وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2017/2018

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en sciences

SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AVEC DES DERIVÉES TEMPORELLES FRACTIONNAIRES

Option
Mathématiques Appliquées

Par
Radia SARI

DIRECTEUR DE THÈSE :	Lamine NISSE	Prof.	U.E.H.L. EL OUED

Devant le jury

PRESIDENT :	LASKRI Yamina	Prof.	ESTI. ANNABA
EXAMINATEUR :	REBBANI Faouzia	Prof.	ESTI. ANNABA
EXAMINATEUR :	SALMI Abdelouahab	M.C.A.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	ARDJOUNI Abdelouaheb	M.C.A.	UNIV. SOUK AHRAS

Table des matières

Résumé(Arabe) iii

Résumé iv

Abstract v

Introduction générale vi

1 Rappels et notions fondamentales 1
- 1.1 Espaces Fonctionnels 1
- 1.2 Transformée de Fourier et transformée de Laplace 3
- 1.3 Fonctions spéciales 7
- 1.4 Continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue 11
- 1.5 Opérateurs et semigroupes 11
- 1.6 Quelques résultats de la théorie du point fixe 13

2 Intégrales et dérivées fractionnaires 15
- 2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville 15
- 2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville 20
- 2.3 Dérivée fractionnaire de Caputo 23
- 2.4 Dérivée de Grünwald-Letnikov 28
- 2.5 Equation différentielle au sens de Caputo 29

3 Principe du maximum pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires 31
- 3.1 Principe du maximum 31
- 3.2 Conséquence 37
  - 3.2.1 Unicité de la solution 39
  - 3.2.2 Existence de la solution 40

4 Système d'équations différentielles non linéaires à multi-ordres fractionnaires avec retards 43
4.1 Existence et unicité de la solution 44
4.2 Stabilité 49

5 Conclusion et Perspectives 57

6 Copie de l'article publié 58

Résumé(Arabe)

Résumé

Le but de cette thèse est l'étude des équations aux dérivées partielles fractionnaires et des systèmes différentiels non linéaires fractionnaires.

Dans un premier temps, on établit un principe du maximum approprié pour un type d'équations aux dérivées partielles fractionnaires à l'aide duquel on prouve l'unicité de la solution et sa dépendance continue par rapport aux données du problème. D'autre part, on utilise la méthode de séparation des variables pour montrer l'existence de la solution.

Puis dans un deuxième temps, on considère un système d'équations différentielles fractionnaires non linéaires à multi-ordres et avec retards variables, et sous certaines conditions, on établit l'existence et l'unicité de la solution en se basant sur le principe de contraction. Enfin, on étudie la stabilité de la solution par rapport à la condition initiale et l'ordre de la dérivation.

Mots clés : Dérivée fractionnaire de Caputo, principe du maximum, équation aux dérivées partielles fractionnaires, principe de contraction, système différentiel fractionnaire, stabilité.

Abstract

The aim of this thesis is the study of a class of fractional partial differential equations and the nonlinear fractional differential systems.

Firstly, an appropriate maximum principle for a class of fractional partial differential equations is istablished. It is used to prove the uniqueness and the continuous dependence of the solution on problem data. To show the existence of the solution the method of the variable separation is used.

Secondly, we consider a system of nonlinear functional differential equation with fractional multi-order. Under certain appropriate conditions we establish the existence and uniqueness of the solution by application of the contraction principle. Finally, the stability of the solution with respect to the order of derivation and the initial condition is obtained.

Keywords : Caputo fractional derivative, maximum principle, partial differential equation, contraction principle, fractional differential system, stability.

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul ordinaire. Il a des applications importantes non seulement en mathématiques pures, mais également intéresse de vaste domaines des sciences de l'ingénieur. En particulier, les équations différentielles et aux dérivées partielles fractionnaires sont de plus en plus utilisées pour la modélisation des problèmes dans la physique, dans la chimie et d'autres domaines d'applications.

L'un des outils les plus utiles et les plus connus et utilisés dans l'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles est le principe du maximum. Ce dernier nous permet d'obtenir des informations sur les solutions d'équations aux dérivées partielles sans aucune connaissance explicite des solutions elles mêmes.

Le principe de l'application contractante est l'un des rares théorèmes constructifs de l'analyse mathématiques. Il constitue un outil de grande importance vue l'étendue de son champs d'applications à priori, dans l'étude des équations non linéaires qui jouent un rôle crucial aussi bien en mathématiques qu'en sciences appliquées. Le principe est le théorème du point fixe de Banach ou celui de Picard qui assure l'existence d'un unique point fixe pour une application contractante d'un espace métrique complet dans lui même. Ce concept a été prouvé en premier lieu par Banach en 1922 puis développé par plusieurs mathématiciens parmi lesquels nous citons Schauder en 1930 ainsi que Krasnoselskii en 1955.

Cette thèse a pour objet l'étude d'une équation aux dérivées partielles et un système d'équations différentielles non linéaires à multi-ordres fractionnaires avec retards. Elle contient quatre chapitres.

Dans le premier chapitre on donne quelques notions préliminaires essentielles ainsi que les théorèmes du point fixe. Le chapitre 2 contient les définitions de différentes dérivées fractionnaires ainsi que leurs propriétés. Ces deux chapitres ont été nécessaires pour comprendre le reste de ce travail. Dans le troisième chapitre on établit un principe du maximum pour l'équation aux dérivées partielles fractionnaires

$$\partial_t u(x,t) + \mu {}^c D^{\alpha}_{0^+,t} u(x,t) = f\left(x,t,u,Du,D^2u\right).$$

On utilise ce principe pour étudier l'équation d'advection-dispersion avec une dérivée temporelle fractionnaire de Caputo afin de répendre aux questions d'unicité de la solution et sa dépendance continue par rapport aux données du problème associé. Pour l'existence on utilise la méthode de séparation des variables.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du système différentiel non linéaire fractionnaire avec multi-ordres $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de la forme

$${}^c D^{\alpha_i}_{0^+} x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(t, x_i(t), x_j(t-\tau_j(t))\right), \quad i = \overline{1,n}, \quad t > 0,$$

$$x(t) = \Phi(t) = (\phi_1(t), ..., \phi_n(t)), \quad t \in [-\tau, 0].$$

où ${}^c D^{\alpha_i}_{0^+}$ est la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo d'ordre $\alpha_i \in (0,1)$, pour $i = 1,...,n$. $f_{ij} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues pour $i,j = 1,...,n$. $\tau_j : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Pour ce problème on établit l'existence et l'unicité de la solution en appliquant le principe de contraction. D'autre part, on prouve la stabilité de cette solution par rapport à la condition initiale et l'ordre de la dérivation.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et théorèmes fondamentaux que nous utiliserons dans les autres chapitres.

