a_{002} b_{002} \xi^3) \cos^2(\theta)) / \rho + (A_{200} b \rho^2 - a_1 b_{002} \xi^2 - a_{101} b_{002} \xi^3 - a_{002} b_{101} \xi^3) \cos^3(\theta) - \rho \xi (a_1 b_{101} + a_{200} b_{002} \xi + a_{101} b_{101} \xi + a_{002} b_{200} \xi) \times \cos^4(\theta) - \rho^2 (a_1 b_{200} + a_{200} b_{101} \xi + a_{101} b_{200} \xi) \cos^5(\theta) - a_{200} b_{200} \rho^3 \cos^6(\theta) + b B_{002} \xi^2 \sin(\theta) + (\xi(A_{011} b \rho^2 + b B_{101} \rho^2 + a_{002}^2 \xi^3 - b_{002}^2 \xi^3) \cos(\theta) \sin(\theta)) / \rho + (A_{110} b \rho^2 + b B_{200} \rho^2 + a_{002} a_1 \xi^2 + 2a_{002} a_{101} \xi^3 - a_{011} b_{002} \xi^3 - a_{002} b_{011} \xi^3 - 2b_{002} b_{101} \xi^3) \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \rho \xi (a_1 a_{101} - a_1 b_{011} + a_{101}^2 \xi + 2a_{002} a_{200} \xi - a_{110} b_{002} \xi - a_{101} b_{011} \xi - a_{011} b_{101} \xi - b_{101}^2 \xi - a_{002} b_{110} \xi - 2b_{002} b_{200} \xi) \cos^3(\theta) \times \sin(\theta) + \rho^2 (a_1 a_{200} - a_1 b_{110} + 2a_{101} a_{200} \xi - a_{200} b_{011} \xi - a_{110} b_{101} \xi - a_{101} b_{110} \xi - a_{011} b_{200} \xi - 2b_{101} b_{200} \xi) \cos^4(\theta) \sin(\theta) + (a_{200}^2 - a_{200} b_{110} - a_{110} b_{200} - b_{200}^2) \rho^3 \cos^5(\theta) \sin(\theta) + (\xi(b B_{011} \rho^2 + a_{002} b_{002} \xi^3) \sin^2(\theta)) / \rho + (A_{020} b \rho^2 + b B_{110} \rho^2 - a_1 b_{002} \xi^2 + 2a_{002} a_{011} \xi^3 + a_{101} b_{002} \xi^3 - 2b_{002} b_{011} \xi^3 + a_{002} b_{101} \xi^3) \cos(\theta) \sin^2(\theta) + \rho \xi (a_{011} a_1 - a_1 b_{101} + 2a_{011} a_{101} \xi + 2a_{002} a_{110} \xi - a_{020} b_{002} \xi + a_{200} b_{002} \xi - a_{011} b_{011} \xi - a_{002} b_{020} \xi + a_{101} b_{101} \xi - 2b_{011} b_{101} \xi - 2b_{002} b_{110} \xi + a_{002} b_{200} \xi) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + \rho^2 (a_1 a_{110} - a_1 b_{020} - a_1 b_{200} + 2a_{101} a_{110} \xi + 2a_{011} a_{200} \xi - a_{110} b_{011} \xi - a_{101} b_{020} \xi - a_{020} b_{101} \xi + a_{200} b_{101} \xi - a_{011} b_{110} \xi - 2b_{101} b_{110} \xi + a_{101} b_{200} \xi - 2b_{011} b_{200} \xi) \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) + (2a_{110} a_{200} - a_{200} b_{020} - a_{110} b_{110} - a_{020} b_{200} + a_{200} b_{200} - 2b_{110} b_{200}) \rho^3 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) + (b B_{020} \rho^2 + a_{002} a_1 \xi^2 + a_{011} b_{002} \xi^3 + a_{002} b_{011} \xi^3) \sin^3(\theta) + \rho \xi (a_1 a_{101} - a_1 b_{011} + a_{011}^2 \xi + 2a_{002} a_{020} \xi + a_{110} b_{002} \xi + a_{101} b_{011} \xi - b_{011}^2 \xi - 2b_{002} b_{020} \xi + a_{011} b_{101} \xi + a_{002} b_{110} \xi) \cos(\theta) \sin^3(\theta) + \rho^2 (a_{020} a_1 + a_1 a_{200} - a_1 b_{110} + 2a_{020} a_{101} \xi + 2a_{011} a_{110} \xi - a_{020} b_{011} \xi + a_{200} b_{011} \xi - a_{011} b_{020} \xi + a_{110} b_{101} \xi - 2b_{020} b_{101} \xi + a_{101} b_{110} \xi - 2b_{011} b_{110} \xi + a_{011} b_{200} \xi) \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + (a_{110}^2 + 2a_{020} a_{200} - a_{110} b_{020} - a_{020} b_{110} + a_{200} b_{110} - b_{110}^2 + a_{110} b_{200} - 2b_{020} b_{200}) \rho^3 \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) + \rho \xi (a_{011} a_1 + a_{020} b_{002} \xi + a_{011} b_{011} \xi + a_{002} b_{020} \xi) \sin^4(\theta) + \rho^2 (a_1 a_{110} - a_1 b_{020} + 2a_{011} a_{020} \xi + a_{110} b_{011} \xi + a_{101} b_{020} \xi - 2b_{011} b_{020} \xi + a_{020} b_{101} \xi + a_{011} b_{110} \xi) \cos(\theta) \sin^4(\theta) + (2a_{020} a_{110} - a_{020} b_{020} + a_{200} b_{020} + a_{110} b_{110} - 2b_{020} b_{110} + a_{020} b_{200}) \rho^3 \times \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) + (a_{110} b_{020} - b_{020}^2 + a_{020} b_{110}) \rho^3 \cos(\theta) \sin^5(\theta) + \rho^2 (a_{020} a_1 + a_{020} b_{011} \xi + a_{011} b_{020} \xi + a_{020}^2 \rho \cos(\theta)) \sin^5(\theta) + a_{020} b_{020} \rho^3 \sin^6(\theta)],$$

$$F_{31} = \frac{1}{b^3} [a_3 b^2 \rho + (b^2 A'_{002} - b(a_1 B_{002} + a_2 b_{002})) \xi^2 \cos(\theta) + ((b^2 A'_{101} - b(a_1 B_{101} + a_2 b_{101})) \rho \xi - b(a_{002} B_{002} + A_{002} b_{002}) \xi^4 / \rho + a_1 b_{002}^2 \xi^4 / \rho) \cos^2(\theta) + (b^2 A'_{200} \rho^2 - b(a_1 B_{200} + a_2 b_{200}) \rho^2 - b(a_{101} B_{002} + a_{002} B_{101} + A_{101} b_{002} + A_{002} b_{101}) \xi^3 + 2a_1 b_{101} b_{002} \xi^3 + a_{002} b_{002}^2 \xi^6 \rho^2 / \rho) \times \cos^3(\theta) + (((a_1 b_{101}^2 + 2a_1 b_{200} b_{002}) - b(a_{200} B_{002} + a_{101} B_{101} + a_{002} B_{200} + A_{200} b_{002} + A_{101} b_{101} + A_{002} b_{200})) \rho \xi^2 + (a_{101} b_{002}^2 + 2a_{002} b_{101} b_{002}) \times \xi^5 / \rho) \cos^4(\theta) + ((2a_1 b_{200} b_{101} - b(a_{200} B_{101} + a_{101} B_{200} + b_{101} A_{200} + A_{101} b_{200})) \rho^2 \xi + (a_{200} b_{002}^2 + 2b_{002} (a_{101} b_{101} + b_{200} a_{002}) + a_{002} b_{101}^2) \xi^4) \cos^5(\theta) + ((a_1 b_{200}^2 - b(a_{200} B_{200} + A_{200} b_{200})) \rho^3 + (a_{101} b_{101}^2 + 2(a_{200} b_{101} b_{002} + a_{101} b_{200} b_{002} + a_{002} b_{200} b_{101})) \rho \xi^3) \cos^6(\theta) + (a_{200} b_{101}^2 + a_{002} b_{200}^2 + 2b_{200} (a_{200} b_{002} + a_{101} b_{101})) \times \rho^2 \xi^2 \cos^7(\theta) + (a_{101} b_{200}^2 + 2a_{200} b_{200} b_{101}) \rho^3 \xi \cos^8(\theta) + a_{200} b_{200}^2 \rho^4 \cos^9(\theta) + (b^2 B'_{002} + b(a_1 A_{002} + a_2 a_{002})) \xi^2 \sin(\theta) + ((b^2 (A'_{011} + B'_{101}) + b(a_1 (A_{101} - B_{011}) + a_2 (a_{101} - b_{011}))) \rho \xi +$$

$$\begin{aligned}
