

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

Faculté des Sciences

Année : 2018

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en MATHÉMATIQUES

*Systemes Dynamiques Discrets à Comportement
Complexe*

Option : Mathématiques et Applications

Présentée Par:

Yousfi Abla

DIRECTEUR DE THÈSE : Ferchichi Mohamed Reda M.C.A. U.B.M. ANNABA

Devant le jury :

PRESIDENT : Djellit Ilhem Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Laouar Abdelhamid Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Ellaggoune Fateh Prof. U. 8 Mai 45 GUELMA

EXAMINATEUR : Badi Sabrina M.C.A. U. 8 Mai 45 GUELMA

EXAMINATEUR : Hadidi Elbahi M.C.A. U.B.M. ANNABA

Résumé

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude des systèmes dynamiques modélisés par des applications quadratiques non inversibles bidimensionnelles T . La caractéristique de non-inversibilité se traduit par le fait qu'il existe des zones notées Z_i dans le plan de phases pour lesquelles un point peut posséder zéro, un ou plusieurs antécédents de rang un. Ces différentes régions sont séparées par des singularités appelées Lignes Critiques (LC). Ces dernières sont un outil mathématique, qui intervient souvent dans l'étude des propriétés et bifurcations de bassins d'attraction d'ensembles attractants et d'attracteurs, ainsi que les mécanismes qui transforment une frontière régulière de bassin en une frontière fractale. Ces bifurcations seront étudiées, pour le cas de transformations de type $(Z_0 - Z_2)$.

On s'est intéressé aussi à l'étude de l'apparition et l'évolution de deux attracteurs d'un système dynamique défini par une application non inversible bidimensionnelle de type $(Z_1 < Z_3)$. Le premier étant un attracteur de type ensemble de Cantor situé sur une droite invariante. Le second est un cycle d'ordre deux de courbes fermées (invariantes par T^2).

La dernière partie est consacrée à l'étude de certains plans paramétriques (a, b_0, c) , où b_0 est un réel quelconque fixé. On a montré qu'il existe des symétries par rapport à l'origine, à la première bissectrice et à la deuxième bissectrice. On a aussi caractérisé, au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker, les zones d'existences de cycles attractifs (ou langues d'Arnold).

Mots Clés : Système dynamique discret, chaos, attracteur, bassin d'attraction, ligne critique.

Abstract

In this thesis, we are interested by the study of dynamical systems modelled by two dimensional quadratic non-invertible map. The character of noninvertibility is translated by the fact that regions noted Z_i in the plane of phases for which, a point can have zero, one or more antecedents of rank one. These various areas are separated by singularities called Critical Lines (LC). The latter are a mathematical tool, which often intervenes in the study of the properties and bifurcations of basins of attraction of attractive sets and attractors. As well as the mechanisms that transform a regular basin boundary into a fractal boundary. These bifurcations will be studied for the case of transformations of type $(Z_0 - Z_2)$.

We are interested also by the study of the appearance and evolution of two attractors of a dynamical system defined by a quadratic polynomial noninvertible map of type $(Z_1 < Z_3)$. The first is a Cantor-type attractor located on an invariant straight line. The second is a closed curves cycle of period 2 (invariant by T^2).

The last part is devoted to the study of some parametric planes (a, b_0, c) , where b_0 is fixed any real. We proved that there are symmetries relative to the origin, the first bisector and the second bisector. We characterized, in the neighborhood of a bifurcation of Neimark-Sacker, the zones of existences of attractive cycles (or Arnold tongues).

Key Words : Discrete dynamical system, chaos, attractors, basins of attraction, critical lines.

ملخص

في هذه الأطروحة، نحن مهتمون بدراسة الأنظمة الديناميكية الممثلة بدوال تربيعية غير عكوسة ثنائية الأبعاد (في \mathbb{R}^2). تترجم عدم قابلية الدالة للانعكاس بوجود مناطق يرمز لها ب: Z_i في الفضاء، بحيث كل نقطة لها صفر، واحد أو الكثير من السوابق ذو الرتبة واحد. يتم فصل هذه المناطق المختلفة عن طريق طبيعة حرجة تسمى خطوط حرجة (LC). هذه الأخيرة هي أداة في الرياضيات، تتدخل غالبا في دراسة خصائص و مفارقات أحواض الجذب و مجموعات الجذب والعنصر الجاذب، والآليات التي تحول حدود حوض الجذب من منتظمة الى غير منتظمة. وتم دراسة هذه المفارقات، في حالة التحولات من نوع (Z_0-Z_2) .

وقد درسنا أيضا ظهور وتطور العنصر الجاذب لنظام ديناميكي معرف بتطبيق ثنائي الأبعاد غير قابل للانعكاس من النوع $(Z_1 < Z_3)$. الأول هو عنصر جذاب من نوع مجموعة كانتور تقع على خط ثابت. والثاني هو ثنائي من منحنيات مغلقة (ثابتة بالنسبة ل: T^2).

وخصص الجزء الأخير لدراسة فضاء المتغيرات (a, b_0, c) ، بحيث b_0 عدد حقيقي كفي ثابت، أظهرنا أن هناك تناظر بالنسبة للمبدأ، المنصف الأول و المنصف الثاني، تميزت به بجوار مفارقة نيمارك - ساكر، حيث توجد مناطق وجود دورات جذابة التي تسمى ألسنة أرنولد.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier *Allah*, qui m'a donné force, courage et patience d'accomplir ce modeste travail.

Les travaux de thèse présentés ont été réalisés au Laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation d'Annaba. Ils ont été rendus possibles grâce à l'accueil et au soutien du directeur de laboratoire le Professeur **Djellit Ali** ce qui m'a permis d'accomplir ma thèse dans de bonnes conditions.

Je tiens à remercier sincèrement mon directeur de thèse, Docteur **Ferchichi Mohamed Reda**. Ses conseils m'ont toujours été d'une aide précieuse. J'ai beaucoup appris en travaillant avec lui.

Je remercie Madame **Djellit Ilhem**, Professeur à l'université Badji Mokhtar - Annaba pour avoir accepté de présider ce jury, pour son aide scientifique et ses conseils.

Je remercie Monsieur **Laouar Abdelhamid**, Professeur à l'université Badji Mokhtar - Annaba, d'avoir accepté d'être membre de ce jury en tant qu'examineur de ma thèse.

Je remercie Monsieur **Ellaggoune Fateh**, Professeur à l'université 8 Mai 1945 - Guelma, pour avoir lu ma thèse et accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie Madame **Badi Sabrina**, Maître de conférences (A) à l'université 8 Mai 1945 - Guelma, pour l'intérêt qu'elle a accordé à ce travail et pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie Monsieur **Hadidi Elbahi**, Maître de conférences (A) à l'université Badji Mokhtar - Annaba, d'avoir examiné ce travail et accepté d'être membre de ce jury.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes parents et mon époux, sans leurs sacrifices je ne serais pas devenue celle que je suis aujourd'hui.

Mes vifs remerciements vont au Chef du Département de Mathématiques ainsi qu'à tous les ami(e)s.

Enfin, merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Dédicace

Je dédie ce travail

- A mon époux Hakim, pour la patience et le soutien dont il a fait preuve pendant toute la durée de cette thèse.

- A mes frères, Faicel et Younes.

- A toute ma famille et ma belle famille.

-A mes parents, Une profonde marque de reconnaissance.

”Les bienfaits que nous avons reçus de nos parents sont les plus grands de tous” Socrate.

TABLE DES MATIÈRES

1	Notions générales sur les systèmes dynamiques	1
1.1	Définitions de base	1
1.2	Attracteurs et attracteurs chaotiques	2
1.2.1	Attracteur	2
1.2.2	Attracteur chaotique	3
1.3	Systèmes dynamiques discrets et singularités	5
1.3.1	Singularités	5
1.3.2	Stabilité des singularités de dimension 0	7
1.3.3	Ensembles stable et instable	8
1.4	Bifurcations fondamentales	11
1.5	Bifurcations homoclines et hétéroclines	12
2	Bifurcations de bassins d'attraction dans le cas d'applications bidimensionnelles de type $(Z_0 - Z_2)$	15
2.1	Définitions et propriétés générales	16
2.1.1	Lignes critiques	16
2.1.2	Classification des transformations non inversibles (TNI)	17
2.1.3	Bassin d'attraction	18
2.2	Application non inversible de type $(Z_0 - Z_2)$	20

2.3	Bifurcations de bassins d'attraction	23
2.4	Exemple d'une bifurcation de bassin d'attraction avec agrégation d'îlots	27
3	Etude d'une application non inversible de type $(Z_0 - Z_2)$	34
3.1	Construction de l'ensemble de Cantor	34
3.2	Lignes critiques et points fixes de T	35
3.2.1	Points fixes de T	37
3.3	Attracteur sur des droites invariantes	37
3.4	Frontière fractale des bassins d'attraction	46
4	Etude du plan de phases et de plans paramétriques d'une application non-inversible de type $(Z_1 < Z_3)$	53
4.1	Lignes critiques et points fixes de T	54
4.1.1	Lignes critiques	54
4.1.2	Points fixes de T	56
4.2	Attracteurs sur une droite invariante	57
4.3	Courbes fermées (invariantes par T^2)	66
4.4	Symétries dans les plans paramétriques (a, b_0, c)	76
4.5	Etude des plans paramétriques (a, b_0, c) au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker (langues d'Arnold)	85

Introduction

L'étude de la dynamique chaotique des systèmes non-linéaires remonte à la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, début du $XX^{\text{ème}}$ siècle avec, entre autres, les travaux de H. Poincaré et A. M. Lyapounov, essentiellement en liaison avec la résolution de problèmes de mécanique. L'étude des systèmes dynamiques non linéaires discrets a fait l'objet d'un nombre considérable de travaux menés par plusieurs scientifiques, parmi lesquelles on citera le livre de I. Gumowski & C. Mira [14]. La non-linéarité du système peut conduire à des comportements complexes très sensibles aux conditions initiales; autrement dit, une dynamique chaotique.

L'objet de cette thèse consiste à étudier des systèmes dynamiques bidimensionnels non linéaires modélisés par des applications non inversibles. Ce type d'applications intervient en tant que modèles de systèmes dynamiques, dans plusieurs domaines, comme l'économie, la biologie, l'électronique, la théorie du signal, etc...

La non-inversibilité d'applications modélisant des systèmes dynamiques discrets est génératrice de comportements complexes plus variés, d'un point de vue dynamique, que ceux des systèmes définis par des applications inversibles. Ces applications non inversibles partagent le plan de phases en régions notées $Z_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ pour lesquelles, un point possède i antécédents de premier rang. Ces différentes régions sont séparées par des singularités appelées Lignes Critiques LC . Cette notion a été introduite pour la première fois par C. Mira en 1964 [21]. C'est une généralisation de la notion de points critiques (extremums locaux) dans le cas unidimensionnel. L'équivalent des lignes critiques dans le cas des systèmes dynamiques de dimension supérieure à deux, sont les surfaces ou hypersurfaces critiques.

On peut considérer le plan de phase, dans le cas non inversible, comme étant feuilleté, où chaque feuillet est associé à une détermination inverse de l'application définissant le système. Les lignes critiques constituent le lieu des points où les différents feuillets se joignent. Depuis 1969, de nombreux travaux ont développé le rôle des lignes critiques pour expliquer les bifurcations intervenant sur la structure des bassins d'attraction; autrement dit, expliquer les

changements qualitatifs de la structure des bassins d'attraction d'attracteurs du système, lorsqu'un paramètre de ce système évolue continûment.

Parmi les bifurcations où les lignes critiques interviennent, on citera les travaux de C. Mira, J. C. Roubellat et I. Gumowski [26], [13] pour les bifurcations du type "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin non connexe"; A. Barugola, J.C. Cathala et C. Mira [3], [7] pour les bifurcations du type "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe"; ainsi que les travaux de C. Mira et D. Fournier-Prunaret [5] pour l'étude de la fractalisation des bassins d'attraction. Nous citerons les travaux C. E. Frouzakis, L. Gardini, I. G. Kevrekidis, G. Millerioux et C. Mira [13], pour le rôle des lignes critiques dans les bifurcations d'ensembles invariants, telles les courbes fermées invariantes, les variétés stables et instables.

Cette thèse contient quatre chapitres, et est organisée de la manière suivante :

Dans le **premier chapitre**, on a rappelé les principales définitions et propriétés générales spécifiques aux systèmes dynamiques continus et discrets et quelques notions de base concernant les singularités de ces systèmes, ainsi que leurs propriétés dont on aura besoin dans les chapitres suivants.

Dans le **deuxième chapitre**, on a étudié les propriétés liées aux bifurcations de bassins d'attraction pour des applications non inversibles bidimensionnelles. On a rappelé les deux propositions fondamentales sur les bifurcations de bassins de types "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin non connexe" et "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe", ainsi que les mécanismes qui transforment une frontière régulière de bassin en une frontière fractale; c'est le "phénomène de fractalisation". Ces bifurcations ont été étudiées pour le cas d'une application non inversible de type $(Z_0 - Z_2)$, qui est un cas basique pour d'autres types d'applications non inversibles plus compliquées.

Dans le **troisième chapitre**, on a étudié l'apparition et l'évolution d'un attracteur d'un système dynamique défini par une application non inversible polynômiale quadratique bidimensionnelle T de type $(Z_0 - Z_2)$. L'attracteur de l'application T est cyclique d'ordre 2 de type ensemble de Cantor situé sur

deux droites invariantes par T^2 . On a étudié aussi des bifurcations de bassins d'attraction et les mécanismes qui transforment une frontière régulière de bassin en une frontière fractale.

Dans le **quatrième chapitre**, on a étudié en première partie, l'apparition, l'évolution et le voisinage de deux attracteurs d'un système dynamique défini par une application T polynômiale quadratique bidimensionnelle de type $(Z_1 < Z_3)$. Le premier étant un attracteur de type ensemble de Cantor situé sur une droite invariante. Ainsi, il nous a suffi d'étudier la restriction de T à cette droite invariante. Le second est un cycle d'ordre deux de courbes fermées (invariantes par T^2). On a montré, par une approche numérique, que la structure topologique de la région proche de cet attracteur est dépendante de l'évolution des ensembles stables et instables (homoclinicité) d'un cycle d'ordre deux de points col localisé dans cette région.

En deuxième partie, on a étudié certains plans paramétriques (a, b_0, c) , où b_0 est un réel quelconque fixé. On a montré qu'il existe des symétries par rapport à l'origine, à la première bissectrice et à la deuxième bissectrice. On a caractérisé, au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker, les zones d'existences de cycles attractifs (ou langues d'Arnold).

CHAPITRE 1

Notions générales sur les systèmes dynamiques

Dans ce chapitre nous rappelons les principales définitions et propriétés spécifiques aux systèmes dynamiques continus et discrets.

1.1 Définitions de base

Définition 1.1.1 *On appelle système dynamique, un triplet (X, \mathbb{T}, f) où X est une variété topologique, \mathbb{T} est l'ensemble \mathbb{R}, \mathbb{Z} ou \mathbb{N} , et f est une application continue de $\mathbb{T} \times X$ dans X , vérifiant :*

$$f(0, x) = x \text{ et } f(t_2, f(t_1, x)) = f(t_1 + t_2, x).$$

X, \mathbb{T} et f sont appelés respectivement espace des phases (ou espace d'état), espace temps et flot.

Dans toute la suite on supposera que X est un sous ensemble compact de \mathbb{R}^n , ou \mathbb{R}^n lui même.

Définition 1.1.2 *On appelle trajectoire ou orbite d'un point x de l'espace des phases X , l'ensemble des points $\{f(t, x) \mid t \in \mathbb{T}\}$. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ la trajectoire*

correspond à un système dynamique dit continu; si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} la trajectoire correspond à un système dynamique dit discret.

Définition 1.1.3 On appelle ensemble limite positif d'un point x de l'espace des phases X , l'ensemble :

$$\omega(x) = \{y \in X, \forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \exists t \geq t_0 : d(y, f(t, x)) < \varepsilon\} \quad (1.1)$$

où d est une distance sur X .

On appelle bassin d'attraction d'un ensemble $A \subset X$, l'ensemble :

$$D(A) = \{x \in X : \omega(x) \subset A\} \quad (1.2)$$

Définition 1.1.4 Deux applications $f, g : X \rightarrow X$ de classe C^r sont dites C^k -conjuguées ($k \leq r$), s'il existe un C^k -difféomorphisme $h : X \rightarrow X$, tel que

$$h \circ f = g \circ h.$$

f et g sont dites topologiquement conjuguées, si elles sont C^0 -conjuguées. Des applications topologiquement conjuguées sont complètement équivalentes par rapport à leurs dynamiques.

1.2 Attracteurs et attracteurs chaotiques

Dans un système dynamique, il peut exister des singularités plus générales que les points fixes et les cycles; ce sont les attracteurs. Plusieurs définitions ont été proposées pour ce type de singularités [28], [26], [14]. Dans cette thèse, on se suffira de la définition donnée par J. Milnor [18] et celle donnée dans la référence [22].

1.2.1 Attracteur

Définition 1.2.1 Soit (X, \mathbb{T}, f) un système dynamique et soit μ la mesure de Lebesgue dans X . Un sous ensemble fermé A de X est dit attracteur au

sens de Milnor, si

- i) $\mu(D(A)) > 0$, où $D(A)$ est le bassin d'attraction de A .
- ii) Pour tout sous ensemble fermé A' strictement inclus dans A , on a : $\mu(D(A) \setminus D(A')) > 0$.

Remarque 1.2.1 Lorsque le sous ensemble fermé A vérifie uniquement la condition (i), A est appelé attracteur faible.

De la définition précédente, il résulte que l'union finie d'attracteurs est encore un attracteur, et que la fermeture d'une union infinie d'attracteurs est un attracteur. Pour rapprocher la définition de l'idée intuitive de minimalité d'un attracteur, J. Milnor utilise la notion suivante :

Définition 1.2.2 A est un attracteur minimal au sens de Milnor, si A est un attracteur au sens de Milnor et s'il ne contient aucun sous-ensemble strict fermé A' , tel que $\mu(D(A'))$ soit strictement positive.

Définition 1.2.3 Soit (X, \mathbb{N}, f) un système dynamique discret. Un sous ensemble fermé invariant A de X est dit attracteur, si

- i) il existe un voisinage U de A , tel que $f|_X(U) \subset U$
- ii) $\forall x \in U, f(n, x) \rightarrow A$ quand $n \rightarrow +\infty$
- iii) Pour deux sous-ensembles non vides quelconques V et W de A , il existe un entier k strictement positif tel que $f(k, V) \cap W \neq \emptyset$ (transitivité topologique de A).

L'hypothèse (iii) est équivalente à la suivante :

- (iv) Il existe un point x appartenant à A , tel que son orbite est dense dans A .

1.2.2 Attracteur chaotique

Il existe des systèmes dynamiques déterministes très simples, pour lesquels deux trajectoires issues de points de départ dont la différence est trop petite pour être observable, se séparent après un certain temps. Leur distance croît de façon exponentielle, jusqu'à ce que toute mémoire sur le point de départ soit

perdue. On appelle ce phénomène *sensibilité aux conditions initiales*. Cette propriété du système est caractérisée par des coefficients, appelés *exposants de Lyapounov*, dont on rappellera la définition dans le cas d'un système dynamique discret et ceci pour faciliter la compréhension de ces exposants.

Définition 1.2.4 Soit $(\mathbb{R}^n, \mathbb{N}, f)$ un système dynamique discret et T l'itération dans \mathbb{R}^n générée par le flot f , ($T(x) = f(1, x)$), que nous supposons différentiable. Soit $JT(x)$ la matrice jacobienne de T au point x . Soit $JT^m(x_0)$ la matrice jacobienne de la composée m fois de T au point x_0

$$JT^m(x_0) = JT(x_{m-1}) \cdot JT(x_{m-2}) \cdot \dots \cdot JT(x_1) \cdot JT(x_0)$$

où $x_i = T^i(x_0)$. Notons les valeurs absolues des valeurs propres de $JT^m(x_0)$ en ordre décroissant par

$$J_1(m, x_0) \geq J_2(m, x_0) \geq \dots \geq J_n(m, x_0).$$

Les exposants de Lyapounov de la trajectoire issue du point x_0 sont définis par :

$$\lambda_i(x_0) = \ln \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (J_i(m, x_0))^{\frac{1}{m}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et on a $\lambda_1(x_0) \geq \lambda_2(x_0) \geq \dots \geq \lambda_n(x_0)$.

On dit que l'on a la propriété de sensibilité aux conditions initiales, si au moins un des exposants de Lyapounov est strictement positif.

Définition 1.2.5 Un attracteur est dit chaotique, s'il a la propriété de sensibilité aux conditions initiales pour presque tout point le constituant (c'est-à-dire sauf pour un ensemble de points de mesure de Lebesgue nulle).

Généralement un attracteur chaotique est un fractal. Ceci résulte du caractère borné de l'attracteur, des phénomènes de contractions (exposants de Lyapounov négatifs) et d'étirements (exposants de Lyapounov positifs), qui conduisent à un pliage complexe et un feuilletage générant une structure frac-

tale de l'attracteur chaotique. Sa dimension de Lyapounov [21], qui est une dimension fractale, est alors non entière.

1.3 Systèmes dynamiques discrets et singularités

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) est complètement déterminé par l'application T de X dans X :

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

où

$$T^n(x) \equiv \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T(x)}_{n \text{ fois}} = f(n, x), \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } T^0 = id.$$

L'application T est appelée transformation ponctuelle, itération ou récurrence. Si le système dynamique discret est inversible, l'égalité précédente reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Le point x_{n+1} est le point conséquent de rang 1 du point x_n , et inversement x_n est appelé antécédent de rang 1 du point x_{n+1} .

Lorsque l'application T est au moins de classe C^1 sur X et a une seule détermination inverse T^{-1} (c'est-à-dire inversible), c'est un difféomorphisme. Lorsque l'application T n'a pas ou a plusieurs déterminations inverses (c'est-à-dire non inversible), c'est un endomorphisme. Dans ce cas, chaque point x_{n+1} peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents de rang un.

1.3.1 Singularités

Soit T une transformation ponctuelle dans $X \subseteq \mathbb{R}^n$, définissant un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) . On distingue deux types de singularités de dimension zéro, sur l'espace des phases X .

Singularités de dimension 0 :

Définition 1.3.1 : Un point fixe x^* est un point de l'espace des phases X vérifiant :

$$x^* = T(x^*) \quad (1.3)$$

Définition 1.3.2 : Un Cycle d'ordre k (ou k -cycle) est un ensemble de k points (x_1^*, \dots, x_k^*) de l'espace des phases X , vérifiant :

$$\begin{cases} x_{i+1}^* = T(x_i^*), i = 1, \dots, k-1 \\ x_1^* = T(x_k^*) \\ x_i^* = T^k(x_i^*), i = 1, \dots, k \\ x_i^* \neq T^h(x_i^*), i = 1, \dots, k \quad \text{et} \quad 1 \leq h < k \end{cases} \quad (1.4)$$

Chaque point x_i^* d'un cycle d'ordre k est un point fixe de T^k . Un cycle d'ordre k est aussi caractérisé par l'ordre d'échange de ses k points x_i^* par applications successives de T . Il peut être désigné par le formalisme (k, j) , où k représente l'ordre du cycle et j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle [22]. Un cycle d'ordre $k = 1$ est évidemment un point fixe de T .

Singularité de dimension 1 :

Lorsque la dimension de l'espace des phases X est supérieure à un, il peut également apparaître des singularités dites de dimension un, qui sont les courbes invariantes par la transformation T ou T^k .

Définition 1.3.3 Dans le plan de phases ($X = \mathbb{R}^2$), une courbe définie par l'équation $G(x, y) = C$, C une constante, est invariante par la transformation T ou T^k , si elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$G(T(x, y)) = G(x, y) \quad \text{ou} \quad G(T^k(x, y)) = G(x, y).$$

1.3.2 Stabilité des singularités de dimension 0

La nature stable ou instable d'un cycle d'ordre k , pour le cas d'une transformation T différentiable, est caractérisée par les valeurs propres de la matrice Jacobienne de T^k prise en un point quelconque de ce cycle. On appelle ces valeurs propres *les multiplicateurs* du cycle.

A/ Si la transformation ponctuelle T est unidimensionnelle ($\dim X = 1$), le multiplicateur S d'un point fixe ou d'un k -cycle est égale à :

$$S = \frac{dT}{dx}(x^*), \text{ pour } x^* \text{ un point fixe de } T$$

$$\text{et } S = \prod_{i=1}^k \frac{dT}{dx}(x_i^*), \text{ pour } (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \text{ un cycle d'ordre } k \text{ de } T.$$

Un point fixe ou un cycle d'ordre k est dit attractif (asymptotiquement stable) si $|S| < 1$, et répulsif (instable) si $|S| > 1$.

B/ Si la transformation ponctuelle T est bidimensionnelle ($\dim X = 2$), un point fixe x^* ou un cycle d'ordre k , $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ possède deux multiplicateurs S_1 et S_2 qui sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne de T prise au point fixe x^* ou de la matrice Jacobienne de T^k prise en un point quelconque du cycle.

Selon les valeurs prises par S_1 ou S_2 avec $|S_i| \neq 1, i = 1, 2$; on définit différentes types de points fixes ou cycles (*Fig. 1.1*) :

1) Point fixe (ou cycle) **Col** : si S_1 et S_2 sont réels et

$$|S_1| < 1 < |S_2|.$$

Un col est toujours instable.