1.1 Espaces Fonctionnels

Espace L^p

En mathématiques, les espaces L^p sont des espaces de fonctions dont la puissance *p-ième* de la fonction est intégrable, au sens de Lebesgue. Les espaces L^p sont très utilisés en analyse (et particulièrement en analyse fonctionnelle).

Définition 1.1.1 [15] *Soit $\Omega = (a, b)$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle borné ou non borné de $\mathbb{R}$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace L^P comme suit :*

1· pour $1 \leq p < \infty$, $L^P(\Omega)$ est l'espace de classe (de $fonctions$ mesurables) de puissance $P^{ième}$intégrables sur Ω i.e.

$$f \in L^P(\Omega) \Rightarrow \int_a^b |f(t)|^p \, dt < \infty. \tag{1.1}$$

$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$ *est une norme sur $L^p(\Omega)$.*

$\left(L^p(\Omega), \|.\|_p\right)$ *est un Banach.*
En particulier, si $p = 2$ *alors*

$$L^2(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f\ ;\ \int\limits_{\Omega} f^2 dt < \ \infty\ ,\ f\ \ (classe\ de\ fonctions\ mesurables)\ \grave{a}\ carr\acute{e} \\ int\acute{e}grable\ sur\ \Omega. \end{array} \right\}$$

$(L^2(\Omega); \langle .,. \rangle_{L^2}(\Omega))$ *est un Hilbert ; où* $\langle .,. \rangle_{L^2(\Omega)}$ *est le produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} f(t) \cdot g(t)\, dt\ , \qquad \forall f, g \in L^2(\Omega). \tag{1.2}$$

2· Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ *est l'espace des fonction essentiellement bornée sur* Ω.

Remarque 1.1.1 • *En général, si* $p \neq q$, *on a ni* L^p *inclus dans* L^q, *ni* L^q *inclus dans* L^p. *Cependant si la mesure est finie (comme en probabilités par exemple), alors pour* $p < q$, L^q *est inclus dans* L^p.

• *Pour* $1 < p < +\infty$ *, l'espace dual de* L^p *est* L^q *où* q *est défini de façon que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 1.1.2 f *est dite essentiellement bornée sur* Ω *s'il* $\exists\ M > 0$ *telle que sauf peut être sur un ensemble de mesure nul* $|f(t)| \leq M\ \ ,\forall t \in \Omega$.

$$\|f\|_\infty = ess\sup_{t\in\Omega} |f(t)| = \inf\{M \geq 0; |f(t)| \leq M.p.p\ sur\ \Omega\}, \tag{1.3}$$

$(L^\infty(\Omega), \|.\|_\infty)$ *est un Banach.*

Espace AC^n

Définition 1.1.3 [15] *Soit* $\Omega = (a, b)$, *un intervalle borné de* $\mathbb{R}$, *alors l'espace des fonctions absolûment continues noté* $AC\left(\bar{\Omega}\right)$ *est définie comme l'espace des primitives des fonctions* $L^1(\Omega)$ *i.e. si* $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ *, alors* f *est dérivable presque partout sur* $\bar{\Omega}$ *avec* $f' \in L^1(\Omega)$ *et l'on a*

$$f \in AC\left(\bar{\Omega}\right) \Longleftrightarrow f(t) = f(a) + \int\limits_a^t f'(s)\, ds\ \ \ ,t \in \bar{\Omega}. \tag{1.4}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $AC^n\left(\bar{\Omega}\right)$ *comme l'espace des fonctions* $f\ :\bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ $(n-1)$ *fois dérivables sur* $\bar{\Omega}$ *telles que* $f^{(n-1)} \in AC\left(\bar{\Omega}\right)$ *i.e.*

$$AC^n\left(\bar{\Omega}\right) = \left\{f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C} \text{ et } f^{(n-1)}(t) \in AC\left(\bar{\Omega}\right)\right\}.$$

Le lemme suivant nous donne une propriété caractéristique de l'espace $AC^n\left(\bar{\Omega}\right)$.

Lemme 1.1.1 [15] *Une fonction $f \in AC^n\left(\bar{\Omega}\right)$, si et seulement si elle s'écrit sous la forme*

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\ ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k,\ \forall t \in \bar{\Omega}. \tag{1.5}$$

1.2 Transformée de Fourier et transformée de Laplace

Transformée de Fourier

En analyse, la transformée de Fourier est un analogue de la théorie des séries de Fourier pour les fonctions non périodiques.

Définition 1.2.1 [15]*Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ à valeurs complexes. On appelle transformée de Fourier de f la fonction de la variable $t \in \mathbb{R}$, notée $\mathcal{F}f$ définie par*

$$\mathcal{F}f(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\ f(x)\ dx\ ,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

On appelle transformée de Fourier inverse de f la fonction de la variable $x \in \mathbb{R}$, notée $\mathcal{F}^{-1}f$, donnée par

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) := \frac{1}{2\ \pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\ f(t)\ dt\ \ ,\ x \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Les intégrales (1.6) et (1.7) convergent pour les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 1.2.1 *(théorème d'inversion)* [28]
Si f et $\mathcal{F}\ f$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$,alors presque partout on a

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = f, \tag{1.8}$$

en plus , $\mathcal{F}^{-1}f$ est continue et nulle à l'infini.

