

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



BADJI MOKHTAR UNIVERSITY  
ANNABA

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA



جامعة باجي مختار  
- عنابة -

Année : 2017

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
Laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en MATHÉMATIQUES

ETUDE DU COMPORTEMENT DE LA DYNAMIQUE  
DE LA RÉCURRENCE DE MYRBERG  
GENERALISÉE

Option

Equations Différentielles et Applications

Présenté Par:  
SELMANI WISSAME

DIRECTEUR DE THÈSE : DJELLIT Ilham Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury :

PRESIDENT : Ferchichi Mohamed Réda M.C.A U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Boussetila Nadjib Prof. U.8 Mai 1945. GUELMA

EXAMINATEUR : Haiour Mohamed Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Maouni Messaoud M.C.A U. SKIKDA

## ملخص

في هذه الأطروحة نعرض نتائج الدراسة النظرية و التطبيقية لأنظمة ديناميكية لفئة حيوانية. النظام ممثل بتحويلات نقطية أساسها دوال كثيرات الحدود في الفضاء  $IR^2$

نبدأ دراستنا برسم منحنيات التشعب المحصل عليها بطرق تحليلية و حسابية، مع توضيح نقاط التشعب ذات اشتراك من الدرجة 2. نقوم بتحليل الاستقرار، تشعبات النظام، العناصر الجاذبة و حوض اجتذابها. ننشئ المجموعات المتبادلة و المنحنيات الثابتة التي تمر على النقاط الصامدة أو الدورات من نوع عنق كما أننا نعرض المنفعة و أهمية نقاط التقاطع بين هاتين المنحنيين لما لهم من أهمية كبيرة في تبيان خصائص المرور من تحويلات نقطية غير عكوسة (اندومورفيزم) إلى تحويلات عكسية (ديفيومورفيزم) و العناصر الجاذبة الفوضوية.

في هذا البحث نهتم بدراسة جزأين رئيسيين :

**الجزء الأول** مخصص لتعليل المرور من تحويل نقطي غير عكوس ذو البعد 1 إلى تحويل نقطي عكسي من نوع "HENON" المعمم و تعريف الخصائص المشتركة بين التشعبات ذات الاشتراك من الدرجة 1 و 2.

**الجزء الثاني** يخص الدراسة في الفضاء ، العناصر الجاذبة من نوع نقاط صامدة أو دورات و حوض اجتذابها. الدراسة الأحادية الحرجة معرفة، و تتمثل في منحنيات التبادل بالنسبة للتحويلات النقطية العكسية و خطوط حرجة بالنسبة للتحويلات النقطية الغير عكوسة ذات البعد 2. التقاطع و الطوي لهذه المنحنيات المتبادلة في نقاط أساسية و ثانوية تسمح بفهم كيفية نشأة العنصر الجاذب و بعض الخصائص المهمة عندما يكون عنصر التمديد C يؤول إلى الصفر و هلاك هذه المنحنيات على طول محور الفواصل  $y=0$ .

الكلمات الاستدلالية: العنصر الجاذب، التشعب، التنوعات الثابتة.

# RÉSUMÉ

---

Cette thèse présente les résultats de l'étude théorique et numérique d'un système dynamique de populations. Le système est modélisé par une transformation bidimensionnelle ponctuelle (notée  $T_1$ ) basée sur des fonctions polynomiales.

Nous commençons notre étude par le tracé des courbes de bifurcations obtenues par des méthodes analytico-numériques, et nous mettons en évidence les points de bifurcations de codimension-2. Nous analysons la stabilité, les bifurcations du système, les attracteurs et leurs bassins d'attraction. Nous construisons les ensembles de commutations et les courbes invariantes passant par des points fixes ou cycles de type col et définissons l'utilité de certains points d'intersection entre ces deux courbes qui sont d'une très grande importance pour la description des propriétés d'immersion d'endomorphismes dans des difféomorphismes et des attracteurs chaotiques.

Cette thèse comporte deux grandes parties. La première est consacrée à justifier l'immersion d'un endomorphisme en dimension 1 dans un difféomorphisme bidimensionnel de type Hénon généralisé et à définir les propriétés communes relatives aux bifurcations de codimension 1 et 2. La seconde partie concerne l'étude, dans le plan de phase, des attracteurs de type points fixes ou cycles et leurs bassins d'attraction. Les singularités critiques sont déterminées, elles représentent les courbes de commutations pour les difféomorphismes et les courbes critiques pour les endomorphismes de dimension 2. L'intersection et le pliage de ces courbes de commutations en des points principaux et secondaires permettent de comprendre la structure de l'attracteur et quelques propriétés importantes quand le paramètre de prolongement  $c$  tend vers zéro et leur écrasement sur l'axe  $y = 0$ .

MOTS CLÉS : Attracteur, bifurcation, variétés invariantes.

# ABSTRACT

---

This thesis presents the results of theoretical and numerical study of a population dynamics. The system is modeled by a two-dimensional transformation (denoted by  $T_1$ ) based on polynomial functions.

We begin our study by plotting bifurcation curves obtained by analytico-numerical methods, and we highlight the bifurcation points of codimension-2. We analyze the stability, the bifurcations of the system, the attractors and their basins of attraction. We construct the commutation sets and the invariant curves passing through fixed points or cycles of the saddle type and define the utility of certain points of intersection between these two curves, which are very important for the description of properties on the embedding of endomorphisms in diffeomorphisms and chaotic attractors.

This thesis has two main parts. The first is devoted to justify the immersion of an endomorphism in dimension 1 into a two-dimensional diffeomorphism of generalized Henon-like and to define their common properties associated with bifurcations of codimension-1 and -2. The second part concerns the study of the attractors (fixed points or cycles type) and their basins of attraction in the phase plane. The critical singularities are considered, they represent the commutation sets for diffeomorphisms and critical curves for endomorphisms in the plane. The intersection and the folding of these commutation curves in principal and secondary points permit to understand the structure of the attractor and some important properties when the parameter of extension  $c$  tends towards zero and their crushing on the axis  $y = 0$ .

KEY WORDS : Attractor, bifurcation, invariant manifolds.

# *Dédicace*

Je dédie ce travail :

- A la mémoire de mon père :  
Abd El Ghani Selmani (1956-2000) en signe de reconnaissance de l'immense bien qu'il m'a fait concernant mon éducation qui aboutit aujourd'hui à la réalisation de cette thèse. Ses conseils et ses bénédictions n'ont jamais fait défaut, que Dieu le tout puissant lui accorde son paradis éternel (Amin).

- A ma mère
- A mes soeurs Samia et Amina

A mes parents,  
Une profonde marque de reconnaissance.

# Remerciements

Au terme de ce travail, je remercie tout d'abord DIEU, qui m'a donné force, et courage afin d'élaborer ce mémoire.

Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation d'Annaba. Ils ont été rendus possibles grâce à l'accueil et au soutien du directeur de laboratoire Monsieur le Professeur Djellit Ali ce qui m'a permis de finir ma thèse dans de bonnes conditions.

J'adresse mes vifs remerciements à ma Directrice de thèse, Professeur Djellit Ilham. Je suis très reconnaissante de la confiance qu'elle m'a toujours témoignée au cours de ce doctorat. Qu'elle trouve ici toute ma reconnaissance pour son suivi attentif, son soutien scientifique et moral, ses conseils, ses remarques constructives et surtout sa disponibilité.

Je remercie Monsieur Ferchichi Mohamed Reda Maître de Conférences à l'Université Badji Mokhtar - Annaba qui m'a fait l'honneur en présidant mon jury, pour son aide scientifique et ses conseils.

Je remercie vivement Monsieur Haiour Mohamed Professeur à l'Université Badji Mokhtar - Annaba de m'honorer de sa présence en tant qu'examineur à ce jury.

Je remercie Monsieur Maouni Massaoud Maître de conférences à l'Université de Skikda d'avoir pris la peine d'examiner ce travail et m'honorer de sa présence parmi les membres de jury.

Je remercie profondément Monsieur Boussetila Nadjib Professeur à l'Université 8 Mai 1945 Guelma de sa participation au jury et pour le temps consacré à la lecture de ce travail en tant qu'examineur, pour ses remarques pertinentes et fructueuses, pour son aide scientifique pendant ma formation doctorale, je lui exprime mes profonds respects et toute ma gratitude.

Je souhaite également adresser mes remerciements à Monsieur Pierre Spiterri, Professeur à irit ENSEEIHT, pour son accueil à l'institut de recherche en

informatique de Toulouse, pour son aide et grâce à son accueil, j'ai eu la chance de faire des contacts avec d'autres professeurs dans mon domaine de recherche.

Je remercie Monsieur Abdel-Kaddous Taha, Professeur à l'université de Toulouse (France), de m'avoir accueilli au Département de Génie Electrique et Informatique de l'Institut National des Sciences Appliquées "INSA" de Toulouse, pour son intérêt à ce travail, pour son aide et ses conseils.

Je ne saurais trouver les mots nécessaires pour exprimer ma profonde gratitude envers ma famille pour leur réconfort moral et affectif prodigué sans relâche.

Mes vifs remerciements vont au Chef du Département de Mathématiques ainsi qu'à tous les collègues et les ami(e)s.

Enfin, merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.





# Principales notations utilisées

$B(x, r, p, q)$  : la fonction de Blumberg en dimension un dépendant de trois paramètres réels  $r, p, q$ .

$I$  : matrice identité.

$\det J$  : déterminant de la matrice jacobienne.

$\text{tr} J$  : trace de la matrice jacobienne.

$S_i$  ( $i = 1, 2$ ) : valeurs propres ou multiplicateurs.

$(k, j)$  : cycle d'ordre  $k$ ,  $j$  caractérise l'ordre d'échange des  $k$  points du cycle.

$\Lambda_{k_0}^j$  : une courbe de bifurcation "nœud-col" ou "fold" ou "pli".

$\Lambda_k^j$  : une courbe de bifurcation "doublement de période" ou "flip".

$N_i$  ( $i > 0$ ) : points nœuds paramétriques (points de codimension-deux).

$p_{BB}$  : point de la bifurcation big bang.

$O$  : est l'origine ou le point fixe  $(0, 0)$ .

$N_s^k$  : cycle d'ordre  $k$  ( $k \geq 1$ ) de type nœud stable.

$N_I^k$  : cycle d'ordre  $k$  ( $k \geq 1$ ) de type nœud instable.

$C^k$  : cycle d'ordre  $k$  ( $k \geq 1$ ) de type col.

$C_k^j$  : point cuspidal.

$C_{ij}^k$  : les points du cycles d'ordre  $k$ , ( $i, j$  deux entiers naturels).

$TNI$  : transformations non inversibles.

$LC_{-1}$  : le lieu des points pour lequel le  $\det J$  de  $T$  s'annule.

$LC = LC_0$  : ligne critique de rang 1, image de la courbe  $LC_{-1}$ .

$LC_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) : itérations, les images de la courbe  $LC_{-1}$ .

$E_i$  ( $i \geq 0$ ) : les ensembles de commutations.

$S_i$  ( $i \geq 0$ ) : les points des intersections des  $E_i$  et  $E_{i+1}$ .

$P_i$  ( $i \geq 0$ ) : les points de pliage.

$Z_i$  : zones, ( $i$  entier naturel).

$B(A)$  ou  $(D)$  : bassin d'attraction (domaine) de l'attracteur  $A$ .

$\Delta_c$  : la diagonale ou l'asymptote dépendant de  $c$ .

$\omega$  : la droite décrivant la stabilité du point fixe  $(0, 0)$ .

$S$  : le plan de caractérisation de la stabilité du point fixe  $O$ .

$CI$  : courbe invariante.

$W^u(q)$  : la variété instable d'un point fixe col  $q$ .

$W^s(q)$  : la variété stable d'un point fixe col  $q$ .

$C_{ext}$  : l'extrémum.



# Liste des figures

## **Figures-Chapitre1 :**

Figure 1 : Trajectoires au voisinage d'un point fixe [1.1]

Figure 2 : Courbe invariante d'un point fixe col [1.2]

Figure 3 : Bifurcation fold ou nœud-col (Pli) de points fixes [1.3]

Figure 4 : Bifurcation transcritique de points fixes, et sa dégénérescence après perturbation du système [1.4]

Figure 5 : Bifurcation fourche supercritique, sous-critique de points fixes et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système [1.5]

Figure 6 : Bifurcation flip ou doublement de période supercritique et sous critique [1.6]

Figure 7 : Structure de bifurcations boîtes emboîtées [1.7]

Figure 8 : Représentation d'une zone échangeur dans le plan paramétrique  $(\lambda_1, \lambda_2)$  [1.8]

Figure 9 : Représentation d'une zone col dans le plan paramétrique  $(\lambda_1, \lambda_2)$  [1.9]

Figure 10 : Représentation d'une zone source dans le plan paramétrique  $(\lambda_1, \lambda_2)$  [1.10]

Figure 11 : Bifurcation d'un domaine  $D_0$  connexe  $\leftrightarrow$  non connexe [1.11]

Figure 12 : Bifurcation d'un bassin simplement connexe  $\leftrightarrow$  bassin multiplement connexe [1.12]

Figure 13 : Bifurcations d'un changement du nombre d'îlots [1.13]

## **Figures-Chapitre2 :**

Figure 1 : Points fixes pour différentes valeurs de  $(r, p)$  [2.1]

Figure 2 : Courbes de bifurcation dans le plan  $(p, r)$  [2.2]

Figure 3 : Diagramme de bifurcation  $(r, x)$  pour  $p = 3, q = 2, c = 0.1$  [2.3]

Figure 4 : Courbes de bifurcation dans le plan  $(q, r)$  [2.4]

Figure 5 : Courbes de bifurcation dans le plan  $(p, q)$  [2.5]

Figure 6 : Courbes de bifurcation dans le plan  $(p, c)$  [2.6]

Figure 7 : Courbes de bifurcation dans le plan  $(q, c)$  [2.7]

Figure 8 : Courbes de bifurcation dans le plan  $(c, r)$  [2.8]

## **Figures-Chapitre3 :**

Figure 1 : Diagrammes de bifurcation en dimension deux dans le plan  $(c, r)$  [3.1]

Figure 2 : Balayage pour  $p = q = 2$ , [3.2]

Figure 3 : Points cols et variétés invariantes  $r = 2, p = 2, q = 1.5, c = 0.2$ , [3.3]

Figure 4 : Attracteurs et variétés invariantes  $r = 5, p = 2.5, q = 3, c = 0.9$ , [3.4]

Figure 5 : Courbe hétérocline des points cols  $r = 10$ , [3.5]

Figure 6 : Attracteur étrange  $r = 11.5, p = 3.5, q = 2.5$  et  $c = 0.21$ , [3.6]

Figure 7 : Attracteur étrange  $r = 5$ ,  $p = 2.5$  et  $c = 0.084$ , [3.7]

Figure 8 : Les trois points fixes sont instables. Après une bifurcation de contact entre les deux bassins, le bassin du cycle-2 qui était à l'intérieur se retrouve à l'extérieur et disparaît [3.8]

Figure 9 : Le bassin rouge est associé avec le point fixe trivial. Le grand bassin du cycle-2 se divise en deux suite à des bifurcations homoclines et hétéroclines [3.9]

Figure 10 : Plan de phase pour le cas  $p = 2$ ,  $q = 3$ , [3.10]

Figure 11 : Plan de phase pour  $c = 0.952$ ,  $d = -0.1$ , [3.11]

Figure 12 : Plan de phase pour le cas  $p = 3$ ,  $q = 2$ , [3.12]

Figure 13 : Plan de phase pour le cas  $d = -0.355$ ,  $p = 3$  et  $q = 2$ , [3.13]

Figure 14 : L'existence d'un cycle-4 avec un point fixe instable, [3.14]

Figure 15 : Attracteur chaotique pour  $d = 0.4$ , [3.15]

Figure 16 : Attracteur chaotique pour  $d = 0.403$ , [3.16]

Figure 17 : Coexistence de deux points fixes dans les deux bassins vert et beige et un attracteur chaotique d'ordre 3 dans le bassin rouge, [3.17]

Figure 18 : Zoom sur l'attracteur chaotique d'ordre 3 [3.18]

#### **Figures-Chapitre4 :**

Figure 1 : Les ensembles de commutation  $E_i$ ,  $r = 2.2$ ,  $c = 0.7$ , (article Mira [26]) [4.1]

Figure 2 : Les ensembles de commutation  $E_i$ ,  $r = 2.2$ ,  $c = 0.7$ , [4.2]

Figure 3 : Les ensembles de commutation  $E_i$ ,  $r = 3$ ,  $c = 0.1$ ,  $C_{ext} = 0$  [4.3]

Figure 4 : Les ensembles de commutation  $E_i$ ,  $r = 3$ ,  $c = 0.1$ ,  $C_{ext} = 1$  [4.4]

Figure 5 : Les ensembles de commutation  $E_i$ ,  $r = 3$ ,  $c = 0.1$ ,  $C_{ext} = 0.6$  [4.5]

Figure 6 : la variété instable  $W^u(q_2)$ ,  $r = 2.2$ ,  $c = 0.7$  [4.6]

Figure 7 : Attracteur de Hénon pour  $p = 2.5$ ,  $q = 2$ ,  $r = 4.6$ ,  $c = 0.1$  [4.7]

Figure 8 : Variété instable et ensembles de commutation,  $r = 1$ ,  $c = 0.8$ ,  $p = 3$ ,  $q = 2$  [4.8]

Figure 9 : Variété instable et ensembles de commutation,  $r = 2$ ,  $c = 1$ ,  $p = 3$ ,  $q = 2$  [4.9]

Figure 10 : Variété instable et ensembles de commutation,  $r = 2$ ,  $c = 1.1$ ,  $p = 3$ ,  $q = 2$  [4.10]

L'étude des systèmes dynamiques non linéaires remonte à la fin du  $XIX^{\text{ème}}$  siècle, début du  $XX^{\text{ème}}$  siècle avec, entre autres, les travaux de Poincaré et Liapounov, essentiellement en liaison avec des problèmes de mécanique.

A partir de 1930, Mandelstam puis Andronov et son école de pensée travaillant sur les systèmes dynamiques ont développé des méthodes d'études analytiques et qualitatives dégagant les applications interdisciplinaires liées à la notion féconde de *bifurcation* due à Poincaré. Les systèmes dynamiques paramétrés peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un point fixe, un cycle, un attracteur . . .) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (l'attracteur du système était un point fixe et devient un cycle par exemple). Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation.

Sur un intervalle de valeurs d'un paramètre qui contient une valeur de bifurcation, un système est donc structurellement instable. L'analyse de bifurcations a pour objectif de localiser ces éventuelles valeurs particulières des paramètres, et peut être un outil pour l'estimation dirigée de paramètres. En effet, ayant une idée grossière des valeurs des paramètres à estimer, une analyse de bifurcation peut indiquer ceux pour lesquels une estimation précise est nécessaire. Les paramètres dont l'estimation grossière est proche d'une ou plusieurs valeurs de bifurcation doivent être estimés finement car ils ont beaucoup d'influence sur le comportement du système. Mais, les paramètres dont la variation n'affecte pas le comportement du système ne nécessitent pas de travail supplémentaire. L'étude analytique a connu ses plus grands développements avec l'Ecole de Kiev (Krylov, Bogoliubov, Mitropolski). Au Japon, Hayashi a poussé les applications en direction des circuits électriques et électroniques. Depuis une vingtaine d'années, le nombre de chercheurs de tous pays s'intéressant à ce type de travaux est allé croissant pour créer un pôle d'intérêt majeur dans des disciplines aussi diverses que les mathématiques pures ou appliquées, la mécanique, la cinétique chimique, la physique des particules, la biologie, l'électronique ...

Les travaux de Friedland et Milnor [19] sur les difféomorphismes polynômiaux du plan avec Jacobien constant, comme applications modélisant des systèmes dynamiques, ont été d'une grande

importance dans notre étude des systèmes dynamiques inversibles. En effet, ils ont montré que ces applications étaient conjuguées à des compositions d'applications de Hénon généralisées. Une application de Hénon généralisée est définie sur plan par :

$$T(x, y) = (y + p(x), -bx)$$

où  $p(x)$  est un polynôme et  $b \neq 0$ . Dans notre cas  $p(x) = ax^{p-1}(1-x)^{q-1}$ , ou  $a, p, q$  sont trois paramètres réels.

Cette thèse ne vise pas à un exposé formel de résultats en systèmes dynamiques sous forme d'un enchaînement de définitions - propositions - conjectures. Son objet est une contribution à un catalogue de situations plus ou moins complexes pouvant se rencontrer au cours de l'étude de systèmes dynamiques, donc l'objet de cette dernière consiste en une étude de la "dynamique complexe" générée par des systèmes non linéaires régis par des équations aux récurrences appelées également transformations ponctuelles notés  $T$  et à leurs applications dans les techniques de l'ingénieur. Le terme "dynamique complexe" est utilisé pour caractériser tout comportement à caractère non périodique, notamment les régimes chaotiques.

### **Problématique et Contenu de la thèse**

Notre thèse concerne l'étude des systèmes dynamiques de populations, ces derniers sont non linéaires dépendant de quatre paramètres. Nous avons mis en évidence les propriétés dynamiques de bassins, déterminé les différents attracteurs réguliers et chaotiques et caractérisé les structures de bifurcations.

Pour cela, nous avons considéré deux parties principales : la première concerne le passage ou immersion d'un endomorphisme unidimensionnel à un difféomorphisme bidimensionnel et construit les plans de bifurcations. La seconde partie est dédiée au plan de phase et à l'illustration des bassins et des différentes singularités tels que les ensembles de commutations et les lignes critiques. Les transformations non inversibles sont caractérisées par la présence dans l'espace de phase d'une singularité très importante appelée ligne critique  $LC$  ; cette notion a été définie dans les travaux de Mira . Pour les transformations inversibles, cette singularité est inexistente mais remplacée par l'ensemble (ou courbe) de commutation ; un concept très intéressant lié à la première singularité d'une manière subtile qui sera précisée par la suite.

Les plans de bifurcations nous permettent de comprendre le comportement des systèmes dynamiques considérés en mettant en évidence les bifurcations fondamentales. Les courbes critiques et les courbes de commutations jouent le même rôle que les courbes de bifurcations mais dans le plan de phase.

Cette thèse contient quatre chapitres. Elle est organisée de la manière suivante :

**Chapitre1** : Consiste à rappeler quelques notions de base concernant les singularités des transformations non linéaires unidimensionnelles et bidimensionnelles, et leurs propriétés qui ont une grande importance dans la compréhension des comportements complexes. Nous étudions notamment la notion de bifurcation, de singularités et de bassins d'attraction. Nous précisons la nature

des différentes bifurcations qui interviennent dans les différents chapitres et nous indiquons les notations utilisées pour chacune d'elles. Nous proposons des définitions générales pour les ensembles de commutations.

**Chapitre2** : Les différents plans paramétriques, faisant intervenir les paramètres se trouvant dans les systèmes étudiés, sont considérés dans lesquels les différentes courbes de bifurcations sont tracées via des méthodes analytico-numériques. Ces plans appelés aussi diagrammes de bifurcations nous permettent de comprendre le comportement dynamique lié aux systèmes considérés de type Blumberg en dimension deux. Ce travail a été accompli grâce à la programmation d'algorithmes numériques permettant la détermination des bifurcations fondamentales des transformations ponctuelles d'ordre 2.

**Chapitre3** : Le plan de phase est considéré où les points du cycle d'ordre  $k$  pour  $k \geq 1$ , les singularités d'ordre supérieur ou égal à 1 sont calculés analytiquement et représentés graphiquement. Dans ce travail, nous nous sommes inspirés des travaux Aleixo [46], [47] en dimension un. Aleixo et *al.* ont introduit quelques notions et résultats de base sur les densités de probabilités, ils ont montré que la récurrence "logistique" est proportionnelle à la densité Beta qui sera définie par la suite. Ils ont considéré une approche de cette densité par la récurrence de Verhulst qui symbolise l'étude de naissance et de mortalité d'une espèce de population.

**Chapitre4** : Nous présentons de nouvelles propriétés relatives aux transformations inversibles, ces dernières sont caractérisées par la présence des ensembles de commutations. Ces ensembles (courbes) sont définis dans le cas général, Ils jouent un rôle important dans les bifurcations des attracteurs et des bassins.

Les transformations non inversibles se différencient des transformations inversibles, dans le cas bidimensionnel, par le fait qu'il existe des régions notées  $Z_i$  dans le plan de phase pour lesquelles, un point peut posséder zéro, un ou plusieurs antécédents de premier rang. Ce nombre d'antécédents est constant pour une région déterminée et égal à  $i$ . Ces différentes régions sont séparées par les *lignes critiques LC*. Cette notion centrale, dans l'étude des endomorphismes définissant des systèmes dynamiques, a été introduite pour la première fois par Mira [34]. C'est une généralisation de la notion de points critiques (extremums locaux) dans le cas unidimensionnel. Les ensembles de commutation sont définis grâce à cette notion de points critiques qui leur transfèrent leurs propriétés.

Pour les bifurcations où les lignes critiques interviennent, on citera les travaux de Mira, Roubellat et Gumowski [42], [26] pour les bifurcations du type "bassin simplement connexe  $\leftrightarrow$  bassin non connexe"; Barugola, Cathala et Mira [8], [9] pour les bifurcations du type "bassin simplement connexe  $\leftrightarrow$  bassin multiplement connexe"; ainsi que les travaux de Mira et Fournier-Prunaret [40] pour l'étude de la fractalisation des bassins d'attraction.

Nous citerons les travaux Frouzakis, Gardini, Kevrekidis, Millerioux et Mira, pour le rôle des lignes critiques dans les bifurcations d'ensembles invariants, tels les courbes fermées invariantes,

les variétés stables et instables.



# Table des matières

<b>Principales notations utilisées</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Définitions et propriétés générales sur les systèmes dynamiques</b>	<b>1</b>
1.1 Ensembles stables et instables . . . . .	4
1.2 Attracteur, attracteur chaotique et chaos . . . . .	6
1.3 Bassin d'attraction . . . . .	8
1.4 Bifurcation concernant les bassins d'attraction . . . . .	9
1.5 Plan paramétrique - Bifurcations . . . . .	10
1.6 Structure feuilletée d'un plan paramétrique . . . . .	15
1.7 Plan de phase d'une transformation non inversible . . . . .	18
1.8 Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des basins . . . . .	19
<b>2 Plan paramétrique</b>	<b>23</b>
2.1 Rappels et définitions . . . . .	23
2.2 Les transformations de Hénon généralisées . . . . .	24
2.3 Le passage d'un endomorphisme en dimension-1 au difféomorphisme de dimension-2	26
<b>3 Plan de phase</b>	<b>47</b>
3.1 Le passage d'un difféomorphisme à un endomorphisme de dimension deux . . . . .	56
<b>4 Les ensembles de commutation</b>	<b>61</b>
4.1 Calcul des ensembles de commutation dans le cas général . . . . .	64
4.2 Les ensembles de commutation et l'application inverse . . . . .	68
4.3 Les courbes invariantes du difféomorphisme quadratique . . . . .	68
4.4 Quelques applications . . . . .	70
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>73</b>

<b>Bibliographie</b>	<b>75</b>
<b>Programme MAPLE</b>	<b>79</b>

# Chapitre 1

## Définitions et propriétés générales sur les systèmes dynamiques

Les récurrences interviennent dans plusieurs disciplines des mathématiques, depuis la théorie des nombres jusqu'aux équations fonctionnelles.

Elles apparaissent principalement dans la description des processus tels que les sciences de la vie, les sciences physiques et l'ingénierie. Leur importance a conduit de nombreux groupes de chercheurs à s'intéresser à l'étude des systèmes décrits par les récurrences (ou transformations ponctuelles, ou itérations).

Les systèmes dynamiques sont le plus souvent modélisés sous la forme d'équations différentielles d'ordre  $p$  :

$$\frac{dX}{dt} = F(X), X \in \mathbb{R}^p, p = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \quad (1.2)$$

L'équation (1.1) est dite *autonome* car  $F$  est indépendante du temps, (1.2) est dite *non autonome*.

Ce type d'équations fait intervenir une variation continue du temps.

Certains systèmes peuvent également être modélisés par des équations du type :

$$X_{n+1} = F(X_n), ; X \in \mathbb{R}^p, p = 1, 2, \dots; n = \text{entier} \quad (1.3)$$

$$X_{n+1} = F(X_n, n) \quad (1.4)$$

L'équation (1.3) est autonome, (1.4) est non autonome, ici  $p$  est appelé la dimension des équations (1.3) et (1.4). Elles sont appelées *transformations ponctuelles* ou *réurrences*, car elles transforment le point  $X_n$  de  $\mathbb{R}^p$  en un autre point  $X_{n+1}$ .

Ce type de transformation, notée  $T$ , possède deux types de singularités : les singularités de type *point fixe* (solution de l'équation algébrique  $X = TX$ ), et de type *cycle d'ordre  $k$*  (solution de l'équation algébrique  $X = T^k X$ ,  $X \neq T^l X$ ,  $1 < k$ ).

L'étude des transformations ponctuelles ou théorie de l'itération s'est considérablement développée depuis le début du siècle essentiellement grâce aux travaux de Koenig, Lemeray, Lattès, Hadamard et dans les vingt dernières années, l'utilisation croissante des ordinateurs a encore contribué à son essor.

L'étude des réurrences présente un intérêt double, car si celles-ci peuvent servir à modéliser des systèmes à information discrète, il est également possible d'étudier des équations différentielles ordinaires par leur intermédiaire.

Certains systèmes différentiels et certaines transformations ponctuelles peuvent dépendre d'un ou plusieurs paramètres, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= F(X, \Lambda) \\ \text{ou} \\ X_{n+1} &= F(X_n, \Lambda) \end{aligned} \tag{1.5}$$

où  $\Lambda$  est un vecteur paramètre de  $\mathbb{R}^p$ ,  $p = 1, 2, \dots$

## Singularités

On a deux types de singularités de dimension 0 pour la transformation  $T$  : les points fixes et les cycles (appelés aussi orbites périodiques).

### Les points fixes

Un point fixe  $X^*$  est un point de l'espace de phase vérifiant :

$$T(X^*) = X^* \tag{1.6}$$

### Les cycles d'ordre $k$ ( $k$ entier)

C'est la généralisation d'un point fixe lorsqu'on considère la récurrence obtenue après  $k$  applications de  $T$  notée  $T^k$ ,  $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$ ,  $k$  fois. Les  $k$  points  $X_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  avec  $k > 1$ , appartenant à un cycle d'ordre  $k$  vérifient les deux relations :

$$\begin{cases} X_i^* = T^k(X_i^*) \\ X_i^* \neq T^j(X_i^*), 1 \leq j < k \text{ (j et k entiers)} \end{cases} \quad (1.7)$$

Un cycle d'ordre  $k = 1$  est un point fixe.

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre  $k$  est appelé point périodique d'ordre  $k$ . Il peut également apparaître des singularités dites de dimension un. Ce sont des courbes invariantes par l'application de la transformation  $T$  ou  $T^k$ .

## Stabilité des singularités

La notion de multiplicateur permet de caractériser la stabilité de ces singularités (points fixes et cycles). Les multiplicateurs sont définis lorsque  $T$  est différentiable aux points  $X_i^*$ ,  $i = 1 \dots k$ .

a) Lorsque la dimension de la récurrence  $p = 1$ , c'est-à-dire  $X \in \mathbb{R}$ , le multiplicateur  $S$  d'un point fixe  $X = X_i^* = X^*$  est :

$$S = T'(X^*) = \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{x=X^*} \quad (1.8)$$

et le multiplicateur  $S$  d'un cycle d'ordre  $k$  ( $X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$ ) est :

$$S = \prod_{i=1}^k T'(X_i^*) = \prod_{i=1}^k \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{x=X_i^*} \quad (1.9)$$

Un point fixe ou un cycle d'ordre  $k$  est dit attractif si  $|S| < 1$ , et répulsif si  $|S| > 1$ .

b) Lorsque  $p > 1$ , les multiplicateurs d'un point fixe  $X^*$  ou d'un cycle d'ordre  $k$  ( $X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*$ ) sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de  $T(X^*)$  ou de  $T^k(X_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Lorsque  $p = 2$ , on associe à un point fixe ou à un cycle, deux multiplicateurs  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) qui sont les valeurs propres de la matrice jacobienne ou de la matrice des dérivées partielles de  $T^{(k)}$ , ( $k \geq 1$ ).

On distingue les singularités suivantes :

1. **Col** :  $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$ ,  $|S_1| < 1$  et  $|S_2| > 1$ .

Un col est un point instable :

- de type 1, si  $S_1 > 0$  et  $S_2 > 0$ ;
- de type 2, si  $S_1 > 0$  et  $S_2 < 0$  (ou  $S_1 < 0$  et  $S_2 > 0$ );
- de type 3, si  $S_1 < 0$  et  $S_2 < 0$ .

2. **Noeud** :  $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$

— stable, si  $|S_i| < 1$  ( $i = 1, 2$ )

— instable, si  $|S_i| > 1$  ( $i = 1, 2$ );

3. **Foyer** :  $S_1, S_2 \in \mathbb{C}$ ,  $S_1 = \rho e^{i\theta}$ ,  $S_2 = \rho e^{-i\theta}$ ,  $\rho = |S_i|$ ,  $i = 1, 2$ .

— stable, si  $\rho < 1$

— instable, si  $\rho > 1$ ;

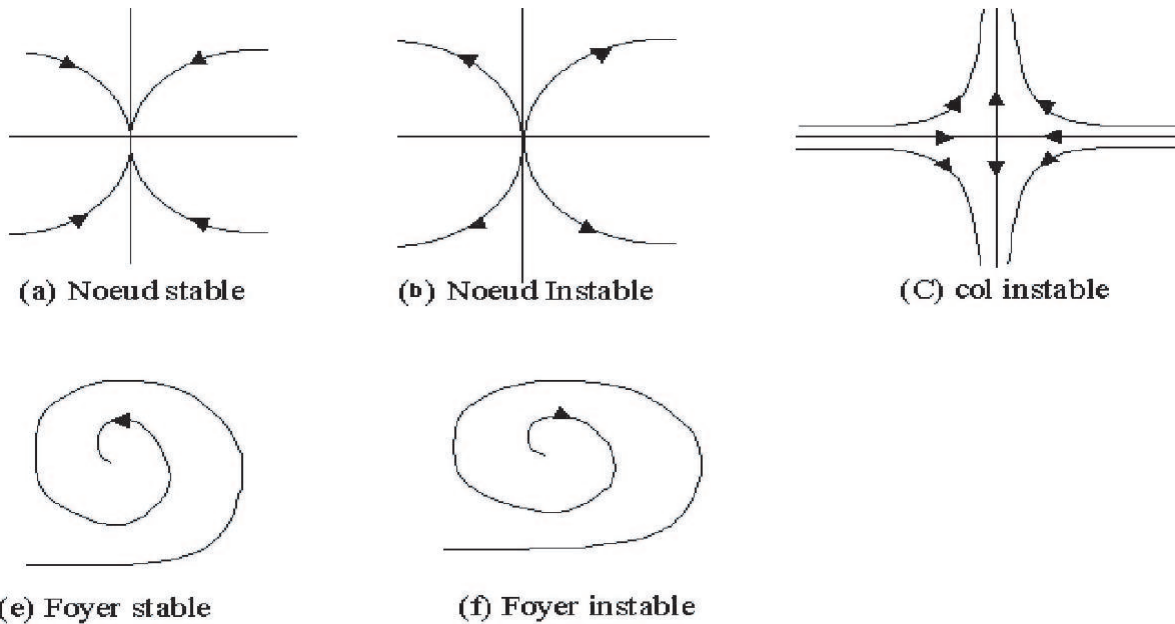


FIGURE 1.1 – Trajectoires au voisinage d'un point fixe.