2) Point fixe (ou cycle) **Noeud** : si S_1 et S_2 sont réels, est un noeud attractif (resp. répulsif) si

$$|S_i| < 1, i = 1, 2 (\text{resp. } |S_i| > 1).$$

3) Point fixe (ou cycle) **Foyer** : si S_1 et S_2 sont complexes conjugués,

$$S_1 = \rho e^{-i\theta}, S_2 = \rho e^{i\theta}.$$

Un foyer est Attractif si : $\rho < 1$ et Répulsif si : $\rho > 1$.

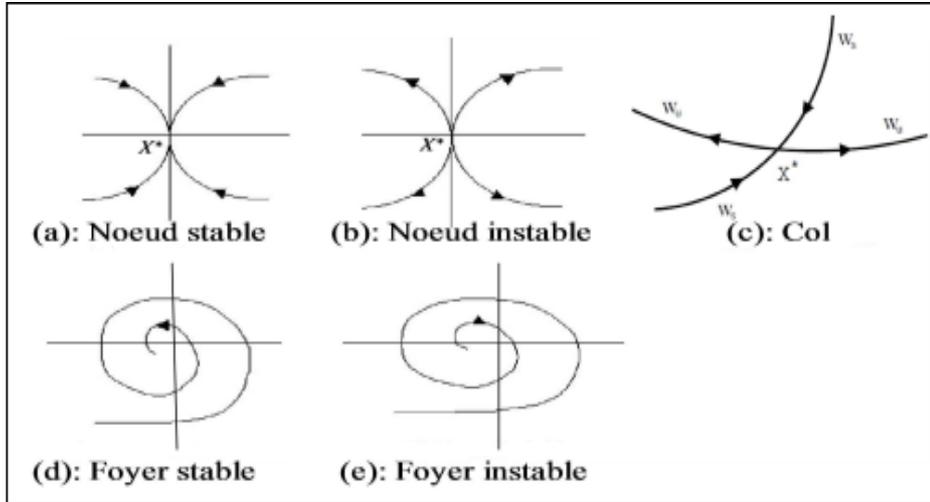


Fig.1.1. Trajectoires au voisinage d'un point fixe.

C/ Si la récurrence T est n -dimensionnelle ($\dim X = n$), un point fixe x^* ou un cycle d'ordre k , $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ possède n multiplicateurs $S_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Un point fixe ou un cycle est dit asymptotiquement stable ou attractif si $|S_i| < 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$, Il est dit instable ou répulsif, si au moins un de ses multiplicateurs S_i est tel que $|S_i| > 1$.

1.3.3 Ensembles stable et instable

Soit T une transformation ponctuelle dans \mathbb{R}^p définissant un système dynamique discret $(\mathbb{R}^p, \mathbb{N}, f)$, et soit x^* un point fixe répulsif de T et U un voisinage de x^* .

Définition 1.3.4 : On appelle $W_{loc}^i(x^*)$ ensemble instable local ou variété instable locale (c'est-à-dire dans U) de x^* , l'ensemble des points de U ayant une séquence d'antécédents successifs dans U , qui converge vers x^* . On appelle $W^i(x^*)$ ensemble instable global de x^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers x^* . Ces ensembles s'écrivent :

$$\begin{aligned} W_{loc}^i(x^*) &= \{x \in U : x_{-n} \in T^{-n}(x) \rightarrow x^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{-n} \in U\} \\ W^i(x^*) &= \{x \in \mathbb{R}^p : x_{-n} \in T^{-n}(x) \rightarrow x^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^i(x^*)). \end{aligned}$$

Les propriétés qui suivent, découlent de la définition de l'ensemble instable global :

1- $W^i(x^*)$ est invariant par rapport à T : $T[W^i(x^*)] = W^i(x^*)$, (Fig. 1.2).

2- Si T est non inversible, en général $W^i(x^*)$ n'est pas invariant par rapport à T^{-1} et on a :

$$T^{-1}[W^i(x^*)] \supseteq W^i(x^*).$$

L'invariance de $W^i(x^*)$ par rapport à T^{-1} a lieu, lorsque T est inversible.

Définition 1.3.5 Soit x^* un point fixe de T , attractif ou répulsif. On appelle $W_{loc}^s(x^*)$ ensemble stable local ou variété stable locale (c'est-à-dire dans U) de x^* , l'ensemble des points de U dont la séquence d'images successives appartient à U et converge vers x^* . On appelle $W^s(x^*)$ ensemble stable global de x^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p dont la séquence d'images successives converge vers x^* . Ces ensembles s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 W_{loc}^s(x^*) &= \{x \in U : x_n = T^n(x) \rightarrow x^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in U\} \\
 W^s(x^*) &= \{x \in \mathbb{R}^p : x_n = T^n(x) \rightarrow x^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(W_{loc}^s(x^*)).
 \end{aligned}$$

Les propriétés qui suivent, découlent de la définition de l'ensemble stable global :

1- $W^s(x^*)$ est invariante par rapport à T^{-1} : $T^{-1}[W^s(x^*)] = W^s(x^*)$ (Fig. 1.2).

2- Si T est non inversible, en général $W^s(x^*)$ n'est pas invariant par rapport à T et on a :

$$T[W^s(x^*)] \subseteq W^s(x^*).$$

L'invariance de $W^s(x^*)$ par rapport à T a lieu, lorsque T est inversible.

Remarque 1.3.1 1. Si x^* est un point fixe attractif, l'ensemble stable global est son bassin d'attraction.

2. Si T est une application inversible, les ensembles stables et instables globaux sont des variétés.

3. Dans le cas d'un point fixe x^* de type noeud instable ou foyer instable, l'ensemble stable global de x^* , lorsque T est inversible, se réduit à x^* lui même. Lorsque T est non inversible, l'ensemble stable local de x^* se réduit à x^* lui même et l'ensemble stable global de x^* est constitué de tous les antécédents de tout rang de x^* . Ceci s'écrit :

$$W^s(x^*) = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(x^*) \text{ et } \forall x \in W^s(x^*) : \exists m \in \mathbb{N} : T^m(x) = x^*.$$

4. Les définitions des ensembles stable et instable d'un cycle d'ordre k , se déduisent des définitions précédentes, en considérant les points du cycle comme des points fixes de T^k .

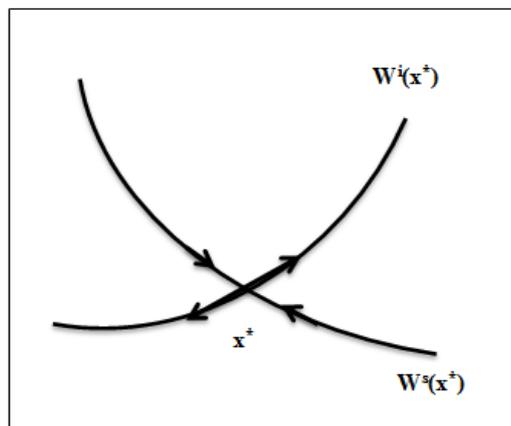


Fig. 1.2. Courbe invariante d'un point fixe col

1.4 Bifurcations fondamentales

L'étude des bifurcations dans l'espace paramétrique est un problème fondamental de la dynamique non linéaire. Une bifurcation correspond à un changement quantitatif ou qualitatif dans l'espace des phases par variation d'un de ces paramètres. Ce changement peut correspondre soit à l'apparition ou à la disparition de singularités, soit à une modification de type de singularités, soit un changement de stabilité d'une singularité.

Dans ce paragraphe on présentera les bifurcations les plus connues, dans le cas des transformations bidimensionnelles, que l'on rencontrera dans les chapitres suivants.

A/ Bifurcation fold ou pli

Elle correspond à l'apparition de deux points fixes ou deux cycles d'ordre k , l'un stable, et l'autre instable. Ces deux points fixes (cycles) sont confondus à la valeur de bifurcation pour laquelle S_1 ou S_2 est égal à 1. Cette bifurcation est représentée par le schéma suivant :

$$\emptyset \xleftrightarrow{S=1} N_s^k (\text{resp. } N_i^k) + C^k$$

où \emptyset signifie absence de cycle, N_s^k désigne un cycle noeud d'ordre k stable (resp. N_i^k désigne un cycle noeud d'ordre k instable) et C^k un cycle col d'ordre k .

B/ Bifurcation flip ou doublement de période

Un point fixe (resp. cycle d'ordre k) de type noeud change de stabilité lorsque S_1 ou S_2 est égal à -1 et donne naissance à un cycle d'ordre 2 (resp. cycle d'ordre $2k$) qui a la même stabilité que le point fixe (resp. cycle d'ordre k) d'origine. Cette bifurcation est représentée par le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_s^k (\text{resp. } N_i^k) \xleftrightarrow{S=-1} N_i^k (\text{resp. } N_s^k) + N_s^{2k} (\text{resp. } N_i^{2k}) \\ C^k \xleftrightarrow{S=-1} N_s^k (\text{resp. } N_i^k) + C^{2k} \end{array} \right.$$

où N_s^{2k} signifie cycle noeud d'ordre $2k$ stable, N_i^{2k} cycle noeud d'ordre $2k$ instable, C^{2k} cycle col d'ordre $2k$.

C/ Bifurcation de Neimark-Sacker

Un point fixe (resp. cycles d'ordre k) de type foyer change de stabilité (lorsque $S_1 = \overline{S_2} = \rho e^{i\theta}$ vérifient $\rho = 1$) et donne naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que le point fixe (cycle) d'origine. Cette bifurcation est représentée par le schéma suivant :

$$F_s^k (\text{resp. } F_i^k) \xleftrightarrow{\rho=1} F_i^k (\text{resp. } F_s^k) + CFI_s^k (\text{resp. } CFI_i^k)$$

où F_s^k signifie cycle foyer d'ordre k stable, F_i^k cycle foyer d'ordre k instable, CFI_s^k désigne un cycle de k courbes fermées invariantes stables (attractives), CFI_i^k désigne un cycle de k courbes fermées invariantes instables (répulsives).

1.5 Bifurcations homoclines et hétéroclines

Dans ce paragraphe, on rappellera les principales définitions et propriétés concernant les bifurcations homoclines et hétéroclines.

Définition 1.5.1 Soit x^* un point fixe répulsif de T ; un point q est appelé homocline à x^* , si $q \in W^s(x^*) \cap W^i(x^*)$ et $q \neq x^*$. On dit que q est un point homocline transverse, si $W^s(x^*)$ et $W^i(x^*)$ se coupent transversalement en q .

Définition 1.5.2 Soit q un point homocline à un point fixe répulsif x^* de T et appartenant à un voisinage $U(x^*)$ de x^* . On appelle orbite homocline $O_o(q)$ associée à q , un ensemble constitué des itérés successifs de q , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse T_l^{-1} de T dans $U(x^*)$:

$$O_o(q) = \{T_l^{-n}(q), q, T^n(q); n > 0\} = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

où

$$q_n = T^n(q) \rightarrow x^*, \text{ et } q_{-n} = T_l^{-n}(q) \rightarrow x^*.$$

Remarque 1.5.1 Il y a une infinité d'orbites homoclines associées à un point homocline. Celles-ci ont la même demi-trajectoire positive, mais diffèrent par leur demi-trajectoire négative.

Définition 1.5.3 Soient x_1^* et x_2^* deux points fixes répulsifs de T . On dit qu'un point q , appartenant à un voisinage $U(x_1^*)$ de x_1^* , est hétérocline de x_1^* vers x_2^* , si $T^n(q) \rightarrow x_2^*$ quand n croît, et q appartient à l'ensemble instable local $W_{loc}^i(x_1^*)$ de x_1^* dans $U(x_1^*)$.

Définition 1.5.4 On appelle orbite hétérocline $O_e(q)$ associée à $q \in U(x_1^*)$ et connectant x_1^* à x_2^* (ou orbite hétérocline de q), un ensemble constitué des itérés successifs de q , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse T_l^{-1} de T dans $U(x_1^*)$:

$$O_e(q) = \{T_l^{-n}(q), q, T^n(q); n > 0\} = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

où

$$q_n = T^n(q) \rightarrow x_2^*, \text{ et } q_{-n} = T_l^{-n}(q) \rightarrow x_1^*.$$

Définition 1.5.5 Soit T une application non inversible de \mathbb{R}^2 dépendant d'un paramètre λ , et soit x^* un point fixe répulsif de T . On dit qu'en $\lambda = \lambda^*$ une bifurcation homocline (ou explosion homocline) de x^* a lieu, si en traversant la valeur λ^* il y a apparition (ou disparition) d'une infinité d'orbites homoclines.

CHAPITRE 2

Bifurcations de bassins d'attraction dans le cas d'applications bidimensionnelles de type $(Z_0 - Z_2)$

La non inversibilité des applications définissant des systèmes dynamiques, est une propriété essentielle pour l'analyse des comportements complexes ou chaotiques de ces systèmes. Dans l'espace des phases, cette propriété de non inversibilité des applications est caractérisée par la présence de singularités appelées respectivement, lignes critiques (LC_i), surfaces ou hypersurfaces critiques, selon que l'application soit bidimensionnelle, tridimensionnelle ou de dimension supérieure à trois. Ce type de singularités, introduit pour la première fois par C. Mira en 1964 [20], est une généralisation de la notion de points critiques (extrema locaux) dans le cas unidimensionnel. Les lignes critiques constituent un outil fondamental dans la théorie des systèmes dynamiques non linéaires. Elles interviennent dans la détermination d'aires absorbantes et d'aires chaotiques, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales d'attracteurs et de leurs bassins d'attraction.

Dans ce chapitre on a étudié les propriétés liées aux bifurcations intervenant dans le changement qualitatif de la structure de bassins d'attraction d'attracteurs pour des applications bidimensionnelles non inversibles. On a ex-

pliqué les séquences de bifurcations, qui transforment une frontière régulière de bassin en une frontière fractale; c'est le "phénomène de fractalisation". Ces bifurcations ont été étudiées pour le cas d'une application non inversible de type $(Z_0 - Z_2)$, qui est un cas basique pour d'autres types d'applications plus complexes.

2.1 Définitions et propriétés générales

2.1.1 Lignes critiques

Définition 2.1.1 *Soit T une application non inversible de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On appelle ligne critique de l'application T , le lieu géométrique, noté LC , des points de \mathbb{R}^2 , qui ont au moins deux antécédents de premier rang confondus. La ligne critique, notée LC_{-1} , est l'antécédent de rang un de LC .*

Dans le cas où l'application T est différentiable, le lieu LC_{-1} des antécédents de premier rang confondus est l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 pour lesquels le déterminant de la matrice Jacobienne de T s'annule ($\det(JT(x, y)) = 0$), moins les points d'inflexions (c'est-à-dire les points qui annulent le Jacobien et pour lesquels T est localement inversible). Le lieu LC_{-1} est un sous ensemble de dimension un (une courbe) de \mathbb{R}^2 , avec par définition

$$T(LC_{-1}) = LC.$$

Dans le cas où l'application T n'est pas différentiable, la courbe de non différentiabilité [14] joue généralement le rôle de LC_{-1} . L'image de rang k de LC , $LC_k = T^k(LC)$, est appelée ligne critique de rang k .

Il existe des situations particulières où LC se réduit à un seul point, ou bien que le Jacobien de l'application T soit constant [19].

Une ligne critique peut être constituée d'une ou de plusieurs branches. Ces branches séparent le plan en régions ouvertes notées Z_i , où tous les points d'une même région, ont le même nombre i d'antécédents de premier rang.

I. Gumowski et C. Mira [13] ont développé le rôle des lignes critiques dans le cas des bifurcations du type "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin non

connexe". J. Bernussou, Liu Hsu et C. Mira [4]; A. Barugola, J.C. Cathala et C. Mira [3] et J.C. Cathala [7] ont étudié le cas des bifurcations du type "bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe". Ces bifurcations de base résultent toujours d'un contact entre un segment de ligne critique appartenant à la frontière d'un ensemble attractant et la frontière de son bassin d'attraction.

2.1.2 Classification des transformations non inversibles (TNI)

Une classification des transformations non inversibles (*TNI*) basée sur la considération des lignes critiques et des régions Z_i qui caractérisent T . Elles sont classées dans un ordre de complexité croissante [21], rappelons quelques type (*Fig.* 2.1) :

- **type ($Z_0 - Z_2$)** : On distingue sur la courbe LC une seule branche séparant le plan \mathbb{R}^2 en deux régions. Une région Z_0 pour laquelle les points (x_{n+1}, y_{n+1}) n'ont pas d'antécédents. Une région Z_2 pour laquelle les points ont deux antécédents de rang 1.

- **type ($Z_1 - Z_3 - Z_1$)** : La courbe LC est discontinue. Elle est formée de deux branches distinctes divisant le plan \mathbb{R}^2 en trois régions. Une région Z_3 pour laquelle les points (x_{n+1}, y_{n+1}) ont trois antécédents de rang 1 et deux régions Z_1^1 et Z_1^2 non connexes avec un seul antécédent de rang 1.

De la même façon, il est possible de définir des *TNI* de type ($Z_0 - Z_2 - Z_4$) ou de degré plus élevé.

Pour deux *TNI* de même degré, une singularité supplémentaire peut augmenter la complexité de l'une par rapport à l'autre par la présence des points cuspidaux sur les LC .

On introduit les symboles (" $<$ " et " $>$ ") pour la représentation symbolique. Ces transformations sont classées de la façon suivante,

- **type ($Z_1 < Z_3$)** : la courbe LC possède un point cusp C créant un "cap" dans Z_3 pénétrant dans Z_1 .

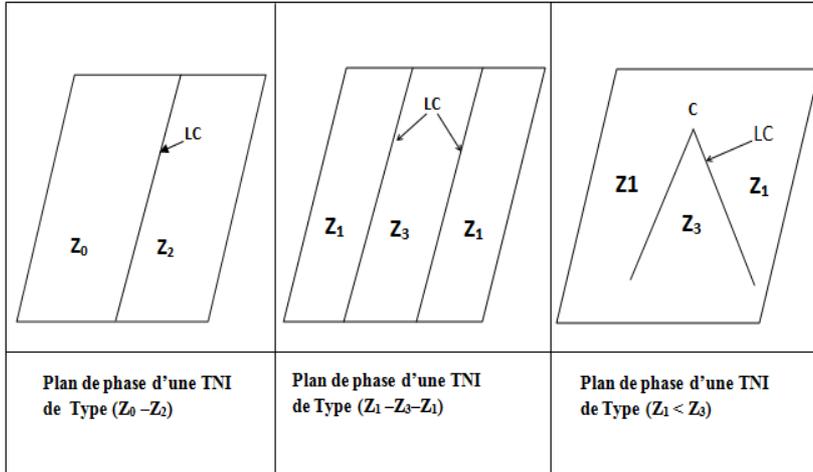


Fig. 2.1. Plan de phase d'une TNI

2.1.3 Bassin d'attraction

Définition 2.1.2 *Un ensemble fermé et invariant A est appelé ensemble attractant, s'il existe un voisinage U de A , tel que $T(U) \subset U$ et $T^n(x) \rightarrow A$ quand $n \rightarrow +\infty \forall x \in U$.*

Un ensemble attractant A peut contenir un ou plusieurs attracteurs, co-existant avec des ensembles de points répulsifs. Ces derniers sont soit des frontières floues de bassins d'attraction d'attracteurs contenus dans A , soit des transitoires chaotiques. L'ensemble $D = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(U)$ est le bassin d'attraction de A .

Un bassin d'attraction D peut être connexe ou non connexe. S'il est non connexe, il est alors constitué d'un bassin immédiat D_0 , qui est la plus large composante connexe de D contenant A , et des autres composantes connexes, en nombre fini ou infini, antécédents de tout rang de D_0 . Ces antécédents s'appellent *îlots* selon la terminologie de C. Mira [23].

- Si D est non connexe $D = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(D_0)$

- Si D est connexe $D = D_0$.

Un bassin connexe peut être simplement connexe ou multiplement connexe, c'est-à-dire connexe avec des *trous* ou *lacs* selon la terminologie de C. Mira [23].

Propriété : D est invariant par l'inverse T^{-1} de T , mais pas nécessairement invariant par T :

$$T^{-1}(D) = D; T(D) \subseteq D.$$

Lorsque la transformation T est inversible on a $T(D) = D$.

Définition 2.1.3 *on appelle frontière externe de D , notée \mathcal{F}_e , la frontière de l'ensemble simplement connexe, noté D^* , obtenu en comblant les trous de D ($\partial D^* = \mathcal{F}_e$). On appelle frontière interne de D , notée \mathcal{F}_i , la frontière de l'ensemble $D^* \setminus D$ (c'est-à-dire l'union des frontières de tous les trous de D). L'union $\mathcal{F}_e \cup \mathcal{F}_i$ constitue la frontière \mathcal{F} de D .*

Propriété : \mathcal{F} est invariant par l'inverse T^{-1} de T , mais pas nécessairement invariant par T :

$$T^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}, T(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}.$$

L'égalité $T^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ implique que les antécédents de tout rang d'un cycle appartenant à \mathcal{F} , appartiennent à cette dernière. Il en découle que la variété stable W^s de tout cycle appartenant à \mathcal{F} , appartient à cette dernière. L'inclusion $T(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$ implique que la demi trajectoire positive de tout point de \mathcal{F} appartient aussi à \mathcal{F} .

Définition 2.1.4 *Un point fixe P de type noeud répulsif appartenant à la frontière externe \mathcal{F}_e , est dit point cusp, si les valeurs propres S_1 et S_2 de l'application T au point fixe P satisfont :*

$$S_1 > 1, S_2 < -1 \text{ et } |S_2| > S_1.$$

L'aspect géométrique des variétés invariantes de P , justifie que l'on appelle ce dernier point cusp. Dans un tel cas, les antécédents de tout rang du point cusp P , sont aussi des points cusps de la frontière externe \mathcal{F}_e .

Définition 2.1.5 *La frontière du bassin immédiat d'attraction $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0e} \cup \mathcal{F}_{0i}$ est appelée frontière faiblement fractale, si \mathcal{F}_{0e} ne contient pas ou contient un nombre fini de points cusps et \mathcal{F}_{0i} est constituée d'arcs ayant une structure fractale, avec la possibilité pour \mathcal{F}_{0e} d'être fractale.*

Définition 2.1.6 \mathcal{F}_0 *appelée frontière fortement fractale, si \mathcal{F}_{0e} est constituée d'arcs ayant une structure fractale, qui contiennent des séquences arborescentes d'antécédents d'un point cusp ; donc un nombre infini de points cusps appartiennent à \mathcal{F}_0 .*

2.2 Application non inversible de type $(Z_0 - Z_2)$

On s'intéresse dans ce paragraphe aux critères de connexité de bassins d'attraction d'attracteurs, pour des applications non inversibles bidimensionnelles de type $(Z_0 - Z_2)$. Le plan de phases de ce type d'applications est divisé en deux régions ouvertes Z_0 et Z_2 , séparées par une ligne critique LC constituée d'une seule branche. Un point x appartenant à Z_2 a deux antécédents de premier rang distincts, et un point x appartenant à Z_0 n'a aucun antécédent.

Rappelons les deux propositions fondamentales établissant les conditions d'existence d'un bassin non connexe et d'un bassin multiplement connexe. Ces propositions ont été démontrées par L. Gardini (pour la démonstration voir C. Mira et al. [23]) et leur formalisme découle des résultats donnés dans (C. Mira & J. C. Roubellat [25]).

Proposition 2.2.1 *Soit T un endomorphisme de type $(Z_0 - Z_2)$ et D_0 le bassin immédiat d'attraction d'un ensemble attractant A , tel que $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$. Alors :*

- 1) D est connexe $\Leftrightarrow D_0 \cap \overline{Z_2}$ est connexe $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) = D_0 \cap LC$.

2) D est non connexe $\Leftrightarrow D_0 \cap \overline{Z_2}$ est non connexe $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) \subset D_0 \cap LC$.

Chaque composante connexe maximale unidimensionnelle de $(D_0 \cap LC) \setminus T(D_0 \cap LC_{-1})$ appartient à la frontière d'une composante connexe maximale bidimensionnelle de $D_0 \cap \overline{Z_2}$, un cap [23] noté Δ_0^i , i un entier fini ou infini, qui ne contient pas A . Les caps $\overline{\Delta_0^i}$ ne contiennent pas de points non errants appartenant à \overline{D} . Les antécédents de premier rang des caps Δ_0^i , $D_1^{(i)} = T^{-1}(\Delta_0^i)$, sont des composantes connexes disjointes (ilôts) de D , tel que $D_1^{(i)} \cap LC_{-1} \neq \emptyset$. Le bassin total $D = D_0 \cup_i \left(\cup_{n \geq 0} T^{-n}(D_1^{(i)}) \right)$; où $\cup_{n \geq 0} T^{-n}(D_1^{(i)})$ est une séquence finie, infinie, ou arborescente d'antécédents de D_0 .

La figure (Fig.2.2) illustre cette proposition dans le cas d'un seul cap Δ_0 ($i = 1$), et $D_1 \subset Z_2$.