Proposition 1.2.1 [15] *Soit $f \in C^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, si pour $k = 0, ...n$, les dérivées $f^{(k)}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors pour $k = 0, ...n$,*

$$\mathcal{F}f^{(k)}(t) = (-it)^k \mathcal{F}f(t). \tag{1.9}$$

Théorème 1.2.2 [28] *Lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ appartient à C_0 (l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, nulles à l'infini) et*

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1 . \tag{1.10}$$

Définition 1.2.2 *Soient f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On définit sous réserve d'existence l'opérateur de convolution de Fourier par*

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\ \ g(t-s)\ \ ds \qquad , t \in \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

la fonction $f * g$ est appelée convoluée de f et g. Elle existe notamment lorsque
- *f et $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.*
- *$f \in L^1(\mathbb{R})$ et g bornée.*

La bornétude du produit de convolution dans l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est donnée par le théorème de Young suivant :

Théorème 1.2.3 [15] *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, alors*

$$(f * g)(t) \in L^p(\mathbb{R}) \qquad (1 \leq p \leq \infty)$$

et on a

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$$

en particulier, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors

$$(f * g)(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad et \quad \|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_2$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ *et* $g \in L^2(\mathbb{R})$, *alors le produit de convolution* $(f * g)(t)$ *est continu, borné et nul à l'infini.*

La tansformée de Fourier du produit de convolution est donnée par le théorème de convolution suivant :

Théorème 1.2.4 *(de convolution)* [15]
Dans $L^1(\mathbb{R})$, *la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier*

$$\mathcal{F}(f * g)(t) = \mathcal{F}f(t) . \mathcal{F}g(t) . \tag{1.12}$$

Preuve.

$$\mathcal{F} \ (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \ g(y) \ dy \right] dx.$$

Posons

$$x - y = s \text{ et } dx = ds.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \ (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \ g(y) \ e^{it(s+y)} \, ds \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its} \ f(s) \ ds \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \, e^{ity} \, dy \\
&= \mathcal{F}f(t) \ . \ \mathcal{F}g(t) ,
\end{aligned}$$

ce qui établit le théorème. ■

Théorème 1.2.5 [28] *Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et si* $\mathcal{F}f(t) = 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *la fonction* f *est nulle presque partout.*

Preuve. Puisque $\mathcal{F}f = 0$, on déduit que $\mathcal{F}f \in L^1$ et le résultat provient du théorème d'inversion précédent. ■

Tranformée de Laplace

La transformée de Laplace intervient dans la résolution d'équations et des systèmes différentiels et tout particulièrement aujourd'hui en électricité, électronique, théorie de la chaleur, théorie du signal, ...

Définition 1.2.3 [15] *La transformée de Laplace d'une fonction f de la variable réelle $t \in \mathbb{R}^+$ est définie par :*

$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\ dt \quad , s \in \mathbb{C}, \tag{1.13}$$

$f(t)$ est appelée l'originale de $\mathcal{L}f(s)$.

La transformée de Laplace d'une fonction n'existe que si l'intégrale (1.13) est convergente, pour cela l'originale doit être d'ordre exponentiel a , c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ et a tels que

$$|f(t)| \leq M \quad e^{at} \ , \qquad pour\ t > T. \tag{1.14}$$

Dans ce cas la transformée de Laplace existe pour $\operatorname{Re}(s) > a$.

L'originale $f(t)$ peut être reconstituée à l'aide de la transformée de Laplace inverse

$$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}f)(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\ \mathcal{L}f(s)\ ds \quad , c > a. \tag{1.15}$$

Exemple 1.2.1 *1.* $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$.

2. $\mathcal{L}[\exp(-at)] = \frac{1}{(s+a)}$.

3. $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$. *Pour le démontrer il suffit d'effectuer une intégration par partie*

$$\int_0^{\infty} t\ e^{-st}\ dt\ = 0 + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-st}\ dt = \frac{1}{s^2}.$$

4. $\mathcal{L}\left[t^k\right] = \frac{k!}{s^{k+1}}$, *(par récurrence).*

Proposition 1.2.2 *La transformée de Laplace est linéaire.*

Définition 1.2.4 *Lorsque le produit $f(t-s)\ g(s)$ est intégrable sur tout intervalle $[0,t]$ de $\mathbb{R}^+$, le produit de convolution de f et g au sens de la transformation de Laplace, est la fonction $f*g$ définie par :*

$$(f*g)(t) := \int_0^x f(t-s)\ g(s)\ ds. \tag{1.16}$$

Théorème 1.2.6 [15] *Si les transformées de Laplace de f et g existent, alors la transformée de Laplace du produit de convolution est donnée par :*

$$\mathcal{L}(f*g)(s) = \mathcal{L}f(s)\ .\ \mathcal{L}g(s). \tag{1.17}$$

Proposition 1.2.3 [15] *La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la fonction f est donnée par :*

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(s) = s^n\ \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\ f^{(k)}\left(0^+\right), \tag{1.18}$$

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(s) = s^n\ \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k}\ f^{(n-k-1)}\left(0^+\right), \tag{1.19}$$

sous l'hypothèse d'existence des intégrales correspondantes.

1.3 Fonctions spéciales

Fonction Gamma

En mathématiques, la fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. On prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes ;

Définition 1.3.1 [15] *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, on définit la fonction suivante, appelée fonction Gamma, et notée par Γ :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\ dt. \tag{1.20}$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.

Lemme 1.3.1 [15] *La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :*
1) Pour $\mathrm{Re}\,(z) > 0,$

$$\Gamma\,(z+1) = z\;\Gamma\,(z)\,, \tag{1.21}$$

comme en particulier $\Gamma\,(1) = 1$,*on en déduit :* $\forall n \in \mathbb{N}\;\Gamma\,(n+1) = n!$
2) On peut également représenter $\Gamma\,(z)$ *par la limite ;*

$$\Gamma\,(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\; n^{z}}{z\;\;(z+1)\ldots(z+n)}\;,\;\; \mathrm{Re}\,(z) > 0. \tag{1.22}$$

3)La fontion $\Gamma\,(z)$ *est analytique dans* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^{-}$.

Remarque 1.3.1 •*La fonction* Γ *possède un pôle d'ordre* 1 *en* $z = -n$ *pour tout entier naturel* n*. Le résidu de la fonction en ce pôle est donné par :*

$$res\;\;(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^{n}}{n!}$$

• *La fonction* Γ *est indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}_{*}^{+}$*. Sa dérivée est* $\Gamma'\,(z) = \Gamma\,(z)\;\psi\,(z)\,.$

Plus généralement, sa dérivée $p-$ *ième possède l'expression intégrale suivante :*

$$\Gamma^{(p)}\,(x) = \int_{0}^{+\infty} (\ln\,(t))^{p}\;\; t^{x-1}\;\, e^{-t}\; dt.$$

Définition 1.3.2 [15] *La formule du binôme généralisée* $\binom{\alpha}{n}$ *pour* $\alpha \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *est donnée par :*

$$\binom{\alpha}{0} = 1\;,\; \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\;\;,\quad n \in \mathbb{N}^{*}. \tag{1.23}$$