## 1.1. Ensembles stables et instables

Pour une transformation ponctuelle  $T$  définie par (1.5), on peut définir les ensembles stables et instables associés à un point fixe.

### Définition 1.1

Soit  $X^*$  un point fixe répulsif et  $U$  un voisinage de  $X^*$ .

- On appelle  $W_{loc}^i(X^*)$  ensemble instable local ou variété instable locale (c'est à dire dans  $U$ ) de  $X^*$ , l'ensemble des points de  $U$  ayant une séquence d'antécédents successifs dans  $U$  qui converge vers  $X^*$ .

- On appelle  $W^i(X^*)$  ensemble instable global de  $X^*$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^p$  ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers  $X^*$ .

Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^i(X^*) = \{X \in U : X_{-n} \in T^{-n}(X) \rightarrow X^*, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_{-n} \in U\}. \quad (1.10)$$

$$W^i(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^p : X_{-n} \in T^{-n}(X) \rightarrow X^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^i(X^*)). \quad (1.11)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble instable global :

**P1-**  $W^i(X^*)$  est invariante par rapport à  $T$ , c'est-à-dire,  $T[W^i(X^*)] = W^i(X^*)$ .

**P2-** Si  $T$  est un endomorphisme, en général  $W^i(X^*)$  n'est pas invariant par rapport à  $T^{-1}$  et on a  $W^i(X^*) \subseteq T^{-1}[W^i(X^*)]$ . L'invariance de  $W^i(X^*)$  par rapport à  $T^{-1}$  a lieu lorsque  $T$  est inversible.

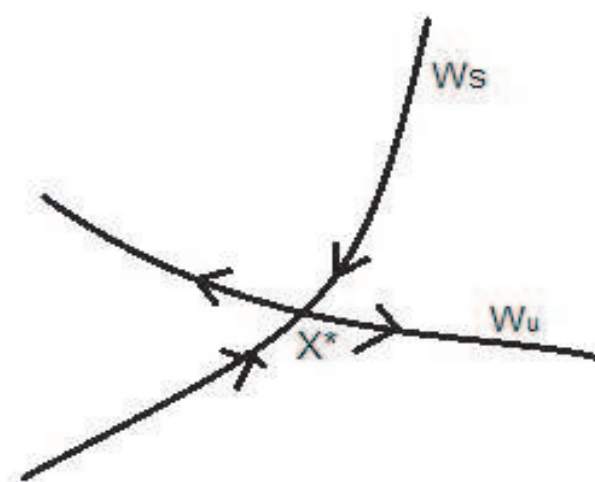


FIGURE 1.2 – Courbes invariantes d'un point fixe col.

### Définition 1.2

Soit  $X^*$  un point fixe  $T$  répulsif ou attractif.

- On appelle  $W_{loc}^s(X^*)$  ensemble stable local ou variété stable locale (c'est à dire dans  $U$ ) de  $X^*$ , l'ensemble des points de  $U$  dont la séquence d'images successives appartient à  $U$  et converge vers  $X^*$ .

- On appelle  $W^s(X^*)$  ensemble stable global de  $X^*$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^p$  dont la séquence d'images successives converge vers  $X^*$ .

Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^s(X^*) = \{X \in U : X_n = T^n(X) \rightarrow X^*, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_n \in U\}. \quad (1.12)$$

$$W^s(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^p : X_n = T^n(X) \rightarrow X^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(W_{loc}^s(X^*)). \quad (1.13)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble instable global :

**P3-**  $W^s(X^*)$  est invariante par rapport à  $T^{-1}$  :  $T^{-1}[W^s(X^*)] = W^s(X^*)$ .

**P4-** Si  $T$  est un endomorphisme, en général  $W^s(X^*)$  n'est pas invariant par rapport à  $T$  et on a :  $T[W^s(X^*)] \subseteq W^s(X^*)$ . L'invariance de  $W^s(X^*)$  par rapport à  $T$  a lieu lorsque  $T$  est inversible.

**Remarque 1.1**

- (1) Si  $X^*$  est un point fixe attractif l'ensemble stable global est son bassin d'attraction.
- (2) Si  $T$  est un difféomorphisme les ensembles stables et instables globaux sont des variétés.
- (3) Dans le cas d'un point fixe  $X^*$  de type nœud instable ou foyer instable, l'ensemble stable global de  $X^*$  se réduit à  $X^*$  lui même lorsque  $T$  est inversible. Lorsque  $T$  est non inversible l'ensemble stable local de  $X^*$  se réduit à  $X^*$  lui même et l'ensemble stable global de  $X^*$  est constitué de tous les antécédents de tout rang de  $X^*$ . Ceci s'écrit :

$$W^s(X^*) = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(W_{loc}^s(X^*)) \text{ et } \forall X \in W^s(X^*); \exists m \in \mathbb{N} : T^m(X) = X^*. \quad (1.14)$$

- (4) Les définitions des ensembles stables et instables d'un cycle d'ordre  $k$  se déduisent des définitions précédentes, en considérant les points du cycle comme des points fixes de  $T^k$ .

## 1.2. Attracteur, attracteur chaotique et chaos

Dans un système dynamique, il peut exister des singularités plus générales que les points fixes et les cycles ; ce sont les attracteurs. Plusieurs définitions ont été proposées pour ce type de singularités [60], [49], [20].

**Définition 1.3**

Un ensemble fermé invariant  $A$  est attractant s'il existe un voisinage  $U$  de  $A$  tel que :  $T(U) \subset U$  et  $T^n(x) \rightarrow A$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , pour tout  $x \in U$ .

**Définition 1.4**

Un attracteur est un ensemble attractant topologiquement transitif, si seulement si quels que soient les ouverts  $U, V \subset A$ , il existe un entier positif  $k$  tel que :  $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Un attracteur est peut être un point fixe ou un cycle d'ordre  $k$  ou une courbe invariante fermée ou un ensemble plus complexe.

**Définition 1.5**

Soit  $(X, T, f)$  un système dynamique où  $X$  est une variété topologique,  $T$  est l'ensemble  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$ ,  $f$  est une application continue de  $T \times X$  dans  $X$ , vérifiant :  $f(0, x) = x$  et  $f(t_2, f(t_1, x)) = f(t_1 + t_2, x)$  et soit  $\mu$  la mesure de Lebesgue dans  $X$ . Un sous ensemble fermé  $A$  de  $X$  est dit attracteur au sens de Milnor, si

- i  $\mu(D(A)) > 0$ , où  $D(A)$  est le bassin d'attraction de  $A$ .
- ii Pour tout sous ensemble fermé  $A'$  strictement inclus dans  $A$ , on a :

$$\mu(D(A) \setminus D(A')) > 0$$



**Remarque 1.2**

Lorsque le sous ensemble fermé  $A$  vérifie uniquement la condition (i),  $A$  est appelé attracteur faible.

**Définition 1.6**

$A$  est un attracteur minimal au sens de Milnor, si  $A$  est un attracteur au sens de Milnor et s'il ne contient aucun sous-ensemble strict fermé  $A'$ , tel que  $\mu(D(A'))$  soit strictement positive.

**Attracteur chaotique**

Il existe des systèmes dynamiques déterministes très simples, pour lesquels deux trajectoires issues de points de départ dont la différence est trop petite pour être observable, se séparent après un certain temps. Leur distance croît de façon exponentielle, jusqu'à ce que toute mémoire sur le point de départ soit perdue. On appelle ce phénomène "sensibilité aux conditions initiales". Cette propriété du système est caractérisée par des coefficients, appelés exposants de Lyapounov.

On dit que l'on a la propriété de sensibilité aux conditions initiales, si au moins un des exposants de Lyapounov est strictement positif.

**Définition 1.7**

Un attracteur est dit chaotique, s'il a la propriété de sensibilité aux conditions initiales pour presque tout point le constituant (c'est-à-dire sauf pour un ensemble de points de mesure de Lebesgue nulle).

Généralement, un attracteur chaotique est un fractal. Ceci résulte du caractère borné de l'attracteur, des phénomènes de contractions (exposants de Lyapounov négatifs) et d'étirements (exposants de Lyapounov positifs), qui conduisent à un pliage complexe et un feuilletage générant une structure fractale de l'attracteur chaotique. Sa dimension de Lyapounov, qui est une dimension fractale, est alors non entière.

**Chaos**

Il n'existe pas de définition précise du chaos, ce phénomène est très irrégulier sur une période ou dont la période est trop grande pour être mise en évidence le chaos englobe divers comportements non périodiques. Un tel comportement est caractérisé par :

- Existence de cycles attractifs d'ordre infini.
- Coexistence d'une infinité de cycles répulsifs.
- L'absence de cycles attractifs d'ordre fini.

Et dans la transformation que nous allons voir, les mouvements chaotiques sont généralement associés à l'existence d'une infinité de cycles instables, qui influencent le comportement du système vers un comportement chaotique. On distingue deux types du chaos :

### Le chaos stable ou attracteur étrange

Le système évolue d'une manière très désordonnée dans une zone de l'espace sans en sortir, les caractéristiques de cet attracteur sont :

- La dimension de l'attracteur est fractale (non entière).
- Sensibilité aux conditions initiales.

### Le chaos instable ou répulsif étrange

On parle de chaos instable lorsqu'il y a existence d'un transitoire étrange dû à la présence d'une infinité de solutions périodiques instables, et le système évolue d'une manière similaire, mais diverge après un certain nombre d'itérations.

## 1.3. Bassin d'attraction

### Définition 1.8

Le bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  d'un attracteur  $A$  (point fixe, cycle d'ordre  $k$  ou attracteur chaotique) est l'ensemble ouvert des conditions initiales  $x_0$  dont les itérés successifs vont converger vers un attracteur.

### Proposition 1.1

Le bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  est invariant par l'itération inverse  $T^{-1}$ , mais pas nécessairement invariant par  $T$  :

$$T^{-1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}, \quad T(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$$

Lorsque la transformation  $T$  est inversible on a  $T(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ .

### Définition 1.9

La frontière de  $\mathcal{D}$  est notée  $\mathcal{F}$  (ou  $\partial\mathcal{D}$ ). Elle est définie par :

$$\mathcal{F} = \overline{\mathcal{D}} \cap \overline{C(\mathcal{D})},$$

où  $C(\mathcal{D})$  représente l'ensemble complémentaire de  $\mathcal{D}$  et  $\overline{\mathcal{D}}$  (resp.  $\overline{C(\mathcal{D})}$ ) représente l'adhérence de  $\mathcal{D}$  (resp.  $C(\mathcal{D})$ ).

### Remarque 1.3

La relation  $T^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$  implique que  $\mathcal{F}$  doit contenir l'ensemble des antécédents de chacun de ces cycles, c'est à dire que  $\mathcal{F}$  doit contenir l'ensemble stable  $W^s$  de tout cycle de  $T$  appartenant à  $\mathcal{F}$ .

La relation  $T(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$  signifie que la trajectoire image de chaque point de  $\mathcal{F}$  appartient à  $\mathcal{F}$ .

**Remarque 1.4**

Le bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  peut être connexe, multiplement connexe (connexe avec trous) ou non connexe c'est à dire formé d'un nombre fini ou infini de composantes connexes (qui peuvent être simplement ou multiplement connexe) et sa frontière peut être fractale.

## 1.4. Bifurcation concernant les bassins d'attraction

Dans ce paragraphe, nous décrivons les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure du bassin d'attraction, ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection du bassin avec une ligne critique d'une transformation ponctuelle non inversible.

**La bifurcation de contact de type 1.**

Cette bifurcation apparait lorsque la frontière du bassin  $\mathcal{F}$  entre en contact avec  $LC$  a une certaine valeur de bifurcation, elle concerne le changement de la connexité du bassin d'attraction et a lieu lorsque l'intersection entre le bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  et  $LC$  est formée de segments non connexes :

- Bassin connexe  $\rightarrow$  bassin non connexe.
- Bassin non connexe  $\rightarrow$  bassin connexe.
- Bassin simplement connexe  $\leftrightarrow$  bassin multiplement connexe.
- Modification du nombre d'îlots de  $\mathcal{D}$  ou apparition d'une nouvelle arborescence d'îlots.

**La bifurcation de contact de type 2.**

Cette bifurcation apparait lorsque la frontière d'un aire chaotique entre en contact avec la frontière de son bassin immédiat. Après la bifurcation l'aire chaotique se détruit en donnant naissance à un répulseur étrange ou à une modification qualitative des propriétés de l'aire chaotique. Ce répulseur est constitué d'une infinité de cycles instables, de leurs points limites et de leurs antécédents, appartenant à l'aire chaotique avant la bifurcation.

Ces points sont responsables du transitoire chaotique qu'il en résulte, faisant évoluer les trajectoires discrètes du plan de phase soit vers l'infini, soit vers un autre attracteur à distance finie.

**Caractérisation des bassins ridés**

Les bassins d'attraction ridés sont des cas particuliers des bassins d'attraction des systèmes dynamiques [1], [2], [5], [6], [10], [32] et [45].

**Définition 1.10**

Soit  $V$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^2$ . D'après [1] on définit le ridé de  $V$  par :  $V_{rid} = \{x \in V : \mu(B_\delta(x) \cap V)\mu(B_\delta(x) \cap V^c) > 0 \text{ pour tout } \delta > 0\}$

On note :

- $\mu(\cdot)$  la Mesure de Lebesgue.
- $B_\delta(x)$  la boule de centre  $x$  et rayon  $\delta$  tel que :

$$B_\delta(x) = \{y : |x - y| < \delta\} \tag{1.15}$$

- Le complémentaire  $V^c = \mathbb{R}^2 \setminus V$  pour l'existence du bassin ridé, il est connu que les conditions suivantes sont vérifiées :
- Il existe un invariant dans le plan de phase, sa dynamique interne est chaotique.
- L'exposant de Lyapounov normal est négatif, c'est-à-dire l'invariant est un attracteur.
- Il existe d'autres attracteurs.

**1.5. Plan paramétrique - Bifurcations**

Un des problèmes fondamentaux pratiques de la dynamique non linéaire est l'étude des bifurcations dans l'espace paramétrique. Une bifurcation correspond à un changement qualitatif du comportement du système quand le paramètre  $\lambda$  traverse une valeur critique  $\lambda_0$ . En particulier les valeurs de  $\lambda$  correspondant à un cas critique de Lyapunov sont liées à des bifurcations dites classiques. Sous l'effet d'une petite variation autour  $\lambda_0$ , ce changement peut correspondre soit à l'apparition ou à la disparition de nouvelles singularités, soit à une modification de la nature des singularités. Pour les transformations décrites par (1.5) plusieurs sortes de bifurcations se produisent.

**Types de bifurcations**

On expose dans ce paragraphe quelques bifurcations fondamentales concernant les singularités énumérées ci-dessus.

**Bifurcation fold ou noeud col (Pli).**

Elle correspond à l'apparition de deux points fixes ou cycles d'ordre  $k$  l'un stable et l'autre instable, les deux cycles sont confondus, et possèdent un multiplicateur  $S = +1$ .

- Pour la transformation d'ordre 1, le schéma de cette bifurcation est donné par :

$$\emptyset \leftrightarrow_{S=+1} A^k + R^k \tag{1.16}$$

$\emptyset$  : signifie l'absence de cycles.

$A^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  attractif.

$R^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  répulsif.

- Pour la transformation d'ordre 2, la bifurcation fold donne un cycle nœud (stable ou instable), et un cycle col (Figure ci-dessous). Le schéma de cette bifurcation est donné par :

$$\emptyset \leftrightarrow_{S=+1} N_S^k (\text{resp. } N_I^k) + C^k \quad (1.17)$$

$N_S^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type nœud stable.

$N_I^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type nœud instable.

$C^k$  : désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  de type col.

Les courbes qui correspondent à cette bifurcation sont notées  $\Lambda_{(k)}^j$  où  $k$  représente l'ordre du cycle et  $j$  caractérise l'ordre d'échange de ces points. Deux cycles différents peuvent comporter le même nombre de points, mais leur échange est différent.

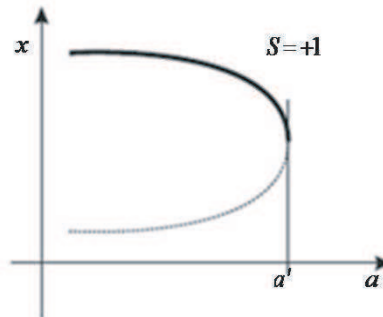


FIGURE 1.3 – Bifurcation fold ou nœud-col (Pli) de points fixes, (-) : stable, (- -) : instable.

Cas particuliers de la bifurcation fold.

a) **Bifurcation transcritique ou échange de stabilité** La bifurcation transcritique survient lorsque dans l'espace combiné de l'espace des phases et l'espace des paramètres deux collecteurs différents points fixes se croisent. Au point de passage de l'échange des points fixes il y a la propriété de stabilité. Le point fixe instable devient stable et vice versa. Notez qu'au-delà du point de bifurcation, le nombre de points fixes n'a pas changé contrairement à la bifurcation noeud-col où deux points fixes apparaissent ou disparaissent. Ainsi, la bifurcation transcritique est un cas particulier de la bifurcation noeud-col, sa représentation est illustré dans la Figure .

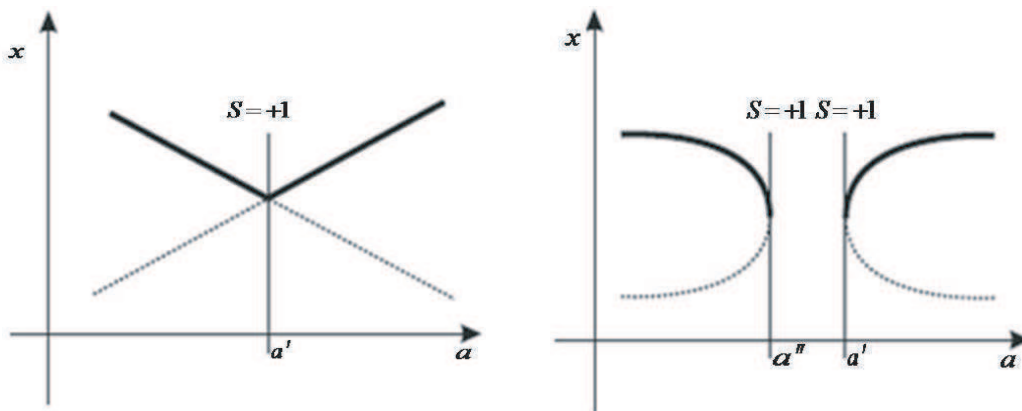


FIGURE 1.4 – Bifurcation transcritique de points fixes (à gauche), et sa dégénérescence après perturbation du système (à droite), (-) : stable, (- -) : instable.

b) **Bifurcation pitchfork ou fourche** Lorsqu'un des multiplicateurs associé au cycle d'ordre  $k$  traverse la valeur  $+1$  ( $S_1 = 1, |S_2| \neq 1$ ), un autre type de bifurcation appelée bifurcation fourche, peut se produire, dans le cas le plus simple, en dimension deux, cette bifurcation obéit au schéma suivant :

$$\begin{cases} N_S^k (\text{resp. } N_I^k) \leftrightarrow_{S=+1} 2N_S^k (\text{resp. } 2N_I^k) + C^k (\text{resp. } C^k) \\ C^k \leftrightarrow_{S=+1} 2C^k + N_S^k (\text{resp. } N_I^k) \end{cases} \quad (1.18)$$

On distingue deux types de bifurcation : bifurcation fourche super-critique (stable) et bifurcation fourche sous-critique (instable).

Les courbes qui correspondent à cette bifurcation sont notées  $\Lambda_{(k)_\sigma}^j$ .

**Bifurcation flip ou doublement de période.**

Si le multiplicateur prend la valeur  $S = -1$ , un point fixe (cycle) d'ordre  $k$  change de stabilité et donne naissance à un cycle d'ordre deux (cycle d'ordre  $2k$ ) de même stabilité que le cycle d'origine.

• Pour la transformation d'ordre 1, cette bifurcation est notée par :

$$A^k \leftrightarrow_{S=-1} R^k + A^{2k} \quad (1.19)$$

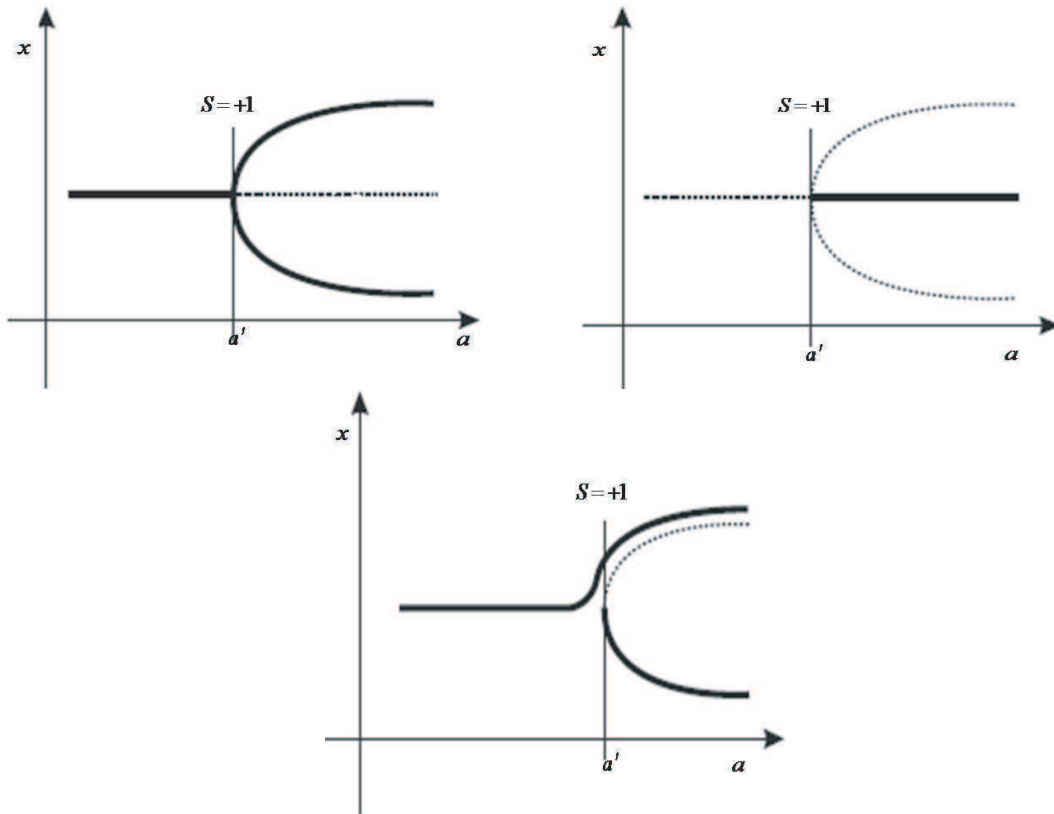


FIGURE 1.5 – Bifurcations fourche supercritique (à gauche), sous-critique (à droite) de points fixes et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (-) : instable..

Ou

$$R^k \leftrightarrow_{S=-1} A^k + R^{2k} \tag{1.20}$$

- Pour la transformation d'ordre 2, elle est notée par :

$$\begin{cases} N_S^k(\text{resp. } N_I^k) \leftrightarrow_{S=-1} 2N_S^k(\text{resp. } 2N_I^k) + N_I^k(\text{resp. } N_S^k) \\ C^k \leftrightarrow_{S=-1} N_S^k(\text{resp. } N_I^k) + C^{2k}. \end{cases} \tag{1.21}$$

$N_I^k$  (resp.  $N_S^k$ ) désigne un point fixe ou cycle d'ordre  $k$  instable (resp. stable). Les deux cycles résultant sont confondus pour la valeur de la bifurcation  $S = -1$ , la courbe où a lieu une bifurcation flip est notée :  $\Lambda_k^j$ .

**La bifurcation de Neïmark-Hopf.**

Un point fixe (resp. cycles d'ordre  $k$ ) de type foyer change de stabilité (lorsque  $S_{1,2} = \rho \exp i\varphi$ ) et donne naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que le point fixe (cycle) d'origine. On a le schéma :

$$F_S^k(\text{resp. } F_I^k) \leftrightarrow_{\rho=1} F_I^k(\text{resp. } F_S^k) + C.F.I_S^k(\text{resp. } C.F.I_I^k) \tag{1.22}$$

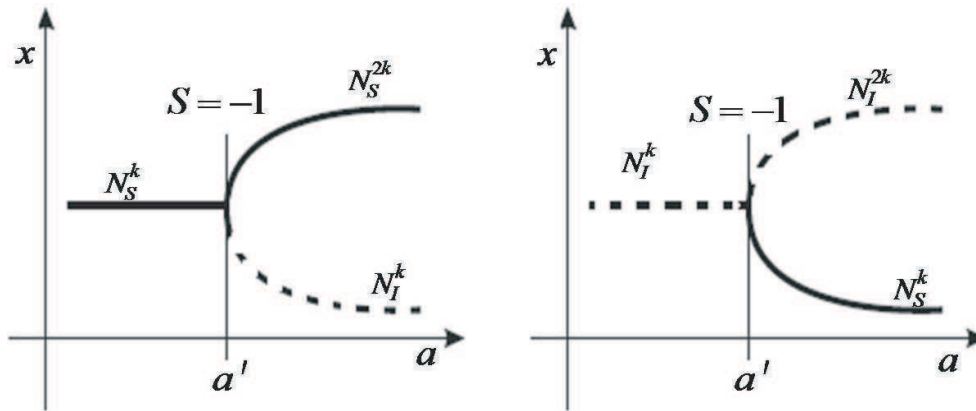


FIGURE 1.6 – Bifurcation flip ou doublement de période supercritique (à gauche), sous-critique (à droite).

où  $F_S^k$  signifie cycle foyer d'ordre  $k$  stable,  $F_I^k$  cycles foyer d'ordre  $k$  instable,  $C.F.I_S^k$  correspond à un cycle de  $k$  courbes fermées invariantes par  $T^k$  stables (attractives), correspond à un cycle de  $k$  courbes fermées invariantes par  $T^k$  instables (répulsives). Ces courbes fermées invariantes s'échangent cycliquement par  $k$  applications successives de  $T$ . Les valeurs du paramètre  $\lambda$  qui correspondent à cette bifurcation sont notées  $\Gamma_k^j$ .

#### Remarque 1.5

- Un point cuspidal sur une courbe de bifurcation fold du plan des paramètres  $(a, b)$  est appelé point de codimension 2 fold [36], [4], [12].
- Le point de tangence d'une courbe de bifurcation flip et d'une courbe de bifurcation fold d'ordre double est appelé point de codimension 2 flip [27].
- un point big bang noté  $p_{BB}$  est associé à un cycle  $k = 1$  ou un cycle d'ordre supérieur.
- Points fixes possédant deux multiplicateurs  $S_1 = -S_2 = +1$ .

Ce genre de points sont des points de bifurcation de codimension 2 correspondant à un point de tangence d'une courbe de bifurcation fold et une courbe de bifurcation flip associés à un même cycle  $(k, j)$  (voir [11]).

### Structure de bifurcation Boîtes-emboîtées

La structure de bifurcation "boîtes-emboîtées" a été mise en évidence en 1975, cette structure est un autre type d'organisation fractal pour l'ensemble de bifurcation dans le plan paramétrique d'un système dynamique donné. Rappelons que le terme bifurcation désigne des changements qualitatifs du système sous l'effet des variations des paramètres. Ici le terme fractal indique que les boîtes sont autosimilaires c'est à dire que l'ensemble est semblable aux parties (boîtes) et ceci reste vrai même quand ces parties sont infinitésimales. Cette structure fractale donne une route vers le chaos pour un grand nombre de systèmes dynamiques. La cascade de Merberg ou cascade



de doublement de période constitue une partie de la structure de bifurcation "boîtes-emboîtée" les détails concernant cette structure peuvent être trouvés dans Mira et Gumowski [26, 37].

Appelons  $\Omega_1$  l'intervalle  $[\lambda_{(1)0}, \lambda_1^*]$  de l'axe paramétrique contenant tous les structures de bifurcation "boîtes-emboîtées". A l'intérieur de cette boîte  $\Omega_1$  on distingue deux sous intervalles (boîtes) sur l'axe paramétrique notés  $\omega_1$  et  $\Delta_1$ . En général, l'indice  $k$  utilisé désigne les boîtes  $\omega_k$  et  $\Delta_k$  qui forment la boîte  $\Omega_k$ , cette dernière traduit la même organisation des bifurcations que la boîte  $\Omega_1$  mais par rapport à la transformations  $T^k$ . La Figure 1.7 donne une représentation de la disposition de ces boîtes.

Dans [36] une structure de bifurcation "boîtes-emboîtées" de type cubique a été décrite pour la transformation définie par :

$$x_{n+1} = -x_n^3 + \mu x_n^2 + \lambda x_n \tag{1.23}$$

Ce type de structure constitue une propriété caractéristique des endomorphismes à une dimension défini par une fonction à deux extrema, vérifiant des conditions de régularités suffisantes pour assurer l'existence d'un attracteur au voisinage de chaque extremum.

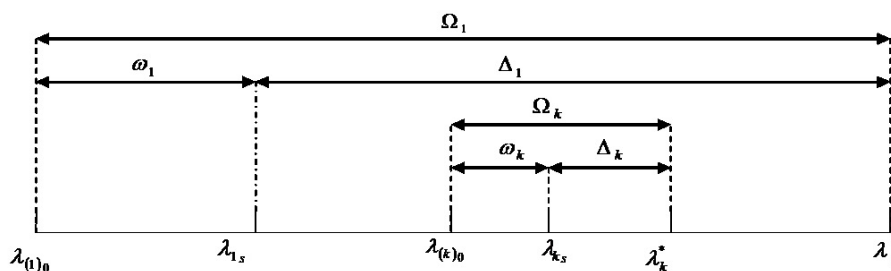


FIGURE 1.7 – Structure de bifurcation boites emboîtées.

## 1.6. Structure feuilletée d'un plan paramétrique

L'étude de la structure de bifurcation de (1.3) dans le plan de paramètres  $\Lambda^* = (\lambda_1, \lambda_2)$  montre que pour un point de ce plan, il peut exister plusieurs cycles d'ordre et de stabilité différents. Cette remarque induit le caractère feuilleté du plan des paramètres. Chaque feuillet est alors associé à un cycle bien défini par son ordre  $k$ , l'ordre d'échange de ses points  $j$ , et les valeurs propres de la transformation linéaire associée  $S_1$  et  $S_2$ , les feuillets pouvant se joindre en des points ou courbes particuliers. Soit  $|z|$  une norme qualitative associée à un cycle, l'espace  $(|z|, \lambda_1, \lambda_2)$  donne une représentation tridimensionnelle qualitative de la structure de ces feuillets. Les courbes  $\Lambda_{(k)0}^j$  désignent les courbes correspondant à une bifurcation fold. Elles sont la jonction de deux feuillets, l'un lié au cycle né stable, l'autre lié au cycle né instable.

Des communications plus complexes entre feuillettes peuvent apparaître par des singularités de codimension deux comme les points cuspidaux.

### Zone de communication entre feuillettes

Des zones de communication entre feuillettes du plan des paramètres peuvent apparaître [13, 38]. Ces zones sont caractérisées par l'existence d'un point cuspidal  $C_k^j$  sur une courbe de bifurcation de type fold associée à des courbes de bifurcation de type flip. Il existe trois schémas distincts d'association de la courbe fold avec courbes flip qui correspondent à trois zones de communication.

#### Zone échangeur.

Dans le plan de paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , une zone échangeur met en jeu une courbe de type fold  $\Lambda_{(k)_0}^j$  formant un point cuspidal  $C_k^j$ , des courbes de types flip  $\Lambda_k^j, \Lambda_k^{j'}, \Lambda_k^l$  et soit une courbe de bifurcation fold  $\Lambda_{(k)_0}^l$ , soit une courbe de bifurcation flip  $\Lambda_{k/2}^l$ , donnant naissance à un cycle d'ordre double  $(k, l)$  à partir d'un cycle  $(k/2, l)$  Figures 1.8(a)(b). Ces zones échangeurs sont respectivement désignées par  $ZEK[l_0, j], ZEK[l, j]$ .

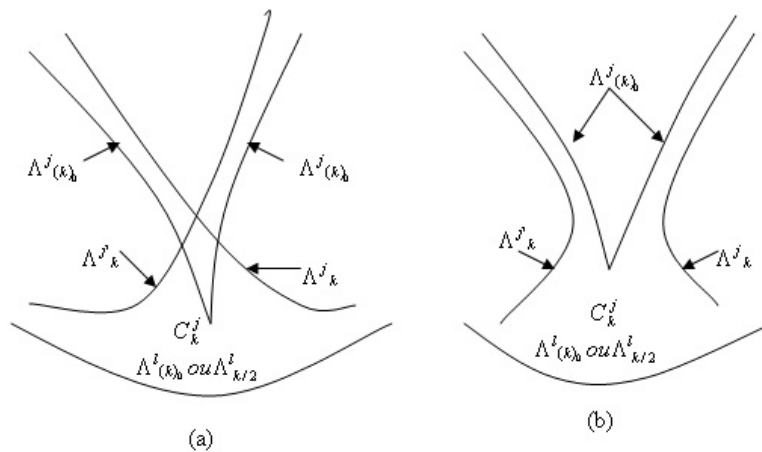


FIGURE 1.8 – Représentation d'une zone échangeur dans le plan paramétrique  $(\lambda_1, \lambda_2)$

#### Zone col.

Cette zone met en jeu deux courbes de type fold  $\Lambda_{(k)_0}^j$  et  $\Lambda_{(k)_0}^{j'}$  et deux courbes flip  $\Lambda_k^j$  et  $\Lambda_k^{j'}$  Figure 1.9.