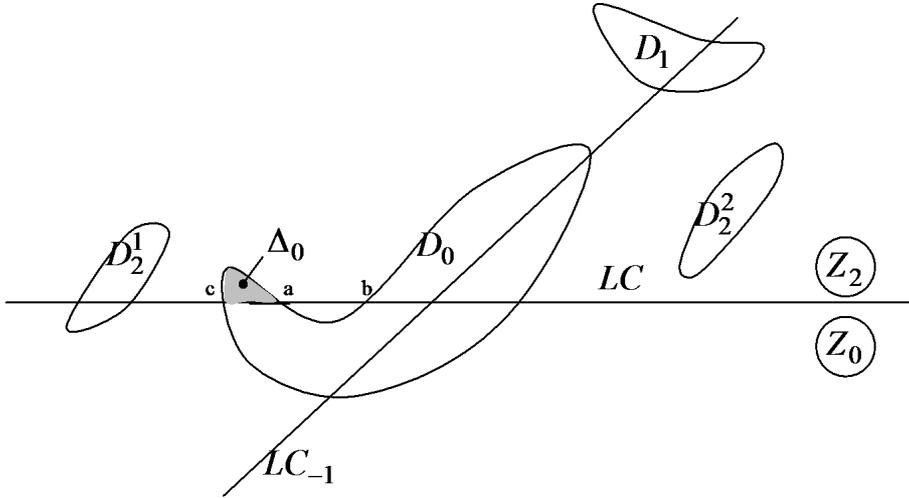


Fig. 2.2. Bassin d'attraction D non connexe.

Proposition 2.2.2 Soit T un endomorphisme de type $(Z_0 - Z_2)$ et D_0 le bassin immédiat d'attraction d'un ensemble attractant A , tel que $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$ et $D_0 \cap \overline{Z_2}$ est connexe. Alors :

- 1) $T^{-1}(D_0^*) = D_0^* \Leftrightarrow D = D_0$ est simplement connexe $\Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{-1}) = D_0^* \cap LC$.
- 2) $T^{-1}(D_0^*) \subset D_0^* \Leftrightarrow D = D_0$ est multiplement connexe $\Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{-1}) \supset D_0^* \cap LC$.

Chaque composante connexe maximale unidimensionnelle de $T(D_0^* \cap LC_{-1}) \setminus (D_0^* \cap LC)$ appartient à la frontière d'un ensemble fermé bidimensionnelle de $\mathcal{C}(D) \cap \overline{Z_2}$, une baie [23] notée $H_0^{(i)}$, i un entier fini ou infini. $H_0^{(i)}$ ne contient pas de points non errants appartenant à ∂D ou à $\mathcal{C}(D)$. Les antécédents de premier rang des baies $H_0^{(i)}$, $H_1^{(i)} = T^{-1}(H_0^{(i)})$, sont des ensembles fermés simplement connexes disjoints, des lacs de D , tel que $H_1^{(i)} \cap LC_{-1} \neq \emptyset$ et $D = D_0^* \setminus \cup_i (\cup_{n \geq 0} T^{-n}(H_1^{(i)}))$; où $\cup_{n \geq 0} T^{-n}(H_1^{(i)})$ est une séquence finie, infinie, ou arborescente d'antécédents de $H_0^{(i)}$.

La figure (Fig. 2.3) illustre cette proposition dans le cas d'une seule baie H_0 ($i = 1$), et $H_1 \subset Z_2$.

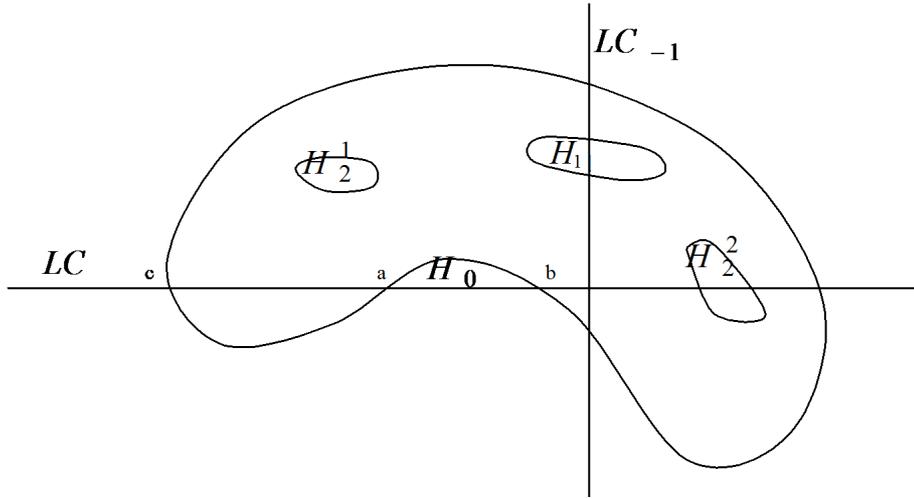


Fig. 2.3. Bassin d'attraction D multiplement connexe.

Des situations combinées des propositions 2.2.1 et 2.2.2 peuvent conduire à un bassin total D non connexe, avec chacune de ses composantes connexes multiplément connexe, c'est-à-dire des lacs dans des îlots.

Remarque 2.2.1 *Lorsqu'une infinité de cycles répulsifs existent comme ensemble limite de séquences arborescentes d'îlots, ou de lacs, c'est-à-dire comme points appartenant à la frontière du bassin, ils constituent un répulseur étrange. Ces cycles doivent être distingués de l'infinité de cycles répulsifs donnant lieu à une aire chaotique.*

Remarque 2.2.2 *Les propositions 2.2.1 et 2.2.2 restent valables pour des applications non inversibles d'un type différent de $(Z_0 - Z_2)$, à condition que l'on retrouve localement la situation $(Z_0 - Z_2)$; autrement dit, les aires (Δ_0, H_0) des figures (Fig. 2.2) et (Fig. 2.3) dont les antécédents donnent un îlot ou un lac, doivent concerner deux feuilles de T^{-1} avec seulement un pli les joignant [23]. Par exemple, pour l'application non inversible de type $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ les propositions 2.2.1 et 2.2.2 sont valables localement, si les aires (Δ_0, H_0) coupent une seule branche de LC parmi les deux branches qui délimitent Z_3 , ce qui n'est pas le cas si (Δ_0, H_0) coupent les deux branches de LC .*

2.3 Bifurcations de bassins d'attraction

La proposition suivante est un rappel de certaines bifurcations de bassins d'attraction, dans le cas des applications du type $(Z_0 - Z_2)$; c'est une conséquence des deux propositions précédentes.

Proposition 2.3.1 *Soit T un endomorphisme de type $(Z_0 - Z_2)$ dépendant d'un paramètre λ . Si le nombre de composantes connexes de $D \cap LC$ change quand λ traverse une valeur de bifurcation λ_b , alors le bassin d'attraction D peut subir une bifurcation de bassins parmi les types de bifurcations suivantes :*

a) *bassin connexe \leftrightarrow bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change)*

b) bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change).

c) augmentation ou diminution du nombre d'îlots de D , ou nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.

d) augmentation ou diminution du nombre de lacs dans D , ou nouvelle séquence arborescente de lacs.

e) transition lacs \leftrightarrow baie

f) transition frontière externe faiblement fractale \leftrightarrow frontière externe fortement fractale.

Chacune de ces bifurcations correspond à un contact entre deux ensembles singuliers de nature différente, la frontière du bassin d'attraction ∂D et la ligne critique LC .

La partie (a) de cette proposition est illustrée par la figure (Fig. 2.4), sur laquelle on voit deux bifurcations possibles. La première bifurcation $\lambda = \lambda_{1b}$, correspond à un contact entre ∂D_0 et LC au point $a \equiv c$. $\{T^{-n}(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$, est une séquence arborescente de N points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de N îlots. Autrement dit, le bassin étant connexe pour $\lambda < \lambda_{1b}$, devient non connexe pour $\lambda > \lambda_{1b}$. La seconde bifurcation $\lambda = \lambda_{2b}$, correspond à un contact tangentiel entre ∂D_0 et LC au point $a \equiv b$, donnant lieu à un contact non transverse, mais aussi non tangentiel entre ∂D_0 et la frontière ∂D_1 de l'îlot D_1 . Après cette dernière bifurcation D redevient connexe.

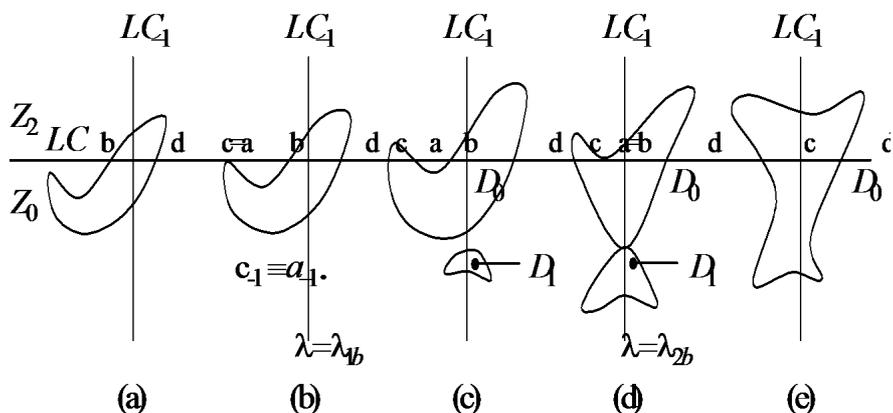


Fig. 2.4. Bifurcation d'un Bassin d'attraction D connexe \leftrightarrow non connexe.

La partie (b) de cette proposition, qui est une conséquence de la proposition (2.2.1), est illustrée par la figure (Fig. 2.5), sur laquelle on voit une bifurcation qui transforme un bassin simplement connexe en un bassin multiplement connexe. En effet, à la valeur $\lambda = \lambda_{3b}$ a lieu un contact entre ∂D_0 et LC au point $a \equiv b$. Les antécédents de tout rang $T^{-n}(a)$ du point a , forment une séquence arborescente de N points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de N lacs.

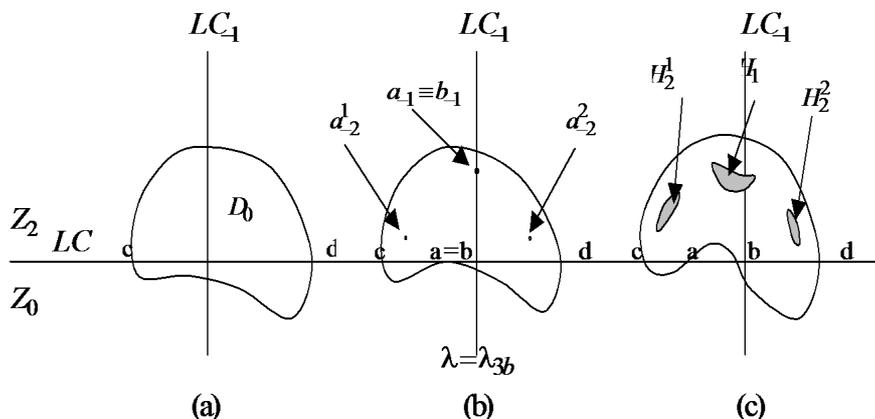


Fig. 2.5. Bifurcation : bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin
multiplement connexe.

La partie (c) est illustrée par la figure (Fig. 2.6), sur laquelle on peut voir deux bifurcations possibles, qui entraînent un changement du nombre d'îlots. La première bifurcation a lieu à la valeur $\lambda = \lambda_{4b}$ (Fig. 2.6a) et qui correspond à un contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\alpha = D_i \cap LC$. Avant la bifurcation, $\lambda < \lambda_{4b}$, l'îlot D_i était à l'intérieur de la région Z_0 ($D_i \cap \overline{Z_2} = \emptyset$). A la bifurcation, les antécédents de tout rang $T^{-n}(\alpha)$ de α ($T^{-1}(\alpha) = \alpha_{-1} \in LC_{-1}$) constituent une séquence arborescente de points, qui génèrent après la bifurcation une séquence arborescente d'îlots D_{i+n} , $D_{i+1} \cap LC_{-1} \neq \emptyset$. En continuant à faire varier le paramètre λ de manière continue, l'îlot D_i progresse dans la région Z_2 (Fig. 2.6b). La seconde valeur de bifurcation $\lambda = \lambda_{5b}$ (Fig. 2.6c), correspond à un nouveau contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\beta = D_i \cap LC$ ($D_i \subset \overline{Z_2}$). Ceci implique que le point $\beta_{-1} = T^{-1}(\beta) = D_{i+1} \cap LC_{-1}$ est un point d'intersection limite entre LC_{-1} et D_{i+1} , avant que ce dernier se divise en deux îlots $D_{i+1}^1 \subset R_1$ et $D_{i+1}^2 \subset R_2$, lorsque la valeur de λ dépasse la seconde valeur de bifurcation (Fig. 2.6d).

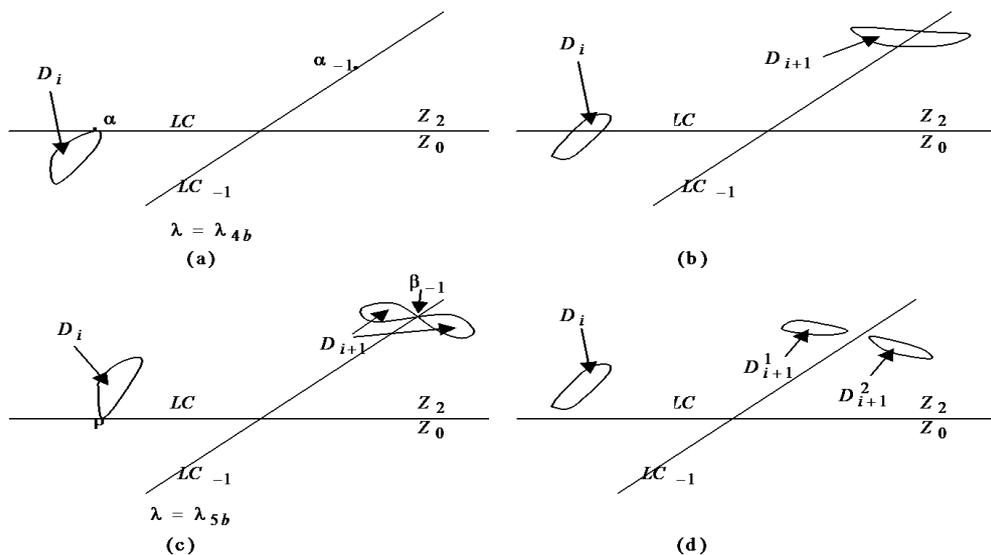


Fig. 2.6. Bifurcations d'un changement du nombre d'îlots.

La partie (d) est analogue à la partie (c), en substituant dans le raisonnement de la partie (c) les îlots par des lacs d'un bassin multiplement connexe.

2.4 Exemple d'une bifurcation de bassin d'attraction avec agrégation d'îlots

Considérons l'application quadratique T définie par :

$$\begin{cases} x' = (b - a)x^2 + by^2 + (a - 2b)xy + c(y - x) \\ y' = (b - a)x^2 + by^2 + (a - 2b)xy + c(y - x) + x \end{cases} \quad (2.1)$$

où a, b et c sont des paramètres réels. Cette application admet deux déterminations inverses, qui sont les solutions par rapport à (x, y) du système

$$\begin{cases} x = y' - x' \\ by^2 + ((a - 2b)x + c)y + (b - a)x^2 - cx - x' = 0 \end{cases}, \quad (2.2)$$

dans le cas où le discriminant

$$\Delta = a^2(y' - x')^2 + 2ac(y' - x') + 4bx' + c^2 \quad (2.3)$$

de la deuxième équation de (2.2) est strictement positif. Lorsque le discriminant Δ est strictement négatif, l'application T n'a pas de détermination inverse. Par conséquent, T est une application de type $(Z_0 - Z_2)$, et la ligne critique LC séparant les régions Z_0 et Z_2 a pour équation $\Delta = 0$. Ce qui équivaut à :

$$LC \iff y' = \frac{(2ax' - 2c) \pm \sqrt{-16bx'}}{2a} \quad (2.4)$$

pour $-16bx' \geq 0$.

Le lieu des antécédents de premier rang confondus $LC_{-1}(T(LC_{-1}) = LC)$ est déterminé par le Jacobien de l'application T égale à zéro. Ce qui équivaut à :

$$LC_{-1} \iff y = \frac{(2b - a)x - c}{2b}.$$

Pour la valeur $a = 0.088$, $c = 1.8$ et b variant dans le sens décroissant sur l'intervalle $[0.085, 0.0885]$, l'application T a deux points fixes $O(0, 0)$ et $N\left(\frac{1-c}{a+b}, \frac{2(1-c)}{a+b}\right)$. Le point fixe O est toujours un noeud étoilé instable, le point fixe N est un noeud stable pour $b > \tilde{b} = 0.088$ et un col pour $b < \tilde{b} = 0.088$. L'application T a aussi un cycle d'ordre deux $\{C_1, C_2\}$, qui est de type col pour $b > \tilde{b}$ et de type noeud stable $\{N_1, N_2\}$ pour $b < \tilde{b}$.

Intéressons-nous aux changements dans la structure géométrique du bassin d'attraction D du point fixe N , lorsque le paramètre b varie dans le sens décroissant.

1- Pour $b = 0.0885 > \tilde{b}$, le bassin D est simplement connexe (*Fig. 2.7*) et sa frontière est constituée par les variétés stables du cycle col $\{C_1, C_2\}$.

2.4. Exemple d'une bifurcation de bassin d'attraction avec agrégation d'îlots

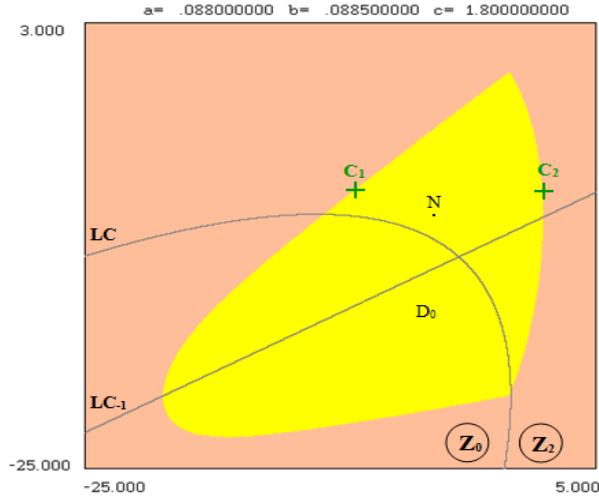


Fig. 2.7. Bassin D simplement connexe.

2- Pour $b < \tilde{b}$, le bassin D n'est plus connexe. \tilde{b} est une valeur de bifurcation de type "bassin connexe \longleftrightarrow bassin non connexe" caractérisée par la proposition 2.2.1.

3- Pour $b = 0.0886 < \tilde{b}$, le bassin D est constitué d'un bassin immédiat D_0 (Fig. 2.8), et d'une séquence arborescente d'îlots $\cup_{i \geq 1} T^{-i}(\Delta_0)$ (Figs. 2.8a et 2.8b) résultant d'une bifurcation du type schématisée par la figure 2.4(b), où l'îlot $D_1 = T^{-1}(\Delta_0)$ se trouve dans la région Z_2 .

2.4. Exemple d'une bifurcation de bassin d'attraction avec agrégation d'îlots

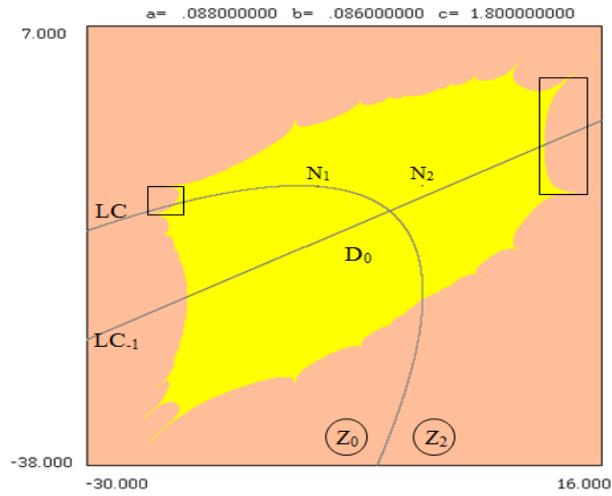


Fig. 2.8. Bassin D non connexe.

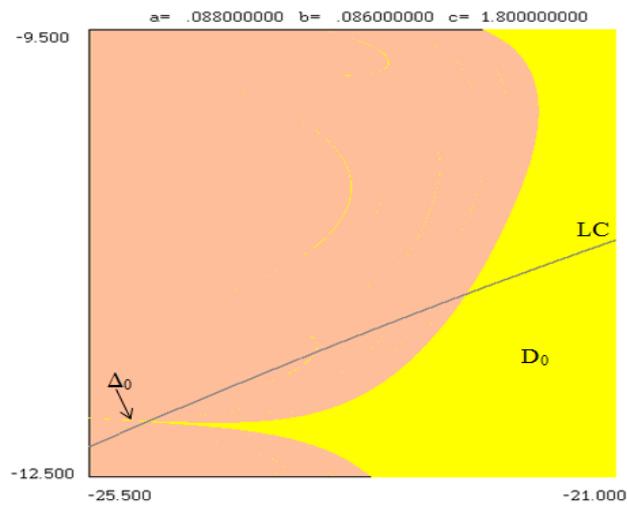


Fig. 2.8a. Zoom de la région encadrée à gauche dans (Fig. 2.8).

2.4. Exemple d'une bifurcation de bassin d'attraction avec agrégation d'îlots

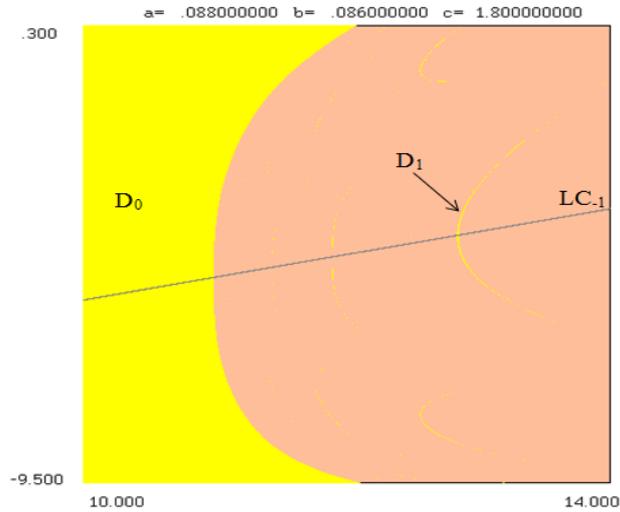


Fig. 2.8b. Zoom de la région encadrée à droite dans (Fig. 2.8).

4- Parmi les îlots de la séquence arborescente, il y en a qui coupent LC et donc génèrent d'autres séquences arborescentes d'îlots. Ce type de bifurcation non classique "contact entre la frontière du bassin d'attraction ∂D et la ligne critique LC " entraîne, lorsqu'on fait varier le paramètre b , une augmentation discontinue de D (augmentation non connexe). Ces îlots subissent un phénomène d'agrégation ou de séparation correspondant à des bifurcations schématisées par les figures 2.4(d) et 2.6(c). Le nombre de ces bifurcations augmente de plus en plus, lorsque le paramètre b diminue, ce qui entraîne une augmentation de la taille des îlots et une tendance de ces derniers vers la frontière du bassin immédiat D_0 . Une vue partielle du bassin total, représentant cette situation pour la valeur $b = 0.0857$, est donnée par la figure (Fig. 2.9). Pour $b = 0.085$ les îlots agrègent à D_0 et donne une structure fractale à la frontière du bassin (Fig. 2.10).

2.4. Exemple d'une bifurcation de bassin d'attraction avec agrégation d'îlots

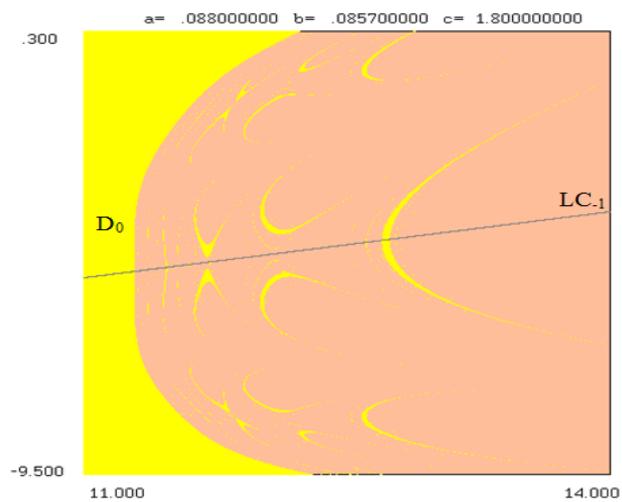


Fig. 2.9. Augmentation de la taille des îlots.

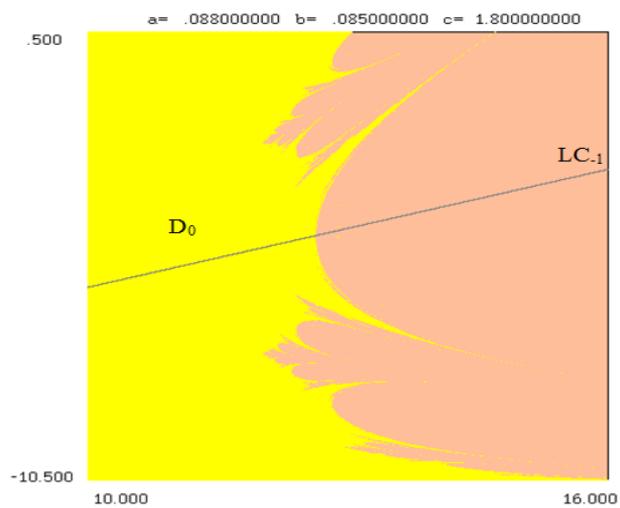


Fig. 2.10. Frontière fractale du bassin D .