En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}\quad,\qquad m \geq n, \tag{1.24}$$

cette formule peut être exprimée en terme de la fonction Gamma pour $\alpha \notin \mathbb{Z}_{*}^{-}$ *comme suit :*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\ \Gamma(\alpha-n+1)} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C}; \alpha \notin \mathbb{Z}_*^- \ , n \in \mathbb{N}. \tag{1.25}$$

Fonction Bêta

Définition 1.3.3 *La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par*

$$\beta(z,w) = \int_0^1 t^{a-1}\ (1-t)^{w-1}\ dt \quad , \ \mathrm{Re}(z) > 0\ ,\ \mathrm{Re}(w) > 0. \tag{1.26}$$

La fonction Bêta a été étudiée par Euler et Legendre. Elle est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

Définition 1.3.4

$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\ \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\ ,\ \mathrm{Re}(z) > 0\ ,\ \mathrm{Re}(w) > 0. \tag{1.27}$$

Fonction de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler, notée $E_{\alpha,\beta}$ qui tient son nom du mathématicien Gösta Mittag-Leffler, est une fonction spéciale, c'est -à-dire qui ne peut être calculée à partir d'équation rationnelle, qui s'applique dans le plan complexe et dépend de deux paramètres α et β.

Définition 1.3.5 [15] *Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ est définie comme suit :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \quad , \ \alpha > 0, \tag{1.28}$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad , \ \alpha > 0\ ,\ \beta > 0. \tag{1.29}$$

Exemple 1.3.1 *Pour des valeurs spéciales de α et β on a*

$$E_1(z) = E_{1,1}(z) = e^z \quad , \quad E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Quelques propriétés des fonctions de Mittag-Leffler, dont on utilise dans l'analyse des équations différentilles fractionnaires sont formulées dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *La fonction de Mittag-Leffler possède les propriétés suivantes :*
1. C'est une fonction entière.
2. Pour $|z| < 1$ la fonction de Mittag-Leffler généralisée vérifie

$$\int_0^\infty e^{-t}\ t^{\beta-1}\ E_{\alpha,\beta}(zt^\alpha)\ dt = \frac{1}{1-z}. \tag{1.30}$$

3.La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction de Mittag-Leffler est donnée par :

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)\right) = z^{\beta-n-1}E_{\alpha,\beta-n}(\lambda z^\alpha),\ n \in \mathbb{N}; \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.31}$$

4. La transformée de Laplace de cette fonction est donnée par :

$$\mathcal{L}\left[z^{\alpha k+\beta-1}\ E_{\alpha,\beta}^{(k)}(+az^\alpha)\right](s) = \frac{k!\ s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \quad , \ \mathrm{Re}(s) > |a|^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{1.32}$$

où $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}E_{\alpha,\beta}(x)$.
5. Intégration de la fonction de Mittag-Leffler :

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\ t^{\beta-1}\ dt = z^\beta\ E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha). \tag{1.33}$$

Cette relation est un cas particulier de l'égalité :

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^z (z-t)^{\mu-1}\ E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\ t^{\beta-1}\ dt = z^{\beta+\mu-1}\ E_{\alpha,\beta+\mu}(\lambda z^\alpha), \tag{1.34}$$

$$\beta > 0\ ,\ \mu > 0.$$

1.4 Continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue

Théorème 1.4.1 *Si $f(t)$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue(sommable) sur l'ensemble B, alors pour tout $\delta > 0$ il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que*

$$\left| \int_e f(t)\ d\mu \right| < \delta,$$

pour tout ensemble mesurable $e \subset B$ tel que $\mu(e) < \epsilon_0$.

Preuve. voir [17]. ■

1.5 Opérateurs et semigroupes

Une propriété concernant les opérateurs linéaires bornés est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.5.1 [35] *Soit A un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach E dans E. Supposons que*

$$\|I - A\| < 1. \tag{1.35}$$

Alors A possède un inverse linéaire borné A^{-1} donné par la serie de Neumann i.e.

$$A^{-1}(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(I + (I-A)^2 + ... + (I-A)^n \right)(x) \qquad , x \in E,$$

$$A^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (I-A)^n. \tag{1.36}$$

Définition 1.5.1 *Soit E un espace de Banach. Un semigroupe d'opérateurs linéaires bornés sur E est une famille qu'on note $(S(t))_{t \geq 0}$ d'éléments de $B(E)$ (l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés sur E) tels que*

$$\begin{cases} S(0) = I_E\ , \\ \quad S(s+\tau) = S(s) \circ S(\tau)\,, \qquad\qquad \forall s,\ \tau \geq 0, \end{cases}$$

où I_E désigne l'opérateur identité i.e. $I_E(f) = f$.

Définition 1.5.2 *Un semigroupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur E dit fortement continu si pour $f \in E$ on a*

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t) f - Sf\| = 0. \tag{1.37}$$

un semigroupe fortement continu sera appelé $C_0 -$ semigroupe.

Définition 1.5.3 *Soit E un espace de Banach. A est un opérateur linéaire borné sur E, alors*

$$\exp(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{A^n}{n!} \quad \text{où} \quad A^n = A \circ ... \circ A \quad , \quad (n\ fois),$$

on peut dire que

(1) $\exp(A)$ *est bien défini*

(2)

$$\|\exp(t\ A)\| \leq \exp\ \ |t| \|A\|, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(3)

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(t\ A)\right) = A.\exp(t\ A) = \exp(t\ A).\ A, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(4) *la fonction*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & B(E) \\ t & \longmapsto & \exp(t\ A) \end{array}$$

est infiniment différentiable.

On pose pour $t \geq 0$

$$S(t) := \exp(t\ A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n A^n}{n!} \quad , \quad t \geq 0. \qquad (\star)$$

$(S(t))_{t\geq 0}$ *est un semigroupe fortement continu et de type $(\star)$ si et seulement si $A \in B(E)$.*

Enfin, on a le résultat suivant

Proposition 1.5.1 [7] *Soit A un opérateur linéaire borné sur E. Pour tout $T > 0$ et tout $u_0 \in E$, il existe une unique $u \in C^1([0,T], E)$ du problème*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & , \forall t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

cette solution est

$$u(t) = S(t)\ u_0 = \exp(A\ t)\ u_0, \tag{1.38}$$

où $(S(t))_{t\geq 0}$ *est le semigroupe fortement continu engendré par* A.