Le principe de cette communication est que le cycle col  $(k, j), (S > 1)$  qui naît au cours de la bifurcation  $\Lambda_{(k)_0}^j, (S = +1)$  est le cycle de base qui définit aussi la courbe de bifurcation  $\Lambda_{(k)_0}^{j'}$

présentant un point cuspidal  $C_k^{j'}$  dans le plan des paramètres. La zone col est désignée par le formalisme  $ZCK[j, j']$ .

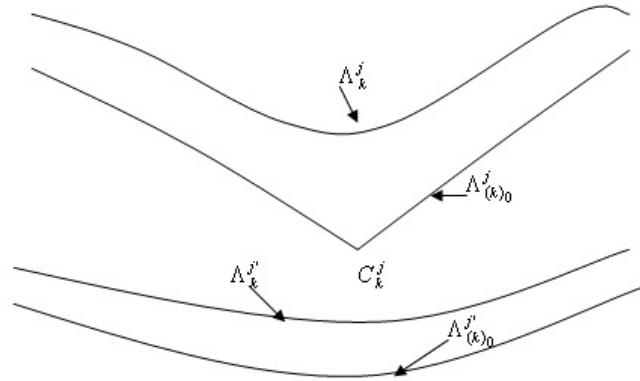


FIGURE 1.9 – Représentation d'une zone col dans le plan paramétrique  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .

### Zone source.

Cette zone met en jeu sept courbes de bifurcation :

- la courbe de type fold  $\Lambda_{(k)_0}^j$  présentant un point cuspidal  $C_k^j$ ,
- la courbe de type flip  $\Lambda_k^j$  formant une boucle qui entoure le point cuspidal,
- la courbe de type flip  $\Lambda_k^l$  située sur le même feuillet que  $\Lambda_k^j$ ,
- les deux courbes de type fold  $\Lambda_{(2k)_0}^m$  et  $\Lambda_{(2k)_0}^{m'}$  se terminant sur  $\Lambda_k^j$  par les deux points  $C_{2k}$  et  $C_{2k'}$ ,
- les deux courbes de type flip  $\Lambda_{2k}^m$  et  $\Lambda_{2k}^{m'}$ , chacune d'elles résultant d'un doublement d'ordre d'une branche de  $\Lambda_k^j$  et venant aussi des cycles  $(2k, m)$  et  $(2k, m')$  générés par les deux courbes fold précédentes. Cette zone est désignée par le formalisme  $ZSK[l, j, (m, m')]$ .

Ces différentes zones de communications correspondent, lorsqu'elles sont associées à des cycles stables, à des zones de multistabilité dans l'espace des paramètres. Plusieurs études dont [13, 37] ont mis en évidence plusieurs scénarios concernant les transitions d'une zone source ou d'une zone col avec une zone échangeur lors de la variation d'un troisième paramètre.

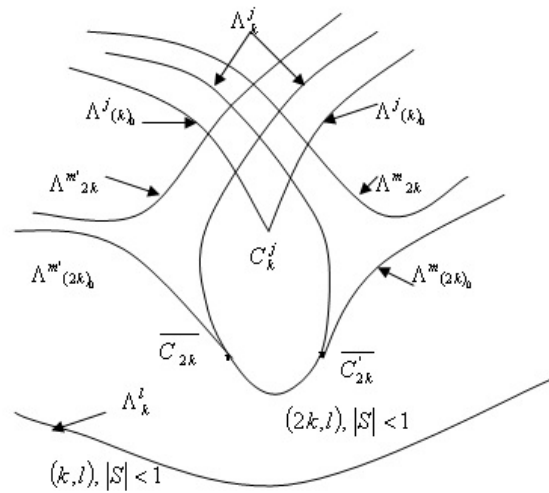


FIGURE 1.10 – Représentation d’une zone source dans le plan paramétrique  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .

## 1.7. Plan de phase d’une transformation non inversible

Dans ce paragraphe nous donnons quelques résultats généraux sur la structure du plan de phase d’une transformation ponctuelle non inversible de type (1.6) pour des valeurs de paramètres fixés.

### Les variétés critiques

Dans le plan de phase, la non inversibilité des applications (endomorphismes) est caractérisée par la présence des singularités appelées lignes critiques ( $LC_k$ ). Ce type de singularité, introduit pour la première fois par Mira en 1964 [39]. Les lignes critiques interviennent dans la détermination d’aire absorbante et d’aire chaotique, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales d’attracteurs et de leurs bassins d’attraction.

#### Définition 1.11

En dimension un, un point critique de rang  $k + 1$  est le conséquent de rang  $k$  d’un extremum de la courbe  $Y = h_k(X)$  où  $h_k$  est la fonction définissant  $T^k$ , il est noté  $C_k$ .

**Définition 1.12**

En dimension deux une ligne critique notée  $LC$  ou  $LC_0$  est le lieu des points du plan de phase ayant au moins deux antécédents de rang 1 confondus. C'est la généralisation à la dimension deux de la notion de point critique défini en dimension un.

Une ligne critique  $LC_k$  de rang  $k + 1$ , est la ligne consécutive de rang  $k$  de  $LC_0$ ,  $k = 1, 2, ..$  La ligne critique  $LC_{-1}$  est l'antécédent de rang un de  $LC_0$ , avec pour définition :

$$T(LC_{-1}) = LC \text{ et } LC_{-1} \subseteq T^{-1}(LC)$$

L'étude des lignes critiques présente plusieurs intérêts :

- a) Les arcs de certaines d'entre elles délimitent les zones invariantes ou absorbantes, donc peuvent délimiter les attracteurs chaotiques.
- b) Les lignes critiques interviennent dans certaines bifurcations spécifiques et permettent de comprendre l'évolution des bifurcations.

Les lignes critiques partagent le plan de phase en zones  $Z_i$  ; chaque zone  $Z_i$  possède  $i$  antécédents de rang un.

**Formulation mathématique des lignes critiques**

**Cas différentiable.** Dans le cas où  $T$  est différentiable, une courbe  $LC_{-1}$  est le lieu des points pour lequel le déterminant de la matrice Jacobienne de  $T$  s'annule.

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, J(X) = 0\}$$

**Cas non différentiable.** Dans le cas où  $T$  est non différentiable, une courbe  $LC_{-1}$  est le lieu des points de non différentiabilité. On suppose que ces points sont des antécédents de rang un confondus puisque  $T$  est continûment différentiable par morceaux. Cet ensemble est donc :

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, T \text{ non différentiable en } X\}$$

**1.8. Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins**

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure d'un domaine  $D$ , située dans le plan de phase qu'on appellera bassin d'un attracteur  $A$ . Ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection de  $D$  avec une ligne critique  $LC$  d'une transformation non inversible.

On notera  $\partial D$  la frontière de  $D$ ,  $D_0$  le bassin immédiat de l'attracteur  $A$  et  $\partial D$  sa frontière.

La proposition suivante est un rappel de certaines bifurcations de bassins d'attraction, dans le cas des applications du type  $(Z_0 - Z_2)$

**Proposition 1.2**

Soit  $T$  un endomorphisme de type  $(Z_0 - Z_2)$  dépendant d'un paramètre  $\lambda$ . Si le nombre de composantes connexes de  $D \cap LC$  change quand  $\lambda$  traverse une valeur de bifurcation  $\lambda_b$ , alors le bassin d'attraction  $D$  peut subir une bifurcation de bassins parmi les types de bifurcations suivantes :

- (a) bassin connexe  $\leftrightarrow$  bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de  $D_0 \cap LC$  change)
- (b) bassin simplement connexe  $\leftrightarrow$  bassin multiplement connexe (quand le nombre de composantes connexes de  $D_0 \cap LC$  change).
- (c) augmentation ou diminution du nombre d'îlots de  $D$ , ou nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.
- (d) augmentation ou diminution du nombre de lacs dans  $D$ , ou nouvelle séquence arborescente de lacs.
- (e) transition lacs  $\leftrightarrow$  baie.
- (f) transition frontière externe faiblement fractale  $\leftrightarrow$  frontière externe fortement fractale.

Chacune de ces bifurcations correspond à un contact entre deux ensembles singuliers de nature différente, la frontière du bassin d'attraction  $\partial D$  et la ligne critique  $LC$ .

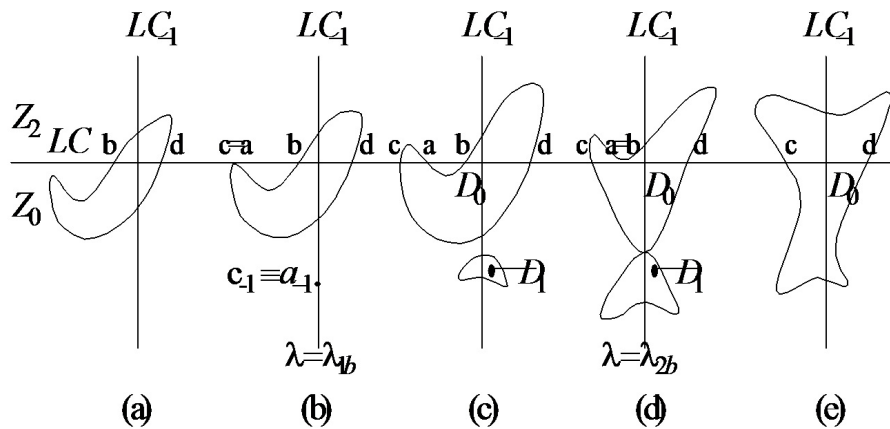


FIGURE 1.11 – Bifurcation d'un domaine  $D_0$  connexe  $\leftrightarrow$  non connexe.

La partie (a) de cette proposition est illustrée par la Figure 11, sur laquelle on voit deux bifurcations possibles. La première bifurcation  $\lambda = \lambda_{1b}$ , correspond à un contact entre  $\partial D_0$  et  $LC$  au point  $a \equiv c$ .  $\{T^{-n}(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , est une séquence arborescente de  $N$  points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de  $N$  îlots. Autrement dit, le bassin étant connexe pour  $\lambda < \lambda_{1b}$ , devient non connexe pour  $\lambda > \lambda_{1b}$ . La seconde bifurcation  $\lambda = \lambda_{2b}$ , correspond à un contact tangentiel entre  $\partial D_0$  et  $LC$  au point  $a \equiv b$ , donnant lieu à un contact non transverse, mais aussi non tangentiel entre  $\partial D_0$  et la frontière  $\partial D_1$  de l'îlot  $D_1$ . Après cette dernière bifurcation  $D$  redevient connexe.

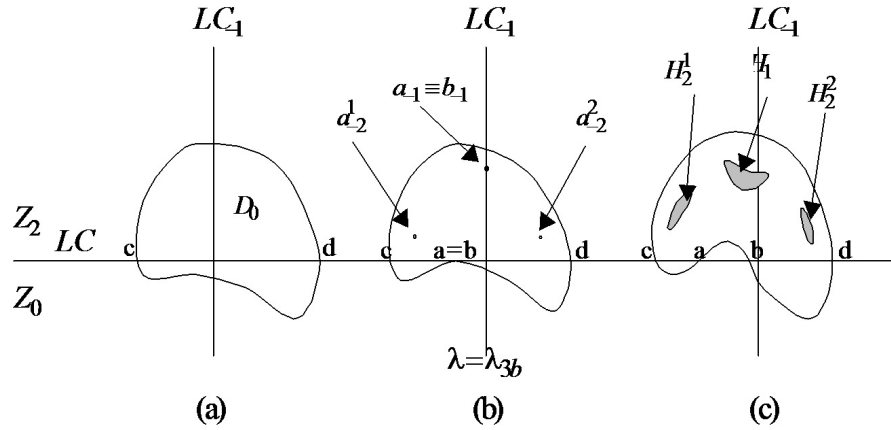


FIGURE 1.12 – Bifurcation d’un bassin simplement connexe ↔ bassin multiplement connexe.

La partie (b) de cette proposition, est illustrée par la Figure 12, sur laquelle on voit une bifurcation qui transforme un bassin simplement connexe en un bassin multiplement connexe. En effet, à la valeur  $\lambda = \lambda_{3b}$  a lieu un contact entre  $\partial D_0$  et  $LC$  au point  $a \equiv b$ . Les antécédents de tout rang  $T^{-n}(a)$  du point  $a$ , forment une séquence arborescente de  $N$  points, qui sont les germes d’une séquence arborescente de  $N$  lacs.

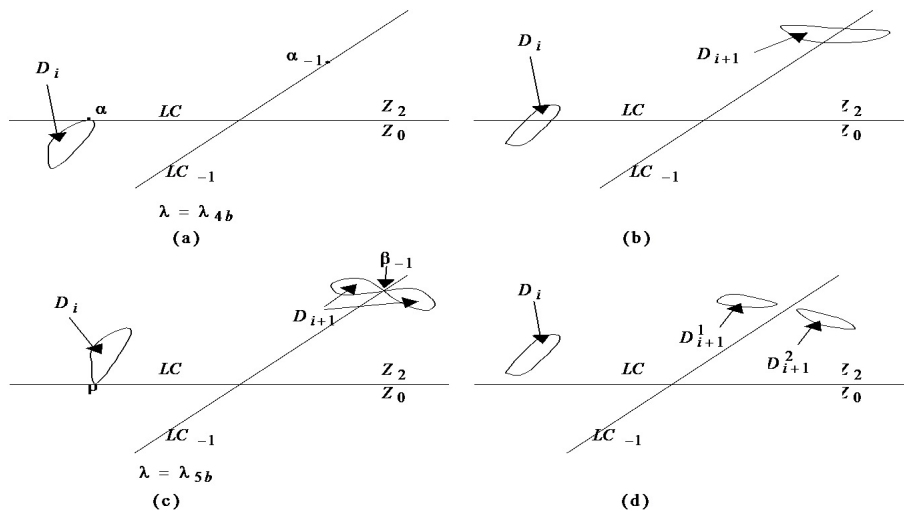


FIGURE 1.13 – Bifurcations d’un changement du nombre d’îlots.

La partie (c) est illustrée par la Figure 13, sur laquelle on peut voir deux bifurcations possibles, qui entraînent un changement du nombre d’îlots. La première bifurcation a lieu à la valeur  $\lambda = \lambda_{4b}$  (Fig 13a) et qui correspond à un contact tangentiel entre  $LC$  et l’îlot  $D_i$  au point  $\alpha = D_i \cap LC$ . Avant la bifurcation,  $\lambda < \lambda_{4b}$ , l’îlot  $D_i$  était à l’intérieur de la région  $Z_0$  ( $D_i \cap \overline{Z_2} = \emptyset$ ). A la bifurcation, les antécédents de tout rang  $T^{-n}(\alpha)$  de  $\alpha$  ( $T^{-1}(\alpha) = \alpha_{-1} \in LC_{-1}$ ) constituent une séquence arborescente de points, qui génèrent après la bifurcation une séquence arborescente d’îlots  $D_{i+n}$ ,  $D_{i+1} \cap LC_{-1} \neq \emptyset$ . En continuant à faire varier le paramètre  $\lambda$  de manière continue, l’îlot  $D_i$  progresse dans la région  $Z_2$  (Fig 13b). La seconde valeur de bifurcation  $\lambda = \lambda_{5b}$  (Fig 13c), correspond à un nouveau contact tangentiel entre  $LC$  et l’îlot  $D_i$  au point  $\beta = D_i \cap LC$  ( $D_i \subset \overline{Z_2}$ ).

Ceci implique que le point  $\beta_{-1} = T^{-1}(\beta) = D_{i+1} \cap LC_{-1}$  est un point d'intersection limite entre  $LC_{-1}$  et  $D_{i+1}$ , avant que ce dernier se divise en deux îlots  $D_{i+1}^1 \subset R_1$  et  $D_{i+1}^2 \subset R_2$ , lorsque la valeur de  $\lambda$  dépasse la seconde valeur de bifurcation (Fig 13d)

La partie (d) est analogue à la partie (c), en substituant dans le raisonnement de la partie (c) les îlots par des lacs d'un bassin multiplement connexe.



# Chapitre 2

## Plan paramétrique

Dans ce chapitre, nous expliquons le passage d'un endomorphisme en dimension-1 à un difféomorphisme en dimension-2 et traçons les différentes courbes de bifurcations relatives aux différentes bifurcations qui existent. Commençons d'abord par quelques rappels sur la transformation de Hénon [28], la transformation de Hénon généralisée [14] et quelques résultats importants résultant des travaux d'Aleixo et *al.* [46, 47] en dimension-1.

### 2.1. Rappels et définitions

Toute application inversible unidimensionnelle a une dynamique triviale; ceci n'est pas vrai en dimension supérieure. La transformation bidimensionnelle la plus simple, dont la dynamique est non triviale, est celle de Hénon [28].

$$T(x, y) : (x', y') = (y + x^2 + a, cx).$$

Cette transformation, dont le Jacobien est constant et égal à  $-c$ , est un difféomorphisme quand  $c \neq 0$ . L'application  $f(x) = x^2 + a$  est appelée récurrence de Myrberg.

Les transformations du plan (bidimensionnelles)

$$h(x, y) = (y + p(x), cx)$$

où  $p(x)$  est un polynôme et  $c \neq 0$ , s'appellent transformations de Hénon généralisées. Ces applications ont été étudiées en détail par Friedland et Milnor [17] pour leurs propriétés génériques. En effet, ils ont montré qu'en général les difféomorphismes polynomiaux du plan avec Jacobien constant, sont conjugués à des compositions de transformations de Hénon généralisées.

### Définition 2.1

L'ensemble des transformations polynomiales du plan dont le Jacobien est non nul et constant, est appelé ensemble de Keller, noté  $K$ . Ces applications s'appellent transformations de Keller. L'ensemble de Keller contient deux sous ensembles particuliers. Le premier sous ensemble, noté  $A$ , est celui des transformations *affines*

$$A = \{a \in K : a(x, y) = (\xi, \eta) + L(x, y)\}$$

où  $L$  est une transformation linéaire non singulière.  $A$  est un groupe pour la composition de transformations. Le deuxième sous ensemble, noté  $E$ , est celui des transformations dites *élémentaires*

$$E = \{e \in K : e(x, y) = (\alpha x + \xi, \beta y + p(x))\}$$

où  $p(x)$  est un polynôme en  $x$  de degré quelconque, et  $\alpha, \beta \neq 0$ .  
 $E$  est aussi un groupe pour la composition des transformations.

Comme systèmes dynamiques, les transformations affines et élémentaires sont triviales; mais il existe des transformations dans  $K$  intéressantes dynamiquement, comme par exemple les transformations de Hénon généralisées.

Une transformation de Keller est un difféomorphisme, puisque son Jacobien ne s'annule pas. Si l'inverse d'une transformation de Keller est polynomiale, celle ci est appelée transformation *Cremona*. L'ensembles de ces transformations est un groupe, le *groupe Cremona affine*, noté  $C$ .

## 2.2. Les transformations de Hénon généralisées

Les transformations de Hénon généralisées sont de type :

$$h(x, y) = (y + p(x), cx) \tag{2.1}$$

Avec  $d$  est le degré du polynôme  $p$  est arbitraire.

Notons que toute transformation de Hénon généralisée a un inverse polynômial

$$h^{-1}(x, y) = \left(\frac{y}{c}, x - p\left(\frac{y}{c}\right)\right),$$

c'est-à-dire appartenant à  $C$ , il s'ensuit que toute composition d'applications de Hénon généralisées est une application Cremona.

Meiss et Dullin [16] ont traité le cas  $|c| \leq 1$ , puisque avec  $|c| > 1$ , l'inverse d'une transformation de Hénon généralisée est conjuguée à une transformation de Hénon généralisée.

Pour  $|c| < 1$  et sous la réflexion  $r(x, y) = (y, x)$  on a la relation suivante :

$$r \circ h^{-1} \circ r^{-1} = \left( y - p\left(\frac{x}{c}\right), \frac{x}{c} \right)$$

Lorsque  $c = \pm 1$  l'application (2.1) est inversible, elle est conjuguée à son inverse, et on obtient :

$$R \circ h \circ R^{-1} = h^{-1}, \text{ telque } R(x, y) = (-y, -x) \quad (2.2)$$

Si  $R = R^{-1}$ , c'est à dire une involution. L'application de Hénon généralisée  $h$  peut être factorisée dans un produit d'involution sous la forme suivante :

$$h = R \circ (R \circ h).$$

L'involution  $R \circ h$  est également un inverse pour  $h$ .

### Propriétés du polynôme $p(x)$

Aleixo et al. dans [46], [47] ont défini les propriétés de la famille des endomorphismes polynomiaux en dimension-1 et ont introduit quelques notions de base et résultats sur les fonctions de densité de probabilité, ils ont démontré que cette récurrence appelée la logistique

$$p(x) = rx(1 - x)$$

est proportionnel a la densité de probabilité  $Beta(2, 2)$  pour  $x \in [0, 1]$  et  $r > 0$ . Elle est conjuguée à la récurrence de Myrberg.

Rocha et al. dans [46] ont considéré la famille des applications  $f_{r,p} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , avec deux paramètres  $p \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$  et  $r > 0$  définie par :

$$f_{r,p}(x) = rx^{p-1}(1 - x), \quad (2.3)$$

(2.3) est proportionnelle à la densité  $Beta(p, 2)$  avec les paramètres  $p$  et  $r$ .

Cette famille des applications unidimensionnelles  $f_{r,p} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , telles que pour  $p \in ]1, p_M]$  et  $r \in ]0, r(p_M)]$ , et  $c_*$  étant le point critique de  $f_{r,p}$ , satisfait les conditions suivantes :

- $f'_{r,p}(c_*) = 0$  et  $f''_{r,p}(c_*) < 0$  i.e.  $f_{r,p}$  est strictement croissante sur  $[0, c_*[$  et strictement décroissante sur  $]c_*, 1]$  et  $f'_{r,p}(x) \neq 0, \forall x \neq c_*$ ;
- $f_{0,p}(c_*) = 0$  et  $f_{r(p_M),p}(c_*) = 1$ ; avec  $c_* = \frac{p-1}{p}$ ;
- $f_{r,p}(0) = f_{r,p}(1) = 0$ ;

Singer dans [52] utilise le concept du signe négatif de la dérivée de Schwartz pour indiquer l'existence des solutions périodiques stables. La dérivée de Schwarz de  $f_{r,p}(x)$  étant

$$S(f_{r,p}(x)) = \frac{f_{r,p}''(x)}{f_{r,p}'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f_{r,p}''(x)}{f_{r,p}'(x)} \right)^2 < 0 \quad ; \quad \forall x \in ]0, 1[ - \{c_*\}$$

Singer conclut que si  $S(f(x)) < 0$  pour quelque soit  $x \in ]0, 1[ - \{c_*\}$ , alors la fonction  $f_{r,p}$  est  $\mathcal{C}^1$ -unidimensionnelle et unimodale et a au plus un attracteur ; un point fixe dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

$f_{r,p}$  admet le point fixe  $x^* = 0$  pour  $r > 0$  et  $p > 1$ . Cependant, pour  $p = 1.1$  et  $p = 1.5$ , nous pouvons vérifier qu'elle possède un autre point fixe positif au voisinage de 0.

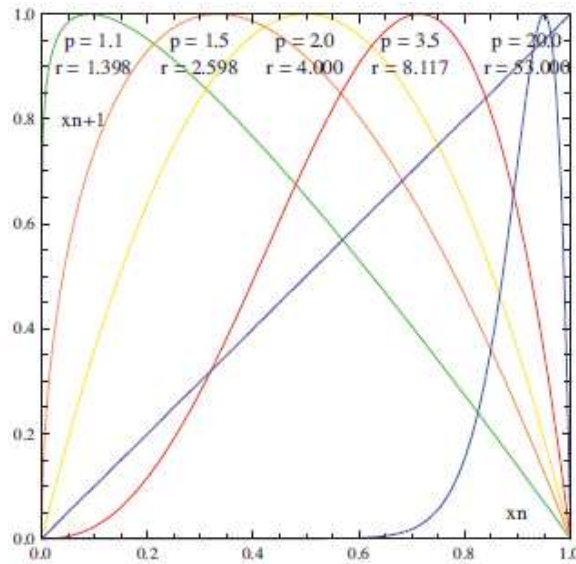


FIGURE 2.1 – Points fixes pour différentes valeurs de  $(r, p)$ .

### 2.3. Le passage d'un endomorphisme en dimension-1 au difféomorphisme de dimension-2

Cette section concerne l'immersion d'un endomorphisme en dimension-1, inspirée de l'application  $f_{r,p}(x)$  mais généralisée, dans un système dynamique en dimension-2.

Posons

$$T_0(x) = f_{r,p,q}(x) = rx^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

où  $\Lambda$  est l'espace des paramètres  $(p, q, r)$ .

Le système dynamique associé à  $T_0$  de type Hénon est de la forme

$$T_1(x, y) = (T_0(x) + y, cx) \tag{2.4}$$

$T_0(x)$  est une fonction polynomiale de degré  $(p+q-2)$  donc  $T_1$  est conjugué aux transformations de Hénon.

Les points fixes  $(x_*, y_*)$  de  $T_1$  satisfont la relation  $y_* = cx_*$  et  $(1-c)x_* = T_0(x_*)$ . Par conséquent  $x_*$  est racine du polynôme  $q(x) = (c-1)x + T_0(x)$  et nous avons également que tous les points fixes sont localisés sur la droite  $y - cx = 0$ .

La stabilité de ces points fixes est déterminée par la matrice jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} T_0'(x) & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

dont la trace  $trJ = T_0'(x)$  et le déterminant  $\det J = -c$ .

Le point fixe est stable si  $|trJ| - 1 \leq \det J \leq 1$  dans le plan  $(trJ, \det J)$ , donc il est nécessaire que  $|trJ| \leq 1 + \det J$  pour garantir la stabilité.

Il suffit de considérer uniquement le cas  $|c| \leq 1$ , puisque l'inverse d'une transformation de Hénon avec  $|c| > 1$  est conjuguée à une transformation de Hénon avec  $|c| < 1$  sous la réflexion  $r(x, y) = (y, x)$ , et

$$r \circ T_1^{-1} \circ r = \left( y - T_0\left(\frac{x}{c}\right), \frac{x}{c} \right)$$

$$T_1^{-1}(x, y) = \left( \frac{y}{c}, x - T_0\left(\frac{y}{c}\right) \right).$$

### Remarque 2.1

Pour  $c = 1$ , les points fixes de  $T_1$  sont les racines de  $T_0$ .

Si nous considérons le cas cubique  $p = 3$  et  $q = 2$ , le déterminant est égal à  $-1$ , et  $T_0'(0) = 0$  avec les valeurs propres égales à  $-1, 1$ . Dans ce cas précis, nous avons une fold-flip bifurcation pour  $O(0, 0)$ .

Pour le second cas cubique avec ce deuxième choix  $p = 2$  et  $q = 3$ , nous avons  $T_0'(1) = T_1(1) = 0$ . Ces deux cas sont deux bifurcations de codimension-2 non dégénérées.

### Théorème 2.1

Si  $T_1$  n'admet pas de points fixes, alors toute solution de  $T_1$  est non bornée.

*Démonstration.* Supposons que  $T_1$  ne possède pas de points fixes, alors le polynôme  $q(x) = T_0(x) + cx - x$  est soit positif ou soit négatif pour tout  $x$ .

Dans le premier cas  $q(x)$  est positif, posons  $d(x, y) = x + y$  alors  $d(x', y') = d(x, y) + q(x)$  croît de façon monotone et peut être non bornée.

Dans l'autre cas  $q(x)$  est négatif,  $d(x', y')$  décroît et donc pour les deux cas il n'y a aucune solution bornée.

L'existence de points fixes implique l'existence d'un domaine contenant toutes les solutions bornées. □

**Théorème 2.2**

Toute orbite bornée de  $T_1$  est contenue dans l'ensemble

$$\{(x, y) : |x| \leq M, |y| \leq |c|M\},$$

où  $M$  est la plus grande valeur absolue des racines de  $T_0(x) - (1 + |c|)|x|$ .

*Démonstration.* Voir [7], de manière générale le polynôme déterminant  $M$  est le même que celui pour les points fixes et leurs valeurs absolues. □

**Proposition 2.1**

L'existence des cycles d'ordre-2 est garantie par

$$T_1(x, y) = T_1^{-1}(x, y)$$

et satisfait donc

$$T_0(x) + y = \frac{y}{c}, \quad x - T_0\left(\frac{y}{c}\right) = cx$$

ou

$$(1 - c)x - T_0\left(\frac{T_0(x)}{1 - c}\right) = 0.$$

*Démonstration.* Les cycles d'ordre-2 vérifient  $T_1^2(x, y) = (x, y) = T_1^{-1} \circ T_1(x, y)$  et par conséquent il est facile de vérifier ces deux égalités

$$T_0(x) + y = \frac{y}{c}, \quad x - T_0\left(\frac{y}{c}\right) = cx.$$

Ces relations sont équivalentes à  $(1 - c)x - T_0\left(\frac{T_0(x)}{1 - c}\right) = 0$ . Cette dernière est divisible par  $q(x)$  puisque les points fixes sont solutions des deux équations.

Dans le cas où  $T_1$  est cubique, alors l'équation donnant les 2-cycles est un polynôme de degré-6, il existerait donc au plus trois 2-cycles.

Pour  $c = 1$ , nous obtenons  $T_0(x) = 0 = T_0(y)$  mais puisque  $x \neq y$  par conséquent il existe uniquement un seul 2-cycle  $\{(0, 1); (1, 0)\}$ . □

**Remarque 2.2**

De manière analogue, nous pouvons déterminer les cycles d'ordre supérieur, via la formule des points fixes et celle de l'identité

$$T_1^{n-1}(x, y) = T_1^{-1}(x, y).$$

De manière similaire, les cycles d'ordre 3 sont solutions de :

$$T_1^2(x, y) = (T_0(T_0(x) + y) + cx, cy + cT_0(x)) = T_1^{-1}(x, y) = \left(\frac{y}{c}, x - T_0\left(\frac{y}{c}\right)\right)$$

avec  $y = cx_0$ . Ils sont déterminés par le système :

$$x_1 - c^2x_0 = T_0(x_0) - cT_0(x_1) \text{ et } x_0 - cx_1 = T_0(T_0(x_1) + cx_0)$$

### Les courbes de bifurcation de codimension-1

Soit  $X_* = (x_*, y_*)$  un point fixe de  $T_1^k$ , posons  $T_1^k = (f_1, f_2)$ .

Soient  $J$  la matrice jacobienne de  $T_1^k$ ,  $\det J = D - 1$  le déterminant, et  $N = \text{tr}(J)$  la trace. Considérons un nombre réel  $\sigma$  tel que  $D\sigma - N = 0$ . Cette relation définit la notion de multiplicateur réduit d'un point fixe de  $T_1^k$  [voir Carcassès [12] 1993, 1997].

#### Définition 2.2

Soit  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un difféomorphisme de dimension deux, défini par (3.2), soient  $X = (x_*, y_*)$  et  $\lambda_1, \lambda_2$  deux paramètres choisis dans l'espace des paramètres  $(\Lambda, c)$ .

Dans l'espace  $(X, \lambda_1, \lambda_2)$ , le multiplicateur va définir une courbe appelée par Carcassès [12] la ligne de contour  $\sigma$  tracée dans le plan  $(\lambda_1, \lambda_2)$  et associée à un cycle d'ordre  $k$  de  $T_1$ . Cette courbe satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} T_1^k(X, \lambda_1, \lambda_2) - X = 0 \\ D(X, \lambda_1, \lambda_2)\sigma - N(X, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

Par élimination de  $X$  dans l'équation précédente, nous obtenons l'équation de la ligne de contour  $\sigma$  dans le plan des paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .

#### Remarque 2.3

La ligne de contour  $\sigma = +1$  coïncide avec la courbe de bifurcation nœud-col ou fold, notée par  $\Lambda_{(k)0}$ , et la ligne de contour  $\sigma = -1$  correspond à la courbe de bifurcation doublement de période ou flip, notée par  $\Lambda_k$ .

#### Proposition 2.2

Soit  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un difféomorphisme bidimensionnel,  $X_* = (x_*, y_*)$  : un point fixe et  $\lambda_1, \lambda_2 \in (\Lambda, c)$  l'espace des paramètres. On définit les courbes de bifurcation de codimension-1 dans l'espace  $(X, \lambda_1, \lambda_2)$  comme suit :

(i) La courbe de bifurcation  $\Lambda_{(1)0}$  de  $T_1$  satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} T_1(X, \lambda_1, \lambda_2) - X = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_*; \lambda_1, \lambda_2) = 1 - c; \end{cases} \quad (2.6)$$

(ii) La courbe de bifurcation  $\Lambda_1$  de  $T_1$  satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} T_1(X, \lambda_1, \lambda_2) - X = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_*; \lambda_1, \lambda_2) = c - 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

**Proposition 2.3**

La ligne de contour  $\sigma \rightarrow \pm\infty$  associée au point fixé ( $k = 1$ ) de  $T_1$  correspond à une courbe de bifurcation dégénérée pour le cas conservatif  $c = 1$ ,  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in (\Lambda, c)$ , [Voir [48]].

*Démonstration.* Le calcul de la trace et du Jacobien donne ces deux relations :

$$\begin{aligned} D(X, \lambda_1, \lambda_2) &= 1 - c, \text{ et} \\ N(X, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(X, \lambda_1, \lambda_2) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_*, \lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

En vertu de l'équation (2.8), il s'en suit des deux relations

$$(1 - c)\sigma - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_*, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

et puisque,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_*, \lambda_1, \lambda_2) \neq 0, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in (\Lambda, c),$$

alors

$$\begin{aligned} (1 - c)\sigma &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_*, \lambda_1, \lambda_2) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} &= (1 - c) \left( \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_*, \lambda_1, \lambda_2) \right)^{-1} \\ \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sigma} &= 0 \Leftrightarrow c = 1. \end{aligned}$$

$c = 1$  correspond au cas conservatif. □

Nous allons déterminer les courbes de bifurcations en fonction des paramètres et nous allons suivre l'évolution de la structure de bifurcation dans différents plans en tenant compte du paramètre de passage ou de plongement  $c$ .

Les points fixes  $(x_*, y_*)$  de  $T_1$  sont calculés numériquement.

