وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY**
**UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA**

جامعة باجي مختار
- عنابة -

**Faculté des Sciences**

**Année : 2018**

**Département de Mathématiques**

# THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

**Option**
Mathématiques Appliquées

# CYCLES LIMITES DES SYSTEMES DIFFERENTIELS POLYNOMIAUX

**Présentée Par**

**Debbabi Djamel**

**DIRECTEUR DE THÈSE :** Makhlouf Ammar Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

| | | | |
|---|---|---|---|
| **PRESIDENT :** | Laouar Abdelhamid | Prof. | U.B.M. ANNABA |
| **EXAMINATEUR :** | Salmi Abdelouaheb | M.C.A | U.B.M. ANNABA |
| **EXAMINATRICE :** | Badi Sabrina | M.C.A | U.8 MAI GUELMA |
| **EXAMINATEUR :** | Hadidi Elbahi | M.C.A | U.B.M. ANNABA |

# Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes très chers parents
Mes chers sœurs
Toute ma famille
Et mes amis
Enfin, à tous ceux qui sont très chers pour moi.

# Remerciements

Avant tout je tiens à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce modeste travail.

Mes sincères remerciements à mon directeur de thèse **Professeur Makhlouf Ammar** pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour sa disponibilité, sa patience, son aide et ses conseils. Un grand merci de m'avoir donné la chance de réaliser ce travail.

Je tiens également à remercier monsieur **Laouar Abdelhamid**, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ainsi que monsieur **Salmi Abdelouaheb**, Maître de conférences A à l'univercité Badji Mokhtar-Annaba, madame **Badi Sabrina**, Maître de conférences A à l'université 8 Mai Guelma et monsieur **Hadidi Elbahi**, Maître de conférences A à l'université Badji Mokhtar-Annaba qui ont accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Je remercie chaleureusement mes chers parents et mes soeurs qui m'ont toujours encouragé au long de mon parcours.

Je tiens à remercier mes amis Belaid Malik, Ali khelil Kamel,...de leurs motivation et soutien.

Je remercie aussi tous les miens et toutes personnes qui m'ont soutenu à terminer cette thèse.

Merci à tous...

# Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier les solutions périodiques de certaines classes d'équations différentielles en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre. Nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence et la stabilité des solutions périodiques. Cette étude est illustrée par des applications. La première classe des équations différentielles étudiées est du deuxième ordre de la forme

$$\ddot{x} + g(t)x^n = \mu f(t) \quad \textit{et} \quad \ddot{x} + g(t)\left|x\right|^n = \mu f(t)$$

où $n \geq 2$, $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions continues $T-$périodiques telles que $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$, $\int\limits_0^T g(t)dt \neq 0$ et $\mu$ est un paramètre suffisamment petit positif.

La deuxième classe des équations différentielles étudiées est du troisième ordre de la forme

$$\dddot{x} \pm x^n = \mu f(t) \quad \textit{et} \quad \dddot{x} \pm \left|x\right|^n = \mu f(t)$$

où $n \geq 2$, $f(t)$ est une fonction continue $T-$périodique telle que $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$ et $\mu$ est un paramètre suffisamment petit positif.

Enfin, on étudie les équations différentielles d'ordre $m$ de la forme

$$x^{(m)} + f_n(x) = \mu h(t),$$

où les entiers $m, n \geq 2$, $f_n(x) = \delta x^n$ ou $f_n(x) = \delta\left|x\right|^n$ avec $\delta = \pm 1$, $h(t)$ est une fonction continue $T-$périodique telle que sa fonction moyennée $\bar{h} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T h(t)dt \neq 0$, et $\mu$ est un paramètre suffisamment petit positif. En utilisant la même méthode, nous allons donner des conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques. De plus, l'instabilité et la stabilité linéaire des solutions périodiques seront obtenues.

**Mots clés** : solution périodique, équations différentielles du deuxième et troisième ordre, stabilité, théorie de la moyennisation.

# Abstract

The objective of this thesis is to study the periodic solutions of some classes of differential equations by using the averaging method of the first order. We give sufficient conditions for the existence and stability of periodic solutions. This study is illustrated by applications. The first class of the differential equations studied is of the second order of the form

$$\ddot{x} + g(t)x^n = \mu f(t) \quad \textit{and} \quad \ddot{x} + g(t)\,|x|^n = \mu f(t)$$

where $n \geq 2$, $f(t)$ and $g(t)$ are continuous $T-$periodic functions such that $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$, $\int\limits_0^T g(t)dt \neq 0$ and $\mu$ is a sufficiently small positive parameter.

The second class of the differential equations studied is of the third order of the form

$$\dddot{x} \pm x^n = \mu f(t) \quad \textit{and} \quad \dddot{x} \pm |x|^n = \mu f(t)$$

where $n \geq 2$, $f(t)$ is a continuous $T-$periodic function such that $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$ and $\mu$ is a sufficiently small positive parameter.

Finally, we study the following $m-$order differential equations of the form

$$x^{(m)} + f_n(x) = \mu h(t),$$

where the integers $m, n \geq 2$, $f_n(x) = \delta x^n$ or $f_n(x) = \delta\,|x|^n$ with $\delta = \pm 1$, $h(t)$ is a continuous $T-$periodic function such that its averaged function $\bar{h} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T h(t)dt \neq 0$, and $\mu$ is a sufficiently small positive parameter. By using the same method, we will give sufficient conditions for the existence of periodic solutions. Moreover, the instability and the linear stability of these periodic solutions will be obtained.



**Key words** : periodic solution, second and third order differential equations, stability, averaging theory.

# ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة الحلول الدورية لبعض فئات المعادلات التفاضلية باستخدام طريقة المتوسط من الدرجة الأولى. كما قدمنا شروطا كافية لوجود و استقرار الحلول الدورية. هذه الدراسة موضحة بتطبيقات. الفئة الأولى من المعادلات التفاضلية التي تمت دراستها هي من الدرجة الثانية من الشكل

$$\ddot{x} + g(t)x^n = \mu f(t) \quad \text{و} \quad \ddot{x} + g(t)|x|^n = \mu f(t)$$

حيث $n \geq 2$، $f(t)$ و $g(t)$ دالتان مستمرتان دوريتان ذات الدور $T$ مع العلم أن $\int_0^T f(t)dt \neq 0$ ، $\int_0^T g(t)dt \neq 0$ و μ وسيط موجب صغير بما يكفي.

الفئة الثانية من المعادلات التفاضلية التي تمت دراستها هي من الدرجة الثالثة من الشكل

$$\dddot{x} \pm x^n = \mu f(t) \quad \text{و} \quad \dddot{x} \pm |x|^n = \mu f(t)$$

حيث $n \geq 2$، $f(t)$ دالة مستمرة دورية دورها $T$ مع العلم أن $\int_0^T f(t)dt \neq 0$ و μ وسيط موجب صغير بما يكفي.

و أخيرًا، درسنا المعادلات التفاضلية من الدرجة $m$ من الشكل

$$x^{(m)} + f_n(x) = \mu h(t)$$

حيث الأعداد الصحيحة $n \geq 2$ ،$m$، $f_n(x) = \sigma x^n$ أو $f_n(x) = \sigma|x|^n$ مع $\sigma = \pm 1$، $h(t)$ دالة مستمرة دورية دورها $T$ مع العلم أن متوسط دالتها $\bar{h} = \frac{1}{T}\int_0^T h(t)dt \neq 0$ و μ وسيط موجب صغير بما يكفي. باستخدام نفس النظرية، سنقدم شروطا كافية لوجود حلول دورية. بالإضافة إلى ذلك، سيتم الحصول على عدم الاستقرار و الاستقرار الخطي للحلول الدورية.



**الكلمات المفتاحية :**

الحل الدوري، المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية و الثالثة، استقرار، نظرية المتوسط.

# TABLE DES MATIÈRES

# Introduction générale

La théorie des systèmes dynamiques est très large et très active en termes de recherche. Elle dépend aussi substantiellement de la plupart des principaux domaines des mathématiques. Généralement, un système est dit dynamique lorsqu'il évolue au cours du temps. Ainsi, l'étude des systèmes dynamiques traite donc l'évolution temporelle des systèmes chimiques, physiques, biologiques ou économiques. On représente cette évolution par des équations différentielles ou des applications.

Le terme « système dynamique » est apparu au début du $XX^{ème}$ siècle entre la publication du **Henri-Poincaré** [34] « Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste » en **1892**, et celle, en **1927,** de la monographie de **Birkhoff** [5] justement intitulée « Dynamical systems ». Le premier objectif des chercheurs est l'étude des systèmes dynamiques, c'est à dire l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires.

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. En général, on utilise les équations différentielles (d'évolution) dans les sciences qui utilisent la modélisation mathématique.

On remonte le début de l'histoire des équations différentielles au début de l'analyse avec **Ferma, Newton** et **Leibniz**. D'après **Encyclopédie des mathématiques**, le terme " équation différentielle " est dû à **G. Leibniz (1646-1716)** en **1676**. Le concept d'équation différentielle pendant les deux premiers siècles de son apparition a fait l'objet d'études afin d'arriver à une résolution algébrique. Jusqu'au $19^{ème}$ siècle et depuis l'arrivé en scène de **J. Liouville (1809-1882)**, les mathématiciens ne s'arrêtaient pas de chercher une méthode de résolution applicable à toute sorte d'équations différentielles.

Un des plus importants problèmes de la théorie des équations différentielles est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions. Le problème d'unicité et d'existence a été introduit pour la première fois par **Cauchy,** qui a établi deux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions, dans le but de développer les solutions en série autour des points singuliers, il a utilisé l'analyse de la variable complexe. Il a pensé que les solutions des équations différentielles sont des fonctions comme les fonctions définies implicitement par ces équations, l'étude des équations différentielles pour lui était comme une branche de la théorie des fonctions.

**Briot** et **Bouquet** ont emboité le pas à **Cauchy**, en complétant son travail, par l'étendu des hypothèses de son théorème d'existence, ils se sont concentrés aussi sur l'étude locale autour des points singuliers.

Plus tard, lorsque **Poincaré** a développé son étude qualitative, **Weierstrass** a énonçé un autre théorème d'existence des solutions des équations différentieIles. Toujours dans le cadre des fonctions analytiques de la variable complexe, il a lancé l'idée d'établir des développements différents autour de chaque point singulier du système pour, ensuite, définir la solution globale (c'est à dire valable sur tout le plan) par prolongement analytique : la solution serait définie par des développements différents selon que l'on se trouve à proximité de tel ou tel point singulier.

Quand **Poincaré** a commençé à s'intéresser aux équations différentielles, dans le but d'améliorer le travail de ses prédécesseurs **Briot** et **Bouquet** sur le développement en série des solutions, il a introduit trois changements majeurs dans la façon d'étudier les équations différentielles :

- Il a décidé d'étudier la solution de manière globale, c'est à dire sur l'espace des phases dans son ensemble.
- Il a abandonné la variable complexe et dès lors il a étudié des fonctions réelles à variable réelle.
- Il a géométrisé le problème.

Après les questions d'existence et d'unicité, les questions de stabilité ont apparu naturellement. En **1907**, **Aleksandr Lyapunov** [28] a développé le critère de stabilité portant son nom, Il a étudié la stabilité du mouvement. En utilisant une fonction de force qu'il a noté $V(x, y)$, il a établi une technique pour déterminer la stabilité d'un point d'équilibre et grâce à cette technique, on peut tester la stabilité d'une solution asymptotique sans connaître l'expression analytique des solutions. La fonction qu'il a introduit est maintenant appelée fonction de **Lyapunov**.

Un des objectifs des chercheurs dans l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires est l'étude de l'existence des cycles limites. Un cycle limite est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques d'une équation différentielle. Les cycles limites ont apparu d'abord en **1881**, dans le mémoire de **H. Poin-**

**caré** [35] intitulé "Sur les courbes définies par une équation différentielle". A la fin des années **1920**, **Van der Pol**, **Liénard** et **Andronov** ont prouvé aussi qu'un cycle limite est une trajectoire. Par conséquent, un des principaux théorèmes de la dynamique non linéaire est le théorème de **Poincaré-Bendixson** qui assure que dans une région bornée et compacte du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un cycle limite ou un point critique.

En **1900,** le mathématicien **David Hilbert** a présenté une liste de 23 problèmes mathématiques remarquables au deuxième congrès international des mathématiciens à Paris. Le seizième problème de **Hilbert** [20] comporte deux parties. La seconde partie pose la question : Quel est le nombre maximum des cycles limites noté $H(n)$ que peut avoir le système polynomial planaire de degré $n$

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Cette question est encore ouverte.

Les chercheurs ont obtenu des résultats importants sur le nombre de cycles limites des systèmes dynamiques en utilisant des techniques différentes :

- La première méthode est basée sur l'application de retour de **Poincaré**.
- La deuxième méthode est basée sur l'intégrale de **Poincaré Melnikov**.
- La troisième est basée sur l'intégrale Abélienne.
- La quatrième est la méthode du facteur intégrant inverse.
- La cinquième est la méthode de la moyennisation.

La méthode de la moyennisation (**Averaging Theory**) est la base de notre travail. C'est l'une des plus importantes méthodes utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par **Krylov** et **Bogoliubov** en **1934** [7] et **Bogoliubov** et **Mitropolsky** (**1961**) [8]. Elle a été ensuite développée par **Verhulst** [39], **Sanders** et **Verhulst** [37], **Malkin** (**1956**) [31], **Roseau** (**1985**) [36], **Llibre et Buică** (**2004**) [10]...

L'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \tag{1}$$

où $t \in I \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon << 1$ et $f$ est $T-$périodique en $t$, et de déterminer l'équation moyennée associée de cette équation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(x)$$

où

$$F(x) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t,x,0)dt,$$

et de chercher les solutions périodiques de l'équation (1).

Beaucoup de classes d'importants problèmes en mécanique classique,...., peuvent être transformées en l'équation (1). D'autres formes de théorèmes de la méthode de la moyennisation ont été démontrés ces dernières années [9] et beaucoup d'articles ont été publiés sur l'application de cette méthode. Pour des applications de cette méthode à des systèmes différentiels perturbés dans $\mathbb{R}^n$, voir par exemple [30], [23].

En **2017**, **J. Llibre** et **A. Makhlouf** [24] ont utilisé le théorème de la moyennisation du premier ordre pour étudier les solutions périodiques des équations différentielles du second ordre de la forme

$$\ddot{x} \pm x^n = \mu f(t) \qquad et \qquad \ddot{x} \pm |x|^n = \mu f(t),$$

où $n \geqslant 4$, $f(t)$ est une fonction continue $T-$périodique telle que $\int_{0}^{T} f(t)dt \neq 0$, et $\mu$ est un paramètre suffisamment petit et positif. Notons que les équations différentielles $\ddot{x} \pm x^n = \mu f(t)$ sont continues en $t$ et lisses en $x$, et que les équations différentielles $\ddot{x} \pm |x|^n = \mu f(t)$ sont continues en $t$ et localement-lipschitziennes en $x$.

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude des solutions périodiques pour certaines équations différentielles du deuxième et troisième ordre. Dans notre étude, on applique la méthode de moyennisation. Cette méthode permet de prouver l'existence des solutions périodiques pour ces équations différentielles.

Cette thèse se compose de cinq chapitres :

- Le **premier chapitre** comporte des rappels sur les notions préliminaires classiques et les outils mathématiques qui sont nécessaires pour l'étude de cette thèse. Nous avons commencé par définir les systèmes dynamiques, la linéarisation, les points d'équilibre, la nature et la stabilité d'un point d'équilibre. Nous avons défini aussi l'orbite périodique, le cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite et nous avons donné un théorème sur l'existence et non-existence des cycles limites.
- Dans le **deuxième chapitre**, nous avons introduit la théorie de la moyennisation pour chercher les solutions périodiques des systèmes différentiels et nous avons illustré les théorèmes par plusieurs exemples.
- Dans le **troisième chapitre**, nous avons appliqué le théorème de la moyennisation du premier ordre pour étudier l'existence et le type de stabilité des solutions

périodiques de certaines classes d'équations différentielles du deuxième ordre. Nous avons donné des conditions suffisantes pour l'existence et la stabilité de ces solutions périodiques. Dans cette étude, nous avons distingué quatre théorèmes d'existence des solutions périodiques et nous avons donné une application pour chaque théorème. Cette étude est soumise pour publication.

– Dans le **quatrième chapitre**, nous avons donné des conditions suffisantes pour l'existence et la stabilité des solutions périodiques d'une classe des équations différentielles du troisième ordre de la forme

$$\dddot{x} \pm x^n = \mu f(t) \qquad et \qquad \dddot{x} \pm |x|^n = \mu f(t)$$

où $n \geq 2$, $f(t)$ est une fonction continue $T-$périodique telle que $\int_0^T f(t)dt \neq 0$ et $\mu$ est un paramètre suffisamment petit et positif. Nous avons traité cette étude en utilisant le théorème de la moyennisation du premier ordre. Cette étude a été publié dans le journal "**Chaos, Solitons and Fractals**" sous le titre
**A. Makhlouf and D. Debbabi**, Periodic solutions of some classes of continuous third-order differential equations, Chaos, Solitons and Fractals 94 (2017), 112-118.

