

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



BADJI MOKHTAR - ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BAD MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences
Option : Mathématiques Appliquées

METHODE DE LA MATRICE DE MASSE SINGULIERE ET PROBLEME DE PERTURBATION SINGULIERE

Par:

Berkane Ali

Sous la direction de

ENCADREUR: BerkaneAhmed MCAUniv-Annaba

Devant le jury

PRESIDENT:	SakerHacene	Prof.	Univ-Annaba
EXAMINATEURS:	Benzine Rachid	Prof.	E.S.T.I Annaba
	NisseLamine	Prof.	Univ-ElOued
	MansourAbelouaheb	Prof	Univ-ElOued
	Bradji Abdallah	Prof.	Univ -Annaba

• Année: 2018

Résumé

Dans ce travail nous considérons des problèmes hyperboliques du premier ordre linéaires ou des problèmes paraboliques linéaires dégénérés en temps. En utilisant une méthode de matrice de masse singulière, nous proposons une méthode d'éléments finis permettant d'avoir des estimations d'erreur en espace optimale pour l'élément fini de Lagrange P_1 ou P_2 par exemple.

Mots clés : Opérateur dégénérés, Matrice de masse singulière, Estimations d'erreur, Élément finis,

ملخص

من الدرجة الأولى الخطية أو في الجزء الأول من هذا العمل ، نعتبر المشاكل الزائدية في الوقت المناسب. باستخدام طريقة مصفوفة كتلة تدهورت مشاكل المكافئ الخطية الأمتل للعنصر الفضاء. طريقة عنصر محدد تسمح بتقديرات الخطأ في المفرد ، نقترح على سبيل المثال P1 المحدد في لاغرانج.

كلمات البحث :

المشغل ، مصفوفة الشامل المفرد ، التقديرات من الخطأ.

Abstract

In this work, we deal with, linear hyperbolic problems of first order or linear parabolic problems, which are degenerated with respect to the time operator. By using a singular mass matrix technique, we propose a finite element method allowing to get optimal error estimates with respect to space for the Lagrange first or second order finite element for example.

Key words : Degenerate operator, Singular mass matrix, Error estimates, Finite element,

Table des matières

0.1	Introduction	vi
1	La méthode des éléments finis	1
1.1	Introduction	2
1.2	Principe de la méthode	2
1.3	Approximation interne générale	3
1.4	La méthode des éléments finis en $1D$	7
1.4.1	Approximation par éléments finis \mathbb{P}_1	8
1.4.2	Approximation par éléments finis \mathbb{P}_2	11
1.5	La méthode des éléments finis en $2D$	13
1.6	Convergence de la méthode des éléments finis	15
1.6.1	Majoration par l'erreur d'interpolation	16
1.6.2	Décomposition sur les éléments	16
1.6.3	Passage à l'élément de référence	16
1.6.4	Majoration sur l'élément de référence	18
1.6.5	Assemblage des majorations locales	20
2	Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé	23
2.1	Approximation par une méthode d'éléments finis continus d'un opérateur de type positif	24

2.2	Un problème de transport dans un domaine borne du plan	36
2.3	Application numérique	39
2.4	La méthode de masse singulière pour un problème de transport . . .	40
2.5	Existence et unicité de solutions	41
2.6	Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière	44
2.6.1	Les espaces d'éléments finis utilisés	46
2.6.2	Schémas d'Euler implicite et explicite en temps	50
2.6.3	Résultats numériques pour un exemple jouet	51
3	Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques	53
3.1	Introduction	54
3.2	Existence et unicité de solutions aux problèmes \mathbf{P}_ε	54
3.3	Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés	61
3.3.1	Estimation d'erreur en norme L^2	65
3.3.2	Méthode d'Euler implicite et explicite	71
3.4	Méthode du second membre modifié	75

Table des figures

1.1	Maillage de $Q = [0, 1]$ et fonction de base en élément finis \mathbb{P}_1	9
1.2	fonction de base en élément finis \mathbb{P}_2	12
1.3	Un exemple de maillage triangulaire.	13
1.4	Fonction de base chapeau	14
1.5	Support de la fonction de base	15
2.1	Norme discrète L^2 de l'erreur en fonction du pas dt par la méthode d'Euler explicite.	52
3.1	La solution approchée	72
3.2	Erreurs en norme L^2 par la méthode d'Euler implicite en fonction de h , en échelle $\log - \log$	73
3.3	Erreurs en norme L^2 par la méthode d'Euler implicite en fonction δt , en échelle $\log - \log$	73
3.4	Erreurs en norme L^2 par la méthode d'Euler explicite en fonction de h , en échelle $\log - \log$	74
3.5	Erreurs en norme L^2 par la méthode d'Euler explicite en fonction δt , en échelle $\log - \log$	74
3.6	Erreurs en norme L^∞ la méthode d'Euler explicite avec un second membre modifié.	78

3.7	Erreurs en norme L^∞ la méthode d'Euler implicite avec une second membre modifié.	78
3.8	Erreurs en norme L^∞ par la méthode d'Euler implicite avec une matrice de masse singulière, avec $h = 5.10^{-3}$, $\delta t = 10^{-4}$ et $h^2 \ln(h) =$ 1.2×10^{-4}	79

Introduction

0.1 Introduction

Dans ce travail, nous nous intéressons où des problèmes de perturbations singulières pour le transport par convection ou par diffusion. Soit $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ le domaine espace temps que nous considérons. Nous définissons la fonction ϵ par :

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1; & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0; & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$$

et nous introduisons les domaines $\Omega_1 = (0, \frac{1}{2}) \times (0, 1)$, $\Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1)$. Soit

$f = \begin{cases} f_1(x, t); & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ f(x); & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$ et u_0 donnés, nous cherchons alors u solution du problème :

$$(\mathbf{P}_0) \begin{cases} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t) \text{ dans } \Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x); \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0; \quad 0 < t < 1 \end{cases} \quad (1)$$

L'objectif de cette étude est de proposer une méthode numérique performante pour le problème (\mathbf{P}_0) .

En nous inspirant de la technique de la matrice de masse singulière introduite pour résoudre des problèmes de contact unilatéral, nous proposons une méthode de matrice de masse singulière qui permet pour le problème (\mathbf{P}_0) d'avoir des estimations d'erreur optimales lorsque les problèmes sont semi-discrétisés en espace.

Numériquement nous vérifions que les estimations d'erreur pour les problèmes complètement dicrétisés sont optimales en espace et en temps. Enfin pour le problème (\mathbf{P}_0) , nous montrons que la projection, de la solution semi-discrétisée en espace, sur les éléments finis de Lagrange P_1 converge vers la solution exacte du problème continu. A notre connaissance, ce résultat est nouveau pour ce type de méthode.

Notons que les résultats obtenus pour le problème (\mathbf{P}_0) ont été présentés dans l'article [63].

0.1 Introduction

Le plan de cette thèse est le suivant. Le chapitre 1 est consacré à l'étude de la méthode numérique des éléments finis qui est la méthode numérique de référence pour le calcul des solutions de problèmes aux limites paraboliques. Cette méthode est à la base de nombreux logiciels de calculs industriels ou académiques. Après une première section d'introduction du chapitre 1 sur la méthode des éléments finis, les sections 1.2 et 1.3 présentent le principe de la méthode et l'approximation interne générale. Les sections 1.4 et 1.5 présentent les éléments finis en dimension $N = 1, 2$ en d'espace. La section 1.6 est dédiée à la convergence de la méthode des éléments finis. Il existe bien d'autres numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles comme les méthodes de différences finies, volumes finis, méthode intégrale, Pour plus de détails sur la méthode des éléments finis nous renvoyons à [1], [14], [28], [29], [38]. Le chapitre 2 porte sur l'approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé. Les sections 2.1, 2.2 et 2.3 présentent les deux approximations par une méthode d'éléments finis continus d'un opérateur de type positif, un problème de transport dans un domaine borné du plan et application numérique. Les sections 2.4, 2.5 et 2.6 présentent la méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière pour un problème de transport, nous donnons l'existence et unicité de solutions, ainsi les espaces d'éléments finis utilisés, schémas d'Euler implicite et explicite en temps et résultats numériques pour un exemple jouet. Le chapitre 3 est consacré à l'étude de l'approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques. Dans la section 3.2 nous donnons l'existence et unicité de solutions. La section 3.3 présente la méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour un problème approché, nous donnons un résultat d'estimation d'erreur et méthode d'Euler implicite et explicite. Dans la dernière section de ce chapitre, nous comparons la méthode de masse singulière avec une méthode du second membre modifiée.

Chapitre 1

La méthode des éléments finis

1.1 Introduction

La méthode des éléments finis est apparue dans les années 1940 par le mathématicien Richard Courant (sans utiliser cette dénomination) et s'est développée grâce à la mise en place d'un nombre croissant d'éléments finis. Du fait de l'équivalence des problèmes variationnels et énergétiques, plusieurs méthodes se sont développées en partant d'une formulation ou d'une autre. De plus, le choix de l'espace des fonctions tests \mathcal{V} a largement contribué à la diversité des méthodes.

1.2 Principe de la méthode

La méthode des éléments finis se propose de déterminer la solution du problème variationnel sur un sous-espace discrétisé \mathcal{V}_h de \mathcal{V} . Elle consiste, à partir d'une équation différentielle, à écrire la formulation variationnelle faible du problème. Puis, à construire un espace d'approximation de dimension finie $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, en procédant au maillage du domaine, c'est-à-dire en découpant le domaine $\bar{Q} = Q \cup \partial Q$ de \mathbb{R}^n en un nombre fini de sous-domaines, disjoints deux à deux, sur lesquels on choisit un nombre fini de points appelés noeuds. Par ailleurs, on peut choisir le mode de construction de \mathcal{V}_h de manière à ce que le sous espace \mathcal{V}_h soit une bonne approximation de \mathcal{V} et que la solution u_h dans \mathcal{V}_h de la formulation variationnelle soit proche de la solution exacte u dans \mathcal{V} . Les fonctions de \mathcal{V}_h sont définies par morceaux sur chaque noeud intérieur au domaine, vérifient les conditions limites aux bords du domaine et s'expriment comme combinaisons linéaires d'éléments simples (en général des polynômes de degré 1, 2 ou 3) appelées fonctions de forme. Ces fonctions définies localement sur chaque noeud intérieur sont continues sur l'ensemble du domaine et vérifient les conditions aux limites. Dans le cas d'approximation par des éléments lagrangiens, les dérivées premières sont discontinues aux noeuds intérieurs. En exprimant la formule variationnelle par les éléments de \mathcal{V}_h ainsi définis, on montre

1.3 Approximation interne générale

que l'équation se transforme en un système matriciel dans lequel les inconnues sont les valeurs de la fonction solution en chaque noeud. En choisissant des éléments de structures géométriques simples et identiques, le traitement matriciel peut être systématisé et effectué sur un seul élément de référence. On procède alors à la détermination des matrices de masse et de rigidité élémentaires associées à un élément, puis on assemble ces matrices en les plongeant dans une matrice unique représentant l'ensemble du domaine. Le système matriciel obtenu est de type bande, ce qui facilite le stockage des données. La résolution de ce système conduit à la détermination des valeurs de la solution des équations de départ en chaque noeud du maillage.

1.3 Approximation interne générale

Étant donné un espace de Hilbert \mathcal{V} , une forme bilinéaire continue et coercive $a(u, w)$ et une forme linéaire continue $F(w)$, on considère la formulation variationnelle : Trouver $u \in \mathcal{V}$ tel que

$$a(u, w) = F(w) \quad \forall w \in \mathcal{V}, \quad (1.1)$$

dont on sait qu'elle admet une unique solution par le théorème de Lax-Milgram. l'approximation interne (1.1) consiste à remplacer l'espace de Hilbert \mathcal{V} par un sous espace de dimension finie \mathcal{V}_h , c'est-à-dire à chercher la solution de : Trouver $u_h \in \mathcal{V}_h$ tel que :

$$a(u_h, w_h) = F(w_h) \quad \forall w_h \in \mathcal{V}_h. \quad (1.2)$$

La résolution de l'approximation interne (1.2) est facile comme le montre le lemme suivant :

Lemme 1.3.1. *Soit \mathcal{V} un espace de Hilbert réel, et \mathcal{V}_h un sous espace de dimension finie. Soit $a(u, w)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur \mathcal{V} et $F(w)$ une*

Chapitre 1. La méthode des éléments finis

forme linéaire continue sur \mathcal{V} . Alors l'approximation interne (1.2) admet une unique solution. Par ailleurs, cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive (et symétrique si $a(u, w)$ est symétrique).

Preuve.

L'existence et l'unicité de $u_h \in \mathcal{V}_h$, solution de (1.2) découle du théorème de Lax-Milgram appliqué à \mathcal{V}_h . Pour mettre le problème sous une forme plus simple, on introduit une base $(\psi_i)_{1 \leq i \leq m}$ de \mathcal{V}_h . Si :

$$u_h = \sum_{i=1}^m u_i \psi_i,$$

on pose $U_h = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ le vecteur dans \mathbb{R}^m des coordonnées de u_h . Le problème (1.2) est équivalent à : trouver $U_h \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$a\left(\sum_{i=1}^m u_i \psi_i, \psi_j\right) = F(\psi_j); \quad \forall 1 \leq j \leq m, \quad (1.3)$$

ce qui s'écrit sous la forme d'un système linéaire :

$$\mathcal{K}_h U_h = b_h, \quad (1.4)$$

avec, pour $1 \leq i, j \leq m$,

$$(\mathcal{K})_{ji} = a(\psi_i, \psi_j),$$

$$(b_h)_j = F(\psi_j).$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a(u, w)$ entraîne le caractère défini positif de la matrice \mathcal{K}_h , et donc son inversibilité. En effet, pour tout vecteur $U_h \in \mathbb{R}^m$, on a :

$$(\mathcal{K}_h U_h, U_h) \geq \nu \left\| \sum_{i=1}^m u_i \psi_i \right\|^2 \geq c |U_h|^2,$$

avec $c \geq 0$; car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^m). De même, la symétrie de $a(u, w)$ implique de celle \mathcal{K}_h . \square

1.3 Approximation interne générale

Dans les applications mécaniques la matrice \mathcal{K}_h est appelée la matrice de rigidité. Le paramètre h de \mathcal{V}_h correspond à la taille maximale des mailles ou cellules qui composent le maillage. Typiquement une base de \mathcal{V}_h sera constituée de fonctions dont le support est localisé sur une ou quelques mailles. Ceci aura deux conséquences importantes : d'une part, dans la limite $h \rightarrow 0$, l'espace \mathcal{V}_h sera de plus en plus gros et approchera de mieux en mieux l'espace \mathcal{V} tout entier, et d'autre part, la matrice de rigidité \mathcal{K}_h du système (1.4) sera creuse, c'est-à-dire que la plupart de ses coefficients seront nuls (ce qui limitera le coût de la résolution numérique).

Remarque 1.3.2 (condition inf-sup). *Dans le cas de la formulation (1.1), on a le théorème suivant :*

Théorème 1.3.3 (Banach-Neca-Babuska, [3]). *Soit \mathcal{V} un espaces de Hilbert, a une forme bilinéaire continue, F une forme linéaire continue. Alors le problème (1.1) admet une et une seule solution si et seulement si :*

$$\exists \alpha > 0; \quad \inf_{u \in \mathcal{V}} \sup_{w \in \mathcal{V}} \frac{a(u, w)}{\|u\| \|w\|} \geq \alpha.$$

Cette condition est appelée condition inf-sup. Contrairement au théorème de Lax-Milgram, ce théorème fournit une condition nécessaire et suffisante pour que la formulation soit bien posée.

Remarque 1.3.4 (condition inf-sup discrète). *Le caractère bien posé de (1.1) est équivalent au condition :*

$$\exists \alpha_h > 0; \quad \inf_{u_h \in \mathcal{V}_h} \sup_{w_h \in \mathcal{V}_h} \frac{a(u_h, w_h)}{\|u_h\| \|w_h\|} \geq \alpha_h.$$

Cette relation est appelée condition inf-sup discrète. Attention : cette propriétés doit être démontrées. Rien ne garantit a priori que la condition inf-sup discrète sera vérifiée, même si la condition inf-sup est vérifiée.

Chapitre 1. La méthode des éléments finis

Nous allons maintenant comparer l'erreur commise en remplaçant l'espace \mathcal{V} par son sous espace \mathcal{V}_h . Plus précisément, nous allons majorer la différence $\|u - u_h\|$ où u est la solution dans \mathcal{V} de (1.1) et u_h celle dans \mathcal{V}_h de (1.2). Précisons auparavant quelques notations : on note $\nu \geq 0$ la constante de coercivité et M la constante de continuité de la forme bilinéaire $a(u, w)$ qui vérifient :

$$a(u, u) \geq \nu \|u\|^2; \quad \forall u \in \mathcal{V},$$

$$|a(u, w)| \leq M \|u\| \|w\|; \quad \forall u, w \in \mathcal{V}.$$

Le lemme suivant, dû Jean Céa, montre que la distance entre la solution exacte u et la solution approchée u_h est majorée uniformément par rapport au sous espace \mathcal{V}_h par la distance entre u et \mathcal{V}_h .

Lemme 1.3.5. *On se place sous l'hypothèse du lemme 1.3.1. Soit u solution de (1.1) et u_h celle de (1.2). On a :*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\nu} \inf_{w_h \in \mathcal{V}_h} \|u - w_h\|. \quad (1.5)$$

Preuve.

Puisque $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, on déduit, par soustraction des formulations variationnelles (1.1) et (1.2), que :

$$a(u - u_h, v_h) = 0; \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h,$$

on choisissant $v_h = u_h - w_h$ on obtient :

$$\begin{aligned} \nu \|u - w_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - w_h) \\ &\leq M \|u - u_h\| \|u - w_h\|, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (1.5). \square

Finalement, pour démontrer la convergence de cette approximation variationnelle, nous donnons un dernier lemme général.

1.4 La méthode des éléments finis en 1D

Lemme 1.3.6. *On se place sous l'hypothèse du lemme 1.3.1. On suppose qu'il existe un sous-espace $\tilde{\mathcal{V}}_h \subset \mathcal{V}$ dense dans \mathcal{V} et une application π_h de $\tilde{\mathcal{V}}_h$ dans \mathcal{V} tels que :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - \pi_h(v)\| = 0; \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{V}}_h.$$

Alors la méthode d'approximation interne converge, c'est-à-dire que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0.$$

Preuve.

Soit $\epsilon \geq 0$, par densité de $\tilde{\mathcal{V}}_h$, il existe $v \in \tilde{\mathcal{V}}_h$ tel que :

$$\|u - v\| \leq \epsilon.$$

Par ailleurs, il existe $h_0 \geq 0$ (dépendant de ϵ) tel que, pour cet élément $w \in \tilde{\mathcal{V}}_h$, on a :

$$\|v - \pi_h(v)\| \leq \epsilon; \quad \forall h_0 \leq h.$$

En vertu du lemme 1.3.5, on a :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq c\|u - \pi_h(v)\| \\ &\leq c(\|u - \pi_h(v)\| + \|v - \pi_h(v)\|) \\ &\leq 2c\epsilon, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit le résultat. \square

1.4 La méthode des éléments finis en 1D

L'espace que nous cherchons à approcher est :

$$\mathcal{V} = \{ u \text{ continue et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceau sur } Q = [0, 1], u(0) = u(1) = 0; \}, \quad (1.6)$$

Chapitre 1. La méthode des éléments finis

et on veut construire des espaces d'approximation $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ de dimension finie. On commence par construire un maillage de l'intervalle $[0, 1]$:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1, \quad (1.7)$$

c'est-à-dire qu'on divise l'intervalle $[0, 1]$ en petits sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$; $i = 0, \dots, n$. Les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ sont appelés les cellules ou les mailles ou encore les éléments du maillage. On notera $h_i = x_{i+1} - x_i$ la taille de la maille i et on définit :

$$h = \max_{0 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_i), \quad (1.8)$$

le pas du maillage. Dans la suite, et pour des raisons de simplicité, nous serons souvent amenés à considérer des maillages où les points x_i sont régulièrement espacés si bien que :

$$x_i = ih \text{ avec } h = \frac{1}{n+1}. \quad (1.9)$$

De tels maillages sont dits uniformes.