En posant,

$$\begin{cases} f_1(x_*, y_*; \Lambda) - x_* = 0 \\ f_2(x_*, y_*; \Lambda) - y_* = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_*, y_*) = (0, 0) : \text{solution évidente triviale} \\ (x_*, y_*) : r(1 - x)^{q-1} + (c - 1)x^{2-p} = 0 \text{ et } y = cx \end{cases} \quad (2.9)$$

En particulier, la courbe de bifurcation fold  $\Lambda_{(1)_0}$  de  $T_1$  correspondant à l'équation (2.6) est donnée en fonction de tous les paramètres par :

$$r = \varphi_1(p, q; c) = \frac{(p - 2)^{2-p}(q - 1)^{1-q}(1 - c)}{(p - 3 + q)^{3-p-q}}. \quad (2.10)$$

Implicitement, on obtient

$$(1 - c)(p - 2)^{2-p}(q - 1)^{1-q}(p + q - 3)^{p+q-3} - r = 0$$



Les points fixes sur la courbe  $\Lambda_{(1)_0}$  sont de la forme

$$x_* = \frac{p-2}{p-3+q}, y_* = \frac{c(p-2)}{p-3+q}, \forall p, q > 1, 0 < c < 1. \quad (2.11)$$

D'autre part, de manière analogue, la courbe de bifurcation  $\Lambda_1$  de  $T_1$  est donnée par :

$$r = \psi_1(p, q; c) = \frac{p^{2-p}(q-1)^{1-q}(1-c)}{(p+q-1)^{3-p-q}}, \quad (2.12)$$

Ou encore,

$$(1-c)p^{2-p}(q-1)^{1-q}(p+q-1)^{p+q-3} - r = 0$$

Les coordonnées des points fixes sur la courbe Flip  $\Lambda_1$  sont donnés par

$$x_* = \frac{p}{p-1+q}, y_* = \frac{cp}{p-1+q}, \forall p, q > 1, 0 < c < 1. \quad (2.13)$$

## Structure de bifurcations du système

Nous nous intéressons à la structure de bifurcations de  $T_1$  dans les différents plans paramétriques  $(p, r), (q, r), (p, q), (p, c), (q, c), (c, r)$ .

### Etude des courbes de bifurcation dans le plan $(p, r)$

Commençons par le plan  $(p, r)$  en fixant les autres paramètres en leur donnant les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} q = 2 \\ c = 0.1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Les courbes de bifurcation fold et flip obtenues de différents cycles d'ordre  $k$  sont illustrées dans la Figure 2.2. L'étude de ces courbes nous mène à la proposition suivante :

#### Proposition 2.4

Si la valeur du paramètre  $p$  est égale à la valeur critique  $p^*$  (ici  $p^* = 1$ ) la courbe de bifurcation associée au point fixe trivial  $\Lambda_1$  et toutes les courbes de bifurcations  $\Lambda_{2k}$  avec  $k = 1, 2, 3, \dots$  tendent vers le même point  $p_{BB}(p^*, r^*)$  pour  $r^* \approx 1 - c$ .

Figure [2.2a] représente une configuration des courbes de bifurcations de type flip et fold associées avec le point fixe stable et les cycles d'ordre  $k = 1, \dots, 5$  pour  $q = 2$  et  $c = 0.1$  dans le plan  $(p, r)$ . Cette structure est organisée autour du point du bifurcation Big Bang noté  $p_{BB}$ . Figure [2.2b] est un zoom qui illustre le concept du point  $p_{BB}$ , les courbes de bifurcations flip  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_4$  commencent à partir de ce point. Le scénario probable est que ce point Big Bang est lié aux bifurcations de doublements de périodes obtenues de cycles  $2^k$ , pour  $k \geq 1$ .

Le point  $N_k, k \in \mathbb{N}^*$  est un point de codimension-2 puisqu'il est l'intersection entre  $\Lambda_{(k)_0}$  et  $\Lambda_k$  ou entre  $\Lambda_{2k}$  et  $\Lambda_{(k)_0}$ .

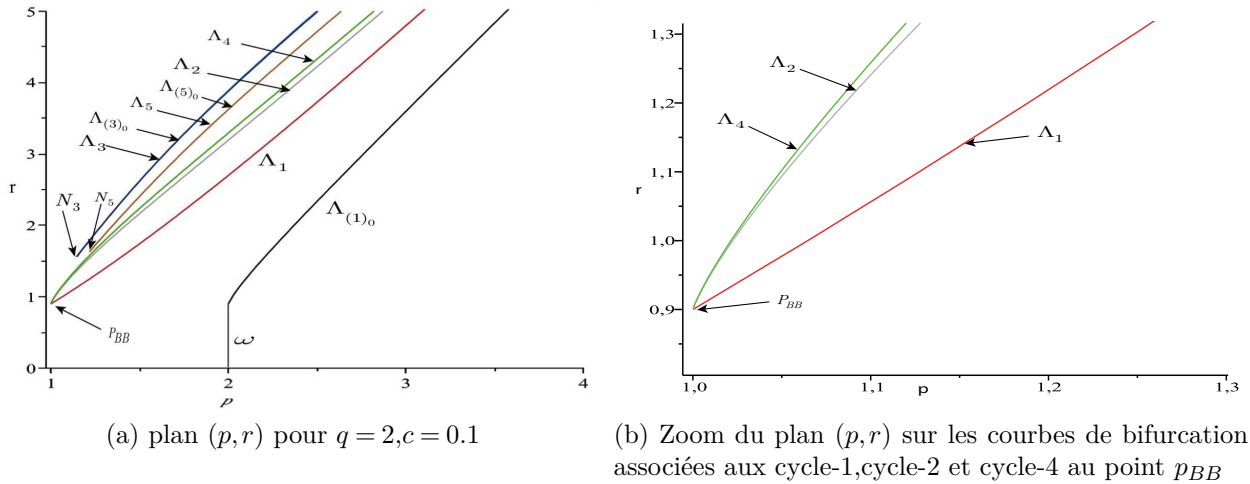


FIGURE 2.2 – Courbes de bifurcations de  $T_1^k$ , avec  $q = 2, c = 0.1$  et  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , dans le plan paramétrique  $(p, r)$ .  $\Lambda_{(1)_0}$  est la courbe de bifurcation fold du cycle d'ordre  $k = 1$ ;  $\Lambda_k$  sont les courbes de bifurcation flip de cycle d'ordre  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ .  $N_3, N_5$  deux points de codimension-2 et  $p_{BB}$  est le point de la bifurcation big bang.

**Définition 2.3**

On dit qu'un point  $N_k$ , avec  $k \in \mathbb{N}^*$  est un point de bifurcation de codimension-2, si c'est un point d'intersection entre une courbe de bifurcation fold  $\Lambda_{(k)_0}$  et une courbe de bifurcation flip  $\Lambda_k$  ou entre  $\Lambda_{2k}$  et  $\Lambda_{(k)_0}$ .

Nous observons sur la Figure [2.2a] que les courbes de bifurcations  $\Lambda_3$  et  $\Lambda_5$  sont bloquées et ne prennent pas la même direction vers le point  $p_{BB}$  car il y a une intersection entre la courbe fold  $\Lambda_{(3)_0}$  (en bleu) et la courbe flip  $\Lambda_3$  (en bleu ciel) en un point de codimension-2  $N_3$  et de même pour le cycle d'ordre 5 entre la courbe fold  $\Lambda_{(5)_0}$  (en maron) et la flip  $\Lambda_5$  (en rose) en un point de bifurcation de codimension-2  $N_5$ .

**Etude de singularité ou cartographie du plan  $(p, r)$**

Analytiquement, nous avons utilisé trois méthodes pour étudier la stabilité du point fixe trivial qui existe toujours pour  $1 < p < 2$  et  $\forall r > 0$ .

Numériquement, nous remarquons que, dans la région  $1 < p < 2$  et  $\forall r > 0$ , la dérivée en ce point n'est pas définie, donc on ne peut rien dire sur la stabilité de ce point dans cette région mais dès qu'on dépasse la droite  $\omega := p = 2$  le point se stabilise sur toute la région et apparaissent deux autres points qui vont bifurquer pour donner les autres cycles 2, 4, ...

Rappelons qu'un ensemble  $S$  est défini dans Rocha et al. [46] pour l'application unidimensionnelle  $f_{r,p,q}$ , comme étant le plan

$$S = \{(p, q, r) \in \mathbb{R}^2 : p = 2, q > 1, r > 0\}$$

qui caractérise la stabilité du point fixe  $x = 0$  dans l'espace des paramètres  $(p, q, r)$ .

**Proposition 2.5**

Dans le plan des paramètres  $(p, r)$ , le plan  $S$  correspond à la droite verticale  $\omega := p = 2$ .

Soit en dimension-1 la stabilité du point fixe  $(x = 0)$  ou en dimension-2 le point fixe  $(x, y) = (0, 0)$ , le domaine de stabilité de ce point ne diffère pas beaucoup dans les deux cas.

1. Pour  $1 < p < 2, \forall r > 0, q > 1, 0 < c < 1$ , on ne peut rien dire sur la stabilité du point fixe  $(0, 0)$ .
2. Pour  $p > 2, \forall r > 0, q > 1, 0 < c < 1$ , le point fixe  $(0, 0)$  est stable.
3. Pour  $p = 2, 0 < r < 1 - c, q > 1, 0 < c < 1$ , le point fixe  $(0, 0)$  est stable.
4. Pour  $p = 2, r > 1 - c, q > 1, 0 < c < 1$ , le point fixe  $(0, 0)$  est instable.
5. Pour  $p = 2, r = 1 - c, q > 1, 0 < c < 1$ , le point fixe  $(0, 0)$  subit une bifurcation de doublement de période.

**Proposition 2.6**

Sur la droite  $\omega := p = 2$  ;

1. Pour  $0 < r < 1 - c$ , il existe deux point fixes  $(0, 0)$  stable et  $P_1$  instable.
2. Pour  $r = 1 - c$ , l'un des deux multiplicateurs du point fixe  $(0, 0)$  est égal à 1 et le second est inférieur à 1 : ici il ya une bifurcation fold.
3. Si  $r > 1 - c$ , il existe deux points fixes  $(0, 0)$  instable et  $P_1$  stable.

Dès qu'on dépasse la droite  $\omega := p = 2$  et  $\forall r > 0$  le point fixe  $(0, 0)$  se stabilise et apparaissent deux autres points fixes qui vont bifurquer pour donner naissances à des cycles 2, 4, ... (voir la Figure 2.3).

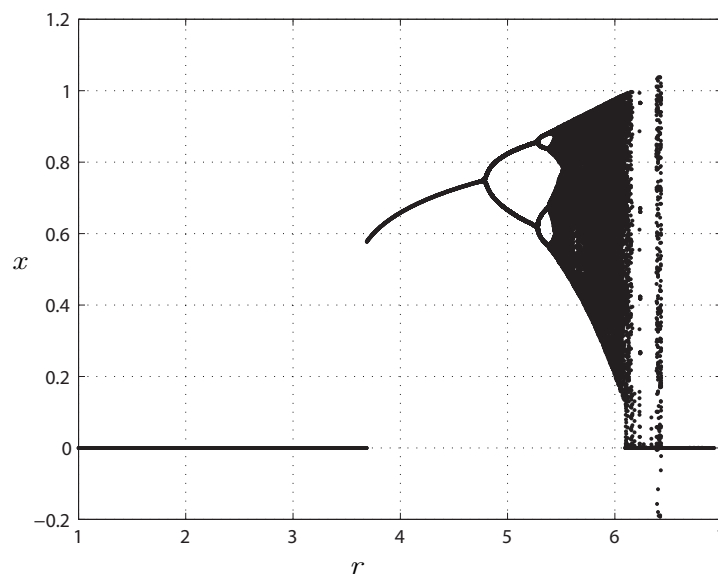


FIGURE 2.3 – Diagramme de bifurcation  $(r, x)$  pour  $p = 3, q = 2, c = 0.1$ .

Dans la Figure 2.3, deux points fixes stables  $(0,0)$  et  $P(0.61,0.061)$  sont montrés sur le diagramme de bifurcation. Le point  $P$  bifurque et donne naissance à un cycle d'ordre 2 et les deux points du cycle 2 donnent le cycle 4 et ainsi de suite. C'est la bifurcation de doublement de période.

### Proposition 2.7

Tenant compte des équations (2.10), (2.12) et par passage aux limites, les courbes de bifurcation fold et flip associées aux points fixes, au voisinage du point  $p = 1$  et  $q = 1$ , tendent toutes vers une même valeur.

(i)

$$\lim_{q \rightarrow 1} (\lim_{p \rightarrow 1} \psi_1(p, q, c)) = \lim_{q \rightarrow 1} (\lim_{p \rightarrow 1} r(p, q, c)) = 1 - c.$$

(ii)

$$\forall p, \lim_{q \rightarrow 1} \varphi_1(p, q, c) = 1 - c.$$

(iii)

$$\lim_{p \rightarrow 1} (\lim_{q \rightarrow 1} \psi_1(p, q, c)) = 1 - c.$$

*Démonstration.* De l'équation de la courbe de bifurcation flip pour  $k = 1$ , on calcule la limite et on trouve

$$\lim_{q \rightarrow 1} (\lim_{p \rightarrow 1} \psi_1(p, q, c)) = \lim_{q \rightarrow 1} \left( \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^{2-p}(q-1)^{1-q}(1-c)}{(p+q-1)^{3-p-q}} \right) = \lim_{q \rightarrow 1} \left( \frac{(q-1)^{1-q}(1-c)}{q^{2-q}} \right) = 1 - c.$$

ce qui prouve le point (i).

De même, de l'équation de la courbe flip (2.12) pour  $k = 1$ , on obtient

$$\lim_{p \rightarrow 1} (\lim_{q \rightarrow 1} \psi_1(p, q, c)) = \lim_{p \rightarrow 1} \left( \lim_{q \rightarrow 1} \frac{p^{2-p}(q-1)^{1-q}(1-c)}{(p+q-1)^{3-p-q}} \right) = \lim_{p \rightarrow 1} \left( \frac{p^{2-p}(1-c)}{p^{2-p}} \right) = 1 - c.$$

Ainsi (iii) est vérifié.

De l'équation de la courbe fold (2.10) pour  $k = 1$ , on calcule la limite et on trouve

$$\lim_{q \rightarrow 1} \varphi_1(p, q, c) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(p-2)^{2-p}(q-1)^{1-q}(1-c)}{(p-3+q)^{3-p-q}} = \frac{(p-2)^{2-p}(1-c)}{(p-2)^{2-p}} = 1 - c, \forall p$$

D'où le point (ii) est vérifié. □

### Remarque 2.4

De la Figure 2.2, pour les cycles d'ordre  $2^k$ ;  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous obtenons

$$\lim_{p \rightarrow 1} \psi_k = 1 - c.$$

Pour  $k = 2$ , soit  $t \in \mathbb{N}$  les coordonnées des points du cycle-2 vérifient la relation suivante

$$x_{2t}, y_{2t+1} \xrightarrow{p \rightarrow 1} 1.$$

$$x_{2t+1}, y_{2t} \xrightarrow{p \rightarrow 1} 0.$$

Pour  $k = 4$ , les coordonnées des points du cycle-4 vérifient la relation suivante

$$x_{2t}, y_{2t+1} \xrightarrow{p \rightarrow 1} 0.$$

$$x_{2t+1}, y_{2t} \xrightarrow{p \rightarrow 1} 1.$$

$\{(0,1), (1,0)\}$  : sont les points du cycle-2.

### Exemple 2.1

Pour  $k = 2$ , on a deux points du cycle-2  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$ ,

$$p = 1.0001784634987754,$$

$$r = 0.90027195940371130,$$

$$(x_0, y_0) = (0.99993456758354915, 6.55862901346025005E - 006).$$

$$(x_1, y_1) = (6.55405818822093399E - 005, 9.99934582483735374E - 002).$$

Pour  $k = 4$ , on a quatre points du cycle-4  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ,

$$p = 1.0004251117125869,$$

$$r = 0.90340021633274092,$$

$$(x_0, y_0) = (4.12309821119995212E - 004, 9.99548617171004961E - 002),$$

$$(x_1, y_1) = (0.99999562928515973, 4.12309827263890311E - 005),$$

$$(x_2, y_2) = (4.51794874512846407E - 005, 9.99995644186255778E - 002),$$

$$(x_3, y_3) = (0.99952496888438347, 4.51794881245114670E - 006).$$

De la remarque 2.4 on peut énoncer la proposition suivante,

### Proposition 2.8

Dans le plan  $(p, r)$ , le point  $p_{BB}$  est né à partir du cycle-2.

*Démonstration.* Nous ne pouvons pas prouver analytiquement l'existence d'un point de bifurcation de type big bang parce qu'il n'existe aucune définition exacte, de ce point partent deux ou plusieurs courbes de bifurcations de même type ou pas, mais nous savons que ce point est lié au cycle d'ordre le plus bas des courbes impliquées. Nous pouvons uniquement l'observer graphiquement.  $\square$

On remarque que les courbes de bifurcation associées aux trois cycles d'ordre 1, 2, 4 commencent à partir du même point  $p_{BB}$  qui a pour coordonnées :

$$p_{BB} : \begin{cases} p \approx 1 \\ r \approx 0.9 \end{cases}$$

### Remarque 2.5

Dans le plan  $(p, r)$ , l'étude de ces points de la bifurcation fold-flip était faite numériquement avec une précision de  $10^{-2}$ .

Aux points de codimension-2  $N_3$  et  $N_5$ , nous nous intéressons aux cycles d'ordre 3 et 5.

Pour  $k = 3$  et le multiplicateur  $S = -1$  ; les trois points du cycle-3  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$  sont calculés ;

$$p = 1.1865907009222367, r = 1.6909222709218166,$$

$$(x_0, y_0) = (4.80194173833881077E - 009, 0.10087860294422693),$$

$$(x_1, y_1) = (0.14829771182672644, 4.80194180989331879E - 010),$$

$$(x_2, y_2) = (1.0086787103695900, 1.48297714036534547E - 002).$$

Pour  $k = 3$  et le multiplicateur  $S = +1$  ; les trois points du cycle-3 sont donnés par,  
 $p = 1.1870182090140797$ ,  $r = 1.6923488695228042$ ,

$$(x_0, y_0) = (0.15124038902953454, 6.8811560630732139E - 010),$$

$$(x_1, y_1) = (1.0089218777662661, 1.5124039128319196E - 002),$$

$$(x_2, y_2) = (6.8812429440735134E - 009, 0.10089218928003736).$$

On remarque que le cycle-3 au point  $N_3$  dans le plan paramétrique  $(p, r)$  pour la courbe fold ou la courbe flip ont les même coordonnées et pour une précision de  $10^{-2}$ . On conclut que  $N_3(p_{N_3}, r_{N_3}) \approx (1.19, 1.69)$ .

Pour le cycle-5 et  $S = -1$  ; on note les cinq points du cycle-5  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ . Ils sont calculés numériquement au voisinage de  $p = 1$ , ils se comportent comme suit

$$p = 1.2346626938448297, r = 1.6792499141252082,$$

$$(x_0, y_0) = (1.19995035748055034E - 008, 0.10103274075717111),$$

$$(x_1, y_1) = (0.12428100039474109, 1.19995037536120402E - 009),$$

$$(x_2, y_2) = (0.90151028223727048, 1.24281002246672302E - 002),$$

$$(x_3, y_3) = (0.17384147853145346, 9.01510295670820555E - 002),$$

$$(x_4, y_4) = (1.0103273925221310, 1.73841481121893363E - 002).$$

Pour  $k = 5$  et  $S = +1$  ; on trouve ;

$$p = 1.2346590049623605, r = 1.6792393533167038,$$

$$(x_0, y_0) = (0.17383846364101582, 9.0151151008837790E - 002),$$

$$(x_1, y_1) = (1.0103272790427684, 1.7383846623141078E - 002),$$

$$(x_2, y_2) = (1.1977545924917859E - 008, 0.10103272940978181),$$

$$(x_3, y_3) = (0.12427241665087323, 1.1977546103397202E - 009),$$

$$(x_4, y_4) = (0.90150577213139571, 1.2427241850267653E - 002).$$

Pour le même raisonnement de  $N_3$ , les coordonnées du cycle-5 au point de comdimension-2  $N_5$  dans le plan paramétrique  $(p, r)$  sont les mêmes soit pour la courbe fold associées au cycle-5 ou la courbe flip du même cycle et  $N_5(p_{N_5}, r_{N_5}) \approx (1.23, 1.68)$ .

### Proposition 2.9

Dans le plan paramétrique  $(p, r)$ ,  $p_{BB}$ ,  $N_3$  et  $N_5$  sont calculés numériquement, nous avons

$$p_{BB} \approx (1, 0.9)$$

$$N_3(p_{N_3}, r_{N_3}) \approx (1.19, 1.69)$$

$$N_5(p_{N_5}, r_{N_5}) \approx (1.23, 1.68)$$

### Etude du plan paramétrique $(q, r)$

Pour le plan  $(q, r)$ , nous faisons le choix de fixer les valeurs des deux autres paramètres restants comme suit :

$$\begin{cases} p = 3 \\ c = 0.1 \end{cases} \quad (2.15)$$

Les courbes de bifurcation obtenues sont illustrées par la Figure 2.4. L'étude de ces courbes nous mène à la remarque suivante :

**Remarque 2.6**

Lorsque  $q$  tend vers une valeur critique  $q^*$  (ici  $q^* \approx 1$ ) toutes les courbes de bifurcation d'ordre  $k \geq 1$  tendent vers un même point  $p_{BB}$  pour  $r_A \approx 1 - c$ , c'est à dire que lorsque  $q$  tend vers  $q^*$  la boîte  $\Omega_1$  dégénère en ce point  $p_{BB}$ .

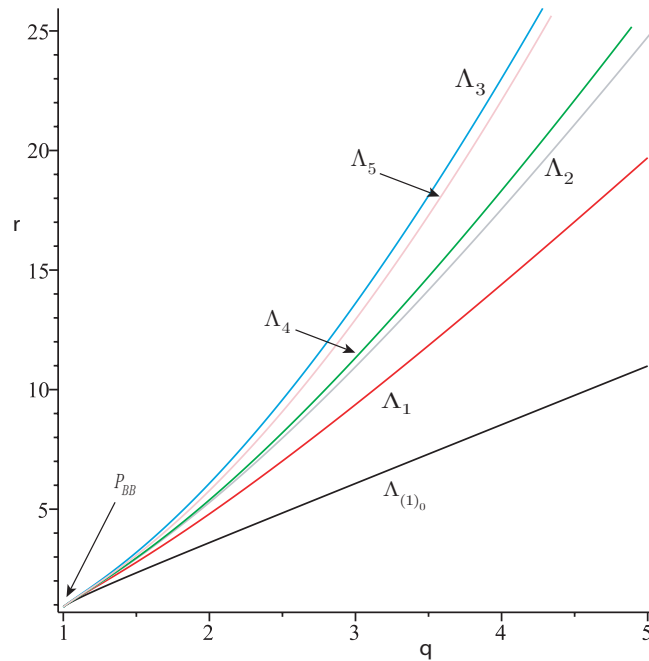


FIGURE 2.4 – Courbes de bifurcations de  $T_1^k$ , avec  $p = 3, c = 0.1$  et  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , dans le plan paramétrique  $(q, r)$ .  $\Lambda_{(1)_0}$  est la courbe de bifurcation du cycle d'ordre  $k = 1$  ;  $\Lambda_k$  sont les courbes de bifurcation flip de cycle d'ordre  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ .  $p_{BB}$  est le point de la bifurcation big bang.

Dans la Figure 2.4, la structure de bifurcation est représentée par l'ensemble des courbes de bifurcations fold et flip d'ordre  $k \geq 1$  de  $T_1^k$  dans le plan des paramètres  $(q, r)$ ,  $p = 3$  avec  $c = 0.1$ . Nous avons opté pour la transformation cubique.

**Proposition 2.10**

Pour  $k = 1, 2, \dots, 5$ , alors

$$\lim_{q \rightarrow 1} \psi_k(p, q, c) = \lim_{q \rightarrow 1} \varphi_k(p, q, c) = 1 - c.$$

**Remarque 2.7**

- Dans le plan  $(q, r)$ , le point de rencontre des cycles d'ordre  $k \geq 1$  est un point de bifurcation big bang .
- Quand  $q \rightarrow 1$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  une infinité de courbes vont se rencontrer en ce point pour lequel les coordonnées des cycles d'ordre  $k$ , se comportent comme suit :

$$x_t \rightarrow 1, t \in \{0, \dots, k - 1\}$$

$$y_t \rightarrow c, t \in \{0, \dots, k - 1\}$$

**Exemple 2.2**

Pour  $k = 2$ , on a deux points du cycle-2  $(x_0, y_0)$  et  $(x_1, y_1)$  ;  
 $q = 1.0002564968936021$ ,  
 $r = 0.90227033169236470$ ,  
 $(x_0, y_0) = (0.99984487220253460, 9.9995935082738310E - 002)$ ,  
 $(x_1, y_1) = (0.99995933592679820, 9.9984488710138417E - 002)$ .

De même pour  $k = 5$ , les cinq points du cycle-5  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$  sont ;

$q = 1.0008627569516217, r = 0.90678251307104207$ ,  
 $(x_0, y_0) = (0.99953340131775514, 9.9894826388488275E - 002)$ ,  
 $(x_1, y_1) = (0.99985619430998429, 9.9953341621196345E - 002)$ ,  
 $(x_2, y_2) = (0.99958206658823945, 9.9985620920900256E - 002)$ ,  
 $(x_3, y_3) = (0.99994909759456285, 9.9958208148317296E - 002)$ ,  
 $(x_4, y_4) = (0.99894824899978996, 9.9994911249496554E - 002)$ .

Nous pouvons dire que le point  $p_{BB}$  est associée avec un point fixe particulier.

En effet,

Nous calculons la limite des coordonnées du point fixe présenté en équation 2.13 pour  $(k = 1, S = -1), \forall p > 1, 0 < c < 1$ . nous obtenons

$$\lim_{q \rightarrow 1} x = 1, \lim_{q \rightarrow 1} y = c$$

En particulier, pour  $p = 3, c = 0.1$   $x$  converge vers 1 et  $y$  converge vers 0.1. Donc  $p_{BB}$  est naît d'un cycle d'ordre  $k = 1$  et  $(1, 0.1)$  est un point fixe.

**Etude du plan paramétrique  $(p, q)$**

La Figure 2.5 montre l'organisation des courbes de bifurcations de  $T_1^k$  dans le plan  $(p, q)$ , pour  $r = 5, c = 0.1$  et  $k \geq 1$ .



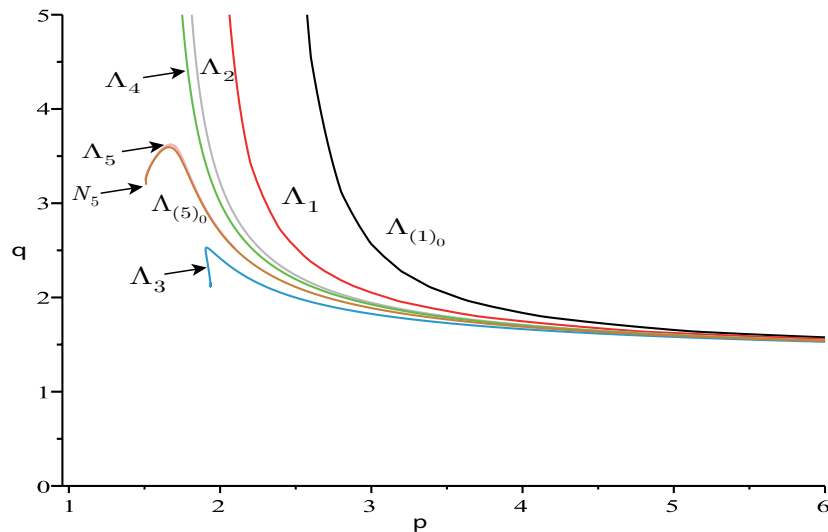


FIGURE 2.5 – Courbes de bifurcations de  $T_1^k$ , avec  $r = 5, c = 0.1$  et  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , dans le plan paramétrique  $(p, q)$ .  $\Lambda_{(1)_0}$  est la courbe de bifurcation du cycle d'ordre  $k = 1$ ;  $\Lambda_k$  sont les courbes de bifurcation flip de cycle d'ordre  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ .  $N_3, N_5$  sont des points de codimension deux.

### Remarque 2.8

Pour les cycles d'ordre impair, le point de rencontre des deux courbes de bifurcations fold et flip  $\Lambda_5$  et  $\Lambda_{(5)_0}$  est  $N_5$  un point de codimension-2, de même pour le cycle-3.

Avec une approximation de  $10^{-2}$  les coordonnées de  $N_5(p_{N_5}, q_{N_5}) \approx (1.51, 3.2)$

Numériquement nous obtenons en  $N_5$  les même coordonnées sur les deux courbes,

Pour  $k = 5$ , et  $S = -1$ ; les points du cycle-5  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ ;

$$p = 1.5119611806484885, \quad q = 3.1960244751700992,$$

$$(x_0, y_0) = (0.98696460712655198, 4.0790559314825316E - 003),$$

$$(x_1, y_1) = (4.4394843942779328E - 003, 9.8696462183347072E - 002),$$

$$(x_2, y_2) = (0.40790546726039179, 4.4394844604314052E - 004),$$

$$(x_3, y_3) = (0.99988406291153564, 4.0790547333865688E - 002),$$

$$(x_4, y_4) = (4.0790558707002517E - 002, 9.9988407781096925E - 002).$$

Pour  $k = 5$ , et  $S = +1$ ; les cinq points du cycle-5  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ ;

$$p = 1.5119247845770336, \quad q = 3.2885542954822884,$$

$$(x_0, y_0) = (4.2648874007329578E - 002, 9.6461458827052329E - 002),$$

$$(x_1, y_1) = (0.99651069047417362, 4.2648874642847324E - 003),$$

$$(x_2, y_2) = (4.2767620591598046E - 003, 9.9651070532334005E - 002),$$

$$(x_3, y_3) = (0.40305366425723793, 4.2767621228885256E - 004),$$

$$(x_4, y_4) = (0.96461457389664607, 4.0305367026320559E - 002).$$

**Les plans paramétriques  $(p, c)$  et  $(q, c)$**

Rocha et al. [47] ont défini l'ensemble de non admissibilité de  $T_0 \equiv f_{r,p,q}$ , noté  $S_{NA}$  en dimension-1. Cet ensemble est inclus dans l'ensemble  $\Lambda$  et correspond aux valeurs des paramètres pour lesquels l'attracteur est hors de  $[0, 1] \times [0, 1]$  (voir les figures du balayage).

Il est impossible de définir cet ensemble en dimension-2 pour  $T_1$ .

Pour  $r = 5, q = 2$ , les courbes de bifurcation fold  $\varphi_1$ , flip  $\psi_1$ , ( $k = 1$ ) du plan  $(p, c)$  sont comme suit

$$\begin{cases} c = \varphi_1(p) = p^2 - 9p - 2\frac{(p-2)^{p-2}}{(p-1)^p}, \\ c = \psi_1(p) = 1 - 5p^{2-p}(p+1)^{1-p}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Pour  $r = 5, p = 3$ , les courbes de bifurcation fold  $\varphi_1$ , flip  $\psi_1$  du plan  $(q, c)$  sont comme suit

$$\begin{cases} c = \varphi_1(q) = -(5(q-1)^{q-1} + 1), \\ c = \psi_1(q) = 15\frac{(q-1)^{q-1}}{(q+2)^q} - 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

Figures 2.6, 2.7 montrent les courbes de bifurcation du système (3.2) pour  $r = 5, q = 2$  et  $p = 3$  dans les plans  $(p$  ou  $q, c)$ . Nous avons trouver un nombre de point de bifurcation de codimension-2 dans ce model cubique.

$N_3$  et  $N_5$  sont deux points de codimension-2 non dégénérés et  $p_{BB}$  est un point de la bifurcation big bang du type de doublement de période.

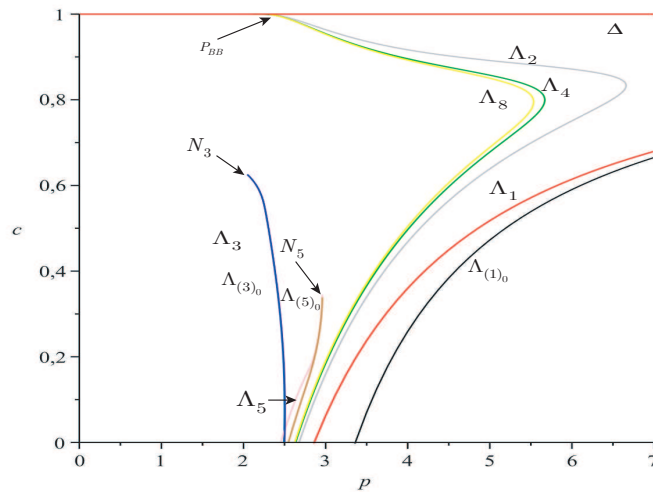


FIGURE 2.6 – Les courbes de bifurcation dans le plan  $(p, c)$  pour  $r = 5, q = 2$ .

Comme les deux plans sont presque similaires, nous pouvons alors généraliser les propositions que nous allons énoncer par la suite.

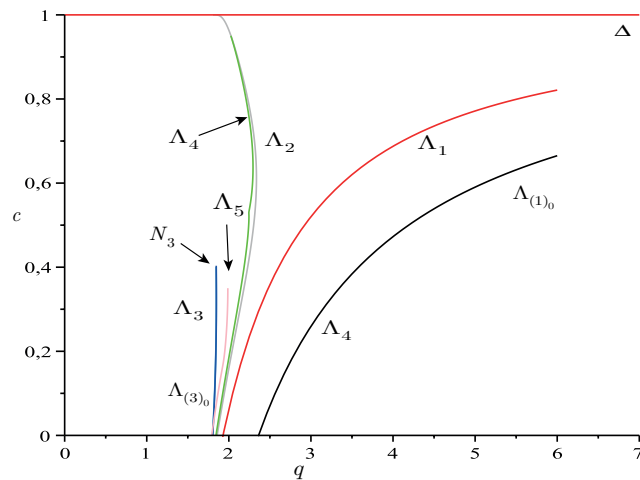


FIGURE 2.7 – Les courbes de bifurcation dans le plan  $(q, c)$  pour  $r = 5, p = 3$ .

**Proposition 2.11**

Les courbes de bifurcation associées avec des cycle d'ordre  $(k = 3, 5)$  sont limités par les points fold-flip de codimension-2.

En effet, les points de bifurcation de codimension-2  $N_3$  et  $N_5$  sont illustrés. Nous considérons leurs coordonnées dans les deux plans paramétriques  $(p, c)$  et  $(q, c)$ , nous calculons les cycle-3 ou 5 pour ces valeurs de paramètre.