2.4. Exemple d'une bifurcation de bassin d'attraction avec agrégation d'îlots

Remarque 2.4.1 *Pour la valeur $b = 0.1, c = 0.5$, l'application T est conjuguée, par le difféomorphisme $h(x, y) = (y, x + y)$, à l'application $F(x, y) = (y, 0.5x + 0.1x^2 + a.x.y)$ étudiée par C. Mira dans la référence [24].*

CHAPITRE 3

Etude d'une application non inversible de type $(Z_0 - Z_2)$

Dans ce chapitre, nous allons commencer par rappeler la construction d'un ensemble de Cantor du tiers médian [5], qui est un ensemble fractal. Ce rappel est justifié par le fait que le système dynamique étudié dans cette partie a un attracteur de type Cantorien.

3.1 Construction de l'ensemble de Cantor

Soit F_0 l'intervalle fermé $[0, 1]$. Supprimons l'intervalle ouvert $]1/3, 2/3[$ et désignons l'ensemble fermé qui reste $([0, 1/3] \cup [2/3, 1])$ par F_1 . Ensuite supprimons les tiers du milieu de chaque intervalle restant : $]1/9, 2/9[$ et $]7/9, 8/9[$ et désignons l'ensemble fermé qui reste $([0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1])$ par F_2 . En répétant ce procédé, on obtient une suite décroissante au sens de l'inclusion d'ensembles fermés F_n (voir (Fig. 3.1)). L'ensemble de Cantor noté C est défini comme suit

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n.$$

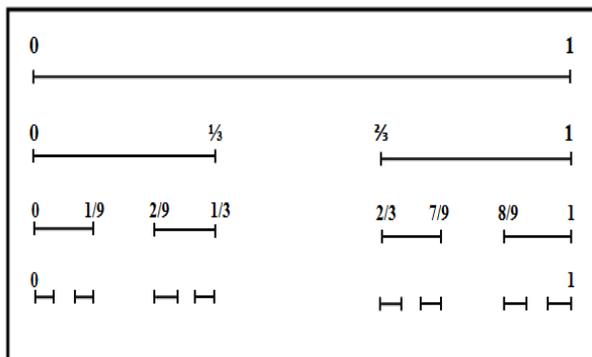


Fig. 3.1. Construction de l'ensemble de Cantor.

Les points de l'intervalle $[0, 1]$ qui appartiennent à l'ensemble de Cantor C peuvent être caractérisés de la manière suivante :

écrivons chacun des nombres $x, 0 \leq x \leq 1$, dans le système de base 3 :

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots,$$

où les nombres a_n peuvent prendre les valeurs 0, 2.

Alors l'ensemble de Cantor C est défini comme suit :

$$C := \left\{ x \in [0, 1], \exists (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}^*}, x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{3^k} \right\}.$$

3.2 Lignes critiques et points fixes de T

Étudions l'application quadratique T définie par :

$$T(x, y) = \begin{cases} x' = y \\ y' = axy + bx^2 + cx \end{cases}, \quad (3.1)$$

où a, b et c sont des paramètres réels.

La recherche des déterminations inverses de l'application T (si elles existent) revient à résoudre le système

$$T(x, y) - (x', y') = (0, 0)$$

par rapport à (x, y) . Ce dernier est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} bx^2 + (c + ay)x - y' = 0 \\ y = x' \end{cases}. \quad (3.2)$$

Dans le cas où le discriminant $\Delta = (c + ax')^2 + 4by'$ de la première équation de (3.2) est strictement positif, l'application T admet deux déterminations inverses, données par :

$$T_1^{-1}(x, y) = \begin{cases} x = \frac{-(c+ax') - \sqrt{(c+ax')^2 + 4by'}}{2b} \\ y = x' \end{cases} \quad (3.3)$$

et

$$T_2^{-1}(x, y) = \begin{cases} x = \frac{-(c+ax') + \sqrt{(c+ax')^2 + 4by'}}{2b} \\ y = x' \end{cases}. \quad (3.4)$$

Dans le cas où le discriminant s'annule, les deux déterminations inverses sont confondues et lorsque le discriminant Δ est strictement négatif, l'application T n'a pas de détermination inverse. Par conséquent, T est une application de type $(Z_0 - Z_2)$ [21]. Ainsi le plan de phase \mathbb{R}^2 est divisé en deux régions Z_0 et Z_2 séparées par la ligne critique LC d'équation

$$LC \iff y' = \frac{-(c + ax')^2}{4b}, \quad (3.5)$$

qui correspond au discriminant $\Delta = 0$. Le lieu des antécédents de premier

rang confondus LC_{-1} est déterminé par le Jacobien de l'application T égale à zéro. Ce qui équivaut à :

$$LC_{-1} \iff y = \frac{-(2bx + c)}{a}. \quad (3.6)$$

3.2.1 Points fixes de T

la résolution du système

$$T(x, y) = (x, y) \iff \begin{cases} y = x \\ axy + bx^2 + cx - y = 0 \end{cases}$$

nous donne les deux points fixes

$$O = (0, 0) \quad \text{et} \quad P = \left(\frac{1-c}{a+b}, \frac{1-c}{a+b} \right), \text{ où } a+b \neq 0.$$

3.3 Attracteur sur des droites invariantes

Pour les paramètres $a = 0.71, b = 0.7$ et c varié dans le sens croissant dans l'intervalle $[0.9; 4.02]$, des simulations numériques nous donnent des attracteurs ayant l'apparence de segments de droites, ce qui nous motivent à rechercher d'éventuelles droites invariantes par l'application T ou par ses composés (T^2, T^3, \dots) , sur lesquels se trouveraient ses attracteurs. La recherche de droites D (d'équation $y = kx + l$) invariante par T , revient à résoudre l'équation $T(D) = D$ par rapport aux coefficients k et l de la droite D . Cette équation ne donne aucune solution; autrement dit, il n'y a pas de droites invariantes par T . Ce qui nous amène logiquement à rechercher des droites invariantes par T^2 , où l'application T^2 est donnée par

$$T^2(x, y) = (x', y') : \begin{cases} x' = cx + bx^2 + axy \\ y' = (a^2x + b)y^2 + (acx + abx^2 + c)y \end{cases} . \quad (3.7)$$

Ceci revient à résoudre l'équation

$$T^2(D) = D.$$

Cette équation est équivalente à

$$T^2(x, kx + l) = (x', kx' + l) \quad (3.8)$$

ce qui implique

$$\begin{cases} x' = cx + bx^2 + ax(kx + l) \\ kx' + l = (a^2x + b)(kx + l)^2 + (acx + abx^2 + c)(kx + l) \end{cases} \quad (3.9)$$

En éliminant x' de la deuxième équation du système ci-dessus, on obtient l'équation en x suivante :

$$(a^2x + b)(kx + l)^2 + (acx + abx^2 + c)(kx + l) = k(cx + bx^2 + ax(kx + l)) + l \quad (3.10)$$

L'identification des coefficients de même degré nous donne le système, par rapport aux inconnues k, l , suivant :

$$\begin{cases} a^2k^2 + kab = 0 & (1) \\ 2a^2kl + k^2b + kac + abl = bk + ak^2 & (2) \\ a^2l^2 + 2kbl + acl = alk & (3) \\ l^2b + bl = l & (4) \end{cases} \quad (3.11)$$

Le système constitué des équations (1) et (4) du système ci-dessus nous donne les solutions $(k, l) = \{(0, 0); (0, \frac{1-b}{b}); (\frac{-b}{a}, 0); (\frac{-b}{a}, \frac{1-b}{b})\}$. Seule la solution $(0, 0)$ vérifie le système (3.11), il en résulte qu'il existe une droite D_1

$$D_1 : y = 0$$

T^2 -invariante.

Cherchons s'il existe des droites $x = k$ invariantes par l'application T^2 , Ceci revient à résoudre l'équation $T^2(k, y) = (k, y')$ par rapport à k . Cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} k = ck + bk^2 + ak y \\ y' = (a^2k + b)y^2 + (ack + abk^2 + c)y \end{cases} \quad (3.12)$$

qui a pour unique solution $k = 0$. Il en résulte que la droite D_2

$$D_2 : x = 0$$

est T^2 -invariante.

Autrement dit, les axes xx' et yy' du plan \mathbb{R}^2 , sur lesquels est situé l'attracteur de l'application T , sont T^2 -invariants.

Fixons nous les valeurs des paramètres a, b et faisons varier le paramètre c . Pour les valeurs $a = 0.71, b = 0.7$ et c variant dans le sens croissant dans l'intervalle $[0.9, 4.02]$, on a les situations suivantes :

1- Pour la valeur $c_0 = 0.9$, l'attracteur de l'application T est un point fixe de type noeud $N(0, 0)$, dont le bassin d'attraction est simplement connexe. En augmentant progressivement la valeur du paramètre c , on obtient à la valeur $c_1 = 1.01$ un cycle d'ordre 2 attractif de type noeuds $\{N_1(x_0, 0), N_2(0, x_0)\}$, naît d'une bifurcation doublement de période après déstabilisation du point fixe attractif $N(0, 0)$. Ce cycle est situé sur les deux droites invariantes D_1, D_2 , plus précisément $N_1 \in D_1$ et $N_2 \in D_2$ (*Fig. 3.2*).

2- Une bifurcation doublement de période a lieu, à la valeur $c_2 = 3.01$, déstabilisant le cycle $\{N_1, N_2\}$ et donnant naissance à un cycle d'ordre 4 attractif de type noeuds (*Fig. 3.3*) $\{N_1(0, x_1), N_2(x_1, 0), N_3(0, x_2), N_4(x_2, 0)\}$, tel que $N_1, N_3 \in D_2$ et $N_2, N_4 \in D_1$. En continuant à varier le paramètre c , une cascade de bifurcations doublement de période a lieu, et dont les cycles naissant sont tous situés sur les droites D_1, D_2 .

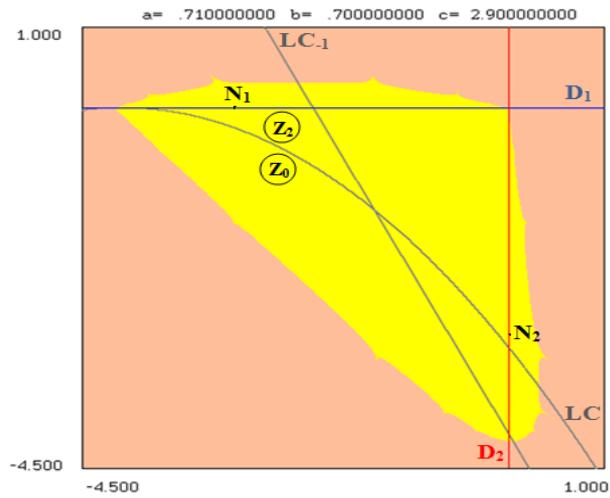


Fig. 3.2. Bassin d'attraction du cycle noeud d'ordre 2 $\{N_1, N_2\}$.

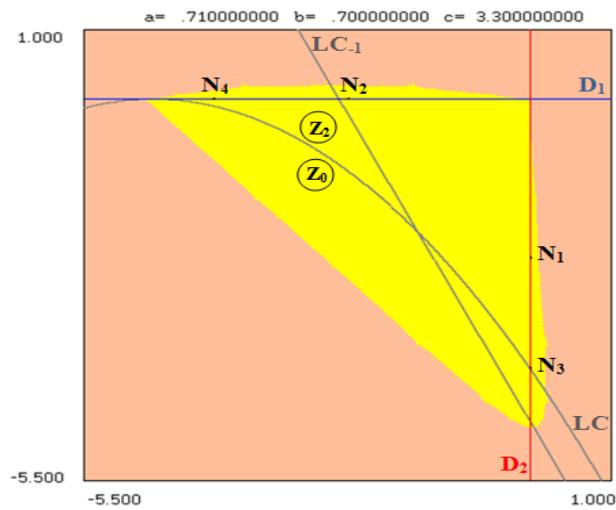


Fig. 3.3. Bassin d'attraction du cycle noeud d'ordre 4 $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$.

Pour déterminer le type d'attracteur résultant de la limite de cette suite de bifurcations, nous allons étudier la restriction T_x^2 de l'application T^2 à la droite invariante D_1 et la restriction T_y^2 de l'application T^2 à la droite invariante D_2 . Ces restrictions sont données par :

$$T_x^2 : \begin{cases} x' = bx^2 + cx \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow T_x^2 : x' = bx^2 + cx \quad (3.13)$$

$$T_y^2 : \begin{cases} x' = 0 \\ y' = by^2 + cy \end{cases} \Rightarrow T_y^2 : y' = by^2 + cy, \quad (3.14)$$

l'application T_x^2 est topologiquement équivalente à T_y^2 , car il existe un homéomorphisme h donné par

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (y, x) \end{aligned}$$

tel que

$$h \circ T_x^2 = T_y^2 \circ h,$$

par conséquent, il suffit d'étudier la dynamique d'une de ces deux restrictions de T^2 , par exemple T_x^2 .

Transformons T_x^2 , en faisant le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} T_x^2 &: x' = bx^2 + cx & (3.15) \\ T_x^2 &: \left(-\frac{c}{b}\right)\left(-\frac{b}{c}x'\right) = -\frac{c^2}{b}\left(-\frac{b}{c}x\right)\left(-\left(\frac{-b}{c}x\right) + 1\right) \end{aligned}$$

Posons $u = -\frac{b}{c}x$, alors de l'équation (3.15) on a :

$$-\frac{c}{b}u' = \frac{-c^2}{b}u(1-u) \quad (3.16)$$

$$T_u^2 : u' = cu(1-u) \quad (3.17)$$

Ce changement de variable $u = h(x) = -\frac{b}{c}x$ est un homéomorphisme dans \mathbb{R} , qui vérifie

$$h \circ T_x^2 = T_u^2 \circ h.$$

Par conséquent l'application T_x^2 , est topologiquement équivalente à T_u^2 , qui est une application logistique [17].

3- La figure (Fig. 3.4) représente le diagramme de bifurcation (à partir du point N_1 du cycle 2) et l'exposant de Lyapounov de l'application T_x^2 en fonction du paramètre $c \in [2.9, 4]$ et pour une valeur fixée $b = 0.7$.

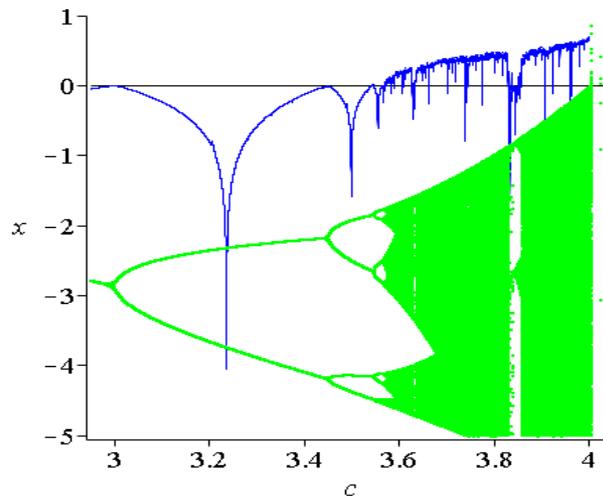


Fig.3.4. Diagramme de bifurcation et exposant de Lyapounov de T_x^2 .

On peut voir sur cette dernière (figure) la cascade de bifurcations doublement de période (ou bifurcations flip) typique de l'application logistique. En balayant progressivement les valeurs du paramètre c , on localise certaines valeurs de bifurcation flip, données dans le tableau suivant :

valeurs du paramètre c	attracteurs
$c_2 = 3.010000$	naissance d'un cycle de noeuds d'ordre 2
$c_3 = 3.449490$	naissance d'un cycle de noeuds d'ordre 4
$c_4 = 3.544095$	naissance d'un cycle de noeuds d'ordre 8
$c_5 = 3.564408$	naissance d'un cycle de noeuds d'ordre 16
$c_6 = 3.568760$	naissance d'un cycle de noeuds d'ordre 32
$c_7 = 3.569692$	naissance d'un cycle de noeuds d'ordre 64
$c_\infty \approx 3.56995$	point d'accumulation

A la valeur $c_\infty \approx 3.56995$, l'exposant de Lyapounov de l'application T_x^2 (pour presque toute condition initiale) devient strictement positif; autrement dit, on a une sensibilité aux conditions initiales à partir de la valeur $c \approx c_\infty$. D'autre part le calcul de la dimension de box-counting (dimension fractale) de l'attracteur, pour ces valeurs des paramètres, nous a donné $\dim = 0.647$, il en résulte que l'attracteur de l'application T_x^2 situé sur la droite invariante D_1 est chaotique de type ensemble de Cantor [5].

L'étude de l'application T_y^2 est analogue à celle de T_x^2 et nous donne un attracteur chaotique situé sur la droite invariante D_2 de type ensemble de Cantor.

L'ensemble des points d'un cycle de T_x^2 et ceux du cycle de T_y^2 correspondant par équivalence topologique, est un cycle de T . Par conséquent cet attracteur de l'application T est cyclique d'ordre 2 chaotique et de type ensemble de Cantor (*Fig. 3.5*).

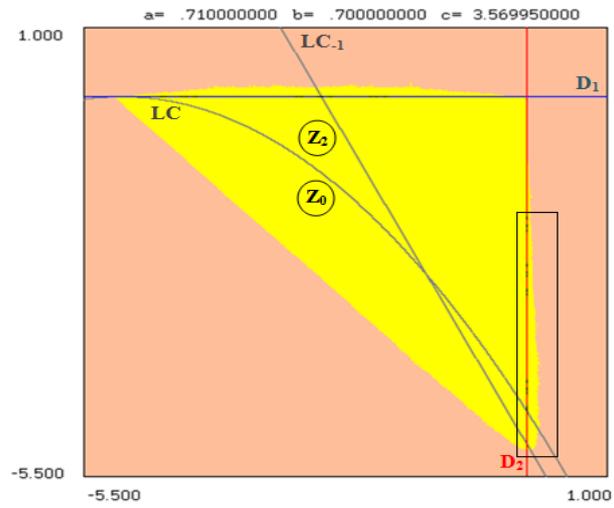


Fig. 3.5. L'attracteur de type ensemble de Cantor cyclique d'ordre 2.

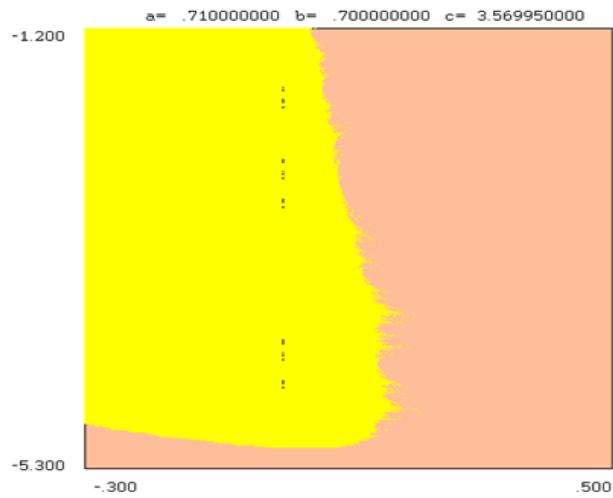


Fig. 3.5a. Zoom de la partie encadrée dans (Fig. 3.5).

4- En augmentant encore le paramètre c et en dehors des intervalles de périodicité [13], la dimension fractale de l'attracteur chaotique augmente (*Fig. 3.6*), et de plus la distance entre les frontières de l'attracteur et de son bassin d'attraction diminue (*Fig. 3.7*). Finalement lorsque le paramètre c atteint la valeur $c = 4.02$, une bifurcation de contact [21] a lieu ; autrement dit, en cette valeur un contact a lieu entre les frontières de l'attracteur et de son bassin, qui se traduit par une dégénérescence de ces derniers.

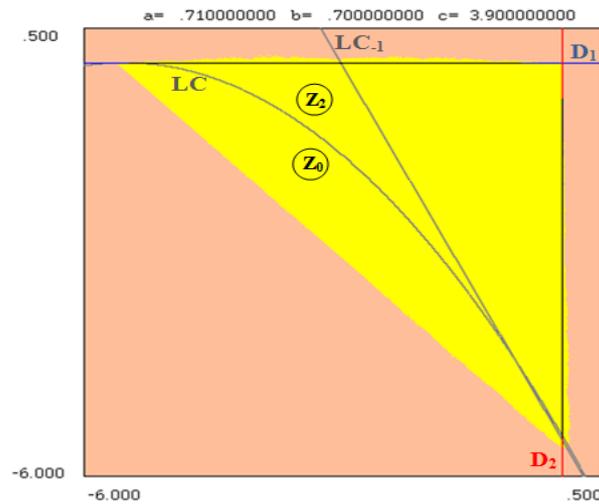


Fig. 3.6. L'attracteur a une dimension fractale supérieure à celle de l'attracteur de la figure (*Fig. 3.5*).

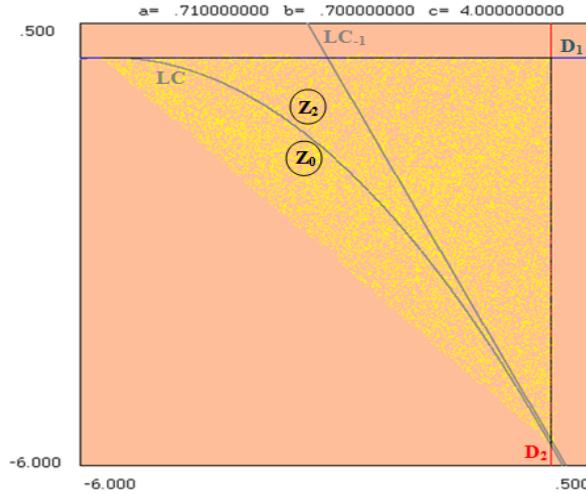


Fig. 3.7. La valeur c est très proche de la valeur de bifurcation de contact.

3.4 Frontière fractale des bassins d'attraction

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les changements dans la structure géométrique des bassins d'attraction D , ceci en fixant les valeurs des paramètres $b = 0.7, c = 3.4$ et en faisant varier le paramètre a dans le sens croissant de la valeur 0.57 à la valeur 0.69.

1- Pour $a = 0.57$, (Fig. 3.8) l'attracteur de l'application T est un point foyer F , dont le bassin d'attraction D est simplement connexe de frontière régulière par morceau (Fig. 3.8a) constituée d'une part par la variété stable locale $W_{loc}^S(C)$ d'un cycle $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ d'ordre 4 de type col et d'autre part par l'antécédent de premier rang $T^{-1}(W_{loc}^S(C))$ de $W_{loc}^S(C)$. Les variétés stables locales $W_{loc}^S(C_i), i = 1, 2, 3, 4$, sont délimitées par un cycle $N = \{N_1, N_2\}$ d'ordre 2 de type noeud instable. De plus ces variétés stables locales ont pour direction aux points C_1, C_3 (resp. C_2, C_4) la direction du vecteur propre de coordonnées $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$) associé à la valeur propre $|\lambda_1| < 1$.

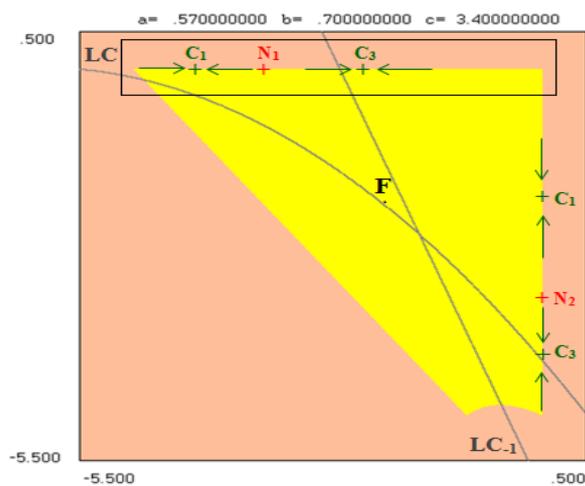


Fig. 3.8. Bassin d'attraction D simplement connexe du point fixe F .

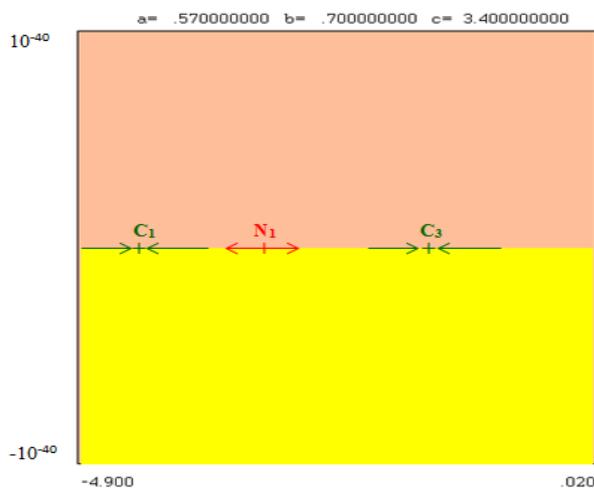


Fig. 3.8a. Zoom de la région encadrée dans (Fig. 3.8)

2- Pour $a = 0.5835$ (*Fig.3.9*), les valeurs propres $\lambda_1 = 1.39943$ et $\lambda_2 = -1.4$, du cycle noeud $N = \{N_1(-3.42857, 0), N_2(0, -3.42857)\}$ satisfont aux conditions $\lambda_1 > 1, \lambda_2 < -1$ et $|\lambda_2| > \lambda_1$, donc les points de ce cycle sont des points cusps. Comme l'image d'un point cusp est un point cusp et comme la frontière d'un bassin d'attraction est invariante par les déterminations inverses de T , alors les antécédents de tout rang d'un point cusp constituent une séquence arborescente infinie de points cusps situé sur la frontière du bassin d'attraction. Ceci caractérise la structure fractale de la frontière du bassin. La figure (*Fig. 3.9a*), qui est un zoom de la région encadrée de la figure (*Fig. 3.9*), représente une partie de la frontière du bassin d'attraction D où le point cusp N_1 apparaît avec ces antécédents.