Nous définissons aussi \mathbb{P}_k l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i; a_i \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.10)$$

C'est un espace vectoriel de dimension $k+1$.

1.4.1 Approximation par éléments finis \mathbb{P}_1

On introduit l'espace fonctionnel de dimension finie composé des fonctions continues sur Q , affines sur chaque maille $[x_i, x_{i+1}]$ du maillage et nulles en 0 et en 1 :

$$\mathcal{V}_h = \{ w \in \mathcal{C}^0(Q) : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, w(0) = w(1) = 0; 0 \leq i \leq n \}. \quad (1.11)$$

L'indice h de \mathcal{V}_h fait référence au pas du maillage. L'espace \mathcal{V}_h est un espace vectoriel de dimension n puisqu'une fonction de \mathcal{V}_h est entièrement déterminée

1.4 La méthode des éléments finis en 1D

par les valeurs qu'elle prend en les points intérieurs du maillage $w(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Une base de \mathcal{V}_h est donnée par les fonctions $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ continues, affines sur chaque élément $[x_i, x_{i+1}]$ et telles que :

$$\forall i \in 0 \dots n, \forall j \in 0 \dots n+1, \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (1.12)$$

où δ désigne le symbole de Kronecker. Introduisons la fonction :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (1.13)$$

Si le maillage est uniforme, alors chaque fonction φ_i a pour expression $\varphi_i(x) = \varphi(\frac{x-x_i}{h})$. Dans la base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, une fonction u appartenant à \mathcal{V}_h a pour expression :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n u(x_i) \varphi_i(x). \quad (1.14)$$

Tout l'intérêt de la méthode des éléments finis réside dans le fait que chaque fonction de base φ_i a un support très réduit, c'est-à-dire que l'ensemble des x tels que $\varphi_i(x) \neq 0$ est petit devant le domaine de résolution $Q = [0, 1]$.

FIGURE 1.1 – Maillage de $Q = [0, 1]$ et fonction de base en élément finis \mathbb{P}_1 .

Ceci a pour conséquence que la plupart des coefficients de la matrice de rigidité $A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $1 \leq i, j \leq n$ sont nuls. En effet, nous illustrons la méthode sur l'exemple simple du problème de Poisson 1D :

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u = f, & \text{dans } Q \\ u = 0 & \text{sur } \partial Q. \end{cases}$$

On a :

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 \partial_x \varphi_j(x) \partial_x \varphi_i(x) dx, \quad (1.15)$$

et si j n'est pas égal à $i-1$, i ou $i+1$, alors les fonctions φ_i et φ_j ont des supports disjoints et l'intégrale dans (1.15) est nulle. Les coefficients non nuls se calculent facilement :

$$A_{i-1,i} = a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = \int_0^1 \partial_x \varphi_i(x) \partial_x \varphi_{i-1}(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h} \frac{1}{h} dx = -\frac{1}{h},$$

$$A_{i,i} = a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_0^1 (\partial_x \varphi_i(x))^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(-h)^2} dx = \frac{2}{h},$$

$$A_{i+1,i} = a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = \int_0^1 \partial_x \varphi_i(x) \partial_x \varphi_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h} \frac{-1}{h} dx = -\frac{1}{h}.$$

Finalement, la matrice de rigidité est une matrice tridiagonale :

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

La proposition suivante permet de montrer que la matrice A est inversible :

Proposition 1. La matrice A est définie positive c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall U \in \mathbb{R}^n - 0; (AU, U) > 0.$$

Avant de donner la démonstration de cette proposition, expliquons pourquoi elle implique l'inversibilité de la matrice A . En effet, si A n'est pas inversible, alors il existe un vecteur $U \neq 0$ dans \mathbb{R}^n tel que $AU = 0$. Ceci implique en particulier que $(AU, U) = 0$ avec $U \neq 0$, ce qui contredit le fait que A est définie positive.

Preuve.

Soit $U = (u_1, \dots, u_n) \neq 0$ dans \mathbb{R}^n . Le vecteur AU a pour coordonnées :

$$\left(\sum_{j=1}^n A_{1j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^n A_{nj} u_j \right) = \left(\sum_{j=1}^n a(\varphi_1, \varphi_j) u_j, \sum_{j=1}^n a(\varphi_2, \varphi_j) u_j, \dots, \sum_{j=1}^n a(\varphi_n, \varphi_j) u_j \right).$$

1.4 La méthode des éléments finis en 1D

On a donc :

$$(AU, U) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a(\varphi_j, \varphi_i) u_j u_i = a\left(\sum_{j=1}^n \varphi_j u_j, \sum_{i=1}^n \varphi_i u_i\right) = a(u_h, u_h) = \int_0^1 |\partial_x u_h(x)|^2 dx.$$

où $u_h(x)$ est la fonction de \mathcal{V}_h définie par $u_h(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x)$. Comme les (u_1, \dots, u_n) sont non tous nuls, on vérifie aisément que u_h est non nulle ce qui implique que $\int_0^1 |\partial_x u_h(x)|^2 dx > 0$. \square

Pour obtenir le second membre $F = (f, \varphi_i)$ $i = 1, \dots, n$, il faut calculer les intégrales :

$$(f, \varphi_i) = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x).$$

En général, cette intégrale ne peut être calculée de façon exacte car la fonction f peut être compliquée. Dans la pratique, on utilise des techniques d'intégration numérique où, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on approche l'intégrale par une formule de quadrature.

1.4.2 Approximation par éléments finis \mathbb{P}_2

Dans certaines applications, on peut considérer que l'approximation par des droites sur chaque élément du maillage $[x_i, x_{i+1}]$ est trop grossière, c'est-à-dire qu'elle fournit une fonction approchée trop éloignée de la fonction exacte u . On peut alors chercher à approcher u sur chaque maille par des polynômes de plus haut degré. L'approximation par éléments finis \mathbb{P}_2 consiste à approcher la solution u par une fonction continue sur Q , et polynomiale de degré 2 sur chaque maille $[x_i, x_{i+1}]$. L'espace d'approximation est alors défini par :

$$\mathcal{H}_h = \{v \in \mathcal{C}^0(Q) : v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_2, v(0) = v(1) = 0; 0 \leq i \leq n\}. \quad (1.17)$$

En notant

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 0, \dots, n,$$

Chapitre 1. La méthode des éléments finis

les centres des mailles, on voit que toute fonction de \mathcal{H}_h est entièrement déterminée par la donnée des valeurs qu'elle prend en les points intérieurs du maillage x_i ; $i = 1, \dots, n$ ainsi qu'aux points $x_{i+\frac{1}{2}}$; $i = 1, \dots, n$. L'espace vectoriel \mathcal{H}_h est donc de dimension $2n + 1$. Une base de \mathcal{H}_h est donnée par les fonctions ψ_i ; $i = 1, \dots, n$ telles que :

$$\psi_i \in \mathcal{H}_h, \psi_i(x_j) = \delta_{ij}, \psi_i(x_{j+\frac{1}{2}}) = 0; \forall j,$$

et par les fonctions $\psi_{i+\frac{1}{2}}(x)$; $i = 0, \dots, n$ telles que :

$$\psi_{i+\frac{1}{2}} \in \mathcal{H}_h, \psi_{i+\frac{1}{2}}(x_j) = 0, \psi_{i+\frac{1}{2}}(x_{j+\frac{1}{2}}) = \delta_{ij}; \forall j,$$

On définit aussi deux fonctions qui permettent de donner les expressions des fonctions de base :

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)(1+2x); & -1 \leq x \leq 0 \\ (1-x)(1-2x); & 0 \leq x \leq 1 \\ 0; & \text{ailleurs} \end{cases},$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} 1-4x^2; & x \leq \frac{1}{2} \\ (1-x)(1-2x); & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si le maillage est uniforme, alors $\psi_i = \varphi(\frac{x-x_i}{h})$ et $\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \psi(\frac{x-x_{i+\frac{1}{2}}}{h})$

FIGURE 1.2 – fonction de base en élément finis \mathbb{P}_2 .

1.5 La méthode des éléments finis en 2D

En deux dimensions, nous illustrons toujours la méthode des éléments finis sur le cas du problème de Poisson :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}.\nabla u = f, & \text{dans } Q \\ u = 0 & \text{sur } \partial Q. \end{cases}$$

où cette fois-ci Q est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . On suppose que la formulation variationnelle de ce problème admet une solution u dans l'espace \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} = \{u \text{ continue et } \mathcal{C}^1 \text{ par morceau sur } \overline{Q}, u = 0; \text{ text sur } \partial Q\}, \quad (1.18)$$

et on cherche à l'approcher par une fonction u_h solution du même problème variationnel mais où l'espace \mathcal{V} est remplacé par un espace d'approximation \mathcal{V}_h . On commence par définir ce qu'est un maillage du domaine Q en dimension deux.

Définition 1.5.1. Un maillage triangulaire du domaine Q est un ensemble τ_h de triangle $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ non aplatis qui subdivisent le domaine Q . Par convention, le paramètre h désigne la longueur de la plus grande arête du maillage. On suppose que les triangles ne se recouvrent pas et que l'intersection entre deux triangles K_i et K_j est soit vide, soit égale à un sommet commun aux deux triangles, ou à une arête commune aux deux triangles. Par ailleurs, on appelle sommets ou noeuds du maillage les sommets des triangles composant le maillage.

FIGURE 1.3 – Un exemple de maillage triangulaire.

Remarque 1.5.2. On considère ici une subdivision du domaine Q en triangles, mais on pourrait aussi construire des maillages composés de quadrilatères ou de façon générale par des polygones.

Chapitre 1. La méthode des éléments finis

De même qu'en dimension un, nous définissons \mathbb{P}_k l'espace des polynômes de deux variables de degré inférieur ou égal à k :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x, y) = \sum_{i+j \leq k} a_{ij} x^i y^j; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.19)$$

Par exemple, un polynôme de degré un s'écrit de manière générique $p(x, y) = a + bx + cy$, tandis qu'un polynôme de degré deux s'écrit $p(x, y) = a + bx + cy + dxy + tx^2 + ly^2$.

Les espaces d'approximations \mathcal{V}_h sont définis de la même façon qu'en dimension un, en choisissant des fonctions qui sont globalement continues sur \overline{Q} et qui sont polynômiales sur chaque triangle K_i du maillage. Pour l'approximation \mathbb{P}_1 par exemple, on a :

$$\mathcal{V}_h = \{ u \in C^0(\overline{Q}), u|_{K_i}, \forall K_i \in \tau_h \text{ et } u = 0; \text{ sur } \partial Q \},$$

Cet espace admet pour fonctions de base, les fonctions chapeau φ_i qui prennent la valeur 1 en un noeud (x_i, y_i) du maillage et la valeur 0 aux autres noeuds (x_j, y_j) du maillage.

La matrice de rigidité se calcule tout comme pour la dimension un par la formule :

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_Q \nabla \varphi_j(x, y) \nabla \varphi_i(x, y) dx dy,$$

et le second membre :

$$(f, \varphi_i) = \int_Q f(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy,$$

se calcule de façon approchée par des formules de quadrature.

FIGURE 1.4 – Fonction de base chapeau

FIGURE 1.5 – Support de la fonction de base

1.6 Convergence de la méthode des éléments finis

On suppose ici que l'on résout un problème sur un domaine $Q \in \mathbb{R}^n$ de façon approchée par la méthode d'éléments finis. Le but de cette section est de fournir une estimation de l'erreur $\|u - u_h\|_m$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme H^m . La régularité de u et de u_h (et donc les valeurs possibles pour m) dépendant évidemment du problème continu et du type d'éléments finis choisis pour sa résolution, on exposera ici la démarche de façon générale, en supposant les fonctions suffisamment régulières par rapport à la valeur de m . En pratique, on aura le plus souvent $m = 0, 1$ ou 2 .

On notera τ_h le maillage de $Q \in \mathbb{R}^n$ considéré. On supposera ici le domaine Q polygonal, ce qui permet de recouvrir exactement par le maillage. Si ce n'est pas le cas, les calculs qui suivent doivent être modifiés pour tenir compte de l'écart entre le domaine couvert par le maillage et le domaine réel.

Les différentes étapes du calcul seront, de façon assez schématique, les suivantes :

1- L'erreur d'approximation est bornée par l'erreur d'interpolation :

$$\|u - u_h\|_m \leq c \|u - \pi_h u\|_m. \quad (1.20)$$

2- On se ramène à des majorations locales sur chaque élément :

$$\|u - \pi_h u\|_m^2 = \sum_{K \in \tau_h} \|u - \pi_h u\|_{m,K}^2. \quad (1.21)$$

3- On se ramène à l'élément de référence :

$$\|u - \pi_h u\|_{m,K}^2 \leq C(K) \|\tilde{u} - \tilde{\pi}_h \tilde{u}\|_{m,\tilde{K}}^2. \quad (1.22)$$

4- Les majorations sur l'élément de référence :

$$\|\tilde{u} - \tilde{\pi}_h \tilde{u}\|_{m,\tilde{K}}^2 \leq C_1 |\tilde{u}|_{k+1,\tilde{K}}^2. \quad (1.23)$$

5- Assemblage des majorations locales :

$$\|u - \pi_h u\|_m \leq Ch^{k+1-m} |u|_{k+1}. \quad (1.24)$$

1.6.1 Majoration par l'erreur d'interpolation

L'équation (1.5) du lemme 1.3.5 indique que :

$$\|u - u_h\|_m \leq \frac{M}{\nu} \|u - w_h\|_m; \quad \forall w_h \in \mathcal{V}_h. \quad (1.25)$$

On peut l'appliquer dans le cas particulier où $w_h = \pi_h u$, ce qui donne :

$$\|u - u_h\|_m \leq \frac{M}{\nu} \|u - \pi_h u\|_m. \quad (1.26)$$

1.6.2 Décomposition sur les éléments

On a, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} \|u - \pi_h u\|_m^2 &= \sum_{K \in \tau_h} \|u - \pi_h u\|_{m,K}^2 \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \sum_{i=0}^m |u - \pi_h u|_{i,K}^2, \end{aligned}$$

Le calcul est donc ramené à un calcul sur chaque élément, pour toutes les semi-normes $|\cdot|_{i,K}$; $i = 0, \dots, m$.

1.6.3 Passage à l'élément de référence

Théorème 1.6.1. Soit K un élément quelconque de τ_h , et \tilde{K} l'élément de référence.

Soit G la transformation affine de \tilde{K} vers K : $G(\tilde{x}) = B\tilde{x} + b$, avec B inversible.

On a :

$$\forall w \in H^i(K); \quad |\tilde{w}|_{i,\tilde{K}} \leq C(i,n) \|B\|_2^i |\det(B)|^{-\frac{1}{2}} |w|_{i,K}. \quad (1.27)$$

1.6 Convergence de la méthode des éléments finis

Preuve. Il s'agit là en fait d'un simple résultat de changement de variable dans une intégrale.

Soit w une fonction i fois différentiable au point x . On note $D^i w(x)$ sa dérivée $i^{\text{ème}}$ au sens de Fréchet au point x . Il s'agit donc d'une forme i -linéaire symétrique sur \mathbb{R}^n . On notera $D^i w(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_i)$ sa valeur pour i vecteurs $\xi_l \in \mathbb{R}^n$ ($1 \leq l \leq i$).

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ désigne un multi-entier, et on note $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$. On a alors :

$$|w|_{i,K}^2 \leq \int_{x \in K} \sum_{|\alpha|=i} \|\partial^{|\alpha|} w\|^2 dx. \quad (1.28)$$

En posant :

$$\|D^i w(x)\| \leq \sup_{\xi_1, \dots, \xi_i \in (\mathbb{R}^*)^n} \frac{D^i w(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_i)}{|\xi_1| \dots |\xi_i|},$$

on déduit qu'il existe des constantes γ_1 et γ_2 dépendant uniquement de n et i (donc en particulier indépendantes de w) telles que :

$$\gamma_1^2 |w|_{i,K}^2 \leq \int_{x \in K} \|D^i w(x)\|^2 dx \leq \gamma_2^2 |w|_{i,K}^2. \quad (1.29)$$

Par ailleurs, si l'on utilise le changement de variable $x = G(\tilde{x}) = B\tilde{x} + b$ dans $D^i w(x)$, il vient :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_i \in \mathbb{R}^n; D^i \tilde{w}(\tilde{x}) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_i) = D^i w(x) \cdot (B\xi_1, \dots, B\xi_i),$$

d'où

$$\|D^i \tilde{w}(\tilde{x})\| \leq \|B\| \|D^i w(x)\|.$$

Or, $D^i w(x) = D^i w(G(\tilde{x}))$. Donc :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{x} \in \tilde{K}} \|D^i \tilde{w}(\tilde{x})\|^2 d\tilde{x} &\leq \|B\|^{2i} \int_{\tilde{x} \in \tilde{K}} \|D^i w(G(\tilde{x}))\|^2 d\tilde{x} \\ &= \|B\|^{2i} |\det(B)|^{-1} \int_{x \in K} \|D^i w(x)\|^2 dx. \end{aligned}$$

En minorant et majorant la formule précédente grâce à (1.29), on obtient :

$$\gamma_1^2 |\tilde{w}|_{i, \tilde{K}}^2 \leq \gamma_2^2 \|B\|^{2i} |\det(B)|^{-1} |w|_{i, K}^2.$$

Et on a de même :

$$\forall w \in H^i(K), |w|_{i, K} \leq C(i, n) \|B^{-1}\|_2^i |\det(B)|^{\frac{1}{2}} |\tilde{w}|_{i, \tilde{K}} \quad (1.30)$$

d'où le résultat (1.27). \square

Estimation de $\|B\|$:

Soit h_K le diamètre de K , c'est à dire le maximum des distances euclidiennes entre deux points de K . Soit ζ_K la rondeur de K , c'est à dire le diamètre maximum des sphères incluses dans K . On a :

$$\|B\| \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=\tilde{\zeta}} \frac{\|Bx\|}{\tilde{\zeta}}. \quad (1.31)$$

Soit x un vecteur de \mathbb{R}^n tel que $\|x\| = \tilde{\zeta}$. Par définition de $\tilde{\zeta}$, il existe deux points \tilde{y} et \tilde{z} de \tilde{K} tels que $x = \tilde{y} - \tilde{z}$. Alors $Bx = B\tilde{y} - B\tilde{z} = G(\tilde{y}) - G(\tilde{z}) = y - z$ avec y et z appartenant à K . Par définition de h_K , $\|y - z\| \leq h_K$. Donc $\|Bx\| \leq h_K$. En reportant dans la définition de $\|Bx\|$, on obtient donc :

$$\|B\| \leq \frac{h_K}{\tilde{\zeta}}. \quad (1.32)$$

Et on a évidemment de même :

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\tilde{h}}{\zeta_K}. \quad (1.33)$$

1.6.4 Majoration sur l'élément de référence

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 1.6.2. Soient i et k deux entiers tels que $0 \leq i \leq k+1$. Si $\tilde{\pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\tilde{K}), H^i(\tilde{K}))$ laisse $P_k(\tilde{K})$ invariant (c'est à dire vérifie $\forall \tilde{p} \in P_k(\tilde{K}); \tilde{\pi}\tilde{p} = \tilde{p}$), alors :

$$\exists C(\tilde{K}, \tilde{\pi}), \forall \tilde{w} \in H^{k+1}(\tilde{K}), |\tilde{w} - \tilde{\pi}_h \tilde{w}|_{i, \tilde{K}} \leq C |\tilde{w}|_{k+1, \tilde{K}}. \quad (1.34)$$

1.6 Convergence de la méthode des éléments finis

Preuve.

$\tilde{\pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\tilde{K}), H^i(\tilde{K}))$, et donc $I - \tilde{\pi} \in \mathcal{L}(H^{k+1}(\tilde{K}), H^i(\tilde{K}))$ car $i \leq k+1$.