- (i) Dans le plan  $(p, c)$  les coordonnées de  $N_3(q_{N_3}, c_{N_3}) \approx (2.05, 0.62)$ .
- (ii) Dans le plan  $(q, c)$  les coordonnées de  $N_3(q_{N_3}, c_{N_3}) \approx (1.85, 0.4)$ .

*Démonstration.* Dans le plan  $(p, c)$ , considérons le cycle d'ordre  $k = 3$  avec une valeur propre  $S = -1$  et les trois points du cycle-3  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$  sont comme suit ;

$$\begin{aligned}
 p &= 2.0523559304408954, \\
 c &= 0.62452125709394701, \\
 (x_0, y_0) &= (0.67304677810510083, 1.3998240830020116E - 022), \\
 (x_1, y_1) &= (1.0777003512049457, 0.42033201994522840), \\
 (x_2, y_2) &= (-2.6500611600976942E - 016, 0.67304677810510083),
 \end{aligned}$$

Pour  $k = 3$  et  $S = +1$  Nous avons les trois points du cycle-3  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$  ;

$$\begin{aligned}
 p &= 2.0503771951635410, \\
 c &= 0.62488765318615780, \\
 (x_0, y_0) &= (0.67350559729481763, 1.3494253863975825E - 020), \\
 (x_1, y_1) &= (1.0778026959898603, 0.42086533210130006), \\
 (x_2, y_2) &= (-9.0983535809552318E - 016, 0.67350559729481774).
 \end{aligned}$$

(i) En  $N_3$ , les deux courbe fold et la flip du cycle-3 se rencontrent.

Maintenant dans le plan  $(q, c)$ ,  $k = 3$  et  $S = -1$  nous avons trois points du cycle-3  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  ;

$$q = 1.8463453544420041,$$

$$c = 0.39236198705658765,$$

$$(x_0, y_0) = (0.99903465803429814, 0.28032501836676382),$$

$$(x_1, y_1) = (0.29432508310568567, 0.39198322356473575),$$

$$(x_2, y_2) = (0.71445508895930876, 0.11548197444794213).$$

Pour  $k = 3$  et  $S = +1$  les trois points du cycle-3 sont  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$  ;

$$q = 1.8463481811192515,$$

$$c = 0.40344067490245322,$$

$$(x_0, y_0) = (0.29174646326246878, 0.40342817897887362),$$

$$(x_1, y_1) = (0.72125367020059106, 0.11770239004082259),$$

$$(x_2, y_2) = (0.99996902659906317, 0.29098306748606861).$$

d'où (ii) est vraie. □

### Proposition 2.12

Il est toujours possible d'assumer que dans le plan  $(p, c)$ , les courbes de bifurcation associées avec des cycles d'ordre  $2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  se terminent en un point de la bifurcation big bang  $p_{BB}$ , les coordonnées des cycles- $2^k$  se comportent comme suit,

$$x_{2t}, y_{2t+1} \rightarrow_{c \rightarrow 1} 1, t \in \{0, \dots, k-1\}$$

$$x_{2t+1}, y_{2t} \rightarrow_{c \rightarrow 1} 0, t \in \{0, \dots, k-1\}$$

### Exemple 2.3

Pour  $k = 2$  en  $p_{BB}$  nous avons

$$p = 2.0435950606138431,$$

$$c = 1.0000000000000000,$$

$$(x_0, y_0) = (1.0000000000000000, 5.6598406677064995E - 020),$$

$$(x_1, y_1) = (5.6598406677064995E - 020, 1.0000000000000000).$$

Pour  $k = 4$  en  $p_{BB}$  nous avons

$$p = 2.1221729186375762, c = 0.99999987834007620.$$

$$(x_0, y_0) = (1.0000000608448083, 3.0433008158054288E - 007),$$

$$(x_1, y_1) = (5.5000822261599397E - 011, 0.99999993918487706),$$

$$(x_2, y_2) = (0.99999993920022190, 5.5000815570203555E - 011),$$

$$(x_3, y_3) = (3.0410485128692108E - 007, 0.99999981754030554).$$

**Proposition 2.13**

Dans les plans  $(p, c)$  et  $(q, c)$ , les points de bifurcation de codimension-2 sont associées avec un cycle-2 spécifique  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  mais avec la condition  $c = 1$ .

**Etude du plan paramétrique  $(c, r)$**

Rappelons les courbes de bifurcation fold  $\varphi_1$ , flip  $\psi_1$  et les coordonnées du point fixe en fonction des paramètres :

$$\begin{cases} r = \varphi_1(p, q; r) = \frac{(p-2)^{2-p}(q-1)^{1-q}(1-c)}{(p-3+q)^{3-p-q}}, x_* = (p-2)/(p-3+q), y_* = c(p-2)/(p-3+q) \\ r = \psi_1(p, q; r) = \frac{p^{2-p}(q-1)^{1-q}(1-c)}{(p+q-1)^{3-p-q}}, x_* = p/(p-1+q), y_* = cp/(p-1+q). \end{cases}$$

Figure 8 montre le comportement des courbes de bifurcation avec la présence de la courbe  $\Delta$  et interprétons le scénario de son accumulation en cette asymptote vertical  $\Delta$  pour  $c = 1$ . Les paramètres fixés sont  $p = 3, q = 2$ .

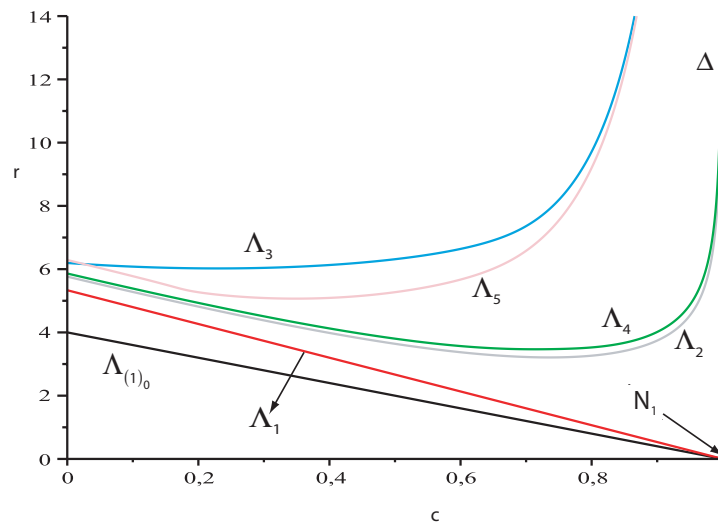


FIGURE 2.8 – Plan paramétrique  $(c, r)$  pour  $p = 3, q = 2$ .

**Proposition 2.14**

Les courbes fold et flip dans le plan  $(c, r)$  se touchent en un point  $N_1 = (1, 0)$ , ce qui rassure que ce ce point est un point de bifurcation de codimension-2.

**Remarque 2.9**

Toutes les courbes de bifurcation avec cycles- $k$ ,  $k > 1$ , tendent vers l'infini mais ne se rencontrent jamais.

**La bifurcation du point fixe  $(0,0)$**

Pour  $0 < c \leq 1.1$ , nous effectuons une analyse de bifurcation numérique dans le plan  $(c,r)$ , nous fixons la valeur du paramètre  $r = 1$ . Soient  $S_1$  et  $S_2$  les deux multiplicateurs du point trivial  $(0,0)$ . Numériquement nous obtenons.

**c=0.2**  $S_{1(0,0)} = 0.447, S_{2(0,0)} = -0.447$ ,  $(0,0)$  est un noeud stable.

**c=0.785**  $S_{1(0,0)} = 0.886, S_{2(0,0)} = -0.886$ ,  $(0,0)$  est un noeud stable

**c=1**  $S_{1(0,0)} = 1, S_{2(0,0)} = -1$ ,  $(0,0)$  est dégénéré

**c=1.1**  $S_{1(0,0)} = 1.048, S_{2(0,0)} = -1.048$ ,  $(0,0)$  devient instable.

On remarque que le point fixe  $(0,0)$  a deux multiplicateurs  $S_1, S_2$  égaux à  $\pm\sqrt{c}$ ; de plus pour  $0 \leq c < 1$  ce point fixe trivial est toujours stable, mais pour  $c > 1$  le point fixe  $(0,0)$  devient instable.

Pour comprendre la structure des différents cycles d'ordre  $k \geq 1$  dans le plan  $(c,r)$ , nous présentons une cartographie sur la droite  $\Delta : c = 0.2, p = 3, q = 2$ ;

$r = 2$   $(0,0)$  est stable avec  $S_1 = 0.4, S_2 = -0.44$

$r = 3$   $(0,0)$  est stable avec  $S_1 = 0.4, S_2 = -0.44$

$r = 3.2$  Il existe trois points fixes  $((0,0)$  stable et  $p_1 = p_2 = (0.5, 0.1)$ ),  $S_1 = 1, S_2 = -0.2$  : nous sommes en présence d'une bifurcation fold donnant naissance à  $p_1$  et  $p_2$ .

$r = 4.7$  Il existe trois points fixes  $(0,0), p_1 = (0.24, 0.04)$  et  $p_2 = (0.75, 0.15)$ ,  $S_1 = -1, S_2 = 0.19$  : nous sommes en présence de la bifurcation flip pour  $p_2$ .

**Etude des singularités d'ordre  $k = 1, 2$  pour  $c = 1$**

Pour  $c = 1$ , les points fixes de  $T$  sont des racines  $f_{r,p,q}(x)$ . le point fixe  $(x_*, y_*)$  de  $T$  satisfait  $y_* = x_*$ , et  $f_{r,p,q}(x_*) = 0$ , puisque  $x_*$  est la racine du polynome  $q(x_*) = (c - 1)x_* + f_{r,p,q}(x_*)$ , et tous les points fixes sont localisés sur la ligne  $y - x = 0$  dans le plan de phase.

Nous vérifions nos résultats dans différentes figures pour ce cas conservatif  $c = 1$  en considérant les ensembles  $\Theta_1$  relatif aux points fixes et  $\Theta_2$  lié aux cycles d'ordre 2.

Nous obtenons avec un simple calcul l'ensemble  $\Theta_1$

$$\Theta_1 = \left\{ (x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2, f_{r,p,q}(x_*) = 0, \text{ et } y_* = x_* \right\}$$

$$\Theta_1 = \left\{ (x_*, y_*) : (0,0), (1,1) \right\}$$

Nous portons notre attention maintenant à la deuxième itération de  $T_1$ , nous obtenons 2-cycles en résolvant l'équation suivante

$$\begin{cases} x = r(rx^{(p-1)}(1-x)^{(q-1)} + y)^{(p-1)}(1 - rx^{(p-1)}(1-x)^{(q-1)} - y)^{(q-1)} + cx \\ y = c(rx^{(p-1)}(1-x)^{(q-1)} + y), \end{cases} \quad (2.18)$$

L'ensemble des points couples du 2-cycles est  $\Theta_2$ ,

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= \{((\bar{x}_0, \bar{y}_0); (\bar{x}_1, \bar{y}_1)) : T_{c=1}^2(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = (\bar{x}_i, \bar{y}_i), i = 0, 1\} \\ \Theta_2 &= \{((\bar{x}_0, \bar{y}_0); (\bar{x}_1, \bar{y}_1)) : \{(0, 1); (1, 0)\}\} \end{aligned}$$

Nous cherchons les points fixes et leur stabilité sur l'asymptote  $\Delta : c = 1$  pour  $k = 1, 2$ . La valeur du paramètre  $r$  est choisie en accord avec la supposition d'existence du  $k$ -cycle dans le plan  $(c, r)$ ,

$c = 1, r = 1, k = 1$  Il existe deux points fixes ;  $(0, 0)$  bifurque (ses valeurs propres sont  $S_1 = -S_2 = 1$ ) et  $(1, 1)$  est instable.

$c = 1, r = 4, k = 2$  les multiplicateurs des deux points du cycle-2  $\{(0, 1), (1, 0)\}$  sont égaux à 1, ceci implique que nous sommes en présence d'une bifurcation de codimension-2 de type cusp.

Commençons par augmenter la valeur du paramètre d'extension  $c$  jusqu'à 1.1, nous observons que pour

$c = 1.1, r = 1$  il existe trois points fixes :  $(0, 0), (1.091607978, 1.200768776), (-0.9160797831e - 1, -.1007687761)$

$c = 1.1, r = 3$  il existe trois points fixes :  $(0, 0), (1.032290647, 1.135519712), (-0.3229064742e - 1, -0.3551971216e - 1)$

Nous pouvons donc conclure par la proposition

**Proposition 2.15**

Pour  $c > 1$ , le point fixe  $(0, 0)$  est toujours instable et tous les cycles d'ordre  $k > 1$  sont aussi instables.





# Chapitre 3

## Plan de phase

De nombreux comportements complexes observés dans des transformations bidimensionnelles inversibles ou non inversibles sont intimement associés à la présence de points particuliers dits homocliniques ou hétérocliniques dans ces systèmes [26, 27]. Les bifurcations globales impliquent les courbes invariantes stables et instables des points fixes ou cycles de type col. Les tangences homocliniques entre les variétés invariantes stables et instables du même point col jouent un rôle très important. L'existence d'intersections homocliniques transversales est considérée comme le critère universel de la complexité des systèmes dynamiques. En même temps, la présence d'orbites homocliniques non transversales (tangences homocliniques) indique une extraordinaire richesse de bifurcations de tels systèmes et, ce qui est très important, la principale impossibilité de fournir une description complète des bifurcations. Par conséquent, lors de l'étude des bifurcations homocliniques, le principal problème est lié à l'analyse des principales bifurcations et propriétés caractéristiques de la dynamique dans son ensemble.

Ce chapitre présente l'étude de transformations cubiques inversibles et non inversibles réalisée avec quelques techniques et simulations numériques. La motivation pour l'étude de ces systèmes est en partie due à la forme de ces systèmes dynamiques qui est une version d'une transformation cubique de Hénon. Ces systèmes sont d'une importance fondamentale dans les systèmes dynamiques et

donnent beaucoup de caractéristiques intéressantes.

Rappelons l'endomorphisme de dimension-1 de degré  $(p + q - 2)$

$$T_0(x) = rx^{p-1}(1-x)^{q-1} \quad (3.1)$$

Les paramètres  $r, p, q$  sont déjà définis au chapitre précédent.

Ici, le point fixe trivial  $x = 0$  est instable pour  $1 < p < 2$  et stable pour  $p > 2$ , pour quelque soient  $r > 0$  et  $q > 1$ .

$p = 2$  est un cas particulier, où  $x = 0$  est point fixe instable si  $r > 1$  et stable si  $0 < r < 1$ , pour tout  $q > 1$ . Par conséquent l'ensemble défini par

$$S = \{(q, r) \in \mathbb{R}^2 : q > 1, r > 0, \text{ pour } p = 2\}$$

est un plan de bifurcation caractérisant la stabilité du point fixe  $x = 0$  dans l'espace des paramètres  $(p, q, r)$ . L'immersion de  $T_0$  dans un difféomorphisme de dimension-2 préserve toutes les propriétés relatives à la stabilité des attracteurs et la structure de bifurcation de type boîtes-emboîtées qui caractérise cette famille d'endomorphismes unidimensionnels conjugués à la récurrence de Myrberg.

Le difféomorphisme associé à  $T_0$

$$T_1 : \begin{cases} x' = T_0(x) + y, \\ y' = cx \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $x, y$  sont des variables réelles,  $r, p, q$  et  $c$  sont des paramètres réels.

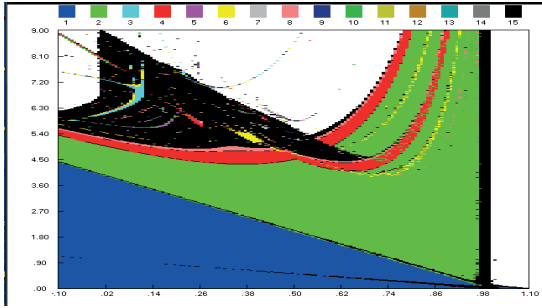
Nous distinguons deux types de difféomorphismes cubiques ( $p + q - 2 = 3$ ). Pour chaque type, nous présentons les différents diagrammes de bifurcation. Nous étudions seulement les cas les plus intéressants de transformations cubiques ( $p = 3, q = 2$  et  $p = 2, q = 3$ ).

Pour  $c = 0$ , (3.2) devient l'endomorphisme de dimension-1, et possède au plus trois points fixes dépendant des paramètres.

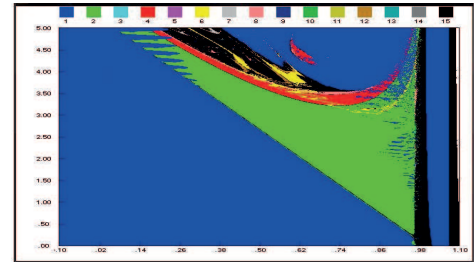
L'analyse des propriétés pour le système dynamique de  $T_1$  se fait en fonction des paramètres. Cette analyse fait apparaître et montrer le type d'attracteur pour lequel la dynamique se stabilise. Les paramètres  $(c, r)$  sont variés simultanément pour suivre, détecter et caractériser les bifurcations qui interviennent pour  $T_1$ .

Dans la Figure 3.1(a, b), pour des valeurs fixes de paramètres dans le plan  $(c, r)$ , les zones d'existence et de stabilité de cycles d'ordre  $k \geq 1$  sont illustrées. Nous indiquons les différentes zones associées aux différents attracteurs par différentes couleurs dans le cas  $p = 3$  et  $q = 2$ . Les zones de couleur noire correspondent, soit à des cycles stables d'ordre supérieur ou égal à  $k = 15$ , soit à des attracteurs chaotiques. Les zones de couleur blanche correspondent à la non existence d'attracteurs dans le plan de phase. La frontière d'une zone, correspond à des courbes de bifurcation des cycles ou des attracteurs associés à cette zone.

De toute évidence, ces figures montrent un cheminement vers le chaos par doublements de périodes obtenu en augmentant  $r$  pour  $c$  fixe. Nous pouvons observer sur les diagrammes une "spéciale" zone col pour le cas  $p = 3$  et  $q = 2$ , et l'existence d'une zone col et d'une zone échangeur pour le cas  $p = 2$  et  $q = 3$ .



(a) Structure de bifurcation pour  $p = 2$  et  $q = 3$



(b) Structure de bifurcation pour  $p = 3$  et  $q = 2$

FIGURE 3.1 – Diagrammes de bifurcation en dimension deux obtenu numériquement en couleurs et en accord avec différents ordres dans le plan  $(c, r)$ .

## Rappels sur les bifurcations homoclines et hétéroclines

### Définition 3.1

Soit  $S$  un point fixe répulsif d'une transformation bidimensionnelle  $T$ ; un point  $q$  est appelé *homocline* à  $S$ , si  $q \in W^s(S) \cap W^u(S)$  et  $q \neq S$ . On dit que  $q$  est un point *homocline transverse*, si  $W^s(S)$  et  $W^u(S)$  se coupent transversalement en  $q$ .

### Définition 3.2

Soit  $q$  un point homocline à un point fixe répulsif  $S$  de  $T$ , et appartenant à un voisinage  $U(S)$  de  $S$ . On appelle *orbite homocline*  $O_o(q)$  associée à  $q$ , un ensemble constitué des itérés successifs de  $q$ , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse  $T^{-1}$  de  $T$  dans  $U(S)$  :

$$O_o(q) = \{T_l^{-n}(q), q, T^n(q); n > 0\} = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

où

$$q_n = T^n(q) \rightarrow S, \text{ et } q_{-n} = T_l^{-n}(q) \rightarrow S.$$

### Remarque 3.1

Il y a une infinité d'orbites homoclines associées à un point homocline. Celles-ci ont la même demie trajectoire positive, mais diffèrent par leur demie trajectoire négative.

**Définition 3.3**

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux points fixes répulsifs de  $T$ . On dit qu'un point  $q$ , appartenant à un voisinage  $U(S_1)$  de  $S_1$ , est *hétérocline* de  $S_1$  vers  $S_2$ , si  $T^n(q) \rightarrow S_2$  quand  $n$  croît, et  $q$  appartient à l'ensemble instable local  $W_{loc}^u(S_1)$  de  $S_1$  dans  $U(S_1)$ .

**Définition 3.4**

On appelle *orbite hétérocline*  $O_e(q)$  associée à  $q \in U(S_1)$  et connectant  $S_1$  à  $S_2$  (ou orbite hétérocline de  $q$ ), un ensemble constitué des itérés successifs de  $q$ , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse  $T_l^{-1}$  de  $T$  dans  $U(S_1)$  :

$$O_e(q) = \{T_l^{-n}(q), q, T^n(q); n > 0\} = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

où

$$q_n = T^n(q) \rightarrow S_2, \text{ et } q_{-n} = T_l^{-n}(q) \rightarrow S_1.$$

Les orbites homoclines et hétéroclines sont classifiées par rapport à l'ensemble des antécédents de premier rang confondus  $LC_{-1}$  et l'ensemble suivant :

$$J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \det(DT(x, y)) = 0 \text{ ou } T \text{ n'est pas différentiable en } (x, y)\}$$

**Remarque 3.2**

Il est évident que  $LC_{-1} \subset J$ .

**Définition 3.5**

Une orbite homocline ou hétérocline est appelée *dégénérée*, si elle contient un point de  $J$ , dans le cas contraire on dit qu'elle est *non dégénérée*. Parmi les orbites dégénérées, on distingue les orbites homoclines (ou hétéroclines) dégénérées *critiques*, si elles contiennent un point de  $LC_{-1}$ , dans le cas contraire on dit qu'elles sont *non critiques*.

**Définition 3.6**

Soit  $T$  une transformation de  $\mathbb{R}^2$  dépendant d'un paramètre  $\lambda$ , et soit  $S$  un point fixe répulsif de  $T$ . On dit qu'en  $\lambda = \lambda^*$  une bifurcation homocline (ou explosion homocline) de  $S$  a lieu, si en traversant la valeur  $\lambda^*$  il y a apparition (ou disparition) d'une infinité d'orbites homoclines.

Nous savons, d'après Gardini [23], qu'aux valeurs de bifurcations homoclines d'un point fixe répulsif  $P$  de type noeud ou foyer, les orbites homoclines qui naissent (ou disparaissent) sont toutes critiques et le point fixe  $P$  est un point critique d'un certain rang  $i$  ( $P \in LC_i, i \geq -1$ ). Par contre les orbites homoclines dégénérées non critiques et les orbites homoclines non dégénérées persistent lorsqu'on traverse une valeur de bifurcation homocline (c'est-à-dire qu'elles sont structurellement stables).

Marotto [33] a prouvé que si  $Q$  est un point homocline non dégénéré d'un point fixe  $P$  de type noeud instable ou foyer instable d'un endomorphisme  $T$ , alors au voisinage de  $P$  il y a du chaos

au sens de Li et Yorke (c'est-à-dire que dans tout voisinage de  $P$  il existe une infinité de cycles répulsifs de  $T$ ). Ce résultat est étendu par Gardini [24], pour le cas d'un point homocline dégénéré critique ou non critique.

Une explosion d'orbites homoclines d'un point fixe répulsif  $P$ , signifie une explosion de cycles de l'application. Cette infinité de cycles naît de bifurcations connues flip et fold. Ainsi les valeurs de bifurcations homoclines, sont probablement des points d'accumulations de valeurs de bifurcations simples.

Comme les orbites homoclines critiques d'un point fixe  $P$ , impliquent la naissance de nouvelles branches dans les séquences d'antécédents de  $P$ , nous pouvons dire qu'une bifurcation homocline représente une explosion de l'ensemble stable globale  $W^s(P)$ .

La bifurcation de contact peut correspondre à une bifurcation homocline ou hétérocline. Ceci est prouvé par Gardini [24] pour le cas d'un noeud instable ou d'un foyer instable. Dans le cas d'un point fixe col  $P^*$  sur la frontière du bassin d'attraction  $D$  d'une aire chaotique  $A$ , une bifurcation de contact, telle que  $T^n(h_0) \rightarrow P^*$  où  $h_0 \in \partial A \cap \partial D(A)$  à la bifurcation, peut correspondre à des naissances d'orbites homoclines de  $P^*$ . C'est une conjecture, qui a été vérifiée par Gardini [23] pour le cas des systèmes dynamiques définis par des applications linéaires par morceaux. D'autres exemples de naissance d'orbites homoclines de points fixes cols, ayant lieu au cours de bifurcations de contact d'aires chaotiques, sont donnés par Gardini et *al.* dans les références [21], [22] et [25].

Il n'existe pas d'orbite homocline d'un point fixe col  $P^*$ , se trouvant sur la frontière du bassin d'attraction d'une aire chaotique, avant la bifurcation de contact. En effet, comme la branche de l'ensemble instable de  $P^*$ , qui est dans le bassin d'attraction, pénètre au bout d'un certain temps (un nombre fini d'itérations) dans l'aire chaotique et que cette dernière, avant la bifurcation de contact, n'a pas de contact avec la frontière de son bassin d'attraction (la frontière étant constituée de l'ensemble stable de  $P^*$ ); par conséquent il n'y a pas de contact entre les ensembles stables et instables de  $P^*$ .

En général la frontière du bassin d'attraction d'un attracteur  $A$ , est constituée de la variété stable globale  $W^s(P)$  d'un point fixe col  $P$  (ou d'un cycle col). Dans le cas d'un difféomorphisme,  $W^s(P)$  est toujours connexe, ce qui n'est pas vrai dans le cas d'un endomorphisme. En effet, comme au voisinage d'une branche de la ligne critique  $LC$ , suite à une variation d'un paramètre de l'endomorphisme,  $W^s(P)$  touche puis traverse  $LC$ , il en résulte que  $W^s(P)$  devient non connexe. Dans ce cas, la variété stable locale  $W_{loc}^s(P)$  délimite le bassin immédiat de  $A$ , et chacune des autres composantes connexes de  $W^s(P)$  se referme pour constituer la frontière d'un îlot. Ceci transforme notre bassin d'attraction connexe en un bassin non connexe.

Dans le cas d'un endomorphisme  $T$ , la variété instable  $W^u(P)$  d'un point fixe col  $P$  peut avoir des points d'auto-intersections, lorsque celle-ci traverse  $LC_{-1}$  en un point  $a_0$ , ce qui n'est pas vrai dans le cas d'un difféomorphisme. En effet, si à la suite d'une variation d'un paramètre de l'endomorphisme  $T$ , la tangente à  $W^u(P)$  en  $a_0$  devient colinéaire à  $\nu_0$ , vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_0 = 0$  de la transformation  $T_l$  issue de la linéarisation de  $T$  en tout point de  $LC_{-1}$ , il se produit une bifurcation donnant naissance à un point cuspidal sur  $W^u(P)$  en  $a_1 = T(a_0) \in LC$  et donc à une infinité de points cuspidaux sur  $W^u(P)$  en  $a_i = T^i(a_0) \in LC_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Ces points cuspidaux sont les germes d'une infinité de boucles de  $W^u(P)$ . Après cette bifurcation,  $W^u(P)$  et  $[W^u(P)]^{-1}$ , qui se coupaient avant la bifurcation en un seul point  $a_0 \in LC_{-1}$ , ont deux autres points d'intersections de part et d'autre de  $LC_{-1}$  dont l'image par  $T$  est unique et constitue un point d'auto-intersection de  $W^u(P)$ . Par conséquent les images successives de ce point donnent une infinité de points d'auto-intersections de  $W^u(P)$ .

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'existence des orbites homoclines et hétéroclines du système  $T_1$  dans le cas où les paramètres  $p = q = 2$ .

$$T_1 : \begin{cases} x' = rx(1-x) + y \\ y' = cx, \end{cases} \quad (3.3)$$

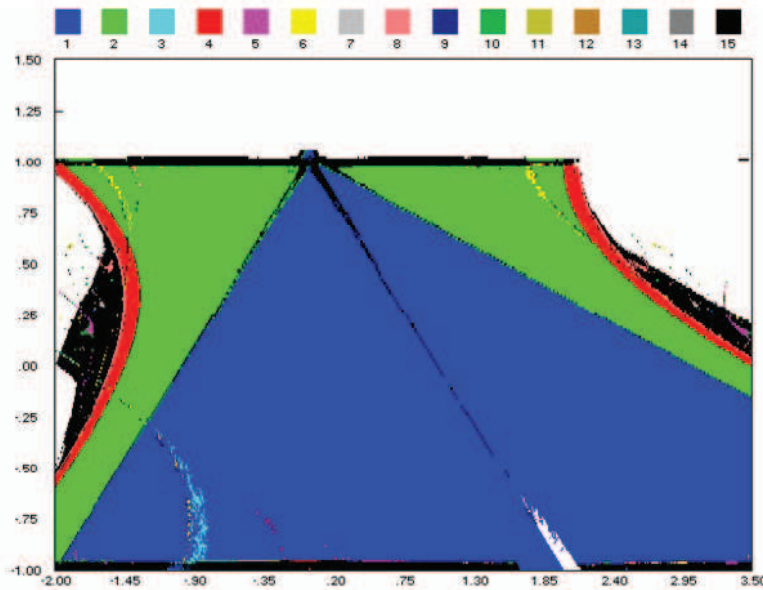


FIGURE 3.2 – Balayage pour  $p = q = 2$ ,  $r \in [-2, 3.5]$ ,  $b \in [-1, 1.5]$

Les points fixes de (3.3) sont  $O(0,0)$  et  $P((r+c-1)/r, cx_{q_2})$  deux cols pour  $3 < r \leq 4$  et  $c \rightarrow 0$ , et comme  $W^s(O) \cap W^u(O) = \emptyset$ , il n'y a aucun point homocline de  $O$ , mais des points hétéroclines de  $O$  vers  $P$  peuvent exister.

Les multiplicateurs  $S_1$  et  $S_2$  du point col  $O$  sont :

$$S_1(O) = [r - \sqrt{r^2 + 4c}]/2, \quad S_2(O) = [r + \sqrt{r^2 + 4c}]/2$$

et comme  $3 < r \leq 4$ ,  $0 < b < 1$ ,  $O$  est un col avec  $-1 < S_1(O) < 0$ ,  $S_2(O) > 1$ .

Les multiplicateurs de  $P$  sont  $S_1(P) = [2 - 2c - r - \sqrt{\Delta}]/2$ ,  $S_2(P) = [2 - 2c - r + \sqrt{\Delta}]/2$  avec  $\Delta = (r + 2c)^2 + 4(1 - r - c)$ ,  $P$  est un col avec  $S_1(P) < -1$ ,  $0 < S_2(P) < 1$ .

Pour des valeurs des paramètres fixes, les attracteurs et leurs bassins sont illustrés dans le plan de phase. Quand ils existent plusieurs attracteurs, il est possible de définir le bassin global.

Commençons par  $c = 0.2$ , nous traçons les variétés invariantes du point col qui se trouve à l'intérieur du bassin pour  $r = 2$  et nous examinons les courbes hétéroclines reliant les différentes variétés stables et instables des points cols.

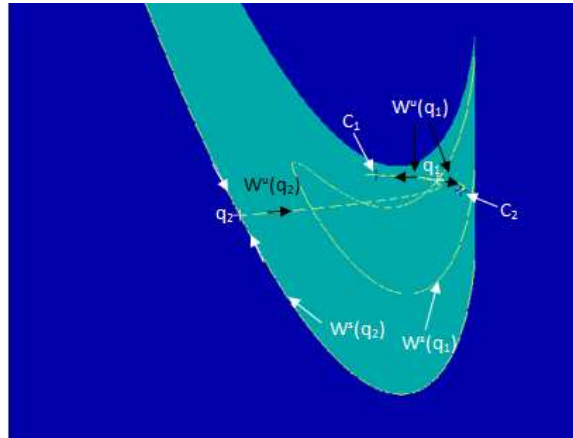


FIGURE 3.3 – Points cols et variétés invariantes  $r = 2$ ,  $p = 2$ ,  $q = 1.5$ ,  $c = 0.2$ .

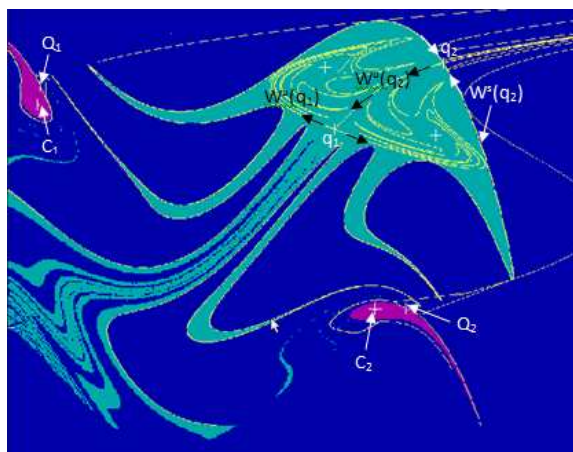


FIGURE 3.4 – Attracteurs et variétés invariantes  $r = 5$ ,  $p = 2.5$ ,  $q = 3$ ,  $c = 0.9$ ,  $x \in [0; 1.54]$ ,  $y \in [-0.5; 1.23]$

Figure 3.3 ( $r = 2$ ) et Figure 3.4 ( $r = 5$ ) montrent comment la variété stable de  $O$  et la variété instable de  $P$  s'intersectent en faisant apparaître des points hétéroclines. Dans la Figure 3.5, seulement les variétés invariantes des points cols sont illustrées. Pour  $c = 0.21$ , en augmentant le

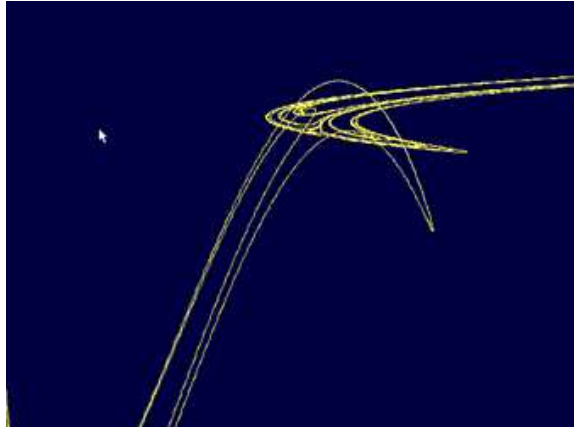


FIGURE 3.5 – Courbe hétérocline des points cols  $r = 10$ ,  $x \in [0; 1.8]$ ,  $y \in [1; 1.7]$

paramètre  $r$ , un attracteur de Hénon apparaît, s'agrandit et touche la frontière de son bassin pour disparaître après ce contact,  $p = 3.5$  et  $q = 2.5$  (voir Figure 3.6).