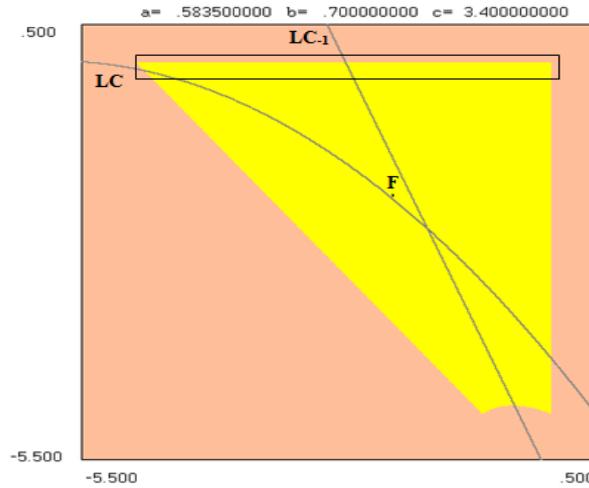


Fig. 3.9. Bassin d'attraction du point fixe F de frontière fractale.

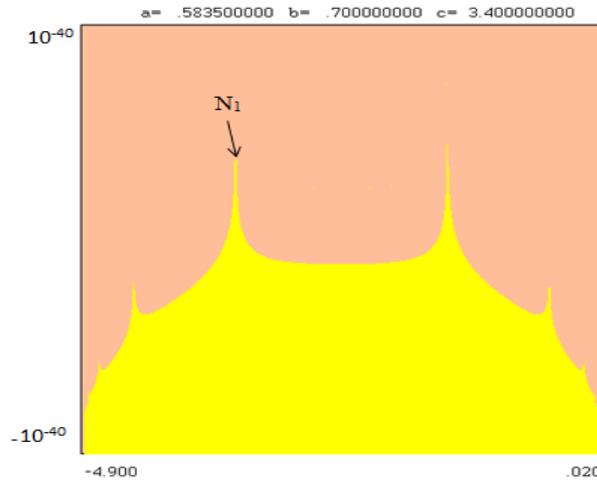


Fig. 3.9a. Zoom de la région encadrée dans (Fig. 3.9).

3- En augmentant encore le paramètre a , l'attracteur de l'application T évolue et devient, à la valeur $a = 0.591$, un point fixe A de type noeud, dont le bassin d'attraction est toujours simplement connexe. A la valeur $a = 0.595$ le bassin d'attraction du point fixe A n'est plus connexe et est constitué d'un bassin immédiat D_0 et de composantes connexes appelées îlots (Figs. 3.10 – 3.10a). Ce changement dans la structure du bassin correspond au fait que l'intersection $LC \cap D_0$ est non connexe [23]. On en déduit alors, qu'entre ces deux dernières valeurs de a , une bifurcation de type bassin connexe \leftrightarrow bassin non connexe a eu lieu.

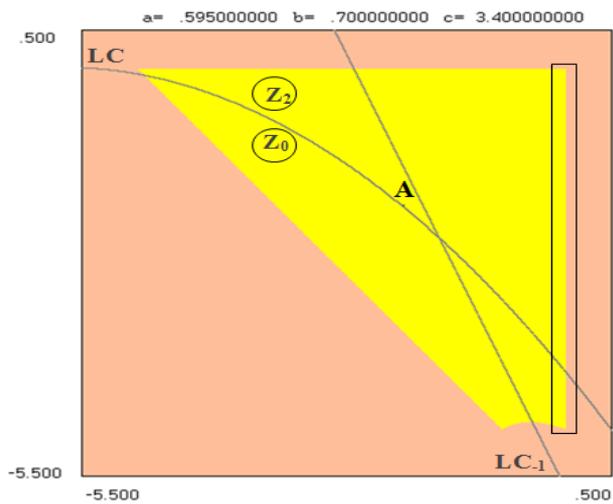


Fig. 3.10. Bassin d'attraction D non connexe.

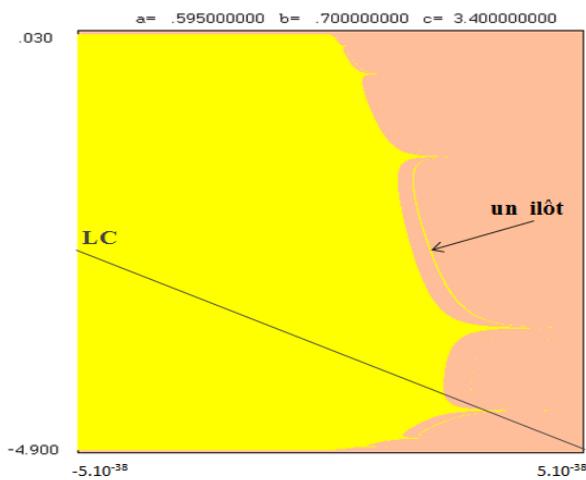


Fig. 3.10a. Zoom de la région encadrée dans la (Fig. 3.10)
L'apparence d'un îlot.

4- En continuant à augmenter la valeur du paramètre a , le bassin immédiat D_0 du bassin d'attraction D devient multiplement connexe, à la valeur $a = 0.686$, c'est à dire connexe avec des trous (ou lacs) (Figs. 3.11 – 3.11a), ceci résulte du fait que l'intersection $D_0 \cap LC$ n'est plus connexe. Ce changement dans la structure du bassin d'attraction est issu d'une bifurcation de type bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe. Ce qui nous donne un bassin d'attraction total D non connexe avec un bassin immédiat D_0 multiplement connexe (Fig. 3.12).

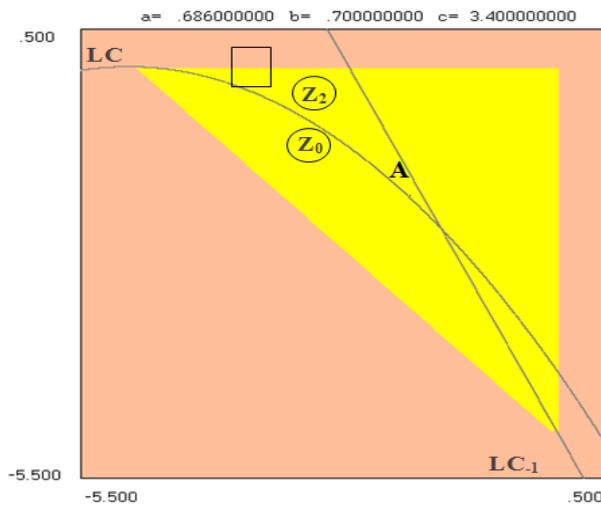


Fig. 3.11. Bassin d'attraction D multiplement connexe.

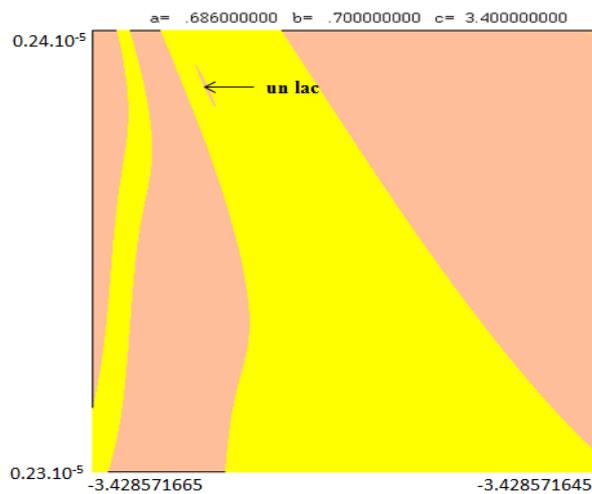


Fig. 3.11a. Zoom de la région encadrée dans (Fig.3.11)

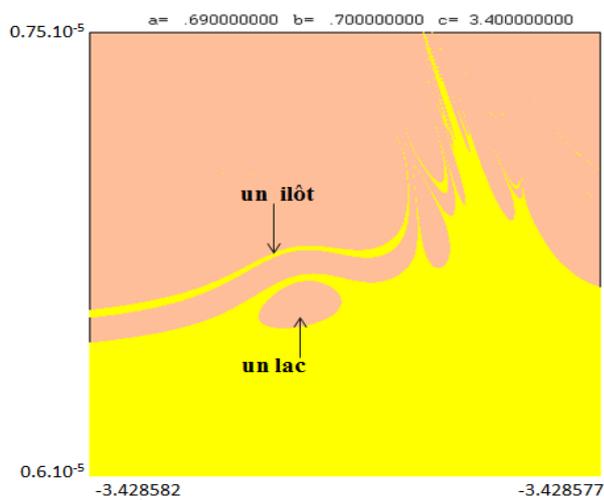


Fig. 3.12. Bassin d'attraction D non connexe avec le bassin immédiat D^* multiplement connexe.

CHAPITRE 4

Etude du plan de phases et de plans paramétriques d'une application non-inversible de type $(Z_1 < Z_3)$

Dans ce chapitre on a étudié dans la première partie l'apparition, l'évolution et le voisinage de deux attracteurs d'un système dynamique défini par une application T polynômiale quadratique bidimensionnelle. Le premier étant un attracteur de type ensemble de Cantor situé sur une droite invariante. Ainsi, il nous a suffi d'étudier la restriction de T à cette droite invariante. Le second est un cycle d'ordre deux de courbes fermées invariantes par T^2 . On a montré, par une approche numérique, que la structure topologique de la région proche de cet attracteur était dépendante de l'évolution des ensembles stables et instables (homoclinicité) d'un cycle d'ordre deux de points col localisé dans cette région. La deuxième partie concerne l'étude de certains plans paramétriques (a, b_0, c) , où b_0 est un réel quelconque fixé. On a montré qu'il existe des symétries par rapport à l'origine, à la première bissectrice et à la deuxième bissectrice. On a caractérisé, au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker, les zones d'existences de cycles attractifs (ou les langues d'Arnold).

Le système dynamique discret, considéré dans la présente étude, est engendré par une application polynômiale quadratique $T : (x, y) \rightarrow (x', y')$, de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , donnée par

$$T : \begin{cases} x' = ay + bxy \\ y' = cx + y^2 \end{cases}, \quad (4.1)$$

où a, b et c sont des paramètres réels.

4.1 Lignes critiques et points fixes de T

4.1.1 Lignes critiques

La recherche de l'inversibilité (ou la non inversibilité) de l'application T revient à considérer (4.1) comme un système algébrique et le résoudre par rapport aux inconnues x et y . Pour $c \neq 0$, ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x = \frac{y'-y^2}{c} \\ y^3 - \left(\frac{ac}{b} + y'\right)y + \frac{c}{b}x' = 0 \end{cases}, \quad (4.2)$$

pour $b \neq 0$. La résolution, par rapport à y , de la deuxième équation du système précédent, en utilisant les formules de Cardan, nous donne :

- Si $\Delta(x', y') = \frac{1}{4}\left(\frac{c}{b}x'\right)^2 - \frac{1}{27}\left(\frac{ac}{b} + y'\right)^3 > 0$, notre équation et donc le système (4.2) admet une seule solution réelle. Ceci veut dire, qu'un point (x', y') admet une unique préimage de rang un.

- Si $\Delta(x', y') = \frac{1}{4}\left(\frac{c}{b}x'\right)^2 - \frac{1}{27}\left(\frac{ac}{b} + y'\right)^3 < 0$, l'équation et donc le système (4.2) admet trois solutions réelles. Ceci veut dire, qu'un point (x', y') admet trois préimages de premier rang distinctes.

- Si $\Delta(x', y') = \frac{1}{4}\left(\frac{c}{b}x'\right)^2 - \frac{1}{27}\left(\frac{ac}{b} + y'\right)^3 = 0$, l'équation et donc le système admet trois solutions réelles dont deux égales. Ceci veut dire, qu'un point (x', y') admet trois préimages de rang un, dont deux sont confondues.

On en déduit que l'application est non inversible et que le plan de phases peut être subdivisé en deux régions ; une région Z_3 sur laquelle l'application T admet trois déterminations inverses, données par :

$$T_1^{-1} : \begin{cases} x = \frac{y'-y^2}{c} \\ y = \sqrt[3]{-\frac{cx'}{2b} + \sqrt{\Delta(x', y')}} + \sqrt[3]{-\frac{cx'}{2b} - \sqrt{\Delta(x', y')}} \end{cases}$$

$$T_2^{-1} : \begin{cases} x = \frac{y'-y^2}{c} \\ y = -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{cx'}{2b} + \sqrt{\Delta(x', y')}} + \sqrt[3]{-\frac{cx'}{2b} - \sqrt{\Delta(x', y')}} \right) + \\ \quad i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{cx'}{2b} + \sqrt{\Delta(x', y')}} - \sqrt[3]{-\frac{cx'}{2b} - \sqrt{\Delta(x', y')}} \right), \end{cases}$$

$$T_3^{-1} : \begin{cases} x = \frac{y'-y^2}{c} \\ y = -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{cx'}{2b} + \sqrt{\Delta(x', y')}} + \sqrt[3]{-\frac{cx'}{2b} - \sqrt{\Delta(x', y')}} \right) - \\ \quad i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{cx'}{2b} + \sqrt{\Delta(x', y')}} - \sqrt[3]{-\frac{cx'}{2b} - \sqrt{\Delta(x', y')}} \right), \end{cases}$$

une région Z_1 sur laquelle l'application T admet une seule détermination inverse, donnée par T_1^{-1} . Ces régions sont séparées par une courbe, notée LC et appelée *ligne critique*, d'équation $\Delta(x', y') = 0$, équivalente à

$$y' = \frac{3}{2b}(2bc^2)^{1/3}x'^{2/3} - \frac{ac}{b}, \quad (4.3)$$

qui est le lieu des points ayant au moins deux préimages de premier rang confondues. L'ensemble de ces préimages de premier rang confondues, noté LC_{-1} , est inclus dans $T^{-1}(LC)$. LC_{-1} coïncide avec l'ensemble

$$J_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \det(JT(x, y)) = 2by^2 - bcx - ac = 0\},$$

où JT est la matrice Jacobienne de T (T est continuellement différentiable). En effet, $\det(JT(x, y))$ change de signe lorsqu'on traverse l'ensemble J_0 , qui est une courbe continue d'équation

$$y = \pm \sqrt{\frac{bcx + ac}{2b}}, \quad (4.4)$$

ce qui implique que T n'est pas localement inversible au voisinage de J_0 et donc ce dernier coïncide avec LC_{-1} . La ligne critique LC possède un point cusp C de coordonnées $(0, -ac/b)$, (*fig.* 4.1). Ce point est le lieu où les trois déterminations inverses coïncident ; autrement dit, les trois préimages de premier rang du point cusp C sont confondues et ont pour coordonnées $(-a/b, 0)$.

Selon la classification et les notations des auteurs de la référence [21], notre application non inversible est de type $(Z_1 < Z_3)$.

4.1.2 Points fixes de T

La résolution du système

$$T(x, y) = (x, y) \iff \begin{cases} x = \frac{y-y^2}{c} \\ by^3 - (b+1)y^2 - (ac-1)y = 0 \end{cases},$$

nous donne le point fixe $O(0, 0)$ et si $\Delta = (b-1)^2 + 4abc > 0$, on a deux autres points fixes

$$P = \left(\frac{-1 + b - 2abc - \sqrt{(b-1)^2 + 4abc}}{2b^2c}, \frac{1 + b + \sqrt{(b-1)^2 + 4abc}}{2b} \right)$$

$$Q = \left(\frac{-1 + b - 2abc + \sqrt{(b-1)^2 + 4abc}}{2b^2c}, \frac{1 + b - \sqrt{(b-1)^2 + 4abc}}{2b} \right),$$

pour $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

Localiser la position des points fixes de T , par rapport aux régions Z_1 et Z_3 , revient à déterminer le nombre de leurs préimages de premier rang. Pour cela, il suffit de déterminer le signe de $\Delta(x', y')$ (discriminant de la deuxième équation du système (4.2)) en remplaçant (x', y') par les coordonnées de chaque point fixe. Par exemple, si les paramètres ont pour valeurs

$b = 1$ et 1.5 , et a, c telles que $ac > 0$ (valeurs prises dans les sections suivantes)

- $O \in Z_3$,
- pour $b = 1$ et $\begin{cases} ac = 1, P \in LC \\ ac \neq 1(ac > 0), P \in Z_3 \end{cases}$
- pour $b = 1.5$ et $ac > 0, P \in Z_3$
- pour $b = 1$ et $\begin{cases} ac = 4 \text{ ou } ac = \frac{1}{4}, Q \in LC \\ ac \neq 4 \text{ et } ac = \frac{1}{4} (ac > 0), Q \in Z_3 \end{cases}$
- pour $b = 1.5$ et $\begin{cases} ac = ((6 \pm \sqrt{13})^2 - 1)/24, Q \in LC \\ ac \neq ((6 \pm \sqrt{13})^2 - 1)/24, (ac > 0), Q \in Z_3 \end{cases}$.

4.2 Attracteurs sur une droite invariante

Malgré la simplicité d'une telle application; pour certaines valeurs des paramètres, le système peut montrer des dynamiques chaotiques. Ce comportement peut être retrouvée même pour des systèmes unidimensionnels, comme par exemple l'application logistique [17]. Nous allons démontrer que pour la valeur du paramètre $b = 1$ notre système dynamique possède un attracteur, de type ensemble de Cantor, situé sur une droite invariante. Une étude antérieure a été faite par V. Tsybulin et V. Yudovich [27] sur ce type d'attracteurs.

Nous commençons par la recherche des droites invariantes par T (T -invariante). Cette motivation résulte de simulations numériques qui ont donné, pour le paramètre $b = 1$, des attracteurs ayant la forme d'un segment de droite. Ainsi, dans tout ce paragraphe le paramètre b sera fixé à la valeur $b_0 = 1$.

Tout point $(x, kx + l)$ d'une droite D invariante par $T(T(D) = D)$ vérifie le système

$$T(x, kx + l) = ((a + x)(kx + l), cx + (kx + l)^2) = (x', kx' + l), \quad (4.5)$$

qui équivaut à l'équation

$$cx + (kx + l)^2 = k(a + x)(kx + l) + l. \quad (4.6)$$

Les valeurs des coefficients k et l , solutions du système

$$\begin{cases} c + 2kl = ak^2 + kl \\ l^2 = ak + l \end{cases},$$

déduit de l'équation (4.6), sont $(k, l) = (-c, -ac + 1)$ et $(k, l) = (\pm\sqrt{c/a}, 0)$ avec $a \neq 0$ et $ac \geq 0$. Il en résulte qu'il existe trois droites T -invariantes

$$\begin{aligned} D_1 & : y = -cx - ac + 1 \\ D_2 & : y = -\sqrt{c/ax} \\ D_3 & : y = \sqrt{c/ax}. \end{aligned}$$

Selon le signe du paramètre a (c a le même signe que a , puisque $ac \geq 0$), on a les situations suivantes :

- Si $a > 0$, les points fixes $P = ((-\sqrt{ac} - ac)/c, 1 + \sqrt{ac})$ et $Q = ((\sqrt{ac} - ac)/c, 1 - \sqrt{ac})$ de T correspondent respectivement aux points d'intersections des droites (D_1, D_2) et (D_1, D_3) .

- Si $a < 0$, P et Q correspondent respectivement aux points d'intersections des droites (D_1, D_3) et (D_1, D_2) .

Le point fixe $O = (0, 0)$ correspond au point d'intersection des droites (D_2, D_3) . Ce point, ayant pour multiplicateurs (valeurs propres) $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{ac}$, est attractif, de type noeud, pour $0 < ac < 1$ et répulsif pour $ac > 1$.

- Lorsque $0 < ac < 1$, les droites D_2 et D_3 coupent le bassin d'attraction de O , dont une partie de la frontière est constituée d'un segment de D_1 (Fig. 4.1).

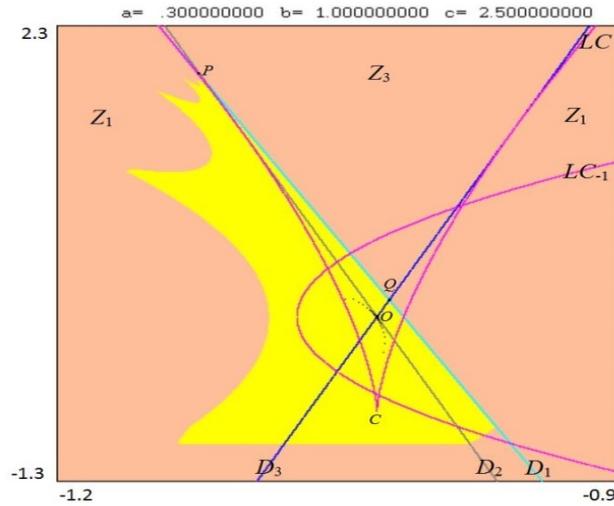


Fig. 4.1. Bassin d'attraction du point fixe O .

- Lorsque $ac = 1$, le point O est confondu avec Q . De même, pour $a > 0$ la droite D_2 (resp. D_3 pour $a < 0$) est confondue avec la droite D_1 .

- Lorsque $ac > 1$, le point fixe O devient répulsif; ce changement de stabilité à lieu simultanément avec l'apparition, sur la droite D_1 , d'un cycle d'ordre 2 de noeuds attractifs $\{N_1, N_2\}$. Ce changement qualitatif du plan de phases; autrement dit, cette bifurcation survient à la traversée de la courbe d'équation $ac = 1$. Evidemment la droite D_1 coupe le bassin d'attraction du cycle $\{N_1, N_2\}$ (puisque $\{N_1, N_2\} \in D_1$), dont une partie de la frontière est constituée d'un segment de D_2 (resp. D_3) pour $a > 0$ (resp. $a < 0$). On remarque que la position de ces droites invariantes, avant et après la bifurcation, est intervertie par rapport aux bassins d'attraction de O et de $\{N_1, N_2\}$ (Fig. 4.2).

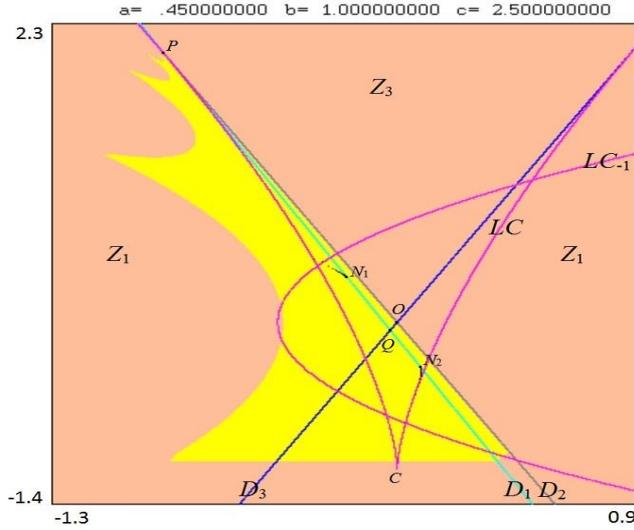


Fig. 4.2. Bassin d'attraction du cycle d'ordre 2 $\{N_1, N_2\}$.

Au-delà de la courbe de bifurcation, dans la région $ac > 1$, en variant un des deux paramètres a ou c , une cascade de bifurcations doublement de période à lieu, dont les cycles nait sont tous situés sur la droite D_1 . Pour déterminer le type d'attracteur résultant de la limite de cette suite de bifurcations, nous allons étudier la restriction T_1 de notre application T à cette droite invariante [10]. Cette restriction est donnée par :

$$T_1 : \begin{cases} x' = (a + x)(-cx - ac + 1) = (1/c)y(1 - y) \\ y' = cx + (-cx - ac + 1)^2 = -y(1 - y) - ac + 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

D'autre part, il est aisé de vérifier que les applications projections

$$P_x : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad P_y : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y(x)) \rightarrow x \quad \quad \quad (x(y), y) \rightarrow y,$$

sont des homéomorphismes ; il en résulte que l'application T_1 est topologiquement équivalente à chacune de ses composantes

$$T_{1,x} : x \rightarrow x' = (a + x)(-cx - ac + 1), \quad (4.8)$$

$$T_{1,y} : y \rightarrow y' = -y(1 - y) - ac + 1; \quad (4.9)$$

autrement dit,

$$T_1 = P_x^{-1} \circ T_{1,x} \circ P_x = P_y^{-1} \circ T_{1,y} \circ P_y,$$

et par transitivité $T_{1,x}$ est topologiquement équivalente à $T_{1,y}$. Par conséquent, il suffit d'étudier la dynamique de la composante $T_{1,x}$. Pour cela, transformons $T_{1,x}$ en faisant les changements de variables suivants :

- posons $t = cx + ca$, alors de (4.8) on a :

$$t' = T_{1,t}(t) = t(1 - t) + ac = - \left(t - \frac{1 + \sqrt{1 + 4ac}}{2} \right) \left(t - \frac{1 - \sqrt{1 + 4ac}}{2} \right). \quad (4.10)$$

- posons $z = t - \frac{1 + \sqrt{1 + 4ac}}{2}$. Par rapport à cette nouvelle variable, l'application (4.10) s'écrit :

$$z' = T_{1,z}(z) = -z(z + \sqrt{1 + 4ac}) - \frac{1 + \sqrt{1 + 4ac}}{2}. \quad (4.11)$$

- posons $u = \frac{z}{\sqrt{1 + 4ac}} + 1$, alors l'application (4.11), en fonction de cette variable, s'écrit :

$$u' = T_{1,u}(u) = \sqrt{1 + 4ac} u(1 - u) - \frac{1}{2\sqrt{1 + 4ac}} + \frac{1}{2}. \quad (4.12)$$

La composition des changements de variables dans (4.10), (4.11) et (4.12) nous donne

$$u = \varphi(x) = \frac{2cx + 2ca + \sqrt{1 + 4ac} - 1}{2\sqrt{1 + 4ac}},$$

qui est un homéomorphisme dans \mathbb{R} . Par conséquent l'application $T_{1,x}$ est topologiquement équivalente à $T_{1,u}$, qui est une application logistique perturbée [17].