– Dans le **cinquième chapitre,** nous avons étudié l'article [14], concernant la recherche des solutions périodiques et leur type de stabilité des équations différentielles d'ordre $m$ de la forme

$$x^{(m)} + f_n(x) = \mu h(t),$$

où les entiers $m, n \geq 2$, $f_n(x) = \delta x^n$ ou $f_n(x) = \delta |x|^n$ , $\delta = \pm 1$, $h(t)$ est une fonction continue $T-$périodique telle que sa fonction moyennée $\bar{h} = \frac{1}{T}\int_0^T h(t)dt \neq 0$, et $\mu$ est un paramètre suffisamment petit et positif. Les auteurs ont appliqué la même méthode pour obtenir les solutions périodiques de ces équations différentielles perturbées.

# CHAPITRE 1

# Notions préliminaires

Ce chapitre contient quelque notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

## 1.1 Problèmes à valeur initiale

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue.

**Définition 1.1.1** **i)** *Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur $U$ est une relation de la forme*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

*que l'on note brièvement*

$$\dot{x} = f(t, x) \text{ où } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \tag{1.1}$$

**ii)** *Pour $(t_0, x_0)$ donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation (1.1) est donné sous la forme*

$$\dot{x} = f(t, x), \ \ x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

**Définition 1.1.2** **i)** *La fonction $x$ est dite solution de l'équation (1.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur $I$, si $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$ et si $x$ satisfait la relation (1.1) sur $I$.*

**ii)** *Soit $(t_0, x_0) \in U$ donné, la fonction $x$ est dite solution du problème à valeur initiale (1.2) s'il existe un intervalle $I$ contenant $t_0$ tel que $x$ est une solution de l'équation (1.1) sur $I$ et vérifie $x(t_0) = x_0$.*

## 1.2 Existence et unicité de la solution

**Théorème 1.2.1** ***(Existence)*** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$. Si $f : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet au moins une solution.*

**Définition 1.2.1** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ et $f = f(t, x) : U \to \mathbb{R}^d$. $f$ est localement lipchitzienne en $x$ si pour tout fermé et borné (compact) $K$ dans $U$, il existe une constante $L > 0$ telle que*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$$

*pour tout $(t, x_1)$ et $(t, x_2)$ dans $K$.*

**Définition 1.2.2** *Pour $(t_0, x_0) \in U$ donné, une solution du problème à valeur initiale (1.2) est dite unique si elle coïncide avec toute solution partout où elles sont toutes les deux définies.*

**Théorème 1.2.2** ***(Unicité)*** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Si $f = f(t, x) : U \to \mathbb{R}^d$ est continue et localement lipschitzienne en $x$, alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet une solution unique.*

## 1.3 Stabilité de la solution

La stabilité est l'un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques. Cette notion a été étudiée par **Liapunov** (**1857-1918**).

**Définition 1.3.1** *Soit le problème à valeur initiale (1.2). Supposons que $f$ satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution. Soit $\phi(t)$ une solution du problème (1.2) telle que $\phi(t_0) = \phi_0$ est dite stable au sens de Liapunov si $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ telle que toute solution $x(t)$ de (1.2) vérifie*

$$\|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

*Si de plus $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$ alors la solution $\phi(t)$ est dite asymptotiquement stable.*

## 1.4 Systèmes dynamiques

**Définition 1.4.1** *Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que :*

1. $U(.,x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *est continue.*
2. $U(t,.) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est continue.*
3. $U(0,x) = x$.
4. $U(t+s,x) = U(t,U(s,x))$, $\forall t,s \in \mathbb{R}^+$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

**Exemple 1.4.1** *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

*où $A$ est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$. la solution de (1.3) est donnée par*

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

*Le système (1.3) engendre un système dynamique*

$$\begin{aligned} &U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ &U(t,x) = e^{tA}x. \end{aligned}$$

**Définition 1.4.2** *Un système dynamique $U$ sur $\mathbb{R}^n$ est linéaire si :*

$$U(t, \alpha x + \beta y) = \alpha U(t,x) + \beta U(t,y), \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall\ t \in \mathbb{R}^+ \ et\ \forall\ x,y \in \mathbb{R}^n.$$

## 1.5 Flot d'une équation différentielle

**Définition 1.5.1** *Soit le système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.4}$$

*avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, $E$ est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(E)$. Soit $\Phi(t,x_0)$ la solution de (1.4). L'ensemble des applications $\Phi_t$ définit par*

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t,x_0)$$

*est appelé le flot de l'équation différentielle (1.4).*

**Remarque 1.5.1** *Le flot est dit autonome si $f$ ne dépend pas explicitement du temps $t$, sinon il est dit non autonome.*

## 1.6 Points d'équilibre et linéarisation

### 1.6.1 Point d'équilibre

**Définition 1.6.1** *On appelle point d'équilibre, point critique, point singulier ou point fixe du système (1.4), tout point* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant*

$$f(x_0) = 0.$$

### 1.6.2 Linéarisation des systèmes

**Définition 1.6.2** *Considérons le système différentiel non linéaire*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

*Soit* $x_0$ *le point critique de (1.5). Le système*

$$\dot{x} = Ax \text{ où } A = Df(x_0) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i,j \leq n} \tag{1.6}$$

*est appelé le système linéarisé du système (1.5) en* $x_0$*.*

**Exemple 1.6.1** *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 - 2y, \\ \dot{y} = x + 2y^3, \end{cases} \tag{1.7}$$

*l'origine est le seul point critique pour ce système .*
*La matrice jacobienne associée à (1.7) calculée en* $(0,0)$ *est*

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Ainsi, le système linéarisé de (1.7) en* $(0,0)$ *est*

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

**Remarque 1.6.1** *La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.*

**Définition 1.6.3** *Le point critique $x_0$ de (1.5) est dit point critique hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.*

### 1.6.3 Nature des points d'équilibre

On utilise la linéarisation pour l'étude de la nature des points d'équilibres.

**Définition 1.6.4** *Soit le système différentiel linéaire (1.6) où $A$ est une matrice d'ordre 2 et soient $\lambda_1$et $\lambda_2$ les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :*

1. *Si $\lambda_1$et $\lambda_2$ sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable (voir Fig. 1.1).*

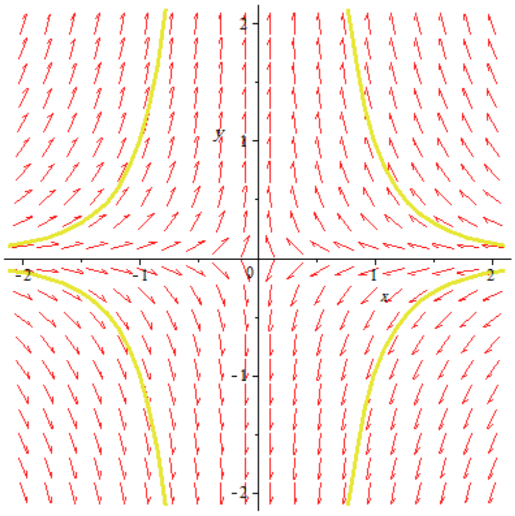

FIG. 1.1 – (0,0) est un point selle

2. *Si $\lambda_1$et $\lambda_2$ sont réelles de même signe, on a trois cas :*
   (a) *Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un nœud stable (voir Fig. 1.2).*
   (b) *Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un nœud instable (voir Fig. 1.3).*
   (c) *Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $x = x_0$ est un nœud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$ (voir Fig. 1.4 et 1.5).*

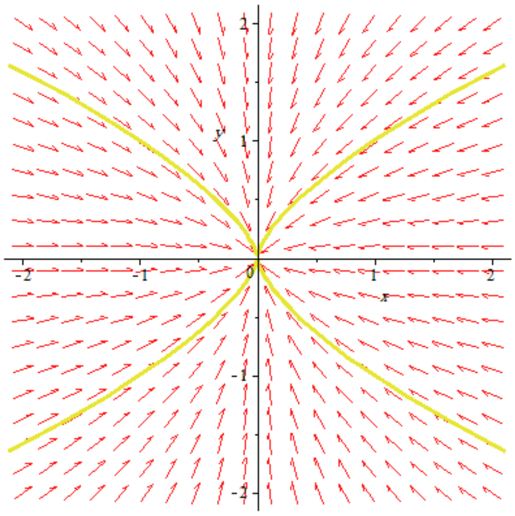


FIG. 1.2 – (0,0) est un noeud stable

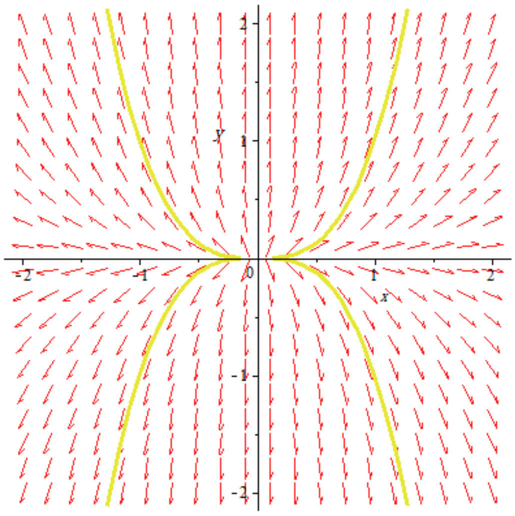


FIG. 1.3 – (0,0) est un noeud instable

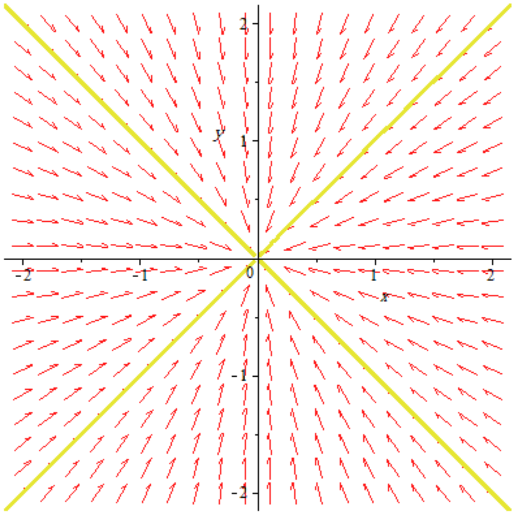


FIG. 1.4 – (0,0) est un noeud propre stable

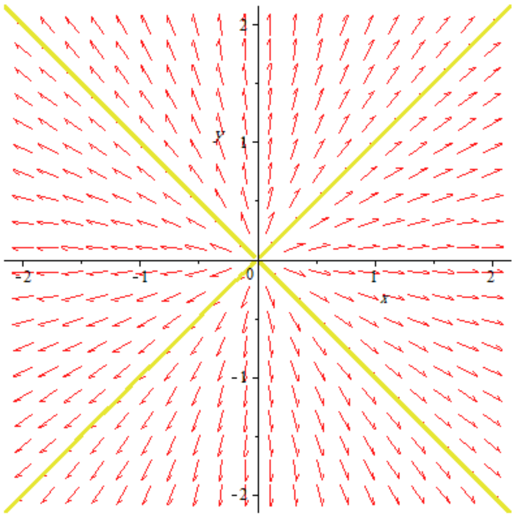


FIG. 1.5 – (0,0) est un noeud propre instable

3. *Si* $\lambda_1$ *et* $\lambda_2$ *sont complexes conjuguées et* $\mathrm{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$, *alors le point critique* $x = x_0$ *est un foyer. Il est stable si* $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ *et instable si* $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$ *(voir Fig. 1.6 et 1.7).*

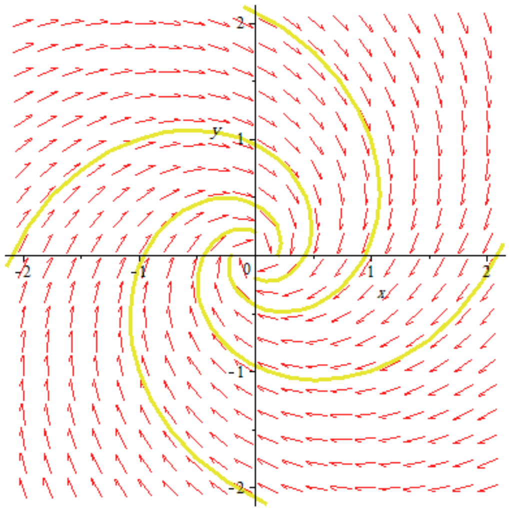


FIG. 1.6 – (0,0) est un foyer stable

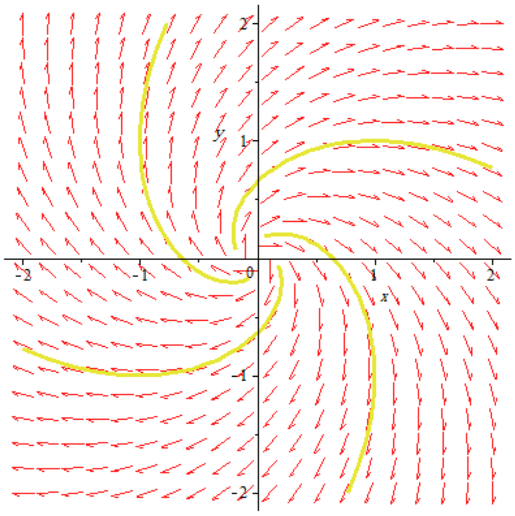


FIG. 1.7 – (0,0) est un foyer instable

4. *Si* $\lambda_1$ *et* $\lambda_2$ *sont imaginaires pures, alors le point critique* $x = x_0$ *est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir Fig. 1.8).*

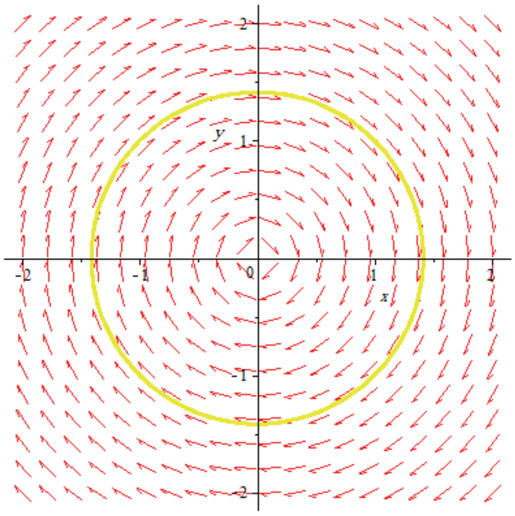


FIG. 1.8 – (0,0) est un centre

### 1.6.4 Stabilité des points d'équilibre

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

**Définition 1.6.5** *Soit le système*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \;\; x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

*Supposons que $f$ satisfaite les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution et soit $\phi(t)$ la solution du système (1.8). On dit qu'un point d'équilibre $p$ est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si*

$$\|\phi(t_0) - p\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t) - p\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

*S' il existe de plus un voisinage de $p$ tel que pour tout $x$ dans ce voisinage $\lim\limits_{t\to\infty} \phi(t) = p$ alors le point d'équilibre $p$ est dit asymptotiquement stable.*

**Théorème 1.6.1** *Soit $x_0$ un point d'équilibre pour le système (1.6).*

**i)** *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives, alors le point d'équilibre $x_0$ est asymptotiquement stable.*

**ii)** *S'il existe au moins une valeur propre de $Df(x_0)$ avec une partie réelle positive, alors le point d'équilibre $x_0$ est instable.*

**iii)** *Si $Df(x_0)$ a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point d'équilibre $x_0$.*

## 1.7 Plan et portrait de phase

**Définition 1.7.1** *Soit le système planaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \tag{1.9}$$

*Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.9) représentent dans le plan $(x, y)$ des courbes appelées orbites.*

*Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan $(x \circ y)$ est appelé le plan de phase.*

## 1.8 Orbites périodiques et cycles limites

### 1.8.1 Orbite périodique

**Définition 1.8.1** *On appelle orbite périodique toute trajectoire $\Phi_t(x)$ de (1.9) telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant*

$$\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x). \tag{1.10}$$

*Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.10) est appelé période.*

### 1.8.2 Cycle limite

**Définition 1.8.2** *Un cycle limite est une orbite périodique fermée isolée, c'est à dire au voisinage de cette orbite, on ne peut pas avoir une autre orbite périodique fermée.*

**Définition 1.8.3** *L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable $x$ du cycle limite.*

**Exemple 1.8.1** *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y - 3x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + 3y - 3y(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{1.11}$$

*En coordonnées polaires $x = rcos(t)$, $y = rsin(t)$ avec $r > 0$, le système (1.11) devient :*

$$\begin{cases} \dot{r} = 3r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

*On trouve*

$$f(r) = \dot{r} = 3r(1 - r^2).$$

*d'où*

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = \pm 1.$$

*Comme $r > 0$, on n'accepte que la racine positive $r = 1$. Donc, pour $r = 1$ on a la solution périodique $(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$, avec $\theta(0) = \theta_0$.*

*Dans le plan de phase il y a un seul cycle limite d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et d'amplitude $r = 1$ (voir Fig. 1.9).*

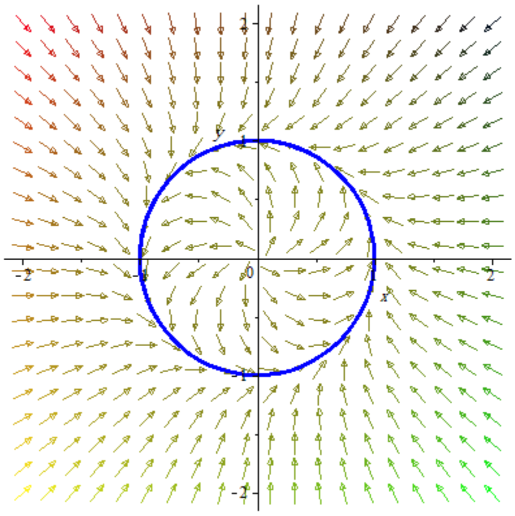


FIG. 1.9 – Cycle limite du système (1.11).