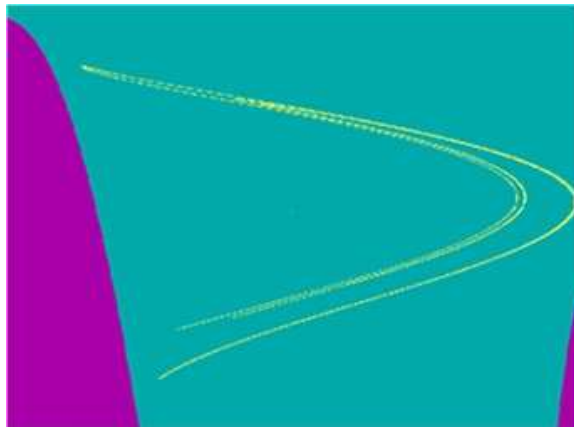


FIGURE 3.6 – Attracteur étrange  $r = 11.5$ ,  $p = 3.5$ ,  $q = 2.5$  et  $c = 0.21$ .

Dans la Figure 3.7, nous prouvons la présence des attracteurs chaotiques dans cette famille pour les valeurs des paramètres  $r = 5$ ,  $p = 2.5$  et  $c = 0.084$ . Ces attracteurs sont similaires à l'attracteur de Hénon.





FIGURE 3.7 – Attracteur étrange  $r = 5$ ,  $p = 2.5$  et  $c = 0.084$ ,  $x \in [0;1]$ ,  $y \in [0;0.12]$

Figures [3.8a,3.8b,3.8c,3.8d,3.8e] représentent l'existence des attracteurs de type point fixe et cycle-2. Les variétés invariantes des points cols et leurs bassins  $y$  sont illustrés. L'évolution de ces attracteurs et leurs bassins sont représentés directement sur les figures, les paramètres  $r, p, q$  sont constants, et la valeur maximale prise pour  $c$  est 1. Les points fixes non triviaux sont nés d'une

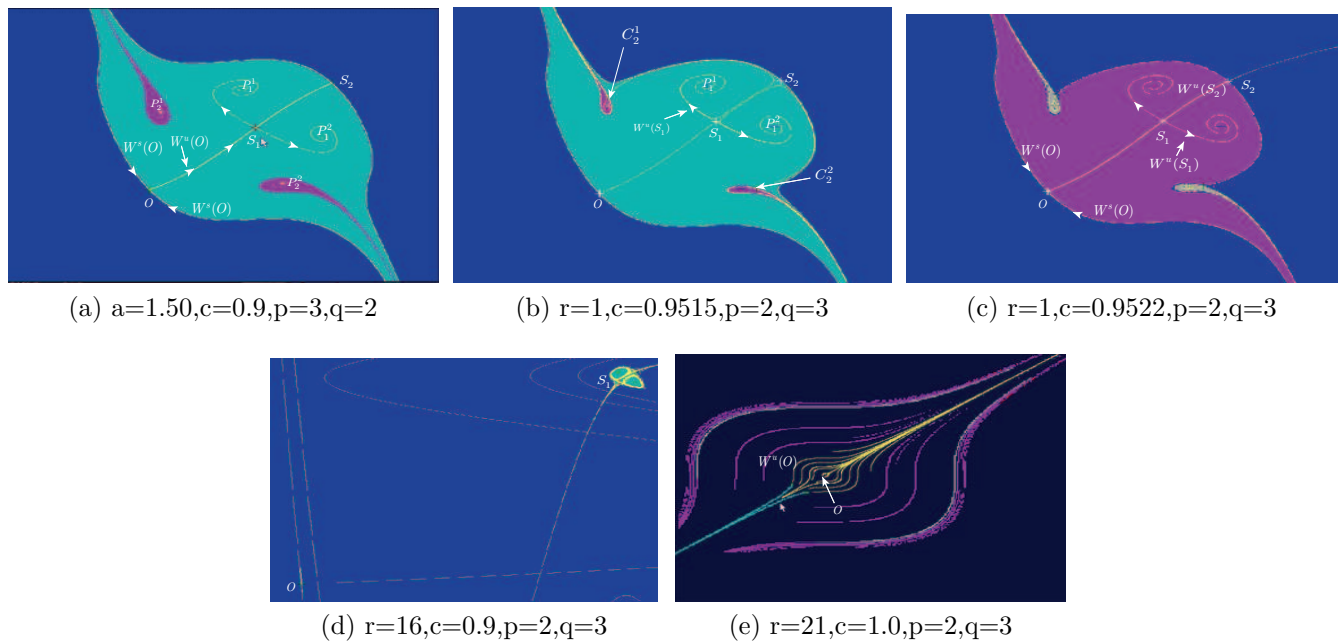


FIGURE 3.8 – Les trois points fixes sont instables. Après une bifurcation de contact entre les deux bassins, le bassin du cycle-2 qui était à l'intérieur se retrouve à l'extérieur et disparaît.

bifurcation noeud-col et le stable des deux ( $S_1$ ) subit une bifurcation de doublement de période et devient un col. La transformation engendre plusieurs cycles d'ordre 2, nous avons trois cycles-2 parmi eux deux sont stables. Une augmentation de la valeur du paramètre  $c$  provoque un contact entre leurs deux frontières et met en évidence un changement dans les bassins d'attraction de multiplement connexes aux bassins non connexes. Nous pouvons aussi remarquer que le bassin associé au cycle-2  $P_2$  est détruit et le point fixe trivial à l'extérieur, existe et est instable.

Dans les Figures [3.9a,3.9b,3.9c,3.9d,3.9e] tous les points fixes sont alignés, le seul point fixe qui existe toujours est stable, les deux autres sont localisés sur la frontière du grand bassin (vert) et sur la frontière du bassin (rouge) du point fixe trivial  $O$ .

Quand le point col  $S_2$  est à l'extérieur, le bassin du cycle-2 devient non connexe. Chaque point de cycle-2 a son propre bassin.

la variété stable du point col  $S_1$ , située sur la frontière du bassin du point fixe trivial  $O(0,0)$ , effectue deux boucles et délimite le bassin de l'attracteur unique.

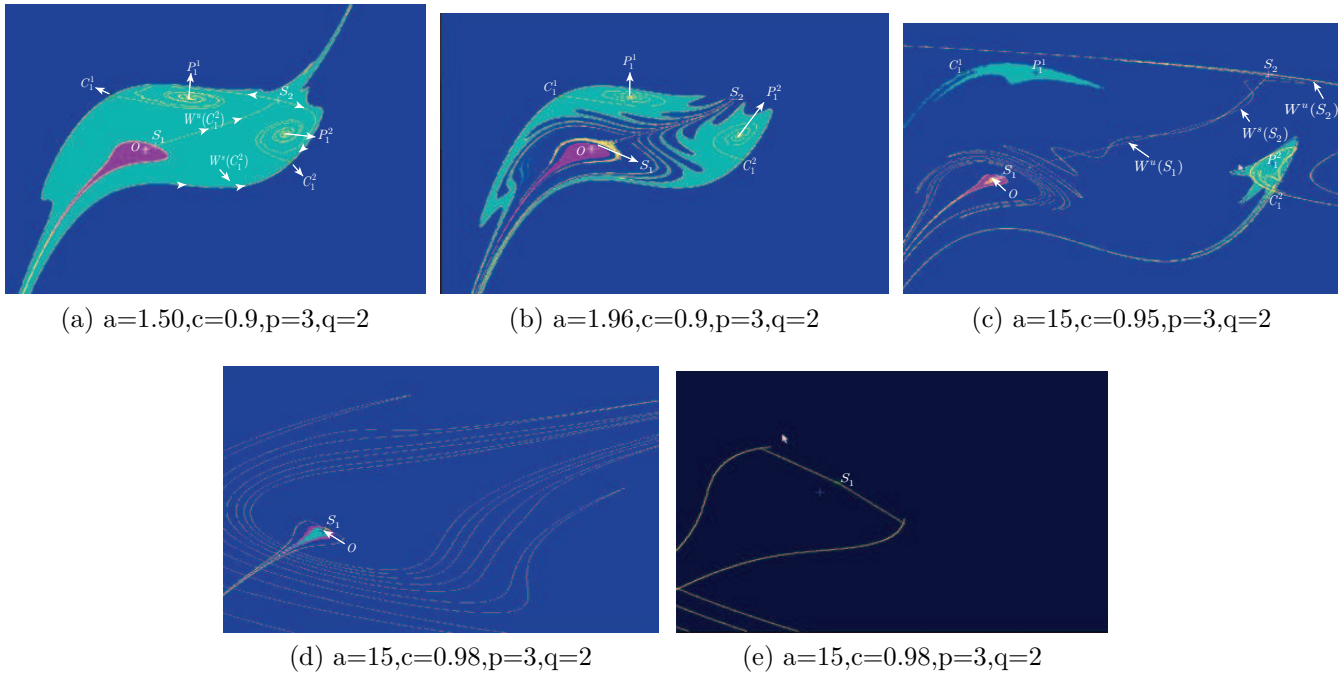


FIGURE 3.9 – Le bassin rouge est associé avec le point fixe trivial. Le grand bassin du cycle-2 se divise en deux suite à des bifurcations homoclines et hétéroclines.

### 3.1. Le passage d'un difféomorphisme à un endomorphisme de dimension deux

Considérons maintenant l'application non inversible  $T_2$  définie par

$$T_2 : \begin{cases} x' = T_0(x) + y \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $c, d$  sont des paramètres réels.

Pour  $d \neq 0$ , le système (3.4) devient un endomorphisme dans le plan. On prévoit de nouveaux phénomènes qui peuvent se produire pour  $T_2$ .

#### Les lignes critiques

Considérons la transformation ponctuelle (3.4) avec  $p = 3, q = 2$  comme suit

$$T : \begin{cases} x' = rx^2(1-x) + y \\ y' = bx + dy \end{cases} \quad (3.5)$$

$T$  est un endomorphisme polynomial de degré 3 pour une valeur du paramètre  $c \neq 0$ ,  $r, d$  sont des paramètres réels.  $T$  admet trois inverses qui sont solutions du système suivant.

$$\begin{cases} y = x' - rx^2(1-x) \\ dx^3 - dx^2 + bx + dx' - y' = 0 \end{cases}$$

Le Jacobien est donné par

$$J = dr(2x - 3x^2) - b$$

Cet endomorphisme est de type  $Z_1 - Z_3 - Z_1$  d'après [26], les courbes critiques associées  $LC_{-1}$ ,  $LC'_{-1}$ ,  $LC$ ,  $LC'$  sont donnés par

$$\left( LC_{-1} : x = \frac{1}{3}(1 - \sqrt{1 - \frac{3b}{dr}}), LC'_{-1} : x = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{1 - \frac{3b}{dr}}) \right)$$

et

$$\left( \begin{array}{l} LC : y = dx - drA + B \\ LC' : y = dx - drA' + B' \end{array} ; \begin{array}{l} A = \frac{1}{27}(1 - \sqrt{1 - \frac{3b}{dr}})^2[3 - (1 - \sqrt{1 - \frac{3b}{dr}})]; \\ B = \frac{b}{3}(1 - \sqrt{1 - \frac{3b}{dr}}) \\ A' = \frac{1}{27}(1 + \sqrt{1 - \frac{3b}{dr}})^2[3 - (1 + \sqrt{1 - \frac{3b}{dr}})]; \\ B' = \frac{b}{3}(1 + \sqrt{1 - \frac{3b}{dr}}) \end{array} \right)$$

### Etude du plan de phase

Nous allons considérer la structure des attracteurs, leurs bassins d'attraction et les bifurcations de ces bassins. Deux types du bassins sont illustrés dans cette section. D'abord, nous choisissons les paramètres pour le cas d'existence de deux attracteurs. Nous remarquons que les deux attracteurs ne subissent pas les mêmes bifurcations dans le plan des paramètres, tandis qu'un attracteur passe par une bifurcation flip et l'autre par la bifurcation fold lorsqu'on fixe  $c = 0.95225$ , et si nous donnons une valeur négative au paramètre  $d = -0.07$  nous avons apparition d'un changement de type de bifurcations à l'intérieur du même bassin après des bifurcations hétérocliniques.

Pour la valeur  $r = 1$ , nous obtenons deux cycles-2 ( $P_1^1, P_1^2$ ) et ( $P_2^1, P_2^2$ ). Ces derniers inter-réagissent avec le point col  $S_1$  et leurs bassins d'attractions sont délimités par les variétés stables des deux points cols du cycle-2 ( $C_2^1, C_2^2$ ) et la variété instable du point col  $S_1$ .

Diminuons la valeur du paramètre  $d$ , nous avons la situation suivante : le portrait de phase de la récurrence  $T_2$  en  $d = -0.1$  est illustré dans la Figure 3.10, les deux cycles-2 stables changent leur cols associés. En accord avec le diagramme de bifurcations Figure 3.1a, la jonction entre les zones permet ce changement entre les attracteurs. Pour le cas  $p = 3$  et  $q = 2$ , fixons les valeurs des paramètres  $c = 0.9$ ,  $d = -0.32$ , et  $r = 1.5$ , nous avons deux cycles-2 avec deux points-flip type cols et un point col régulier sur la frontière commune entre les deux.

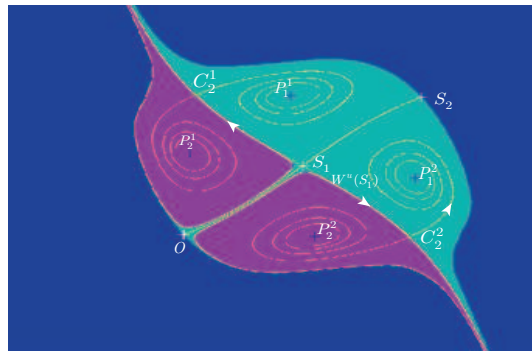


FIGURE 3.10 – Pour le cas  $p = 2, q = 3$ .

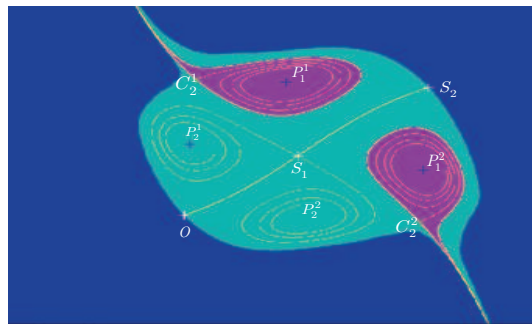


FIGURE 3.11 – Pour  $c = 0.952, d = -0.1$ .

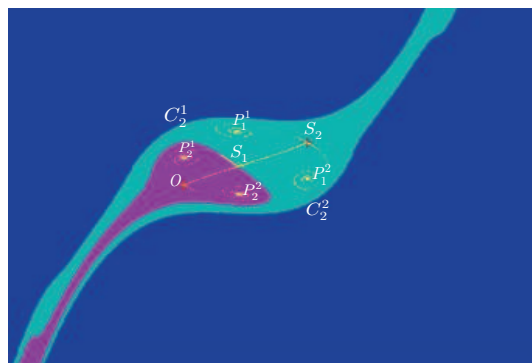


FIGURE 3.12 – Pour le cas  $p = 3, q = 2$ .

Ici  $r, c$  sont fixes mais  $d$  varie et égal à  $-0.355$ , les deux bassins deviennent non connexes et bornés, et le cycle-2  $(P_2^1, P_2^2)$  subit une bifurcation de Hopf. Nous avons une structure hétérocline autour des bassins.

1- Pour la valeur  $r = 1$  et  $b = -0.9, d = 0.4$ , nous obtenons un cycle-4, un point fixe instable et leurs bassins sont délimités par les variétés stables du point col d'ordre 4. Figure 3.14 est le portrait de phase qui montre une zone absorbante y compris l'attracteur chaotique.

2- Augmentons la valeur de  $r$  jusqu'au 1.2, le portrait de phase de la récurrence  $T$  est présenté dans la Figure 3.15, il existe 4 parties d'un attracteur chaotique séparé par la variété stable d'un cycle-4 type col.

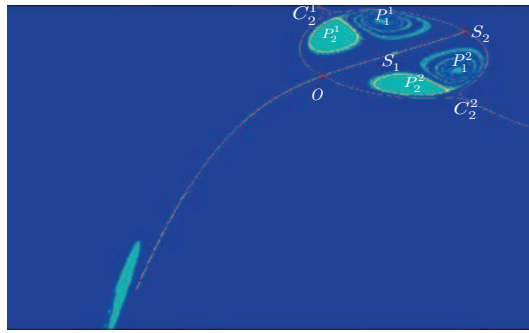


FIGURE 3.13 – Pour le cas  $d = -0.355$ ,  $p = 3$  et  $q = 2$ .

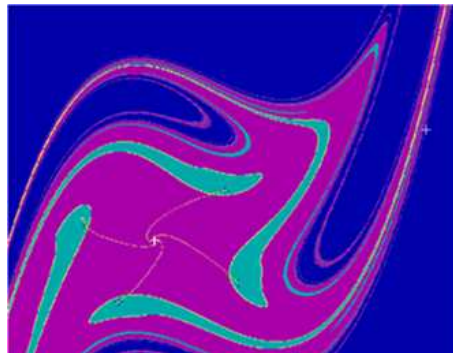


FIGURE 3.14 – L'existence d'un cycle-4 avec un point fixe instable.

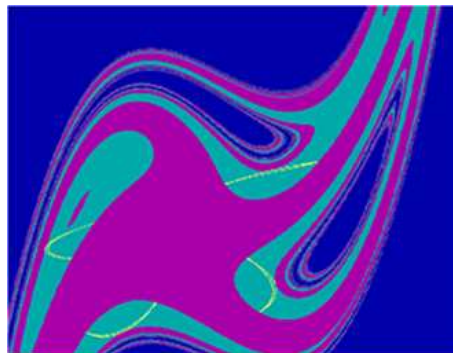


FIGURE 3.15 – Attracteur chaotique pour  $d = 0.4$ .

Quand un contact entre l'attracteur chaotique formé de 4 pièces avec la frontière de son bassin immédiat se produit, il en résulte une bifurcation homocline du cycle-4 col. Cette bifurcation provoque aussi la fusion de ces 4 pièces de l'attracteur chaotique en un seul attracteur pour  $d = 0.403$ .

Figure 3.16 présente un attracteur chaotique après une bifurcation de contact. Cette bifurcation de bassin est appelée

"bassin multiplement connexe  $\longleftrightarrow$  bassin simplement connexe".

3- Pour  $b = -0.7$ ,  $d = -0.2$ , et  $r = 8$ , un attracteur chaotique d'ordre 3 subit une bifurcation de contact avec la frontière de son bassin et disparaît. Les deux points fixes existants se trouvent dans les bassins vert et beige, tous ces bassins sont bornés.

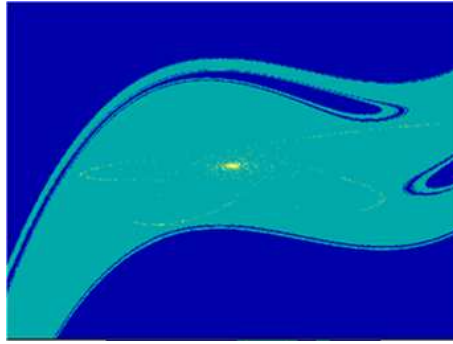


FIGURE 3.16 – Attracteur chaotique pour  $d = 0.403$ .

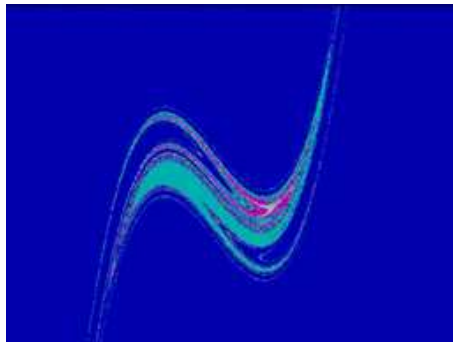


FIGURE 3.17 – Coexistence de deux points fixes dans les deux bassins vert et beige et un attracteur chaotique d'ordre 3 dans le bassin rouge

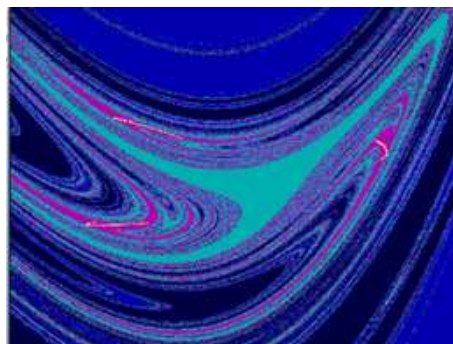


FIGURE 3.18 – Zoom sur l'attracteur chaotique d'ordre 3.

# Chapitre 4

## Les ensembles de commutation

La notion des "ensembles de commutation" a été introduite pour la première fois par Mira en [41] pour un difféomorphisme de type Hénon mais pour un cas particulier où les valeurs des paramètres  $p$  et  $q$  fixées. Quand le paramètre d'extension  $c$  est égal à la valeur critique  $c = 0$ , le passage des transformations inversibles de dimension-2  $T_1$  définie par (3.2) à l'endomorphisme unidimensionnel  $T_0$  provoque des pliages ou feuillets.

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux propriétés et rôle des variétés invariantes stables et instables des points fixes cols et aux ensembles de commutation. Pour ce fait nous choisissons les valeurs des paramètres  $r, c$  de sorte que les points fixes sont des cols.

Cette nouvelle notion a pour but d'analyser la complexité et le comportement chaotique des attracteurs et les bifurcations globales qui existent.

Rappelons qu'au Chapitre2, nous avons défini  $T_0(x)$  comme étant une fonction polynômiale de degré- $(p + q - 2)$  et  $T_1$  est conjuguée aux transformations de Hénon.

**Remarque 4.1**

Par souci de simplification, nous utilisons la notation  $F_c$  à la place de  $T_1$ .

Fixons  $p = q = 2$ , considérons le système (3.3)

$$T_c : \begin{cases} x' = rx(1-x) + y \\ y' = cx, \end{cases} \quad (4.1)$$

et posons  $f_{r,2,2}(x) = rx(1-x)$ , avec  $2 < r < 4$ , et  $0 < c < 1$ . L'extremum de  $f_{r,p,q}(x)$  est obtenu pour  $x = 1/2$ .

Les trois premiers ensembles de commutation sont :

$E_0$  est la droite  $x = 1/2$ ,

$E_1$  est la droite  $y = c/2$ ,

$E_2$  est la parabole  $x = ry/c - ry^2/c^2 + c/2$ .

En tenant compte des paramètres  $r, c > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} x = ry/c - ry^2/c^2 + c/2 &\Rightarrow x - \frac{c}{2} = \frac{r}{c}y \left(1 - \frac{y}{c}\right) \\ &\Rightarrow \frac{c}{r} \left(x - \frac{c}{2}\right) - y + \frac{y^2}{c} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{y^2}{c} - y + \frac{c}{r} \left(x - \frac{c}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant est  $\Delta = 1 - \frac{4}{r} \left(x - \frac{c}{2}\right)$ .

$\Delta \geq 0$  si et seulement si  $1 - \frac{4}{r} \left(x - \frac{c}{2}\right) \geq 0$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4}{r} \left(x - \frac{c}{2}\right) \geq 0 &\Rightarrow \frac{-4}{r} \left(x - \frac{c}{2}\right) \geq -1 \\ &\Rightarrow \frac{4}{r} \left(x - \frac{c}{2}\right) \leq 1 \\ &\Rightarrow x - \frac{c}{2} \leq \frac{r}{4} \\ &\Rightarrow x \leq \frac{r}{4} + \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Donc nous avons deux solutions

$$y_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{r} \left(x - \frac{c}{2}\right)}}{2} c$$

$$y_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{r} \left(x - \frac{c}{2}\right)}}{2} c$$

Le point d'intersection  $P_1 = E_1 \cap E_2$  a pour coordonnées

$$x_{P_1} = (r/2 + c)/2, y_{P_1} = c/2.$$



Ce point peut être aussi considéré comme l'image de  $P_0$  par la transformation  $T_1$  avec  $P_0 = E_0 \cap E_1$ , ses coordonnées sont  $x_{P_0} = 1/2, y_{P_0} = c/2$ .

De manière similaire, définissons les points  $P_n$  comme suit :  $P_n = T_1^n(P_{n-1}) = E_n \cap E_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ces intersections donnent naissance au point P-principal de  $E_{n+2}$  dans un voisinage de  $P_n$ .

Les autres points plis (ou fold) de  $E_{n+2}$  résultent de  $T_1[E_{n+1} \cap E_k]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , et sont appelés les points secondaires de  $E_{n+2}$ .

#### Définition 4.1

[26] Soit  $T$  une application non inversible et continue. On appelle ensemble critique de rang-1, noté  $EC$ , est le lieu géométrique des points  $x$  ayant deux antécédents confondus. Les ensembles critiques  $E_i C$  de rang  $(i+1)$ ,  $i > 0$ , sont les images de rang- $i$  de l'ensemble  $E_0 C \equiv EC$

#### Proposition 4.1

Considérons le système (4.1) avec  $c \rightarrow 0$ ; [26] nous avons

- (a) Les ensembles de commutation  $E_n$ ,  $n \geq 2$ , s'écrasent sur l'axe  $y = 0$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty}(E_2) = [y = 0, -\infty < x \leq x(c_*)] = \lim_{n \rightarrow \infty}(E_n)$ .
- (b) Les points plis principaux sont tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty}(P_n) = c_\infty$ ,  $c_\infty = T_1(c_*)$  de rang  $(n+1)$ ;  $c_* \equiv c_0$  est le point critique de  $T_0$  pour  $y = 0$ .
- (c) Les points plis secondaires sur  $E_1$  tendent vers le point critique  $c_*$  de rang-1.

Comme c'est indiqué dans la proposition 4.1, les ensembles de commutation ont une très grande importance, ils jouent le même rôle que lignes critiques mais pour les difféomorphismes. Les ensembles de commutations approchent l'attracteur pour  $c \neq 0$  via les points de pliage principaux et secondaires (voir Figures 4.2, 4.1).

Considérons La transformation inverse  $T_1^{-1}$ , définie par :

$$x = y'/c, y = x' - ry'(1 - y'/c)/c \quad (4.2)$$

Soit  $E'_0$  la droite  $y = c/2$ , est donnée par  $\det J = 0$  et par la même méthode appliquée pour  $T_c$ . Les ensembles de commutation sont des courbes définies par

$$E'_n = T_1^{-n}(E'_0).$$

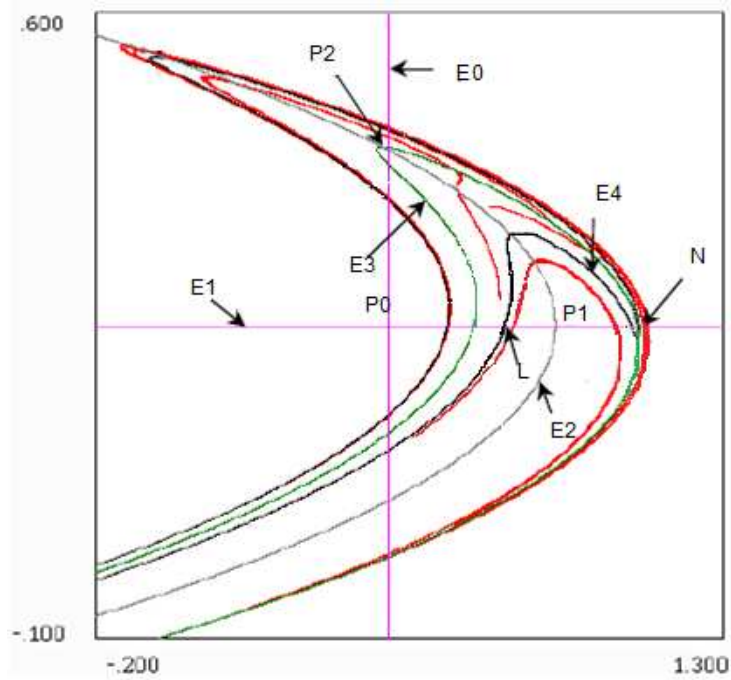


FIGURE 4.1 – Les ensembles de commutation  $E_i$ ,  $r = 2.2$ ,  $c = 0.7$ , (voir [41])

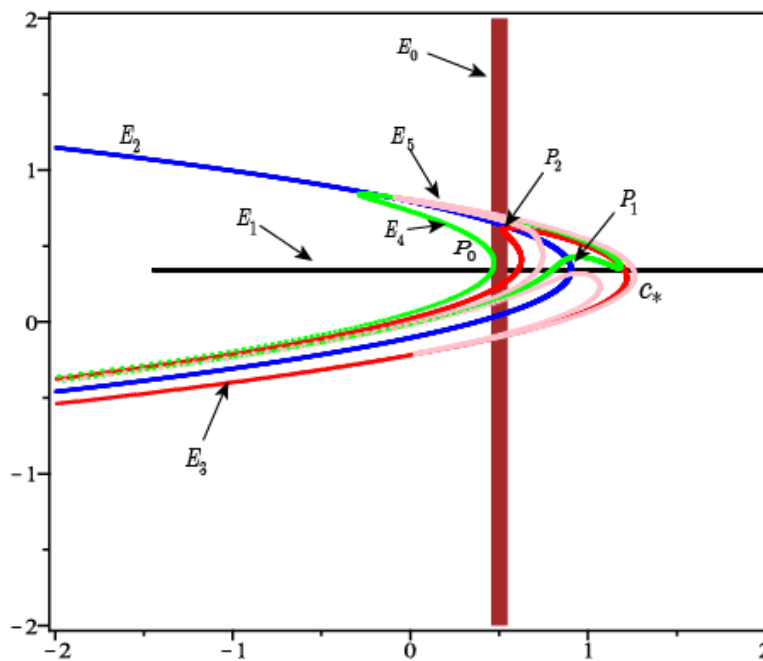


FIGURE 4.2 – Les ensembles de commutation  $E_i$ ,  $r = 2.2$ ,  $c = 0.7$ .

#### 4.1. Calcul des ensembles de commutation dans le cas général

Notons  $F_c$  fonction vectorielle de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ , avec  $F_c = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  telle que  $f_1$  est une fonction polynomiale dépendant de deux variables  $(x, y)$  et des paramètres réels  $r, p, q$  et  $f_2(x, y) = cx$  avec

$0 < c < 1$ . Soit  $J$  la matrice jacobienne de  $F_c$  définie par  $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$

**Définition 4.2**

Soit  $E_i$  l'ensemble image de rang  $i$  de  $E_0$  sur lequel deux antécédents de rang-1 sont confondus tels que

$$E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \right\}.$$

et

$$\forall i > 0, E_i = F_c(E_{i-1})$$

Appliquons la définition 4.2 sur notre système  $F_c$  défini en (3.2),

**Calcul des extrémums.**

L'extrémum  $C_{ext}$  est le point qui annule la dérivée (en dimension 1). Si  $c = 0$ , nous revenons à  $T_0(x) = rx^{p-1}(1-x)^{q-1}$ . Calculons la dérivée :

$$\begin{aligned} T'_0(x) &= (p-1)rx^{p-2}(1-x)^{q-1} - rx^{p-1}(q-1)(1-x)^{q-2} = 0 \\ &= rx^{p-2}(1-x)^{q-2}[(p-1)(1-x) - (q-1)x] = 0 \end{aligned}$$

$$T'_0(x) = 0 \Leftrightarrow \left\{ x \in \mathbb{R} / (x=0) \vee (x=1) \vee \left( x = \frac{p-1}{p+q-2} \right) \right\}$$

**Etude des deux cas limites des extrémums  $x = 0$  et  $x = 1$**

(a) Si  $C_{ext} = 0$  alors  $E_0$  est l'axe des  $y$  défini par  $E_0 = \{x = 0 / \forall y\}$ .

$E_1$  image de  $E_0$  est par conséquent l'axe des  $x$  défini par :  $E_1 = \{\forall x, y = 0\}$ .

$E_2$  image de  $E_1$  est une fonction puissance et représente une courbe définie par

$$E_2 = \left\{ x = r \left( \frac{y}{c} \right)^{p-1} \left( 1 - \frac{y}{c} \right)^{q-1}, \forall y \right\}.$$

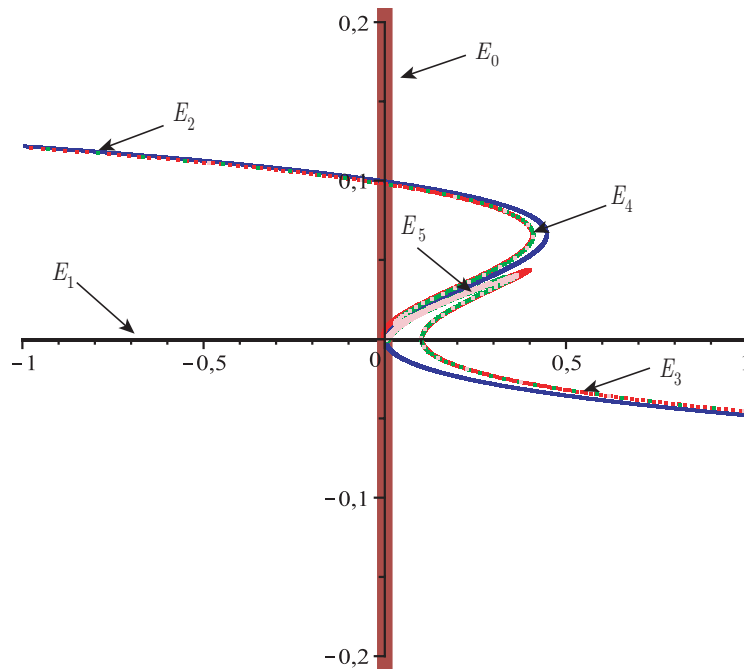


FIGURE 4.3 – Les ensembles de commutation  $E_i$ ,  $r = 3$ ,  $c = 0.1$ ,  $C_{ext} = 0$ .

- (b) Si  $C_{ext} = 1$  alors  $E_0$  est la droite définie par :  $E_0 = \{x = 1 / \forall y\}$ .  
 $E_1$  image de  $E_0$  est donc la droite définie par :  $E_1 = \{\forall x, y = c\}$ .  
 $E_2$  est une fonction puissance et présente une courbe définie par  
 $E_2 = \{x = r \left(\frac{y}{c}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{y}{c}\right)^{q-1} + c, \forall y\}$ .