Et donc :

$$|\tilde{w} - \tilde{\pi}_h \tilde{w}|_{i, \tilde{K}} \leq \|I - \tilde{\pi}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(\tilde{K}), H^i(\tilde{K}))} |\tilde{w}|_{k+1, \tilde{K}}.$$

On utilise maintenant l'invariance de $P_k(\tilde{K})$:

$$\forall \tilde{p} \in P_k(\tilde{K}); \tilde{w} - \tilde{\pi}_h \tilde{w} = (I - \tilde{\pi})\tilde{w} = (I - \tilde{\pi})(\tilde{w} + \tilde{p}). \quad (1.35)$$

Donc :

$$|\tilde{w} - \tilde{\pi}_h \tilde{w}|_{i, \tilde{K}} \leq \|I - \tilde{\pi}\|_{\mathcal{L}(H^{k+1}(\tilde{K}), H^i(\tilde{K}))} \inf_{\tilde{p} \in P_k(\tilde{K})} \|\tilde{w} + \tilde{p}\|_{k+1, \tilde{K}}. \quad (1.36)$$

On aura donc démontré le théorème si l'on montre que :

$$\exists C, \forall \tilde{w} \in H^{k+1}(\tilde{K}), \inf_{\tilde{p} \in P_k(\tilde{K})} \|\tilde{w} + \tilde{p}\|_{k+1, \tilde{K}} \leq C |\tilde{w}|_{k+1, \tilde{K}}. \quad (1.37)$$

Soit $(f_j)_{j=0, \dots, k}$ une base du dual de $P_k(\tilde{K})$. D'après le théorème d'Hahn-Banach, il existe des formes linéaires continues sur $H^{k+1}(\tilde{K})$, que l'on notera encore f_j , et qui prolongent les f_j . En particulier, si $\tilde{p} \in P_k(\tilde{K})$ vérifie $f_j(\tilde{p}) = 0$; ($j = 0, \dots, k$), alors $\tilde{p} = 0$. Nous allons montrer que :

$$\exists C, \forall \tilde{w} \in H^{k+1}(\tilde{K}), \|\tilde{w}\|_{k+1, \tilde{K}} \leq C(|\tilde{w}|_{k+1, \tilde{K}} + \sum_{j=0}^k |f_j(\tilde{w})|). \quad (1.38)$$

On aura le résultat souhaité en appliquant (1.38) à $\tilde{w} + \tilde{q}$, avec \tilde{q} tel que $f_j(\tilde{q}) = f_j(-\tilde{w})$. La relation (1.38) se démontre par l'absurde. Si elle n'est pas vraie, alors il existe une suite de fonctions \tilde{w}_n de $H^{k+1}(\tilde{K})$ telles que :

$$|\tilde{w}_n|_{k+1, \tilde{K}} = 1, \|\tilde{w}_n\|_{k+1, \tilde{K}} \longrightarrow 0 \text{ et } \forall j; f_j(\tilde{w}_n) \longrightarrow 0$$

Par complétude de $H^{k+1}(\tilde{K})$, on extrait une sous-suite convergente vers $\tilde{w} \in H^{k+1}(\tilde{K})$. Mais $|\tilde{w}_n|_{k+1, \tilde{K}} \longrightarrow 0$. Donc $\tilde{w} \in P_k(\tilde{K})$ et $f_j(\tilde{w}) = 0$. D'où une contradiction. \square

1.6.5 Assemblage des majorations locales

En rassemblant les résultats précédents, on peut établir une majoration sur un élément quelconque K du maillage. D'après (1.27), (1.30) et (1.34) on a :

$$\begin{aligned} |w - \pi_K w|_{i,K} &\leq C(i, n) \|B^{-1}\|^i |\det(B)|^{\frac{1}{2}} |\tilde{w} - \tilde{\pi} \tilde{w}|_{i, \tilde{K}} \\ &\leq C(i, n) \|B^{-1}\|^i |\det(B)|^{\frac{1}{2}} C(\tilde{K}, \tilde{\pi}) |\tilde{w}|_{i, \tilde{K}} \\ &\leq C(i, n) \|B^{-1}\|^i |\det(B)|^{\frac{1}{2}} C(\tilde{K}, \tilde{\pi}) C(k+1, n) \|B\|^{k+1} |\det(B)|^{\frac{1}{2}} |\tilde{w}|_{i, \tilde{K}}. \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$|w - \pi_K w|_{i,K} \leq C_2(\tilde{\pi}, \tilde{K}, i, k, n) \frac{h_K^{k+1}}{\zeta_K^i} |w|_{i,K}. \quad (1.39)$$

Il est important de remarquer à ce niveau que C_2 est indépendant de K .

On va maintenant reprendre la majoration (1.39) pour tous les éléments du maillage et toutes les valeurs de $i = 0, \dots, m$. On va définir deux quantités représentatives du maillage :

(i)– Diamètre maximum des éléments h tel que :

$$h_K \leq h; \quad \forall K \in \tau_h.$$

(ii)– Caractérise l'aplatissement des éléments σ tel que :

$$\frac{h_K}{\zeta_K} \leq \sigma; \quad \forall K \in \tau_h.$$

1.6 Convergence de la méthode des éléments finis

Alors :

$$\begin{aligned}
\|w - \pi_K w\|_{m,K}^2 &= \sum_{i=1}^m |w - \pi_K w|_{i,K}^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^m C_2^2(\tilde{\pi}, \tilde{K}, i, k, n) \frac{h_K^{2k+2}}{\zeta_K^{2i}} |w|_{k+1,K}^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^m C_2^2(\tilde{\pi}, \tilde{K}, i, k, n) \frac{h_K^{2i}}{\zeta_K^{2i}} h_K^{2m-2i} h_K^{2k-2m+2} |w|_{k+1,K}^2 \\
&\leq \left\{ \sum_{i=1}^m C_2^2(\tilde{\pi}, \tilde{K}, i, k, n) \sigma^{2i} h^{2m-2i} \right\} \left[h^{k+1-m} |w|_{k+1,K} \right]^2.
\end{aligned}$$

Le terme entre accolades ne tend ni vers 0 ni vers l'infini quand h tend vers 0.

D'où :

$$\|w - \pi_K w\|_{m,K} \leq C_3(\tilde{\pi}, \tilde{K}, i, k, n, \sigma, h) h^{k+1-m} |w|_{k+1,K} \quad (1.40)$$

En sommant ensuite sur tous les éléments du maillage :

$$\begin{aligned}
\|w - \pi_K w\|_m^2 &= \sum_{K \in \tau_h} |w - \pi_K w|_{m,K}^2 \\
&\leq \sum_{K \in \tau_h} \left[C_3(\tilde{\pi}, \tilde{K}, i, k, n, \sigma, h) h^{k+1-m} |w|_{k+1,K} \right]^2.
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\|w - \pi_h w\|_m \leq C(\tau_h, m, k, n) h^{k+1-m} |w|_{k+1} \quad (1.41)$$

En reportant (1.41) dans (1.25), on obtient le résultat final classique de majoration d'erreur :

$$\|u - u_h\|_m \leq \mathcal{C} h^{k+1-m} |u|_{k+1} \quad (1.42)$$

La méthode des éléments finis permet justement la construction de ce type d'espace \mathcal{V}_h de fonctions polynômiales par élément. Ce dernier résultat nous donne alors l'ordre de convergence de la méthode d'éléments finis utilisée lorsqu'on choisit des polynômes de degré k sur chaque élément.

Remarque 1.6.3. *Si le domaine Q n'est pas polygonal, la majoration précédente n'est plus valable. On peut alors établir d'autres majorations du même type se référant par exemple à Raviart et Thomas (voir [28]).*

Chapitre 2

Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

2.1 Approximation par une méthode d'éléments finis continus d'un opérateur de type positif

Soit \mathcal{W} un espace de Hilbert dont le produit scalaire et la norme induite sont notés :

$$(u, v), \quad \|u\|^2 = (u, u); \quad \forall u, v \in \mathcal{W}.$$

On se donne \mathcal{A} un opérateur linéaire non borné de \mathcal{W} dans lui même et fermé.

On définit alors l'espace de Banach \mathcal{V} par :

$$\mathcal{V} = \mathcal{D}(\mathcal{A});$$

que l'on munit de la norme du graphe $|||\cdot|||$:

$$|||\varphi|||^2 = \|\varphi\|^2 + \|\mathcal{A}\varphi\|^2.$$

\mathcal{A} est alors un opérateur linéaire continu borné de \mathcal{V} dans \mathcal{W} c'est-à-dire $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

On fait les hypothèses suivantes :

$$(\mathbf{HP}_1) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ est de type positif;} \\ \forall \varphi \in \mathcal{V} : (\mathcal{A}\varphi, \varphi) \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$(\mathbf{HP}_2) \left\{ \begin{array}{l} (I + \mathcal{A}) \text{ est bijectif de } \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}, \\ (I + \mathcal{A})^{-1} \text{ est borné i.e :} \\ \exists \gamma \geq 0 \text{ telle que : } |||(I + \mathcal{A})^{-1}w||| \leq \frac{1}{\gamma} \|w\|; \quad \forall w \in \mathcal{W}. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$(\mathbf{HP}_3) \left\{ \begin{array}{l} \exists q \in \mathbb{N}^* \geq 0 \text{ tel que : } \mathcal{V} \hookrightarrow H^q(Q) \text{ (injection continue),} \\ \text{et : } \mathcal{C}^{0,1}(\bar{Q}) \hookrightarrow \mathcal{V} \text{ (injection dense).} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

2.1 Approximation par une méthode d'éléments finis continus d'un opérateur de type positif

On veut résoudre de manière approchée le problème **(PR)** suivant :

$$(\mathbf{PR}) \begin{cases} \text{Pour } f \in \mathcal{W} \text{ donnée régulière, trouver } u \in \mathcal{V} \text{ vérifiant :} \\ u + \mathcal{A}u = f; \text{ dans } \mathcal{W}. \end{cases} \quad (2.4)$$

D'après **(HP₂)**, **(PR)** est un problème bien posé.

On définit \mathcal{V}_h une approximation interne de \mathcal{V} par une méthode d'éléments finis continus :

$$\mathcal{V}_h = \{\varphi \in \mathcal{C}^0(\bar{Q}), \varphi|_K \in \mathbb{P}_k[K]; \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.5)$$

On définit alors les formes bilinéaires continues $a(\cdot, \cdot)$, $a_s(\cdot, \cdot)$, $a^h(\cdot, \cdot)$ et les formes linéaires continues $F(\cdot)$, $F_s(\cdot)$, $F^h(\cdot)$ par :

$$\begin{aligned} a: \mathcal{V} \times \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, \varphi) &\longmapsto a(u, \varphi) = (u + \mathcal{A}u, \varphi). \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} a_s: \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, \psi) &\longmapsto a_s(u, \psi) = (u + \mathcal{A}u, \psi + \mathcal{A}\psi). \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} a^h: \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, \psi) &\longmapsto a^h(u, \psi) = (u + \mathcal{A}u, \psi + h\mathcal{A}\psi). \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} F: \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto F(\varphi) = (f, \varphi). \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} F_s: \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\longmapsto F_s(\psi) = (f, \psi + \mathcal{A}\psi). \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} F^h: \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\longmapsto F^h(\psi) = (f, \psi + h\mathcal{A}\psi). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le problème (2.4) peut-être formulé sous forme variationnelle c'est-à-dire dans le langage des formes bilinéaire. les hypothèses (2.1), (2.2) et (2.3) doivent alors être adaptées à ce formalisme. Le problème (2.4) s'énonce :

Chapitre 2. Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

Soit a la forme bilinéaire continue et F la forme linéaire continue définies précédemment. Le problème (2.4) se formule comme :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in \mathcal{V} \text{ vérifiant :} \\ a(u, \varphi) = F(\varphi); \quad \forall \varphi \in \mathcal{W}. \end{cases} \quad (2.12)$$

L'hypothèse (\mathbf{HP}_1) se transforme en (\mathbf{HP}'_1) (condition inf-sup) :

$$(\mathbf{HP}'_1) \begin{cases} a(.,.) \text{ vérifie :} \\ i - \exists \gamma \geq 0; \quad \inf_{\substack{u \in \mathcal{V} \\ u \neq 0}} \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{W} \\ \varphi \neq 0}} a(u, \varphi) \geq \gamma \|u\| \|\varphi\|, \\ ii - \sup_{\substack{u \in \mathcal{V} \\ \|u\|=1}} a(u, \varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{W}. \end{cases} \quad (2.13)$$

L'hypothèse (\mathbf{HP}_2) se transforme en (\mathbf{HP}'_2) :

$$(\mathbf{HP}'_2) : \forall \varphi \in \mathcal{V}, \quad a(\varphi, \varphi) \geq \|\varphi\|^2. \quad (2.14)$$

L'hypothèse (\mathbf{HP}_3) est inchangée et est suffisante pour obtenir les résultats standard de l'approximation lié aux éléments finis continus de Lagrange.

Les hypothèses (\mathbf{HP}_2) ou (\mathbf{HP}'_2) sont suffisantes pour affirmer que le problème (2.12) est un problème bien posé au sens classique.

Les hypothèses (\mathbf{HP}_1) ou (\mathbf{HP}'_1) sont suffisantes pour que les propriétés du problème continu subsiste pour les problèmes approchés.

Proposition 2.1.1. *La continuité de $a(.,.)$ et l'hypothèse (\mathbf{HP}'_2) impliquent l'hypothèse (\mathbf{HP}_2) .*

Preuve. Soit $u \in \mathcal{V}$ alors :

$$\begin{aligned} a(u, .) - (u, .) : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto a(u, \varphi) - (u, \varphi), \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire continu, $a(u, .) - (u, .) \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathbb{R}) = \mathcal{W}'$. On utilise maintenant l'isomorphisme de Riez entre \mathcal{W} et \mathcal{W}' :

2.1 Approximation par une méthode d'éléments finis continus d'un opérateur de type positif

$$\begin{aligned} I: \mathcal{W}' &\longrightarrow \mathcal{W} \\ w &\longmapsto Iw, \end{aligned}$$

tel que

$$(Iw, \varphi) = w(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{W}.$$

On peut donc représenter avec cet isomorphisme :

On pose

$$w = I(a(u, \cdot) - (u, \cdot)),$$

tel que

$$(w, \varphi) = a(u, \varphi) - (u, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{W}.$$

On définit \mathcal{A} par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{W} \\ u &\longmapsto \mathcal{A}u = w = I(a(u, \cdot) - (u, \cdot)), \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{A}(u, \varphi) = a(u, \varphi) - (u, \varphi), \quad \forall u \in \mathcal{V}, \forall \varphi \in \mathcal{W}.$$

\mathcal{A} est un opérateur linéaire. Montrons qu'il est continu :

$$\|\mathcal{A}u\|^2 = a(u, \mathcal{A}u) - (u, \mathcal{A}u) \leq c(\|u\| \|\mathcal{A}u\| + \|u\| \|\mathcal{A}u\|),$$

car a est continue.

Et par définition de la norme du graphe :

$$\|u\| \leq \|u\|,$$

donc :

$$\|\mathcal{A}u\| \leq c(\|u\|), \quad \forall u \in \mathcal{V}.$$

Donc \mathcal{A} est un opérateur linéaire continu borné.

Chapitre 2. Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

Montrons maintenant que \mathcal{A} est injectif et

$$\|\mathcal{A}u\| \geq \gamma(\|u\|), \quad \forall u \in \mathcal{V}.$$

Soit $u \in \mathcal{V}$; $\|u\| = 1$, on a par définition :

$$\|\mathcal{A}u\| = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{W} \\ \|\varphi\|=1}} (\mathcal{A}u, \varphi).$$

L'hypothèse (2.14,ii) implique :

$$\|\mathcal{A}u\| \geq \gamma.$$

Maintenant si $u \neq 0$, $u \in \mathcal{V}$ mais $\|u\| \neq 1$, on pose $\psi = \frac{u}{\|u\|}$:

$$\|\mathcal{A}\psi\| = \|\mathcal{A}\frac{u}{\|u\|}\| \geq \gamma,$$

implique

$$\|\mathcal{A}u\| \geq \gamma\|u\|,$$

Montrons maintenant que \mathcal{A} est surjectif c'est-à-dire :

$$Im(\mathcal{A}) = \mathcal{W}.$$

Montrons que \mathcal{A} est fermé. Soit $\{u_n\} \in \mathcal{V}$ telle que $\|\mathcal{A}u_n - w\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, montrons que :

$$\exists u \in \mathcal{V} \text{ tel que } u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \text{ et } \mathcal{A}u = w.$$

examinons alors :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u_m\| &= \|\mathcal{A}(u_n - u_m)\| \\ &\geq \gamma\|u_n - u_m\|, \end{aligned}$$

donc $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy dans un Banach \mathcal{V} ce qui implique l'existence de u tel que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$, montrons que $w = \mathcal{A}u$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u - w\| &= \|\mathcal{A}(u_n - u) + \mathcal{A}u_n - w\| \\ &\leq \|\mathcal{A}(u_n - u)\| + \|\mathcal{A}u_n - w\| \\ &\leq c\|u_n - u\| + \|\mathcal{A}u_n - w\|, \end{aligned}$$

2.1 Approximation par une méthode d'éléments finis continus d'un opérateur de type positif

car \mathcal{A} est continu. Donc $\mathcal{A}u = w$.

On utilise le théorème de l'image fermée de Banach :

$$Im(\mathcal{A}) = (Ker(\mathcal{A}^*))^\perp = \{w \in \mathcal{W} : f(w) = 0; \forall f \in Ker(\mathcal{A}^*)\}.$$

Comme $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ implique $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{V}', \mathcal{W}')$. Soit $f \in Ker(\mathcal{A}^*)$ implique que $f \in \mathcal{W}'$ et $\mathcal{A}^*f = 0$ dans \mathcal{V}' donc $(\mathcal{A}^*f)(u) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{V}$, mais :

$$(\mathcal{A}^*f)(u) = f(\mathcal{A}u) = 0.$$

$f(\mathcal{A}u)$ peut se représenter avec I comme :

$$(If, \mathcal{A}u) = 0; \forall u \in \mathcal{V},$$

donc :

$$a(u, If) = 0.$$

Si $If \neq 0$ cela contredit (ii) dans l'hypothèse (2.14) donc $If = 0$. Comme I est un isomorphisme alors $f = 0$ donc $Ker(\mathcal{A}^*) = \{0\}$ implique $Ker(\mathcal{A}^*)^\perp = \mathcal{W}$ et démontre que $Im(\mathcal{A}) = \mathcal{W}$.

□

Remarque 2.1.2. L'hypothèse (2.2) implique (2.14).

On s'intéresse maintenant à l'approximation du problème (2.12). Si on regarde la formulation du problème (2.12) à l'aide de la forme $a(.,.)$ ce qu'il faut c'est trouver \mathcal{V}_h et \mathcal{W}_h tels que l'hypothèse (2.14) soit satisfaite dans $\mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$. L'approche adoptée ici la suivante :

On se donne une approximation interne de \mathcal{V} c'est-à-dire $\mathcal{V}_h \hookrightarrow \mathcal{V}$ (injection dense), montre que sous l'hypothèse (2.13) on a une approximation \mathcal{W}_h de \mathcal{W} telle que $\mathcal{W}_h \hookrightarrow \mathcal{W}$ (injection dense), la condition inf-sup discrète est vérifiée $\mathcal{W}_h = \mathcal{A}(\mathcal{V}_h)$.

Chapitre 2. Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

Ce résultat peut s'énoncer autrement en adoptant le point de vue des opérateurs linéaires. Comme \mathcal{A} est un opérateur de type positif (2.1) on considère le produit scalaire construit avec \mathcal{A} et on approxime cette formulation de l'équation fonctionnelle (2.4).

Proposition 2.1.3. *Sous les hypothèses (2.1), (2.2) il existe un unique $u_h \in \mathcal{V}_h$ tel que :*

$$a_s(u_h, \psi_h) = F_s(\psi_h); \quad \forall \psi_h \in \mathcal{V}_h. \quad (2.15)$$

De plus on a l'estimation suivante : il existe $C \geq 0$ indépendante de h telle que

$$|||u||| \leq C \|\psi_h\|. \quad (2.16)$$

Preuve.

\mathcal{V}_h est un espace de dimension finie ; l'approximation étant interne il suffit d'avoir l'injectivité pour avoir l'existence. L'hypothèse (2.1) implique que :

$$a_s(\psi_h, \psi_h) \geq |||\psi_h|||^2; \quad (\text{inégalité de coercivité}), \quad (2.17)$$

ce qui démontre (2.15), (2.15). \square

Proposition 2.1.4. *Sous les hypothèses (2.1), (2.2) et (2.3) il existe un unique $u \in \mathcal{V}$ tel que :*

$$u_h \longrightarrow u, \mathcal{A}u_h \longrightarrow \mathcal{A}u; \quad \mathcal{W} \text{ faible}$$

où u_h est la solution de (2.15) et u vérifie :

$$a(u, \psi) = F(\psi); \quad \forall \psi \in \mathcal{W}. \quad (2.18)$$

Preuve.