**Remarque 1.8.1** *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

## 1.9 Stabilité des cycles limites

**Théorème 1.9.1** *$C$ étant la trajectoire correspondante au cycle limite, et soit toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de $C$ s'enroulent en spirales autour de $C$ pour $t \to +\infty$ ou pour $t \to -\infty$.*

1. *Le cycle limite est dit **stable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers $C$.*
2. *Le cycle limite est dit **instable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont refoulées de $C$.*

## 1.10 Existence et non-existence des cycles limites

Nous donnons des résultats intéressants concernant l'existence et non existence des cycles limites.

**Théorème 1.10.1** ***(Poincaré-Bendixson).*** *Soit le système planaire suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \tag{1.12}$$

*Supposons que $f$ et $g$ sont des fonctions de classe $C^1$ sur $E$, où $E$ est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$, le système (1.12) a une orbite $\gamma$ telle que l'orbite positive $\gamma_+(p) = \{\Phi(p, t), t \geq 0\}$ passant par le point $p$ est contenue dans un sous ensemble compact $F$ de $E$. Alors on est dans l'un des trois cas suivants :*

- *Soit $\gamma_+(p)$ tend vers un point d'équilibre.*
- *Soit $\gamma_+(p)$ tend vers une orbite périodique.*
- *Soit $\gamma_+(p)$ est une orbite périodique.*

*Si $F$ ne contient pas de points critiques alors il existe une orbite périodique du système (1.12).*

**Théorème 1.10.2** ***(Critère de Bendixson).*** *Soit le système planaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

*et soit $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ où $E$ est une région simplement connexe dans $\mathbb{R}^2$. Si la divergence du champ de vecteur $F$ (notée $\nabla F$) est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans $E$, alors ce système n'a aucune orbite fermée entièrement contenue dans $E$.*

**Exemple 1.10.1** *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 2y^4 - x, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - x^2y^3. \end{cases}$$

*Soit $F = (2xy - 2y^4 - x, x^2 - y^2 - x^2y^3)^T$. On calcule la divergence du champ de vecteur $F$, on obtient*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \nabla F = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 2y^4 - x) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 - x^2y^3) \\ &= 2y - 1 - 2y - 3x^2y^2 = -1 - 3x^2y^2 < 0. \end{aligned}$$

*D'où, d'après le critère de Bendixson ce système n'a aucun cycle limite dans $\mathbb{R}^2$.*

## 1.11 Ensemble isochrone

L'ensemble isochrone est un ensemble formé uniquement par des solutions périodiques, qui ont la même période.

# CHAPITRE 2

# Théorie de la moyennisation

## 2.1 Introduction

La méthode de la moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. L'idée de base de cette méthode peut être datée de la fin du $18^{ème}$ siècle avec les travaux de **Lagrange** et **Laplace** en **1788** qui ont donné une justification intuitive de la méthode. Ils ont utilisé la procédure de la moyennisation pour étudier le problème des perturbations séculaires dans le système solaire.

Ensuite, **Fatou** a donné la preuve de la validité asymptotique de la méthode en **1928**. Après des recherches systématiques faites en **1934** par **Bogoliobov** et **Krylov** [7], En **1945** par **Bogoliobov** [6] et en **1961** par **Bogoliobov** et **Mitropolsky** [8]. Elle a été ensuite développée par **Verhulst** [39], **Sanders** et **Verhulst** [37], **Malkin** (**1956**) [31] et **Roseau** [36]...

Dans ce chapitre, nous introduisons la théorie de la moyennisation et nous donnons ses différents théorèmes. Maintenant, nous allons citer les théorèmes essentiels de la moyennisation utilisés pour accomplir les travaux de cette thèse.

## 2.2 Théorème de la moyennisation du premier ordre

Considérons le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t,x) + \varepsilon^2 G(t,x,\varepsilon), \quad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

où $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $D$ un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $F(t,x)$ et $G(t,x,\varepsilon)$ sont des fonctions $T-$périodiques en $t$.

Le système moyenné associé au système (2.1) est défini par

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0, \tag{2.2}$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T F(s,y)ds. \tag{2.3}$$

Le théorème suivant donne les conditions pour lesquelles les points d'équilibres du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.1).

**Théorème 2.2.1** *[37] Considérons le système (2.1) et supposons que :*

1. *$F$, $G$, $D_xF$, $D_x^2F$ et $D_xG$ sont continues et bornées par une constante $M$ indépendante de $\varepsilon$ dans $[0,+\infty) \times D$, avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*
2. *$F$ et $G$ sont $T-$périodiques en $t$, avec $T$ indépendante de $\varepsilon$.*

*alors on a :*

**(a)** Si le point $p$ est un point d'équilibre pour le système moyenné (2.2) telle que

$$\det\left(D_x f^0(p)\right) \neq 0, \tag{2.4}$$

alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $T-$périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) telle que $x_\varepsilon(t) \to p$ quand $\varepsilon \to 0$.

**(b)** Si le point d'équilibre $y = p$ du système moyenné (2.2) est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même stabilité que $p$.

**Exemple 2.2.1** *Soit l'équation de* ***Van Der Pol***

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \tag{2.5}$$

*L'équation (2.5) peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1-x^2)y. \end{cases} \tag{2.6}$$

*Le système non perturbé du système différentiel (2.6) est :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

*les orbites de ce système sont des cercles dans le plan de phases* $(xoy)$.

*En coordonnées polaires* $(r, \theta)$ *où* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ *avec* $r > 0$, *le système perturbé (2.6) s'écrit sous la forme*

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \dfrac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2\cos^2\theta)\sin^2\theta \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(1 - r^2\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta. \end{cases} \tag{2.7}$$

*On a*

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta},$$

*d'où le système (2.7) est équivalent à*

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2\cos^2\theta)\sin^2\theta + O(\varepsilon^2). \tag{2.8}$$

*On note que l'équation (2.8) est sous la forme standard (2.1) donc on peut appliquer la théorie de moyennisation avec*

$$x = r,\ t = \theta,\ T = 2\pi \text{ et } F(t,x) = F(\theta, r) = -r(1 - r^2\cos^2\theta)\sin^2\theta.$$

*Remarquons que* $F$ *est* $2\pi-$*périodique en* $\theta$ *et d'apres l'équation (2.3), on obtient*

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, r)d\theta = \frac{1}{8}r(r^2 - 4).$$

$f^0(r)$ *a une unique racine positive* $r = 2$. *Comme* $\left(\dfrac{df^0}{dr}\right)(2) = 1 \neq 0$, *donc d'après le théorème 2.2.1 l'équation de* ***Van Der Pol*** *(2.5) a pour* $|\varepsilon| \neq 0$ *suffisamment petit, un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique du rayon 2 du système non perturbé*

*(2.6) avec* $\varepsilon = 0$*. De plus, comme* $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2) = 1 > 0$*, ce cycle limite est instable (voir Fig. 2.1).*

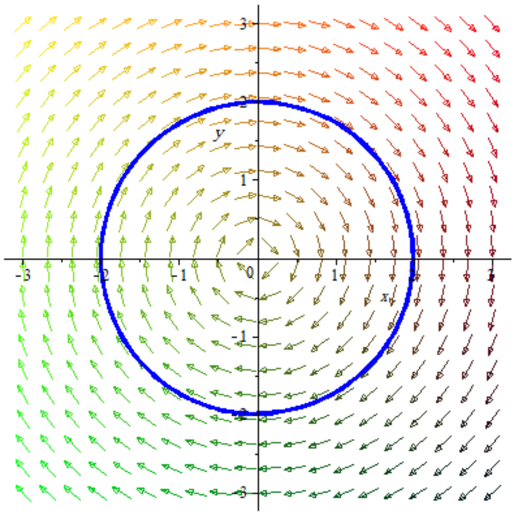


FIG. 2.1 – Cycle limite instable pour $\varepsilon = 0.01$.

**Exemple 2.2.2** *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(y^3 - y). \end{cases} \tag{2.9}$$

*Le système non perturbé du système (2.9) est :*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

*Les orbites de ce système sont des cercles dans le plan de phases* $(xoy)$*.*

*En coordonnées polaires* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$*, le système perturbé (2.9) s'écrit sous la forme*

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2\theta(-1 + r^2 - r^2\cos^2\theta) \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(-\cos\theta\sin\theta + r^2(\cos\theta\sin\theta - \cos^3\theta\sin\theta)), \end{cases} \tag{2.10}$$

*qui est équivalent à*

$$\frac{dr}{d\theta} = r\sin^2\theta(r^2\cos^2\theta - r^2 + 1)\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

*d'où*

$$F(r,\theta) = r\sin^2\theta(r^2\cos^2\theta - r^2 + 1).$$

*L'équation moyennée est*

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y)$$

*telle que*

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\sin^2\theta(r^2\cos^2\theta - r^2 + 1)d\theta, \\ &= -\frac{1}{8}r(3r^2-4), \end{aligned}$$

*d'ici* $f^0(r)$ *a un seul zéro positif* $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. *De plus* $[f^0(\frac{2}{3}\sqrt{3})]' = -1 < 0$.

*Alors le système (2.9) pour* $|\varepsilon| \neq 0$ *suffisamment petit, a un cycle limite stable d'amplitude* $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ *(voir Fig. 2.2).*

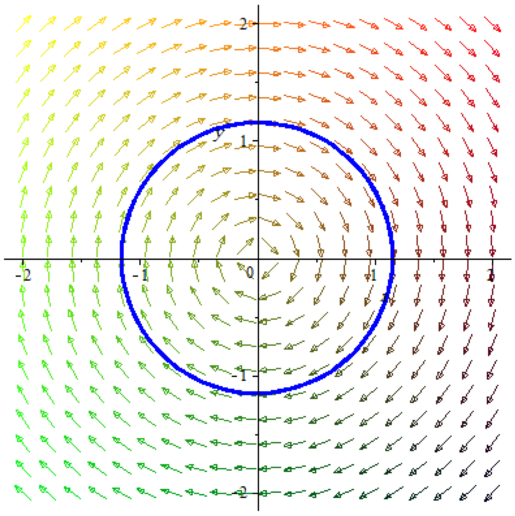


FIG. 2.2 – Cycle limite stable pour $\varepsilon = 0.01$.

## 2.3 Théorème de la moyennisation du deuxième ordre

Le théorème suivant prouve une approximation du second ordre pour les solutions d'un certain système différentiel périodique.

**Théorème 2.3.1** *[37] Considérons les deux problèmes aux valeurs initiales*

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t,x) + \varepsilon^2 F_2(t,x) + \varepsilon^3 F_3(t,x,\varepsilon), \quad x(0) = x_0, \tag{2.11}$$

*et*

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 f^{10}(y) + \varepsilon^2 g^0(y), \quad y(0) = x_0, \tag{2.12}$$

*où $F_1, F_2 : [0,+\infty) \times D \to \mathbb{R}^n$ et $F_3 : [0,+\infty) \times D \times [0,\varepsilon_0] \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, $T-$périodique par rapport à $t$ et $D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

*Soit*

$$f^1(t,x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y^1(t,x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(x), \tag{2.13}$$

*où*

$$y^1(t,x) = \int_0^t [F_1(s,x) - f^0(x)] ds + z(x), \tag{2.14}$$

*avec $z(x)$ est une fonction de classe $C^1$ telle que la moyenne de $y^1$ est nulle. $f^0, f^{10}$ et $g^0$ sont les fonctions moyennées de $F_1, f^1$ et $F_2$ respectivement. Supposons que :*

1. *$\dfrac{\partial F_1}{\partial x}, F_2$ et $F_3$ sont continues sur leurs domaines de définitions et lipschitziennes en $x$.*
2. *$|F_3(t,x,\varepsilon)|$ est uniformément bornée par une constante $M$ dans $[0, \dfrac{M}{\varepsilon}) \times D \times (0, \varepsilon_0]$.*
3. *$T$ est indépendante de $\varepsilon$.*
4. *$y(t) \in D$ pendant un temps d'échelle $\dfrac{1}{\varepsilon}$.*

*Alors*

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2)$$

*pendant un temps d'échelle $\dfrac{1}{\varepsilon}$.*

**Corollaire 2.3.1** *Si les hypothèses du théorème 2.3.1 sont satisfaites et de plus*

$$f^0(y) = 0,$$

*alors*

1. *Si $p$ est le point d'équilibre du système moyenné (2.12) tel que*

$$\frac{\partial}{\partial y}(f^{10}(y)+g^{0}(y))\mid_{y=p}\neq 0, \tag{2.15}$$

*alors il existe une solution $T-$périodique $x_\varepsilon(t)$ de l'équation (2.11) telle que*

$$x_\varepsilon(t)\to p \quad quand \quad \varepsilon\to 0.$$

2. *Si $p$ est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon|>0$ suffisamment petit, la solution périodique $x_\varepsilon(t)$ de (2.11) est unique, hyperbolique et de même stabilité que $p$.*

**Remarque 2.3.1** *1. Si $f^0(y)=0$, alors en coordonnées polaires $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$, on obtient que $f^0(r)=0$, d'où*

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta,r)d\theta=0.$$

*Calculons $f^{10}$, on trouve*

$$\begin{aligned} f^{10} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\partial F_1}{\partial r}(s,r)\int_0^{s}F_1(\theta,r)d\theta)ds+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial F_1}{\partial r}(s,r)z(r)ds, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{\partial F_1}{\partial r}(s,r)\int_0^{s}F_1(\theta,r)d\theta)ds+\frac{z(r)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial F_1}{\partial r}(s,r)ds, \end{aligned}$$

*ce qui implique que*

$$f^{10}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F_1}{\partial r}(s,r)(\int_0^{s}F_1(\theta,r)d\theta)\right)ds. \tag{2.16}$$

2. *Pour $f^0(y)=0$, on note la fonction moyennée du seconde ordre par*

$$f_2(r)=f^{10}(r)+g^{0}(r). \tag{2.17}$$

**Exemple 2.3.1** *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x}=-y+\varepsilon x-\varepsilon^2 x, \\ \dot{y}=x+\varepsilon(x^2-y-8xy)-\varepsilon^2 y. \end{cases} \tag{2.18}$$

*En passant aux coordonnées polaires* $(r, \theta)$ *où*

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \dfrac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}. \end{cases}$$

*Alors on aura*

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon^2 r + (8r^2\cos^3\theta + r^2\cos^2\theta\sin\theta + 2r\cos^2\theta - 8r^2\cos\theta - r)\varepsilon, \\ \dot{\theta} = 1 + (r\cos^3\theta - 8r\sin\theta\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta)\varepsilon, \end{cases}$$

*D'une manière équivalente*

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r) + O(\varepsilon^2), \tag{2.19}$$

*telle que*

$$F_1(\theta, r) = 8r^2\cos^3\theta + r^2\cos^2\theta\sin\theta + 2r\cos^2\theta - 8r^2\cos\theta - r,$$

*et*

$$\begin{aligned} F_2(\theta, r) \quad = \quad & -16r^3\cos^6\theta + 63r^3\cos^5\theta\sin\theta - 4r^2\cos^5\theta \\ & +32r^2\cos^4\theta\sin\theta + 16r^3\cos^4\theta - 64r^3\cos^3\theta\sin\theta \\ & +4r\cos^3\theta\sin\theta + 3r^2\cos^3\theta - 24r^2\cos^2\theta\sin\theta \\ & -2r\cos\theta\sin\theta - r. \end{aligned}$$

*En appliquant maintenant le théorème 2.3.1, on calcule la fonction moyennée*

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\theta, r)d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (8r^2\cos^3\theta + r^2\cos^2\theta\sin\theta + 2r\cos^2\theta - 8r^2\cos\theta - r)d\theta = 0.$$

*Puisque* $f^0(r) = 0$, *On peut passer à la théorie de moyennisation d'ordre deux, on* *calcule* $f^1$ *telle que*

$$f^1(r,s) = \frac{\partial F_1}{\partial r} y^1(s,r),$$

*où*

$$y^1 = \int_0^s F_1(\theta,r)d\theta = -\frac{1}{3}r^2\cos^3(s) + \frac{8}{3}r^2\cos^2(s)\sin(s) - \frac{8}{3}r^2\sin(s) + r\cos(s)\sin(s) + \frac{1}{3}r^2,$$

*donc*

$$f^1(r,s) = \frac{\partial F_1}{\partial r} y^1(s,r) = \frac{\partial F_1}{\partial r}\int_0^s F_1(\theta,r)d\theta$$

$$= (2\sin(s)r(\cos(s))^2 + 16(\cos(s))^3 r + 2(\cos(s))^2 - 1 - 16r\cos(s))y^1(r,s).$$

*Ensuite, on calcule la fonction* $f_2(r)$ *telle que*

$$\begin{aligned} f_2(r) &= f^{10}(r) + g^0(r) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f^1(s,r) + F_2(s,r))ds \end{aligned}$$

*où*

$$\begin{aligned} f^1(s,r) + F_2(s,r) &= -\frac{1}{3}r(-315r^2\sin(s)(\cos(s))^5 - 160r(\cos(s))^4\sin(s) \\ &\quad -18(\cos(s))^3\sin(s) + 448r^2(\cos(s))^3\sin(s) \\ &\quad +144r\sin(s)(\cos(s))^2 - 2r^2\sin(s)(\cos(s))^2 \\ &\quad -128r^2\cos(s)\sin(s) + 9\cos(s)\sin(s) - 8r\sin(s) + 3 \\ &\quad +r + 16r^2\cos(\theta) - 96r^2(\cos(s))^4 - 16r(\cos(s))^3 \\ &\quad +80r^2(\cos(s))^6 - 16r^2(\cos(s))^3 - 2r(\cos(s))^2 \\ &\quad +20r(\cos(s))^5 + 16r^2(\cos(s))^2). \end{aligned}$$

*ce qui implique que*

$$f_2(r) = r^3 - r.$$

*L'équation* $f_2(r) = 0$ *a une seule racine positive* $r = 1$ *et on a* $\left[\frac{\partial}{\partial r}(f_2(r))\right]_{r=1} = 2 > 0$. *Donc d'après le corollaire* ***2.3.1****, le système (2.19) pour* $|\varepsilon| \neq 0$ *suffisamment petit, a un seul cycle limite instable d'amplitude* $r = 1$ *(voir Fig. 2.3).*

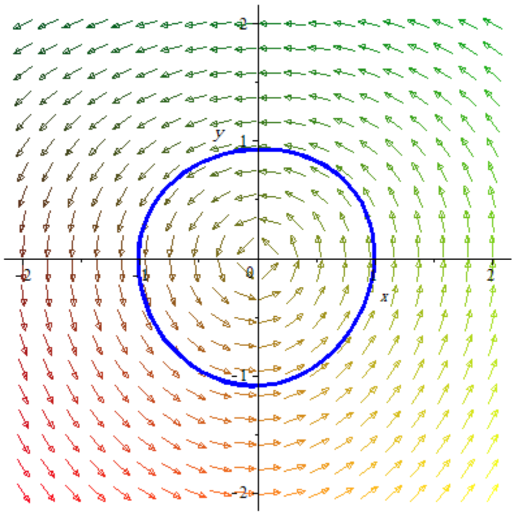

FIG. 2.3 – Cycle limite instable pour $\varepsilon = 0.03$.