& 2(ba_{002}A_{002} - bb_{002}B_{002} - a_1a_{002}b_{002})\xi^4/\rho \cos(\theta) \sin(\theta) + ((b^2(A'_{110} + B'_{200}) + b(a_1(A_{200} - B_{110}) + a_2(a_{200} - b_{110})))\rho^2 + b(A_{002}(2a_{101} - b_{011}) - B_{002}(2b_{101} + a_{011}) + a_{002}(2A_{101} - B_{011}) - b_{002}(2B_{101} + A_{011}) + a_2(a_{200} - b_{110}))\xi^3 - 2a_1b_{101}a_{002}\xi^3 + 2a_1b_{002}(b_{011} - a_{101})\xi^3 + (b_{002}^3 - 2b_{002}a_{002}^2)\xi^6/\rho^2) \cos^2(\theta) \sin(\theta) + ((b(-B_{002}(a_{110} + 2b_{200}) + A_{002}(2a_{200} - b_{110}) - B_{101}(2b_{101} + a_{011}) + a_{101}(2A_{101} - B_{011}) + a_{002}(2A_{200} - B_{110}) - b_{002}(2B_{200} + A_{110}) - A_{101}b_{011} - A_{011}b_{101}) + 2a_1(b_{002}(b_{110} - a_{200}) - b_{200}a_{002} + b_{101}(b_{011} - a_{101})))\rho\xi^2 + (b_{002}^2(a_{011} + b_{101}) + 2b_{101}(b_{002}^2 - a_{002}^2) + 2a_{002}b_{002}(b_{011} - 2a_{101}))\xi^5/\rho) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + ((b(a_{200} \times (2A_{101} - B_{011}) + a_{101}(2A_{200} - B_{110}) - b_{101}(2B_{200} + A_{110}) - b_{200}(A_{011} + 2B_{101}) - b_{011}A_{200} - a_{110}B_{101} - A_{101}b_{110}) + 2a_1(b_{200}(b_{011} - a_{101}) + b_{101}(b_{110} - a_{200})))\rho^2\xi + (b_{002}^2(a_{110} + b_{200}) + b_{002}(b_{101}^2 - 2a_{101}^2) + 2b_{200}(b_{002}^2 - a_{002}^2) + 2(b_{101}b_{002}(a_{011} + b_{101}) + a_{002}b_{002}(b_{110} - 2a_{200}) + a_{002}b_{101}(b_{011} - 2a_{101}) + a_{101}b_{011}b_{002}))\xi^4) \cos^4(\theta) \sin(\theta) + ((b(a_{200}(2A_{200} - B_{110}) - b_{200}(2B_{200} + A_{110}) - a_{110}B_{200} - b_{110}A_{200}) + 2a_1b_{200}(b_{110} - a_{200}))\rho^3 + (b_{101}^2(a_{011} + b_{101}) - 2b_{101}a_{101}^2 + 2(b_{101}b_{002}(a_{110} + b_{200}) + b_{200}b_{002}(a_{011} + 2b_{101}) + a_{002}b_{101}(b_{110} - 2a_{200}) + a_{101}b_{002}(b_{110} - 2a_{200}) + a_{002}b_{200}(b_{011} - 2a_{101}) + b_{011}(a_{200}b_{002} + a_{101}b_{101})))\rho\xi^3) \cos^5(\theta) \sin(\theta) + (b_{101}^2(a_{110} + b_{200}) + b_{002}b_{200}^2 + 2(-b_{002}a_{200}^2 - b_{200}a_{101}^2 + b_{200}b_{002}(a_{110} + b_{200}) + b_{200}b_{101}(a_{011} + b_{101}) + a_{002}b_{200}(b_{110} - 2a_{200}) + a_{101}b_{101}(b_{110} - 2a_{200}) + a_{200}(b_{110}b_{002} + b_{101}b_{011}) + a_{101}b_{200}b_{011})) \times \rho^2\xi^2) \cos^6(\theta) \sin(\theta) + (b_{200}^2(a_{011} + b_{101}) + 2(-b_{101}a_{200}^2 + b_{200}b_{101}(a_{110} + b_{200}) + a_{200}b_{200}(b_{011} - 2a_{101}) + b_{110}(a_{200}b_{101} + a_{101}b_{200})))\rho^3\xi) \cos^7(\theta) \sin(\theta) + (b_{200}^2(a_{110} + b_{200}) + 2b_{200}(a_{200}b_{110} - a_{200}^2))\rho^4) \cos^8(\theta) \sin(\theta) + ((b^2B'_{011} + b(a_1A_{011} + a_2a_{011}))\rho\xi + (a_1a_{002}^2 + b(b_{002}A_{002} + B_{002}a_{002}))\xi^4/\rho) \sin^2(\theta) + ((b^2(A'_{020} + B'_{110}) + ba_1(A_{110} - B_{020}) + ba_2(a_{110} - b_{020}))\rho^2 + (b(B_{002}(a_{101} - 2b_{011}) + A_{002}(2a_{011} + b_{101}) + b_{002}(A_{101} - 2B_{011}) + a_{002}(2A_{011} + B_{101})) + 2a_1(a_{002}(a_{101} - b_{011}) - 2a_{011}b_{002}))\xi^3 + (a_{002}^3 - 2a_{002}b_{002}^2)\xi^6/\rho^2) \cos(\theta) \sin^2(\theta) + ((b(A_{002}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) + B_{002}(a_{200} - 2b_{110} - a_{020}) - B_{011}(a_{011} + 2b_{101}) + B_{101}(a_{101} - 2b_{011}) + a_{002}(2A_{110} + B_{200} - B_{020}) + A_{101}(2a_{011} + b_{101}) + A_{011}(2a_{101} - b_{011}) + b_{002}(A_{200} - A_{020} - 2B_{110})) + (a_1(b_{011}^2 + a_{101}^2) + 2a_1(a_{002}(a_{200} - b_{110}) + b_{002}(b_{020} - a_{110}) - b_{101}a_{011} - a_{101}b_{011})))\rho\xi^2 + (a_{101}a_{002}^2 + b_{011}b_{002}^2 + 2(b_{002}^2(b_{011} - a_{101}) + a_{002}^2(a_{101} - b_{011}) - 2a_{002}b_{002}(a_{011} + b_{101})))\xi^5/\rho) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + ((b(a_{110}(2A_{101} - B_{011}) + b_{200}(A_{101} - 2B_{011}) + a_{200}(2A_{011} + B_{101}) - B_{101}(a_{020} + 2b_{110}) + a_{101}(2A_{110} - B_{020} + B_{200}) + A_{200}(2a_{011} + b_{101}) - b_{011}(2B_{200} + A_{110}) - B_{110}(2b_{101} + a_{011}) - A_{020}b_{101} - A_{011}b_{110} - A_{101}b_{020}) + 2a_1(b_{110}(b_{011} - a_{101}) + a_{200}(a_{101} - b_{011}) + b_{101}(b_{020} - a_{101}) - b_{200}a_{011}))\rho^2\xi + (3a_{002}a_{101}^2 + 3a_{200}a_{002}^2 + a_{002}b_{011}^2 + b_{002}^2(a_{020} + b_{110}) + 2(b_{002}^2(b_{110} - a_{200}) - b_{110}a_{002}^2 - b_{002}a_{002}(a_{110} + b_{200}) - a_{002}b_{101}(a_{011} + b_{101}) - b_{002}a_{101}(a_{011} + b_{101}) + b_{011}b_{002}(a_{011} + b_{101}) - a_{101}b_{002}(a_{011} + b_{101}) + a_{002}b_{002}(b_{020} - a_{110} - b_{200}) - a_{002}(2a_{101}b_{011} + b_{101}a_{011}) + 2b_{002}b_{101}b_{011}))\xi^4) \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) + ((b(a_{200}(2A_{110} - B_{020} + B_{200}) + b_{200}(A_{200} - 2B_{110} - A_{020}) + a_{110}(2A_{200} - B_{110}) - b_{110}(2B_{200} + A_{110}) - a_{020}B_{200} - b_{020}A_{200})) + (a_1(b_{110}^2 + a_{200}^2) + 2a_1(b_{200}(b_{020} - a_{110}) - b_{110}a_{200})))\rho^3 + (a_{101}^3 + a_{101}b_{011}^2 + b_{011}b_{101}^2 + 2(-b_{011}a_{101}^2 + a_{200}a_{002}(3a_{101} - 2b_{011}) - a_{200}b_{002}(2a_{011} + 2b_{101}) - b_{101}a_{002}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) - a_{101}b_{002}(2a_{110} + 2b_{200} - b_{020}) + b_{011}b_{002}(a_{110} + 3b_{200}) + b_{101}b_{002}(a_{020} + 2b_{110}) + b_{110}a_{002}(b_{011} - 2a_{101}) + b_{110}b_{002}(a_{011} + b_{101}) - b_{200}a_{002}(2a_{011} + b_{101}) - b_{101}a_{101}(a_{011} + b_{101}) + b_{101}b_{011}(a_{011} + b_{101}) - a_{101}b_{101}a_{011})\rho\xi^3) \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) + (a_{200}(b_{011}^2 + a_{101}^2) + a_{002}(a_{200}^2 + b_{110}^2) + b_{101}^2(a_{020} + b_{110}) + 2(a_{002}a_{200}^2 + a_{200}a_{101}^2 - b_{110}a_{101}^2 - a_{200}a_{002}b_{110} + a_{200}b_{002}(b_{020} - 2a_{110} - 2b_{200}) - a_{200}b_{101}(2a_{011} + b_{101}) + b_{002}b_{110}(a_{110} + 2b_{200}) - a_{002}b_{200}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) + a_{101}b_{011}(b_{110} - 2a_{200}) - b_{101}a_{101}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_{101}b_{011}(a_{110} + 2b_{200}) + b_{200}b_{002}(a_{020} + b_{110}) + b_{200}b_{011}(a_{011} + b_{101}) + b_{110}b_{101}(a_{011} + b_{101}) - \\
& b_{200}a_{101}(2a_{011} + b_{101}))\rho^2\xi^2 \cos^5(\theta) \sin^2(\theta) + (a_{101}(a_{200}^2 + b_{110}^2) + b_{011}b_{200}^2 + 2(a_{200}^2(a_{101} - \\
& b_{011}) - a_{200}b_{200}a_{011} + a_{200}b_{110}(b_{011} - 2a_{101}) + a_{200}b_{101}(b_{020} - 2a_{110} - b_{200}) + b_{200}b_{011}(a_{110} + \\
& b_{200}) + b_{110}b_{101}(a_{110} + b_{200}) - b_{200}a_{101}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) + b_{200}b_{101}(a_{020} + b_{110}) - \\
& a_{200}b_{200}(a_{011} + b_{101}) + b_{110}b_{200}(a_{011} + b_{101})))\rho^3\xi \cos^6(\theta) \sin^2(\theta) + (a_{200}^3 + a_{200}b_{110}^2 + \\
& b_{200}^2(a_{020} + b_{110}) + 2(a_{200}b_{200}(b_{020} - 2a_{110} - b_{200}) - b_{110}a_{200}^2 + b_{200}b_{110}(a_{110} + b_{200}))) \\
& \times \rho^4 \cos^7(\theta) \sin^2(\theta) + ((b^2B'_{020} + b(a_1A_{020} + a_2a_{020}))\rho^2 + (b(b_{011}A_{002} + b_{002}A_{011} + a_{011}B_{002} + \\