D'après l'estimation (2.16) on a : il existe sous suite encore noté u_h telle que

$$u_h \longrightarrow u; \quad \mathcal{V} \text{ faible}$$

2.1 Approximation par une méthode d'éléments finis continus d'un opérateur de type positif

où $u \in \mathcal{V}$. Montrons que (2.18) est satisfaite : $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ donc il est continu de \mathcal{V} $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ faible dans \mathcal{W} $\sigma(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ faible, alors si $u_h \rightarrow u$ \mathcal{V} faible, $\mathcal{A}u_h \rightarrow \mathcal{A}u$ \mathcal{W} faible. Ce qui permet de passer à la limite dans a_s , calculons pour tout $\psi \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} a_s(u, \psi) &= a_s(u - u_h, \psi) + a_s(u_h, \psi) \\ &= a_s(u - u_h, \psi) + a_s(u_h, \psi_h) + a_s(u_h, \psi - \psi_h) \\ &= a_s(u - u_h, \psi) + F_s(\psi_h) + a_s(u_h, \psi - \psi_h) \\ &= a_s(u - u_h, \psi) + F_s(\psi) + F_s(\psi_h - \psi) + a_s(u_h, \psi - \psi_h). \end{aligned}$$

L'hypothèse (2.3) implique :

$$\forall \psi \in \mathcal{V}; \exists \psi_h \in \mathcal{V}_h : \psi_h \rightarrow \psi; \text{ dans } \mathcal{V}.$$

Choisissant un tel ψ_h dans l'égalité précédente et en passant à la limite il vient :

$$a_s(u, \psi) = F_s(\psi); \quad \psi \in \mathcal{V},$$

et

$$(u + \mathcal{A}u, \psi + \mathcal{A}\psi) = (f, \psi + \mathcal{A}\psi); \quad \forall \psi \in \mathcal{V}.$$

Sachant que :

$$\forall w \in \mathcal{W} \exists ! \psi \in \mathcal{V} : (I + \mathcal{A})\psi = w,$$

on a prouvé (2.18). \square

Proposition 2.1.5. *Sous les hypothèses (2.1), (2.2), (2.3) et si on suppose de plus que u solution de (2.12) est dans $H^{k+1}(Q)$ on a alors l'estimation suivante en u et u_h solution de (2.15) :*

$$\|u - u_h\| \leq ch^{k-q} \|u\|_{H^{k+1}(Q)}. \quad (2.19)$$

Preuve.

Chapitre 2. Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

On définit $e = u - u_h$ et $e_h = u_h - \Pi_h u$, on peut décomposer :

$$e = u - \Pi_h u - e_h.$$

Comme $e_h \in \mathcal{V}_h$ et l'approximation est consistante :

$$\| \|u - u_h\| \|^2 \leq a_s(e, e) = a_s(e, u - \Pi_h u - e_h) = a_s(e, u - \Pi_h u),$$

donc

$$\| \|u - u_h\| \|^2 \leq a_s(e, u - \Pi_h u) \leq c \| \|e\| \| \|u - \Pi_h u\| \|.$$

On utilise alors le résultat classique de l'interpolation :

$$\| \|u - \Pi_h u\| \|^2 \leq ch^{k-q+1} \| \|u\|_{H^{k+1}(Q)} \|.$$

□

Un autre point de vue pour dire la même chose. On définit :

$$\mathcal{W}_h = \{w_h \in \mathcal{W} \text{ tel que } \exists \psi_h \in \mathcal{V}_h \text{ vérifiant } w_h = \psi_h + \mathcal{A}\psi_h\}. \quad (2.20)$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.1.6. *Sous les hypothèses (2.13), (2.14) et (2.3) on a :*

(I)- *Les conditions inf-sup sont vérifiées dans $\mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$.*

(II)- $\dim \mathcal{W}_h = \dim \mathcal{V}_h$.

(III)- *Le problème discret ; Trouver $u_h \in \mathcal{V}_h : a(u_h, \varphi_y) = F(\varphi_h) ; \forall \varphi_h \in \mathcal{W}_h$, est bien posé c'est-à-dire il existe $c \geq 0 : \| \|u_h\| \| \leq c \| \|f\| \|.$*

De plus si u la solution du problème (2.12) est dans $H^{k+1}(Q)$, on a l'estimation :

$$\| \|u - u_h\| \| \leq ch^{k-q} \| \|u\|_{H^{k+1}(Q)} \|. \quad (2.21)$$

Preuve.

(I) *est une conséquence de la coercivité de $a_s(.,.)$ sur $\mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$.*

2.1 Approximation par une méthode d'éléments finis continus d'un opérateur de type positif

Pour (II) supposons que : $\sum_{j=1}^M \alpha_j w_h^j = 0$, montrons que $\alpha_j = 0$. Par définition de \mathcal{W}_h ;

$$\forall j \exists \psi_h^j : w_h^j = \psi_h^j + \mathcal{A}\psi_h^j.$$

On pose $u_h = \sum_{j=1}^M \alpha_j \psi_h^j$, on déduit que :

$$(I + \mathcal{A})u_h = 0 \text{ et } u_h \in \mathcal{V}_h \subset V.$$

L'hypothèse (2.1) implique :

$$0 = a(u_h, u_h) \geq \|u_h\|^2.$$

Pour (III) voir (2.1.4) et l'estimation d'erreur voir (2.1.5).

Remarquons que l'on a prouvé :

$$\forall w \in \mathcal{W} \exists ! u \in \mathcal{V} : (I + \mathcal{A})u = w.$$

L'hypothèse (2.3) implique :

$$\forall u \in \mathcal{V} \exists u_n \in \mathcal{C}^{0,1}(\overline{Q}) : u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \text{ dans } \mathcal{V}.$$

On définit alors $g_n \in \mathcal{W}$ par :

$$(I + \mathcal{A})u_n = g_n.$$

On définit $u_n \in \mathcal{V}_h$ comme la solution de :

$$a_s(u_n, \psi_h) = (g_n, \psi_h + \mathcal{A}\psi_h); \forall \psi_h \in \mathcal{V}_h.$$

Pour h suffisamment petit, on a que :

$$\|g_{n_h}\| \leq C,$$

Chapitre 2. Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

Calculons :

$$\begin{aligned}
 ((I + A)(u - u_h), (I + A)\psi) &= a_s(u - u_h, \psi - \psi_h) + a_s(u - u_h, \psi_h) \\
 &= a_s(u - u_h, \psi - \psi_h) + a_s(u, \psi_h) - a_s(u_{n_h}, \psi_h) \\
 &= a_s(u - u_h, \psi - \psi_h) + a_s(u - u_{n_h}, \psi_h),
 \end{aligned}$$

alors :

$$(w - w_h, (I + A)\psi) \leq C \| \|u - u_h\| \| \|\psi - \psi_h\| \| + \| \|u - u_{n_h}\| \| \|\psi_h\| \| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0; \forall \psi \in \mathcal{V},$$

d'où :

$$\|w - w_h\| = \sup_{\substack{v \in \mathcal{W} \\ \|v\|=1}} (w - w_h, v) \leq C_1 \| \|u - u_{n_h}\| \| + C_2 \| \|\psi - \psi_h\| \| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

□

On s'intéresse maintenant à une autre approximation du problème (2.12) pour laquelle on ne supposera plus l'hypothèse (2.1) et (2.13).

Proposition 2.1.7. *Sous les hypothèses (2.2) et (2.3), pour $h \leq h_0$ il existe une unique $u_h \in \mathcal{V}_h$ solution de :*

$$\begin{cases} a^h(u_h, \psi_h) = F^h(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \mathcal{V}_h; \\ (\|u_h\|^2 + \|h^{\frac{1}{2}} \mathcal{A}u_h\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|. \end{cases} \quad (2.22)$$

De plus on a l'estimation d'erreur entre la solution de (2.12) dans $H^{k+1}(Q)$ et u_h

$$\|u - u_h\| \leq ch^{k-q+\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{k+1}(Q)}. \quad (2.23)$$

Preuve.

\mathcal{V}_h étant de dimension finie, F^h étant une forme linéaire continue sur \mathcal{V}_h , il suffit de démontrer l'inégalité de coercivité suivante pour avoir (2.22) :

$$a^h(u_h, u_h) = \|u_h\|^2 + h \|\mathcal{A}u_h\|^2 + 2h(u_h, \mathcal{A}u_h u_h) \geq (1 - 2h) \|u_h\|^2 + \frac{h}{2} \|\mathcal{A}u_h\|^2. \quad (2.24)$$

2.1 Approximation par une méthode d'éléments finis continus d'un opérateur de type positif

Montrons maintenant la formule (2.23), on a :

$$a^h(u_h, \psi_h) = (f, \psi_h + h\mathcal{A}\psi_h) = a(\psi, \psi_h + h\mathcal{A}\psi_h),$$

d'où la consistance :

$$a^h(u_h - u, \psi_h) = 0; \quad \forall \psi_h \in \mathcal{V}_h.$$

On définit pour $u \in H^{k+1}(Q)$:

$$e = u - u_h,$$

et

$$e_h = u_h - \Pi_h u,$$

on a :

$$\begin{aligned} a^h(e, e) &= a^h(e, -e_h + u - \Pi_h u) \\ &= a^h(e, u - \Pi_h u), \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} (1 - 2h)\|e\|^2 + \frac{h}{2}\|\mathcal{A}e\|^2 &\leq ((I + \mathcal{A})e, (I + h\mathcal{A})(u - \Pi_h u)) \\ &= (e, u - \Pi_h u) + (h^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}e, \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}(u - \Pi_h u)) + h(e, \mathcal{A}(u - \Pi_h u)) \\ &\quad + h(\mathcal{A}e, \mathcal{A}(u - \Pi_h u)) \\ &\leq \frac{1}{4}\|e\|^2 + \|u - \Pi_h u\|^2 + \frac{h}{8}\|\mathcal{A}e\|^2 + \frac{2}{h}\|u - \Pi_h u\|^2 + \frac{h}{4}\|e\|^2 \\ &\quad + h\|\mathcal{A}(u - \Pi_h u)\|^2 + \frac{h}{8}\|\mathcal{A}e\|^2 + h\|\mathcal{A}(u - \Pi_h u)\|^2, \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{4}h\right)\|e\|^2 + \frac{h}{8}\|\mathcal{A}e\|^2 &\leq \left(1 + \frac{1}{h}\right)\|u - \Pi_h u\|_{H^q(Q)}^2 + Ch\|u - \Pi_h u\|^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{h}\right)\|u - \Pi_h u\|_{H^q(Q)}^2 + ch\|u - \Pi_h u\|_{H^q(Q)}^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne l'estimation (2.23). \square

2.2 Un problème de transport dans un domaine borne du plan

Soit $Q \subset \mathbb{R}^2$ l'ouvert défini par :

$$Q =]0, 1[\times]0, 1[.$$

On pose $\mathcal{W} = L^2(Q)$ et on définit l'opérateur \mathcal{A} par :

$$\mathcal{A}u = \vec{v} \cdot \nabla u, \quad (2.25)$$

où $\vec{v} = (1, v)^T$ donné tel que $v \geq 0$.

On définit Q_+ les parties de ∂Q telles que :

$$Q_+ = \{(x, t) \in \partial Q; \vec{v} \cdot \vec{n} \geq 0\} \quad (2.26)$$

$$Q_- = \{(x, t) \in \partial Q; \vec{v} \cdot \vec{n} \leq 0\} \quad (2.27)$$

où \vec{n} est la normale sortante de Q .

Avant de pouvoir définir l'espace \mathcal{V} on a besoin d'un résultat de trace, pour que le problème suivant puisse être formulé dans le formalisme de la section 2.1.

Pour tout f donné dans W , pour tout u_0 et h_0 donné dans $L^2(0, 1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in L^2(Q) \text{ tel que :} \\ u(x, t) + \mathcal{A}u(x, t) = f(x, t); \text{ dans } Q, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = h_0(t). \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Tout d'abord résolvons par la méthode des caractéristiques le problème suivant :

2.2 Un problème de transport dans un domaine borne du plan

Pour $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in L^2(0,1)$ et $h_0 \in L^2(0,1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \text{ solution de :} \\ u(x,t) + \mathcal{A}u(x,t) = f(x,t); \text{ dans } \mathcal{D}'(Q), \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u(0,t) = h_0(t). \end{array} \right. \quad (2.29)$$

La méthode des caractéristiques consiste à utiliser un changement d'inconnue afin que l'équation (2.29) se réduise à une équation différentielle ordinaire. Pour cela on paramètre par τ de la manière suivante :

Soit (x_0, t_0) fixé sur Q_- ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\tau} t(\tau) = 1, \\ t(0) = t_0. \end{array} \right. \quad (2.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\tau} x(\tau) = v, \\ x(0) = x_0. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\tau} z(\tau) = f(x(\tau), t(\tau)), \\ z(0) = u(x_0, t_0). \end{array} \right. \quad (2.32)$$

En résolvant (2.30), (2.31), (2.32) et en posant $u(x(\tau), t(\tau)) = z(\tau)$, on peut démontrer facilement que l'on a :

$$u(x,t) = \left\{ \begin{array}{l} g_0(t - \frac{x}{v}) + \int_0^{\frac{x}{v}} f(vs, s + t - \frac{x}{v}) ds; \text{ si } (x,t) \in A \\ h_0(t - xv) + \int_0^t f(vs + x - vt, s) ds; \text{ si } (x,t) \in B. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

et que $u(x,t) \in L^2(Q)$, $\mathcal{A}u(x,t) \in L^2(Q)$.

On introduit maintenant un changement de variables qui permet d'exprimer $\partial_t + v\partial_x$ sous la forme ∂_ξ et on garde comme autre paramètre t_0 , l'abscisse curviligne de Γ_x .

Chapitre 2. Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

On pose :

$$\begin{cases} \xi = x, \\ t_0 = t - \frac{1}{v}\xi. \end{cases} \quad (2.34)$$

Le domaine Q est transformé en \tilde{Q} ;

On pose $u(x, t) = \Phi(\xi, t_0)$. Avec un calcul simple on montrant que :

$$\begin{aligned} \partial_\xi \Phi(\xi, t_0) &= \partial_t u(x, t) \frac{\partial t}{\partial \xi} + \partial_x u(x, t) \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ &= \frac{1}{v} \partial_t u(x, t) + u(x, t), \end{aligned}$$

d'où

$$\partial_\xi \Phi(\xi, t_0) = \frac{1}{v} f(x, t). \quad (2.35)$$

On intègre (2.35) par rapport à ξ de 0 à ξ :

$$\Phi(\xi, t_0) - \Phi(0, t_0) = \int_0^\xi \frac{1}{v} f(x, t) d\xi.$$

Ce qui permet d'exprimer $\Phi(0, t_0)$ en fonction de f et $\Phi(\xi, t_0)$:

$$\Phi(0, t_0) = \Phi(\xi, t_0) - \int_0^\xi \frac{1}{v} f(x, t) d\xi.$$

On prolonge par 0 les fonctions Φ et f et on note ces prolongement $\tilde{\Phi}$, \tilde{f} .

$$\Phi(0, t_0) = u(t_0) = \Phi(\xi, t_0) - \int_0^\xi \frac{1}{v} f(x, t) d\xi.$$

On a :

$$u^2(t_0) \leq 2\Phi^2(\xi, t_0) + 2 \int_0^{\bar{\xi}} \left| \frac{1}{v} f(x, t) \right|^2 d\xi,$$

où $\bar{\xi} = v(1 - t_0)$ pour tout $t_0 \in [0, 1]$.

2.3 Application numérique

Alors :

$$\int_0^1 u^2(t_0) dt_0 \leq 2 \int_0^1 \tilde{\Phi}^2(\xi, t_0) dt_0 + 2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{v} |\tilde{f}(x, t)|^2 d\xi dt.$$

Finalement :

$$\|u_0\|_{L^2(\Gamma_x)}^2 \leq 2\|\Phi\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{2}{v}\|f\|_{L^2(Q)}^2.$$

On donne maintenant le résultat du trace suivant :

Lemme 2.2.1. *Il existe une application trace γ_{\pm} linéaire continue :*

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm} : \{u \in L^2(Q); \mathcal{A}u \in L^2(Q)\} &\longrightarrow L_{loc}^2(Q_{\pm}) \\ u &\longmapsto \gamma_{\pm} = u|_{Q_{\pm}}. \end{aligned}$$

De plus γ_{-} est surjectif.

Preuve.

Se servir de se qui a été fait précédemment. On définit alors l'espace \mathcal{V} par :

$$\mathcal{V} = \{u \in L^2(Q); \mathcal{A}u \in L^2(Q) \text{ et } \gamma_{-}(u) = 0\}.$$

On suppose maintenant que $h_0 = 0$ et que u_0 est régulière et vérifie : $u_0(0) = 0$, et relever $u_0(t)$ en $U(x, t) = u_0(t)$ et translater le problème c'est-à-dire on considère $\tilde{u} = u - U(x, t)$, alors le problème (2.28) possède une solution régulière et sa régularité est donnée en fonction de celle de g_0 . \square

2.3 Application numérique

On se donne v et u_0 , on maille le domaine Q avec des rectangles K . c'est-à-dire on se donne les points :

$$t_n = nT; \quad 0 \leq n \leq N, \quad T = \frac{1}{N},$$

Chapitre 2. Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

et les points :

$$x_j = jh; \quad 0 \leq j \leq M, \quad h = \frac{1}{M},$$

et les rectangles K sont constitués par :

$$K_j^n = [x_j, x_{j+1}] \times [t_n, t_{n+1}].$$

On pose :

$$\tau_h = \cup K_j^n.$$

On définit \mathcal{V}_h par :

$$\mathcal{V}_h = \{u \in \mathcal{C}^0(\overline{Q}); u|_{Q_-} = 0, u|_K \in \mathbb{P}_1[K]; \forall K \in \tau_h\},$$

où $\mathbb{P}_1[K] = \{atx + bt + cx + d\}$. Les fonctions de base de \mathcal{V}_h seront les ψ_h^l qui valent un au noeud l et zéro aux autres noeud lorsque l décrit l'ensemble des noeuds du maillage.

2.4 La méthode de masse singulière pour un problème de transport

Une méthode de réduction d'ordre en espace est proposée pour traiter le cas d'un opérateur de transport dégénéré, c'est-à-dire le cas où les coefficients de l'opérateur du transport peuvent s'annuler. Il s'agit donc, pour : $f = \begin{cases} f_1(x, t) & 0 < x < \frac{1}{2} \\ f(x) & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ et u_0 donnés, en définissant $\Omega_1 = (0, \frac{1}{2}) \times (0, 1)$ et $\Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1)$, de calculer u solution de :

$$(T) \begin{cases} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t u(x, t) + \partial_x u(x, t) + u(x, t) = f(x, t) \text{ dans } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ u(x, 0) = u_0(x); \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad u(0, t) = 0; \quad 0 < t < 1. \end{cases} \quad (2.36)$$

2.5 Existence et unicité de solutions

Définissons $\partial\Omega_-$ la frontière entrante du domaine par :

$$\partial\Omega_- = \{(x, t) \in \Omega : (x, t) \in \{0\} \times (0, 1) \cup (0, \frac{1}{2}) \times \{0\}\},$$

et notons par \mathcal{A} l'opérateur différentiel défini par :

$$\varphi \mapsto \mathcal{A}\varphi = 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x)\partial_t\varphi + \partial_x\varphi + \varphi.$$

La norme du graphe associée à l'opérateur \mathcal{A} est notée $|||\cdot|||$ et est définie par :

$$|||\varphi|||^2 = \|\mathcal{A}\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

L'espace fonctionnel \mathcal{H} est défini comme la fermeture pour la norme $|||\cdot|||$ du sous espace fermé des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compacte dans $\bar{\Omega}$ ayant une trace nulle sur $\partial\Omega_-$:

$$\mathcal{H} = \overline{\{\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}); \varphi|_{\partial\Omega_-} = 0\}}^{|||\varphi|||}.$$

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons la forme bilinéaire a associée à l'opérateur \mathcal{A} et définie par :

$$\begin{aligned} a: \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) = \int_{\Omega} \mathcal{A}u \cdot v dx dt. \end{aligned}$$

Donnons maintenant un résultat technique :

Lemme 2.5.1.

$$\forall v \in \mathcal{H} : \quad a(v, v) \geq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.37)$$

Preuve.