Le changement de variable

$$u = \phi(y) = \frac{-2y + \sqrt{1 + 4ac} + 1}{2\sqrt{1 + 4ac}}$$

donne l'équivalence topologique entre la seconde composante $T_{1,y}$ de T_1 et l'application logistique perturbée $T_{1,u}$.

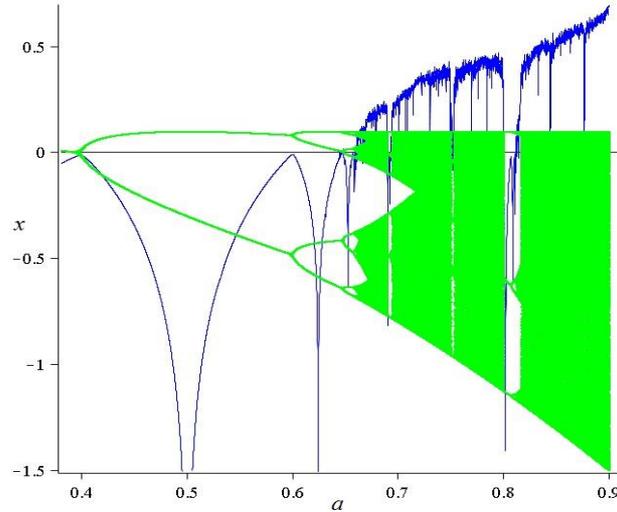


Fig.4.3. Diagramme de bifurcation et exposant de Lyapounov de $T_{1,x}$ en fonction du paramètre $a \in [0.38, 0.91]$ et $c_0 = 2.5$.

La figure (*Fig. 4.3*) représente le diagramme de bifurcation et l'exposant de Lyapounov de la composante $T_{1,x}$ en fonction du paramètre a et pour une valeur fixée $c_0 = 2.5$. On peut voir sur cette dernière (figure) la cascade de bifurcations doublement de période (ou bifurcations flip) typique de l'application logistique.

L'exploration numérique des attracteurs de T , à partir du diagramme de bifurcation de la figure (*Fig. 4.3*) et en parcourant les valeurs du paramètre a dans le sens croissant, nous donne :

- La valeur $a_1 = 0.4$ est une valeur de bifurcation flip ((a_1, c_0) appartient à la courbe de bifurcation $ac = 1$), dont la traversée correspond simultanément

à la déstabilisation du point fixe attractif $O = (0, 0)$ et à la naissance d'un cycle d'ordre 2 de noeuds attractifs $\{N_1, N_2\}$.

- La valeur $a_2 = 0.6$ est une deuxième valeur de bifurcation flip, dont la traversée correspond simultanément à la déstabilisation du cycle d'ordre 2 de noeuds attractifs $\{N_1, N_2\}$ et à la naissance d'un cycle d'ordre 4 de noeuds attractifs $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ (Fig. 4.4).

- En parcourant progressivement les valeurs du paramètre a , on localise une suite de valeurs de bifurcation flip $a_3 = 0.64724, a_4 = 0.657616, a_5 = 0.6598526, a_6 = 0.66033146, \text{etc.} \dots$, qui s'accroissent à la valeur $a_\infty \approx 0.6605$. En cette valeur, l'application T a un exposant de Lyapounov (pour presque toute condition initiale) strictement positif et le calcul de la dimension de box-counting (dimension fractale) de l'attracteur (Fig. 4.5) nous a donné $\dim \approx 0.678$. Autrement dit, comme prévu par l'équivalence topologique des composantes $T_{1,x}$ et $T_{1,y}$ avec l'application logistique, l'attracteur est chaotique de type ensemble de Cantor.

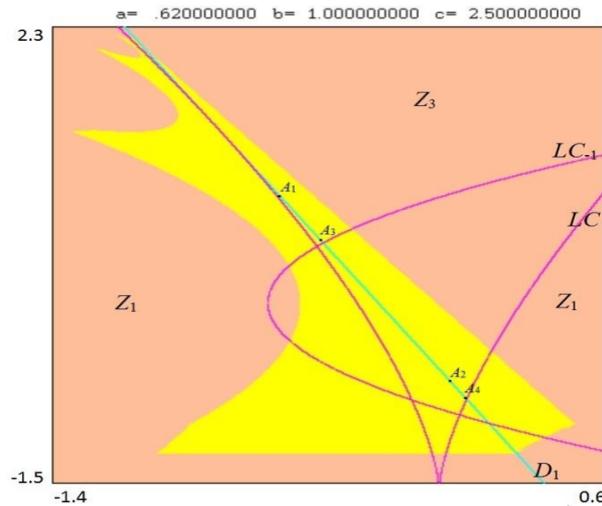


Fig. 4.4. $a_2 < a < a_3$. L'attracteur est un cycle 4 de noeuds $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

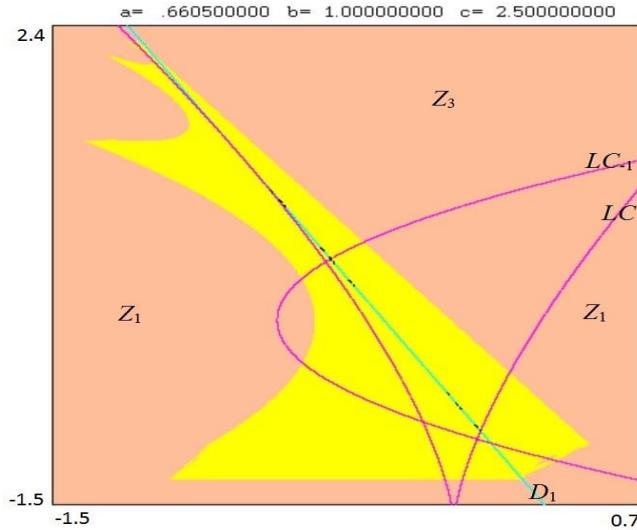


Fig. 4.5. $a = a_\infty$ L'attracteur est un ensemble de Cantor situé sur D_1 .

- Au-delà de la valeur a_∞ et en dehors des intervalles de périodicité (intervalles de a sur lesquels l'attracteur redevient un cycle de période finie [13]), la dimension fractale de l'attracteur chaotique augmente avec a (Fig. 4.6 et 4.7), et de plus la distance entre les frontières de l'attracteur et de son bassin d'attraction diminue. On remarque aussi que l'attracteur se situe dans la région Z_3 . Finalement, pour la valeur $a = 0.895$, une bifurcation de contact (contact entre ces deux frontières) [11] a lieu, causant une dégénérescence de l'attracteur chaotique.

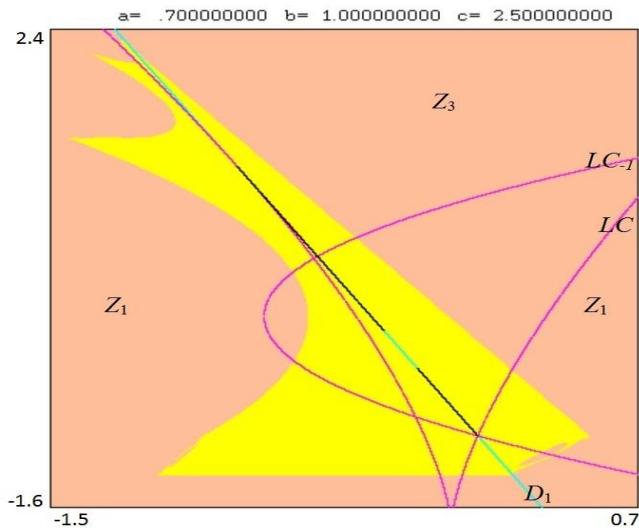


Fig. 4.6. $a > a_\infty$. L'attracteur de type ensemble de Cantor .

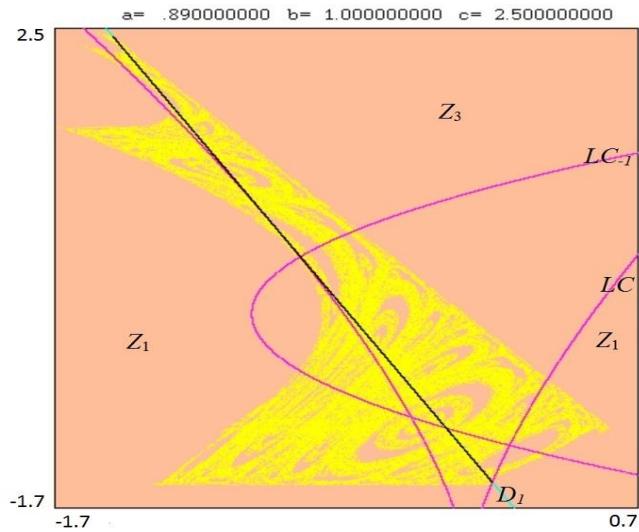


Fig. 4.7. La valeur de a est proche de la valeur de bifurcation de contact.

4.3 Courbes fermées (invariantes par T^2)

L'objet de ce paragraphe est l'étude, par une approche numérique, de la bifurcation conduisant à l'apparition simultanée de deux courbes fermées invariantes de stabilité différente, ainsi que l'évolution de ces dernières en fonction du paramètre a . Dans ce cas, on a fixé les paramètres $b = 1.5, c = 2.2$ et le paramètre $a \in I = [0.5, 0.78]$. En variant a dans le sens croissant, on obtient les situations suivantes :

- Sur le sous intervalle $[0.5, 0.70852]$ de I , le seul attracteur du système est un cycle d'ordre 2 de noeuds attractifs $\{N_1, N_2\}$, nait d'une bifurcation noeud-col.

- Une bifurcation flip a lieu à la valeur $a = 0.70853$ transformant le cycle d'ordre 2 $\{N_1, N_2\}$ en un cycle col $\{S_1, S_2\}$ et donnant naissance à un cycle d'ordre 4 de noeuds attractifs $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Ce dernier (cycle) se transforme, à la valeur $a = 0.71749$, en un cycle d'ordre 4 de foyers attractifs $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, (*Fig. 4.8a*). Relativement à la composée T^4 , les bassins d'attraction des foyers $F_i, i = 1, 2, 3, 4$, sont délimités par les ensembles stables $W^s(S_i), i = 1, 2$ (*Fig. 4.8b*). Lorsque le paramètre a croît, les deux branches $\omega_{1,1}$ et $\omega_{1,2}$ de $W^s(S_1)$ (resp. $\omega_{2,1}$ et $\omega_{2,2}$ de $W^s(S_2)$) forment des convolutions autour des foyers F_1 et F_3 (resp. F_2 et F_4) (*Fig. 4.9a*), qui deviennent de plus en plus denses (nombreuses) avec l'évolution du paramètre a (*Fig. 4.9b*). Ceci implique que les branches de $W^s(S_1)$ (resp. $W^s(S_2)$) se rapprochent l'une de l'autre. Jusqu'à la valeur $a = 0.747795027$, qui correspond à la limite de ce rapprochement entre les $\omega_{i,1}$ et $\omega_{i,2}, i = 1, 2$, notre plan de phase reste topologiquement équivalent (inchangé).

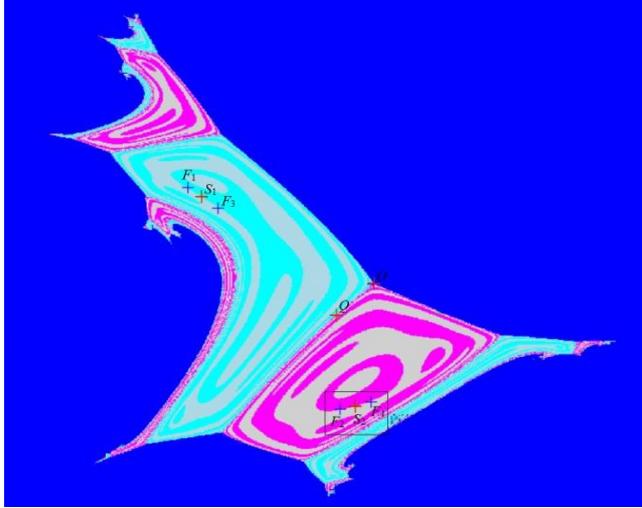


Fig. 4.8a. $a = 0.74, b = 1.5$ et $c = 2.2$, $(x, y) \in [-1.2, 0.9][-1.6, 2]$, relativement à T^4 , le bassin de chaque foyer F_i a une couleur propre.

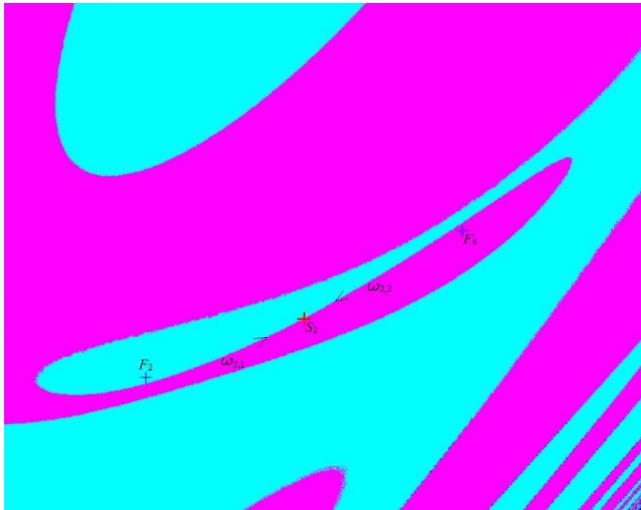


Fig. 4.8b. $a = 0.747$, $(x, y) \in [-0.155, 0.044][-0.935, -0.76]$, agrandissement de la région des foyers F_2 et F_4 .



Fig. 4.9a. $a = 0.7476, b = 1.5$ et $c = 2.2, (x, y) \in [-0.155, 0.044][[-0.935, -0.76]$.

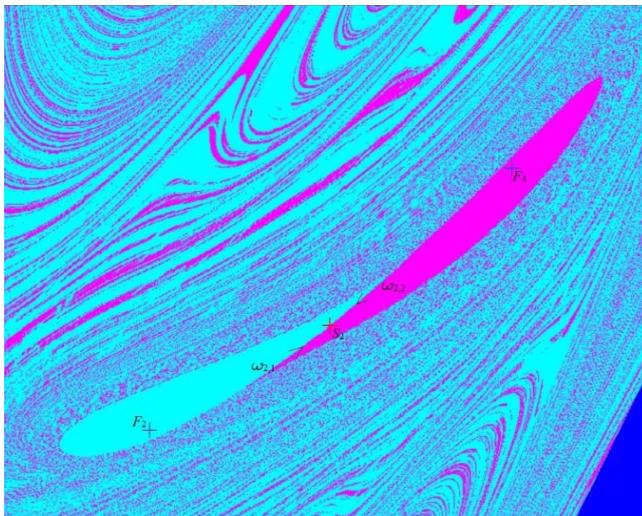


Fig. 4.9b. $a = 0.747793, (x, y) \in [-0.1496, 0.0216][[-0.9065, -0.8081]$.

- A la valeur $a = 0.747795028$, la structure topologique du plan de phases change dans les régions du cycle $\{F_i, i = 1, 2, 3, 4\}$, plus précisément dans les deux régions où les convolutions des $W^s(S_i), i = 1, 2$, étaient denses. En effet, il apparaît simultanément deux cycles d'ordre 2 de courbes invariantes fermées, l'un attractif $\{\Gamma_1^s, \Gamma_2^s\}$ et l'autre répulsif $\{\Gamma_1^u, \Gamma_2^u\}$. Chaque courbe Γ_i^s entoure une courbe $\Gamma_i^u, i = 1, 2$, et sont très proches l'une de l'autre à leur apparition. De plus chaque courbe Γ_i^u entoure les points F_i, F_{i+2} et $S_i, i = 1, 2$ (*Fig. 4.10*).

Dans le cas de systèmes dynamiques discrets, un mécanisme de bifurcation, suggérés par A. Agliari, G. I. Bischi, R. Dieci et L. Gardini [1], explique l'apparition, simultanée et proche l'une de l'autre, de courbes fermées invariantes de stabilité opposée comme étant la conséquence d'une connexion noeud-col ou foyer-col. Cependant on est confronté à des difficultés numériques pour détecter ces connexions, lorsqu'elles sont issues de cycles de très grandes périodes. Dans notre cas l'exploration numérique, pour la valeur précédente du paramètre a , ne nous a pas permis de trouver des connexions noeud-col ou foyer-col de cycles d'ordre inférieur ou égale à 200. Par conséquent, si l'apparition de ces courbes fermées invariantes ne sont pas le résultat d'une connexion de cycles d'ordre supérieur à 200, on peut conclure que, relativement à T^2 , une bifurcation noeud-col de courbes fermées invariantes a lieu entre les deux valeurs précédentes du paramètre a [10].

Relativement à T^2, Γ_1^u (resp. Γ_2^u) est à la fois frontière interne du bassin d'attraction de Γ_1^s (resp. Γ_2^s) et frontière externe du bassin d'attraction du cycle $\{F_1, F_3\}$ (resp. $\{F_2, F_4\}$). En outre les courbes Γ_1^u et Γ_2^u sont respectivement les ensembles α -limites des points des ensembles stables $W^s(S_1)$ et de $W^s(S_2)$. Ces derniers constituent respectivement les frontières internes des bassins des cycles $\{F_1, F_3\}$ et $\{F_2, F_4\}$ (*Fig. 4.10b et 4.10c*). Les ensembles instables $W^u(S_1)$ et $W^u(S_2)$ convergent respectivement vers les cycles $\{F_1, F_3\}$ et $\{F_2, F_4\}$, et sont respectivement entourés par les ensembles stables $W^s(S_1)$ et $W^s(S_2)$.

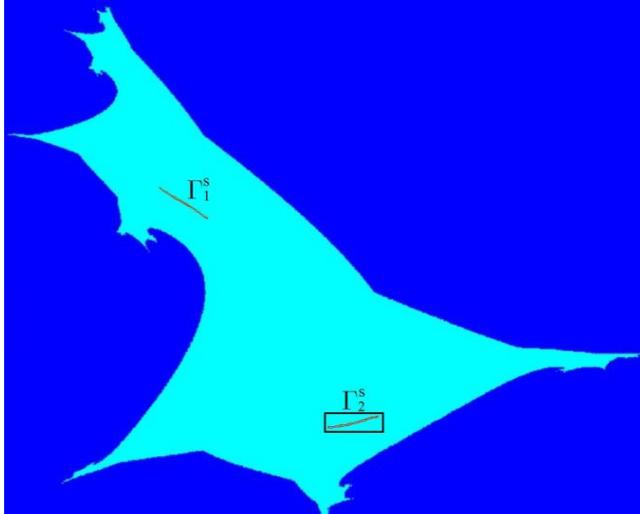


Fig. 4.10a. $a = 0.747795028, b = 1.5$ et $c = 2.2, (x, y) \in [-1.08, 0.8][[-1.5, 1.95]$.

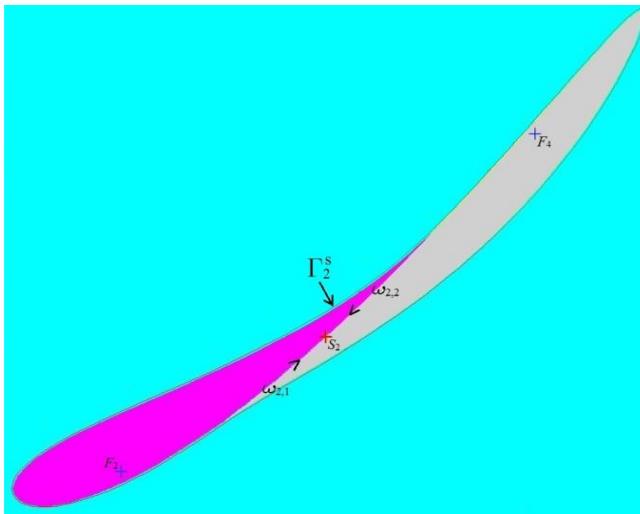


Fig. 4.10b. $(x, y) \in [-0.1379, 0.0114][[-0.8965, -0.8201]$, zoom de la région encadrée dans (Fig. 4.10).

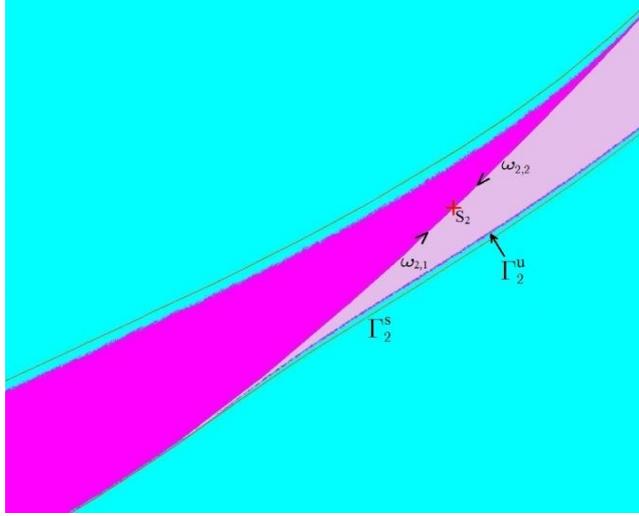


Fig. 4.10c. $(x, y) \in [-0.11070, -0.04285][-0.88860, -0.85536]$, zoom au voisinage du col S_2 .

- Lorsque la valeur du paramètre a augmente progressivement, les courbes $\Gamma_i^u, i = 1, 2$, rétrécissent et de façon accentuée au voisinage des points col $S_i, i = 1, 2$. Ceci implique que les ensembles $W^s(S_i)$ et $W^u(S_i), i = 1, 2$, se rapprochent l'un de l'autre. À la valeur $a \cong 0.7481855$, une tangence homocline entre les ensembles $W^s(S_i)$ et $W^u(S_i), i = 1, 2$, a lieu simultanément avec la disparition des courbes $\Gamma_i^u, i = 1, 2$. En cette valeur de bifurcation, des agrandissements du voisinage proche des S_i (Fig. 4.11a et 4.11b) nous permettent de conclure que cette tangence homocline est de type double boucle homocline et donc non suivie d'un enchevêtrement homocline. Lorsque le paramètre a dépasse cette dernière valeur de bifurcation, les deux doubles boucles homoclines se transforment en quatre courbes invariantes fermées répulsives, $\Gamma_{F_i}^u, i = 1, 2, 3, 4$, constituant, relativement à T^4 , les frontières des bassins d'attraction des points fixes $F_i, i = 1, 2, 3, 4$. Les ensembles stables $W^s(S_i)$, qui sont maintenant à l'extérieur des bassins des F_i , s'enroulent infiniment autour des courbes $\Gamma_{F_i}^u$; autrement dit, ces courbes constituent les ensembles α -limites des points des $W^s(S_i)$. Les ensembles $W^u(S_i)$, qui maintenant entourent les $W^s(S_i)$, convergent vers les courbes Γ_i^s (fig. 4.12a).

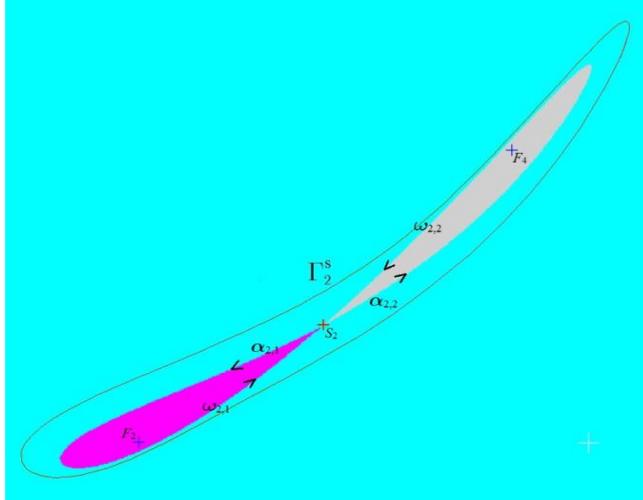


Fig. 4.11a. $a \cong 0.7481855$, $b = 1.5$ et $c = 2.2$, $(x, y) = [-0.1429, 0.016][-0.8979, -0.8159]$.

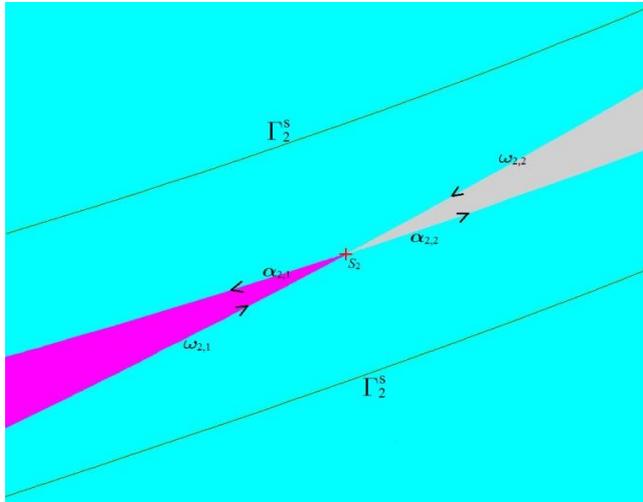


Fig. 4.11b. $(x, y) \in [-0.07720, -0.05153][-0.88030, -0.85849]$,

zoom au voisinage du col S_2 .