& B_{011}a_{002}) + 2a_1a_{011}a_{002})\xi^3 + b_{002}a_{002}^2\xi^6/\rho^2) \sin^3(\theta) + ((b(A_{002}(b_{110} + 2a_{020}) + B_{002}(a_{110} - \\
& 2b_{020}) + B_{011}(a_{101} - 2b_{011}) + a_{002}(2A_{020} + B_{110}) + b_{002}(A_{110} - 2B_{020}) + A_{011}(b_{101} + \\
& 2a_{011}) + b_{011}A_{101} + a_{011}B_{101}) + (2a_1(a_{002}(a_{110} - b_{020}) + a_{011}(a_{101} - b_{011}) - a_{020}b_{002})))\rho\xi^2 + \\
& (a_{002}^2(a_{011} + b_{101}) + 2(a_{011}(a_{002}^2 + b_{002}^2) + b_{002}a_{002}(a_{101} - 2b_{011})))\xi^5/\rho) \cos(\theta) \sin^3(\theta) + \\
& ((b(A_{011}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) + B_{011}(a_{200} - 2b_{110} - a_{020}) + B_{101}(a_{110} - 2b_{020}) + A_{101}(2a_{020} + \\
& b_{110}) + A_{110}(2a_{011} + b_{101}) + A_{020}(2a_{101} - b_{011}) - B_{020}(2b_{101} + a_{011}) + B_{110}(a_{101} - \\
& 2b_{011}) + A_{200}b_{011} + a_{011}B_{200}) + (2a_1(a_{011}(a_{200} - b_{110}) + a_{110}(a_{101} - b_{011}) + b_{020}(b_{011} - \\
& a_{101}) - a_{020}b_{101})))\rho^2\xi + (b_{002}(3b_{011}^2 + a_{101}^2) + b_{020}(3b_{002}^2 - 2a_{002}^2) + a_{002}^2(a_{110} + b_{200}) + \\
& 2(a_{110}(a_{002}^2 - b_{002}^2) - a_{002}b_{002}(2a_{020} + 2b_{110} + a_{200}) + a_{002}a_{011}(2a_{101} - b_{011}) - a_{011}b_{002}(a_{011} + \\
& 2b_{101}) - b_{011}a_{002}(a_{011} + 2b_{101}) + a_{101}a_{002}(a_{011} + b_{101}) - 2b_{002}a_{101}b_{011}))\xi^4) \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + \\
& ((b(A_{110}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) - B_{020}(2b_{200} + a_{110}) + A_{020}(2a_{200} - b_{110}) + A_{200}(2a_{020} + \\
& b_{110}) + B_{200}(a_{110} - 2b_{020}) + B_{110}(a_{200} - a_{020} - 2b_{110})) + 2a_1(b_{020}(b_{110} - a_{200}) + a_{110}(a_{200} - \\
& b_{110}) - b_{200}a_{020}))\rho^3 + (b_{011}^2(a_{011} + 3b_{101}) + a_{101}^2(3a_{011} + b_{101}) + 2(a_{200}a_{002}(3a_{011} + b_{101}) - \\
& a_{011}b_{002}(a_{110} + 2b_{200}) - b_{011}a_{002}(2a_{110} + 2b_{200} - b_{020}) + a_{101}a_{002}(3a_{110} + b_{200} - 2b_{020}) - \\
& b_{101}a_{002}(2a_{020} + b_{110}) - a_{101}b_{002}(2a_{020} + 2b_{110} - a_{200}) + b_{011}b_{002}(a_{020} + 3b_{110} - 2a_{200}) + \\
& b_{002}b_{020}(a_{011} + 3b_{101}) - b_{011}a_{101}(2a_{011} + 2b_{101}) - a_{110}b_{002}(a_{011} + 2b_{101}) - b_{110}a_{002}(2a_{011} + \\
& b_{101}) - b_{101}a_{011}(a_{011} + b_{101})))\rho\xi^3) \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) + (b_{002}(a_{200}^2 + b_{110}^2) + b_{011}^2(a_{110} + 3b_{200}) + \\
& a_{101}^2(3a_{110} + b_{200}) + b_{020}(b_{101}^2 - 2a_{101}^2) + 2(-a_{200}b_{002} \times (2a_{020} + 2b_{110}) + a_{200}a_{002}(3a_{110} - \\
& 2b_{020} + b_{200}) + a_{200}a_{011}(2a_{101} - b_{011}) - b_{110}a_{002}(2a_{110} + b_{200} + b_{020}) - a_{110}b_{002}(a_{110} + \\
& 2b_{200}) + b_{020}b_{002}(a_{110} + 3b_{200}) - a_{011}b_{101}(a_{110} + b_{200}) - a_{101}b_{011}(2a_{110} + 2b_{200} - b_{020}) - \\
& b_{200}a_{002}(2a_{020} + b_{110}) - b_{101}a_{101}(2a_{020} + b_{110}) + b_{101}b_{011}(a_{020} + 2b_{110} - a_{200}) + b_{110}b_{002}(a_{020} + \\
& b_{110}) - b_{110}a_{101}(2a_{011} + b_{101}) + (a_{011} + b_{101})(a_{200}a_{101} + b_{020}b_{101} - a_{200}b_{011} + b_{110}b_{011} - \\
& b_{200}a_{011} - a_{110}b_{101})))\rho^2\xi^2 \cos^4(\theta) \sin^3(\theta) + (b_{110}^2(a_{011} + b_{101}) + a_{200}^2(3a_{011} + b_{101}) + 2(-a_{200}b_{110} \\
& \times (2a_{011} + b_{101}) + a_{200}b_{011}(b_{020} - 2a_{110} - 2b_{200}) + b_{200}b_{020}(a_{011} + 2b_{101}) + b_{200}b_{011}(a_{020} + \\
& 2b_{110}) - a_{200}b_{101}(2a_{020} + b_{110}) + a_{200}a_{101}(3a_{110} - 2b_{020} + b_{200}) - b_{200}a_{011}(a_{110} + b_{200}) - \\
& b_{110}a_{101}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) + b_{101}b_{020}(a_{110} + b_{200}) - a_{110}b_{101}(a_{110} + b_{200}) + b_{110}b_{011}(a_{110} + \\
& b_{200}) + b_{110}b_{101}(a_{020} + b_{110}) - b_{200}a_{101}(a_{020} + b_{110} - a_{020}) - b_{200}a_{110}(a_{011} + b_{101})))\rho^3\xi \cos^5(\theta) \\
& \times \sin^3(\theta) + (b_{020}(b_{200}^2 - 2a_{200}^2) + b_{110}^2(a_{110} + b_{200}) + a_{200}^2(3a_{110} + b_{200}) + 2(-a_{200}b_{200}(2a_{020} + \\
& b_{110}) + a_{200}b_{110}(b_{020} - 2a_{110} - b_{200}) + b_{200}b_{110}(a_{020} + b_{110}) + (a_{110} + b_{200}^2)(b_{020} - a_{110})))\rho^4 \cos^6(\theta) \\
& \times \sin^3(\theta) + ((b(b_{020}A_{002} + b_{011}A_{011} + b_{002}A_{020} + a_{002}B_{020} + B_{002}a_{020} + B_{011}a_{011}) + \\
& a_1a_{011}^2 + 2a_1a_{002}a_{020})\rho\xi^2 + (b_{011}a_{002}^2 + 2a_{002}a_{011}b_{002})\xi^5/\rho) \sin^4(\theta) + ((b(B_{011}(a_{110} - 2b_{020}) + \\
& A_{011}(2a_{020} + b_{110}) + b_{011}(A_{110} - 2B_{020}) + A_{020}(2a_{011} + b_{101}) + b_{020}A_{101} + B_{110}a_{011} + \\
& B_{101}a_{020} + a_{101}B_{020}) + 2a_1(a_{011}(a_{110} - b_{020}) + a_{020}(a_{101} - b_{011})))\rho^2\xi + (a_{002}^2(a_{020} + b_{110}) + \\
& a_{002}(a_{011}^2 - b_{011}^2) + 2a_{020}(a_{002}^2 - b_{002}^2) + 2(a_{011}a_{002}(a_{011} + b_{101}) + a_{002}b_{002}(a_{110} - 2b_{020}) + \\
& a_{011}b_{002}(a_{101} - 2b_{011}) + b_{011}a_{101}a_{002}))\xi^4) \cos(\theta) \sin^4(\theta) + ((b(A_{020}(b_{200} + 2a_{110} - b_{020}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{110}(2a_{020} + b_{110}) + b_{020}(A_{200} - 2B_{110}) + B_{020}(a_{200} - 2b_{110} - a_{020}) + a_{110}B_{110} + B_{200}a_{020} + \\
& (a_1(a_{110}^2 + b_{020}^2) + 2a_1(a_{020}(a_{200} - b_{110}) - a_{110}b_{020}))\rho^3 + (b_{011}^3 + a_{101}(a_{011}^2 - 2b_{011}^2) + \\
& b_{011}a_{101}^2 + 2(a_{011}a_{002}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) - a_{011}b_{002}(a_{020} + b_{110} - a_{200}) - b_{011}a_{002}(2a_{020} + \\
& 2b_{110} - a_{200}) + a_{101}a_{002}(3a_{020} + b_{110}) - b_{020}a_{002}(a_{011} + 2b_{101}) + b_{020}b_{002}(3b_{011} - 2a_{101}) - \\
& b_{011}a_{011}(a_{011} + 2b_{101}) + a_{101}a_{011}(a_{011} + b_{101}) - a_{020}b_{002}(a_{011} + 2b_{101}) + a_{110}a_{002}(a_{011} + \\
& b_{101}) + a_{110}b_{002}(a_{101} - 2b_{011}) - b_{002}b_{110}a_{011}))\rho\xi^3 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) + (a_{200}(a_{011}^2 - 2b_{011}^2) + \\
& a_{002}(a_{110}^2 + b_{020}^2) + (a_{020} + b_{110})(b_{011}^2 + a_{101}^2) + 2(a_{020}a_{101}^2 + b_{110}b_{011}^2 + a_{200}a_{002}(3a_{020} + b_{110}) - \\
& a_{020}b_{002}(a_{110} + 2b_{200}) + a_{002}a_{110}(a_{110} + b_{200} - b_{020}) - a_{002}b_{020}(a_{110} + 2b_{200}) - b_{011}a_{011}(a_{110} + \\