Pour $v \in \mathcal{H}$ nous avons :

$$\begin{aligned} a(v, v) &= (\mathcal{A}v, v) = \int_{\Omega} \mathcal{A}v \cdot v dx dt \\ &= \int_{\Omega} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x)\partial_t v \cdot v + \partial_x v \cdot v + v^2 dx dt \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x)\partial_t v^2 dx dt + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \partial_x v^2 dx dt + \int_{\Omega} v^2 dx dt. \end{aligned}$$

Chapitre 2. Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

Soit encore

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{2} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t v^2 dx dt &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t v^2 dt dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) v^2(x, 1) dx - \int_0^1 \frac{1}{2} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) v(x, 0) dx, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \partial_x v^2 dx dt &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \partial_x v^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v^2(1, t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 v(0, t) dt. \end{aligned}$$

Puisque $v(x, 0) = 0$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, et $v(0, t) = 0$ pour $0 \leq t \leq 1$ il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t v^2 dx dt &\geq 0, \\ \int_{\Omega} \partial_x v^2 dx dt &\geq 0. \end{aligned}$$

On déduit alors :

$$a(v, v) = \int_{\Omega} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t v \cdot v + \partial_x v \cdot v + v^2 dx dt \geq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2; \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

□

Maintenant, nous voulons montrer l'existence et l'unicité de solutions au problème **(T)**. Pour cela montrons quelques propriétés de l'opérateur \mathcal{A} .

Lemme 2.5.2. $\mathcal{A} : \mathcal{H} \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est un opérateur linéaire continu, à image fermé, et injectif.

Preuve.

Soit $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$ une suite telle que

$$\|\mathcal{A}u_n - w\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

montrons que :

$$\exists u \in \mathcal{H} \text{ tel que } u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \text{ et } \mathcal{A}u = w.$$

2.5 Existence et unicité de solutions

On a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u_m\|_{L^2(\Omega)} &= \|\mathcal{A}(u_n - u_m)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \sup_{\substack{w \in L^2(\Omega) \\ w \neq 0}} (\mathcal{A}(u_n - u_m), w) \\ &\geq \|u_n - u_m\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

donc $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ ce qui implique l'existence de u tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$. L'injection $L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ nous assure que cette suite converge au sens des distributions. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nous avons d'après le lemme 2.5.1 :

$$\left| \int_{\Omega} (\mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u) \varphi \, dx \, dt \right| \leq \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nous en déduisons $\mathcal{A}u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par ailleurs,

$$\mathcal{A}u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w \text{ dans } L^2(\Omega),$$

donc dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. L'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ permet de conclure que $\mathcal{A}u = w$ dans $L^2(\Omega)$.

Montrons maintenant que \mathcal{A} est injectif, soit $u \in \mathcal{H}$ avec $\|u\| = 1$ alors :

$$\|\mathcal{A}u\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{w \in L^2(\Omega), \|w\|_{L^2(\Omega)}=1} (\mathcal{A}u, w).$$

Par ailleurs,

$$\sup_{w \in L^2(\Omega), \|w\|_{L^2(\Omega)}=1} (\mathcal{A}u, w) \geq \frac{(\mathcal{A}u, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \geq 1.$$

Si $\mathcal{A}u = 0$ alors $u = 0$. \square

Lemme 2.5.3. L'adjoint de \mathcal{A} , \mathcal{A}^* vérifie :

$$\text{Ker}(\mathcal{A}^*) = \{0\}. \tag{2.38}$$

Preuve.

Soit $g \in \text{Ker}(\mathcal{A}^*)$, alors pour tout $u \in \mathcal{H}$:

$$(\mathcal{A}^*g, u) = 0.$$

Comme $g \in \mathcal{H}$, nous en déduisons que $(\mathcal{A}^*g, g) = 0$. En raisonnant comme au lemme 2.5.1 nous avons :

$$0 = (\mathcal{A}^*g, g) \geq \|g\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

□

Théorème 2.5.4.

Pour f une fonction régulière donnée, il existe un unique $u \in \mathcal{H}$ solution du problème (\mathbf{T}) .

Preuve.

Le théorème de l'image fermée de Banach permet d'écrire :

$$\text{Im}(\mathcal{A}) = (\text{Ker}(\mathcal{A}^*))^\perp = L^2(\Omega).$$

Cela montre que \mathcal{A} est un isomorphisme de \mathcal{H} dans $L^2(\Omega)$. □

2.6 Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

Pour le problème (\mathbf{T}) nous introduisons une semi-discrétisation à l'aide d'élément finis en espace. Puis nous appliquons la méthode de la matrice de masse singulière. La méthode de la matrice de masse singulière consiste à remplacer la quantité $\partial_t u$ par une projection dans un autre sous espace différent de l'espace

2.6 Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière

dans lequel u est recherché. La projection est au sens de L^2 . Dans ce qui suit, commençons par introduire une formulation mixte du problème (\mathbf{T}) . Définissons les espaces :

$$V = \{ \varphi \in H^1(0,1); \varphi(0) = 0 \}, \quad H = L^2(0,1).$$

Introduisons les formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ définie sur $V \times H$ et $b(\cdot, \cdot)$ définie sur $V \times L^2(0, \frac{1}{2})$ par :

$$a(v, w) = \int_0^1 \partial_x v(x) w(x) + v(x) w(x) dx, \quad (2.39)$$

$$b(v, \varphi) = \int_0^{\frac{1}{2}} w(x) \varphi(x) dx. \quad (2.40)$$

Dans ce qui suit, l'opérateur de restriction est défini.

Lemme 2.6.1. *L'opérateur $B : V \rightarrow L^2(0, \frac{1}{2})'$ associé à la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ est l'opérateur linéaire continu de restriction au segment $[0, \frac{1}{2}]$. Nous avons $\text{Ker}(B) = {}_0H^1(\frac{1}{2}, 1)$ et l'image de son adjoint est donnée par $\text{Im}(B^*) = {}_0H^1(0, \frac{1}{2})$ où l'indice 0 indique que seules les fonctions s'annulant en la borne inférieure de l'intervalle sont considérées.*

Maintenant introduisons une formulation variationnelle pour le problème (\mathbf{T}) . Nous notons aussi par B l'opérateur de restriction de H dans $L^2(0, \frac{1}{2})$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u(t) \in C^0([0,1]; V); \quad u(0) = u_0, \quad \text{satisfaisant :} \\ \langle B\dot{u}(t), Bw \rangle_{L^2(0, \frac{1}{2})', L^2(0, \frac{1}{2})} + a(u(t), w) = (f(t), w); \quad \forall w \in H, \end{array} \right. \quad (2.41)$$

où \dot{u} représente la dérivée par rapport au temps. Décomposons l'espace V comme :

$$V = \text{Ker}(B) \oplus (\text{Ker}(B))^\perp = \text{Ker}(B) \oplus \text{Im}(B^*).$$

Chapitre 2. Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

La forme bilinéaire $a(.,.)$ vérifie les conditions inf-sup et nous en déduisons que le problème (2.41) est bien posé. En effet, soit $u \in V$ alors il existe $c > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^1 \partial_x u(x) u(x) dx + \int_0^1 u^2(x) dx, \\ &\geq c \|u\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, il est clair que pour tout u dans V ,

$$\sup_{w \in L^2(0,1)} \frac{a(u, w)}{\|w\|_{L^2(0,1)}} \geq \frac{a(u, u)}{\|u\|_{L^2(0,1)}} \geq c \|u\|_{L^2(0,1)}, \quad (2.42)$$

d'où nous déduisons l'inégalité

$$\inf_{u \in V, u \neq 0} \sup_{w \in L^2(0,1), w \neq 0} \frac{a(u, w)}{\|w\|_{L^2(0,1)} \|u\|_V} \geq c. \quad (2.43)$$

2.6.1 Les espaces d'éléments finis utilisés

Pour approcher à l'aide d'une méthode d'éléments finis une équation de transport, nous utilisons une méthode de Petrov-Galerkin c'est-à-dire que les fonctions tests ne sont pas choisies dans le même espace que celui pour la fonction inconnue. La construction d'une méthode d'éléments finis, nécessite la donnée d'un maillage, de noeuds et d'un espace de polynômes, qui doivent être choisis de manière cohérente. Nous avons choisi les éléments finis de type Lagrange, qui font intervenir comme "degrés de liberté" les valeurs de la fonction aux noeuds. Nous considérons le segment $(0,1)$ et notre but est d'introduire un espace d'approximation des fonctions définies sur $(0,1)$, ayant une base très simple de sorte que toute fonction dans $\mathcal{C}^0(0,1)$ se décompose facilement sur cette base. Nous commençons par l'espace associé à l'élément fini appelé \mathbb{P}_1 . Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé, posons $M = 2m$, $h = \frac{1}{2m}$ et définissons $x_i = ih$, pour $0 \leq i \leq M$. Nous avons la partition de $[0,1]$ où $x = \frac{1}{2}$ est un point de celle-ci :

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{M-1} < x_M. \quad (2.44)$$

2.6 Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière

Nous notons P_1 l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à 1 :

$$\mathbb{P}_1 = \{p : p(x) = ax + b; \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Nous introduisons alors l'espace d'approximation V_h défini par :

$$V_h = \{w \in \mathcal{C}^0(0,1) : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, w(0) = 0; \quad 0 \leq i \leq M-1\}. \quad (2.45)$$

L'espace V_h , défini par (2.45), est un espace vectoriel et une base de cet espace est donnée par les fonctions φ_i , $1 \leq i \leq M$, telles que $\varphi_i \in V_h$ et $\varphi_i(x_k) = \delta_{i,k}$ (où δ désigne le symbole de Kronecker). Ainsi,

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La méthode des éléments finis permet de construire différents espaces d'approximation, suivant l'élément fini utilisé. Soit P_0 l'espace des polynômes de degré 0 (il s'agit donc des fonctions constantes). Pour la partition donnée en (2.44), nous considérons l'espace d'approximation suivant :

$$\mathcal{M}_h = \{w \in L^2(0, \frac{1}{2}) : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_0, \quad 0 \leq i \leq m-1\}. \quad (2.46)$$

Étant donnée la partition (2.44) de $[0,1]$, l'espace d'approximation H_h est défini par :

$$H_h = \{w \in H : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_0, \quad 0 \leq i \leq M-1\}. \quad (2.47)$$

Finalement l'espace H_h utilisé dans l'approximation de Petrov-Galerkin est celui engendré par des fonctions notées $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_M$ et définies par :

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Chapitre 2. Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

On cherche une approximation de la solution du problème (2.36) dans l'espace V_h , et on choisit comme fonction test les fonctions de base de H_h . Soit maintenant $\mathcal{M}_h = \text{vect}\{\psi_i\}; i = 1, \dots, m$ un sous espace de $L^2(0, \frac{1}{2})$ où, les ψ_i sont P_0 sur chaque intervalle de la partition (2.44) restreinte à $(0, \frac{1}{2})$. Le problème approché que nous considérons s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, v_h) \in V_h \times \mathcal{M}_h : \\ (1_{[0, \frac{1}{2}]}(x)v_h, w_h) + a(u_h, w_h) = (f(t), w_h); \quad \forall w_h \in H_h, \\ (v_h, q_h) = (\partial_t u_h, q_h); \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Dans la suite, on appelle V_h l'espace d'approximation, et H_h l'espace des fonctions tests. Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M$ est une base de V_h , et $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ une base de \mathcal{M}_h , en développant u_h sur la base de V_h , et v_h sur la base de \mathcal{M}_h , nous pouvons écrire :

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^M u_j(t) \varphi_j(x), \quad v_h(x, t) = \sum_{k=1}^m v_k(t) \psi_k(x). \quad (2.49)$$

Nous injectons ces expressions respectivement dans les formules (2.48). On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \sum_{k=1}^m 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) v_k(t) \psi_k(x) w_h(x) dx + \int_0^1 \sum_{j=1}^M u_j(t) \partial_x \varphi_j(x) w_h(x) dx \\ \quad + \int_0^1 \sum_{j=1}^M u_j(t) \varphi_j(x) w_h(x) dx = (f(t), w_h(x)); \quad \forall w_h \in H_h, \\ \int_0^1 \sum_{k=1}^m v_k(t) \psi_k(x) q_h(x) dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^M \dot{u}_j(t) \varphi_j(x) q_h(x) dx; \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \end{array} \right.$$

Choisissons $w_h(x) = \tilde{\varphi}_i$ et $q_h(x) = \psi_l$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m v_k(t) \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \psi_k(x) \tilde{\varphi}_i dx + \sum_{j=1}^M u_j(t) a(\varphi_j, \tilde{\varphi}_i) = (f(t), \tilde{\varphi}_i); \quad \forall \tilde{\varphi}_i \in H_h, \\ \sum_{k=1}^m v_k(t) \int_0^1 \psi_k(x) \psi_l(x) dx = \sum_{j=1}^M \dot{u}_j(t) \int_0^1 \varphi_j(x) \psi_l(x) dx; \quad \forall \psi_l \in \mathcal{M}_h. \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Définissons maintenant les matrices liés aux opérateurs différentiels :

2.6 Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière

$$\begin{aligned}
 B_{1ki} &= \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]} \psi_k(x) \tilde{\varphi}_i(x) dx; & 0 \leq k \leq m, \quad 0 \leq i \leq M, \\
 B_{2lj} &= \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]} \varphi_j(x) \psi_l(x) dx; & 0 \leq l \leq m, \quad 0 \leq j \leq M, \\
 A_{ij} &= \int_0^1 \partial_x \varphi_j(x) \tilde{\varphi}_i(x) + \varphi_j(x) \tilde{\varphi}_i(x) dx; & 0 \leq i, j \leq M, \\
 \mathcal{C}_{lk} &= \int_0^1 \psi_k(x) \psi_l(x) dx; & 0 \leq l, k \leq m.
 \end{aligned}$$

Introduisons $P_{H_h} : H \rightarrow H_h$ un projecteur au sens L^2 , et définissons $F(t) = P_{H_h} f(t)$. Pour $u_0 \in V_h$ donné la forme matricielle du système (2.48) s'écrit :

$$\begin{cases} B_1^t v_h(t) + A u_h(t) = F(t); & \forall t \in]0, 1], \\ \mathcal{C} v_h(t) = B_2 \dot{u}_h(t); & \forall t \in]0, 1], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.51)$$

L'approximation des éléments de la matrice B_1 par de formule d'intégration numérique ou par projection représente exactement les éléments de la matrice B_2 .

En effet, on peut écrire encore les éléments de B_1 par :

$$B_{1ki} = \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]} \psi_k(x) \tilde{\varphi}_i(x) dx = \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]} \psi_k(x) P_{H_h} \varphi_i(x) dx;$$

Ce qui donne :

$$B_1^t = (B_2 P_{H_h})^t = B^t \quad \text{et} \quad B_2 = B_2 P_{H_h} = B,$$

le système matricielle (2.51) devient :

$$\begin{cases} B^t v_h(t) + A u_h(t) = F(t); & \forall t \in]0, 1], \\ \mathcal{C} v_h(t) = B \dot{u}_h(t); & \forall t \in]0, 1], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Remarque 2.6.2. Nous aurions pu utiliser une méthode décentrée (voir par exemple [3]). L'espace H_h est alors défini avec des polynômes de degré 2, évidemment les deux espaces V_h et H_h sont de même dimension finie.

2.6.2 Schémas d'Euler implicite et explicite en temps

L'inconnue v_h peut être éliminée; on a $v_h(t) = \mathcal{C}^{-1}B\dot{u}_h(t)$ et donc en notant :

$$M = B^t \mathcal{C}^{-1} B,$$

ceci près que la matrice de masse M peut être singulière, où \mathcal{C} est la matrice de masse obtenue à l'aide de l'élément fini de \mathcal{M}_h ; on a bien entendu que \mathcal{C} est une matrice inversible et B est la matrice construite à partir de H_h et \mathcal{M}_h . La condition de type inf-sup :

$$\inf_{w_h \neq 0} \sup_{u_h \neq 0} a(u_h, w_h) \geq \delta > 0,$$

entre les deux espaces éléments finis assure que le problème (2.48) soit bien posé pour cette semi-discrétisation.

En effet, pour w_h fixé de norme L^2 égale à 1, montrons l'existence de u_h telle que :

$$\sup_{u_h \neq 0} \frac{a(u_h, w_h)}{|u_h|_1} \geq \delta,$$

Posons $u = \int_0^x w_h(s) ds$, $|u|_1 \leq \|w_h\|_{L^2(0,1)}$ alors :

d'où, il existe h_0 tel que l'inégalité est satisfaite pour $h \leq h_0$.

Pour simplifier le système (2.52) et comme la matrice \mathcal{C} est inversible, on élimine v_h on obtient :

$$B^t \mathcal{C}^{-1} B \dot{u}_h(t) + A u_h(t) = F(t). \quad (2.53)$$

Maintenant nous introduisons une discrétisation en temps. Pour cela définissons :

$$\begin{cases} A_{ij}^- = \int_0^{\frac{1}{2}} \partial_x \varphi_j(x) \psi_i + \varphi_j(x) \psi_i(x) dx, \\ A_{ij}^+ = \int_{\frac{1}{2}}^1 \partial_x \varphi_j(x) \psi_i + \varphi_j(x) \psi_i(x) dx; \quad 1 \leq i, j \leq M, \\ B_{ij} = \int_0^1 P_{H_h} \varphi_j(x) q_i(x) dx; \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq M, \\ \mathcal{C}_{ij} = \int_0^{\frac{1}{2}} q_j(x) q_i(x) dx; \quad 1 \leq i, j \leq m. \end{cases} \quad (2.54)$$

2.6 Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière

Pour K fixé nous définissons $\Delta t = \frac{1}{K}$ et la suite de temps $t_k = k\Delta t$; $0 \leq k \leq K$, et pour u_h^0 donné, nous avons le schéma implicite d'Euler :

$$B^t \mathcal{C}^{-1} B u_h^{k+1} + \Delta t A u_h^{k+1} = \Delta t F(t_{k+1}) + B^t \mathcal{C}^{-1} B u_h^k. \quad (2.55)$$

Remarquons que $B^t \mathcal{C}^{-1} B + \delta t A$ est inversible puisque c'est la somme d'une matrice semi-définie positive et d'une matrice définie positive.

Le schéma explicite d'Euler s'écrit :

$$B^t \mathcal{C}^{-1} B u_h^{k+1} + A^+ u_h^{k+1} = \Delta t F^-(t_k) + B^t \mathcal{C}^{-1} B u_h^k - \Delta t A^- u_h^k + F^+(t_{k+1}), \quad (2.56)$$

avec

$$F^-(t) = P_{H_h} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) f(t, x), \quad F^+(t) = P_{H_h} 1_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) f(t, x).$$

2.6.3 Résultats numériques pour un exemple jouet

Nous terminons ce chapitre avec un exemple simple. Le second membre est donné par : $f(x, t) = \begin{cases} (x - 1/2)^2 t^2 + x^2; & 0 < x < 1/2, \\ x^2; & 1/2 < x < 1, \end{cases}$; et la condition initiale par $u_0(x) = x^2$; $0 < x < 1/2$. Nous donnons une courbe de convergence pour le problème (**T**) (en fonction de dt sur la figure 2.1 en échelle lagarithmique). La ligne est de droite de référence correspondant au fonction dt , on observe donc un phénomène de convergence linéaire présente par le schéma (2.56).

Chapitre 2. Approximation d'un opérateur de type positif et problème de transport perturbé

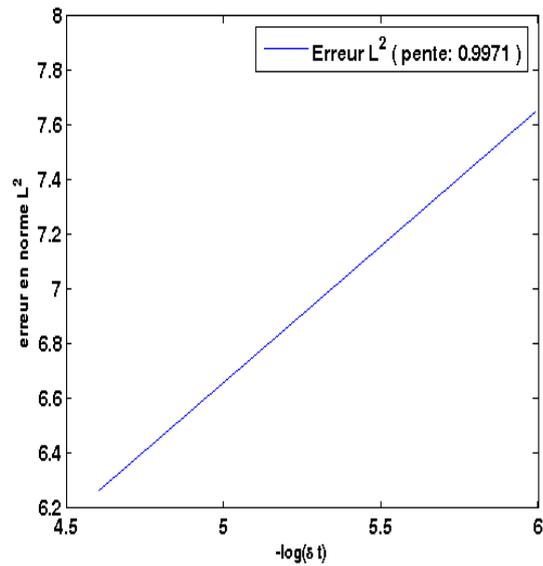


FIGURE 2.1 – Norme discrète L^2 de l'erreur en fonction du pas dt par la méthode d'Euler explicite.