1.6 Quelques résultats de la théorie du point fixe

Théorème du point fixe de Banach

Définition 1.6.1 [33] *Soit* (E, d) *un espace métrique. Une application* $F : E \to E$ *est dite* k*-Lipschitzienne de constante* $k \geq 0$ *si*

$$\forall u, v \in E,\ \ d(F(u), F(v)) \leq kd(u, v).$$

Définition 1.6.2 [33] *L'application* k*-Lipschitzienne* F *est dite une contraction si* $k \in (0, 1)$.

Théorème 1.6.1 [33] *(Théorème du point fixe de Banach)*
Soient (E, d) *un espace métrique complet et* $F : E \to E$ *une contraction. Alors* F *admet un unique point fixe.*

Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.6.2 [36] *Soit* K *un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach* E *et supposons* $F : K \to K$ *une application continue. Alors* F *admet un point fixe.*

Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Définition 1.6.3 *Soit* K *un ensemble non vide d'un espace de Banach* E. *On dit que* K *est un cône si* K *est convexe fermé et satisfait les conditions suivantes*
(i) $\theta x \in K$, $\forall x \in K$ *et* $\theta \geq 0$,
(ii) x *et* $-x \in K \Longrightarrow x = 0$.
Tout cône défini une relation d'ordre sur E *par*

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

Définition 1.6.4 *(Opérateur complètement continu)*

Soient E un espace de Banach et Ω une partie de E. On dit que l'opérateur $F : \Omega \to E$ est complètement continu s'il est continu pour toute partie bornée B de Ω, $F(B)$ est relativement compact dans E.

Théorème 1.6.3 [18] *Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ un cône. Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de E avec $0 \in \Omega_1$ et $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$.*

Soit $F : K \cap \left(\bar{\Omega}_2 \diagdown \Omega_1\right) \to K$ un opérateur complètement continu tel que

(i) $\|Fx\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in K \cap \partial\Omega_1$, et $\|Fx\| \geq \|x\|$ pour tout $x \in K \cap \partial\Omega_2$,

ou bien

(ii) $\|Fx\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in K \cap \partial\Omega_2$, et $\|Fx\| \geq \|x\|$ pour tout $x \in K \cap \partial\Omega_1$.

Alors F possède un point fixe dans $K \cap \left(\bar{\Omega}_2 \diagdown \Omega_1\right)$.

Théorème d'Azrela-Ascoli

Théorème 1.6.4 *Soit $W = C([a,b])$ muni de la norme $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$, avec $-\infty < a < b < +\infty$, et soit D est un sous ensemble de W . Si les conditions suivantes sont satisfaites*

(i) D est uniformément borné, i.e. $\exists r > 0, \|x\| \leq r$, $\forall x \in D$,

(ii) D est équicontinu, i.e. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \text{ et } x \in D \Longrightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon,$$

alors D est relativement compact.

Chapitre 2

Intégrales et dérivées fractionnaires

L'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse qui étudie le cas d'un opérateur différentiel d'ordre non entier.

On peut définir par ce procédé des intégrales ou des dérivées fractionnaires.

Les dérivées fractionnaires sont utilisées par exemple dans certains domaines de la physique faisant intervenir des phénomènes de diffusion comme *l'électromagnétisme, l'acoustique* ou *la thermique*.

Dans ce chapitre, on donne les différentes définitions de la dérivée fractionnaire.

2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.1.1 [15] *Soit $\alpha > 0$, l'intégrale fractionnaire à gauche et à droite de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction $f \in L^1[a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ sont définies par :*

$$I_{a^+}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) \, ds \quad , t > a, \tag{2.1}$$

et

$$I_{b^-}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} f(s) \, ds \quad , t < b, \tag{2.2}$$

respectivement.

Pour $\alpha = 0$, *on a*

$$I_{a^+}^{\alpha} = I_{b^-}^{\alpha} = I \quad (\text{ l'opérateur identité }).$$

Remarque 2.1.1 *Si* $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, *les intégrales précédentes coïncident avec les intégrlaes répétées* $n - fois$ *de la forme*

$$\begin{aligned}
\left(I_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 ... \int_a^{s_{n-1}} f(s_n) \; ds_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} \; f(s) \; ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left(I_{a^-}^{\alpha} f\right)(t) &= \int_t^b ds_1 \int_{s_1}^b ds_2 ... \int_{s_{n-1}}^b f(s_n) \; ds_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} \; f(s) \; ds.
\end{aligned}$$

Remarque 2.1.2 *Dans la suite, nous allons parler uniquement de l'intégrale et les dérivées fractionnaires à gauche.*

Exemple 2.1.1 *Prenons* $f(t) = (t-a)^{\gamma}$ *avec* $\gamma > -1$, *alors*

$$I_{a^+}^{\alpha} \; f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} (t-a)^{\alpha+\gamma} \quad , \tag{2.3}$$

En effet,

$$I_{a^+}^{\alpha} \; f(t) = I_{a^+}^{\alpha} \; (t-a)^{\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \; (s-a)^{\gamma} \; ds,$$

En utilisant le changement de variable

$$s = a + x(t-a) \quad , \; (0 \leq x \leq 1), \tag{2.4}$$

et en utilisant la fonction Béta, on trouve

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}\ f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\gamma}\int_0^1 x^{\gamma}(1-x)^{\alpha-1}\ dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\gamma}\ \beta(\alpha\ ,\gamma+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\gamma}\frac{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \\
I_{a^+}^{\alpha}\ f(t) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}(t-a)^{\alpha+\gamma}.
\end{aligned}$$

Lemme 2.1.1 [29] *L'opérateur d'intégration fractionnaire $I_{a^+}^{\alpha}$ est borné dans $L^p[a,b]$ $(1 \leq p \leq \infty)$;*

$$\left\|I_{a^+}^{\alpha} f\right\|_p \leq k\left\|f\right\|_p \tag{2.5}$$

Preuve. Soit $f \in L^p[a,b]$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\ f(s)\ ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1\ (t-s)\ \varphi_2\ (s)\ ds,$$

où

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & ,\ 0 < t \leq b-a\ , \\ 0 & ,\ t \in \mathbb{R}\diagup(0,b]\,, \end{cases}$$

et

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} f(x) & ,\ a \leq t \leq b, \\ 0 & ,\ t \in \mathbb{R}\diagup[a,b]\,. \end{cases}$$

Comme $\varphi_1 \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varphi_2 \in L^p(\mathbb{R})$, alors

$$\left\|I_{a^+}^{\alpha}\ f\right\|_p = \left\|\varphi_1\ *\varphi_2\right\|_p \leq\ \left\|\varphi_1\right\|_1\ .\ \left\|\varphi_2\right\|_p = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\ \left\|f\right\|_p,$$

d'où le résultat. ■

La propriété de semi-groupe de l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemman-Liouville est donnée par le théorème suivant ;

Théorème 2.1.1 [15] *Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour toute fonction $f \in L^1[a,b]$, on a*

$$I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(t) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t) = I_{a^+}^{\beta} I_{a^+}^{\alpha} f(t), \tag{2.6}$$

pour presque tout $t \in [a,b]$, si de plus $f \in C[a,b]$, alors (2.6) est vraie pour tout $t \in [a,b]$.