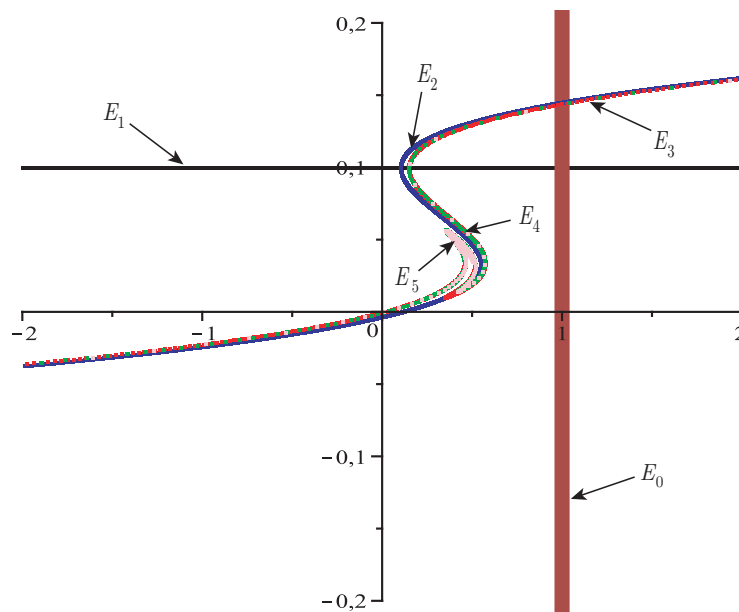


FIGURE 4.4 – Les ensembles de commutation  $E_i$ ,  $r = 3$ ,  $c = 0.1$ ,  $C_{ext} = 1$ .

**Cas de l'extremum**  $x = \frac{p-1}{q+p-2}$

**Proposition 4.2**

Les ensembles de commutation associés à l'extrémum  $C_{ext} = \frac{p-1}{q+p-2}$  sont donnés pour  $\forall p, q \geq 2$ , comme suit :

- $E_0 = \left\{ x = \frac{p-1}{q+p-2} / \forall y, p, q \right\}$
- $E_1 = F_c(E_0) = \left\{ \forall x, p, q / y = c \left( \frac{p-1}{p+q-2} \right) \right\}$
- $E_2 = F_c(E_1) = \left\{ x = r \left( \frac{y}{c} \right)^{p-1} \left( 1 - \frac{y}{c} \right)^{q-1} + c \left( \frac{p-1}{p+q-2} \right) / \forall y, p, q \right\}$

*Démonstration.* Utilisons la définition 4.2 pour la transformation  $T_1$  (ou  $F_c$ ) défini en (3.2),

- Sachant que l'extrémum  $C_{ext}$  est égal à  $\frac{p-1}{q+p-2}$  alors par définition  $E_0$  est la droite  $x = C_{ext} = \frac{p-1}{q+p-2}$  pour  $\forall p, q \geq 2$ .

- Par définition,  $E_1 = T_1(E_0)$  implique

$$\begin{cases} f\left(\frac{p-1}{p+q-2}, y\right) = r \left(\frac{p-1}{p+q-2}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{p-1}{p+q-2}\right)^{q-1} + y \\ g\left(\frac{p-1}{p+q-2}, y\right) = c \left(\frac{p-1}{p+q-2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r \left(\frac{p-1}{p+q-2}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{p-1}{p+q-2}\right)^{q-1} + y \\ y = c \left(\frac{p-1}{p+q-2}\right). \end{cases}$$

d'où  $E_1$  est donné par cette droite  $y = c \left( \frac{p-1}{p+q-2} \right)$ ,  $\forall x$ .

- Sachant que  $E_2 = T_1(E_1)$ , alors

$$\begin{cases} f\left(x, c \frac{p-1}{p+q-2}\right) = r x^{p-1} (1-x)^{q-1} + c \frac{p-1}{p+q-2} \\ g\left(x, c \frac{p-1}{p+q-2}\right) = c x. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r \left(\frac{y}{c}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{y}{c}\right)^{q-1} + c \frac{p-1}{p+q-2} \\ y = \left(\frac{y}{c}\right). \end{cases}$$

$E_2$  est donc défini par la courbe  $x = r \left( \frac{y}{c} \right)^{p-1} \left( 1 - \frac{y}{c} \right)^{q-1} + c \frac{p-1}{p+q-2}$ ,  $\forall y$ .

□

**Remarque 4.2**

Le calcul des  $E_i$  se fait à l'aide d'une méthode mixte analytico-numérique quand  $i \geq 3$ .

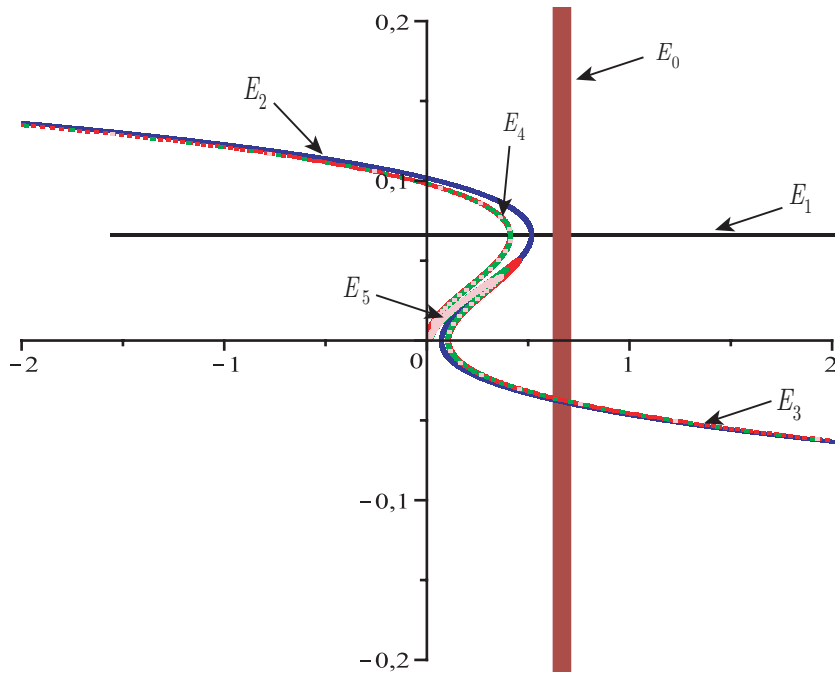


FIGURE 4.5 – Les ensembles de commutation  $E_i$ ,  $r = 3$ ,  $c = 0.1$ .

## 4.2. Les ensembles de commutation et l'application inverse

L'application inverse  $T_1^{-1}$  de  $T_1$  pour  $\forall p, q \geq 2$  est donnée par

$$x = y'/c, y = x' - r(y'/c)^{p-1}(1 - y'/c)^{q-1}$$

Soit  $E'_0$  la droite  $y = cC_{ext}$  ( $y = 0$  si  $C_{ext} = 0$  ou  $y = c$  si  $C_{ext} = 1$  ou  $y = c \frac{p-1}{p+q-2}$  si  $C_{ext} = \frac{p-1}{p+q-2}$ )

Les courbes de commutation sont alors données par

$$E'_n = T_1^{-n}(E'_0)$$

Aussi ces ensembles s'intersectent entre eux et donnent naissance aux point-fold (pliage)  $P'_n$  définis de la même manière que  $P_n$ .

Quand  $c \rightarrow 0$ , la variété stable  $W^s(q_i), i = 1, 2$ , tend vers la variété stable dégénérée  $W_d^s(q_i), i = 1, 2$ . Cette dernière est construite à partir des arcs des paraboles associés avec un multiplicateur  $S = 0$  du point fixe  $q_i$  de  $T_{c=0}$  (voir [26]).

## 4.3. Les courbes invariantes du difféomorphisme quadratique

En vertu des définitions des ensembles de commutations et des courbes invariantes  $W^u(q_i)$  et  $W^s(q_i), i = 1, 2$ , nous avons choisissons  $p = q = 2$  (voir [26]).

Pour ces valeurs, nous avons deux points fixes  $q_1$  et  $q_2$  pour (3.3) qui sont  $q_1 = (0, 0)$  et  $q_2 = ((r + c - 1)/r, cx_{q_2})$ .

Les paramètres  $(r, c)$  sont choisis de sorte que ces deux points fixes soient des cols, et tels que  $W^s(q_1) \cap W^u(q_1) = \emptyset$ , ce qui veut dire qu'il n'y a pas de points homoclines de  $q_1$ .

Les multiplicateurs du point fixe col  $q_1$  sont

$$S_1(q_1) = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4c}}{2}$$

$$S_2(q_1) = \frac{r - \sqrt{r^2 + 4c}}{2}$$

Les multiplicateurs du col  $q_2$  sont

$$S_1(q_2) = \frac{-r}{2} + 1 - c + \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - 4r(r - 1 + c) + 4(r - 1 + c)^2 + 4c}$$

$$S_2(q_2) = \frac{-r}{2} + 1 - c - \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - 4r(r - 1 + c) + 4(r - 1 + c)^2 + 4c}$$

Pour un  $c$  suffisamment petit et tels que  $0 < c < 1$  et  $3 < r \leq 4$ , ces deux points cols ont  $-1 < S_1(q_1) < 0, S_2(q_1) > 1, S_1(q_2) < -1, 0 < S_2(q_2) < 1$ .

La pente du vecteur propre associée à  $W^u(q_1)$  en  $q_1$  est  $s_1(q_1) = 2c/S_2(q_1) = 2c/[r + \sqrt{r^2 + 4c}]$ .

La pente du vecteur propre associée à  $W^u(q_2)$  en  $q_2$  est  $s_1(q_2) = 2c/S_1(q_2)$ .

Mira dans [26] et [41] a montré que les différentes détermination des  $W^u(q_i), i = 1, 2$  sont des solutions particulières de l'équation fonctionnelle de forme  $\Lambda[rx(1-x) + y, cx] = \Lambda(x, y)$ . Selon Picard, il existe une méthode itérative qui peut donner une série exponentielle dont la solution est paramétrique  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ . Autre méthode, quand le point fixe est a l'origine, donnée par Lattès qui consiste à considérer une série exponentielle de la forme  $y = \theta(x) = \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \dots$

Donc pour  $W^u(q_1)$  :  $\omega_1$  est la pente  $s_1$  du vecteur propre, et  $\omega_2$  est donné par  $\omega_2 = r s_1 [s_1 + (r + s_1)^2 - c]$

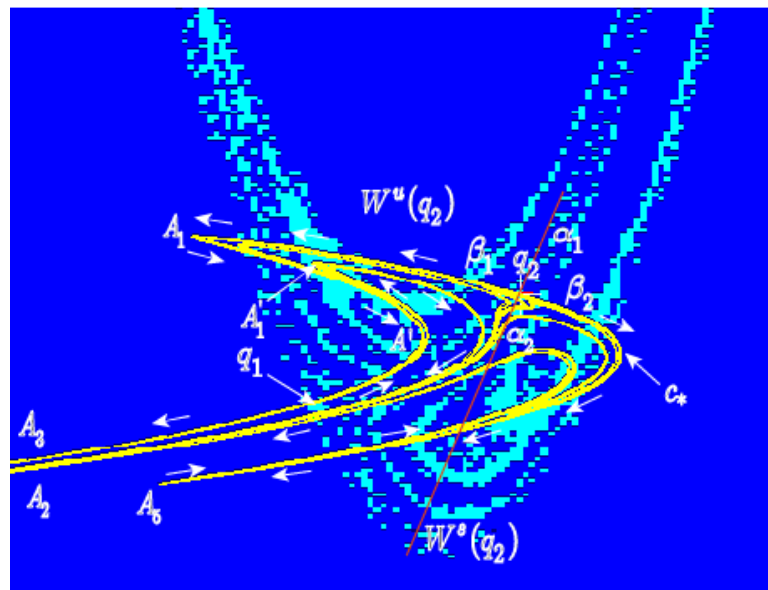


FIGURE 4.6 – la variété instable  $W^u(q_2)$ ,  $r = 2.2, c = 0.7$ .

Sachant que les courbes invariantes sont celles qui passent par un point fixe ou cycle de type col. Les deux courbes invariantes qui passent par un point col, ont quatres branches  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ , les deux premières sont associées à un multiplicateur inférieur à 1 et les deux autres à un multiplicateur supérieur à 1. L'étude de ces courbes permet de confirmer la structure boites emboîtés.

Dans la Figure 4.6, et du [26] Mira a pris  $c \in \beta_2$  qui est le plus proche à  $q_2$ , pour lequel le rayon de courbure présente un maximum.

On pose :  $A_j$  les conséquents de  $c$ .

$A'$  point sur l'arc  $A_1A_3$  ayant un grand rayon de courbure.

$A'_j$  ont les mêmes propriétés des conséquents avec  $c \equiv A_0, A'_0 \equiv A', A'_n \rightarrow A_n$  quand  $c \rightarrow 0$ .

$\alpha_1 \in q_2, \beta_1 \in q_1$  tendent vers l'infini de façon monotone.

$\beta_2 \in q_2, \alpha_1, \alpha_2$  de  $q_1$  tendrent à l'infini en oscillant avec  $\alpha_1 \in q_2$  comme asymptote.

Selon Mira dans [26], tendre  $c \rightarrow 0$  pour le diffeomorphisme, revient à faire un dépliage de l'axe des  $x$  pour  $T^n, n = 1, 2, 3, \dots$

Mira dans [35] précise que les courbes  $(A_{i-1}), (A_i)$  d'équation  $y = -f(x) + \beta_j, j = i - 1$  délimitent un domaine  $(D_i)$ , appartenant au domaine total de  $q_2$  où  $\beta_j$  est l'abscise de l'une des extrémités d'un  $(D_i)$ .

Quand  $i \rightarrow \infty, (A_i)$  s'accumulent le long de  $(A')$  tels que  $y = -f(x) + x_{q_i}$ .

$W_d^u(q_1)$  la variété instable dégénérée revient sur la droite  $y = 0$  et construit du segment  $-\infty \leq x \leq x(c_*)$  et  $W_d^u(q_2)$  délimité par  $c_*A_1$  ( $c_*$  point critique de rang 1 et  $A_1$  de rang-2).

Le pliage de  $W^u(q_i)$  s'écrase sur  $y = 0$  et donne  $W_d^u(q_i)$  ( $y = 0, c = 0$ ).

S'il existe un attracteur,  $W^s(q_i)$  se trouve au long de la frontière du bassin d'attraction de cet attracteur.

Il est important de noter que dans [26], il y a aussi les point d'intersection (pliage-fold) principaux  $A_i$  et secondaires  $A'_i$  entre  $W^u(q_i)$  et  $E_1$  et entre  $W^s(q_i)$  et  $E_1$  tels que  $A_n = T_1^n(A)$  et lorsque  $c \rightarrow 0, \lim(A_n) = \lim(A'_n) = c_n, c_n = T_1^n(c_*)$  point critique de rang  $(n + 1)$  de  $T_0$  sur  $y = 0$ , avec  $A_0 \equiv A, c_0 \equiv c_*$ .

Par la suite nous traçons quelques Figures qui illustrent la relation directe entre les courbes invariantes et les ensembles de commutation.

#### 4.4. Quelques applications

Rappelons qu'en Chapitre3 nous avons prouvé l'existence d'un attracteur de Hénon pour les valeurs fixées :  $p = 2.5, q = 2, r = 4.6, c = 0.1$ . Nous confirmons l'existence de l'attracteur chaotique avec une autre méthode numérique et traçons les ensembles de commutation associés, nous obtenons l'attracteur souhaité en couleur jaune, (voir Figures 4.7a,4.7b). Les Figures (4.8, 4.9, 4.10) sont



tracées pour  $c = 0.8, c = 1$  et  $c = 1.1$  par Dynamics et Maple. La relation est bien visible entre la variété instable du col (sur Dynamics) et les ensembles tracés (sur Maple).

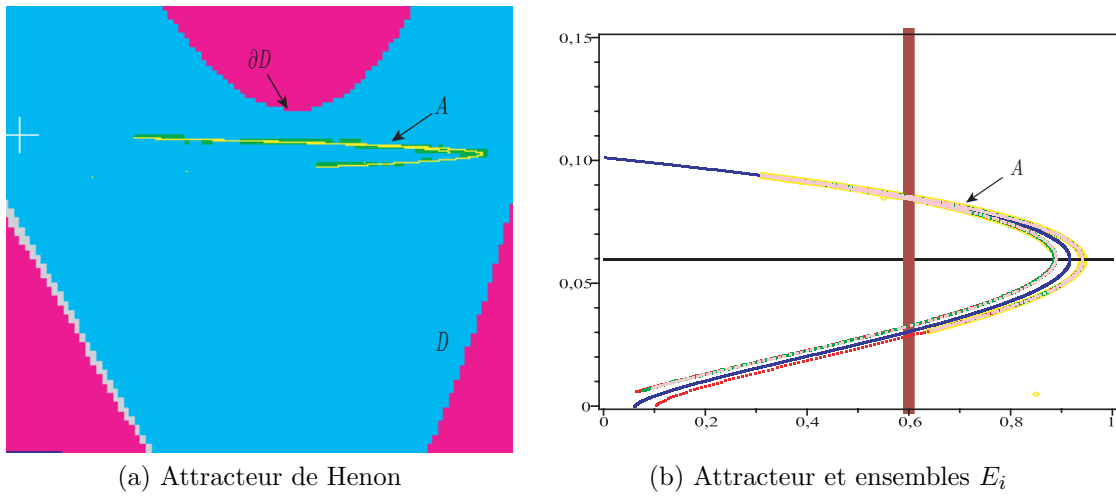


FIGURE 4.7 – Attracteur de Hénon pour  $p = 2.5, q = 2, r = 4.6, c = 0.1$ .

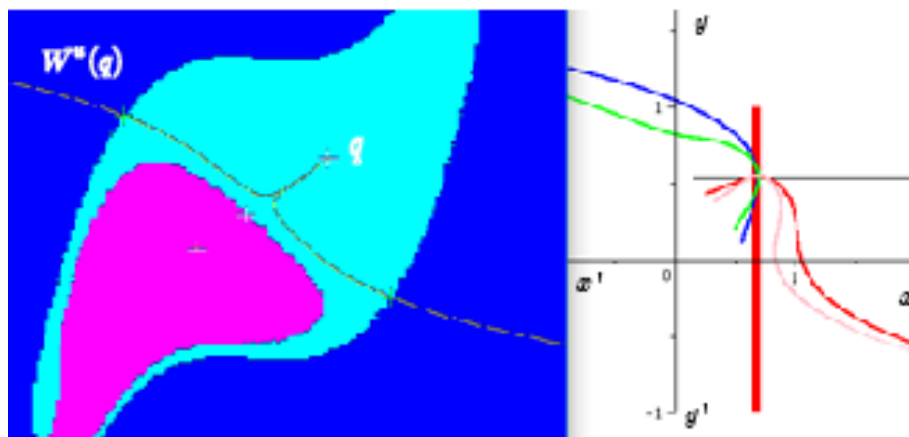


FIGURE 4.8 –  $r = 1, c = 0.8, p = 3, q = 2$

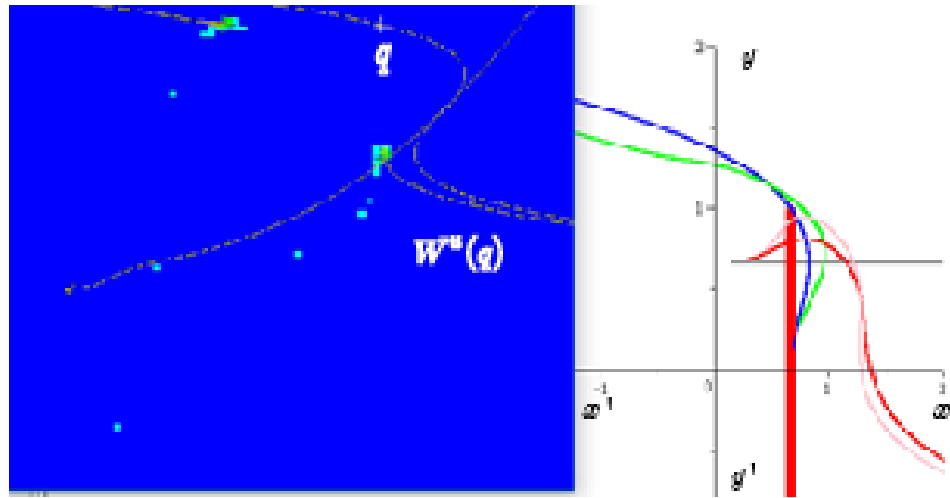


FIGURE 4.9 –  $r = 2, c = 1, p = 3, q = 2$

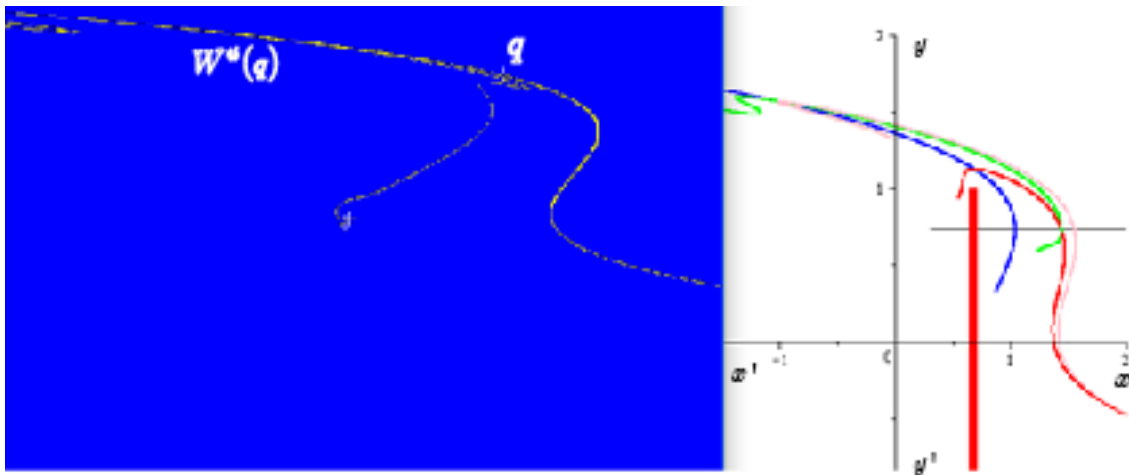


FIGURE 4.10 –  $r = 2, c = 1.1, p = 3, q = 2$

# Conclusion et perspectives

Le travail que nous avons présenté dans cette thèse concerne l'étude d'un système non linéaire réel modélisé par des transformations ponctuelles de dimensions deux. Dans le cas particulier où nous considérons un modèle basé sur des fonctions polynomiales, nous avons étudié les types de bifurcations locales (flip, fold) analytiquement et numériquement dans les six plans de paramètres  $(p, r), (q, r), (c, r), (p, q), (q, c), (p, c)$  et dans le plan de phase, les bifurcations globales et les courbes critiques. Cette thèse a contribué à développer les travaux initiés depuis quelques années sur les transformations inversibles et non inversibles.

Nous avons étudié le comportement des cycles d'ordre  $k$ , ( $k \geq 1$ ) dans chaque plan paramétriques. Pour un paramètre de prolongement  $c$  petit ( $c = 0.1$ ), la bifurcation big bang apparaît dans ces plans et existe même dans le cas où les applications ne sont pas défini par morceaux. Les effets de bifurcation pour  $c$  petit sont semblables à ceux dans le cas unidimensionnel. Cependant, quand  $c$  augmente, ils changent qualitativement. Une structure de bifurcation particulière est détectée au voisinage de la valeur  $c = 1$  où nous avons trouvé une infinité de points de codimension-2 sur la courbe  $\Delta_{c=1}$ , et pour  $c > 1$  nous avons obtenu que les cycles d'ordre  $k \geq 1$  tous instables. L'étude dans le plan de phase nous a confirmé ces résultats, avec la mise en évidence de l'attracteur chaotique et les bifurcations hétérocliniques des points cols, situés à l'intérieur ou sur la frontière du bassin d'attraction. Ce phénomène provient de l'apparition des bassins non connexes avec des points cols à l'extérieur et des courbes critiques dans le cas général ( $\forall p, q > 2$ ).

Et ce travail est composé de trois chapitres.

- A titre de suggestion, nous proposons pour le deuxième chapitre de la présente thèse de se pencher sur la bifurcations big bang dans les six plans des paramètres étudiés et faire un balayage bien précis.
- Pour le troisième chapitre, approfondir et compléter l'étude de l'endomorphisme de dimension-2 par la variation des paramètres en valeurs négatives.
- Comme prochaine étude, nous allons proposer de déterminer numériquement les courbes du plan  $(c, r)$  par variation du paramètre  $c, c = 0, c = 1$  et  $0 < c < 1$  et  $\alpha$ , pour lesquelles les cycles de la transformation à variables réelles  $T_2$  définie par

$$T_3 : \begin{cases} x_{n+1} = rx_n(1 - y_n) + y_n(1 + \alpha x_n^2) \\ y_{n+1} = cx, \end{cases} \quad (4.3)$$

ont le produit de leurs multiplicateurs égal à 1 ( $S_1 S_2 = 1$ ).

(4.3) est un difféomorphisme pour  $\alpha > 0$ , à jacobien non constant  $J = -c(1 + \alpha x_n^2)$  et possède trois points fixes qui sont tous des foyers attractifs si  $\alpha = 1$  et  $|c| < 1$ .

- [1] Alexander J. C., Yorke J. A., You Z. and Kan I., *Riddled basins*, Int. J. Bif. Chaos 2,795 (1992).
- [2] Alexander J. C., Hunt B.R., Kan I. and Yorke J.A., *Intermingled basins of the triangle map*, Ergod.Th.Dyn.Syst. 16, (1996), 651-662.
- [3] Aleixo S. M., Rocha J. L., Pestana D. D., *Populational growth models proportional to Beta densities with Allee effect*, 11 24,(2009), 3-12.
- [4] Arnold V. I., *Lecture on bifurcations and versal systems*, Russ Maths. Surveys 72, 54 (1972).
- [5] Ashwin P., Breakspear M., *Anisotropic properties of riddled basins*, Physica. Lett. A 280, (2001), 139-145.
- [6] Ashwin P., *Riddled basins and coupled dynamical systems*, Lect. Notes Phys. 671, (2005), 181-207.
- [7] Avrutin V., Granados A. and Schanz M., *Sufficient conditions for a period incrementing big bang bifurcation in one-dimensional maps*, Nonlinearity 24, (2011)(9), 2575-2598.
- [8] Barugola A., Cathala J.C., Mira C., *Annular Chaotic Areas*, Nonlinear Analysis TM and A. 10(11), (1986), 1223-1236.
- [9] Cathala J.C., *On some Properties of Absorptive Areas in 2nd Order Endomorphisms*, ECIT Batschuns, Proceedings (World Scientific), (1989).
- [10] Cao Y., *A note about Milnor attractor and riddled basin*, Chaos Solitons and Fractals 19, (2004), 759-764.
- [11] Cathala J.C., Kawakami H. and Mira C., *Singular points with two multipliers  $S_1 = -S_2 = +1$  in the bifurcation curves of maps*, Int. J. Bifurcation and chaos, Vol. 2, No. 4, (1992), 1001-1004.
- [12] Carcasses J.P., *Sur quelques structures complexes de bifurcations de systèmes dynamiques*, Thèse de L'UPS-Toulouse, (1990).
- [13] Carcasses J.p., Mira C., Simo C. et Tadjer J.C., *Cross road area-spring area transition (I) Parameter plane representation* international Journal of Bifurcations and Chaos in Applied Sciences and Engineering, No.1, (1991), PP.1-2.

- [14] Chouit S., *Etude des comportements complexes des transformations polynomiales bidimensionnelles*, Thèse de Doctorat UBMA 2007.
- [15] Davie A. M., Dutta T.K., *Period-doubling in Two-Parameter Families*, *Physica D* 64 (1993)(4), 345-354.
- [16] Dullin H. R., Meiss J. D., *Generalized Hénon maps : the cubic diffeomorphisms of the plane*, *Physica D*, 14 (2000), 262-289.
- [17] Frieland S., Milnor J., *Dynamical properties of plane automorphisms*, *Ergodic Theory Dyn, Syst.* 9 (1989), 67-99.
- [18] Ferchichi M., *Etude des Comportements Complexes de Systèmes Modélisés par endomorphismes bidimensionnels*, Thèse de doctorat UBMA 2006.
- [19] Friedland S. and Milnor J., *Dynamical Properties of Plane Polynomial Automorphisms*, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 9 (1989), 67-99.
- [20] Guckenheimer J. and Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New york (1983).
- [21] Gardini L., *On the Global Bifurcation of Two-Dimensional Endomorphisms by Use of Critical Lines*, *Nonlinear Analysis TM and A*, 18(4), (1991), p.361-399.
- [22] Gardini L., *Global Analysis and Bifurcations in Two-Dimensional Endomorphisms by Use of Critical Lines*, *Proceedings of ECIT Batschuns, Austria*, (World Scientific, Singapore, 1992), p.112-125.
- [23] Gardini L., *Homoclinic Orbits of Saddles in Two-Dimensional Endomorphisms*, *Proceedings of ECIT Batschuns, Austria*, Sept(1992).
- [24] Gardini L. *Homoclinic Bifurcations in n-Dimensional Endomorphisms Due to Expanding Periodic Points*, *Nonlinear Analysis TM and A*, 23 (8), (1994), p.1039-1089.
- [25] Gardini L., Abraham R., Fournier-Prunaret D. and Record R.J., *A Double Logistic Map*, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 4, No. 1, (1994), p.145-176.
- [26] Gumowski I. , Mira C. , *Dynamique chaotique : Transformations ponctuelles : Transition ordre-désordre*, Cepadeus Editions 1980.
- [27] Gonchenko V.S., Kuznetsov Yu. A., and Meijer H. G. E., *Generalized Hénon map and bifurcations of homoclinic tangencies*, *SIAM J. Appl. Dyn. Sys*, 4, (2005).
- [28] Hénon M., *Numerical study of quadratic area-preserving mappings*, *Q. J. Appl. Math*, 27 (1969)(3), 291-312.
- [29] Jury E.I., *Inners and stability of dynamics*, Wiley NY, (1974).
- [30] Kuznetsov Yu. A., Meijer H. G. E., van Veen L., *The fold-flip bifurcation*, *Int. J. Bif. Chaos*, Vol. 14, (2004), 2253-2282.

- [31] Laadjel.B *Etude des difféomorphismes quartiques dans le plan*, Thèse de doctorat U.Beskra (2015).
- [32] Maistrenko.Yu.L, Maistrenko.V.L, Popovich.A and Mosekilde.E *Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps*, Phys. Rev. E57, (1998), 2713-2724.
- [33] Marotto J.R., *Snap- Back Repellers Imply Chaos in IR*, *J. Math. Analysis Applic*, 63, (1978), p.199-223.
- [34] Mira C., *Détermination Pratique du Domaine de Stabilité d'un Point d'Equilibre d'une Ré- currence non-Linéaire du Deuxième Ordre à Variables Réelles*, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 261, (1964), pp. 5314-5317, Groupe 2.
- [35] Mira C., *Notion of "germinal dynamics" via embedding of Dim(p-1) noninvertible map into a Dim(p) invertible map. Phase space(Part1)*.
- [36] Mira C. *Chaotic Dynamics*, World Scientific, Singapore, (1987).
- [37] Mira C., Gardini L., Barugola A. and Cathala J.C., *Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps*, *World Scientific Series on Nonlinear Sciences*, Series A Vol. 20.
- [38] Mira C., Carcassese J.P., Bosch M., Simo C. and Tadjer J.C. *Crossroad area-spring area transition (II). Foliated parametric representation*, *International Journal of Bifurcations and Chaos in Applied Sciences and Engineering*,1(2),PP.339-348, (1991).
- [39] Mira C., *Détermination Pratique du Domaine de Stabilité d'un Point d'Equi- libre d'une Ré- currence non-Linéaire du Deuxième Ordre à Variables Réelles*, *C. R. Acad. Sc. Paris*, T. 261, p. 5314-5317, Groupe 2, (1964).
- [40] Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H. and Cathala J.C., *Bassin Bifur- cations of Two Dimensional Noninvertible Maps : Fractalization of Basins*, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, Vol. 4, No. 2, p.343-381, (1994).
- [41] Mira C., Gracio C., *On the embedding of a (p-1)-dimensional noninvertible map into a p- dimensional invertible map (p=2,3)*, *Int. J. Bif. Chaos*, Vol.13, (2003)(7), 1787-1810.
- [42] Mira C. et Roubellat J.C., *Cas où le Domaine de Stabilité d'un Ensemble Limite Attractif d'une Ré- currence du Deuxième Ordre n'est pas Simplement Connexe*, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A* 268, p.1657-1660, (1969).
- [43] Mira C., Gardini L., Barugola A. and Cathala J. C., *Chaotic dynamics in two-dimensional non invertible maps*, World Scientific, 1996.
- [44] May R. O., Oster G. F., *Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models*, *American Naturalist* 110 (1976) 974, 573-599.
- [45] Ott E., Sommerer J. C., Alexander J.C., Kan I and Yorke J.A. *The transition to chaotic attractors with Riddled Basins*, *Physica D* 76 : 384 (1994).

- [46] Rocha J. L., Aleixo S. M., *An extension of gompertzian growth dynamics : Weibull and Fréchet models*, Mathematical Biosciences and Engineering (MBE), 10 (2013), 379-398.
- [47] Rocha J. L., Aleixo S. M., *Dynamical analysis in growth models : Blumberg's equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B (DCDS-B), 18 (2013), 783-795.
- [48] Rocha J.L., Taha A.K., Fournier P.D., *Dynamical Analysis and Big Bang Bifurcations of 1D and 2D Gompertz's Growth Functions*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 26, No. 11 (2016) 1630030(22 pages).
- [49] Ruelle D., *Small Random Perturbations of Dynamical Systems and the Definitions of attractors*, Comm. Math. Phys. 82, 137 - 151, (1981).
- [50] Soula, *Bifurcation et symétrie dans les systèmes dynamiques discrets couplés*, Thsèse de doctorat U.Constantine (2014).
- [51] Sarmah H. K., Paul R., *Period doubling route to chaos in a two parameter invertible map with constant Jacobian*, IJRRAS3 (1) (2010).
- [52] Singer D., *Stable orbits and bifurcation of maps of the interval*, SIAM J. Appl. Math. 35 (1980) 260-267.
- [53] Sarmah H. K., Paul R., *Period Doubling Route to Chaos in a Two Parameter Invertible Map with Constant Jacobian*, IJRRAS3 (1) (2010).
- [54] Sibony N., *Dynamique des applications rationnelles de  $P^k$  en Dynamique et géométrie complexes*, Soc. Math. France (1999), 97-185.
- [55] Silverman J., *Geometric and arithmetic properties of the Hénon map*, Math. Z. 215 (1994), 237-250.
- [56] Smale S., *Diffeomorphisms with many periodic points*, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press (1965), 63-80.
- [57] Sprott J. C., *High-Dimensional Dynamics in the Delayed Hénon Map*, EJTP 3 No. 12 (2006) 19-35.
- [58] Tsoularis A., *Analysis of Logistic Growth Models*. Res. Lett. Inf. Math. Sci, (2001) (2), 23-46.
- [59] Verhulst F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1996.
- [60] Williams R.F., *The Zeta Fonction of an Attractor* Conference on the Topology of Manifolds, ed. J.G.Hocking, Prindle Weber Schmidt, Boston (1968).