& 2b_{200}) + a_{011}a_{101}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) - b_{110}a_{002}(2a_{020} + b_{110}) - a_{110}b_{002}(a_{020} + 2b_{110} - \\
& a_{200}) + b_{002}b_{020}(a_{020} + 3b_{110} - 2a_{200}) - b_{101}a_{011}(a_{020} + b_{110}) - a_{101}b_{011}(2a_{020} + 2b_{110} - \\
& a_{200}) + b_{020}b_{101}(2b_{011} - a_{101}) - b_{011}a_{110}(a_{011} + 2b_{101}) + (a_{011} + b_{101})(a_{200}a_{011} + b_{020}b_{011} - \\
& b_{110}a_{011} - b_{020}a_{101} - a_{020}b_{101} + a_{110}a_{101}))\rho^2\xi^2 \cos^3(\theta) \sin^4(\theta) + (a_{101}(a_{110}^2 + b_{020}^2) + \\
& b_{011}(a_{200}^2 + b_{110}^2) + 2(a_{200}a_{011}(2a_{110} - b_{020} + b_{200}) + a_{200}a_{020}(2a_{101} - b_{011}) + b_{020}b_{101}(a_{020} + \\
& 2b_{110} - a_{200}) + b_{020}b_{200}(2b_{011} - a_{101}) - a_{101}b_{110}(2a_{020} + b_{110}) - b_{020}a_{101}(2a_{110} + b_{200}) + \\
& b_{110}b_{011}(a_{020} + b_{110} - a_{200}) - b_{011}a_{110}(a_{110} + 2b_{200}) + (a_{110} + b_{200})(b_{020}b_{011} - b_{110}a_{011} - \\
& a_{020}b_{101} + a_{110}a_{101}) + (a_{020} + b_{110})(a_{200}a_{101} - b_{200}a_{011} - a_{110}b_{101} - a_{200}b_{011}) + (a_{011} + \\
& b_{101})(b_{110}b_{020} - a_{200}b_{020} + a_{200}a_{110} - b_{110}a_{110} - b_{200}a_{020}))\rho^3\xi \cos^4(\theta) \sin^4(\theta) + (a_{200}(a_{110}^2 + \\
& b_{020}^2) + (a_{020} + b_{110})(a_{200}^2 + b_{110}^2) + 2(a_{020}a_{200}^2 - b_{110}a_{200}(2a_{020} + b_{110}) + b_{200}b_{020}(a_{020} + \\
& 2b_{110} - a_{200}) + a_{200}a_{110}(a_{110} + b_{200} - b_{020}) - a_{110}b_{200}(a_{020} + b_{110}) + (a_{110} + b_{200})(b_{110}b_{020} - \\
& a_{110}b_{110} - a_{020}b_{200} - a_{200}b_{020}))\rho^4 \cos^5(\theta) \sin^4(\theta) + ((2a_1a_{020}a_{011} + b(b_{020}A_{011} + b_{011}A_{020} + \\
& B_{020}a_{011} + B_{011}a_{020}))\rho^2\xi + (b_{020}a_{002}^2 + b_{002}a_{011}^2 + 2a_{002}(b_{011}a_{011} + b_{002}a_{020}))\xi^4) \sin^5(\theta) + \\
& ((2a_1a_{020}(a_{110} - b_{020}) + b(b_{020}(A_{110} - 2B_{020}) + a_{020}(2A_{020} + B_{110}) + a_{110}B_{020} + b_{110}A_{020}))\rho^3 + \\
& (a_{011}^2(b_{011} + b_{101}) + 2(-a_{011}b_{011}^2 + a_{011}a_{002}(2a_{020} + b_{110}) + a_{020}a_{002}(a_{011} + b_{101}) - 2b_{020}b_{002}a_{011} \\
& + a_{002}b_{020}(a_{101} - 2b_{011}) + b_{011}a_{101}a_{011} - 2b_{002}a_{020}b_{011} + b_{011}a_{110}a_{002} + b_{002}(a_{110}a_{011} + \\
& a_{020}a_{101})))\rho\xi^3 \cos(\theta) \sin^5(\theta) + (a_{011}^2(a_{110} + b_{200}) + b_{020}(a_{101}^2 + 3b_{011}^2) + b_{002}(3b_{020}^2 + a_{110}^2) - \\
& 2a_{110}b_{011}^2 + 2(a_{002}a_{020}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) - a_{020}b_{002}(a_{020} + 2b_{110} - a_{200}) + a_{110}a_{002}(a_{020} + \\
& b_{110}) - a_{002}b_{020}(a_{020} + 2b_{110} - a_{200}) - a_{011}b_{011}(a_{020} + 2b_{110} - a_{200}) + a_{101}a_{011}(2a_{020} + b_{110}) - \\
& 2b_{020}a_{110}b_{002} - b_{020}a_{011}(2b_{101} + a_{011}) - 2b_{011}b_{020}a_{101} + a_{020}a_{101}(a_{011} + b_{101}) + a_{110}a_{011}(a_{011} + \\
& b_{101}) - b_{011}a_{020}(a_{011} + 2b_{101}) + b_{011}a_{110}a_{101}))\rho^2\xi^2 \cos^2(\theta) \sin^5(\theta) + ((a_{011} + b_{101})(a_{110}^2 + \\
& b_{020}^2) + 2(b_{101}b_{020}^2 + a_{200}a_{011}(2a_{020} + b_{110}) + b_{020}b_{110}(2b_{011} - a_{101}) - b_{020}a_{011}(a_{110} + 2b_{200}) + \\
& a_{101}a_{020}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) + b_{020}a_{200}(a_{101} - 2b_{011}) - b_{020}a_{110}(a_{011} + 2b_{101}) - b_{011}a_{020}(a_{110} + \\
& 2b_{200}) - b_{011}a_{110}(a_{020} + 2b_{110} - a_{200}) + (a_{011} + b_{101})(a_{200}a_{020} - a_{020}b_{110}) + a_{110}a_{011}(a_{110} + \\
& b_{200}) + (a_{020} + b_{110})(a_{110}a_{101} - b_{110}a_{011} + b_{011}b_{020} - a_{020}b_{101} - a_{101}b_{020}))\rho^3\xi \cos^3(\theta) \sin^5(\theta) + \\
& ((a_{110} + b_{200})(a_{110}^2 + b_{020}^2) + b_{020}(a_{200}^2 + b_{110}^2) + 2(b_{200}b_{020}^2 + a_{200}a_{020}(2a_{110} + b_{200} - b_{020}) - \\
& a_{110}b_{020}(a_{110} + 2b_{200}) - a_{020}b_{110}(a_{110} + b_{200}) + b_{110}b_{020}(a_{020} + b_{110} - a_{200}) + (a_{020} + \\
& b_{110})(a_{110}a_{200} - a_{020}b_{200} - b_{110}a_{110} - a_{200}b_{020}))\rho^4 \cos^4(\theta) \sin^5(\theta) + ((a_1a_{020}^2 + b(a_{020}B_{020} + \\
& b_{020}A_{020}))\rho^3 + (b_{011}a_{011}^2 + 2(a_{011}b_{020}a_{002} + a_{002}a_{020}b_{011} + b_{002}a_{020}a_{011}))\rho\xi^3) \sin^6(\theta) + \\
& (a_{011}^2(a_{020} + b_{110}) + a_{002}(a_{020}^2 - 2b_{020}^2) - 2a_{020}b_{011}^2 + 2(a_{002}a_{020}(a_{020} + b_{110}) + a_{020}a_{011}(a_{011} + \\
& b_{101}) + a_{020}b_{002}(a_{110} - 2b_{020}) + a_{002}a_{110}b_{020} + b_{020}a_{011}(a_{101} - 2b_{011}) + b_{011}(a_{101}a_{020} + \\
& a_{110}a_{011})))\rho^2\xi^2 \cos(\theta) \sin^6(\theta) + (b_{011}(a_{110}^2 + 3b_{020}^2) + a_{101}(a_{020}^2 - 2b_{020}^2) + 2(a_{011}a_{020}(a_{110} + \\
& b_{200}) - b_{020}a_{011}(a_{020} + b_{110} - a_{200}) + (a_{020} + b_{110})(a_{020}a_{101} + a_{110}a_{011} - a_{020}b_{011}) + \\
& b_{020}a_{110}(a_{101} - b_{011}) - b_{020}a_{020}(a_{011} + 2b_{101}) - b_{020}b_{110}a_{011} + a_{110}a_{020}(a_{011} + b_{101}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{020}b_{011}(a_{200} - b_{110}) - b_{011}a_{110}b_{020}))\rho^3\xi \cos^2(\theta) \sin^6(\theta) + (a_{200}(a_{020}^2 - 2b_{020}^2) + 2b_{110}b_{020}^2 + \\
& (a_{020} + b_{110})(a_{110}^2 + b_{020}^2) + 2(-a_{020}b_{020}(a_{110} + 2b_{200}) - b_{020}a_{110}(a_{020} + 2b_{110} - a_{200}) + \\
& a_{020}a_{110}(a_{110} + b_{200}) + (a_{020} + b_{110})(a_{200}a_{020} - a_{020}b_{110})))\rho^4 \cos^3(\theta) \sin^6(\theta) + (b_{020}a_{011}^2 + \\
& b_{002}a_{020}^2 + 2a_{020}(a_{002}b_{020} + a_{011}b_{011}))\rho^2\xi^2 \sin^7(\theta) + (a_{020}^2(a_{011} + b_{101}) + 2(-a_{011}b_{020}^2 + \\
& a_{011}a_{020}(a_{020} + b_{110}) + b_{020}a_{020}(a_{101} - b_{011}) + a_{110}a_{011}b_{020} + a_{020}b_{011}(a_{110} - b_{020})))\rho^3\xi \cos(\theta) \\
& \times \sin^7(\theta) + (b_{020}^3 + b_{020}a_{110}^2 - 2a_{110}b_{020}^2 + a_{020}^2(a_{110} + b_{200}) + 2(a_{110}a_{020}(a_{020} + b_{110}) - \\
& a_{020}b_{020}(a_{020} + 2b_{110} - a_{200})))\rho^4 \cos^2(\theta) \sin^7(\theta) + (b_{011}a_{020}^2 + 2a_{020}a_{011}b_{020})\rho^3\xi \sin^8(\theta) + \\