## 2.4 Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre

**Théorème 2.4.1** *On considère le problème de bifurcation des solutions $T-$périodiques du système différentiel de la forme :*

$$\dot{x}(t) = F_0(t,x) + \varepsilon F_1(t,x) + \varepsilon^2 F_2(t,x,\varepsilon), \tag{2.20}$$

*où $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ pour $\varepsilon_0$ suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe $C^2$, $T-$périodique en $t$ et $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Supposons que le système non perturbé*

$$\dot{x}(t) = F_0(t,x), \tag{2.21}$$

*a une sous variété des solutions périodiques de dimension $k$.*

*Soit $x(t,z)$ la solution du système non perturbé (2.21) telle que $x(0,z) = z$. La linéarisation du système non perturbé (2.21) le long de la solution périodique $x(t,z)$ s'écrit*

$$\dot{y} = D_x F_0(t, x(t,z))y. \tag{2.22}$$

*Notons par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.22). supposons qu'il existe un ensemble ouvert $V$ avec $CL(V) \subset \Omega$, tel que pour chaque $z \in$*

*$CL(V)$, $x(t,z,0)$ est $T$-périodique, où $x(t,z,0)$ est la solution du système non perturbé (2.21) avec $x(0,z,0)=z$. L'ensemble $CL(V)$ est isochrone pour le système (2.20) ; c'est à dire il est un ensemble formé seulement par des orbites périodiques, toutes ayant la même période.*

*On note par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur ses $k$ premières coordonnées, ç.à.d.*

$$\xi(x_1,...,x_n) = (x_1,...,x_k),$$

*et par $\xi^{\perp} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur ses $n-k$ dernières coordonnées, ç.à.d.*

$$\xi^{\perp}(x_1,...,x_n) = (x_{k+1},...,x_n).$$

*Alors, on a les résultats suivants :*

**Théorème 2.4.2** *[31] Soit $V$ un ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}^k$, et soit $\beta : CL(V) \to \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe $C^2$. supposons que :*

**(i)** *$Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V)\} \subset \Omega$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution $x(t,z_\alpha)$ de (2.21) est $T-$périodique.*

**(ii)** *Pour chaque $z_\alpha \in Z$, il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.22) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le coin supérieur droit une matrice $k \times (n-k)$ nulle, et dans le coin inférieur droit la matrice $\Delta_\alpha (n-k) \times (n-k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.*

*On considère la fonction $\mathcal{F} : CL(V) \to \mathbb{R}^k$*

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left( \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t,z_\alpha)) dt \right). \tag{2.23}$$

*S'il existe $a \in V$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution $T-$périodique $\varphi(t,\varepsilon)$ du système (2.20) telle que $\varphi(0,\varepsilon) \to z_a$ quand $\varepsilon \to 0$.*

Nous donnons maintenant un résultat quand $n = k$.

**Théorème 2.4.3** *[31] Soit $V$ un ensemble ouvert et borné avec $CL(V) \subset \Omega$ tel que pour chaque $z_\alpha \in CL(V)$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$, la solution $x(t,z_\alpha)$ est $T-$périodique. Considérons la fonction $\mathcal{F} : CL(V) \to \mathbb{R}^n$*

$$\mathcal{F}(\alpha) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t,z_\alpha)) dt. \tag{2.24}$$

*S'il existe* $a \in V$ *avec* $\mathcal{F}(a) = 0$ *et* $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$*, alors il existe une solution* $T-$*périodique* $\varphi(t, \varepsilon)$ *du système (2.20) telle que* $\varphi(0, \varepsilon) \to z_a$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

**Théorème 2.4.4** *[31] Supposons que* $n = 2m$. *Soit* $V$ *un ensemble ouvert et borné de* $\mathbb{R}^m$ *et soit* $\beta : CL(V) \to \mathbb{R}^m$ *une fonction de classe* $C^2$*. supposons que :*

**(i)** $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V)\} \subset \Omega$ *et pour chaque* $z_\alpha \in Z$ *la solution* $x(t, z_\alpha)$ *de (2.21) est* $T-$*périodique.*

**(ii)** *Pour chaque* $z_\alpha \in Z$*, il existe une matrice fondamentale* $M_{z_\alpha}(t)$ *de (2.22) telle que la matrice* $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ *a dans le coin supérieur droit la matrice* $\Delta_\alpha(m \times m)$ *avec* $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$*, et dans le coin inférieur droit une matrice* $m \times m$ *nulle.*

*On considère la fonction* $\mathcal{F} : CL(V) \to \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi^\perp \left( \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right). \tag{2.25}$$

*S'il existe* $a \in V$ *avec* $\mathcal{F}(a) = 0$ *et* $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$*, alors il existe une solution* $T-$*périodique* $\varphi(t, \varepsilon)$ *du système (2.20) telle que* $\varphi(0, \varepsilon) \to z_a$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

**Exemple 2.4.1** *On considère l'équation suivante*

$$\dddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 + 4x^3), \tag{2.26}$$

*On écrit l'équation différentielle du troisième ordre (2.26) comme le système différentiel du premier ordre suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = x - y + z + \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 + 4x^3). \end{cases} \tag{2.27}$$

*L'origine est l'unique point singulier du système (2.27) lorsque* $\varepsilon = 0$.

*La partie linéaire du système (2.27) avec* $\varepsilon = 0$ *à l'origine est*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Les valeurs propres de la matrice sont* $\pm i$ *et* $1$.

*On va faire un changement de variables linéaire*

$$(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T,$$

*telle que dans les nouvelles variables* $(X, Y, Z)$*, le système (2.27) avec* $\varepsilon = 0$ *a sa partie linéaire égale à sa forme normale de Jordan, c.à.d.*

$$(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^T = J(X, Y, Z)^T,$$

*la forme normale réelle de Jordan de la matrice* $A$ *est*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*On a*

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0,$$

*d'où*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Par la transformation linéaire* $(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T$*, c.à.d.*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

*on trouve*

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} - \dot{y} \\ \dot{Y} = -\dot{y} + \dot{z} \\ \dot{Z} = \dot{x} + \dot{z}. \end{cases} \tag{2.28}$$

*On a*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

*on obtient*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X - Y + Z \\ -X - Y + Z \\ -X + Y + Z \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

*on remplace (2.27) et (2.29) dans (2.28), on trouve*

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \widetilde{F}(X, Y, Z, t) \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \widetilde{F}(X, Y, Z, t) \end{cases} \tag{2.30}$$

*où*

$$\widetilde{F} = \widetilde{F}(X, Y, Z, t) = F(x, y, z, t).$$

*Pour* $\varepsilon = 0$, *la solution du système (2.30) est*

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(t) - Y_0 \sin(t) \\ Y_0 \cos(t) + X_0 \sin(t) \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}.$$

*On utilise la notion introduite dans le théorème 2.4.1, et d'après le système (2.30), on a*

$$x = (X, Y, Z),\ F_0(x, t) = (-Y, X, Z),\ F_1(x, t) = (0, \widetilde{F}, \widetilde{F}) \text{ et } F_2(x, t, \varepsilon) = (0, 0, 0).$$

*Soit* $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$ *la solution du système (2.30) telle que*

$$x(0, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

*Il est clair que, le système non perturbé (2.30)avec* $\varepsilon = 0$ *admet un centre à l'origine dans le plan* $(X, Y)$. *Les solutions périodique de ce centre sont* $x(t; X_0, Y_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t))$ *telle que*

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(t) - Y_0 \sin(t) \\ Y_0 \cos(t) + X_0 \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période* $2\pi$.

*1. Pour notre système,* $V$ *et* $\alpha$ *du théorème 2.4.2 sont* $V = \{(X, Y, 0),\ 0 < X^2 + Y^2 < \rho\}$ *pour certains* $\rho$ *arbitraires et* $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$.

*2. La matrice fondamentale $M(t)$ du système non perturbé (2.30) est*

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

*D'autre part, un calcul simple donne*

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix},$$

*d'où* $1 - e^{-2\pi} \neq 0$.

*Nous avons montré que toutes les hypothèses du théorème 2.4.2 sont vérifiées.*

*Par conséquent, nous allons étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premiers composantes de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée par*

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_{z_\alpha}^{-1}(t)F_1(t, x(t, z_\alpha))dt), \quad \xi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2),$$

*c.à.d.*

$$\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha)),$$

*d'où*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t)\widetilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t)dt \qquad (2.31) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t)F(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t)dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)\tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t)dt \qquad (2.32) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)\tilde{F}(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t)dt. \end{aligned}$$

*On pose* $\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$.
*On intégre (2.31) et (2.32), on obtient*

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{1}{8}Y_0X_0 - \frac{3}{4}Y_0^2X_0 - \frac{3}{4}Y_0X_0^2 - \frac{3}{4}Y_0^3 - \frac{3}{4}X_0^3 + \frac{1}{8}Y_0^2 + \frac{1}{8}X_0^2 \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{1}{16}(X_0 - Y_0)(12X_0^2 - X_0 + 12Y_0^2 - Y_0) \end{cases}$$

*Si* $\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0$, *on trouve*

$$(X_0^*, Y_0^*) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}).$$

*On a*

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(r_0, V_0)}\Big|_{(X_0,Y_0)=(X_0^*,Y_0^*)}\right) = \frac{3}{8192} \neq 0.$$

*Alors, pour* $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ *avec* $\varepsilon_0 > 0$ *suffisamment petit, il y a une solution isolée* $2\pi$*-périodique* $x(t, \varepsilon)$ *de l'équation différentielle (2.26) telle que*

$$x(0, \varepsilon) \to 0, \dot{x}(0, \varepsilon) \to -\frac{1}{8}, \ddot{x}(0, \varepsilon) \to 0,$$

quand $\varepsilon \to 0$.

## 2.5 Théorème de la moyennisation du premier order via le degré du Brouwer

La méthode de la moyennisation donne la relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel non-autonome et les solutions d'un système moyennisé équivalent qui est autonome. En utilisant le théorème de la fonction implicite, la méthode de la moyennisation réduit le problème de la recherche des solutions périodiques d'un système différentiel à un problème équivalent basé sur la recherche des racines positives d'une fonction non-linéaire, ces racines fournissent les solutions périodiques pour le système différentiel du départ.

En **2004**, **A. Buică** et **J. Llibre** [10] ont introduit une nouvelle approche de la méthode de la moyennisation, ils ont utilisé des méthodes topologiques basées sur le degré de **Brouwer** pour résoudre des équations d'opérateurs équivalentes au problème de la recherche des solutions périodiques d'un système différentiel perturbé. En fait, ils ont affaibli les hypothèses du théorème analogue du moyennisation du premier et du deuxième ordre et ils ont aussi donné des résultats pour le troisième ordre dans le cas des systèmes de dimension 1. Les auteurs ont considéré que c'est plus facile et transparent d'obtenir des résultats correspondants à un ordre plus élevé de la méthode de la moyennisation grâce à cette nouvelle approche.

Maintenant, nous donnons quelques notions sur le degré de **Brouwer**.

**Définition 2.5.1** *Soit $D$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g \in C^1(D)$ et $V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\bar{V} \subset D$ et $Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\}$. Supposons aussi $J_g(z) \neq 0$ pour tout $z \in Z_g$ où $J_g(z)$ désigne le déterminant de la jacobienne de $g$ en $z$, alors le degré de Brower de la fonction $g$ par rapport à l'ensemble $V$ et le point $O$ noté $d_B(g, V, O)$ est défini par*

$$d_B(g, V, O) = \sum_{z \in Z_g} sign(J_g(z)).$$

*Maintenant, nous allons donner le théorème de la moyennisation du premier ordre via le degré de **Brouwer**.*

**Théorème 2.5.1** *[10] Soit le système différentiel*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon H(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon) \tag{2.33}$$

*où $H : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, $T-$périodiques par rapport à la variable $t$ et $D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit $h : D \to \mathbb{R}^n$ par*

$$h(z) = \frac{1}{T} \int_0^T H(s, z) ds. \tag{2.34}$$

*Supposons que :*

1. *$H$ et $R$ sont localement lipschitziennes par rapport à la variable $x$.*
2. *pour $a \in D$ avec $h(a) = 0$, il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et $d_B(h, V, a) \neq 0$ ( où $d_B(h, V, a)$ désigne le degré de Brouwer de $h$ dans le voisinage $V$ de $a$ ).*

   *Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $T-$périodique isolée $x(t, \varepsilon)$ du système (2.33) telle que $x(0, \varepsilon) \to a$ quand $\varepsilon \to 0$.*

**Remarque 2.5.1** *Soit $h : D \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $C^1$, avec $h(a) = 0$, où $D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in D$. Si $\det(Dh(a)) \neq 0$ (ç.à.d le déterminant de la matrice jacobienne de la fonction $h$ en $a$ n'est pas nul), il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et on a $d_B(h, a, V, 0) \in \{-1, 1\}$.*

**Remarque 2.5.2** *Les hypothèses du théorème 2.5.1 sont plus faibles que celles du théorème 2.2.1. Pour plus de détail sur le deuxième et le troisième ordre voir [10].*

**Théorème 2.5.2** *Sous les hypothèses du theorem 2.5.1, pour $\varepsilon$ suffisamment petit la condition $\det(Dh(a)) \neq 0$ assure l'existence et l'unicité d'une solution $T-$périodique $x(t,\varepsilon)$ du système (2.33) telle que $x(0,\varepsilon) \to a$ quand $\varepsilon \to 0$, et si toutes les valeurs propres de la matrice $Dh(a)$ ont des parties réelles négatives, alors la solution périodique $x(t,\varepsilon)$ est stable. S'il existe au moins une valeur propre de la matrice $Dh(a)$ avec une partie réelle positive, alors la solution périodique $x(t,\varepsilon)$ est instable.*

CHAPITRE 3

# Solutions périodiques d'équations différentielles continues du deuxième ordre

## 3.1 Introduction

Les formulations mathématiques de nombreux problèmes en physique sont réductibles à des équations différentielles ordinaires avec des coefficients non constants. Généralement les coefficients sont des fonctions périodiques de la variable indépendante, et les équations peuvent être considérées comme des cas particuliers de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(t)x^n = f(t) \tag{3.1}$$

où $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions périodiques en $t$. Lorsque $f(t) = 0$ et $n = 1$, on obtient l'équation de **Hill**. Les cas spéciaux importants de l'équation de **Hill** incluent l'équation de **Mathieu** et l'équation de **Meissner**. L'équation (3.1) est en général difficile à résoudre analytiquement.

Les solutions périodiques des équations différentielles du second ordre

$$\ddot{x} \pm x^n = \mu f(t) \tag{3.2}$$

et

$$\ddot{x} \pm |x|^n = \mu f(t) \tag{3.3}$$

où $n = 4, 5, ..., f(t)$ est une fonction continue $T-$périodique telle que $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$ et

$\mu$ est un paramètre suffisamment petit et positif, ont été étudiés par **J. Llibre** et **A. Makhlouf** en **2017** voir [24].