# Programme MAPLE

```
# Tracer l'attracteur
>restart:with(plots):with(linalg):
>r:=4.6:c:=0.1:p:=2.5:q:=2:
>T:=NULL:
f:=(x,y)->r*x^(p-1)*(1-x)^(q-1)+y:
g:=(x,y)->c*x:
>x[0]:=0.05:y[0]:=0.8:
for i to 4000 do
x[i]:=f(x[i-1],y[i-1]):
y[i]:=g(x[i-1],y[i-1]):
T:=T,[x[i],y[i]]:
od:
Atrac:=plot([T],style=point,color=yellow):display(Atrac);
# tracer les ensembles de commutations
>J1:=matrix(2,2,[diff(f(x,y),x),diff(f(x,y),y),diff(g(x,y),x),diff(g(x,y),y)]);
>det(J1);
>K1:=det(J1);solve(K1,x);
>Cext:=subs({p=2.5,q=2},(p-1)/(p-2+q));evalf(%);
# tracer E_0
>T:=NULL:L:=NULL:
r:=4.6;c:=0.1;
for yi from -2 to 2 do
T:=T,[Cext,yi]:
od:
G1:=pointplot([T], style=LINE,color=brown,thickness=7):
display(G1);
# tracer E_i
>suisant:=Cext:x0:=suisant:
LC0:=NULL:
LC1:=NULL:
```

```

LC2:=NULL:
LC3:=NULL:
LC4:=NULL:
# Recherche de LC0
for i from -2 to 2 by 0.001 do
x0:=f(suivant,i):
y0:=g(suivant,i):
LC0:=LC0,[x0,y0]:
od:
# Recherche des deux branches de LC1
for x in [LC0] do
x1:=f(x[1],x[2]):
y1:=g(x[1],x[2]):
  if type(x1,float) and type(y1,float) then
    LC1:=LC1,[x1,y1]:
  fi:
od:
# Recherche des deux branches de LC2
for x in [LC1] do
x2:=f(x[1],x[2]):
y2:=g(x[1],x[2]):
  if type(x2,float) and type(y2,float) then
    LC2:=LC2,[x2,y2]:
  fi:
od:
# Recherche des deux branches de LC3
for x in [LC2] do
x3:=f(x[1],x[2]):
y3:=g(x[1],x[2]):
  if type(x3,float) and type(y3,float) then
    LC3:=LC3,[x3,y3]:
  fi:
od:
# Recherche des deux branches de LC4
for x in [LC3] do
x4:=f(x[1],x[2]):
y4:=g(x[1],x[2]):
  if type(x4,float) and type(y4,float) then
    LC4:=LC4,[x4,y4]:

```

```
fi:
od:
>fenster:=0..1,0..0.15:
G0:=listplot([LC0],view=[fenster],style=point,symbol=point,thickness=0,color=black):
G1_1:=listplot([LC1],view=[fenster],style=point,symbol=point,thickness=0,color=blue):
G2:=listplot([LC2],view=[fenster],style=point,symbol=point,thickness=0,color=red):
G3:=listplot([LC3],view=[fenster],style=point,symbol=point,thickness=0,color=green):
G4:=listplot([LC4],view=[fenster],style=point,symbol=point,thickness=0,color=pink):
G5:=listplot([LC5],view=[fenster],style=point,symbol=point,thickness=0,color=marron):
G6:=listplot([LC6],view=[fenster],style=point,symbol=point,thickness=0,color=pink):
# Tracer l'attracteur et les ensembles de commutation
>display([Atrac,G0,G1,G1_1,G2,G3,G4]);
```



## Attractors and Commutation Sets in Hénon-like Diffeomorphisms \*

Wissame Selmani and Ilham Djellit

ABSTRACT: In this work we display Hénon-like attractors that emerge and appear in diffeomorphisms generated by embedding of one-dimensional endomorphisms. We show the properties of basin of attraction, and identify various types of attractors and commutation sets which are associated with these diffeomorphisms. Numerically presented scenarii of the creation and destruction of these attractors via bifurcations are illustrated.

Key Words: Attractors, Commutation sets, Heteroclinic and homoclinic bifurcations.

### Contents

<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2 Endomorphisms depending of two parameters <math>(r, p)</math></b>	<b>11</b>
2.1 Embedding of one-dimensional noninvertible map into a two-dimensional invertible map . . . . .	13
2.2 bidimensional map depending of three parameters $(r, p, q)$ . . . . .	14
<b>3 Bifurcations and complexity</b>	<b>16</b>
3.1 Invariant manifolds of fixed points . . . . .	18
<b>4 Conclusion</b>	<b>21</b>

### 1. Introduction

Hénon map is considered as the simplest diffeomorphism possessing important properties that contributed greatly to our understanding of complex and chaotic dynamics. We study a diffeomorphism in dependence of four parameters, and which can be considered as a purely artificial model coming from the embedding of a one-dimensional noninvertible map into a two-dimensional invertible one with constant Jacobian.

The dynamics involves various transitions by bifurcations. In this respect, it can be compared with classical examples such as the generalized Hénon maps. On the one hand, our study concerns a noninvertible map embedded into the invertible one and local bifurcations. On the other hand, we have to deal with global bifurcations of observable sets, such as crises of attractors or metamorphoses

---

\* This work was partially supported by Research Project Grant B01120130023  
 2010 *Mathematics Subject Classification*: 34C28, 34C37, 37D45.  
 Submitted February 26, 2016. Published November 02, 2016

of basin boundaries, which are the most easily detected and probably the most often described in scientific literature.

There has been growing interest for homoclinic and heteroclinic phenomena, they have been the most studied objects in dynamical systems. From the qualitative point of view homoclinic phenomena are of interest because they represent a possible source for complex dynamics. It has been recognized that connecting orbits and their bifurcations play an important role in the qualitative theory of dynamical systems. Strong effort has gone into describing the different bifurcations that can occur in terms of genericity and into determining the different types of behavior in systems undergoing homoclinic and heteroclinic bifurcations.

A very influential work is used here, concerning the importance of commutation sets done by Mira and Gracio who have developed the fascinating role of these sets to delimit chaotic attractors (see [3]). Here the dynamical features are explored by numerical methods. Also, in several cases we find interesting dynamical objects predicted by the theory and global phenomena in the parameter plane. This kind of scanning has been made for giving a first idea about bifurcation organization.

Let's start with "the generalized logistic map " in dimension 1, the system presents a population evolution model, which generalizes the logistic models that are proportional to the beta densities with the shape parameters  $p$  and  $q$ , such that  $p, q > 1$ , and the growth rate  $r$ .

The complex dynamical behavior of these models is studied in the plane  $(r, p)$  using explicit methods when the parameter  $r$  increases. Anticipating the future evolution of population's dynamics is one of the most important issue in several domains, such as biological, ecological, social or economical sciences.

Rocha and *al.* in [4] introduced some basic concepts and results on probability density functions. They showed that the sequence

$$f_{r,2,2}(x) = rx(1-x)$$

is proportional to Beta density  $Beta(2, 2)$  for  $x \in [0, 1]$  and  $r > 0$ . This sequence is a simplified population model. For a small initial condition, that's mean a low population, the growth rate in years  $n$  is exponential. For a large initial condition, the population is more important for the same space and the same food, so it will be increase.

Also they have studied the complex dynamical behavior of some models of the main following form

$$f_{r,p,q}(x) = rx^{(p-1)}(1-x)^{(q-1)}$$

which are proportional to  $Beta(p, q)$  densities, where the variable  $x \in [0, 1]$  and the parameters  $p, q > 1$ .

In the particular case of  $q = 2$ , these models are typically used to study of whales population and forest fires. The parameter  $p$  measures the difficulty of the mating process.

They have considered an extension of the function Beta and the density Beta to approach the dynamical system of Verhulst, which symbolizes the study of the birth

and death processes of a population of one species, represented for  $p \in N - \{1, 2\}$  by the map:

$$N(t_{n+1}) = r^* N(t_n)^{p-1} \left( 1 - \frac{N(t_n)}{K} \right)$$

Considering that  $x_n = \frac{N(t_n)}{K}$  and  $r = r^* K^{p-2}$ , we obtained:

$$x_{n+1} = r x_n^{p-1} (1 - x_n)$$

In other way, Verhulst in [7] has considered  $N(t_n)$  the number of individuals at time  $t_n$ ,  $N(t_n) \geq 0$  with,  $N(t_{n+1}) = f(N(t_n))$  where  $f$  determined by the birth and death rates in the population. We put  $f(0) = 0$ ,  $N(t_{n+1}) > N(t_n)$  if  $N(t_n)$  is small and  $N(t_{n+1}) < N(t_n)$  if  $N(t_n)$  is large because of natural bounds on the amount of available space and food. We present a simple model

$$N(t_{n+1}) = N(t_n) + rN(t_n) - \frac{r}{k}N(t_n)^2 \quad (1.1)$$

$r$  is the growth coefficient and  $k$  a positive constant. We introduce some basic rescaling  $x_n = rN(t_n)/(k(1+r))$  and  $a = 1+r$  the equation (1.1) becomes

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n). \quad (1.2)$$

The equation (1.2) is called the quadratic equation, logistic equation or Verhulst equation.

This paper is devoted to present a numerical investigation of a two-dimensional diffeomorphism on the dynamical properties of its basins of attractions, regular and chaotic attractors, the bifurcation structures and the mechanisms that assure chaotic dynamics by extending works. We focus on the topological structure of trajectories around eventual cycles and fixed points and to illustrate its phase-parameter portraits.

## 2. Endomorphisms depending of two parameters $(r, p)$

In this section we provide a few overviews of the analysis of the family of endomorphisms  $f_{r,p} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  depending of two parameters  $p \in N - \{1, 2\}$  and  $r > 0$ , and defined by:

$$f_{r,p}(x) = r x^{p-1} (1 - x) \quad (2.1)$$

$p$  and  $r$  are chosen such that  $p \in ]1, p_M]$  and  $r \in ]0, r(p_M)]$ , with  $p_M$  and  $r(p_M)$  correspond to the maxima values of  $p$  and  $r$ .

Let  $c$  be a critical point of  $f_{r,p}$  which satisfies the following conditions:

- $f_{r,p}(c) = 0$  and  $f'_{r,p}(c) < 0$  meaning that  $f_{r,p}$  is strictly increasing in  $[0, c[$  and strictly decreasing in  $]c, 1]$ ;  
and  $f'_{r,p}(x) \neq 0, \forall x \neq c$ ;

- $f_{0,p}(c) = 0$  and  $f_{r(p_M),p}(c) = 1$ ; with  $c = \frac{p-1}{p}$ ;
- $f_{r,p}(0) = f_{r,p}(1) = 0$ ;

Singer in [6] used the concept of negative Schwartzian derivative to discuss the existence of stable periodic orbits. The Schwarz derivative of  $f_{r,p}(x)$  is

$$S(f_{r,p}(x)) = \frac{f_{r,p}''(x)}{f_{r,p}'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f_{r,p}''(x)}{f_{r,p}'(x)} \right)^2 < 0 ; \quad \forall x \in ]0, 1[-\{c\}$$

Singer concluded that a function  $f$  which is  $C^1$ -unimodal and for which  $S(f(x)) < 0$  for all  $x \in ]0, 1[-\{c\}$  has at most one stable periodic orbit plus possibly a stable fixed point in the interval  $[0, 1]$ .

Thereby  $f_{r,p}$  of the interval  $[0, 1]$  into itself is  $C^1$ -unimodal if it is continuous;  $f_{r,p}(c) = 1$ ;  $f_{r,p}$  is strictly decreasing on  $[0, c]$  and strictly increasing on  $[c, 1]$ ; and  $f_{r,p}$  is once continuously differentiable with  $f_{r,p}'(x) \neq 0$  when  $x \neq c$ .

The maximum value of the parameter  $p$  is  $p_M = 20$ , it is the largest value for which we consider that the model can be realistic. The value  $r(p_M)$  is the value of the parameter  $r$  corresponding to the full shift for  $p = p_M$ . We consider that  $1 < p \leq p_M = 20$  and  $0 < r \leq 53.001$ . For any fixed value  $p > 1$ , if  $r = 0$ , then there is no curves.

For example, we can verify that unimodal maps  $f_{r,p}$  have the fixed point  $x^* = 0$  for  $r > 0$  and  $p > 1$ . However, for  $p = 1.1$  and  $p = 1.5$ , we can verify that these maps have another positive fixed point besides 0. For  $p \in [2, p_M]$  and  $r > 6.721$ , there are the fixed point zero and two other fixed points (cf. Figure 1).

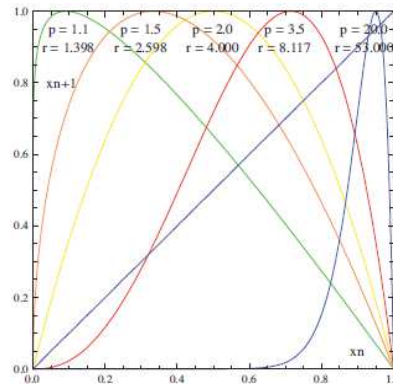


Figure 1: The fixed points for different values of  $(r, p)$  according to [1].

Rocha and *al.* in [1,5] have shown that there exists a relation between the parameters  $p$ ,  $q$  and  $c$  such that for all  $r \in ]r_1, r_2[$ , we can assure the existence of a unique attractor for  $x \in [0; 1]$  with

$$r_1 = \frac{x_f^{2-p}}{1-x_f}$$

$$r_2 = \frac{2p^2 - p^2 - 4p + 2p + 1}{p^3 c^p (1-c)^2}$$

then  $x_f$  is the only one positive fixed point,  $c = \frac{p-1}{p}$  is the critical point of order 0.

### 2.1. Embedding of one-dimensional noninvertible map into a two-dimensional invertible map

Let  $T$  be a two-dimensional Hénon-like map:

$$T : \begin{cases} x' = f_{r,p}(x) + y \\ y' = bx \end{cases} \quad (2.2)$$

The endomorphism  $f_{r,p} = rx^{p-1}(1-x)$  is embedding into the diffeomorphism  $T$  with  $b \neq 0$ , and jacobian is  $J = -b$ . For a family of recurrence (2.2), the continuously passing of properties, for  $b = 0$  to  $b \neq 0$  and  $b$  sufficiently small, is obtained in the sense that we find identical cycles associated with the structures of bifurcation as in [3,4]. Figure 2 presents information on stability region for the fixed point (blue domain), and the existence region for attracting cycles of order  $k$  exists ( $k \leq 14$ ). The black regions ( $k = 15$ ) correspond to chaotic behavior.

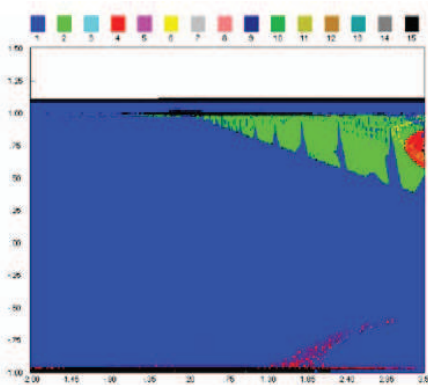


Figure 2: Scanning for  $p = 3$ ,  $q = 2$ ,  $r \in [-2, 3.5]$ ,  $b \in [-1, 1.5]$ .

At once  $b$  is not small enough, an attractor type fixed point appears and coexists with a cycle of order two.



## 2.2. bidimensional map depending of three parameters $(r, p, q)$

In this part, we consider three parameters  $(r, p, q)$ . The system  $T_b$  will be:

$$T_b : \begin{cases} x' = rx^{p-1}(1-x)^{q-1} + y \\ y' = bx \end{cases} \quad (2.3)$$

Taking into account [3], Mira describes some properties of the two-dimensional invertible systems  $T_b$  that can be expressed as

$$T_b : \begin{cases} x' = f_{r,p,q}(x) + y \\ y' = bx \end{cases} \quad (2.4)$$

associated with noninvertible one-dimensional maps  $T_0$  such that when the parameter  $b$  is equal to the critical value, i.e.:  $b = 0$  then  $T_0 : x' = f_{r,p,q}(x)$ . These properties are also about the stable and the instable fixed points and the concept of commutation set in invertible maps which are useful for interpreting such problems and fundamental in the definition of bifurcations leading to important modification of attractors and their basins of attraction.

Recall that a closed and invariant set  $A$ , is called an attracting set if some neighborhood  $U$  of  $A$  exists such that  $T(U) \subset U$ , and  $T^n(x) \rightarrow A$  as  $n \rightarrow \infty$ ,  $\forall x \in U$ .

The set  $D = \cup_{n \geq 0} T^{-n}(U)$  is the total basin (or simply: basin of attraction, or influence domain) of the attracting set  $A$ . In general, several types of attractors, e.g. fixed points, invariant closed curves, chaotic attractors, may coexist in the same mapping. This non-uniqueness also indicates that the routes to chaos depend on initial conditions and are therefore non-unique and depend on the values of the parameters. The basins of attraction  $D$ , defining the initial conditions leading to a certain attractor, may be a complex set.

**Definition 2.1.** [3] *Let  $T$  be a continuous noninvertible map  $x' = Tx$ ,  $\dim x = n$ . The critical set of rank-one, said  $CS$ , is the geometrical locus of points  $x$  having at least two coincident preimages. The critical set  $CS_i$  of rank- $(i+1)$ ,  $i > 0$ , is the rank- $i$  image of the set  $CS_0 \equiv CS$ .*

**Definition 2.2.** *Let  $S$  be a saddle fixed point and  $U$  a neighborhood of  $S$ . The local unstable set  $W_{loc}^u(S)$  of  $S \in U$  is given by:*

$$W_{loc}^u(S) = \{x \in U : x_{-k} \in T^{-k}(x) \rightarrow S, x_{-k} \in U, \forall k\}$$

and the global unstable set  $W^u(S)$  of  $S$  is given by:

$$W^u(S) = \cup_{k \geq 0} T^{-k}[W_{loc}^u(S)].$$

The local stable set  $W_{loc}^s(S)$  of  $S \in U$  is given by:

$$W_{loc}^s(S) = \{x \in U : x_k \in T^k(x) \rightarrow S, x_k \in U, \forall k\},$$

and the global stable set  $W^s(S)$  of  $S$  is given by:  $W^s(S) = \cup_{k \geq 0} T^k[W_{loc}^s(S)]$ .

**Definition 2.3.** *The point  $Q$  is said to be homoclinic to the nonattracting fixed point  $S$  (or homoclinic point of  $S$ ) if  $Q \in W^u(S) \cap W^s(S)$ .*

*Let  $M$  be another nonattracting fixed point. A point  $Q \in U(S)$  is said heteroclinic from  $S$  to  $M$ , if  $T^k(Q) \rightarrow M$ , when  $k$  increases, and  $Q$  belongs to the local unstable set  $W^u_{loc}(S)$ .*

**Definition 2.4.** [3] *We define the commutation sets  $E_i$  as*

$$E_0 = \{ \text{the line } x = c \text{ such that } f'_{r,p}(c) = 0 \}.$$

and

$$E_i = T_b(E_{i-1}), \forall i \geq 1.$$

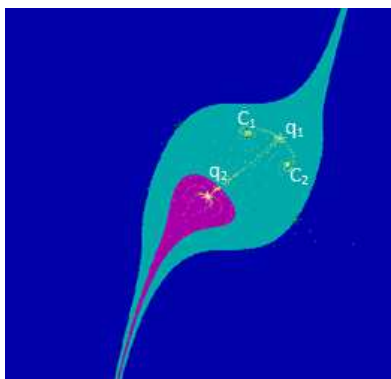


Figure 3: Basin of attraction for  $p = 3$ ,  $q = 2$ ,  $r = 0.8$ ,  $b = 0.9$

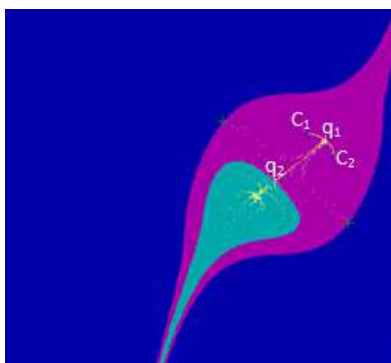


Figure 4: Existence of two attractors for  $p = 3$ ,  $q = 2$ ,  $r = 0.6$ ,  $b = 0.9$

Figures 3,4 represent two attraction basins associated with two attractors for  $q = 2$  and  $p = 3$  in the phase space. In Figure 3, The red basin is associated with the fixed point and the green one is associated with the 2-cycle represented by  $C_1$  and  $C_2$  points,  $q_1$  and  $q_2$  are two saddle points such that  $q_2$  is on the boundary of the attraction basin of the attractive fixed point and  $q_1$  is inside of the 2-cycle attraction basin.

### 3. Bifurcations and complexity

First, we consider the one-dimensional maps  $T_0 : x' = f_{r,p,q}(x)$ , and we study their dynamics. The complexity described by the family of  $f_{r,p,q}(x)$  is analyzed in terms of the parameter  $r > 0$ , and the shape parameters  $p > 1$  and  $q > 1$ , related with growth-retardation phenomena.

This family is subject to spontaneous existence which can be guaranteed for the value of the growth parameter

$$r_1 = x_f^{2-p}(1 - x_f)^{1-q}, \text{ with } p, q > 1$$

where  $x_f$  is the only positive fixed point (for more details see [5]). With  $r_2$ , we have a set of globally stable fixed points where the population growth remains stable,  $r_2$  is given by

$$r_2 = \frac{p^2q - p^2 - 2pq + 2p + q - 1}{(p + q - 2)^3 c^p (1 - c)^q}, \text{ with } p, q > 1$$

where  $c = \frac{p-1}{p+q-2}$  is the critical point. Globally, the iterates of the map  $f_{r,p,q}(c)$  are always attracted to the positive fixed point sufficiently near of the attractive point, designated by stability region 1, where  $r$  satisfies  $r_1 < r < r_2$ .

Otherwise for the values of the parameter  $r$  such that  $r_2 < r < r_3$ , the stability of the region 2 is characterized by the beginning of period-doubling. The value  $r_3$  satisfies this condition

$$r(c^{p-1}(1-c)^{q-1}r)^{p-1}(1-c^{p-1}(1-c)^{q-1}r)^{q-1} = c, \text{ with } p, q > 1.$$

For  $r = r_4$  we can observe complex dynamical behavior. It is defined by

$$r_4 = c^{1-p}(1-c)^{1-q}, \text{ with } p, q > 1$$

For other values of the parameters  $p$  and  $q$ , due to certain factors, the population can take the risk of extinction.

In two-dimensional diffeomorphisms  $T_b$ , we consider other tools for analyzing the complexity and chaotic patterns of behavior. The notion of commutation sets instead of critical sets helps us to acquire such information about extension and period-doubling.

We fix  $p = q = 2$ , the system (6) is considered in [3], by combining of properties of  $T_b$  and  $T_0$

$$T_b : \begin{cases} x' = rx(1-x) + y \\ y' = bx, \end{cases} \quad (3.1)$$

with  $f_{r,2,2}(x) = rx(1-x)$ ,  $2 < r < 4$ ,  $0 < b < 1$ .

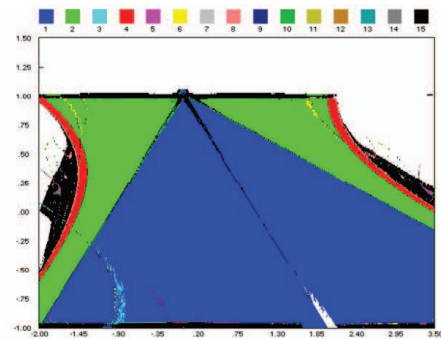


Figure 5: Scanning for  $p = q = 2$ ,  $r \in [-2, 3.5]$ ,  $b \in [-1, 1.5]$ .

The extremum of  $f_{r,p,q}(x)$  is obtained for  $x = 1/2$ . The first three commutation sets are :  $E_0$  is the line  $x = 1/2$ ,  $E_1$  is the line  $y = b/2$ , and  $E_2$  is the parabola  $x = ay/b - ay^2/b^2 + b/2$ . The intersection point  $P_1 = E_1 \cap E_2$  has the coordinates  $x_{P_1} = (r/2 + b)/2$ ,  $y_{P_1} = b/2$ .

This point can be considered as  $P_1 = T_b(P_0)$ , with  $P_0 = E_0 \cap E_1$ , whose its coordinates are  $x_{P_0} = 1/2$ ,  $y_{P_0} = b/2$ .

Let  $P_n$  be the intersection points defined as  $P_n = T_b^n(P_{n-1}) = E_n \cap E_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , which give rise to principal E-fold points of  $E_{n+2}$  in the neighborhood of  $P_n$ . The other fold points of  $E_{n+2}$  resulting from  $T_b[E_{n+1} \cap E_k]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , are the secondary E-fold points of  $E_{n+2}$ .

**Proposition 3.1.** Consider the system (3.1) with  $b \rightarrow 0$ ; we have

- (a) The commutation sets  $E_n$ ,  $n \geq 2$ , are crushed on the axe  $y = 0$ , and  $\lim_{n \rightarrow \infty}(E_2) = [y = 0, -\infty < x \leq x(c)] = \lim_{n \rightarrow \infty}(E_n)$ .
- (b) The principal E-fold points are such that  $\lim_{n \rightarrow \infty}(P_n) = c_n$ ,  $c_n = T_b^n(c)$  rank- $(n+1)$  critical point ( $C \equiv C_0$ ) de  $T_0$  on  $y = 0$ .
- (c) The secondary fold points on  $E_1$  tend toward the rank-one critical point  $c$ .

As mentioned in proposition 3.1, commutation sets are of primordial importance for the study of critical singularities. This method consists to approach attractors due to principal and secondary fold points (see Figure 6).

The inverse map  $T_b^{-1}$  is defined by the relations:

$$x = y'/b, y = x' - ay'(1 - y'/b)/b \quad (3.2)$$

Let  $E'_0$  be the line  $y = b/2$ , which is given by  $J = 0$  and by the same method applied to  $T_b$ . The commutation curves are defined by  $E'_n = T_b^{-n}(E'_0)$ .

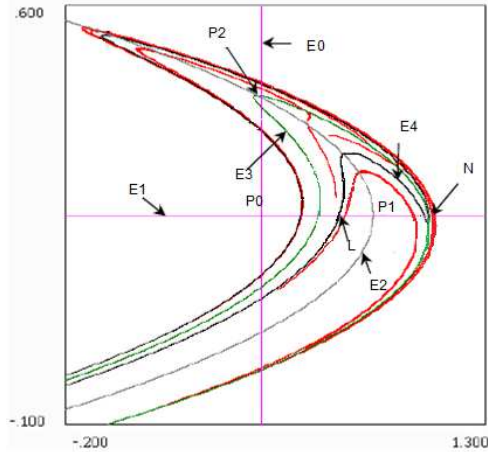


Figure 6: The commutation sets  $E_i$ ,  $r = 2.2$ ,  $b = 0.7$ .

### 3.1. Invariant manifolds of fixed points

The stable invariant manifold  $W^s(S)$  constitutes in general the frontier of an associated attractor and the unstable one converges to this attractor. Contact bifurcations between the attractor and its attraction basin may correspond to homoclinic or heteroclinic bifurcations. Homoclinic orbits and heteroclinic orbits are important concepts in the study of bifurcation of structures and chaos. Many chaotic behaviors of a complex system are related to these kinds of trajectories in the system. A homoclinic orbit is an orbit that is doubly asymptotic to a fixed point, or is a closed trajectory asymptotic to itself. A heteroclinic orbit is a trajectory that connects two fixed points or cycles of saddle type. In this part, we are interested in the existence or nonexistence of homoclinic orbits and heteroclinic orbits of this considered system.

The fixed points of (3.1) are  $q_1(x = y = 0)$  and  $q_2(x_{q_2} = (r + b - 1)/r, y_{q_2} = bx_{q_2})$ . Both fixed points are saddles for fixed parameters  $(r, b)$ , and since  $W^s(q_1) \cap W^u(q_1) = \emptyset$ , there is no homoclinic point from  $q_1$  (but heteroclinic points from  $q_1$  to  $q_2$  may exist).

When  $b \rightarrow 0$ , the condition to have  $q_1$  and  $q_2$  two saddles, is satisfied for  $3 < r \leq 4$ . The multipliers  $S_1$  and  $S_2$  of the saddle point  $q_1$  are:

$$S_1(q_1) = [r - \sqrt{r^2 + 4b}]/2, S_2(q_1) = [r + \sqrt{r^2 + 4b}]/2$$

due to  $3 < r \leq 4$ ,  $0 < b < 1$ ,  $q_1$  a saddle with  $-1 < S_1(q_1) < 0$ ,  $S_2(q_1) > 1$ . The slope of the eigenvector related to  $W^u(q_1)$  at  $q_1$  is  $s_1(q_1) = 2b/S_2(q_1) = 2b/[r + \sqrt{r^2 + 4b}]$ .

The multipliers of  $q_2$  are  $S_1(q_2) = [2 - 2b - r - \sqrt{\Delta}]/2$ ,  $S_2(q_2) = [2 - 2b - r + \sqrt{\Delta}]/2$  with  $\Delta = (r + 2b)^2 + 4(1 - r - b)$ ,  $q_2$  a saddle with  $S_1(q_2) < -1$ ,  $0 < S_2(q_2) < 1$ . The slope of the eigenvector related to  $W^u(q_2)$  at  $q_2$  is :  $s_1(q_2) = 2b/S_1(q_2)$ .

For fixed parameter values, attractors's basins are illustrated in the phase space. When there exist several attractors, it is possible to define a global basin, that means the set of initial conditions giving rise to bounded iterated sequences, independently of the fact that they converge to one attractor or another.

We fix  $b = 0.2$ , we draw the invariant manifolds of a saddle point which is inside the basin for  $r = 2$ .

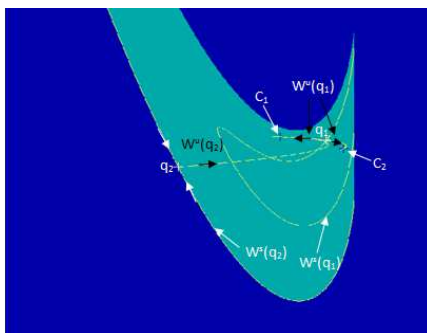


Figure 7: Attractor and invariant manifolds  $r = 2$ ,  $p = 2$ ,  $q = 1.5$ ,  $b = 0.2$ .

When we investigate the heteroclinic tangency between unstable and instable manifolds by numerical way, we use saddle points.

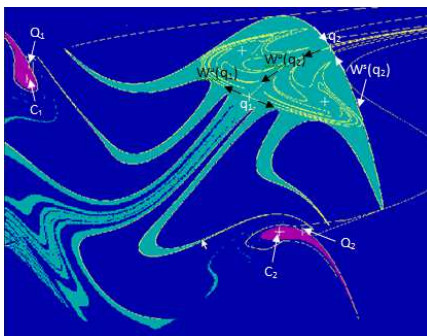


Figure 8: Attractors and invariant manifolds  $r = 5$ ,  $p = 2.5$ ,  $q = 3$ ,  $b = 0.9$ ,  $x \in [0; 1.54]$ ,  $y \in [-0.5; 1.23]$

Figure 7 for  $r = 2$  and Figure 8 for  $r = 5$  show how of the stable manifold of  $q_1$  and the unstable manifold of  $q_2$  intersect and then heteroclinic points appear. In Figure 9, only the invariant manifolds of saddle points are shown.



Figure 9: Heteroclinic curve of saddle points  $r = 10$ ,  $x \in [0; 1.8]$ ,  $y \in [1; 1.7]$

For  $b = 0.21$ , we find Hénon attractor that is growing with  $r$ , has a contact with the frontier of its basin and disappears by contact bifurcation,  $p = 3.5$  and  $q = 2.5$  (see Figure 10).

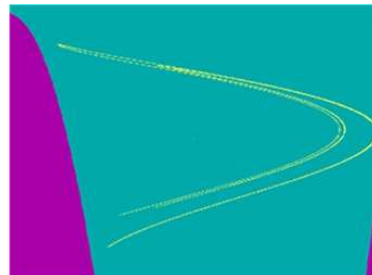


Figure 10: Strange attractor  $r = 11.5$ ,  $p = 3.5$ ,  $q = 2.5$  and  $b = 0.21$ .



Figure 11: Strange attractor  $r = 5$ ,  $p = 2.5$  and  $b = 0.084$ ,  $x \in [0; 1]$ ,  $y \in [0; 0.12]$

In this figure, we prove the abundance of strange attractors in this family around parameter values close to  $r = 5$ ,  $p = 2.5$  and  $b = 0.084$ . These attractors are similar to Hénon attractor.

#### 4. Conclusion

After embedding a one-dimensional noninvertible map into a larger system which becomes invertible, we reviewed and used some analysis techniques as commutation sets and heteroclinic solutions together to detect chaotic behaviors.

#### References

1. S. M. Aleixo, J. L. Rocha, D. D. Pestana, *Populational growth models proportional to Beta densities with Allee effect*, 1124 (2009), 3-12.
2. I. Gumowski, C. Mira, *Dynamique chaotique: Transformations ponctuelles: Transition ordre-désordre*, Cepadeus Editions 1980.
3. C. Mira, C. Gracio, *On the embedding of a  $(p-1)$ -dimensional noninvertible map into a  $p$ -dimensional invertible map  $(p=2,3)$* , Int. J. Bifurcation Chaos 13 (2003) 1787-1810.
4. J. L. Rocha, S. M. Aleixo, *An extension of gompertzian growth dynamics: Weibull and Fréchet models*, Mathematical Biosciences and Engineering (MBE), 10 (2013), 379-398.
5. J. L. Rocha, S. M. Aleixo, *Dynamical analysis in growth models : Blumberg's equation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B (DCDS-B), 18 (2013), 783-795.
6. D. Singer, *Stable orbits and bifurcation of maps of the interval*, SIAM J. Appl. Math. 35 (1980) 260-267.
7. F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag 1990.

Selmani Wissame, Djellit Ilham,  
 Laboratory of Mathematics, Dynamics and Modelization  
 University Badji Mokhtar Annaba,  
 Algeria.  
 E-mail address: selmani-wissame@hotmail.fr  
 E-mail address: ilhem.djelit@univ-annaba.org