Remarquons que d'autres conditions aux limites peuvent être traitées sur $\partial\Omega_-$.

Chapitre 3

Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

3.1 Introduction

Une méthode de masse singulière en espace est proposée pour traiter le cas d'un opérateur parabolique dégénéré, c'est-à-dire le cas où le coefficient de l'opérateur différentiel en temps peut s'annuler. La méthode présentée est inspirée de la dynamique singulière introduite dans [12]. Nous considérons le cas unidimensionnel où un coefficient s'annule sur un seul intervalle avec des conditions aux limites et initiales triviales par soucis de simplicité. Des conditions initiales et aux limites plus générales peuvent être traitées. Notons que le modèle que nous considérons est utilisé en dynamique des populations dans le cas d'une dynamique lente-rapide [9], ou pour des problèmes de modélisation de plantes en biologie [2]. Lorsque le coefficient devant l'opérateur en temps s'annule, il est bien connu que cela pose des problèmes d'oscillations dans un voisinage de la zone où il s'annule. On pourra consulter, par exemple [7], [10] p. 115 où une méthode des moindres carrés est utilisée pour résoudre un problème parabolique dégénéré.

3.2 Existence et unicité de solutions aux problèmes P_ϵ

Il s'agit donc, pour $f(x, t) = \begin{cases} f_1(x, t) & 0 < x < \frac{1}{2} \\ f_2(x) & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ régulière et u_0 donnés, en définissant $\Omega_1 = (0, \frac{1}{2})$, $\Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1)$ et $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, de calculer u solution de :

$$(P_\epsilon) \begin{cases} \epsilon(x) \partial_t u(x, t) - \partial_{x^2}^2 u(x, t) = f(x, t) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x); & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1; & t > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \epsilon & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

3.2 Existence et unicité de solutions aux problèmes P_ε

Afin d'introduire le problème approché nous avons besoin d'utiliser une formulation variationnelle du problème (P_ε). Pour cela multiplions la première équation par une fonction $w(x)$, supposée une fois continûment dérivable et intégrons entre $x = 0$ et $x = 1$. Nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(x) \partial_t u(x, t) w(x) dx - \int_{\Omega} \partial_{x^2}^2 u(x, t) w(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) w(x) dx. \quad (3.2)$$

En intégrant par parties le seconde terme de (3.2) et en supposant $w(0) = w(1) = 0$, nous déduisons :

$$\int_{\Omega} \varepsilon(x) \partial_t u(x, t) w(x) dx + \int_{\Omega} \partial_x u(x, t) \partial_x w(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) w(x) dx. \quad (3.3)$$

En translatant u pour prendre en compte la condition en $x = 1$, cela revient à modifier f . Donc nous pouvons considérer $u \in H_0^1(\Omega)$ et nous ne changeons pas les notations.

On adopte comme espace fonctionnel l'espace $H_0^1(\Omega)$ et nous définissons la forme bilinéaire :

$$a(u(t), w) = \int_{\Omega} \partial_x u(x, t) \partial_x w(x) dx, \quad (3.4)$$

il est clair que la forme bilinéaire a est symétrique, continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$.

La semi-discrétisation de (3.3) est donc l'approximation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varepsilon(x) u_h(t) w_h(x) dx + a(u_h(t), w_h) = \int_{\Omega} f(t) w_h(x); \forall w_h \in V_h, \\ u_h(0) = u_h^0. \end{cases} \quad (3.5)$$

On introduit une base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ de l'espace $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ et on cherche la fonction u_h sous la forme :

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^N u_h^j(t) \varphi_j(x). \quad (3.6)$$

Alors, en posant

$$u_h^0 = \sum_{j=1}^N u_h^j(0) \varphi_j(x); \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3.7)$$

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

Le problème (3.5) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \epsilon(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \frac{du_h^j}{dt}(t) + \sum_{j=1}^N a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) u_h^j(t) = \int_{\Omega} f(t) \varphi_i(x) dx; \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.8)$$

Introduisant la matrice de masse \mathcal{K}_h définie par :

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = \int_{\Omega} \epsilon(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx; \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad (3.9)$$

et la matrice de rigidité \mathcal{R}_h définie par :

$$(\mathcal{R}_h)_{ij} = a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)); \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (3.10)$$

L'approximation variationnelle (3.5) est équivalente au système linéaire d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_h \frac{du_h}{dt}(t) + \mathcal{R}_h u_h(t) = F_h(t); & 0 < t < T, \\ u_h(0) = u_h^0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Le problème (3.11) est bien posé c'est-à-dire d'après la construction de l'espace V_h , comme la matrice de masse est strictement diagonalement dominante on peut vérifier que :

$$(u_h, \mathcal{K}_h u_h) \geq ch \sum_{j=1}^N u_j^2; \quad c > 0. \quad (3.12)$$

Donc la matrice de masse \mathcal{K}_h est inversible. D'autre part la coercivité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ entraîne le caractère défini positif de la matrice de rigidité \mathcal{R}_h , et donc son inversibilité. En effet, pour tout vecteur $u_h \in V_h$, on a

$$(\mathcal{R}_h u_h, u_h) \geq c |u_h|_1^2, \quad (3.13)$$

où $|\cdot|_1$ désigne la semi-norme H^1 :

$$|\varphi|_1^2 = \int_0^1 \varphi'(x)^2 dx. \quad (3.14)$$

De même, la symétrie de $a(u, v)$ implique celle de \mathcal{R}_h .

3.2 Existence et unicité de solutions aux problèmes P_ϵ

Si on introduit la nouvelle fonction :

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Omega_1, \\ 0 & \text{sur } \Omega_2, \end{cases}$$

on peut réécrire le problème (3.1) sous la forme :

$$(P_0) \begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_{x^2}^2 u(x,t) = f_1(x,t) & \text{dans } \Omega_1 \times (0,T), \\ -\partial_{x^2}^2 u(x,t) = f_2(x) & \text{dans } \Omega_2 \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x); \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1; \quad t > 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Nous voulons maintenant étudier l'existence et l'unicité de solutions au problème (P_0) .

Notons :

$$b(u, w) : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega_1) \longrightarrow \mathbb{R},$$

la forme bilinéaire associée à l'opérateur de projection sur $L^2(\Omega_1)$ pour le produit scalaire de L^2 :

$$b(w, \varphi) = \int_{\Omega_1} w(x)\varphi(x)dx. \quad (3.16)$$

Encore une fois, nous pouvons introduire un opérateur linéaire :

\mathfrak{B}

: $H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega_1)'$, $\int_{\Omega} \mathfrak{B}u(x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega_1} u(x)\varphi(x)dx = b(u, \varphi); \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega_1)$.

Comme nous le verrons, les propriétés de l'opérateur \mathfrak{B} sont fondamentales dans l'étude du problème, nous caractériserons l'image de \mathfrak{B} notée $Im(\mathfrak{B})$, et son noyau $Ker(\mathfrak{B})$. Le problème (3.15) se formule :

Trouver $(u, v) \in \mathcal{C}^0(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0, T, L^2(\Omega)) \times \mathcal{C}^0(0, T, L^2(\Omega_1))$ vérifiant :

$$\begin{cases} (\mathfrak{B}^*v, w)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + a(u(t), w) = (f(t), w)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ (v, q)_{L^2(\Omega_1)} = (\mathfrak{B}\dot{u}(t), q)_{L^2(\Omega_1)}; \quad \forall q \in L^2(\Omega_1). \end{cases} \quad (3.17)$$

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

Lemme 3.2.1. *L'opérateur $\mathfrak{B} : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega_1)'$ associé à la forme bilinéaire $b(.,.)$ est l'opérateur linéaire continue de restriction à $\overline{\Omega_1}$. Nous avons $\text{Ker}(\mathfrak{B}) = H_0^1(\Omega_2)$ et l'image de son adjoint est donnée par $\text{Im}(\mathfrak{B}^*) = {}_0H^1(\Omega_1)$ où l'indice 0 à gauche signifie que les fonctions s'annulent en l'extrémité gauche de l'intervalle.*

En effet, \mathfrak{B} est un opérateur linéaire continu :

$$\|\mathfrak{B}w\|_{L^2(\Omega_1)} \leq s_p |w|_1, \quad (3.18)$$

où s_p est la constante de Poincaré pour ${}_0H^1(\Omega_1)$, et $|w|_1$ est la semi-norme de $H^1(\Omega)$.

Lemme 3.2.2. *Nous avons :*

$$\text{Ker}(\mathfrak{B}^*) = \{0\}. \quad (3.19)$$

De plus l'opérateur \mathfrak{B}^ est inversible sur $\text{Im}(\mathfrak{B}) = (\text{Ker}(\mathfrak{B}^*))^\perp$.*

Preuve.

Montrons que $\forall \varphi \in L^2(\Omega_1)$, $\varphi \neq 0$ alors :

$$\sup_{w \in H_0^1(\Omega)} b(w, \varphi) \geq c_1 \|\varphi\|_{L^2(\Omega_1)}. \quad (3.20)$$

Soit $\varphi \neq 0$ fixée dans $L^2(\Omega_1) \subset L^2(\Omega)$, et comme $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ donc il existe une suite $w_n \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$w_n \longrightarrow \varphi \text{ dans } L^2(\Omega),$$

implique :

$$\|w_n\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega_1)},$$

alors pour n suffisamment grand on a :

$$b(w_n, \varphi) = \int_{\Omega_1} w_n(x) \varphi(x) dx \geq \|\varphi\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - \varepsilon,$$

3.2 Existence et unicité de solutions aux problèmes P_ε

ce qui donne :

$$\sup_{w \in H_0^1(\Omega)} b(w, \varphi) \geq \|\varphi\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - \varepsilon \geq c_1 \|\varphi\|_{L^2(\Omega_1)}; \quad \forall \varphi \neq 0. \quad (3.21)$$

Cela montre que \mathfrak{B}^* a une image fermée et est injectif. \square

On peut donc écrire :

$$(Ker(\mathfrak{B}))^\perp = Im(\mathfrak{B}^*),$$

et

$$(Ker(\mathfrak{B}^*))^\perp = L^2(\Omega_1).$$

Montrons que la formulation suivante est bien posée.

$$\begin{cases} (\mathfrak{B}^* \mathfrak{B} \dot{u}(t), w)_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + a(u(t), w) = (f(t), w)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ u(x, 0) = u_0(x); \quad 0 < x < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Celle-ci résulte de l'élimination de v dans (3.17). Plus précisément, de la deuxième équation de (3.17) il vient :

$$v = \mathfrak{B} \dot{u}_\perp(t).$$

Tout d'abord nous décomposons $H_0^1(\Omega)$ comme la somme directe suivante :

$$H_0^1(\Omega) = Ker(\mathfrak{B}) \oplus (Ker(\mathfrak{B}))^\perp = Ker(\mathfrak{B}) \oplus Im(\mathfrak{B}^*),$$

ainsi tout élément peut se décomposer en somme de deux termes

$$u_K \in Ker(\mathfrak{B}), \quad u_\perp \in (Ker(\mathfrak{B}))^\perp$$

et

$$u(t) = u_K(t) + u_\perp(t),$$

$u_K(t)$ vérifie :

$$(\mathfrak{B}^* \mathfrak{B} \dot{u}_\perp(t), w_K)_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + a(u_K(t) + u_\perp(t), w_K) = (f(t), w_K)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall w_K \in Ker(\mathfrak{B}).$$

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

Nous avons :

$$a(u_K(t), w_K) = (f(t), w_K)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall w_K \in \text{Ker}(\mathfrak{B}).$$

Le théorème de Lax-Milgram fournit l'existence et l'unicité de $u_K \in \text{Ker}(\mathfrak{B})$. D'autre part l'existence de u_\perp , revient à l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions pour un problème classique du type équation de la chaleur que nous donnons dans la suite.

Lemme 3.2.3. *L'opérateur $\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}$ est inversible sur $(\text{Ker}(\mathfrak{B}))^\perp$.*

Preuve.

Soit

$$v = \mathfrak{B}\dot{u}_\perp(t) \in \text{Im}(\mathfrak{B}) \Rightarrow v \in (\text{Ker}(\mathfrak{B}^*))^\perp,$$

et d'après le lemme 3.2.2 on a que \mathfrak{B}^* est inversible sur $(\text{Ker}(\mathfrak{B}^*))^\perp$ ainsi $\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}$ est inversible sur $(\text{Ker}(\mathfrak{B}))^\perp$. \square

Remarquons que $(\text{Ker}(\mathfrak{B}))^\perp = {}_0H^1(\Omega_1)$ où l'indice à gauche signifie que les fonctions s'annulent que sur $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$.

La première équation de (3.17) s'écrit :

$$(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}\dot{u}_\perp(t), w)_{H^{-1}(\Omega) \times H^1(\Omega)} + a(u_\perp(t), w) = (f(t), w)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall w \in (\text{Ker}(\mathfrak{B}))^\perp.$$

Comme

$$\int_{\Omega_2} \partial_x u_K \partial_x w dx = 0; \quad \text{pour tout } w \in (\text{Ker}(\mathfrak{B}))^\perp,$$

le problème peut se récrire :

$$\begin{cases} (\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}\dot{u}_\perp(t), w) + a(u_\perp(t), w) = (f(t), w); & \forall w \in {}_0H^1(\Omega_1), \\ u(x, 0) = u_0(x); & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ a(u_K(t), w) = (f(t), w); & \forall w \in H_0^1(\Omega_2), \end{cases} \quad (3.23)$$

Utilisant le lemme 3.2.2 et la coercitivité de a , utilisant les résultat classique pour l'équation de la chaleur [1] nous avons existence et unicité de $u_\perp(t)$ et on peut

3.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

représenter le problème (3.23) dans la décomposition précédente de $H_0^1(\Omega)$, de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_\perp(x,t) - \partial_{x^2}^2 u_\perp(x,t) = f_1(x,t) \text{ dans } \Omega_1 \times (0,T), \\ u_\perp(x,0) = u_0, \text{ dans } \Omega_1, \\ -\partial_{x^2}^2 u_K(x,t) = f_2(x) \text{ dans } \Omega_2 \times (0,T), \\ u_K(\frac{1}{2},t) = u_\perp(\frac{1}{2},t), \partial_x u_\perp(x,t)|_{x=\frac{1}{2}} = \partial_x u_K(\frac{1}{2}), \\ u_K(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Ici nous rajoutons comme conditions aux limites la continuité des traces sur l'interface $\{x = \frac{1}{2}\}$ pour avoir une solution dans $H_0^1(\Omega)$.

3.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

Pour résoudre numériquement le problème (\mathbf{P}_0) par la technique de la matrice de masse singulière, nous définissons une formulation du problème (\mathbf{P}_0) :

Trouver $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega_1)$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (v(t), w) + a(u(t), w) = (f(t), w); \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ (v(t), q) = (\partial_t u(t), q); \quad \forall q \in L^2(\Omega_1), \\ u(x,0) = u_0(x); \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \end{array} \right. \quad (3.25)$$

où a est la forme bilinéaire définie sur $H^1(\Omega)$ par (3.4).

Le système des deux équations (3.25) est appelé formulation mixte du problème (3.15).

Si $u \in L^2(0,T, H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T, L^2(\Omega))$ est solution de (3.15) alors

$$(u,v) \in L^2(0,T, H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T, L^2(\Omega)) \times L^2(0,T, L^2(\Omega_1))$$

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

est la solution de la formulation mixte (3.25).

Prenons des approximations de u et v par des éléments finis différents. Autrement dit, on fixe $\bar{V}_h \subset V = H_0^1(\Omega)$ pour l'approximation de u et on considère un second espace éléments finis $\mathcal{M}_h \subset L^2(\Omega_1)$ destiné à approcher v . Dans ce qui suit, nous notons \dot{u}_h pour $\partial_t u_h$, et $(\cdot, \cdot)_{\Omega_i}$; $1 \leq i \leq 2$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega_i)$ et $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

La méthode des éléments finis en espace sur la partie Ω_1 utilise du P_1 Lagrange, sur la partie Ω_2 utilise du P_1 Lagrange plus les fonctions bulle ($\tilde{\varphi}_i$), les fonctions (ψ_j) sont P_0 sur chaque élément. Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en M parties égales, (M étant un entier pair positif $M = 2m$), et posons $h = \frac{1}{M}$, $x_i = ih$ avec $i = 0, \dots, 2m$ et $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$ pour $i = m, \dots, 2m - 1$, on définit pour $i = 1, \dots, 2m$ les fonctions suivantes :

$$\varphi_i^1(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}; & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}; & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et pour $i = m, \dots, 2m - 1$ les fonctions suivantes :

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \varphi_{i+\frac{1}{2}}^*(x) = \begin{cases} -\frac{6}{h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1}); & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

On considère les espaces d'approximations :

$$V_h = \{w \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1; \quad 0 \leq i \leq M-1\}, \quad (3.26)$$

$$\mathcal{M}_h = \{w \in L^2(\Omega_1) : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_0; \quad 0 \leq i \leq m-1\}, \quad (3.27)$$

$$H_h = \{w \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_2) : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_2, \quad w(x_i) = 0; \quad m \leq i \leq M-1\}. \quad (3.28)$$

3.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

Si nous posons maintenant : $N = 3m$, $\varphi_1 = \varphi_1^1$, $\varphi_2 = \varphi_2^1, \dots$, $\varphi_m = \varphi_m^1$, $\varphi_{m+1} = \varphi_{m+\frac{1}{2}}^*$, $\varphi_{m+2} = \varphi_{m+1}^1$, \dots , $\varphi_N = \varphi_{2m}^1$, alors les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ appartiennent à V et sont linéairement indépendentes. Nous les choisissons pour engendrer l'espace \bar{V}_h que nous appelons espace d'approximation de type élément finis. Remarquons tout d'abord, qu'ici la condition initiale $u_h^0 \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Alors $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ est une base de $\bar{V}_h = V_h + H_h$. Soit $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ une base de \mathcal{M}_h . Écrivons maintenant le problème semi discretisé de (3.25) :

Trouver $u_h : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{V}_h$, $v_h : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \mathcal{M}_h$ tels que

$$\begin{cases} (v_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h, w_h) = (f(t), w_h)_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h, \\ (v_h, q_h)_{\Omega_1} = (\dot{u}_h, q_h)_{\Omega_1}; \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \end{cases} \quad (3.29)$$

De plus nous exigeons que $u_h(x, 0) = u_h^0(x); \forall x \in \Omega_1$.