Dans ce chapitre, notre but est d'étendre les résultats des solutions périodiques des équations différentielles du second ordre (3.2) et (3.3) à la forme

$$\ddot{x} + g(t)x^n = \mu f(t) \tag{3.4}$$

et

$$\ddot{x} + g(t)\left|x\right|^n = \mu f(t) \tag{3.5}$$

où $n = 2, 3, ..., f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions continues $T-$périodiques telles que $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$, $\int\limits_0^T g(t)dt \neq 0$ et $\mu > 0$ est un paramètre suffisamment petit.

On note que l'équation différentielle (3.4) est continue en $t$ et lisse en $x$, et que l'équation différentielle (3.5) est continue en $t$ et localement lipschitzienne en $x$. Ce genre d'équations différentielles n'a pas été étudié jusqu'à présent.

Nous avons aussi étudié la stabilité des solutions périodiques que nous avons trouvé dans les équations différentielles du second ordre (3.4) et (3.5). Nous avons traité cette étude en utilisant la méhode de moyennisation du premier order, plus précisément le théorème 2.5.1.

Un problème similaire de (3.2) et (3.3) avec troisième ordre a été étudié dans [29].

## 3.2 Résultats principaux

Nos résultats principaux sont les suivants.

**Théorème 3.2.1** *Considérons l'équation différentielle du second ordre*

$$\ddot{x} + g(t)x^n = \mu f(t), \tag{3.6}$$

*où $n = 2, 3, ..., f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions continues, $T-$périodiques telles que $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$, $\int\limits_0^T g(t)dt \neq 0$ et $\mu > 0$ est un paramètre suffisamment petit.*

*Pour $n$ pair et $\frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} > 0$, il existe deux solutions périodiques $x_+(t,\mu)$ et $x_-(t,\mu)$ de* *période $T$ de l'équation différentielle (3.6) telle que*

$$x_+(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}})$$

*et*

$$x_-(0,\mu) = -\mu^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}}).$$

*Si $\int_0^T g(t)dt < 0$, la solution périodique $x_+(t,\mu)$ est instable. Si $\int_0^T g(t)dt > 0$, la solution périodique $x_-(t,\mu)$ est instable.*

*Pour $n$ impair, il n'existe qu'une seule solution périodique $x(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (3.6) telle que*

$$x(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}}).$$

*Si $\int_0^T g(t)dt < 0$, la solution périodique $x(t,\mu)$ est instable.*

– **Preuve du théorème 3.2.1**

Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, nous écrivons l'équation différentielle du second ordre (3.6) sous la forme du système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(t)x^n + \mu f(t). \end{cases} \tag{3.7}$$

D'après le changement de variables

$$x = \varepsilon^{2/(n-1)}X,\ y = \varepsilon^{(n+1)/(n-1)}Y,\ \mu = \varepsilon^{2n/(n-1)}, \tag{3.8}$$

avec $\varepsilon > 0$, le système différentiel (3.7) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon Y, \\ \dot{Y} = \varepsilon(-g(t)X^n + f(t)). \end{cases} \tag{3.9}$$

Nous notons que le changement de variables (3.8) est bien défini car $n > 1$. Maintenant, nous pouvons appliquer la théorie de moyennisation du premier ordre via le degré de Brouwer. En utilisant la notation du théorème 2.5.1 le système (3.9) peut être écrit comme le système (2.33) avec $x = (X, Y)$, $H = (Y, -g(t)X^n + f(t))$, et $R = (0, 0)$. La fonction moyennée $h(z)$ donnée en (2.34) pour le système (3.9) devient

$$h(X,Y) = \left( Y, -\frac{X^n}{T} \int_0^T g(t)dt + \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right). \tag{3.10}$$

Si $n$ **est pair** et $\frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} > 0$, alors la fonction $h(X,Y)$ a deux zéros uniques

$$(X_+^*, Y_+^*) = \left( \left( \frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}}, 0 \right)$$

et

$$(X_-^*, Y_-^*) = \left( -\left( \frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}}, 0 \right).$$

Le jacobien de la fonction $h(X,Y)$ au point $(X_+^*, Y_+^*)$ est $\frac{n}{T} X_+^{*(n-1)} \int_0^T g(t)dt \neq 0$, parce que par hypothèse nous avons $\int_0^T f(t)dt \neq 0$ et $\int_0^T g(t)dt \neq 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_+(t,\varepsilon), Y_+(t,\varepsilon))$ du système (3.9) vérifiant

$$(X_+(0,\varepsilon), Y_+(0,\varepsilon)) = (X_+^*, 0) + O(\varepsilon).$$

D'après (3.8) on a $x = \varepsilon^{2/(n-1)}X$ et $\mu = \varepsilon^{2n/(n-1)}$, on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}}X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, nous concluons qu'il existe une solution périodique $x_+(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (3.6) telle que

$$x_+(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}}X_+^* + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+1)}{2n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y)$ au point $(X_+^*, Y_+^*)$ sont $\lambda_1$ et $\lambda_2$ telles que $\lambda^2 = -\frac{n}{T}X_+^{*(n-1)}\int\limits_0^T g(t)dt$.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt > 0$, cela implique que $\lambda^2 < 0$. Ainsi, les valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont imaginaires pures. Donc nous ne pouvons rien dire sur la stabilité de la solution périodique.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt < 0$, cela implique que $\lambda^2 > 0$. Donc il existe une valeur propre réelle positive, alors d'après le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_+(t,\mu)$ est instable.

Le jacobien de la fonction $h(X,Y)$ au point $(X_-^*, Y_-^*)$ est $\frac{n}{T}X_-^{*(n-1)}\int\limits_0^T g(t)dt \neq 0$, parce que par hypothèse nous avons $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$ et $\int\limits_0^T g(t)dt \neq 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_-(t,\varepsilon), Y_-(t,\varepsilon))$ du système (3.9) vérifiant

$$(X_-(0,\varepsilon), Y_-(0,\varepsilon)) = (X_-^*, 0) + O(\varepsilon).$$

D'apès le changement de variables (3.8) on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}}X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, nous concluons qu'il existe une solution périodique $x_-(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (3.6) telle que

$$x_-(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}}X_-^* + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+1)}{2n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y)$ au point $(X_-^*, Y_-^*)$ sont $\lambda_1$ et $\lambda_2$ telles que $\lambda^2 = -\frac{n}{T}X_-^{*(n-1)}\int\limits_0^T g(t)dt$.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt > 0$, cela implique que $\lambda^2 > 0$. Donc il existe une valeur propre réelle positive, encore une fois d'apès le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_-(t,\mu)$ est instable.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt < 0$, cela implique que $\lambda^2 < 0$. Ainsi, Les deux valeurs propres sont imaginaires pures. Donc nous ne pouvons rien dire sur la stabilité de la solution périodique.

Si $n$ **est impair** alors la fonction $h(X,Y)$ a le zéro unique

$$(X^*,Y^*) = \left( \left( \frac{\int\limits_0^T f(t)dt}{\int\limits_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}}, 0 \right).$$

Le jacobien de la fonction $h(X,Y)$ à ce point est $\frac{n}{T}X^{*(n-1)}\int\limits_0^T g(t)dt \neq 0$, parce que par hypothèse on a $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$ et $\int\limits_0^T g(t)dt \neq 0$. D'apès le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ du système (3.9) vérifiant

$$(X(0,\varepsilon), Y(0,\varepsilon)) = (X^*, 0) + O(\varepsilon).$$

Revenons au changement de variables (3.8) on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}}X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, nous concluons qu'il existe une solution périodique $x(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (3.6) telle que

$$x(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}}X^* + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}}).$$

Nous notons que $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+1)}{2n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y)$ au point $(X^*,Y^*)$ sont $\lambda_1$ et $\lambda_2$ telles que $\lambda^2 = -\frac{n}{T}X^{*(n-1)}\int\limits_0^T g(t)dt$.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt < 0$, cela implique que $\lambda^2 > 0$. Donc il existe une valeur propre réelle positive, encore une fois d'apès le théorème 2.5.2, la solution périodique $x(t,\mu)$ est instable.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt > 0$, cela implique que $\lambda^2 < 0$. Ainsi, les deux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont imaginaires pures. Donc nous ne pouvons rien dire sur la stabilité de la solution périodique.

**Corollaire 3.2.1** **(a)** *D'après le théorème 3.2.1, Pour* $\mu > 0$ *suffisamment petit l'équation* $\ddot{x} - \sin^2(t)x^2 = -\mu\cos^2(t)$ *a deux solutions périodiques* $x_+(t,\mu)$ *et* $x_-(t,\mu)$ *de période* $2\pi$ *telles que*

$$x_+(0,\mu) = \sqrt{\mu} + O(\mu^{\frac{3}{4}}) \text{ et } x_-(0,\mu) = -\sqrt{\mu} + O(\mu^{\frac{3}{4}}).$$

*La solution périodique* $x_+(t,\mu)$ *est instable.*

**(b)** *D'après le théorème 3.2.1, Pour* $\mu > 0$ *suffisamment petit l'équation*

$$\ddot{x} - \sin^2(t)x = \mu\cos^2(t)$$

*ne possède qu'une seule solution périodique instable* $x(t,\mu)$ *de période* $2\pi$ *telle que*

$$x(0,\mu) = -\mu + O(\mu).$$

**Théorème 3.2.2** *Considérons l'équation différentielle du second ordre*

$$\ddot{x} + g(t)\,|x|^n = \mu f(t), \tag{3.11}$$

*où* $n \geqslant 2, f(t)$ *et* $g(t)$ *sont des fonctions continues,* $T-$*périodiques telles que,* $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$, $\int\limits_0^T g(t)dt \neq 0$ *et* $\mu > 0$ *est un paramètre suffisamment petit. Pour* $n \geq 2$ *et* $\frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} > 0$, *il existe deux solutions périodiques* $x_+(t,\mu)$ *et* $x_-(t,\mu)$ *de période* $T$ *de l'équation différentielle (3.11) telle que*

$$x_+(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\int\limits_0^T f(t)dt}{\int\limits_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}})$$

*et*

$$x_-(0,\mu) = -\mu^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\int\limits_0^T f(t)dt}{\int\limits_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}}).$$

*Si* $\int\limits_0^T g(t)dt < 0$, *les solutions périodiques* $x_+(t,\mu)$ *et* $x_-(t,\mu)$ *sont instables.*

– **Preuve du théorème 3.2.2**

Sous les hypothèses du théorème 3.2.2, nous écrivons l'équation différentielle du second ordre (3.11) sous la forme du système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(t)\,|x|^n + \mu f(t). \end{cases} \tag{3.12}$$

D'après le changement de variables (3.8), le système différentiel (3.12) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon Y, \\ \dot{Y} = \varepsilon(-g(t)\,|X|^n + f(t)). \end{cases} \tag{3.13}$$

Nous notons que le changement de variables (3.8) est bien défini car $n > 1$. Maintenant, nous pouvons appliquer la théorie de moyennisation du premier ordre parce que la fonction $|X|^n$ est localement lipschitzienne. En utilisant la notation du théorème 2.5.1 le système (3.13) peut être écrit comme le système (2.33) avec $x = (X, Y)$, $H = (Y, -g(t)\,|X|^n + f(t))$, et $R = (0, 0)$. La fonction moyennée $h(z)$ donnée en (2.34) pour le système (3.13) devient

$$h(X,Y) = \left( Y, -\frac{|X|^n}{T} \int_0^T g(t)dt + \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right).$$

Si $n$ **est pair** et $\frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} > 0$, alors la fonction $h(X,Y)$ a deux zéros uniques

$$(X_+^*, Y_+^*) = \left( \left( \frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}}, 0 \right)$$

et

$$(X_-^*, Y_-^*) = \left( -\left( \frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}}, 0 \right).$$

Pour $X > 0$ le jacobien de la fonction $h(X,Y)$ au point $(X_+^*, Y_+^*)$ est $\frac{n}{T} X_+^{*(n-1)} \int_0^T g(t)dt \neq 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_+(t,\varepsilon), Y_+(t,\varepsilon))$ du système (3.13) vérifiant

$$(X_+(0,\varepsilon), Y_+(0,\varepsilon)) = (X_+^*, 0) + O(\varepsilon).$$

D'après (3.8) on a $x = \varepsilon^{2/(n-1)} X$ et $\mu = \varepsilon^{2n/(n-1)}$, on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}} X$. Donc, pour $\mu > 0$ suffisamment petit, il existe une solution périodique $x_+(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (3.11) telle que

$$x_+(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_+^* + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+1)}{2n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y)$ au point $(X_+^*, Y_+^*)$ sont $\lambda_1$ et $\lambda_2$ telles que $\lambda^2 = -\frac{n}{T} X_+^{*(n-1)} \int_0^T g(t)dt$.

Si $\int_0^T g(t)dt < 0$, cela implique que $\lambda^2 > 0$. Donc il existe une valeur propre réelle positive, encore une fois d'après le théorème 2.5.2 la solution périodique $x_+(t,\mu)$ est instable.

Si $\int_0^T g(t)dt > 0$, cela implique que $\lambda^2 < 0$. Ainsi, Les deux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont imaginaires pures. Donc nous ne pouvons rien dire sur la stabilité de la solution périodique.

Pour $X < 0$ le jacobien de la fonction $h(X,Y)$ au point $(X_-^*, Y_-^*)$ est $-\frac{n}{T} X_-^{*(n-1)} \int_0^T g(t)dt \neq 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_-(t,\varepsilon), Y_-(t,\varepsilon))$ du système (3.13) vérifiant

$$(X_-(0,\varepsilon), Y_-(0,\varepsilon)) = (X_-^*, 0) + O(\varepsilon).$$

D'après le changement de variables (3.8) on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}} X$. Donc, pour $\mu > 0$ suffisamment petit, il existe une solution périodique $x_-(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (3.11) telle que

$$x_-(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_-^* + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+1)}{2n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y)$ au point $(X_-^*, Y_-^*)$ sont $\lambda_1$ et $\lambda_2$ telles que $\lambda^2 = \frac{n}{T} X_-^{*(n-1)} \int\limits_0^T g(t)dt$.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt < 0$, cela implique que $\lambda^2 > 0$. Donc il existe une valeur propre réelle positive, encore une fois d'après le théorème 2.5.2 la solution périodique $x_-(t,\mu)$ est instable.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt > 0$, cela implique que $\lambda^2 < 0$. Ainsi, Les deux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont imaginaires pures. Donc nous ne pouvons rien dire sur la stabilité de la solution périodique.

Si $n$ **est impair** et $\frac{\int_0^T f(t)dt}{\int_0^T g(t)dt} > 0$, alors la fonction $h(X,Y)$ a deux zéros

$$(X_+^*, Y_+^*) = \left( \left( \frac{\int\limits_0^T f(t)dt}{\int\limits_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}}, 0 \right)$$

et

$$(X_-^*, Y_-^*) = \left( - \left( \frac{\int\limits_0^T f(t)dt}{\int\limits_0^T g(t)dt} \right)^{\frac{1}{n}}, 0 \right).$$

Pour $X > 0$ le jacobien de la fonction $h(X,Y)$ au point $(X_+^*, Y_+^*)$ est $\frac{n}{T} X_+^{*(n-1)} \int\limits_0^T g(t)dt \neq 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_+(t,\varepsilon), Y_+(t,\varepsilon))$ du système (3.13) vérifiant

$$(X_+(0,\varepsilon), Y_+(0,\varepsilon)) = (X_+^*, 0) + O(\varepsilon).$$

D'après le changement de variables (3.8) on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}} X$. Donc, pour $\mu > 0$ suffisamment petit, il existe une solution périodique $x_+(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (3.11) telle que

$$x_+(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_+^* + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+1)}{2n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y)$ au point $(X_+^*, Y_+^*)$ sont $\lambda_1$ et $\lambda_2$ telles que $\lambda^2 = -\frac{n}{T} X_+^{*(n-1)} \int\limits_0^T g(t)dt$.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt < 0$, cela implique que $\lambda^2 > 0$. Donc il existe une valeur propre réelle positive, encore une fois d'après le théorème 2.5.2 la solution périodique $x_+(t,\mu)$ est instable.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt > 0$, cela implique que $\lambda^2 < 0$. Ainsi, Les deux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont imaginaires pures. Donc nous ne pouvons rien dire sur la stabilité de la solution périodique.

Pour $X < 0$ le jacobien de la fonction $h(X,Y)$ au point $(X_-^*, Y_-^*)$ est $\frac{n}{T} X_-^{*(n-1)} \int\limits_0^T g(t)dt \neq 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_-(t,\varepsilon), Y_-(t,\varepsilon))$ du système (3.13) vérifiant

$$(X_-(0,\varepsilon), Y_-(0,\varepsilon)) = (X_-^*, 0) + O(\varepsilon).$$

Revenons au changement de variables (3.8) on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}} X$. Donc, pour $\mu > 0$ suffisamment petit, il existe une solution périodique $x_-(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (3.11) telle que

$$x_-(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_-^* + O(\mu^{\frac{(n+1)}{2n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+1)}{2n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y)$ au point $(X_-^*, Y_-^*)$ sont $\lambda_1$ et $\lambda_2$ telles que $\lambda^2 = -\frac{n}{T} X_-^{*(n-1)} \int\limits_0^T g(t)dt$.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt < 0$, cela implique que $\lambda^2 > 0$. Donc il existe une valeur propre réelle positive, encore une fois d'après le théorème 2.5.2 la solution périodique $x_-(t,\mu)$ est instable.