Preuve. Soit $f \in L^1[a,b]$, alors

$$I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\ d\tau\ ds,$$

d'après le théorème de Fubini, on a

$$I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}\ (s-\tau)^{\beta-1}\ ds d\tau,$$

En utilisant le changement de variable $s = \tau + z(t-\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau)\ (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}\ z^{\beta-1}\ dz\ d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(\tau)\ (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\ d\tau = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t), \end{aligned}$$

presque partout sur $[a,b]$. ■

Théorème 2.1.2 [34] *Soient $\alpha > 0$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions continues uniformément convergente sur $[a,b]$, alors on peut intervertir l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville et la limite comme suit :*

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} \lim_{n\to\infty} f_n\right)(t) = \left(\lim_{n\to\infty} I_{a^+}^{\alpha} f_n\right)(t). \tag{2.7}$$

En particulier, la suite $\left(I_{a^+}^{\alpha} f_n\right)_{n\geq 1}$ est uniformément convergente.

Preuve. Soit f la limite de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$, il est clair que f est continue, alors on a les estimations :

$$\begin{aligned}
\left|I_{a^+}^{\alpha} f_n(t) - I_{a^+}^{\alpha} f(t)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left|f_n(s) - f(s)\right| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left\|f_n - f\right\|_{\infty} (b-a)^{\alpha},
\end{aligned}$$

d'où la convergence uniforme sur $[a,b]$, lorsque $n \to \infty$. ■

Théorème 2.1.3 [15] *Soient* $0 < \alpha < 1$ *et* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *alors*

$$\mathcal{F}\left(I_{-\infty}^{\alpha} f\right)(t) = |it|^{-\alpha} \mathcal{F} f(t). \tag{2.8}$$

Lemme 2.1.2 [15] *Soient* $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ *et* $f \in L^1(0,b)$ *pour tout* $b > 0$.*Si* f *admet une transformée de Laplace, alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de* f *est donnée par :*

$$\mathcal{L}\left(I_{0^+}^{\alpha} f\right)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L} f(s). \tag{2.9}$$

Preuve. On peut écrire;

$$I_{0^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t).$$

Il vient du théorème de convolution que

$$\mathcal{L}\left[I_{0^+}^{\alpha} f\right](s) = \mathcal{L}\left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](s) \,.\, \mathcal{L} f(s),$$

d'autre part, on a

$$\mathcal{L}\left[x^{\alpha-1}\right](s) = \Gamma(\alpha)\, s^{-\alpha},$$

d'où le résultat. ■

2.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1 [15] *Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}_*$ tels que $n-1 \leq \alpha < n$, la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f est définie par :*

$$D_{a^+}^{\alpha} f(t) := D^n \; I_{a^+}^{n-\alpha} \; f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \; f(s) \; ds \;, t > a, \tag{2.10}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

En particulier, pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$ on a

$$D_{a^+}^{0} f(t) = D I_{a^+}^{1} f(t) = I f(t) = f(t),$$

et

$$D_{a^+}^{m} \; f(t) = D^{m+1} \; I_{a^+}^{m+1-m} \; f(t) = D^{m+1} \; I_{a^+}^{1} \; f(t) = D^m \; f(t),$$

donc pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée usuelle.

Remarque 2.2.1 *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante non nulle est différente de zéro.*

Exemple 2.2.1 *Soit $f(t) = (t-a)^{\beta}$, avec $\beta > -1$ et $\alpha \geq 0$ tels que $n-1 \leq \alpha < n$, d'après (2.4) on a*

$$D_{a^+}^{\alpha} \; f(t) = D^n \; I_{a^+}^{n-\alpha} \; f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n (t-a)^{n-\alpha+\beta}.$$

Il s'ensuit alors que, pour le cas $(\alpha-\beta) \in \{1, 2, ..., n\}$ on a

$$D_{a^+}^{\alpha} \; f(t) = D_a^{\alpha} (t-a)^{\alpha-j} = 0 \;, \; j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Par ailleurs si $(\alpha-\beta) \notin \{1, 2, ..., n\}$, on trouve

$$D_{a^+}^{\alpha} \; f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Une condition suffisante pour l'existence de la dérivée fractionnaire à guache de Riemann-Liouville est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 [15] *Soient* $\alpha \geq 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$. *Si* $f \in AC^n[a,b]$, *alors la dérivée fractionnaire* $D^{\alpha}_{a^+} f$ *existe presque partout sur* $[a,b]$, *en plus elle est donnée par*

$$D^{\alpha}_{a^+} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds. \tag{2.11}$$

Proposition 2.2.1 [14] *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$. *Alors pour tout entier* $m \in \mathbb{N}_*$ *tel que* $m > \alpha$ *on a*

$$D^{\alpha}_{a^+} f(t) = D^m \, I^{m-\alpha}_{a^+} f(t). \tag{2.12}$$

Preuve. Comme $m \geq n$, alors

$$D^m \, I^{m-\alpha}_{a^+} f(t) = D^n \, D^{m-n} \, I^{m-n}_{a^+} \, I^{n-\alpha}_{a^+} f(t) = D^n \, I^{n-\alpha}_{a^+} f(t) = D^{\alpha}_{a^+} f(t),$$

car $D^{m-n} \, I^{m-n}_{a^+} = I$. ■

Théorème 2.2.1 [34] *Soient* f *et* g *deux fonctions dont les dérivées fractionnaires à gauche de Riemann-Liouville existent. Alors* $D^{\alpha}_{a^+}(c_1 f + c_2 g)$ *existe, et on a*

$$D^{\alpha}_{a^+}(c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 \, D^{\alpha}_{a^+} f(t) + c_2 \, D^{\alpha}_{a^+} g(t), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

Le lemme suivant montre que la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire ;

Lemme 2.2.2 [34] *Soient* $\alpha > 0$ *et* $f \in L^1[a,b]$. *Alors l'égalité*

$$D^{\alpha}_{a^+} \, I^{\alpha}_{a^+} f(t) = f(t), \tag{2.14}$$

est vraie pour presque tout $t \in [a,b]$.