& (a_{020}^2(a_{020} + b_{110}) - 2a_{020}b_{020}^2 + 2a_{110}a_{020}b_{020})\rho^4 \cos(\theta) \sin^8(\theta) + a_{020}^2b_{020}\rho^4 \sin^9(\theta)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{12} = & \frac{1}{b}[c_{200} \cos^2(\theta)\rho^2 + c_{020} \sin^2(\theta)\rho^2 + c_{110} \cos(\theta) \sin(\theta)\rho^2 + c_{101}\xi \cos(\theta)\rho + c_{011}\xi \sin(\theta)\rho \\
& + c_{002}\xi^2 + c_1\xi],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{22} = & \frac{1}{b^2}[b\xi(c_2 + C_{002}\xi) + (\xi(bC_{101}\rho^2 - b_{002}c_1\xi^2 - b_{002}c_{002}\xi^3) \cos(\theta))/\rho + (bC_{200}\rho^2 - \\
& b_{101}c_1\xi^2 - b_{101}c_{002}\xi^3 - b_{002}c_{101}\xi^3) \cos^2(\theta) - \rho\xi(b_{200}c_1 + b_{200}c_{002}\xi + b_{101}c_{101}\xi + b_{002}c_{200}\xi) \cos^3(\theta) \\
& - (b_{200}c_{101} + b_{101}c_{200})\rho^2\xi \cos^4(\theta) - b_{200}c_{200}\rho^3 \cos^5(\theta) + (\xi(bC_{011}\rho^2 + a_{002}c_1\xi^2 + a_{002}c_{002}\xi^3) \\
& \times \sin(\theta))/\rho + (bC_{110}\rho^2 + a_{101}c_1\xi^2 - b_{011}c_1\xi^2 + a_{101}c_{002}\xi^3 - b_{011}c_{002}\xi^3 - b_{002}c_{011}\xi^3 + \\
& a_{002}c_{101}\xi^3) \cos(\theta) \sin(\theta) + \rho\xi(a_{200}c_1 - b_{110}c_1 + a_{200}c_{002}\xi - b_{110}c_{002}\xi - b_{101}c_{011}\xi + a_{101}c_{101}\xi - \\
& b_{011}c_{101}\xi - b_{002}c_{110}\xi + a_{002}c_{200}\xi) \cos^2(\theta) \sin(\theta) - (b_{200}c_{011} - a_{200}c_{101} + b_{110}c_{101} + b_{101}c_{110} - \\
& a_{101}c_{200} + b_{011}c_{200})\rho^2\xi \cos^3(\theta) \sin(\theta) - (b_{200}c_{110} - a_{200}c_{200} + b_{110}c_{200})\rho^3 \cos^4(\theta) \sin(\theta) + \\
& (bC_{020}\rho^2 + a_{011}c_1\xi^2 + a_{011}c_{002}\xi^3 + a_{002}c_{011}\xi^3) \sin^2(\theta) + \rho\xi(a_{110}c_1 - b_{020}c_1 + a_{110}c_{002}\xi - \\
& b_{020}c_{002}\xi + a_{101}c_{011}\xi - b_{011}c_{011}\xi - b_{002}c_{020}\xi + a_{011}c_{101}\xi + a_{002}c_{110}\xi) \cos(\theta) \sin^2(\theta) + \\
& (a_{200}c_{011} - b_{110}c_{011} - b_{101}c_{020} + a_{110}c_{101} - b_{020}c_{101} + a_{101}c_{110} - b_{011}c_{110} + a_{011}c_{200})\rho^2\xi \cos^2(\theta) \\
& \times \sin^2(\theta) - (b_{200}c_{020} - a_{200}c_{110} + b_{110}c_{110} - a_{110}c_{200} + b_{020}c_{200})\rho^3 \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) + \\
& \rho\xi(a_{020}c_1 + a_{020}c_{002}\xi + a_{011}c_{011}\xi + a_{002}c_{020}\xi) \sin^3(\theta) + (a_{110}c_{011} - b_{020}c_{011} + a_{101}c_{020} - \\
& b_{011}c_{020} + a_{020}c_{101} + a_{011}c_{110})\rho^2\xi \cos(\theta) \sin^3(\theta) + (a_{200}c_{020} - b_{110}c_{020} + a_{110}c_{110} - b_{020}c_{110} + \\
& a_{020}c_{200})\rho^3 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + (a_{020}c_{011} + a_{011}c_{020})\rho^2\xi \sin^4(\theta) + (a_{110}c_{020} - b_{020}c_{020} + a_{020}c_{110} \\
& \times \rho^3 \cos(\theta) \sin^4(\theta) + a_{020}c_{020}\rho^3 \sin^5(\theta)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{32} = & \frac{1}{b^3}[b^2\xi(c_3 + C'_{002}\xi) + (b^2C'_{101}\rho\xi - b((c_1B_{002} + c_2b_{002})\xi^3/\rho + (c_{002}B_{002} + \\
& C_{002}b_{002})\xi^4/\rho)) \cos(\theta) + (b^2C'_{200}\rho^2 - b((c_1B_{101} + c_2b_{101})\xi^2 + (c_{002}B_{101} + c_{101}B_{002} + \\
& C_{002}b_{101} + C_{101}b_{002})\xi^3) + c_1b_{002}^2\xi^5/\rho^2 + c_{002}b_{002}^2\xi^6/\rho^2) \cos^2(\theta) + (-b((c_1B_{200} + c_2b_{200})\rho\xi + \\
& (c_{002}B_{200} + c_{200}B_{002} + c_{101}B_{101} + C_{002}b_{200} + C_{200}b_{002} + C_{101}b_{101})\rho\xi^2) + 2c_1b_{101}b_{002}\xi^4/\rho + \\
& 2c_{002}b_{101}b_{002}\xi^5/\rho + c_{101}b_{002}^2\xi^5/\rho) \cos^3(\theta) + (-b(c_{200}B_{101} + c_{101}B_{200} + C_{200}b_{101} + C_{101}b_{200})\rho^2\xi \\
& + 2c_1b_{200}b_{002}\xi^3 + c_1b_{101}^2\xi^3 + (2c_{002}b_{200}b_{002} + c_{002}b_{101}^2 + c_{200}b_{002}^2 + 2c_{101}b_{101}b_{002})\xi^4) \cos^4(\theta) + \\
& (-bc_{200}B_{200}\rho^3 - bc_{200}b_{200}\rho^3 + 2c_1b_{200}b_{101}\rho\xi^2 + (2c_{002}b_{200}b_{101} + 2c_{200}b_{101}b_{002} + 2c_{101}b_{200}b_{002} \\
& + c_{101}b_{101}^2)\rho\xi^3) \cos^5(\theta) + (c_1b_{200}^2\rho^2\xi + (c_{002}b_{200}^2 + 2c_{200}b_{200}b_{002} + c_{200}b_{101}^2 + 2c_{101}b_{200}b_{101})\rho^2\xi^2) \\
& \times \cos^6(\theta) + (2c_{200}b_{200}b_{101} + c_{101}b_{200}^2)\rho^3\xi \cos^7(\theta) + c_{200}b_{200}^2\rho^4 \cos^8(\theta) + (b^2C'_{011}\rho\xi + b((c_1A_{002} \\
& + c_2a_{002})\xi^3/\rho + (c_{002}A_{002} + C_{002}a_{002})\xi^4/\rho)) \sin(\theta) + (b^2C'_{110}\rho^2 + b((c_1(A_{101} - B_{011}) - \\
& c_2(b_{011} - a_{101}))\xi^2 + (c_{002}(A_{101} - B_{011}) + c_{101}A_{002} - c_{011}B_{002} - C_{002}(b_{011} - a_{101}) + \\
& C_{101}a_{002} - C_{011}b_{002})\xi^3) - 2b_{002}a_{002}(c_1\xi^5/\rho^2 + c_{002}\xi^6/\rho^2)) \cos(\theta) \sin(\theta) + (-b(c_1(B_{110} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{200} + c_2(b_{110} - a_{200}))\rho\xi + b(-c_{002}(B_{110} - A_{200}) + c_{200}A_{002} - c_{110}B_{002} - c_{101}(B_{011} - A_{101}) - \\
& c_{011}B_{101} - C_{002}(b_{110} - a_{200}) - C_{101}(b_{011} - a_{101}) - C_{110}b_{002} + C_{200}a_{002} - C_{011}b_{101})\rho\xi^2 - \\
& 2c_1(b_{101}a_{002} + a_{101}b_{002} - b_{011}b_{002})\xi^4/\rho - 2c_{002}(b_{101}a_{002} + a_{101}b_{002} - b_{011}b_{002})\xi^5/\rho - \\
& 2c_{101}b_{002}a_{002}\xi^5/\rho + c_{011}b_{002}^2\xi^5/\rho) \cos^2(\theta) \sin(\theta) + (b(c_{200}(A_{101} - B_{011}) - c_{110}B_{101} - c_{101}(B_{110} \\
& - A_{200}) - c_{011}B_{200} - C_{110}b_{101} - C_{011}b_{200} - C_{101}(b_{110} - a_{200}) - C_{200}(b_{011} - a_{101}))\rho^2\xi + \\
& 2(c_1b_{002}(b_{110} - a_{200}) - c_1b_{200}a_{002} - c_1b_{101}a_{101} + c_1b_{101}b_{011})\xi^3 + (2(c_{002}(b_{002}(b_{110} - a_{200}) - \\
& b_{200}a_{002} - b_{101}a_{101} + b_{101}b_{011}) - c_{200}b_{002}a_{002} - c_{101}b_{101}a_{002} - c_{101}a_{101}b_{002} + c_{101}b_{011}b_{002} + \\
& c_{011}b_{101}b_{002}) + c_{110}b_{002}^2)\xi^4) \times \cos^3(\theta) \sin(\theta) + (-b(c_{200}(B_{110} - A_{200}) + c_{110}B_{200} + C_{200}(b_{110} - \\
& a_{200}) + C_{110}b_{200})\rho^3 + 2c_1(b_{200}(b_{011} - a_{101}) + b_{101}(b_{110} - a_{200}))\rho\xi^2 + (2(c_{002}b_{200}(b_{011} - a_{101}) + \\
& c_{002}b_{101}(b_{110} - a_{200}) - c_{200}b_{101}a_{002} - c_{200}a_{101}b_{002} + c_{200}b_{011}b_{002} + c_{110}b_{101}b_{002} - c_{101}b_{200}a_{002} + \\
& c_{101}b_{002}(b_{110} - a_{200}) + c_{101}b_{101}(b_{011} - a_{101}) + c_{011}b_{200}b_{002}) + c_{011}b_{101}^2)\rho\xi^3) \cos^4(\theta) \sin(\theta) + \\