Proposition 3.3.1. Le problème (3.29) possède une et une seule solution :

$$(u_h, v_h) \in H^1(0, T, \bar{V}_h) \times L^2(0, T, \mathcal{M}_h).$$

On écrit $u_h(t)$ (resp. $v_h(t)$) dans la base $(\varphi_j)_{j=1, \dots, N}$ de \bar{V}_h (resp. $(\psi_k)_{k=1, \dots, m}$ de \mathcal{M}_h) :

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^M \tilde{u}_h^j(t) \varphi_j^1(x) + \sum_{j=m}^{2m} \tilde{u}_h^j(t) \tilde{\varphi}_j(x) = \sum_{j=1}^N u_h^j(t) \varphi_j(x), \quad v_h(t) = \sum_{k=1}^m v_h^k(t) \psi_k(x),$$

La formulation mixte discrète (3.29) est équivalente à :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_1} \sum_{k=1}^m v_h^k(t) \psi_k(x) w_h(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N u_h^j(t) \partial_x \varphi_j(x) \partial_x w_h(x) dx = (f(t), w_h(x))_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h, \\ \int_{\Omega_1} \sum_{k=1}^{2m} v_h^k(t) \psi_k(x) q_h(x) dx = \int_{\Omega_1} \sum_{j=1}^N \dot{u}_h^j(t) \varphi_j(x) q_h(x) dx; \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \end{cases}$$

Choisissons $w_h = \varphi_i$ et $q_h = \psi_l$, ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m v_h^k(t) \int_{\Omega_1} \psi_k(x) \varphi_i(x) dx + \sum_{j=1}^N u_h^j(t) a(\varphi_j, \varphi_i) = (f(t), \varphi_i(x))_{\Omega}; \quad \forall \varphi_i \in \bar{V}_h, \\ \sum_{k=1}^m v_h^k(t) \int_{\Omega_1} \psi_k(x) \psi_l(x) dx = \sum_{j=1}^N \dot{u}_h^j(t) \int_{\Omega_1} \varphi_j(x) \psi_l(x) dx; \quad \forall \psi_l \in \mathcal{M}_h. \end{cases}$$

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

Ici encore nous pouvons construire les matrices de rigidité A et de masses B, C dont les éléments sont donnés par :

$$\begin{cases} A_{ij} = \int_0^1 \partial_x \varphi_j(x) \partial_x \varphi_i(x) dx; & 1 \leq i, j \leq N, \\ B_{kj} = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_j(x) \psi_k(x) dx; & 1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq N, \\ C_{kl} = \int_0^{\frac{1}{2}} \psi_l(x) \psi_k(x) dx; & 1 \leq k, l \leq m. \end{cases}$$

Le système différentiel résultant de (3.29) sera alors :

$$\begin{cases} B^t v_h(t) + A u_h(t) = F(t); & \forall t \in]0, T[, \\ C v_h(t) = B \dot{u}_h(t); & \forall t \in]0, T[. \end{cases} \quad (3.30)$$

$F(t)$ le N -vecteur de composantes $F_1(t), \dots, F_N(t)$ définies par :

$$F_i(t) = \int_0^1 f(t) \varphi_i(x) dx; \quad 1 \leq i \leq N.$$

La condition initiale sera donnée par :

$$u_h^0 = \sum_{j=1}^N u_0(x_j) \varphi_j(x); \quad 1 \leq i \leq m.$$

Décomposons l'espace d'approximation \bar{V}_h par :

$$\bar{V}_h = \text{Ker}(B) \oplus (\text{Ker}(B))^\perp, \quad (3.31)$$

où le noyau de B est représenté par l'ensemble :

$$\text{Ker}(B) = \{w \in \bar{V}_h : \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{\varphi}_i w dx = 0; \quad m \leq i \leq M\}. \quad (3.32)$$

Nous éliminons v_h nous avons :

$$v_h(t) = C^{-1} B \dot{u}_h(t). \quad (3.33)$$

Injectant (3.33) dans la première équation, on obtient :

$$\begin{cases} B^t C^{-1} B \dot{u}_h(t) + A u_h(t) = F(t), \\ v_h(t) = C^{-1} B \dot{u}_h(t). \end{cases}$$

3.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

Donc il suffit de résoudre le système différentiel ordinaire :

$$\begin{cases} B^t \mathbf{C}^{-1} B \dot{u}_h(t) = -A u_h(t) + F(t), \\ u_h(0) = u_h^0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Pour résoudre (3.34) il faut décomposer l'espace \bar{V}_h comme au paragraphe précédent.

3.3.1 Estimation d'erreur en norme L^2

Auparavant, nous allons examiner l'erreur commise lorsqu'on remplace le problème (3.25) par le problème approché (3.29). Introduisons l'opérateur $\Pi_h \in \mathcal{L}(\bar{V}_h, \mathcal{M}_h)$ défini par :

$$\int_{\Omega} (\Pi_h \varphi - \varphi) q_h dx = \int_{\Omega_1} (\Pi_h \varphi - \varphi) q_h dx = 0; \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \quad (3.35)$$

Il est clair que Π_h est une projection, ainsi :

$$(v_h, q_h)_{\Omega_1} = (\dot{u}_h, q_h)_{\Omega_1} = (\Pi_h \dot{u}_h, q_h)_{\Omega_1}; \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \quad (3.36)$$

L'équation $v_h = \mathbf{C}^{-1} B \dot{u}_h(t)$ exprime $v_h = \Pi_h \dot{u}_h$ qui représente la composante de \dot{u}_h sur $(\text{Ker}(B))^\perp$, ce que l'on sait aussi de la définition de Π_h et (3.36) :

$$\begin{aligned} (v_h - \dot{u}_h, w_h)_{\Omega_1} &= (v_h, \Pi_h w_h)_{\Omega_1} - (\dot{u}_h, w_h)_{\Omega_1} \\ &= (\dot{u}_h, \Pi_h w_h)_{\Omega_1} - (\dot{u}_h, w_h)_{\Omega_1} \\ &= (\dot{u}_h, (\Pi_h - I) w_h)_{\Omega_1}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

On commence par donner des résultats techniques :

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

Lemme 3.3.2. *Soit u_h la solution approchée du problème (3.29) et Π_h l'opérateur défini par (3.35), alors on a les estimations a priori suivantes : il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ indépendantes de h telles que :*

$$\|\Pi_h u_h\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1))}^2 + \|u_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2 \leq C_1(\|f\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \|\Pi_h u_h^0\|_{L^2(\Omega_1)}^2), \quad (3.38)$$

$$\|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq C_2(\|\dot{f}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|u_h^0\|_{H^1(\Omega)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)}). \quad (3.39)$$

Preuve.

En effet, on obtient la majoration (3.38) à partir de l'équation :

$$(\dot{u}_h, \Pi_h w_h)_{\Omega_1} + a(u_h, w_h) = (f, w_h)_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h. \quad (3.40)$$

On prend $w_h = u_h$, le premier terme à gauche de l'équation (3.40) s'écrit :

$$\begin{aligned} (\dot{u}_h, \Pi_h w_h)_{\Omega_1} &= (\Pi_h \dot{u}_h, \Pi_h u_h)_{\Omega_1} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \Pi_h u_h, \Pi_h u_h \right)_{\Omega_1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\Pi_h u_h, \Pi_h u_h)_{\Omega_1}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ensuite, intégrant la formule (3.40) par rapport à t et appliquant l'inégalité de Young nous obtenons (3.38).

Pour établir l'inégalité (3.39), on considère la formule suivante :

$$(B^t v_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h, w_h) = (f(t), w_h)_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h. \quad (3.42)$$

Nous utilisons la formule (3.33) on a :

$$(C^{-1} B \dot{u}_h, B w_h)_{\Omega_1} + a(u_h, w_h) = (f(t), w_h)_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h. \quad (3.43)$$

3.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

Il est clair que la matrice \mathbf{C}^{-1} est symétrique définie positive, utilisant la factorisation de Cholesky $\mathbf{C}^{-1} = L^t L$ et on dérive par rapport à t on obtient :

$$(LB\ddot{u}_h, LBw_h)_{\Omega_1} + a(\dot{u}_h, w_h) = (\dot{f}(t), w_h)_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h. \quad (3.44)$$

On sait que $u_h(t) = \sum_{j=1}^N u_h^j(t) \varphi_j(x)$ et que l'on a la décomposition :

$$\bar{V}_h = Ker(B) \oplus (Ker(B))^{\perp}.$$

Sur $Ker(B)$, t est un paramètre et comme f est régulière u_h aura la régularité de f en temps. Ainsi

$$\dot{u}_h \in \bar{V}_h.$$

On choisit $w_h = \dot{u}_h$:

$$(LB\ddot{u}_h, LB\dot{u}_h)_{\Omega_1} + a(\dot{u}_h, \dot{u}_h) = (\dot{f}(t), \dot{u}_h)_{\Omega},$$

en peut écrire encore :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (LB\dot{u}_h, LB\dot{u}_h)_{\Omega_1} + a(\dot{u}_h, \dot{u}_h) = (\dot{f}(t), \dot{u}_h)_{\Omega}.$$

On intègre en temps de 0 à T :

$$\int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|LB\dot{u}_h\|_{L^2(\Omega_1)}^2 dt + \int_0^T a(\dot{u}_h, \dot{u}_h) dt = \int_0^T \int_{\Omega} \dot{f}(t) \dot{u}_h dx dt.$$

Appliquant l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|LB\dot{u}_h\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - \frac{1}{2} \|LB\dot{u}_h(0)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \\ & \leq \frac{1}{2\beta} \|\dot{f}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{\beta}{2} \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

L'inégalité de Poincaré fournit :

$$\frac{1}{2} \|LB\dot{u}_h\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \left(1 - \frac{\beta C_{\Omega}}{2}\right) \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2\beta} \|\dot{f}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|LB\dot{u}_h(0)\|_{L^2(\Omega_1)}^2.$$

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

Comme les données sont régulières, on peut majorer

$$\frac{1}{2} \|LB\dot{u}_h(0)\|_{L^2(\Omega_1)}^2$$

avec $|u_h^0|_1$ et $f(0)$. \square

Introduisons maintenant l'opérateur d'interpolation de Clément $Q_{V_h} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), V_h)$.

Nous avons le résultat suivant (voir théorème 1 page 73 [7]) :

Lemme 3.3.3. *L'opérateur d'interpolation dans V_h est stable en norme H^1 , c'est-à-dire :*

$$\exists c > 0, \quad |Q_{V_h}\varphi|_1 \leq c|\varphi|_1; \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (3.45)$$

et de plus satisfait :

$$\exists c_1 > 0, \quad \|(I - Q_{V_h})\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 h \|\varphi\|_{H^2(\Omega)}, \quad (3.46)$$

Théorème 3.3.4. *Soit $u^0 = 0$, et la fonction $u \in C^1(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T, H^2(\Omega))$ est solution du problème (3.15), $u_h \in \bar{V}_h$ son approximation et on suppose que f est une fonction régulière, on a l'estimation d'erreur suivante : il existe $C > 0$ indépendante de h telle que :*

$$\|u - u_h\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))} \leq Ch(\|u\|_{L^\infty(0, T, H^2(\Omega))} + \|\dot{u}_h\|_{L^2(0, T, H^1(\Omega))} + \|\dot{u}\|_{L^2(0, T, H^1(\Omega))}). \quad (3.47)$$

Preuve.

Tout d'abord on considère les formules suivantes :

$$(v_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h, w_h) = (f(t), w_h)_\Omega; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h, \quad (3.48)$$

$$(\dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + a(u, w_h) = (f(t), w_h)_\Omega; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h, \quad (3.49)$$

En soustrayant (3.49) à (3.48) :

$$(v_h - \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - u, w_h) = 0; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h.$$

3.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

Soit encore

$$(\dot{u}_h - \dot{u} + v_h - \dot{u}_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - u, w_h) = 0; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h,$$

$$(\dot{u}_h - \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + (v_h - \dot{u}_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - u, w_h) = 0; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h. \quad (3.50)$$

Utilisant la formule (3.37) il vient

$$(\dot{u}_h - \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + (\dot{u}_h, (\Pi_h - I)w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - u, w_h) = 0; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h, \quad (3.51)$$

donc

$$\frac{d}{dt}(u_h - u, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - u, w_h) = (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)w_h)_{\Omega_1}; \quad \forall w_h \in \bar{V}_h, \quad (3.52)$$

Introduisant maintenant $\varphi_h \in \bar{V}_h$ arbitraire, la formule (3.52) s'écrit :

$$\begin{aligned} (\dot{u}_h - \dot{\varphi}_h, w_h)_{\Omega_1} + (\dot{\varphi}_h - \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - \varphi_h, w_h) &= a(u - \varphi_h, w_h) \\ &+ (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)w_h)_{\Omega_1}, \end{aligned}$$

on peut écrire aussi

$$\begin{aligned} (\dot{u}_h - \dot{\varphi}_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - \varphi_h, w_h) &= (\dot{u} - \dot{\varphi}_h, w_h)_{\Omega_1} \\ &+ a(u - \varphi_h, w_h) + (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)w_h)_{\Omega_1}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

On pose $\varphi_h = Q_{V_h}u$ dans (3.53) on déduit pour tout $w_h \in \bar{V}_h$ l'équation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned} (\dot{u}_h - Q_{V_h}\dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - Q_{V_h}u, w_h) &= a(u - Q_{V_h}u, w_h) + (\dot{u} - Q_{V_h}\dot{u}, w_h)_{\Omega_1} \\ &+ (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)w_h)_{\Omega_1}. \end{aligned}$$

Remarquant que :

$$(\dot{u} - Q_{V_h}\dot{u}, w_h)_{\Omega_1} = \frac{d}{dt}(u - Q_{V_h}u, w_h)_{\Omega_1}, \quad (3.54)$$

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

et en utilisant que :

$$\|u - Q_{V_h} u\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

alors nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^T (\dot{u} - Q_{V_h} \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} dt &= \int_0^T ((I - Q_{V_h}) \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} dt \\ &\leq \int_0^T \|(I - Q_{V_h}) \dot{u}\|_{L^2(\Omega_1)} \|w_h\|_{L^2(\Omega_1)} dt \\ &\leq Ch^2 \|\dot{u}\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2 + C_0 \|w_h\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega_1))}^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

En tenant compte de (3.55), choisissons $w_h = u_h - Q_{V_h} u$ et intégrons par rapport à t , on obtient :

$$\begin{aligned} |(u_h - Q_{V_h} u)|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1))}^2 - |(u_h - Q_{V_h} u)(0)|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|u_h - Q_{V_h} u\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \\ \leq Ch^2 [\|u\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))}^2 + \|\dot{u}\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2] \\ + C_1 \int_0^T (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)(u_h - Q_{V_h} u)) dt. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Utilisant la majoration :

$$\|(I - \Pi_h)\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}, \quad (\text{voir [6]}),$$

le deuxième terme à droite de la formule (3.56) devient :

$$\begin{aligned} \int_0^T (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)(u_h - Q_{V_h} u))_{\Omega_1} dt &= \int_0^T ((I - \Pi_h) \dot{u}_h, (I - \Pi_h)(u_h - Q_{V_h} u))_{\Omega_1} dt \\ &\leq Ch^2 \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2. \end{aligned}$$

Dans (3.56) on choisit $u_h(0) = Q_h u(0)$ et utilisant la stabilité en semi-norme H^1 de Q_{V_h} et la majoration précédente, on obtient :

$$\|Q_{V_h} u - u_h\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1))}^2 + \|u_h - Q_{V_h} u\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2$$

3.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

$$\leq Ch^2[\|u\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))}^2 + \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2 + \|\dot{u}\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2].$$

En majorant :

$$\|u_h - u\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \leq \|Q_{V_h} u - u_h\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 + \|Q_{V_h} u - u\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2,$$

on a l'estimation. \square

Remarque 3.3.5. On considère maintenant les formules suivantes :

$$\begin{cases} (\mathfrak{B}^* v_h(t), w_h)_{\Omega_1} + a(u(t), w_h) = (f(t), w_h)_\Omega; & \forall w_h \in \bar{V}_h, \\ (v_h(t), w_h)_{\Omega_1} + a(u_h(t), w_h) = (f(t), w_h)_\Omega; & \forall w_h \in \bar{V}_h. \end{cases}$$

Choisissons $w_h \in \bar{V}_h \cap {}_0H^1(\Omega_2)$, on a

$$a(u(t), w_h) = a(u_h(t), w_h) = (f(t), w_h)_{\Omega_2}. \quad (3.57)$$

C'est un problème elliptique classique où f est un paramètre. En utilisant la technique d'Aubin-Nitche [1] on en déduit que pour t fixé

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq Ch^2 \|u(t)\|_{H^2(\Omega_2)}. \quad (3.58)$$

3.3.2 Méthode d'Euler implicite et explicite

On utilise une méthode de différences finies en temps pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires (3.34). Pour simplifier les notations, nous réécrivons le système (3.34) sans mentionner la dépendance spatiale en h

$$\begin{cases} B^t \mathcal{C}^{-1} B \dot{u}(t) + Au(t) = F(t); & \forall t \in]0, T], \\ u(0) = u^0, \end{cases} \quad (3.59)$$

où on suppose que $F(t)$ est continue sur $[0, T]$. On découpe l'intervalle de temps $[0, T]$ en K pas de temps $t_k = k\delta t$; $0 \leq k \leq K$. Pour u^0 donné, on propose le schéma implicite :

$$B^t \mathcal{C}^{-1} B u^{k+1} + \delta t A u^{k+1} = \delta t F(t_{k+1}) + B^t \mathcal{C}^{-1} B u^k. \quad (3.60)$$

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

La matrice $B^t \mathcal{C}^{-1} B + \delta t A$ est inversible car somme d'une matrice semi-définie positive et d'une matrice définie positive. Nous décomposons la matrice A en $A = A^- + A^+$ avec $A^- = \int_0^1 \partial_x \varphi_i(x) \partial_x \varphi_j(x) dx$ calculé sur $(\text{Ker}(B))^\perp$ et A^+ c'est le calcul sur $\text{Ker}(B)$, alors le schéma explicite d'Euler s'écrit :

$$(B^t \mathcal{C}^{-1} B + \delta t A^+) u^{k+1} = \delta t F^-(t_k) + B^t \mathcal{C}^{-1} B u^k - \delta t A^- u^k + \delta t F^+(t_{k+1}). \quad (3.61)$$

$$F^-(t_k) = P_{H_h} 1_{[0, \frac{1}{2}]} f(x, t_k); \quad F^+(t_{k+1}) = P_{H_h} 1_{[\frac{1}{2}, 1]} f(x, t_{k+1})$$

Nous illustrons la théorie précédente en montrant un exemple simple, utilisant des maillages avec des fonctions bulles sur Ω_2 . Le problème est l'équation de la chaleur sur le domaine Ω . Le second membre et la condition de Dirichlet sont choisis de façon que la solution exacte soit : $u(x, t) = (x - 1/2)^3 t^2 + x^3$, si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $u(x, t) = x^3$, si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Nous avons calculé la solution sur un maillage régulier sur $[0, 1]$ avec des fonctions bulles sur $[\frac{1}{2}, 1]$, comportant des pas $h = \frac{1}{2m}$ et $\delta t = \frac{1}{K}$ avec $m = 100$, et $K = 100$.

FIGURE 3.1 – La solution approchée

Les figures 2.2-2.3 présentent respectivement les erreurs en norme L^2 par la méthode d'Euler implicite et explicite en fonction de h et en fonction δt , en échelle $\log - \log$. On observe bien une pente pratiquement égale à 2 en espace et égale à 1 en temps.

3.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

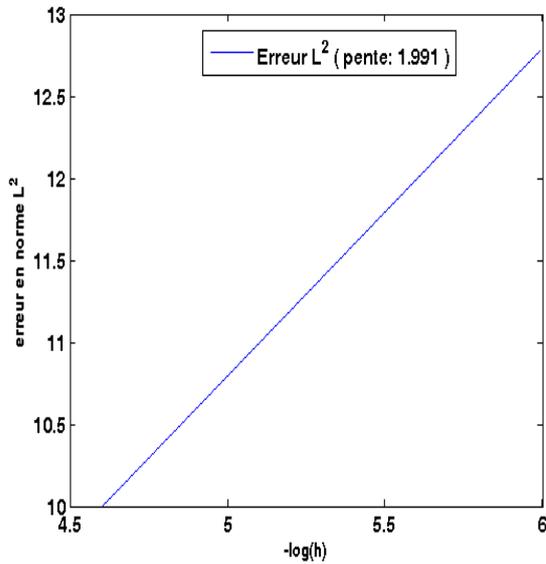


FIGURE 3.2 – Erreurs en norme L^2 par la méthode d’Euler implicite en fonction de h , en échelle $\log - \log$.

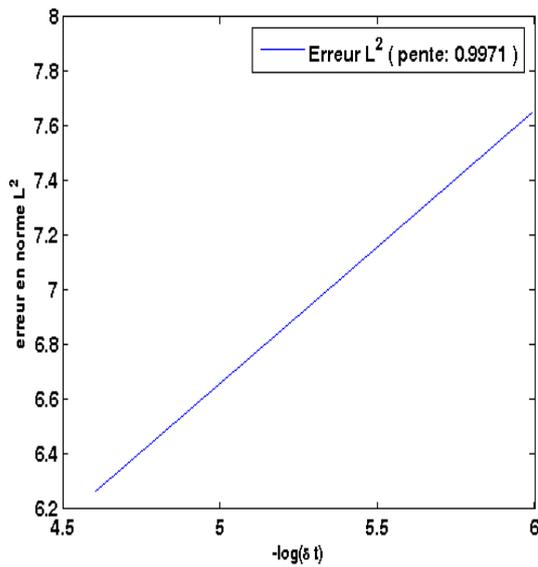


FIGURE 3.3 – Erreurs en norme L^2 par la méthode d’Euler implicite en fonction δt , en échelle $\log - \log$.