Si $\int\limits_0^T g(t)dt > 0$, cela implique que $\lambda^2 < 0$. Ainsi, Les deux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont imaginaires pures. Donc nous ne pouvons rien dire sur la stabilité de la solution périodique.

**Corollaire 3.2.2** **(a)** *D'après le théorème 3.2.2, Pour* $\mu > 0$ *suffisamment petit l'équation* $\ddot{x} - \cos^2(t)\,|x|^4 = -\mu\sin^4(t)$ *a deux solutions périodiques instables* $x_+(t,\mu)$ *et* $x_-(t,\mu)$ *telles que*

$$x_+(0,\mu) = \sqrt[4]{\frac{3\mu}{4}} + O(\mu^{\frac{5}{8}}) \text{ et } x_-(0,\mu) = -\sqrt[4]{\frac{3\mu}{4}} + O(\mu^{\frac{5}{8}}).$$

**(b)** *D'après le théorème 3.2.2, Pour* $\mu > 0$ *suffisamment petit l'équation*

$$\ddot{x} - \cos^4(t)\,|x|^3 = -\mu\sin^2(t)$$

*a deux solutions périodiques instables* $x_+(t,\mu)$ *et* $x_-(t,\mu)$ *telles que*

$$x_+(0,\mu) = \sqrt[3]{\frac{4\mu}{3}} + O(\mu^{\frac{2}{3}}) \text{ et } x_-(0,\mu) = -\sqrt[3]{\frac{4\mu}{3}} + O(\mu^{\frac{2}{3}}).$$

CHAPITRE 4

# Solutions périodiques de certaines classes d'équations différentielles continues du troisième ordre

## 4.1 Introduction

En **2017**, **J. Llibre** et **A. Makhlouf** [24] ont étudié par la méthode de moyennisation les solutions périodiques des équations différentielles du second ordre de la forme

$$\ddot{x} \pm x^n = \mu f(t) \qquad et \qquad \ddot{x} \pm |x|^n = \mu f(t),$$

où $n \geqslant 4, f(t)$ est une fonction continue $T-$périodique telle que $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$, et $\mu$ est un paramètre suffisamment petit et positif.

Dans ce chapitre, nous allons donner des conditions suffisantes pour l'existence et la stabilité des solutions périodiques de certaines classe d'équations différentielles du troisième ordre perturbées de la forme

$$\dddot{x} \pm x^n = \mu f(t) \qquad et \qquad \dddot{x} \pm |x|^n = \mu f(t),$$

où $n \geqslant 2, f(t)$ est une fonction continue $T-$périodique telle que $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$, et $\mu$ est un paramètre suffisamment petit et positif. Notons que les équations différentielles $\dddot{x} \pm x^n = \mu f(t)$ sont continues en $t$ et lisses en $x$, et que les équations différentielles $\dddot{x} \pm |x|^n = \mu f(t)$ sont continues en $t$ et localement-lipschitziennes en $x$.

Les résultats sont obtenus en appliquant la méthode de moyennisation du premier ordre, plus précisément le théorème 2.5.1.

## 4.2 Résultats principaux

Nos résultats principaux sont les suivants.

**Théorème 4.2.1** *Considérons l'équation différentielle du troisième ordre*

$$\dddot{x} + x^n = \mu f(t), \tag{4.1}$$

*où* $n = 2, 3, ..., f(t)$ *est une fonction continue,* $T$ *périodique telle que,* $\int\limits_0^T f(t)dt \neq 0$ *et* $\mu > 0$ *est un paramètre suffisamment petit.*

*Pour* $n$ *pair et* $\int\limits_0^T f(t)dt > 0$, *il existe deux solutions périodiques instables* $x_+(t,\mu)$ *et* $x_-(t,\mu)$ *de période* $T$ *de l'équation différentielle (4.1) telle que*

$$x_+(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}})$$

*et*

$$x_-(0,\mu) = -\mu^{\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

*Pour* $n$ *impair, il n'existe qu'une seule solution périodique instable* $x(t,\mu)$ *de période* $T$ *de l'équation différentielle (4.1) telle que*

$$x(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

– **Preuve du théorème 4.2.1**

Sous les hypothèses du théorème 4.2.1, nous écrivons l'équation différentielle du troisième ordre (4.1) sous la forme du système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -x^n + \mu f(t). \end{cases} \tag{4.2}$$

D'après le changement de variables

$$x = \varepsilon^{3/(n-1)}X,\ y = \varepsilon^{(n+2)/(n-1)}Y,\ z = \varepsilon^{(2n+1)/(n-1)}Z,\ \mu = \varepsilon^{3n/(n-1)}, \tag{4.3}$$

avec $\varepsilon > 0$, le système différentiel (4.2) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon Y, \\ \dot{Y} = \varepsilon Z, \\ \dot{Z} = \varepsilon(-X^n + f(t)). \end{cases} \tag{4.4}$$

Nous notons que le changement de variables (4.3) est bien défini car $n > 1$. Maintenant, nous povons appliquer la théorie de moyennisation du premier ordre. En utilisant la notation du théorème 2.5.1 le système (4.4) peut être écrit comme le système (2.33) avec $x = (X, Y, Z)$, $H = (Y, Z, -X^n + f(t))$, et $R = (0, 0, 0)$. La fonction moyennée $h(z)$ donnée en (2.34) pour le système (4.4) devient

$$h(X, Y, Z) = \left( Y, Z, -X^n + \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \right). \tag{4.5}$$

Si $n$ **est pair** et $\int_0^T f(t)dt > 0$ alors la fonction $h(X, Y, Z)$ a deux zéros uniques

$$(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*) = \left( \left( \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}}, 0, 0 \right)$$

et

$$(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*) = \left( -\left( \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}}, 0, 0 \right).$$

Le jacobien de la fonction $h(X, Y, Z)$ au point $(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*)$ est $-nX_+^{*(n-1)} < 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_+(t, \varepsilon), Y_+(t, \varepsilon), Z_+(t, \varepsilon))$ du système (4.4) vérifiant

$$(X_+(0, \varepsilon), Y_+(0, \varepsilon), Z_+(0, \varepsilon)) = (X_+^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

D'après (4.3) on a $x = \varepsilon^{3/(n-1)}X$ et $\mu = \varepsilon^{3n/(n-1)}$, on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}}X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, nous concluons qu'il existe une solution périodique $x_+(t, \mu)$

de période $T$ de l'équation différentielle (4.1) telle que

$$x_+(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_+^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y,Z)$ au point $(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-nX_+^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX_+^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_+^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX_+^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_+^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont complexes avec des parties réelles positives, alors d'après le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_+(t,\mu)$ est instable.

Le jacobien de la fonction $h(X,Y,Z)$ au point $(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*)$ est $nX_-^{*(n-1)} < 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_-(t,\varepsilon), Y_-(t,\varepsilon), Z_-(t,\varepsilon))$ du système (4.4) vérifiant

$$(X_-(0,\varepsilon), Y_-(0,\varepsilon), Z_-(0,\varepsilon)) = (X_-^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

D'après le changement de variable (4.3) on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}} X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, nous concluons qu'il existe une solution périodique $x_-(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.1) telle que

$$x_-(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_-^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y,Z)$ au point $(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-nX_-^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX_-^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_-^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX_-^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_-^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_1$ est réelle positive, toujours selon le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_-(t,\mu)$ est instable.

Si $n$ **est impair** alors la fonction $h(X,Y,Z)$ a le zéro unique,

$$(X^*,Y^*,Z^*) = \left(\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\right)^{\frac{1}{n}}, 0, 0\right).$$

Le jacobien de la fonction $h(X,Y,Z)$ à ce zéro est $-nX^{*(n-1)} < 0$, parce que par hypothèse on a $\int_0^T f(t)dt \neq 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon), Z(t,\varepsilon))$ du système (4.4) vérifiant

$$(X(0,\varepsilon), Y(0,\varepsilon), Z(0,\varepsilon)) = (X^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

Revenons au changement de variable (4.3) on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}} X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, nous concluons qu'il existe une solution périodique $x(t,\mu)$ de période$T$ de l'équation différentielle (4.1) telle que

$$x(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y,Z)$ au point $(X^*,Y^*,Z^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-nX^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont complexes avec des parties réelles positives, toujours selon le théorème 2.5.2, la solution périodique $x(t,\mu)$ est instable.

**Théorème 4.2.2** *Considérons l'équation différentielle du troisième ordre*

$$\dddot{x} - x^n = \mu f(t), \tag{4.6}$$

*où* $n = 2, 3, ..., f(t)$ *est une fonction continue,* $T$ *périodique telle que,* $\int_0^T f(t)dt \neq 0$ *et* $\mu > 0$ *est un paramètre suffisamment petit.*

*Pour $n$ pair et $\int\limits_0^T f(t)dt < 0$, il existe deux solutions périodiques instables $x_+(t,\mu)$ et $x_-(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.6) telle que*

$$x_+(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} \left( -\frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}})$$

*et*

$$x_-(0,\mu) = -\mu^{\frac{1}{n}} \left( -\frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

*Pour $n$ impair, il n'existe qu'une seule solution périodique instable $x(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.6) telle que*

$$x(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} \left( -\frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

– **Preuve du théorème 4.2.2**

Sous les hypothèses du théorème 4.2.2, nous écrivons l'équation différentielle du troisième ordre (4.6) sous la forme du système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = x^n + \mu f(t). \end{cases} \tag{4.7}$$

D'après le changement de variables (4.3), le système différentiel (4.7) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon Y, \\ \dot{Y} = \varepsilon Z, \\ \dot{Z} = \varepsilon(X^n + f(t)). \end{cases} \tag{4.8}$$

Nous notons que le changement de variables (4.3) est bien défini car $n > 1$. Maintenant, nous pouvons appliquer la théorie de moyennisation du premier ordre. En utilisant la notation du théorème 2.5.1 le système (4.8) peut être écrit comme le système (2.33) avec $x = (X, Y, Z)$, $H = (Y, Z, X^n + f(t))$, et $R = (0, 0, 0)$. La fonction moyennée $h(z)$

donnée en (2.34) pour le système (4.8) devient

$$h(X,Y,Z) = \left( Y, Z, X^n + \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \right). \tag{4.9}$$

Si $n$ **est pair** et $\int_0^T f(t)dt < 0$ alors la fonction $h(X,Y,Z)$ a deux zéros uniques

$$(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*) = \left( \left( -\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}}, 0, 0 \right)$$

et

$$(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*) = \left( -\left( -\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}}, 0, 0 \right).$$

Le jacobien de la fonction $h(X,Y,Z)$ au point $(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*)$ est $nX_+^{*(n-1)} > 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_+(t,\varepsilon), Y_+(t,\varepsilon), Z_+(t,\varepsilon))$ du système (4.8) vérifiant

$$(X_+(0,\varepsilon), Y_+(0,\varepsilon), Z_+(0,\varepsilon)) = (X_+^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

D'aprés (4.3) on a $x = \varepsilon^{3/(n-1)}X$ et $\mu = \varepsilon^{3n/(n-1)}$, on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}}X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, nous concluons qu'il existe une solution périodique $x_+(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.6) telle que

$$x_+(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_+^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y,Z)$ au point $(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(nX_+^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX_+^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(nX_+^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX_+^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(nX_+^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_1$ est réelle positive, toujours selon le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_+(t,\mu)$ est instable.

Le jacobien de la fonction $h(X,Y,Z)$ au point $(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*)$ est $nX_-^{*(n-1)} < 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_-(t,\varepsilon), Y_-(t,\varepsilon), Z_-(t,\varepsilon))$ du système (4.8) vérifiant

$$(X_-(0,\varepsilon), Y_-(0,\varepsilon), Z_-(0,\varepsilon)) = (X_-^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

D'après le changement de variables (4.3) on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}} X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, nous concluons qu'il existe une solution périodique $x_-(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.6) telle que

$$x_-(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_-^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y,Z)$ au point $(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(nX_-^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX_-^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\left(nX_-^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX_-^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\left(nX_-^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont complexes avec des parties réelles positives, encore une fois d'après le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_-(t,\mu)$ est instable.

Si $n$ **est impair** alors la fonction $h(X,Y,Z)$ a le zéro unique,

$$(X^*, Y^*, Z^*) = \left(\left(-\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\right)^{\frac{1}{n}}, 0, 0\right).$$

Le jacobien de la fonction $h(X,Y,Z)$ à ce zéro est $nX^{*(n-1)} > 0$, parce que par hypothèse on a $\int_0^T f(t)dt \neq 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon), Z(t,\varepsilon))$ du système (4.8) vérifiant

$$(X(0,\varepsilon), Y(0,\varepsilon), Z(0,\varepsilon)) = (X^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

Revenons au changement de variable (4.3) on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}} X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, nous concluons qu'il existe une solution périodique $x(t, \mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.6) telle que

$$x(0, \mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X, Y, Z)$ au zéro $(X^*, Y^*, Z^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(nX^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\left(nX^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\left(nX^{*(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_1$ est réelle positive, toujours selon le théorème 2.5.2, la solution périodique $x(t, \mu)$ est instable.

**Corollaire 4.2.1** **(a)** *D'après le théorème 4.2.1, Pour $\mu > 0$ suffisamment petit l'équation $\dddot{x} + x^2 = \mu(\sin^3 t + 1)$ a deux solutions périodiques instables $x_+(t, \mu)$ et $x_-(t, \mu)$ telles que*

$$x_+(0, \mu) = \sqrt{\mu} + O(\mu^{\frac{2}{3}}) \text{ et } x_-(0, \mu) = -\sqrt{\mu} + O(\mu^{\frac{2}{3}}).$$

**(b)** *D'après le théorème 4.2.2, Pour $\mu > 0$ suffisamment petit l'équation*

$$\dddot{x} - x^3 = \mu \cos^2 t$$

*possède une seule solution périodique instable $x(t, \mu)$ telle que*

$$x(0, \mu) = \sqrt[3]{-\mu/2} + O(\mu^{\frac{5}{9}}).$$

**Théorème 4.2.3** *Considérons l'équation différentielle du troisième ordre*

$$\dddot{x} + |x|^n = \mu f(t), \tag{4.10}$$

*où $n = 2, 3, \ldots, f(t)$ est une fonction continue, $T$ périodique telle que, $\int_0^T f(t)dt \neq 0$ et $\mu > 0$ est un paramètre suffisamment petit. Pour $n \geq 2$ et $\int_0^T f(t)dt > 0$, il existe deux solutions périodiques instables $x_+(t, \mu)$ et $x_-(t, \mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle*

*(4.10) telle que*

$$x_+(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}})$$

*et*

$$x_-(0,\mu) = -\mu^{\frac{1}{n}} \left( \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

– **Preuve du théorème 4.2.3**

Sous les hypothèses du théorème 4.2.3, nous écrivons l'équation différentielle du troisième ordre (4.10) sous la forme du système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -|x|^n + \mu f(t). \end{cases} \tag{4.11}$$

D'après le changement de variables (4.3), le système différentiel (4.11) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon Y, \\ \dot{Y} = \varepsilon Z, \\ \dot{Z} = \varepsilon(-|X|^n + f(t)). \end{cases} \tag{4.12}$$

Nous notons que le changement de variables (4.3) est bien défini car $n > 1$. Maintenant nous pouvons appliquer la théorie de moyennisation du premier ordre parce que la fonction $|X|^n$ est localement lipschitzienne. En utilisant la notation du théorème 2.5.1 le système (4.12) peut être écrit comme le système (2.33) avec $x = (X, Y, Z)$, $H = (Y, Z, -|X|^n + f(t))$, et $R = (0, 0, 0)$. La fonction moyennée $h(z)$ donnée en (2.34) pour le système (4.12) devient

$$h(X,Y,Z) = \left( Y, Z, -|X|^n + \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right).$$

Si $n$ **est pair** et $\int_0^T f(t)dt > 0$, alors la fonction $h(X, Y, Z)$ a deux zéros uniques

$$(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*) = \left( \left( \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}}, 0, 0 \right)$$

et

$$(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*) = \left( -\left( \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}}, 0, 0 \right).$$

Pour $X > 0$ le jacobien de la fonction $h(X, Y, Z)$ au point $(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*)$ est $-nX_+^{*(n-1)} < 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_+(t, \varepsilon), Y_+(t, \varepsilon), Z_+(t, \varepsilon))$ du système (4.12) vérifiant

$$(X_+(0, \varepsilon), Y_+(0, \varepsilon), Z_+(0, \varepsilon)) = (X_+^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

D'après (4.3) on a $x = \varepsilon^{3/(n-1)}X$ et $\mu = \varepsilon^{3n/(n-1)}$, on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}}X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, il existe une solution périodique $x_+(t, \mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.10) telle que

$$x_+(0, \mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_+^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X, Y, Z)$ au point $(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont complexes avec des parties réelles positives, alors d'après le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_+(t, \mu)$ est instable.