& (2c_1b_{200}(b_{110} - a_{200})\rho^2\xi + (2(c_{002}b_{200}(b_{110} - a_{200}) + c_{200}b_{002}(b_{110} - a_{200}) - c_{200}a_{002}b_{200} + \\
& c_{200}b_{101}(b_{011} - a_{101}) + c_{110}b_{200}b_{002} + c_{101}b_{200}(b_{011} - a_{101}) + c_{101}b_{110}b_{101} - c_{101}a_{200}b_{101} + \\
& c_{011}b_{200}b_{101}) + c_{110}b_{101}^2)\rho^2\xi^2) \cos^5(\theta) \sin(\theta) + (2(c_{200}b_{200}(b_{011} - a_{101}) + c_{200}b_{101}(b_{110} - \\
& a_{200}) + c_{110}b_{200}b_{101} + c_{101}b_{200}(b_{110} - a_{200})) + c_{011}b_{200}^2)\rho^3\xi \cos^6(\theta) \sin(\theta) + (2c_{200}b_{200}(b_{110} - \\
& a_{200}) + c_{110}b_{200}^2) \cos^7(\theta) \sin(\theta) + (b^2\dot{C}_{020}\rho^2 + b((c_1A_{011} + c_2a_{011})\xi^2 + (bc_{002}A_{011} + c_{011}A_{002} \\
& + C_{002}a_{011} + C_{011}a_{002})\xi^3) + c_1a_{002}^2\xi^5/\rho^2 + c_{002}a_{002}^2\xi^6/\rho^2) \sin^2(\theta) + (-b(c_1(B_{020} - A_{110}) + \\
& c_2(b_{020} - a_{110}))\rho\xi + b(-c_{002}(B_{020} - A_{110}) + c_{110}A_{002} - c_{020}B_{002} + c_{101}A_{011} - c_{011}(B_{011} - \\
& A_{101}) - C_{002}(b_{020} - a_{110}) + C_{110}a_{002} - C_{020}b_{002} + C_{101}a_{011} - C_{011}(b_{011} - a_{101}))\rho\xi^2 + \\
& 2((c_1a_{011}b_{002} - c_1b_{011}a_{002} + c_1a_{101}a_{002})\xi^4/\rho + (c_{002}a_{002}(a_{101} - b_{011}) - c_{002}a_{011}b_{002} - \\
& c_{011}b_{002}a_{002})\xi^5/\rho) + c_{101}a_{002}^2\xi^5/\rho) \cos(\theta) \sin^2(\theta) + (b(c_{200}A_{011} - c_{110}(B_{011} - A_{101}) - \\
& c_{020}B_{101} - c_{101}(B_{020} - A_{110}) - c_{011}(B_{110} - A_{200}) + C_{200}a_{011} - C_{101}(b_{020} - a_{110}) - \\
& C_{011}(b_{110} - a_{200}) - C_{020}b_{101} - C_{110}(b_{011} - a_{101}))\rho^2\xi + c_1(2a_{002}(a_{200} - b_{110}) - 2a_{110}b_{002} - \\
& 2b_{101}a_{011} - 2a_{101}b_{011} + b_{011}^2 + a_{101}^2 + 2b_{020}b_{002})\xi^3 + (2c_{002}a_{002}(a_{200} - b_{110}) - 2c_{002}a_{110}b_{002} - \\
& 2c_{002}b_{101}a_{011} - 2c_{002}a_{101}b_{011} + c_{002}b_{011}^2 + c_{002}a_{101}^2 + 2c_{002}b_{020}b_{002} + c_{200}a_{002}^2 - 2c_{110}b_{002}a_{002} + \\
& c_{020}b_{002}^2 - 2c_{101}a_{011}b_{002} - 2c_{101}b_{011}a_{002} + 2c_{101}a_{002}a_{101} - 2c_{011}b_{101}a_{002} - 2c_{011}a_{101}b_{002} + \\
& 2c_{011}b_{011}b_{002})\xi^4) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + (-b(c_{200}(B_{020} - A_{110}) + c_{110}(B_{110} - A_{200}) + c_{020}B_{200} + \\
& C_{200}(b_{020} - a_{110}) + C_{020}b_{200} + C_{110}(b_{110} - a_{200}))\rho^3 + 2c_1(b_{110}(b_{011} - a_{101}) + a_{200}(a_{101} - \\
& b_{011}) - b_{200}a_{011} + b_{020}b_{101} - a_{110}b_{101})\rho\xi^2 + (-2c_{002}b_{110}a_{101} + 2c_{002}a_{200}a_{101} - 2c_{002}a_{200}b_{011} + \\
& 2c_{002}b_{110}b_{011} - 2c_{002}b_{200}a_{011} + 2c_{002}b_{020}b_{101} - 2c_{002}a_{110}b_{101} - 2c_{200}a_{011}b_{002} + 2c_{200}a_{002}(a_{101} - \\
& b_{011}) - 2c_{110}b_{101}a_{002} - 2c_{110}a_{101}b_{002} + 2c_{110}b_{011}b_{002} + 2c_{020}b_{101}b_{002} + 2c_{101}b_{002}(b_{020} - \\
& a_{110}) + 2c_{101}a_{002}(a_{200} - b_{110}) - 2c_{101}b_{101}a_{011} - 2c_{101}a_{101}b_{011} + c_{101}b_{011}^2 - 2c_{011}b_{200}a_{002} + \\
& 2c_{011}b_{110}b_{002} + c_{101}a_{101}^2 - 2c_{011}a_{200}b_{002} - 2c_{011}b_{101}a_{101} + 2c_{011}b_{101}b_{011})\rho\xi^3) \cos^3(\theta) \sin^2(\theta) + \\
& (c_1(2b_{200}(b_{020} - a_{110}) + b_{110}^2 + a_{200}^2 - 2b_{110}a_{200})\rho^2\xi + (2c_{002}b_{200}(b_{020} - a_{110}) + c_{002}b_{110}^2 + \\
& c_{002}a_{200}^2 - 2c_{002}b_{110}a_{200} + 2c_{200}a_{002}(a_{200} - b_{110}) - 2c_{200}a_{110}b_{002} - 2c_{200}b_{101}a_{011} - 2c_{200}a_{101}b_{011} \\
& + c_{200}b_{011}^2 + c_{200}a_{101}^2 + 2c_{200}b_{020}b_{002} - 2c_{110}a_{200}b_{002} + 2c_{110}b_{110}b_{002} - 2c_{110}b_{200}a_{002} + \\
& 2c_{110}b_{101}(b_{011} - a_{101}) + 2c_{020}b_{200}b_{002} - 2c_{101}b_{200}a_{011} - 2c_{101}b_{110}a_{101} + c_{020}b_{101}^2 + 2c_{101}b_{110}b_{011} \\
& - 2c_{101}a_{200}b_{011} - 2c_{101}a_{110}b_{101} + 2c_{101}b_{020}b_{101} + 2c_{101}a_{200}a_{101} - 2c_{011}b_{200}a_{101} + 2c_{011}b_{110}b_{101} + \\
& 2c_{011}b_{200}b_{011} - 2c_{011}a_{200}b_{101})\rho^2\xi^2) \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) + (2c_{200}b_{110}(b_{011} - a_{101}) + 2c_{200}a_{200}(a_{101} - \\
& b_{011}) - 2c_{200}b_{200}a_{011} + 2c_{200}b_{020}b_{101} - 2c_{200}a_{110}b_{101} + 2c_{110}b_{200}(b_{011} - a_{101}) + 2c_{110}b_{101}(b_{110} - \\
& a_{200}) + 2c_{020}b_{200}b_{101} + 2c_{101}b_{200}(b_{020} - a_{110}) - 2c_{101}b_{110}a_{200} + c_{101}b_{110}^2 + c_{101}a_{200}^2 + \\
& 2c_{011}b_{200}(b_{110} - a_{200}))\rho^3\xi \cos^5(\theta) \sin^2(\theta) + (2c_{200}b_{200}(b_{020} - a_{110}) + c_{200}b_{110}^2 - 2c_{200}b_{110}a_{200} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_{200}a_{200}^2 + 2c_{110}b_{200}(b_{110} - a_{200}) + c_{020}b_{200}^2\rho^4 \cos^6(\theta) \sin^2(\theta) + (b((c_1A_{020} + c_2a_{020})\rho\xi + \\
& (c_{002}A_{020} + c_{020}A_{002} + c_{011}A_{011} + C_{002}a_{020} + C_{020}a_{002} + C_{011}a_{011})))\rho\xi^2 + 2c_1a_{011}a_{002}\xi^4/\rho + \\
& (2c_{002}a_{011}a_{002} + c_{011}a_{002}^2)\xi^5/\rho) \sin^3(\theta) + (b(c_{110}A_{011} - c_{011}(B_{020} - A_{110}) + c_{101}A_{020} - \\
& c_{020}(B_{011} - A_{101}) + C_{110}a_{011} - C_{020}(b_{011} - a_{101}) - C_{011}(b_{020} - a_{110}) + C_{101}a_{020})\rho^2\xi + \\
& 2c_1(a_{011}(a_{101} - b_{011}) - a_{020}b_{002} + a_{002}(a_{110} - b_{020}))\xi^3 + (2c_{002}a_{011}(a_{101} - b_{011}) - 2c_{002}a_{020}b_{002} \\
& + 2c_{002}a_{110}a_{002} - 2c_{002}b_{020}a_{002} + c_{110}a_{002}^2 - 2c_{020}b_{002}a_{002} + 2c_{101}a_{011}a_{002} - 2c_{011}a_{011}b_{002} + \\
& 2c_{011}a_{002}(a_{101} - b_{011}))\xi^4) \cos(\theta) \sin^3(\theta) + (b(c_{200}A_{020} - c_{110}(B_{020} - A_{110}) - c_{020}(B_{110} - \\
& A_{200}) - C_{110}(b_{020} - a_{110}) - C_{020}(b_{110} - a_{200}) + C_{200}a_{020})\rho^3 + 2c_1(-b_{110}a_{011} + a_{200}a_{011} + \\
& b_{020}b_{011} - a_{110}b_{011} - a_{020}b_{101} + a_{110}a_{101} - b_{020}a_{101})\rho\xi^2 + 2(c_{002}a_{011}(a_{200} - b_{110}) + c_{002}b_{011}(b_{020} - \\
& a_{110}) - c_{002}a_{020}b_{101} + c_{002}a_{101}(a_{110} - b_{020}) + c_{200}a_{011}a_{002} - c_{110}(a_{011}b_{002} + b_{011}a_{002}) + \\
& c_{110}a_{101}a_{002} - c_{020}b_{101}a_{002} + c_{020}b_{002}(b_{011} - a_{101}) + c_{101}a_{002}(a_{110} - b_{020}) - c_{101}a_{020}b_{002} + \\