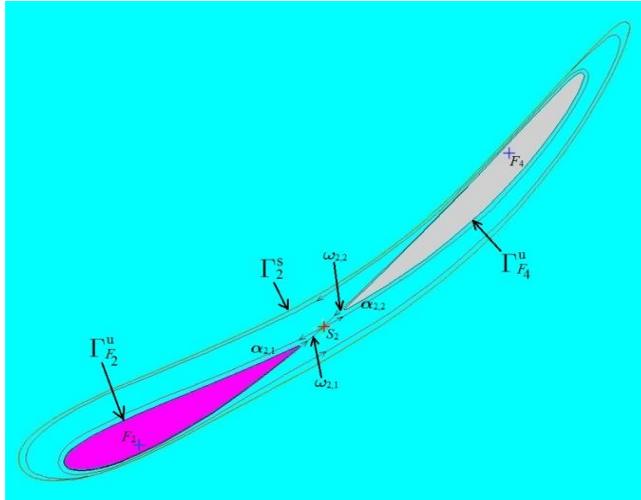


Fig. 4.12a. $a = 0.74843$, $b = 1.5$ et $c = 2.2$,
 $(x, y) \in [-0.145, 0.020][-0.900, -0.814]$.

- En continuant à augmenter la valeur du paramètre a , les courbes $\Gamma_{F_i}^u$ rétrécissent (*Fig. 4.12b*) jusqu'à se confondre, à la valeur $a = 0.749532$, avec les foyers F_i , puis disparaître au-delà de cette valeur, et les F_i deviennent des foyers répulsifs. Ce changement de portrait de phases correspond à une bifurcation de Neimark-Sacker sous-critique. Après cette bifurcation, il ne reste qu'un seul attracteur, le cycle 2 de courbes invariantes fermées $\{\Gamma_1^s, \Gamma_2^s\}$.

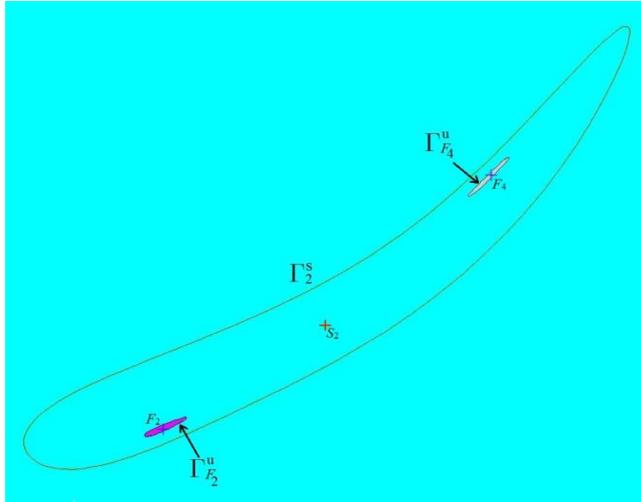


Fig. 4.12b. $a = 0.74945$, $(x, y) \in [-0.152, 0.025][-0.905, -0.810]$.

Remarque 4.3.1 Si on continue à varier le paramètre a , les courbes $\{\Gamma_1^s, \Gamma_2^s\}$ évoluent en un attracteur chaotique cyclique d'ordre deux. Cela est dû à des bifurcations globales de type contact entre la ligne critique LC_{-1} et la frontière de l'attracteur [[12]]. Par exemple pour $a = 0.7784$, on voit sur les figures (Fig. 4.13a et 4.13b) que les courbes $\{\Gamma_1^s, \Gamma_2^s\}$ ont évolué en un attracteur complexe, dont le calcul de la dimension de box-counting nous a donnée $\dim \cong 1.32$; autrement dit, cet attracteur a une structure fractale. De plus, pour cette valeur du paramètre a et pour presque toute condition initiale, l'application T a un exposant de Lyapounov strictement positif, ce qui veut dire que le système est sensible aux conditions initiales. Par conséquent notre attracteur cyclique est chaotique.

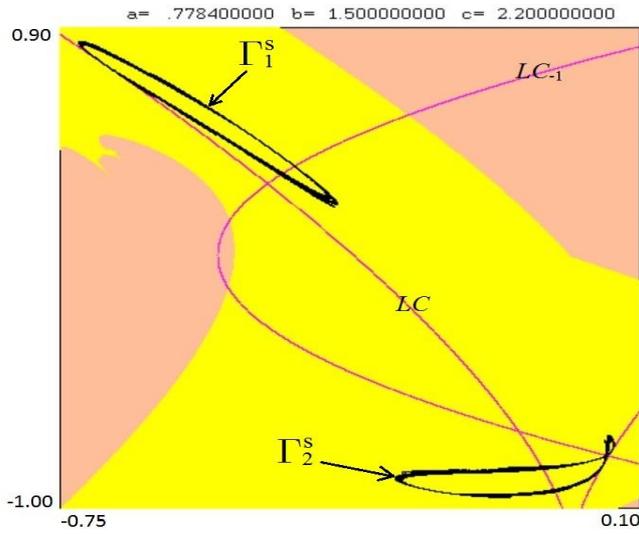


Fig. 4.13a. Zoom de la région de l'attracteur $\{\Gamma_1^s, \Gamma_2^s\}$.

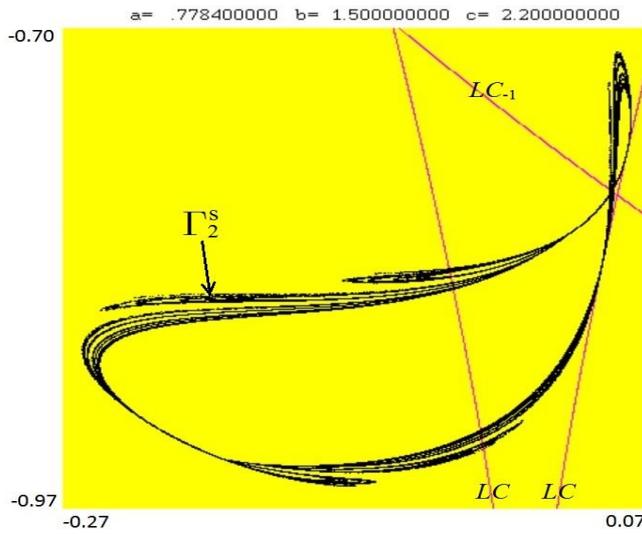


Fig. 4.13b. Zoom de la région de Γ_2^s .

4.4 Symétries dans les plans paramétriques (a, b_0, c)

La proposition suivante prouve qu'il existe, pour $b = b_0$ fixé, une symétrie par rapport à l'origine dans les plans paramétriques (a, b_0, c) du système.

Proposition 4.4.1 : *Pour des valeurs fixées (a_0, c_0) des paramètres (a, c) , le point (x_1, y_1) est un point d'un cycle d'ordre k de l'application T si et seulement si pour les valeurs $(-a_0, -c_0)$ des paramètres (a, c) , le point $(-x_1, y_1)$ est un point d'un cycle d'ordre k de l'application T . De plus, ces cycles de T sont de même type et de même stabilité.*

Démonstration : Pour des valeurs fixées (a_0, c_0) et $(-a_0, -c_0)$ de (a, c) , notons T respectivement par T_{a_0, c_0} et $T_{-a_0, -c_0}$, qui sont égales à :

$$\begin{aligned} T_{a_0, c_0}(x, y) &= (a_0 y + b x y, c_0 x + y^2) \\ T_{-a_0, -c_0}(x, y) &= (-a_0 y + b x y, -c_0 x + y^2). \end{aligned}$$

Ces applications sont régulièrement conjuguées (C^k -conjuguées, $k \geq 1$) par le difféomorphisme

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = (-x, y),$$

puisque

$$h(T_{a_0, c_0}(x, y)) = T_{-a_0, -c_0}(h(x, y))$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il en résulte que le difféomorphisme h applique respectivement un point fixe (x, y) , un cycle $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ de T_{a_0, c_0} sur le point fixe $(-x, y)$, le cycle $\{(-x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ de $T_{-a_0, -c_0}$. De plus, on sait que ces points fixes et cycles correspondants par h sont de même type et de même stabilité, puisque les polynômes caractéristiques des matrices Jacobiennes $JT_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i)$ et $JT_{-a_0, -c_0}^k(-x_i, y_i)$ coïncident. En effet

$$\det(JT_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i) - \lambda I) = \det(J(h^{-1} \circ T_{-a_0, -c_0}^k \circ h)(x_i, y_i) - \lambda I)$$

$$\begin{aligned}
 &= \det(Jh^{-1}(T_{-a_0, -c_0}^k(h(x_i, y_i))).JT_{-a_0, -c_0}^k(h(x_i, y_i)).Jh(x_i, y_i) - \lambda I) \\
 &= \det(Jh^{-1}(h(T_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i))).JT_{-a_0, -c_0}^k(-x_i, y_i).Jh(x_i, y_i) - \lambda I) \\
 &= \det((Jh(T_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i)))^{-1}.JT_{-a_0, -c_0}^k(-x_i, y_i).Jh(x_i, y_i) - \lambda I) \\
 &= \det((Jh(x_i, y_i))^{-1}.JT_{-a_0, -c_0}^k(-x_i, y_i).Jh(x_i, y_i) - (Jh(x_i, y_i))^{-1}.\lambda I.Jh(x_i, y_i)) \\
 &= \det((Jh(x_i, y_i))^{-1}.(JT_{-a_0, -c_0}^k(-x_i, y_i) - \lambda I).Jh(x_i, y_i)) \\
 &= (\det(Jh(x_i, y_i)))^{-1} \cdot \det(JT_{-a_0, -c_0}^k(-x_i, y_i) - \lambda I) \cdot \det(Jh(x_i, y_i)) \\
 &= \det(JT_{-a_0, -c_0}^k(-x_i, y_i) - \lambda I) \blacksquare
 \end{aligned}$$

Remarque 4.4.1 Comme les coordonnées x des points des cycles d'ordre k $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ et $\{(-x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ respectivement de T_{a_0, c_0} et de $T_{-a_0, -c_0}$ sont de signes opposés, on en déduit que le sens de rotation de ces cycles est opposé. Autrement dit, si l'ordre cyclique (l'ordre d'échange) des points du cycle $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ est égale à q , celui des points du cycle $\{(-x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ est égale à $k - q$.

La proposition ci-dessous prouve qu'il existe une symétrie par rapport à la première bissectrice dans les plans paramétriques (a, b_0, c) du système.

Proposition 4.4.2 Pour des valeurs fixées (a_0, c_0) des paramètres (a, c) , le point (x_1, y_1) est un point d'un cycle d'ordre k de l'application T , si et seulement si pour les valeurs (c_0, a_0) des paramètres (a, c) , le point $(\frac{c_0}{a_0}x_1, y_1)$ est un point d'un cycle d'ordre k de l'application T . De plus, ces cycles de T sont de même type et de même stabilité.

Démonstration : Pour des valeurs fixées (a_0, c_0) et (c_0, a_0) de (a, c) , où a_0 et c_0 sont non nulles, notons T respectivement par T_{a_0, c_0} et T_{c_0, a_0} , qui sont égales à :

$$\begin{aligned} T_{a_0, c_0}(x, y) &= (a_0 y + bxy, c_0 x + y^2) \\ T_{c_0, a_0}(x, y) &= (c_0 y + bxy, a_0 x + y^2). \end{aligned}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le difféomorphisme

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, h(x, y) = \left(\frac{c_0}{a_0} x, y \right),$$

vérifie

$$h(T_{a_0, c_0}(x, y)) = T_{c_0, a_0}(h(x, y)).$$

Les applications T_{a_0, c_0} et T_{c_0, a_0} sont alors régulièrement conjuguées (C^k -conjuguées, $k \geq 1$).

Il en résulte que le difféomorphisme h applique respectivement un point fixe (x, y) , un cycle $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ de T_{a_0, c_0} sur le point fixe $(\frac{c_0}{a_0} x, y)$, le cycle $\{(\frac{c_0}{a_0} x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ de T_{c_0, a_0} . De plus, on sait que ces points fixes et cycles correspondants par h sont de même type et de même stabilité, puisque les polynômes caractéristiques des matrices jacobiniennes $JT_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i)$ et $JT_{c_0, a_0}^k(\frac{c_0}{a_0} x_i, y_i)$ coïncident. En effet

$$\begin{aligned} \det(JT_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i) - \lambda I) &= \det(J(h^{-1} \circ T_{c_0, a_0}^k \circ h)(x_i, y_i) - \lambda I) \\ &= \det(Jh^{-1}(T_{c_0, a_0}^k(h(x_i, y_i))).JT_{c_0, a_0}^k(h(x_i, y_i)).Jh(x_i, y_i) - \lambda I) \\ &= \det(Jh^{-1}(h(T_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i))).JT_{c_0, a_0}^k(\frac{c_0}{a_0} x_i, y_i).Jh(x_i, y_i) - \lambda I) \\ &= \det((Jh(T_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i)))^{-1}.JT_{c_0, a_0}^k(\frac{c_0}{a_0} x_i, y_i).Jh(x_i, y_i) - \lambda I) \\ &= \det((Jh(x_i, y_i))^{-1}.JT_{c_0, a_0}^k(\frac{c_0}{a_0} x_i, y_i).Jh(x_i, y_i) - (Jh(x_i, y_i))^{-1}.\lambda I.Jh(x_i, y_i)) \\ &= \det((Jh(x_i, y_i))^{-1}.(JT_{c_0, a_0}^k(\frac{c_0}{a_0} x_i, y_i) - \lambda I).Jh(x_i, y_i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\det(Jh(x_i, y_i)))^{-1} \cdot \det(JT_{c_0, a_0}^k(\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i) - \lambda I) \cdot \det(Jh(x_i, y_i)) \\
 &= \det(JT_{c_0, a_0}^k(\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i) - \lambda I) \blacksquare
 \end{aligned}$$

Remarque 4.4.2 Les cycles d'ordre k $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ et $\{(\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ respectivement de T_{a_0, c_0} et de T_{c_0, a_0} ont le même sens de rotation si leurs premières coordonnées $x_i, (\frac{c_0}{a_0})x_i$ sont de même signe, c'est-à-dire $\frac{c_0}{a_0}$ positif, et de sens de rotation opposé si $\frac{c_0}{a_0}$ est négatif. Autrement dit, si l'ordre cyclique des points du cycle $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ est égale à q , celui des points du cycle $\{(\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ est aussi égale à q si $\frac{c_0}{a_0}$ est positif, et est égale à $k - q$ si $\frac{c_0}{a_0}$ est négatif.

La proposition ci-dessous prouve qu'il existe une symétrie par rapport à la deuxième bissectrice dans les plans paramétriques (a, b_0, c) du système.

Proposition 4.4.3 : Pour des valeurs fixées (a_0, c_0) des paramètres (a, c) , le point (x_1, y_1) est un point d'un cycle d'ordre k de l'application T , si et seulement si pour les valeurs $(-c_0, -a_0)$ des paramètres (a, c) , le point $(-\frac{c_0}{a_0}x_1, y_1)$ est un point d'un cycle d'ordre k de l'application T . De plus, ces cycles de T sont de même type et de même stabilité.

Démonstration : Pour des valeurs fixées (a_0, c_0) et $(-c_0, -a_0)$ de (a, c) , ou a_0 et c_0 sont non nulles, notons T respectivement par T_{a_0, c_0} et $T_{-c_0, -a_0}$, qui sont égales à :

$$\begin{aligned}
 T_{a_0, c_0}(x, y) &= (a_0y + bxy, c_0x + y^2) \\
 T_{-c_0, -a_0}(x, y) &= (-c_0y + bxy, -a_0x + y^2).
 \end{aligned}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le difféomorphisme

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, h(x, y) = (-\frac{c_0}{a_0}x, y),$$

vérifie

$$h(T_{a_0, c_0}(x, y)) = T_{-c_0, -a_0}(h(x, y)).$$

Les applications T_{a_0, c_0} et $T_{-c_0, -a_0}$ sont régulièrement conjuguées (C^k -conjuguées, $k \geq 1$). Il en résulte que le difféomorphisme h applique respectivement un point fixe (x, y) , un cycle $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ de T_{a_0, c_0} sur le point fixe $(-\frac{c_0}{a_0}x, y)$, le cycle $\{(-\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ de $T_{-c_0, -a_0}$. De plus, on sait que ces points fixes et cycles correspondants par h sont de même type et de même stabilité, puisque les polynômes caractéristiques des matrices jacobiniennes $JT_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i)$ et $JT_{-c_0, -a_0}^k(-\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i)$ coïncident. En effet

$$\begin{aligned} \det(JT_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i) - \lambda I) &= \det(J(h^{-1} \circ T_{-c_0, -a_0}^k \circ h)(x_i, y_i) - \lambda I) \\ &= \det(Jh^{-1}(T_{-c_0, -a_0}^k(h(x_i, y_i))).JT_{-c_0, -a_0}^k(h(x_i, y_i)).Jh(x_i, y_i) - \lambda I) \\ &= \det(Jh^{-1}(h(T_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i))).JT_{-c_0, -a_0}^k(-\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i).Jh(x_i, y_i) - \lambda I) \\ &= \det((Jh(T_{a_0, c_0}^k(x_i, y_i)))^{-1}.JT_{-c_0, -a_0}^k(-\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i).Jh(x_i, y_i) - \lambda I) \\ &= \det((Jh(x_i, y_i))^{-1}.JT_{-c_0, -a_0}^k(-\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i).Jh(x_i, y_i) - (Jh(x_i, y_i))^{-1}.\lambda I.Jh(x_i, y_i)) \\ &= \det((Jh(x_i, y_i))^{-1}.(JT_{-c_0, -a_0}^k(-\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i) - \lambda I).Jh(x_i, y_i)) \\ &= (\det(Jh(x_i, y_i)))^{-1} \cdot \det(JT_{-c_0, -a_0}^k(-\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i) - \lambda I) \cdot \det(Jh(x_i, y_i)) \\ &= \det(JT_{-c_0, -a_0}^k(-\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i) - \lambda I) \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 4.4.3 : Les cycles d'ordre k $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ et $\{(-\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ respectivement de T_{a_0, c_0} et de $T_{-c_0, -a_0}$ ont le même sens de rotation si leurs premières coordonnées $x_i, (-\frac{c_0}{a_0})x_i$ sont de même signe, c'est-à-dire $\frac{c_0}{a_0}$ négatif, et de sens de rotation opposé si $\frac{c_0}{a_0}$ est positif. Autrement dit, si l'ordre cyclique des points du cycle $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ est égale à q , celui des points du cycle

$\{(-\frac{c_0}{a_0}x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ est aussi égale à q si $\frac{c_0}{a_0}$ est négatif, et est égale à $k - q$ si $\frac{c_0}{a_0}$ est positif.

La proposition ci-dessous établit la relation existante entre les coordonnées des points des cycles d'ordre k de l'application T_{a_0, c_0} et celles des points des cycles d'ordre k de l'application T_{a_1, c_1} où (a_0, c_0) et (a_1, c_1) sont des points arbitraires (du plan paramétrique) appartenant à une courbe hyperbolique d'équation $a.c = cte$.

Proposition 4.4.4 *Pour toutes valeurs (a_0, c_0) et (a_1, c_1) des paramètres (a, c) appartenant à une courbe hyperbolique d'équation $a.c = cte$, le point (x_1, y_1) est un point d'un cycle d'ordre k de l'application T_{a_0, c_0} , si et seulement si le point $(\frac{c_0}{c_1}x_1, y_1) = (\frac{a_1}{a_0}x_1, y_1)$ est un point d'un cycle d'ordre k de l'application T_{a_1, c_1} . De plus, ces cycles de T sont de même type et de même stabilité.*

Démonstration : Pour des valeurs fixées (a_0, c_0) et (a_1, c_1) telles que $a_0.c_0 = a_1.c_1 = cte$, notons T respectivement par T_{a_0, c_0} et T_{a_1, c_1} , qui sont égales à :

$$\begin{aligned} T_{a_0, c_0}(x, y) &= (a_0y + bxy, c_0x + y^2) \\ T_{a_1, c_1}(x, y) &= (a_1y + bxy, c_1x + y^2). \end{aligned}$$

Tout d'abord on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x', y') &= T_{a_0, c_0}(x, y) = (a_0y + bxy, c_0x + y^2) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{c_0}{c_1}x', y'\right) &= \left(\frac{c_0}{c_1}a_0y + \frac{c_0}{c_1}bxy, c_0x + y^2\right) \\ &= \left(a_1y + b\left(\frac{c_0}{c_1}x\right)y, c_1\left(\frac{c_0}{c_1}x\right) + y^2\right) = T_{a_1, c_1}\left(\frac{c_0}{c_1}x, y\right). \end{aligned}$$

Il en résulte

1- pour $k = 1$, un point fixe (x_1, y_1) de T_{a_0, c_0} vérifie

$$T_{a_0, c_0}(x_1, y_1) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_1, y_1 = T_{a_1, c_1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_1, y_1,$$

ainsi $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_1, y_1$ est un point fixe de T_{a_1, c_1} .

2- Pour $k > 1$, un point (x_1, y_1) d'un cycle d'ordre k de T_{a_0, c_0} vérifie

$$\begin{cases} T_{a_0, c_0}(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ T_{a_0, c_0}(x_2, y_2) = (x_3, y_3) \\ \vdots \\ T_{a_0, c_0}(x_k, y_k) = (x_1, y_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_{a_1, c_1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_1, y_1 = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_2, y_2 \\ T_{a_1, c_1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_2, y_2 = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_3, y_3 \\ \vdots \\ T_{a_1, c_1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_k, y_k = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_1, y_1 \end{cases}$$

ainsi $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_1, y_1$ est un point d'un cycle d'ordre k de T_{a_1, c_1} .

Pour montrer que les cycles d'ordre k $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ de T_{a_0, c_0} et $\{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_i, y_i\}_{1 \leq i \leq k}$ de T_{a_1, c_1} sont de même type et de même stabilité, il suffit de montrer que les polynômes caractéristiques des matrices Jacobiennes $JT_{a_0, c_0}^k(x_1, y_1)$ de T_{a_0, c_0}^k au point (x_1, y_1) et $JT_{a_1, c_1}^k \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_1, y_1$ de T_{a_1, c_1}^k au point $\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_1, y_1$ sont identiques. Ceci revient à montrer que

$$\det(JT_{a_0, c_0}^k(x_1, y_1)) = \det(JT_{a_1, c_1}^k \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_1, y_1)$$

et

$$\text{tr} \left(JT_{a_0, c_0}^k(x_1, y_1) \right) = \text{tr} \left(JT_{a_1, c_1}^k \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x_1, y_1 \right)$$

Comme pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\det(JT_{a_0, c_0}(x, y)) = \begin{vmatrix} by & a_0 + bx \\ c_0 & 2y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} by & a_1 + b \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x \\ c_1 & 2y \end{vmatrix} = \det \left(JT_{a_1, c_1} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} x, y \right),$$

alors

$$\begin{aligned}
 & \det (JT_{a_0, c_0}^k (x_1, y_1)) \\
 &= \det (JT_{a_0, c_0} (x_k, y_k)) \cdot \det (JT_{a_0, c_0} (x_{k-1}, y_{k-1})) \cdots \det (JT_{a_0, c_0} (x_1, y_1)) \\
 &= \det \left(JT_{a_1, c_1} \left(\frac{c_0}{c_1} x_k, y_k \right) \right) \cdot \det \left(JT_{a_1, c_1} \left(\frac{c_0}{c_1} x_{k-1}, y_{k-1} \right) \right) \cdots \det \left(JT_{a_1, c_1} \left(\frac{c_0}{c_1} x_1, y_1 \right) \right) \\
 &= \det \left(JT_{a_1, c_1}^k \left(\frac{c_0}{c_1} x_1, y_1 \right) \right).
 \end{aligned}$$

D'autre part notons par $\left(a_{i,j}^k \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$ la matrice Jacobienne

$$JT_{a_0, c_0} (x_k, y_k) = \begin{pmatrix} by_k & a_0 + bx_k \\ c_0 & 2y_k \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice Jacobienne

$$\begin{aligned}
 JT_{a_1, c_1} \left(\frac{c_0}{c_1} x_k, y_k \right) &= \begin{pmatrix} by_k & a_1 + b \left(\frac{c_0}{c_1} x_k \right) \\ c_1 & 2y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} by_k & \frac{c_0}{c_1} (a_0 + bx_k) \\ \frac{c_1}{c_0} c_0 & 2y_k \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} by_k & \lambda (a_0 + bx_k) \\ \lambda^{-1} c_0 & 2y_k \end{pmatrix} = \left(\lambda^{j-i} a_{i,j}^k \right)_{1 \leq i, j \leq 2},
 \end{aligned}$$

où $\lambda = \frac{c_0}{c_1}$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
 JT_{a_0, c_0}^k (x_1, y_1) &= JT_{a_0, c_0} (x_k, y_k) \cdot JT_{a_0, c_0} (x_{k-1}, y_{k-1}) \cdots \cdot JT_{a_0, c_0} (x_1, y_1) \\
 &= \left(a_{i,j}^k \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \cdot \left(a_{i,j}^{k-1} \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \cdots \cdot \left(a_{i,j}^1 \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \\
 &= \left(\sum_{j_1, \dots, j_{k-1}=1}^2 a_{i, j_1}^k \cdot a_{j_1, j_2}^{k-1} \cdots a_{j_{k-1}, l}^1 \right)_{1 \leq i, l \leq 2}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 JT_{a_1, c_1}^k \left(\frac{c_0}{c_1} x_1, y_1 \right) &= JT_{a_1, c_1} \left(\frac{c_0}{c_1} x_k, y_k \right) \cdot JT_{a_1, c_1} \left(\frac{c_0}{c_1} x_{k-1}, y_{k-1} \right) \cdots \cdot JT_{a_1, c_1} \left(\frac{c_0}{c_1} x_1, y_1 \right) \\
 &= \left(\lambda^{j-i} a_{i,j}^k \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \cdot \left(\lambda^{j-i} a_{i,j}^{k-1} \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \cdots \cdot \left(\lambda^{j-i} a_{i,j}^1 \right)_{1 \leq i, j \leq 2} \\
 &= \left(\sum_{j_1, \dots, j_{k-1}=1}^2 \lambda^{j_1-i} a_{i, j_1}^k \cdot \lambda^{j_2-j_1} a_{j_1, j_2}^{k-1} \cdots \lambda^{l-j_{k-1}} a_{j_{k-1}, l}^1 \right)_{1 \leq i, l \leq 2}
 \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{j_1, \dots, j_{k-1}=1}^2 \lambda^{l-i} a_{i, j_1}^k \cdot a_{j_1, j_2}^{k-1} \cdot \dots \cdot a_{j_{k-1}, l}^1 \right)_{1 \leq i, l \leq 2}$$

Par conséquent

$$\text{tr}(JT_{a_0, c_0}^k(x_1, y_1)) = \text{tr}(JT_{a_1, c_1}^k\left(\frac{c_0}{c_1}x_1, y_1\right))$$

Finalement, les polynômes caractéristiques des matrices jacobiniennes $JT_{a_0, c_0}^k(x_1, y_1)$ et $JT_{a_1, c_1}^k\left(\frac{c_0}{c_1}x_1, y_1\right)$ coïncident

$$\begin{aligned} & \lambda^2 - \text{tr}(JT_{a_0, c_0}^k(x_1, y_1))\lambda + \det(JT_{a_0, c_0}^k(x_1, y_1)) \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(JT_{a_1, c_1}^k\left(\frac{c_0}{c_1}x_1, y_1\right))\lambda + \det(JT_{a_1, c_1}^k\left(\frac{c_0}{c_1}x_1, y_1\right)) \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 4.4.4 Si (a_0, c_0) et (a_1, c_1) appartiennent à la même branche de l'hyperbole d'équation $a \cdot c = cte$, c'est-à-dire $\frac{c_0}{c_1}$ positif, les cycles d'ordre k $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ et $\{(\frac{c_0}{c_1}x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ respectivement de T_{a_0, c_0} et de T_{a_1, c_1} ont le même sens de rotation puisque leurs premières coordonnées $x_i, (\frac{c_0}{c_1})x_i$ sont de même signe. Dans le cas contraire, le sens de rotation de ces cycles d'ordre k est opposé. Autrement dit, si l'ordre cyclique des points du cycle $\{(x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ est égale à q , celui des points du cycle $\{(\frac{c_0}{c_1}x_i, y_i)\}_{1 \leq i \leq k}$ est aussi égale à q si $\frac{c_0}{a_0}$ est positif, et est égale à $k - q$ si $\frac{c_0}{c_1}$ est négatif.