Pour $X < 0$ le jacobien de la fonction $h(X, Y, Z)$ au point $(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*)$ est $nX_-^{*(n-1)} < 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_-(t, \varepsilon), Y_-(t, \varepsilon), Z_-(t, \varepsilon))$ du système (4.12) vérifiant

$$(X_-(0, \varepsilon), Y_-(0, \varepsilon), Z_-(0, \varepsilon)) = (X_-^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

D'après le changament de variables (4.3) on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}}X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, il existe une solution périodique $x_-(t, \mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.10) telle que

$$x_-(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_-^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y,Z)$ au point $(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont complexes avec des parties réelles positives, encore une fois d'après le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_-(t,\mu)$ est instable.

Si $n$ **est impair** et $\int\limits_0^T f(t)dt > 0$, alors la fonction $h(X,Y,Z)$ a deux zéros uniques

$$(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*) = \left(\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt\right)^{\frac{1}{n}}, 0, 0\right)$$

et

$$(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*) = \left(-\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt\right)^{\frac{1}{n}}, 0, 0\right).$$

Pour $X > 0$ le jacobien de la fonction $h(X,Y,Z)$ au point $(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*)$ est $-nX_+^{*(n-1)} < 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_+(t,\varepsilon), Y_+(t,\varepsilon), Z_+(t,\varepsilon))$ du système (4.12) vérifiant

$$(X_+(0,\varepsilon), Y_+(0,\varepsilon), Z_+(0,\varepsilon)) = (X_+^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

D'après. (4.3) on a $x = \varepsilon^{3/(n-1)}X$ et $\mu = \varepsilon^{3n/(n-1)}$, on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}}X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit il, existe une solution périodique $x_+(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.10) telle que

$$x_+(0,\mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_+^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X, Y, Z)$ au point $(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont complexes avec des parties réelles positives, encore une fois d'après le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_+(t, \mu)$ est instable.

Pour $X < 0$ Le jacobien de la fonction $h(X, Y, Z)$ au point $(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*)$ est $-nX_-^{*(n-1)} < 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_-(t, \varepsilon), Y_-(t, \varepsilon), Z_-(t, \varepsilon))$ du système (4.12) vérifiant

$$(X_-(0, \varepsilon), Y_-(0, \varepsilon), Z_-(0, \varepsilon)) = (X_-^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

Revenons au changement de variables (4.3), on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}}X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit il existe une solution périodique $x_-(t, \mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.10) telle que

$$x_-(0, \mu) = \mu^{\frac{1}{n}}X_-^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X, Y, Z)$ au point $(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(-nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont complexes avec des parties réelles positives, encore une fois d'après le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_-(t, \mu)$ est instable.

**Théorème 4.2.4** *Considérons l'équation différentielle du troisième ordre*

$$\dddot{x} - |x|^n = \mu f(t), \tag{4.13}$$

*où* $n = 2, 3, ..., f(t)$ *est une fonction continue,* $T$ *périodique telle que,* $\int_0^T f(t)dt \neq 0$ *et* $\mu > 0$ *est un paramètre suffisamment petit. Pour* $n \geq 2$ *et* $\int_0^T f(t)dt < 0$, *il existe deux solutions périodiques instables* $x_+(t, \mu)$ *et* $x_-(t, \mu)$ *de période* $T$ *de l'équation différentielle (4.13) telle que*

$$x_+(0, \mu) = \mu^{\frac{1}{n}} \left( -\frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}})$$

*et*

$$x_-(0, \mu) = -\mu^{\frac{1}{n}} \left( -\frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt \right)^{\frac{1}{n}} + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

– **Preuve du théorème 4.2.4**

Sous les hypothèses du théorème 4.2.4, nous écrivons l'équation différentielle du troisième ordre (4.13) sous la forme du système différentiel du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = |x|^n + \mu f(t). \end{cases} \tag{4.14}$$

D'après le changement de variables (4.3), le système différentiel (4.14) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon Y, \\ \dot{Y} = \varepsilon Z, \\ \dot{Z} = \varepsilon(|X|^n + f(t)). \end{cases} \tag{4.15}$$

Nous notons que le changement de variables (4.3) est bien défini car $n > 1$. Maintenant nous pouvons appliquer la théorie de moyennisation du premier ordre parce que la fonction $|X|^n$ est localement lipschitzienne. En utilisant la notation du théorème 2.5.1 le système (4.15) peut être écrit comme le système (2.33) avec $x = (X, Y, Z)$, $H = (Y, Z, |X|^n + f(t))$, et $R = (0, 0, 0)$. La fonction moyennée $h(z)$ donnée en (2.34) pour le système (4.15) devient

$$h(X,Y,Z)=\left(Y,Z,|X|^n+\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\right).$$

Si $n$ **est pair** et $\int_0^T f(t)dt<0$, alors la fonction $h(X,Y,Z)$ a deux zéros uniques

$$(X_+^*,Y_+^*,Z_+^*)=\left(\left(-\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\right)^{\frac{1}{n}},0,0\right)$$

et

$$(X_-^*,Y_-^*,Z_-^*)=\left(-\left(-\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\right)^{\frac{1}{n}},0,0\right).$$

Pour $X>0$ le jacobien de la fonction $h(X,Y,Z)$ au point $(X_+^*,Y_+^*,Z_+^*)$ est $nX_+^{*(n-1)}>0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_+(t,\varepsilon),Y_+(t,\varepsilon),Z_+(t,\varepsilon))$ du système (4.15) vérifiant

$$(X_+(0,\varepsilon),Y_+(0,\varepsilon),Z_+(0,\varepsilon))=(X_+^*,0,0)+O(\varepsilon).$$

D'après (4.3) on a $x=\varepsilon^{3/(n-1)}X$ et $\mu=\varepsilon^{3n/(n-1)}$, on trouve $x=\mu^{\frac{1}{n}}X$. Donc pour $\mu>0$ suffisamment petit, il existe une solution périodique $x_+(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.13) telle que

$$x_+(0,\mu)=\mu^{\frac{1}{n}}X_+^*+O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que pour $\mu>0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}}>>\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n>1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne correspondante de la fonction moyennée $h(X,Y,Z)$ au zéro $(X_+^*,Y_+^*,Z_+^*)$ sont

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}}\\-\frac{1}{2}\left(nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}}\\-\frac{1}{2}\left(nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}}\end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_1$ est réelle positive, alors d'après le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_+(t,\mu)$ est instable.

Pour $X<0$ le jacobien de la fonction $h(X,Y,Z)$ au point $(X_-^*,Y_-^*,Z_-^*)$ est $-nX_-^{*(n-1)}>0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_-(t,\varepsilon),Y_-(t,\varepsilon),Z_-(t,\varepsilon))$ du système (4.15) vérifiant

$$(X_-(0,\varepsilon),Y_-(0,\varepsilon),Z_-(0,\varepsilon))=(X_-^*,0,0)+O(\varepsilon).$$

D'après le changement de variables (4.3) on trouve $x=\mu^{\frac{1}{n}}X$. Donc pour $\mu>0$ suffisamment petit, il existe une solution périodique $x_-(t,\mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.13) telle que

$$x_-(0,\mu)=\mu^{\frac{1}{n}}X_-^*+O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que pour $\mu>0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}}>>\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n>1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y,Z)$ au point $(X_-^*,Y_-^*,Z_-^*)$ sont

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(-nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}}\\ -\frac{1}{2}\left(-nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}}\\ -\frac{1}{2}\left(-nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}}\end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_1$ est réelle positive, toujours selon le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_-(t,\mu)$ est instable.

Si $n$ **est impair** et $\int\limits_0^T f(t)dt<0$, alors la fonction $h(X,Y,Z)$ a deux zéros uniques

$$(X_+^*,Y_+^*,Z_+^*)=\left(\left(-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt\right)^{\frac{1}{n}},0,0\right)$$

et

$$(X_-^*,Y_-^*,Z_-^*)=\left(-\left(-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)dt\right)^{\frac{1}{n}},0,0\right).$$

Pour $X > 0$ le jacobien de la fonction $h(X, Y, Z)$ au point $(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*)$ est $nX_+^{*(n-1)} > 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_+(t, \varepsilon), Y_+(t, \varepsilon), Z_+(t, \varepsilon))$ du système (4.15) vérifiant

$$(X_+(0, \varepsilon), Y_+(0, \varepsilon), Z_+(0, \varepsilon)) = (X_+^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

D'après (4.3) on a $x = \varepsilon^{3/(n-1)} X$ et $\mu = \varepsilon^{3n/(n-1)}$, on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}} X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, il existe une solution périodique $x_+(t, \mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.13) telle que

$$x_+(0, \mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_+^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X, Y, Z)$ au point $(X_+^*, Y_+^*, Z_+^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\left(nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\left(nX_+^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_1$ est réelle positive, toujours selon le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_+(t, \mu)$ est instable.

Pour $X < 0$ le jacobien de la fonction $h(X, Y, Z)$ au point $(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*)$ est $nX_-^{*(n-1)} > 0$. D'après le théorème 2.5.1 et la remarque 2.5.1, nous déduisons qu'il existe une solution périodique $(X_-(t, \varepsilon), Y_-(t, \varepsilon), Z_-(t, \varepsilon))$ du système (4.15) vérifiant

$$(X_-(0, \varepsilon), Y_-(0, \varepsilon), Z_-(0, \varepsilon)) = (X_-^*, 0, 0) + O(\varepsilon).$$

Revenons au changement de variables (4.3), on trouve $x = \mu^{\frac{1}{n}} X$. Donc pour $\mu > 0$ suffisamment petit, il existe une solution périodique $x_-(t, \mu)$ de période $T$ de l'équation différentielle (4.13) telle que

$$x_-(0, \mu) = \mu^{\frac{1}{n}} X_-^* + O(\mu^{\frac{(n+2)}{3n}}).$$

Nous notons que pour $\mu > 0$ suffisamment petit $\mu^{\frac{1}{n}} >> \mu^{\frac{(n+2)}{3n}}$ si et seulement si $n > 1$.

Les trois valeurs propres de la matrice jacobienne de la fonction moyennée $h(X,Y,Z)$ au point $(X_-^*, Y_-^*, Z_-^*)$ sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{1}{2}\left(nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(nX_-^{*n-1}\right)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

Puisque $\lambda_1$ est réelle positive, toujours selon le théorème 2.5.2, la solution périodique $x_-(t,\mu)$ est instable.

**Corollaire 4.2.2** **(a)** *D'après le théorème 4.2.3, Pour $\mu > 0$ suffisamment petit l'équation $\dddot{x} + |x|^6 = \mu \cos^2 t$ a deux solutions périodiques instables $x_+(t,\mu)$ et $x_-(t,\mu)$ telles que*

$$x_+(0,\mu) = \sqrt[6]{\mu/2} + O(\mu^{\frac{4}{9}}) \text{ et } x_-(0,\mu) = -\sqrt[6]{\mu/2} + O(\mu^{\frac{4}{9}}).$$

**(b)** *D'après le théorème 4.2.4, Pour $\mu > 0$ suffisamment petit l'équation $\ddddot{x} - |x|^5 = -\mu \sin^2 t$ a deux solutions périodiques instables $x_+(t,\mu)$ et $x_-(t,\mu)$ telles que*

$$x_+(0,\mu) = \sqrt[5]{\mu/2} + O(\mu^{\frac{7}{15}}) \text{ et } x_-(0,\mu) = -\sqrt[5]{\mu/2} + O(\mu^{\frac{7}{15}}).$$

CHAPITRE 5

# Solutions périodiques et stabilité de certaines équations différentielles d'ordre supérieur positivement homogènes

## 5.1 Introduction et résultats principaux

En **2017**, **J. Llibre** et **A. Makhlouf** [24] ont étudié les solutions périodiques des équations différentielles du second ordre de la forme

$$\ddot{x} \pm x^n = \mu f(t) \qquad ou \qquad \ddot{x} \pm |x|^n = \mu f(t), \tag{5.1}$$

où $n \geqslant 4, f(t)$ est une fonction continue $T-$périodique telle que $\int_0^T f(t)dt \neq 0$, et $\mu$ est un paramètre suffisamment petit et positif. Ensuite, nous nous sommes intéressés au problème de la recherche des solutions périodiques des équations différentielles du troisième ordre de la forme

$$\dddot{x} \pm x^n = \mu f(t) \qquad ou \qquad \dddot{x} \pm |x|^n = \mu f(t), \tag{5.2}$$

où $n \geqslant 2, f(t)$ est une fonction continue $T-$périodique telle que $\int_0^T f(t)dt \neq 0$, et $\mu$ est un paramètre suffisamment petit et positif voir [29].

Les auteurs **X. Cen, J. Llibre** et **M. Zhang** [14] ont développé les résultats mentionnés sur les solutions périodiques des équations différentielles (5.1) et (5.2) aux équations différentielles d'ordre $m$ de la forme

$$x^{(m)} + f_n(x) = \mu h(t), \tag{5.3}$$

où $m \geq 2$, $n \geq 2$, $x^{(m)}$ désigne la dérivée $m$ de $x = x(t)$ par rapport à la variable indépendante $t$,

$$f_n(x) = \delta x^n \qquad ou \qquad f_n(x) = \delta \left|x\right|^n, \qquad \delta = \pm 1, \tag{5.4}$$

$h(t)$ est une fonction continue $T-$périodique et sa fonction moyennée

$$\bar{h} := \frac{1}{T}\int_0^T h(t)dt \neq 0, \tag{5.5}$$

et $\mu > 0$ est un paramètre suffisamment petit.

Les équations différentielles (5.3) sont continues en $t$. La technique utilisée pour étudier les solutions périodiques des équations différentielles (5.3) et leur type de stabilité est principalement basée sur la théorie de moyennisation. Notez que, quand $m = 2$, les équations (5.3) sont des équations de Lagrange et que les solutions périodiques ne peuvent pas être stables. Donc ils étudieront l'instabilité et la stabilité linéaire des solutions périodiques obtenues. Soit $x = \varphi(t)$ une solution périodique de l'équation

$$x^{(m)} + f(x) = h(t)$$

est linéairement stable si toutes les solutions $y(t)$ de l'équation linéarisée

$$y^{(m)} + f'(\varphi(t))y = 0$$

sont bornées dans le sens suivant

$$\underset{t\in\mathbb{R}}{Sup}\left(|y(t)| + \left|y'(t)\right| + ... + \left|y^{(m-1)}(t)\right|\right) < +\infty.$$

Les résultats principaux sont les deux théorèmes suivants.

**Théorème 5.1.1** *[14] Considérons les équations différentielles d'ordre m*

$$x^{(m)} + \delta x^n = \mu h(t), \tag{5.6}$$

*où $m$, $n$, $\delta$ et $h(t)$ sont définies dans (5.4) et (5.5). pour $\mu > 0$ suffisamment petit, alors on a les énoncés suivants.*

**(a)** *Si $n$ est impair, alors l'équation différentielle (5.6) a une solution périodique $x(t,\mu)$ de période $T$ telle que*

$$x(0,\mu) = \mu^{1/n}(\delta\bar{h})^{1/n} + O(\mu^{(m+n-1)/(mn)}).$$

*De plus, quand $m \geq 3$, ou $m = 2$ et $\delta = -1$, la solution périodique est instable, et quand $m = 2$ et $\delta = +1$, la solution périodique est linéairement stable.*

**(b)** *Si $n$ est pair et*

$$\delta = sign(\bar{h}), \tag{5.7}$$

*alors l'équation différentielle (5.6) a deux solutions périodiques $x_{\pm}(t,\mu)$ de période $T$ telles que*

$$x_{\pm}(0,\mu) = \pm\mu^{1/n}(\delta\bar{h})^{1/n} + O(\mu^{(m+n-1)/(mn)}). \tag{5.8}$$

*De plus, quand $m \geq 3$, ces solutions périodiques sont instables, et quand $m = 2$, la solution périodique $x_{-\delta}(t,\mu)$ est instable et la solution $x_{\delta}(t,\mu)$ est linéairement stable.*

**Théorème 5.1.2** *[14] Considérons les équations différentielles d'ordre $m$*

$$x^{(m)} + \delta\,|x|^n = \mu h(t), \tag{5.9}$$

*où $m$, $n$, $\delta$ et $h(t)$ sont définies précédemment. Si (5.7) est satisfaite, alors pour $\mu > 0$ suffisamment petit, l'équation différentielle (5.9) a deux solutions périodiques $x_{\pm}(t,\mu)$ de période $T$ satisfaisant (5.8). De plus, quand $m \geq 3$, ces solutions périodiques sont instables, et quand $m = 2$, la solution périodique $x_{-\delta}(t,\mu)$ est instable et la solution $x_{\delta}(t,\mu)$ est linéairement stable.*

Ces théorèmes montrent que les solutions périodiques linéairement stables résultant de la théorie de moyennisation ne peuvent être obtenues que dans le cas $m = 2$. Dans ce cas, l'équation de linéarisation est elliptique, c'est-à-dire que les multiplicateurs de Floquet sont différents de $\pm 1$ et ont un module 1.

Les résultats trouvés dans [24] et [29] sont des cas particuliers des théorèmes 5.1.1 et 5.1.2.