& c_{011}a_{002}(a_{200} - b_{110}) + c_{101}a_{011}(a_{101} - b_{011}) + c_{011}b_{002}(b_{020} - a_{110}) - c_{011}b_{101}a_{011} - \\
& c_{011}a_{101}b_{011})\rho\xi^3 + c_{011}(b_{011}^2 + a_{101}^2)\rho\xi^3) \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + (2c_1(b_{020}(b_{110} - a_{200}) + a_{110}(a_{200} - \\
& b_{110}) - b_{200}a_{020})\rho^2\xi + (2c_{002}(b_{020}(b_{110} - a_{200}) + a_{110}(a_{200} - b_{110}) - b_{200}a_{020}) + 2c_{200}a_{011}(a_{101} - \\
& b_{011}) - 2c_{200}a_{020}b_{002} + 2c_{200}a_{110}a_{002} - 2c_{200}b_{020}a_{002} + 2c_{110}a_{002}(a_{200} - b_{110}) + 2c_{110}b_{002}(b_{020} - \\
& a_{110}) - 2c_{110}b_{101}a_{011} - 2c_{110}a_{101}b_{011} + c_{110}(b_{011}^2 + a_{101}^2) - 2c_{020}b_{200}a_{002} + 2c_{020}(b_{002}(b_{110} - \\
& a_{200}) + b_{101}(b_{011} - a_{101})) + 2c_{101}(b_{020}(b_{011} - a_{101}) + a_{110}(a_{101} - b_{011})) + 2c_{101}(a_{011}(a_{200} - \\
& b_{110}) - a_{020}b_{101}) + 2c_{011}(b_{110}(b_{011} - a_{101}) - b_{200}a_{011} + a_{200}(a_{101} - b_{011}) - a_{110}b_{101} + \\
& b_{020}b_{101}))\rho^2\xi^2) \cos^3(\theta) \sin^3(\theta) + (2c_{200}(a_{011}(a_{200} - b_{110}) + b_{020}(b_{011} - a_{101}) + a_{110}(a_{101} - \\
& b_{011}) - a_{020}b_{101}) + 2c_{110}(b_{110}(b_{011} - a_{101}) + a_{200}(a_{101} - b_{011}) + b_{101}(b_{020} - a_{110}) - b_{200}a_{011}) + \\
& 2c_{020}(b_{200}(b_{011} - a_{101}) + b_{101}(b_{110} - a_{200})) + 2c_{101}(-b_{200}a_{020} - b_{110}a_{110} + b_{110}b_{020} + \\
& a_{200}(a_{110} - b_{020})) + c_{011}(2b_{200}(b_{020} - a_{110}) - 2b_{110}a_{200} + b_{110}^2 + a_{200}^2))\rho^3\xi \cos^4(\theta) \sin^3(\theta) + \\
& (2c_{200}(-b_{200}a_{020} + b_{110}(b_{020} - a_{110}) + a_{200}(a_{110} - b_{020})) + c_{110}(2b_{200}(b_{020} - a_{110}) + b_{110}^2 + \\
& a_{200}^2 - 2a_{200}b_{110}) + 2c_{020}b_{200}(b_{110} - a_{200}))\rho^4 \cos^5(\theta) \sin^3(\theta) + (b(c_{020}A_{011} + c_{011}A_{020} + \\
& C_{011}a_{020} + C_{020}a_{011})\rho^2\xi + c_1(2a_{020}a_{002} + a_{011}^2)\xi^3 + (2c_{002}a_{020}a_{002} + c_{002}a_{011}^2 + c_{020}a_{002}^2 + \\
& 2c_{011}a_{011}a_{002})\xi^4) \sin^4 + (b(c_{110}A_{020} - c_{020}(B_{020} - A_{110}) - C_{020}(b_{020} - a_{110}) + C_{110}a_{020})\rho^3 + \\
& 2c_1(a_{011}(a_{110} - b_{020}) + a_{020}(a_{101} - b_{011}))\rho\xi^2 + 2(-c_{002}b_{020}a_{011} + c_{002}a_{020}(a_{101} - b_{011}) + \\
& a_{011}(c_{002}a_{110} + c_{110}a_{002} - c_{020}b_{002}) + a_{002}(c_{020}(a_{101} - b_{011}) + c_{101}a_{020}) + c_{011}(-b_{020}a_{002} - \\
& a_{020}b_{002} + a_{110}a_{002} + a_{011}(a_{101} - b_{011})))\rho\xi^3 + c_{101}a_{011}^2\rho\xi^3) \cos(\theta) \sin^4(\theta) + (c_1(2a_{020} \times \\
& (a_{200} - b_{110}) + b_{020}^2 + a_{110}^2 - 2b_{020}a_{110})\rho^2\xi + (c_{002}(2a_{020}(a_{200} - b_{110}) + b_{020}^2 + a_{110}^2 - \\
& 2b_{020}a_{110}) + c_{200}(2a_{020}a_{002} + a_{011}^2) + 2c_{110}(-b_{020}a_{002} + a_{011}(a_{101} - b_{011}) - a_{020}b_{002} + \\
& a_{110}a_{002}) + c_{020}(2a_{002}(a_{200} - b_{110}) + 2b_{002}(b_{020} - a_{110}) - 2b_{101}a_{011} - 2a_{101}b_{011} + b_{011}^2 + a_{101}^2) + \\
& 2c_{101}(a_{020}(a_{101} - b_{011}) + a_{011}(a_{110} - b_{020})) + 2c_{011}(a_{011}(a_{200} - b_{110}) + b_{020}(b_{011} - a_{101}) + \\
& a_{110}(a_{101} - b_{011}) - a_{020}b_{101}))\rho^2\xi^2) \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) + (c_{101}(a_{110}^2 + b_{020}^2) + 2(c_{200}(a_{011}(a_{110} - \\
& b_{020}) + a_{020}(a_{101} - b_{011})) + c_{020}b_{110}(b_{011} - a_{101}) + c_{020}a_{200}(a_{101} - b_{011}) + c_{011}b_{110}(b_{020} - a_{110}) + \\
& c_{110}a_{011}(a_{200} - b_{110}) + c_{110}b_{020}(b_{011} - a_{101}) + c_{020}b_{101}(b_{020} - a_{110}) + c_{101}a_{020}(a_{200} - b_{110}) + \\
& c_{011}a_{200}(a_{110} - b_{020}) + c_{110}a_{110}(a_{101} - b_{011}) - c_{020}b_{200}a_{011} - a_{020}b_{101}c_{110} - a_{110}b_{020}c_{101} - \\
& a_{020}b_{200}c_{011}))\rho^3\xi \cos^3(\theta) \sin^4(\theta) + (c_{200}(a_{110}^2 + b_{020}^2) + c_{020}(a_{200}^2 + b_{110}^2) + 2(c_{200}a_{020}(a_{200} - \\
& b_{110}) - a_{110}b_{020}c_{200} + b_{110}c_{110}(b_{020} - a_{110}) + a_{200}c_{110}(a_{110} - b_{020}) - a_{020}b_{200}c_{110} + c_{020}b_{200}(b_{020} - \\
& a_{110}) - a_{200}b_{110}c_{020}))\rho^4 \cos^4(\theta) \sin^4(\theta) + (b(c_{020}A_{020} + C_{020}a_{020})\rho^3 + 2c_1a_{020}a_{011}\rho\xi^2 + \\
& (c_{011}a_{011}^2 + 2(c_{002}a_{020}a_{011} + a_{011}a_{002}c_{020} + a_{002}a_{020}c_{011}))\rho\xi^3) \sin^5(\theta) + (2c_1a_{020}(a_{110} - \\
& b_{020})\rho^2\xi + ((c_{110}a_{011}^2 + 2(c_{002}a_{020}(a_{110} - b_{020}) + c_{020}a_{002}(a_{110} - b_{020}) + a_{011}c_{020}(a_{101} - b_{011}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{020}c_{011}(a_{101}-b_{011})+a_{011}c_{011}(a_{110}-b_{020})+c_{110}a_{020}a_{002}-a_{020}b_{002}c_{020}+a_{020}a_{011}c_{101}))\rho^2\xi^2) \\
& \times \cos(\theta) \sin^5(\theta) + (c_{011}(a_{110}^2 + b_{020}^2) + 2(c_{110}a_{020}(a_{101} - b_{011}) + c_{020}a_{110}(a_{101} - b_{011}) + \\
& c_{101}a_{020}(a_{110} - b_{020}) + c_{011}a_{020}(a_{200} - b_{110}) + c_{110}a_{011}(a_{110} - b_{020}) + c_{020}b_{020}(b_{011} - a_{101}) + \\
& c_{020}a_{011}(a_{200} - b_{110}) + a_{020}a_{011}c_{200} - c_{020}a_{020}b_{101} - a_{110}b_{020}c_{011}))\rho^3\xi \cos^2(\theta) \sin^5(\theta) + \\
& (c_{110}(a_{110}^2 + b_{020}^2) + 2(c_{200}a_{020}(a_{110} - b_{020}) + a_{020}c_{110}(a_{200} - b_{110}) + c_{020}a_{200}(a_{110} - \\
& b_{020}) + c_{020}b_{110}(b_{020} - a_{110}) - a_{110}c_{110}b_{020} - a_{020}b_{200}c_{020}))\rho^4 \cos^3(\theta) \sin^5(\theta) + (c_1a_{020}^2\rho^2\xi + \\
& (c_{002}a_{020}^2 + c_{020}a_{011}^2 + 2a_{020}(c_{011}a_{011} + c_{020}a_{002}))\rho^2\xi^2) \times \sin^6(\theta) + (c_{101}a_{020}^2 + 2(c_{011}a_{020}(a_{110} - \\
& b_{020}) + c_{020}a_{011}(a_{110} - b_{020}) + a_{020}c_{020}(a_{101} - b_{011}) + c_{110}a_{020}a_{011}))\rho^3\xi \cos(\theta) \sin^6(\theta) + \\
& (c_{200}a_{020}^2 + c_{020}(a_{110}^2 + b_{020}^2) + c_{020}a_{020}(a_{200} - b_{110}) + c_{110}a_{020}(a_{110} - b_{020}) - c_{020}a_{110}b_{020})\rho^4 \\
& \times \cos^2(\theta) \sin^6(\theta) + (c_{011}a_{020}^2 + 2a_{020}a_{011}c_{020})\rho^3\xi \sin^7(\theta) + (c_{110}a_{020}^2 + 2a_{020}c_{020} \times (a_{110} - \\
& b_{020}))\rho^4 \cos(\theta) \sin^7(\theta) + c_{020}a_{020}^2\rho^4 \sin^8(\theta)].