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

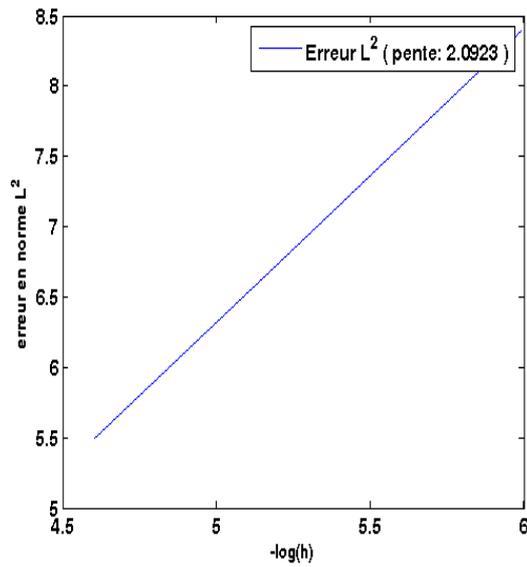


FIGURE 3.4 – Erreurs en norme L^2 par la méthode d'Euler explicite en fonction de h , en échelle $\log - \log$.

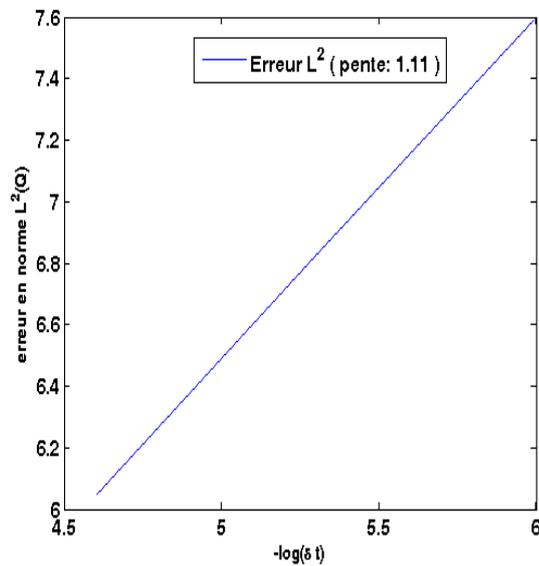


FIGURE 3.5 – Erreurs en norme L^2 par la méthode d'Euler explicite en fonction δt , en échelle $\log - \log$.

3.4 Méthode du second membre modifié

Remarque 3.3.6. *La méthode présentée peut se généraliser aux problèmes en dimension supérieur en espace. Les fonctions bulles seront les fonctions bulles associées à chaque triangle ou quadrangle du domaine Ω_1 .*

3.4 Méthode du second membre modifié

Dans cette section, on présente une méthode pour résoudre le problème (\mathbf{P}_0) dans le cas où la recherche de la solution statique dans le noyau n'intervient pas. En effet, cette méthode proposée (voir [4]) est basée sur la formulation variationnelle du problème (\mathbf{P}_0) dans laquelle la quantité différentielle $1_{[\frac{1}{2},1]}(x)\partial_t u(x,t)$ n'est pas éliminée dans la partie Ω_2 mais rajoutée au seconde membre de la première équation de (3.25) dans le problème (\mathbf{P}_0), ce qui revient à écrire :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = f(x,t) + 1_{[\frac{1}{2},1]}(x)\partial_t u(x,t) & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1; t > 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

La formulation variationnelle associée à ce problème est alors : trouver $u \in C^1((0,1); L^2(\Omega)) \cup C^0((0,1); H_0^1(\Omega))$, tel que $u(0,x) = u_0(x)$ et pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)v dx + \int_{\Omega} \partial_x u(t)\partial_x v dx = \int_{\Omega} f(t)v dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} u(t)v dx. \quad (3.63)$$

En pratique, on construit une suite de champs u_n selon le procédé suivant : u_0 étant fixé, chercher u_{n+1} tel que :

$$\int_{\Omega} \partial_t u_{n+1} v dx + \int_{\Omega} \partial_x u_{n+1} \partial_x v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Omega_2} \partial_t u_n v dx. \quad (3.64)$$

On cherche maintenant à obtenir des estimation a priori sur $u_{n+1} - u$ de telle sorte à pouvoir passer à la limite $n \rightarrow \infty$, c'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 3.4.1. *La suite (u_n) converge vers u dans $H_0^1(\Omega)$.*

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

Preuve.

On fait la différence entre la relation de récurrence (3.64) et la formulation variationnelle (3.63), et l'on prend $e_{n+1} = u_{n+1} - u$ et $v = \dot{e}_{n+1}$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{e}_{n+1} \dot{e}_{n+1} dx + \int_{\Omega} \partial_x e_{n+1} \partial_x \dot{e}_{n+1} dx &= \int_{\Omega_2} \dot{e}_n \dot{e}_{n+1} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|\dot{e}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\dot{e}_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

La formule (3.65) donne :

$$\frac{1}{2} \|\dot{e}_{n+1}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2} \|\dot{e}_n\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2.$$

Dont on déduit que $\|\dot{e}_{n+1}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$ est décroissant, et donc converge vers un réel positif ou nul.

D'autre part, on pose $v = e_{n+1}$, on obtient alors (par Cauchy Schwarz et l'inégalité de Poincaré) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |e_{n+1}|^2 dx + \int_{\Omega} |\partial_x e_{n+1}|^2 dx &= \int_{\Omega_2} \dot{e}_n e_{n+1} dx \\ &\leq \|\dot{e}_n\|_{L^2(\Omega)} \|e_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{C} \|\dot{e}_n\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_x e_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{2} \|\dot{e}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_x e_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (3.66)$$

d'où, $\forall t \in [0, T]$:

$$\int_{\Omega} |e_{n+1}|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_x e_{n+1}|^2 dx dt \leq C \int_0^t \|\dot{e}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

On en déduit que la suite e_n est bornée en norme $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ et $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$. Ceci permet d'extraire une sous suite de la suite e_n que nous notons encore e_n qui

3.4 Méthode du second membre modifié

converge faiblement étoile dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ et faiblement dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$. De l'injection compacte de $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$, nous déduisons :

$$0 \leq \frac{1}{2} \|e_{n+1}\|_{L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2} \|\dot{e}_n\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 - \frac{1}{2} \|\dot{e}_{n+1}\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

En fait c'est toute la suite qui converge, puisque nous pouvons passer à la limite (3.64) et que nous avons unicité des solutions du problème (3.62). \square

Sur la formulation variationnelle (3.63), nous appliquons la méthode des éléments finis de Lagrange de degré 1 en espace et un schéma classique en temps, le schéma d'Euler implicite. On définit le pas de temps δt et on approche $u((n-1)\delta t)$ (resp $u(n\delta t)$) par u_{n-1} (resp u_n). Les solutions $u((n-1)\delta t)$, $u(n\delta t)$ aux pas de temps $(n-1)\delta t$ et $n\delta t$ étant données, on trouve u_{n+1} grâce à l'équation :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\delta t} - \partial_{x^2}^2 u_{n+1} = f_{n+1} + 1_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) \frac{u_n - u_{n-1}}{\delta t}, \quad (3.67)$$

où f_{n+1} est le terme source au pas de temps $(n+1)\delta t$. Ici la dérivée en temps au seconde membre est explicite. On peut avoir une forme implicite qui est non linéaire et demande une méthode itérative. Pour n fixé et $u_{n+1}^0 = u_{n+1}$ calculé par l'équation (3.67), si u_{n+1}^k est connu ; calculer u_{n+1}^{k+1} la solution de :

$$\frac{u_{n+1}^{k+1} - u_n}{\delta t} - \partial_{x^2}^2 u_{n+1}^{k+1} = f_{n+1} + 1_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) \frac{u_{n+1}^k - u_n}{\delta t}. \quad (3.68)$$

On choisit un exemple simple avec une solution exacte $u(x, t) = x(x - \frac{1}{2})t^2 + x^3$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $u(x, t) = x^3$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ qui vérifie bien les conditions de Dirichlet. Nous avons pris $h = 5 \cdot 10^{-3}$ et $\delta t = 10^{-4}$. Les figures 2.4(a)- 2.4(b) représentent respectivement les erreurs en norme L^∞ par la méthode du second membre modifié des problèmes (3.67), (3.68) et la figure 2.5 représente aussi l'erreurs en norme L^∞ mais par la méthode de masse singulière. On observe que la vitesse de convergence de la méthode du second membre modifié est plus faible que ce qui est prédit dans le cas de la méthode de masse singulière.

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

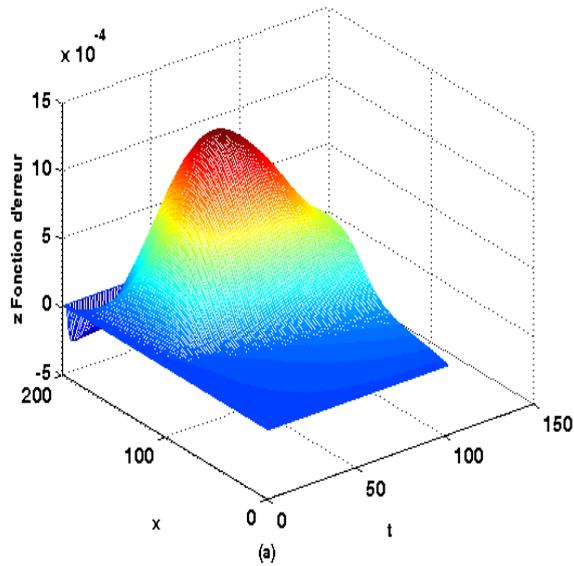


FIGURE 3.6 – Erreurs en norme L^∞ la méthode d'Euler explicite avec un second membre modifié.

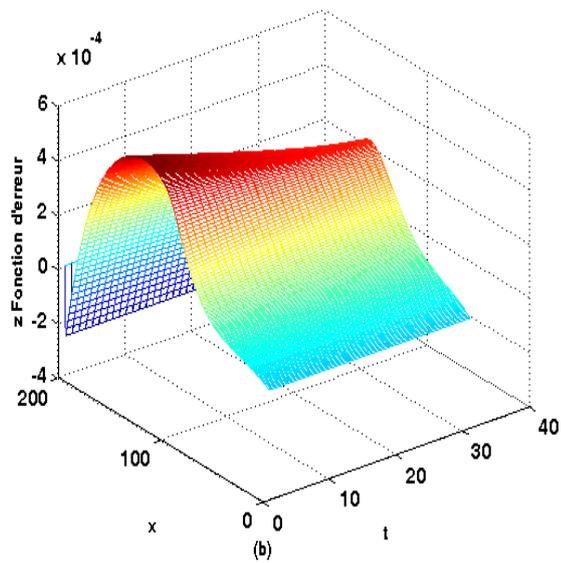


FIGURE 3.7 – Erreurs en norme L^∞ la méthode d'Euler implicite avec un second membre modifié.

3.4 Méthode du second membre modifié

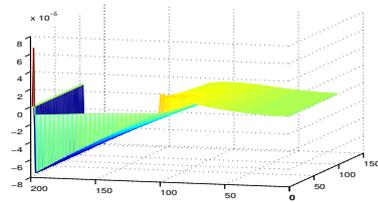


FIGURE 3.8 – Erreurs en norme L^∞ par la méthode d'Euler implicite avec une matrice de masse singulière, avec $h = 5 \cdot 10^{-3}$, $\delta t = 10^{-4}$ et $h^2 \ln(h) = 1.2 \times 10^{-4}$.

Chapitre 3. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

Bibliographie

- [1] *Alexandre Ern and Jean-Luc Guermand. Elément finis : théorie, application, mise en oeuvre. Springer-Verlag, Berlin, volume (36), 2002.*
- [2] *P. Auger and G. Poggiale. Impact of spatial heterogeneity on a predator prey system dynamics. C. R. Biologies, (327) : 1058-1063, 2004.*
- [3] *I. Babuska and W. G. Szymezak. Adaptivity and error estimation for the finite element method applied to convection. SIAM. J. Numer. Anal, (21) (Issue 5) : 910-945, 1984.*
- [4] *T. T. Cuc Bui, B. Maury and P. Frey. Méthode du seconde membre modifié pour la gestion de rapports de viscosité importants dans le problème de Stokes bifluide. C. R. Mécanique, (336) : 524-529, 2008.*
- [5] *Charles Pierre. Modélisation et simulation de l'activité électrique du coeur dans le thorex, analyse numérique et méthode de volume finis. PhD thesis, Université de Nantes, Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN) ED : 221-366, 2005.*
- [6] *Ph. Ciarlet. Finite element method for elliptic equation. Studies in mathematics and its applications north holland edition, 1979.*
- [7] *B. H. Clement. Approximation by finite element functions using local regularization. RAIRO, Analyse numérique, (9) : 77-84, 1975.*

BIBLIOGRAPHIE

- [8] M. Crouzeix and F. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, Paris, 1992.
- [9] M. A. Dronne, S. Descombes, E. Grenier and H. Gilquin. *Examles of the influence of the geometry on the propagation of the progressives waves*. *Mathematical and computer modelling, EPU*, (49) : 2138-2144, 2009.
- [10] Franck Fontvieille. *Décomposition asymptotique et élément finis*. PhD thesis, *Mathématiques et Informatique fondamentale de Lyon*, <http://docinsa.insa-lyon.fr/pont.php?id=fontvieille>, 2004.
- [11] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris [Theory and applications], 1983.
- [12] Y. Renard. *The singular dynamic method for constrained second order hyperbolic equations, application to dynamic contact problems*. *J. Comput. Appl. Math*, 3 (234) : 906-923, 2010.
- [13] J. Céa. *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*. *Fourier (Grenoble)*, (14) :345-444, 1964.
- [14] P. A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.
- [15] J. N. Reddy. *An introduction to the finite element method*. Masson, Paris, 1983.
- [16] S. N. Chow, J. Mallet-paret and W. X. Shen. *Traveling waves in latttice dynamical systems*. *J. Differ. Equations*, 149 (2) : 248-291, 1998.
- [17] M. J. Castro Diaz and F. Hecht. *Anisotropic mesh generation, Minimization of interpolation error*. In *XV Congress on Differential Equation and Applications/ V Congress on Applied Mathematics, Vol. I, II (Spanish) (Vigo, 1997)*, volume 9 of *Colecc. Congr*, pages 647-653. *Univ. Vigo*, 1998.

BIBLIOGRAPHIE

- [18] N. F. Britton. *Threshold phenomena and solitary traveling waves in a class of reaction-diffusion systems. SIAM. J. Appl. Math, (42) : 188-217, 1982.*
- [19] L. C. Evans. *Partial differential equations. American mathematical society, 1998.*
- [20] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin and A. Michel. *Convergence of a finite volume scheme for nonlinear degenerate parabolic equations. Numer. Math, 92 (1) : 41-82, 2002.*
- [21] T. Gallouët, R. Herbin and M. H. Vignal. *Error estimates on the approximate finite volume solution of convection diffusion equations with boundary conditions. Proceedings of the Finite Volumes for Complex Applications, II, pages 189-196, 1999.*
- [22] D. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equations. Springer Verlag, (840), 1981.*
- [23] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Travaux et recherche mathématiques, Vol 2, No 18, Dunod, Paris, 1968.*
- [24] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris, 1969.*
- [25] A. Lunardi. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. Progress in nonlinear differential equations and their applications, 1995.*
- [26] W. Rudin. *Functional analysis. International series in pure and applied mathematics, 1973.*
- [27] S. Sanfelici. *Convergence of the Galerkin approximation of a degenerate evolution problem in electrocardiology. Numer. Methodes for Partial Differential Equations, (18) : 218-240, 2002.*

BIBLIOGRAPHIE

- [28] P. A. Raviart and J. M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1983.
- [29] E. Godlewski and P. A. Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer, Berlin, 1996.
- [30] J. F. Agassant, P. Avenas, J. Ph. Sergent and P. Carreau. *Polymer processing principles and modeling*. Hanser Publishers, Munich, 1991.
- [31] D. Arnold, F. Brezzi and M. Fortin. *A Stable Finite Element for the Stokes Equations*. *Calcolo*, (21) : 337-344, 1984.
- [32] R. G. Bartle. *The elements of integration*. Wiley, New York, 1966.
- [33] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [34] K. J. Bathe and T. Sussman. *A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and inelastic Analysis*. *Computers and Structures*, 26 (1) : 357-409, 1987.
- [35] J. Bonet and D. R. Wood. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge, 1997.
- [36] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [37] R. L. Burden and J. D. Faires. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, Pacific Grove, septième édition, ISBN 0-534-38216-9, 2001.
- [38] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [39] R. L. Courant. *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration*. *Bulletin of the American Mathematical Society*, (49) : 1-23, 1943.

BIBLIOGRAPHIE

- [40] M. C. Delfour and J. P. Zolézio. *Shapes and Geometries : Analysis, Differential Calculus and Optimization. Advances in Design and Control.* SIAM, Philadelphia, 2001.
- [41] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis.* Les presses de l'Université Laval, Québec, 1981.
- [42] G. Duvaut. *Mécanique des milieux continus. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise.* Masson, 1990.
- [43] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, Paris, 1972.
- [44] M. Engelman and M. Jamnia. *Transient Flow Past a Circular Cylinder a Benchmark Solution.* *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, (11) : 985-1000, 1990.
- [45] A. Fortin. *Analyse numérique pour ingénieurs.* Presses Internationales Polytechnique, troisième édition, 2008.
- [46] A. Fortin, M. Jardak, R. Pierre and J. J. Gervais. *Localization of Hopf Bifurcations in Fluid Flow Problems.* *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, (24) : 1185-1210, 1997.
- [47] M. Fortin and A. Fortin. *Experiments with Several Elements for Viscous Incompressible Flows.* *Int. J. Num. Meth. Fluids*, (5) : 911-928, 1985.
- [48] M. Fortin and R. Glowinski. *Résolution Numérique de Problèmes aux Limites par des Méthodes de Lagrangien Augmenté.* Dunod, 1983.
- [49] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications.* Masson, Paris, 1990.
- [50] A. George and J. Liu. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems.* Prentice-Hall, 1981.

BIBLIOGRAPHIE

- [51] B. Lucquin. *Équations aux dérivées partielles et leurs approximations. Mathématiques à l'université. Ellipses, Paris, 2004.*
- [52] The MathWorks Inc. : *Matlab User's guide. 1996.*
- [53] A. B. Medvinsky, S. V. Petrovskii, I. A. Tikhonova, H. Malchow and B. L. Li. *Spatiotemporal Complexity of Plankton and Fish Dynamics. SIAM review, 44(3), 2002.*
- [54] B. Ozell and C. Pic. *Manuel d'utilisation du logiciel configurable de visualisation scientifique. VU. CERCA, Montréal, 1998.*
- [55] G. Philippin. *Cours d'analyse à l'usage des ingénieurs. Presses de l'Université de Montréal, Montréal, tome 2, 1994.*
- [56] J. N. Reddy. *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering. McGraw-Hill, New York, 1986.*
- [57] W. Ritz. *Ueber eine neue Methode zur Losung gewisser Variations probleme der mathematischen Physik.. J. Reine Angew. Math., 135 : 1-61, 1908.*
- [58] P. J. Roache. *Code verification by the method of manufactured solutions. ASME, (124) : 4-10, mars 2002.*
- [59] G. Strang and G. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.*
- [60] Swokowski. *Analyse. De Boeck Université, Bruxelles, Bibliographie 383, cinquième édition, 1993.*
- [61] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin and L. C. Topp. *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. Journal of the Aeronautical Sciences, (23) : 805-882, 1956.*

BIBLIOGRAPHIE

- [62] *O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor The finite Element Method : basic formulation and linear problems. McGraw-Hill, tome 1, 1989.*
- [63] *A. Berkane, Ali. Berkane and M. Belhout Singular perturbation with a reduced approximation order in space for the parabolic operator. Int. J. Appl. Math. Stat. Vol. 57; Issue No. 3; 2018.*