## 5.2 Preuves des résultats

Les fonctions $f_n(x) = \delta x^n$ et $f_n(x) = \delta\,|x|^n$ sont positivement homogènes c'est à dire :

$$f_n(cx) = c^n f_n(x) \qquad \forall c \geq 0. \tag{5.10}$$

**Equations sous la forme standard de la théorie de moyennisation :**

En définissant

$$x_i = x^{(i-1)}, \qquad i = 1, 2, ..., m,$$

où $x_1 = x^{(0)} = x$, l'équation (5.3) est équivalente au système

$$\begin{cases} x_i' = x_{i+1}, & i = 1, 2, ..., m-1, \\ x_m' = \mu h(t) - f_n(x_1). \end{cases} \tag{5.11}$$

D'après le changement de variables

$$x_i = \varepsilon^{i-1+m/(n-1)} X_i, \qquad i = 1, 2, ..., m, \qquad \mu = \varepsilon^{m+m/(n-1)}, \tag{5.12}$$

où $\varepsilon$ est un paramètre suffisamment petit et positif, alors le système (5.11) est réduit au système suivant

$$X' = \varepsilon F_n(t, X), \tag{5.13}$$

où

$$\begin{aligned} &X = (X_1, X_2, ..., X_m) \in \mathbb{R}^m, \\ &F_n(t, X) = (X_2, ..., X_m, h(t) - f_n(X_1)) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

ici, ils ont utilisé la définition d'homogénéité positive (5.10).

Le système (5.13) est écrit sous la forme standard de la méthode de moyennisation donc ils l'ont appliqué pour étudier ses solutions périodiques et leur stabilité. Pour plus de détails sur la théorie de moyennisation utilisée ici voir [10], [11].

**Zéros de la fonction moyennée :**

La fonction moyennée $\bar{F}_n(X)$ pour le système (5.13) devient

$$\bar{F}_n(X) = \frac{1}{T}\int_0^T F_n(t, X)dt = \begin{pmatrix} X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_m \\ \bar{h} - f_n(X_1) \end{pmatrix}, \qquad \forall X \in \mathbb{R}^m.$$

Le zéro de la fonction moyennée $\bar{F}_n$ est

$$X_* = (x_*, 0, ..., 0),$$

où $x_* \in \mathbb{R}/\{0\}$ est déterminé par l'équation

$$f_n(x_*) = \bar{h}. \tag{5.14}$$

De plus, la matrice jacobienne $m \times m$ de $\bar{F}_n$ au point $X_*$ est

$$J\bar{F}_n(X_*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -f_n'(x_*) & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

avec

$$\det J\bar{F}_n(X_*) = (-1)^m f_n'(x_*). \tag{5.16}$$

**Cas 1 :** Si $n$ est impair et $f_n(x) = \delta x^n$. Alors l'équation (5.14) a une solution réelle unique

$$x_* = (\delta\bar{h})^{1/n}.$$

En remplaçant $X_*$ dans (5.16) ils ont obtenu

$$\det J\bar{F}_n(X_*) = (-1)^m \delta n x_*^{n-1} = (-1)^m \delta n (\delta\bar{h})^{(n-1)/n},$$

dont le signe est

$$sign(\det J\bar{F}_n(X_*)) = (-1)^m \delta. \tag{5.17}$$

**Ca 2 :** Si $n$ est pair et $f_n(x) = \delta x^n$. Dans ce cas, l'équation (5.14) a des solutions si et seulement si (5.7) est satisfaite. Sous la condition (5.7), l'équation (5.14) a précisément deux solutions

$$x_* = x_\pm = \pm(\delta\bar{h})^{1/n} = \pm\left|\bar{h}\right|^{1/n}.$$

Le déterminant de la matrice jacobienne (5.16) aux points $X_*$ est

$$\det J\bar{F}_n(X_\pm) = (-1)^m \delta n (x_\pm)^{n-1} = \pm(-1)^m \delta n \left|\bar{h}\right|^{(n-1)/n},$$

dont les signes sont

$$sign(\det J\bar{F}_n(X_\pm)) = \pm(-1)^m \delta. \tag{5.18}$$

**Cas 3 :** Si $n$ est impair et $f_n(x) = \delta \left|x\right|^n$. Dans ce cas, l'équation (5.14) a des solutions si et seulement si (5.7) est satisfaite. Sous la condition (5.7), l'équation (5.14) a précisément deux solutions

$$x_* = x_\pm = \pm \left|\bar{h}\right|^{1/n}.$$

Comme

$$f_n'(x) = (\delta \left|x\right|^n)' = \delta n sign(x) \left|x\right|^{n-1},$$

donc le déterminant de la matrice jacobienne (5.16) aux points $X_*$ est

$$\det J\bar{F}_n(X_\pm) = (-1)^m \delta n sign(x_\pm) \left|x_\pm\right|^{n-1} = \pm(-1)^m \delta n \left|\bar{h}\right|^{(n-1)/n},$$

dont les signes sont

$$sign(\det J\bar{F}_n(X_\pm)) = \pm(-1)^m \delta. \tag{5.19}$$

**Cas 4 :** Si $n$ est pair et $f_n(x) = \delta \left|x\right|^n$. Alors $f_n(x) = \delta \left|x\right|^n \equiv \delta x^n$, ce cas est similaire au cas 2.

**Existence des solutions périodiques :**

D'après les résultats de la théorie de moyennisation, si l'équation (5.14) a une solution $x_*$, alors pour $0 < \varepsilon \ll 1$ le système différentiel (5.13) a une solution périodique $X(t, \varepsilon)$ de période $T$ telle que

$$X(0, \varepsilon) \to (x_*, 0, ..., 0) \; quand \; \varepsilon \to 0.$$

D'après le changement de variables (5.12), pour $0 < \varepsilon \ll 1$, le système différentiel (5.3) a une solution $T-$périodique $x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{m/(n-1)} X_1(t, \varepsilon)$ telle que

$$X_1(0, \varepsilon) \to x_* \; quand \; \varepsilon \to 0.$$

Revenons au paramètre d'origine $\mu$, pour $0 < \mu \ll 1$, le système différentiel (5.3) a une solution $T-$périodique

$$x(t, \mu) = \mu^{1/n} X_1(t, \mu)$$

tel que

$$X_1(0,\mu) \to x_* \quad quand \quad \mu \to 0.$$

**Instabilité des solutions périodiques :**

La matrice jacobienne $m \times m$ (5.15) est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -c & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

où $c \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_{m\times m} - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & ... & 0 \\ & & ... & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 \\ c & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}_{m\times m} \\ &= \lambda^m + (-1)^{m+1} c \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ \lambda & -1 & ... & 0 \\ & ... & & \\ 0 & 0 & ... & -1 \end{pmatrix}_{(m-1)\times(m-1)} \\ &= \lambda^m + c. \end{aligned}$$

Si $m \geq 3$, la matrice $A$ a au moins une valeur propre qui a une partie réelle positive. D'autre part, si $m = 2$, la matrice $A$ admet une valeur propre positive si et seulement si $c < 0$.

D'après les résultats d'instabilité de [10, 11], ils ont obtenu les résultats suivants sur l'instabilité de la solution périodique $x(t,\mu)$ obtenue par la méthode de moyennisation :

Pour $m \geq 3$, La solution $T-$périodique $x(t,\mu)$ est instable lorsque $0 < \mu \ll 1$.

Pour $m = 2$, d'après (5.15) et (5.16), ils ont conclu que $J\bar{F}_n(X_*)$ a une valeur propre positive si et seulement si

$$sign(\det J\bar{F}_n(X_*)) = -1. \tag{5.20}$$

**Cas 1 :** Si $n$ est impair et $f_n(x) = \delta x^n$. (5.17) et (5.20) impliquent que $\delta = -1$, c'est-à-dire $f_n(x) = -x^n$, alors la solution $T-$périodique $x(t, \mu)$ est instable quand $0 < \mu \ll 1$.

**Cas 2 :** Si $n$ est pair et $f_n(x) = \delta x^n$. Sous la condition (5.7), ils ont trouvé deux solutions $T-$périodiques $x_{\pm}(t, \mu)$. D'après (5.18) et (5.20), la solution $T-$périodique $x_{+}(t, \mu)$ est instable si $\delta = -1$ et la solution $T-$périodique $x_{-}(t, \mu)$ est instable si $\delta = 1$. Ce sont les résultats d'instabilité décrits dans le théorème 5.1.1.

**Cas 3 :** Si $n$ est impair et $f_n(x) = \delta \left|x\right|^n$. Puisque (5.18) coincïde avec (5.19), ils ont obtenu les résultats d'instabilité des solutions $T-$périodiques $x_{-\delta}(t, \mu)$ comme dans le cas 2. Ces résultats sont indiqués dans le théorème 5.1.2.

**Cas 4 :** Si $n$ est pair et $f_n(x) = \delta \left|x\right|^n$. Ceci se ramène au cas 2.

**Stabilité linéaire des solutions périodiques :**

Pour compléter les preuves des théorèmes 5.1.1 et 5.1.2, ils ont dû prouver la stabilité linéaire pour l'autre solution périodique $x_{\delta}(t, \mu)$ dans les cas 2 et 3 avec $m = 2$. La stabilité linéaire ne peut pas être directement obtenue à partir des résultats standard de la théorie de moyennisation.

Pour obtenir cette stabilité linéaire. Ils ont pris comme exemple le cas 2. Ils ont considéré l'équation

$$\ddot{x} + \delta x^n = \mu h(t), \tag{5.21}$$

où $n$ est pair et $\delta \bar{h} > 0$. La solution $T-$périodique qu'ils ont considéré est $x = x_{\delta}(t, \mu)$. Alors, la linéarisation de l'équation (5.21) est

$$\ddot{X} + a(t, \mu) X = 0, \tag{5.22}$$

où

$$a(t, \mu) = \delta n (x_{\delta}(t, \mu))^{n-1}.$$

Par l'estimation (5.8), ils ont trouvé

$$x_{\delta}(t, \mu) = \delta \mu^{1/n} \left|\bar{h}\right|^{1/n} (1 + o(1)) \qquad lorsque \qquad \mu \to 0.$$

Comme $n$ est pair alors $n - 1$ est impair, ils ont eu

$$a(t, \mu) = n \left|\bar{h}\right|^{(n-1)/n} \mu^{(n-1)/n} + o(\mu^{(n-1)/n}) \qquad lorsque \qquad \mu \to 0,$$

une perturbation d'ordre supérieur de la fonction constante

$$b_\mu := n \left|\bar{h}\right|^{(n-1)/n} \mu^{(n-1)/n}.$$

L'équation suivante

$$\ddot{X} + b_\mu X = 0,$$

est considérée comme une équation de Hill $T-$périodique, qu'est elliptique. Comme l'équation (5.22) est une équation de Hill $T-$périodique, alors elle est également elliptique quand $0 < \mu \ll 1$. Ce qui complète la preuve du théorème 5.1.1.

Le cas du théorème 5.1.2 peut être traité de la même manière.

Les démonstrations des théorèmes 5.1.1 et 5.1.2 se trouvent dans [14].

# Conclusion et perspectives

La recherche des solutions périodiques des équations différentielles perturbées par un paramètre suffisamment petit peut être étudiée par la méthode de moyennisation.

Dans ce travail, nous avons étudié l'existence et la stabilité des solutions périodiques de certaines classes d'équations différentielles du deuxième, troisième et d'ordre supérieur $m$ en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre. Nous avons donné aussi des conditions suffisantes pour l'existence et la stabilité de ces solutions périodiques. Nous avons illustré notre étude par des exemples.

Nous continuerons nos recherches sur l'existence des solutions périodiques pour d'autres classes d'équations différentielles perturbées. On se propose d'étudier les solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles du troisième ordre plus généralisée en utilisant une nouvelle version de la méthode de moyennisation.

# BIBLIOGRAPHIE

[1] A.U. Afuwape, Remarks on Barbashin-Ezeilo problems on third-order nonlinear differential equations, J. Math. Anal. Appl., 317 (2006), 613-619.

[2] A.A. Andronov, E.A. Leontovitch and Gordon II. Mayer A.G. Etude qualitative des systèmes dynamiques d'ordre deux. En Russe, Nouka Moxau, 1966.

[3] A.A. Andronov, A.A. Witt, Sur la théorie mathématiques des auto oxillations. C.R.Acad. Sct. Paris, 190 (1930), 256-258.

[4] A.A. Andronov, A.A. Witt and Khaikins, Theory of oscillators. Pergamon Press, 1966.

[5] G. D. Birkhoff. Dynamical Systems. AMS, New-York, 1927.

[6] N.N. Bogoliubov, *On some statistical methods in mathematical physics*, Izv. vo Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev, 1945.

[7] N.N. Bogoliubov and N. Krylov, *The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations*, Publ. 8 of the Ukrainian Acad. Sci. Kiev, 1934.

[8] N.N. Bogoliubov and Yu. A. Mitropolsky. *Asymtotic methods in the theory of nonlinear oscillations.* Gordon and Breach, New York, 1961.

[9] A. Buică, J.P. Françoise, J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, Commun. Pure Appl. Anal. 6 (2007), 103-111.

[10] A. Buică and J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, Bull. Sci. Math., 128 (2004), 7–22.

[11] A. Buică, J. Llibre and O.Yu. Makarenkov, On Yu. A. Mitropol'skii's Theorem on periodic solutions of systems of nonlinear differential equations with nondifferentiable right-hand sides, Doklady Math., 78 (2008), 525-527.

[12] A. Buică, and R. Ortega, Persistence of equilibria as periodic solutions of forced systems, J. Differential Equations 252 (2012), 2210-2221.

[13] A. Capietto, J. Mawhin and F. Zanolin, Continuation theorems for periodic perturbations of autonomous systems, Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992), 41-72.

[14] X. Cen, J. Llibre and M. Zhang, Periodic solutions and their stability of some higher-order positively homogenous differential equations. Chaos, Solitons and Fractals 106 (2018), 285–288.

[15] T.R. Ding and F. Zanolin, Periodic solutions of Duffing's equations with superquadratic potential, J. Differential Equations 97 (1992), 328-378.

[16] F. Dumortier, C. Li, Quadratic Liénard equations with quadratic damping. J Differ Equ, 139 (1997), 41-59.

[17] F. Dumortier and C. Rousseau, Cubic Liénard equations with linear damping. Nonlinearity,3 (1990), 1015-39.

[18] J. Giné, M. Grau and J. Llibre, Averaging theory at any order for computing periodic orbits. Phys, 250 (2013), 58-65.

[19] J. Guckenheimer, On a codimension two bifurcation. Lecture notes in Math, 898 (1980), 99-142.

[20] D. Hilbert. Mathematish probleme. Lecture, Second Internat, congr, Math, (Paris, 1900), Nachn. Ges. Wiss. G" Hingen Math. Phys. kl. (1900), 253-297. English transl, Bull. Amer. Math. Soc. 8 : (1902), 437-479.

[21] YA. Kuznetsov, Elements of applied bifurcation theory. Third edition. Applied Mathematical Sciences, 112. New York : Springer-Verlag, 2004.

[22] A. Liénard, Etude des oscillations entretenues. Revue Gén' Electro, 23 (1928), 946-54.

[23] J. Llibre and A.Makhlouf, Bifurcation of limit cycles from a 2-dimensional centre inside $\mathbb{R}^n$. Nonlinear Analysis 72(2010) 1387-1392.

[24] J. Llibre and A. Makhlouf, Periodic solutions of some classes of continuous second-order differential equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems series B, Vol. 22, Number 2 (2017), 477–482.

[25] J. Llibre, D.D. Novaes and M.A. Teixeira, Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree, IOP Pub Ltd, London Mathematical Society, 27 (2014), 563-583.

[26] J. Llibre, S. Rebollo-Perdomo and J. Torregrosa, Limit cycles bifurcating from isochronous surfaces in $\mathbb{R}^3$, J. Math. AnalAppl., 381 (2011), 414–26.

[27] N.G. Lloyd, Degree theory, Cambridge University Press, 1978.

[28] A. Lyapunov, Problème général de la stabilité du mouvement, Ann, Fac. Sci. Univ. Toulouse, 9 (1907), 203–475.

[29] A. Makhlouf and D. Debbabi, Periodic solutions of some classes of continuous third-order differential equations. Chaos, Solitons and Fractals 94 (2017), 112-118.

[30] A. Makhlouf and J. Llibre, Limit cycles of polynomial differential systems bifurcating from the periodic orbits of a linear differential system in $\mathbb{R}^d$. "Bulletin des mathématiques", sciences. Bull Sci. math 133(2009) 578-587.

[31] I.G. Malkin, Some problems of the theory of nonlinear oscillations, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit, Moscow, 1956 (in Russian).

[32] G.R. Morris, An infinite class of periodic solutions of $\ddot{x} + 2x^3 = p(t)$, Proc. Cambridge Philos. Soc. 61 (1965), 157-164.

[33] R. Ortega, The number of stable periodic solutions of time-dependent Hamiltonian systems with one degree of freedom, Ergodic Theory Dynam. Systems 18 (1998), 1007-1018.

[34] H. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3 vols. Gauthier-Villars, Paris, 1892–1899.

[35] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, (première partie), Journal Mathématique, 1881.

[36] M. Roseau, Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 8, Springer, New York, 1985.

[37] J.A. Sanders and F. Verhulst, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Applied Mathematical Sciences 59, Springer, 1985.

[38] P.J. Torres, Z. Cheng and J. Ren, Non-degeneracy and uniqueness of periodic solutions for 2n-order differential equations, Discrete Contin. Dyn. Syst. 33 (2013), 2155-2168.

[39] F. Verhulst, nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Universitext, Springer, New York, 1996.