Preuve. En utilisant la définition 2.1.1 et la propriété du semi-groupe (2.6), on trouve

$$D_{a^+}^{\alpha}\ I_{a^+}^{\alpha}\ f(t) = D^n\ I_{a^+}^{n-\alpha}\ I_{a^+}^{\alpha}\ f(t) = D^n\ I_{a^+}^{n}\ f(t) = f(t),$$

presque partout sur $[a,b]$. ∎

Théorème 2.2.2 *Soient α, $\beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 \leq \beta < m$ $(n, m \in \mathbb{N}_*)$. Alors on a*

(a) Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1[a,b]$ l'égalité

$$D_{a^+}^{\beta}\left(I_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) = I_{a^+}^{\alpha-\beta}\ f(t), \tag{2.15}$$

est vraie presque partout sur $[a,b]$.

(b) Si $\beta \geq \alpha > 0$ et si la dérivée fractionnaire $D_{a^+}^{\beta-\alpha}\ f$ existe, alors on a

$$D_{a^+}^{\beta}\left(I_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) = D_{a^+}^{\beta-\alpha}\ f(t). \tag{2.16}$$

(c) S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[a,b]$ telle que $f = I_{a^+}^{\alpha}\ \varphi$, alors

$$I_{a^+}^{\alpha}\ D_{a^+}^{\alpha}\ f(t) = f(t), \tag{2.17}$$

pour presque tout $t \in [a,b]$.

(d) Pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}_*$. Si les dérivées fractionnaires $D_{a^+}^{\alpha}\ f$ et $D_{a^+}^{k+\alpha} f$ existent, alors

$$D^k\left(D_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) = D_{a^+}^{k+\alpha}\ f(t). \tag{2.18}$$

Preuve. En utilisant la définition 2.1.1 et la propriété de semigroupe (2.6) on a

(a) Puisque $\alpha > \beta$, alors $n \geq m$ et on a

$$\begin{aligned}
D_{a^+}^{\beta}\ \left(I_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) &= D^n\ I_{a^+}^{n-\beta}\ \left(I_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) \\
&= D^n\ \left(I_{a^+}^{n+\alpha-\beta}\ f\right)(t) \\
&= D^n\ I_{a^+}^{n}\ \left(I_{a^+}^{\alpha-\beta}\ f\right)(t) \\
&= I_{a^+}^{\alpha-\beta}\ f(t),
\end{aligned}$$

presque pour tout $t \in [a,b]$.

(b) Considérons l'entier naturel j tel que $j-1 \leq \beta-\alpha < j$, évidemment $j \leq m$, alors

$$D_{a^+}^{\beta}\ \left(I_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) = D^m\ I_{a^+}^{m-\beta}\ \left(I_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) = D^m\ I^{m-(\beta-\alpha)}\ f(t) = D_{a^+}^{\beta-\alpha}\ f(t),$$

sous condition d'existence de $D_{a^+}^{\beta-\alpha}\ f(t)$.

(c) Par la relation (2.14), on déduit

$$I_{a^+}^{\alpha}\ D_{a^+}^{\alpha}\ f(t) = I_{a^+}^{\alpha}\ \left[D_{a^+}^{\alpha}\ I_{a^+}^{\alpha}\ \varphi(t)\right] = I_{a^+}^{\alpha}\left[\varphi(t)\right] = f(t).$$

(d) On a

$$\begin{aligned}
D^k\left[D_{a^+}^{\alpha}\ f(t)\right] &= D^k\ D^n\ I_{a^+}^{n-\alpha}\ f(t) \\
&= D^{k+n}\ I_a^{n-k+k-\alpha}\ f(t) \\
&= D^{k+n}\ I_a^{k+n-(k+\alpha)}\ f(t) \\
D^k\left[D_{a^+}^{\alpha}\ f(t)\right] &= D_a^{k+\alpha}\ f(t),
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ∎

Théorème 2.2.3 [15] *Si $f \in AC^n[0,b]$, pour tout $b>0$, alors la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de f est*

$$\left\{\mathcal{L}\left(D_{0^+}^{\alpha}\ f\right)\right\}(s) = s^{\alpha}\ \left(\mathcal{L}\ f\right)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k\ D^{n-k-1}\ I_{0^+}^{n-\alpha}\ f\left(0^+\right), \quad (2.19)$$

sous la condition que f possède une transformée de Laplace.
En particulier, si $0<\alpha<1$ et $f(t) \in AC[0,b]$ pour tout $b>0$, alors

$$\left\{\mathcal{L}\left(D_{0^+}^{\alpha} f\right)\right\}(s) = s^{\alpha}\left(\mathcal{L}f\right)(s) - I_{0^+}^{1-\alpha} f\left(0^+\right).$$

2.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Maintenant, on donne une définition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Elle est initialement introduite par Caputo [4], [5] dans les années soixante et adaptée par Caputo et Mainardi [6] dans le cadre de la théorie de la viscoélasticité linéaire (voir [24]) ;

Définition 2.3.1 [15] *La dérivée fractionnaire à gauche de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction f est donnée par*

$$ {}^{c}D_{a^{+}}^{\alpha} f(t) := I_{a^{+}}^{n-\alpha} f^{(n)}(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds \ , t > a, \tag{2.20} $$

avec $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}_{*}$.

Exemple 2.3.1 *soit $f(t) = (t-a)^{\gamma}$ avec $\gamma > 0$ alors pour $(0 < \alpha \leq 1)$ on a (par définition)*

$$ \begin{aligned} {}^{c}D_{a^{+}}^{\alpha} f(t) \ &: = I_{a^{+}}^{1-\alpha} f'(t) := \gamma I_{a}^{1-\alpha} (t-a)^{\gamma-1} \\ &: = \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{-\alpha} (s-a)^{\gamma-1} ds, \ t > a. \end{aligned} $$

En utilisant le changement de variables (2.4), on arrive à

$$ \begin{aligned} {}^{c}D_{a^{+}}^{\alpha} f(t) &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha+\gamma} \int_{0}^{1} x^{\gamma-1} (1-x)^{-\alpha} dx \\ &= \frac{\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha+\gamma} \beta(\gamma, 1-\alpha), \end{aligned} $$

d'où

$$ {}^{c}D_{a^{+}}^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\alpha+\gamma)} (t-a)^{-\alpha+\gamma}. $$

la relation entre la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo et la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville est formulée dans le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 [14] [15] *Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $n-1$ dérivées en a et si $D_{a^{+}}^{\alpha} f$ existe, alors*

$$ {}^{c}D_{a^{+}}^{\alpha} f(t) = D_{a^{+}}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k} \right], \tag{2.21} $$

pour presque tout $t \in [a, b]$.