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Alavez-Ramirez J, Blé G, Llibre J, Lopez-Lopez J. *On the maximum number of limit cycles of a class of generalized Liénard differential systems*. Int J Bifurcation Chaos, 2012; 22 : 1250063-14.
- [2] Andronov A.A, Leontovitch E.A and Gordon II. Mayer A.G. *Etude qualitative des systèmes dynamiques d'ordre deux*. En Russe, Nouka Moxau, 1966.
- [3] Andronov A.A, Witt A. *Sur la théorie mathématiques des auto oscillations*. C.R.Acad. Sct. Paris, 1930 ; 190 : 256-258.
- [4] Andronov A.A, Witt A.A and Khaikins. *Theory of oscillators*. Pergamon Press, 1966.
- [5] Blows TR, Llyod NG. *The number of small- amplitude limit cycles of Liénard equation*. Math Proc Camb Phil Soc, 1984 ; 95 : 359-66.
- [6] N.N. Bogoliubov. *On some statistical methods in mathematical physics*.Izv. vo Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev, 1945.
- [7] N.N. Bogoliubov, N. Krylov. *The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations*. Publ. 8 of the Ukrainian Acad. Sci. Kiev, 1934.
- [8] Bogoliubov N.N and Mitropolsky Yu. AN. *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*. Gordon and Breach, New York, 1961.
- [9] Buică A, Llibre J. *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*. Bull Sci Math, 2004 ; 128 : 7-22.
- [10] Buzzi C.A. Llibre J and Silva P.R.da. *3-Dimensional Hopf bifurcation via averaging theory*. Discrete Contin. DYN. Syst, 2007 ; 17 : 529-540.
- [11] Chengzhi Li and Llibre J. *Uniqueness of limit cycles for Liénard differential equations of degree four*. J Differ Equ 2012 ; 252 : 3142-62.
- [12] Christopher C.J and Lynch S. *Small amplitude limit cycle bifurcation for Liénard systems with quadratic or cubic damping and restoring forces*. Nonlinearity, 1999 ; 12 : 1099-1112.
- [13] Lobry C. *La théorie des bifurcations dynamiques*. EPI MERE Montpellier, 2010.

-
- [14] Dulac H. *Sur les cycles limites*. Bull. Soc. Math. France, 1923 ; 51 : 45-188.
- [15] Dumortier F, Li C. *Quadratic Liénard equations with quadratic damping*. J Differ Equ, 1997 ; 139 : 41-59.
- [16] Dumortier F, Rousseau C. *Cubic Liénard equations with linear damping*. Non-linearity, 1990 ; 3 : 1015-39.
- [17] Ecalle J. *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. Paris, France Hermann, 1992.
- [18] Ilyashenko Y. *Finiteness theorems for limit cycles*. Providence, RI : American Math. Society, 1991.
- [19] Irisson J. *L'analyse de bifurcations*. Ecole pratique des Hautes etudes, UMR-CNRS 8046.
- [20] Gasull A and Torregrosa J. *Small-amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity*. J Differ Equ 1998 ; 159 : 1015-39.
- [21] Giné J, Grau M and Llibre J. *Averaging theory at any order for computing periodic orbits*. Phys, 2013 ; 250 : 58-65.
- [22] Guckenheimer J. *On a codimension two bifurcation*. Lecture notes in Math, 1980 ; 898 : 99-142.
- [23] Guckenheimer J, Holmes P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Revised and corrected reprint of the 1983 original. Applied Mathematical Sciences, 42. New York : Springer-Verlag, 1990.
- [24] Krylov N. M et Bogoliubov N. N. *Introduction à la mécanique nonlinéaire : Les méthodes approchées et asymptotiques*. vol. 1-2 of Ukrainiska Akad. Nauk Inst. Mec. Paris : Chaire de Phys. Math. Annales, 1937.
- [25] Kuznetsov YA. *Elements of applied bifurcation theory*. Third edition. Applied Mathematical Sciences, 112. New York : Springer-Verlag, 2004.
- [26] Liénard A. *Étude des oscillations entretenues*. Revue Gén' Électro, 1928 ; 23 : 946-54.
- [27] Lins A, de Melo W, Pugh CC. *On Liénard's equation*. Lecture notes in mathematics. Berlin : Springer, 1977 ; 597 : 335-57.
- [28] Llibre J. *Periodic Solutions Via Averaging Theory*. 2014
- [29] Llibre J, Makhlof A, Badi S. *3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory of second order*. Discrete Contin Dynam Syst 2009 ; 25 : 1287-1295.
- [30] Llibre J, Novaes D.D and Teixeira M.A . *Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree*. IOP Pub Ltd, London Mathematical Society. 2014 ; 27 : 563-583.
- [31] Llibre J, Mereu AC, Teixeira M A. *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations*. Math Proc Cambridge Philos Soc 2010 ; 148 : 363-383.

-
- [32] Llibre J, Valls C. *On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems*. Proc A : R Soc 2012 ; 468 : 2347-60.
- [33] Llibre J, Valls C. *Limit cycles for a generalization of polynomial Liénard differential systems*. Chaos, Solitons Fractals 2013 ; 46 : 65-74.
- [34] Lloyd N.G. *Degree Theory*. Cambridge University Press, 1978.
- [35] Lloyd N.G. Lynch S. *Small-amplitude limit cycles of certain Liénard systems*. Proc R Soc Lond Ser A 1988 ; 418 : 199-208.
- [36] Lynch S. *Limit cycles of generalized Liénard equation*. Appl Math Lett 1995 ; 8 : 15-7.
- [37] Lynch S. and Christopher C. *Limit cycles in highly non-linear differential equations*. J. Sound Vib, 1999 ; 224 : 505-517.
- [38] Marsden JE, McCracken M. *The Hopf bifurcation and its applications*. Applied Mathematical Sciences, New York : Springer-Verlag, 1976.
- [39] Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [40] Poincaré H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, (première partie)*, Journal Mathématique, 1881.
- [41] Poincaré H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Vol I Paris, 1892.
- [42] Roseau M. *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*. (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966 ; 8.
- [43] Rychkov GS. *The maximum number of limit cycle of the system $\dot{x} = y - a_1x^3 - a_2x^5$, $\dot{y} = -x$ is two*. DifferUravn 1975 ; 11 : 380-91.
- [44] Sanders JA, Verhulst F. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Applied Mathematical Sciences, New York : Springer-Verlag, 1985.
- [45] Van der Heijden, G. *Hopf Bifurcation*. <http://www.ucl.ac.uk/ucesgvd/hopf.pdf>.
- [46] Van der Pol B. *Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance*. London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag, 1927 ; 3.
- [47] Verhulst F. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. University, Berlin : Springer-Verlag, 1996.
- [48] Wang Y. and Jing Z. *Cubic Liénard equations with quadratic damping(II)*. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2002 ; 18 : 103-116.
- [49] Xianwu Z. *Remarks on the uniqueness of limit cycles*. Kexue Tongbao, 1983 ; 28 : 452-455.
- [50] Yu P, Han M. *Limit cycles in generalized Liénard systems*. Chaos solutions Fract, 2006 ; 30 : 1048-68.
- [51] Zhang Z. *On the existence of exactly two limit cycles for the Liénard equation*. Acta Math. Sinica, 1981 ; 24 : 710-716.