Remarque 4.4.5 Il résulte des propositions précédentes, que pour trouver les cycles associés aux différents points (a, c) d'un plan paramétrique (a, c) , il suffit de rechercher (par exemple par une simulation numérique) les cycles associés aux points (a, c) de deux sections transverses aux branches des hyperboles $a \cdot c = cte$, une située dans un quadrant $a \cdot c > 0$ du plan paramétrique (a, c) et l'autre dans un quadrant $a \cdot c < 0$ (par exemple des demi droites horizontales ou verticales).

4.5 Etude des plans paramétriques (a, b_0, c) au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker (langues d'Arnold)

Notre système dépend de trois paramètres, ainsi les valeurs d'une bifurcation peuvent constituer une variété (surface) de codimension 1 dans l'espace des paramètres. Les conditions analytiques permettant de déterminer la variété de bifurcation de Neimark-Sacker associée au point fixe $(0, 0)$ nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} \det(JT(0, 0) - \lambda I) = 0 \\ \lambda = \rho e^{\pm i\theta} \\ \rho = 1 \end{cases} .$$

Pour notre application, ce système exige que les paramètres a et c soient de signes opposés, et on aura donc :

$$\begin{cases} \lambda^2 - ac = 0 \\ \lambda = \pm i\sqrt{-ac} \\ |\lambda| = \sqrt{-ac} = 1 \end{cases} .$$

On en déduit que la variété de bifurcation de Neimark-Sacker est caractérisée par l'équation :

$$(\sqrt{-ac})^2 = -ac = 1 \Leftrightarrow c = \frac{-1}{a}.$$

Remarque 4.5.1 1) Cette bifurcation ne dépend pas du paramètre b , ainsi pour $b = b_0$ fixé, le lieu de cette bifurcation est une hyperbole d'équation $ac = -1$ dans le plan paramétrique (a, b_0, c) . Par conséquent dans l'espace des paramètres, cette hyperbole est une courbe directrice de la variété de bifurcation, qui est donc un cylindre hyperbolique droit (parallèle à l'axe des b).

2) Pour une valeur de b fixée, la région du plan paramétrique délimitée par la courbe de bifurcation et les axes a et c , région déterminée par

4.5. Etude des plans paramétriques (a, b_0, c) au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker (langues d'Arnold)

la double inégalité $-1 < a.c < 0$, est le lieu des valeurs des paramètres a et c pour lesquelles les multiplicateurs du point fixe $(0, 0)$ ont pour module $|\lambda| = |\pm i\sqrt{-ac}| = \sqrt{-ac} < 1$ et donc ce point fixe est un foyer attractif. En traversant la courbe de bifurcation à partir de cette région, le point fixe foyer $(0, 0)$ devient répulsif et une courbe invariante fermée attractive née à la bifurcation entoure ce dernier (Fig. 4.14). Ceci implique que cette bifurcation de Neimark-Sacker est de type super-critique.

Ces remarques ont fixé nos choix des plans paramétriques (et des régions dans ces plans) pour la recherche, dans le voisinage de la variété de bifurcation de Neimark-Sacker, des valeurs des paramètres pour lesquelles il existe au moins un attracteur. Ainsi on a effectué des simulations numériques dans des plans paramétriques (a, b_0, c) (Figs. 4.14 – 4.15 – 4.16) où on s'est limité à des valeurs b_0 strictement négatives. Ensuite, pour mieux se représenter le voisinage de cette variété de bifurcation, on a effectué d'autres simulations numériques dans des régions de plans paramétriques (a_0, b, c) et (a, b, c_0) transverses à cette variété (Fig. 4.17).

Ces simulations nous donnent des zones de différentes couleurs numérotées k , $k = 1 \dots 14$, correspondant aux lieux d'existence de cycles attractifs d'ordre k . La zone noire ($k = 15$) correspond au lieu où il peut exister des cycles attractifs d'ordre supérieur ou égal à 15, des courbes invariantes fermées attractives ou des attracteurs chaotiques. Les zones blanches correspondent aux valeurs des paramètres pour lesquelles les orbites du système divergent.

Dans le plan paramétrique (a, b_0, c) (Figs. 4.15 – 4.16) on peut voir que les zones d'existence de cycles attractifs ont la forme de croissants asymptotiques à la courbe de bifurcation quand a ou c tend vers l'infini. Ces zones, prévues par la théorie, sont des langues d'Arnold [8].

De la proposition 4.4.4, on déduit que chaque langue, notée L_k^q , est constituée d'un ensemble de branches d'hyperboles, d'équation $ac = cte$, correspondant à des cycles attractifs de même ordre k et de même ordre cyclique q :

4.5. Etude des plans paramétriques (a, b_0, c) au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker (langues d'Arnold)

$$L_k^q = \cup_{cte \in I_k \subset]-\infty, -1[} \{ (a, b_0, c) \in \mathbb{R}_-^* \times \{b_0\} \times \mathbb{R}_+^* : a.c = cte \}.$$

Les cycles correspondants à une langue ne sont en fait qu'un seul cycle dépendant des paramètres a et c . Ce dernier naît à la frontière de cette langue (simultanément avec un cycle col de même ordre) via une bifurcation nœud-col, évolue lorsque les paramètres a et c traversent la langue et disparaît à la frontière opposée de cette dernière via une deuxième bifurcation nœud-col [2].

Ces langues sont aussi symétriques par rapport à la deuxième bissectrice. Ceci est justifié par la proposition 4.4.3. La symétrie des plans paramétriques (a, b_0, c) par rapport à la première bissectrice, prouvée par la proposition 4.4.2, implique qu'il existe une langue L_k^{k-q} symétrique à L_k^q , dont les points sont associés à des cycles attractifs de même ordre k et de même ordre cyclique $k - q$:

$$L_k^{k-q} = \cup_{cte \in I_k \subset]-\infty, -1[} \{ (a, b_0, c) \in \mathbb{R}_+^* \times \{b_0\} \times \mathbb{R}_-^* : a.c = cte \}.$$

Les langues L_k^q et L_k^{k-q} sont donc naturellement associées respectivement aux nombres de rotation rationnel q/k et $(k - q)/k$.

Contrairement à la variété de bifurcation de Neimark-Sacker, l'existence des cycles attractifs, et donc des langues, dépend du paramètre b . En tenant compte de cette remarque et en fixant le paramètre c , assez grand pour que les langues soient suffisamment proches de la courbe de bifurcation et donc ne s'intersectent pas (le point de départ des langues est à l'infini), la disposition de celles-ci par rapport au paramètre a obéit à la règle de sommation de Farey [16] appliquée aux nombres de rotation associés à ces langues. Autrement dit, entre deux langues associées aux nombres de rotation $\frac{q_1}{k_1}$ et $\frac{q_2}{k_2}$, il existe une langue associée au nombre de rotation $\frac{q_1 + q_2}{k_1 + k_2}$.

L'approche numérique ne donne pas de langue de cycles d'ordre 2 asymptotique à la variété de bifurcation. En effet, cette langue n'existe pas (ceci est

4.5. Etude des plans paramétriques (a, b_0, c) au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker (langues d'Arnold)

logique) puisque le nombre rationnel $\frac{1}{2}$ est le nombre médian dans la suite de Farey et les plans paramétriques (a, b_0, c) sont symétriques par rapport à la première bissectrice et donc le nombre rationnel $\frac{1}{2}$ ne peut être associé à une telle langue.

Les valeurs des paramètres a et b du tableau 1 avec $c = 50$, correspondent à l'existence de cycles d'ordre inférieur ou égale à 10 nés de bifurcations fold. Ces valeurs, appartenant à différentes langues L_k^q , illustrent la disposition (par rapport à a) selon l'arbre de Farey des nombres de rotation associés à ces langues.

b	a	Ordre de cycle	Nombre de rotation
-0.1415	-0.02001294256	10	1/10
-0.1420	-0.02002082100	9	1/9
-0.1430	-0.02003067000	8	1/8
-0.1460	-0.02005380000	7	1/7
-0.1540	-0.02007030000	6	1/6
-0.1900	-0.02020000000	5	1/5
-0.2300	-0.02170000000	9	2/9
-1.2700	-0.02446800000	4	1/4
-0.4600	-0.02684650000	7	2/7
-0.5000	-0.02709500000	10	3/10
-1.2000	-0.02835000000	3	1/3
-1.2000	-0.03149975000	8	3/8
-1.0530	-0.03186900000	5	2/5
-0.7880	-0.03195300000	7	3/7
-1.0200	-0.03203459400	9	4/9

Tableau 1 : $c = 50$

Par symétrie par rapport à la première bissectrice, la disposition selon l'arbre de Farey des nombres de rotation associés aux langues L_k^{k-q} est obtenue en fixant $a = 50$ et c prenant les valeurs de a du tableau 1.

4.5. Etude des plans paramétriques (a, b_0, c) au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker (langues d'Arnold)

b	c	Ordre du cycle	Nombre de rotation
-0.1415	-0.02001294256	10	9/10
-0.1420	-0.02002082100	9	8/9
-0.1430	-0.02003067000	8	7/8
-0.1460	-0.02005380000	7	6/7
-0.1540	-0.02007030000	6	5/6
-0.1900	-0.02020000000	5	4/5
-0.2300	-0.02170000000	9	7/9
-1.2700	-0.02446800000	4	3/4
-0.4600	-0.02684650000	7	5/7
-0.5000	-0.02709500000	10	7/10
-1.2000	-0.02835000000	3	2/3
-1.2000	-0.03149750000	8	5/8
-1.053	-0.03186900000	5	3/5
-0.7880	-0.03195300000	7	4/7
-1.0200	-0.03203459400	9	5/9

Tableau 2 : $a = 50$

Comme autre exemple ; pour les valeurs fixées $(b, c) = (-1.5, 0.5)$ et le paramètre a prenant successivement les valeurs $a_1 = -2.67094$, $a_2 = -2.721$ et $a_3 = -2.7595$, il existe respectivement un cycle d'ordre 55 et d'ordre cyclique 14, un cycle d'ordre 114 et d'ordre cyclique 29 et un cycle d'ordre 59 et d'ordre cyclique 15. Ces cycles sont donc respectivement associés aux langues L_{55}^{14} , L_{114}^{29} , L_{59}^{15} et donc aux nombres de rotation $q_1/k_1 = 14/55$, $q_2/k_2 = 29/114$ et $q_3/k_3 = 15/59$. On remarque que $q_2/k_2 = (q_1 + q_3)/(k_1 + k_3)$ et donc la langue L_{114}^{29} est bien située entre les langues L_{55}^{14} et L_{59}^{15} .

4.5. Etude des plans paramétriques (a, b_0, c) au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker (langues d'Arnold)

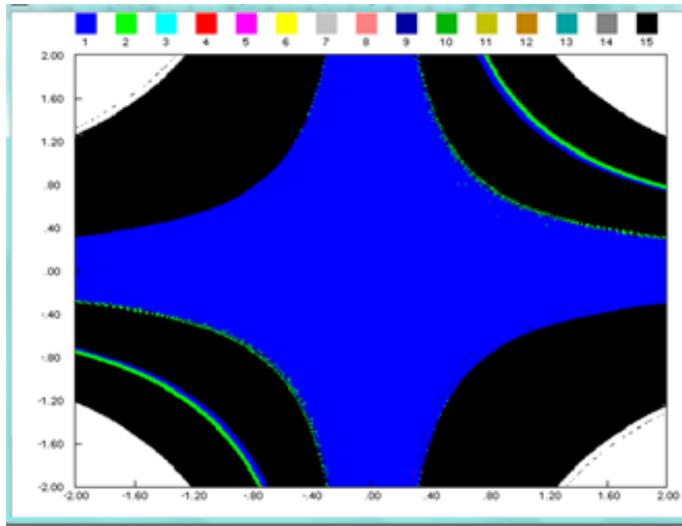


Fig. 4.14. $b = -4, (a, c) \in [-2, 2][-2, 2]$

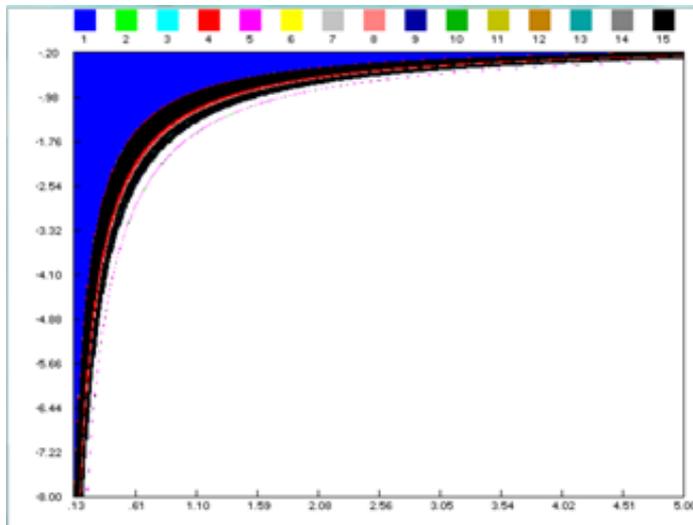


Fig. 4.15. $b = -1.3128, (a, c) \in [0.125, 5][-8, -0.2]$

4.5. Etude des plans paramétriques (a, b_0, c) au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker (langues d'Arnold)

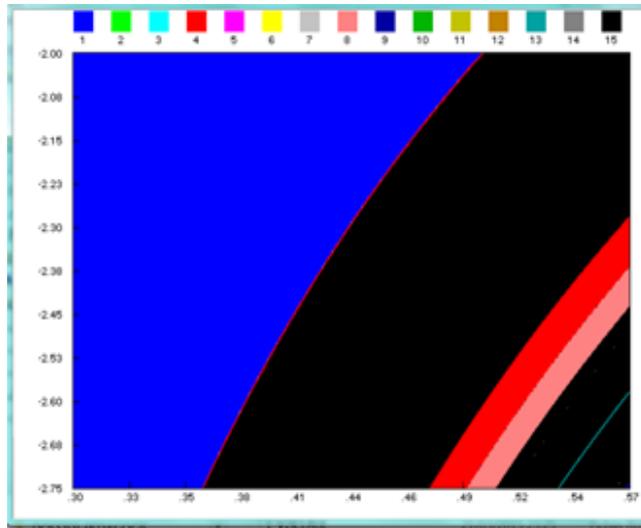


Fig. 4.16. $b = -1.3128, (a, c) \in [0.3, 0.57][-2.75, -2]$

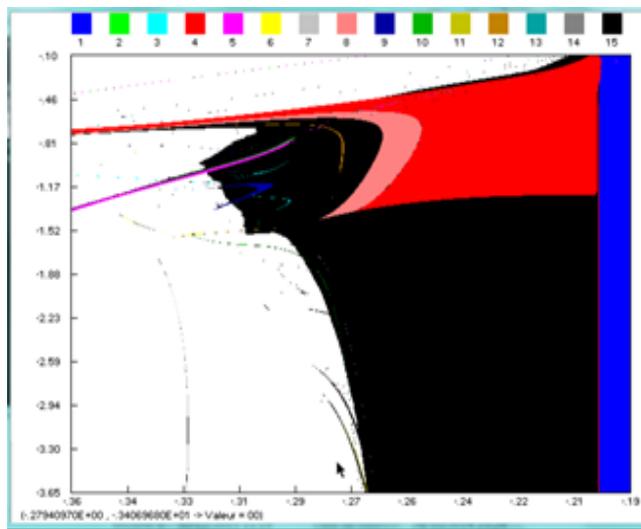


Fig. 4.17. $c = 5, (a, b) \in [-0.36, -0.19][-3.65, -0.1]$.

Conclusion

Dans cette thèse, on s'est fixé comme objectif de recherche, l'étude des systèmes dynamiques modélisés par des applications non inversibles quadratiques bidimensionnelles. On s'est intéressé particulièrement aux comportements dynamiques et à la structure topologique des attracteurs de ces systèmes, qui sont plus complexes que ceux des systèmes dynamiques définis par des applications inversibles. Plus précisément, on a étudié les bifurcations donnant naissance à ces attracteurs et l'évolution de ces derniers en fonction des paramètres du système.

On a étudié, dans le cas d'un système dynamique défini par une application T non inversible de type $(Z_0 - Z_2)$, l'évolution d'un attracteur de type cycle d'ordre 2 vers un attracteur cyclique d'ordre 2 de type ensemble de Cantor, situé sur deux droites invariantes par T^2 . On a montré que la restriction de l'application T^2 à chacune de ces deux droites invariantes est topologiquement équivalente à l'application logistique. Une étude similaire a été faite, dans cette thèse, pour le cas d'un système dynamique défini par une application T non inversible de type $(Z_1 < Z_3)$.

On a aussi étudié, dans le cas de ce dernier système et par une approche numérique, un attracteur de type cycle d'ordre deux de courbes fermées (invariantes par T^2), dont la naissance résulte soit d'une bifurcation nœud-col de courbes fermées invariantes, soit de connexions nœud-col issues de cycles de très grandes périodes. L'exploration numérique nous a permis de voir l'évolution de cet attracteur jusqu'à ce qu'il devienne attracteur chaotique.

On a montré qu'il existe, dans les plans paramétriques (a, b_0, c) où b_0 est un réel quelconque fixé, des symétries par rapport à l'origine, à la première bissectrice et à la deuxième bissectrice. On a aussi caractérisé, au voisinage d'une bifurcation de Neimark-Sacker, les zones d'existences de cycles attractifs (ou langues d'Arnold).

En perspective et dans la suite de ce travail, on espère étudier des attracteurs de systèmes dynamiques définis par des applications non inversibles de type autre que $(Z_0 - Z_2)$ et $(Z_1 < Z_3)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Agliari, G. I. Bischi, R. Dieci & L. Gardini “Global Bifurcations of Closed Invariant Curves in Two-Dimensional Maps : A Computer Assisted Study” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 15, N°4 (2005) pp 1285-1328.
- [2] A. Agliari, G. I. Bischi, L. Gardini, I. Sushko ” Introduction to Discrete Non-linear Dynamical Systems” University of Treuto (2009)
- [3] A. Barugola, J. C. Cathala et C. Mira “Annular Chaotic Areas” *Nonlinear Analysis TM & A* (1986) 10(11), 1223-1236.
- [4] J. Bernussou, Liu Hsu et C. Mira “Quelques Exemples de Solutions Stochastiques Bornées dans les Récurrences Autonomes du 2nd Ordre”, *Transformations Ponctuelles et Applications*, Colloque CNRS (1976), Sept. 73 (Ed. CNRS Paris 1976).
- [5] J. Bricmont ” Introduction à la Dynamique Non linéaire” *Unité de Phsique Théorique et Mathématique*, Année académique 2009-2010.
- [6] G. I. Bischi, L. Gardini & C. Mira “Basin Fractalizations Generated by a TwoDimensional Family of $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ Maps” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 16, N°3 (2006) pp 647-669.
- [7] J. C. Cathala “On some Properties of Absorptive Areas in 2nd Order Endomorphisms”, *ECIT Batschuns*, Sept. 89, Proceedings (World Scien-

- tific) (1989).
- [8] R. E. Ecke, J. D. Farmer et D. K. Umbarger "Scaling of the Arnold tongues" *Nonlinearty* 2 (1989) pp175-196.
 - [9] J. D. Farmer, "The Dimension of Chaotic Attractors", North-Holland Publishing Company *Physica* 7D (1983) pp.153-180.
 - [10] M. R. Ferchichi & A. Yousfi "On Some Attractors of a Two-Dimensional Quadratic Map" *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations* (in press) (2018)
 - [11] D. Fournier-Prunaret, C. Mira & L. Gardini "Some Contact Bifurcations in TwoDimensional Examples" *Grazer Mathematische Berichte* (1997) 334, pp 77-96.
 - [12] C. E. Frouzakis, L. Gardini, I. G. Kevrekidis, G. Millerioux & C. Mira "On some Properties of Invariant Sets of Two-Dimensional Noninvertible Maps" *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 7, N°6 (1997) pp 1167-1194.
 - [13] I. Gumowski & C. Mira "Dynamique Chaotique" Edition Cépadues, Toulouse 1980.
 - [14] J. Guckenheimer et P. Holmes, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer, New york (1983).
 - [15] M. W. Hirsch, S. Smale & R. L. Devaney "Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos" ELSEVIER Academic Press, Copyright 2004.
 - [16] D. V. Huyên et D. Claudiue "Bifurcations et chaos" Editions Ellipses (2000).
 - [17] Y. A. Kuznetsov "Elements of Applied Bifurcation Theory" Second Edition. SpringerVerlag New York, Inc. 1998.
 - [18] J. Milnor, "On the Concept of Attractor", *Comm. Math. Phys.* 99 (1985) pp.177-195.
 - [19] C. Mira "Chaotic Dynamics" World Scientific, Singapore (1987).
 - [20] C. Mira "Détermination Pratique du Domaine de Stabilité d'un Point d'Equilibre d'une Récurrence non-Linéaire du Deuxième Ordre à Va-

- riables Réelles”, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, (1964) pp. 5314-5317, Groupe 2.
- [21] C. Mira, J. P. Carcasses, G. Millerioux & L. Gardini “Plane Foliation of TwoDimensional Noninvertible Maps” International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 6, N°8 (1996) pp 1439-1462.
- [22] C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, et J. C. Cathala, “Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps”, World Scientific Series on Nonlinear Sciences, (1996) Series A Vol. 20 .
- [23] C. Mira, D. Fournier-Prunaret, L. Gardini, H. Kawakami & J. C. Cathala “Basin Bifurcations of Two-Dimensional Noninvertible Maps : Fractalization of Basins” International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 4, N°2 (1994) pp 343-381.
- [24] C. Mira & C. Rauzy “Fractal Aggregation of Basin Islands in Two-Dimensional Quadratic Noninvertible Maps” International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 5, N°4 (1995) pp 991-1019.
- [25] C. Mira et J. C. Roubellat, “Cas où le Domaine de Stabilité d’un Ensemble Limite Attractif d’une Récurrence du Deuxième Ordre n’est pas Simplement Connexe”, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A 268, (1969) pp.1657-1660.
- [26] D. Ruelle, “Small Random Perturbations of Dynamical Systems and the Definitions of Attractors”, Comm. Math. Phys. 82, 137 (1981).
- [27] V. Tsybulin et V. Yudovich “Invariant sets and attractors of quadratic mapping of plane : Computer experiment and analytical treatment” Journal of Difference Equations and Applications (1998) Vol. 4, pp 397-423.
- [28] R. F. Williams, “The Zeta Fonction of an Attractor” Conference on the Topology of Manifolds, ed. J.G.Hocking, Prindle Weber Schmidt, Boston (1968).