Preuve. d'après la définition on a

$$\begin{aligned}
& D_{a^+}^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\
&= D^n I_{a^+}^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\
&= \frac{d^n}{dt^n}\int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(s)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right] ds.
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie

$$\begin{aligned}
& I_{a^+}^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\
&= \int_a^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(s)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right] ds \\
&= -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[\left(f(s)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right)(t-s)^{n-\alpha}\right]_{s=a}^{s=t} \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha}\left[D\, f(s)-D\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right] ds,
\end{aligned}$$

où

$$I_{a^+}^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]=I_{a^+}^{n-\alpha+1}\, D\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right],$$

en procédant de la même façon n -$fois$, on aboutit à

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] &= I_{a^+}^{n-\alpha+n}\, D^n\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\
&= I_{a^+}^{n}\, I_{a^+}^{n-\alpha}\, D^n\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right],
\end{aligned}$$

or $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ est un polynôme d'ordre $n-1$, on obtient alors

$$I_{a^+}^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]=I_{a^+}^{n}\ I_{a^+}^{n-\alpha}\ D^n\ f(t),$$

ainsi

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] &= D^n\ I_{a^+}^{n}\ I_{a^+}^{n-\alpha}\ D^n\ f(t) \\ &= I_{a^+}^{n-\alpha}\ D^n\ f(t) \\ &= {}^cD_{a^+}^{\alpha}\ f(t), \end{aligned}$$

pour presque tout $t\in[a,b]$. ■

Remarque 2.3.1 *Si* $0<\alpha<1$ *la relation* (2.21) *devient*

$$^cD_{a^+}^{\alpha}f(t)=D_{a^+}^{\alpha}\left[f(t)-f(a)\right].$$

Une autre relation entre les deux dérivées fractionnaires est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.3.1 [14] [15] *Soient* $\alpha\geq 0$ *et* $n=[\alpha]+1$. *Choisissons* f *telle que* $^cD_{a^+}^{\alpha}\ f$ *et* $D_{a^+}^{\alpha}\ f$ *existent alors*

$$^cD_{a^+}^{\alpha}f(t)=D_{a^+}^{\alpha}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}. \tag{2.22}$$

En particulier, si $0<\alpha<1$ *alors*

$$^cD_{a^+}^{\alpha}f(t)=D_{a^+}^{\alpha}f(t)-\frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Une conséquence de ce lemme est donnée par ;

Corollaire 2.3.1 [15] *Soient* $\alpha\geq 0$ *et* $n=[\alpha]+1$. *Si* $^cD_{a^+}^{\alpha}\ f$ *et* $D_{a^+}^{\alpha}\ f$ *existent, et si on suppose que* $D^k\ f(a)=0$ *pour tout* $k\in\{0,1,...,n-1\}$, *alors*

$$^cD_{a^+}^{\alpha}f(t)=D_{a^+}^{\alpha}\ f(t). \tag{2.23}$$

La dérivée fractionnaire à gauche de Caputo est l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville ;

Théorème 2.3.2 [34] *Si $f \in C[a,b]$ et si $\alpha > 0 \quad (n-1 < \alpha \leq n)$, alors*

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha}\ I_{a^+}^{\alpha}\ f(t) = f(t). \tag{2.24}$$

Preuve. Pour $k = 0, 1, ..., n-1$ et d'après l'égalité (2.15) on a

$$\left(I_{a^+}^{\alpha}\ f\right)^{(k)}(t) = I_{a^+}^{\alpha-k}\ f(t)\ ,$$

et de l'estimation

$$\left|I_{a^+}^{\alpha-k}\ f(t)\right| \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{|\Gamma(\alpha-k+1)|}(t-a)^{\alpha-k},$$

on obtient

$$I_{a^+}^{\alpha-k}\ f(a) = 0\ ,\ \ (k = 0, 1, ..., n-1).$$

En vertu du corollaire précédent, on a

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha}\ I_{a^+}^{\alpha}\ f(t) = D_{a^+}^{\alpha}\ I_{a^+}^{\alpha}\ f(t) = f(t).$$

■

Théorème 2.3.3 [34] ***Soient*** *f_1 et f_2 deux fonction de $[a,b]$, telles que $^{c}D_{a^+}^{\alpha}\ f_1$ et $^{c}D_{a^+}^{\alpha}\ f_2$ existent presque partout. De plus, soient c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$. Alors, $^{c}D_{a^+}^{\alpha}(c_1\ f_1 + c_2\ f_2)$ existe presque partout sur $[a,b]$ et*

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha}(c_1\ f_1 + c_2\ f_2) = c_1\ {}^{c}D_{a^+}^{\alpha}\ f_1 + c_2\ {}^{c}D_{a^+}^{\alpha}\ f_2. \tag{2.25}$$

Lemme 2.3.2 [34] *Soient $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha]+1$. De plus on suppose que $f \in C^n[a,b]$, alors $^{c}D_{a^+}^{\alpha}f$ est continue sur $[a,b]$ et vérifie*

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha}\ f(a) = 0.$$

Preuve. D'après la définition, il est clair que $^{c}D_{a^+}^{\alpha}\ f$ est continue, d'autre part, d'après l'estimation

$$\left|I_{a^+}^{n-\alpha}\ f^{(n)}(t)\right| \leq \frac{\left\|f^{(n)}\right\|_{\infty}}{|\Gamma(n-\alpha+1)|}(t-a)^{n-\alpha}\ \ ,\forall\ t \in [a,b],$$

d'où

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha}\ f(a) = I_{a^+}^{n-\alpha}D^n f(a) = 0.$$

■

Théorème 2.3.4 [14] *Si* $f \in AC^n[0,b]$, *pour tout* $b > 0$, *alors la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo de* f *est*

$$\left\{\mathcal{L}\left({}^cD_{0^+}^{\alpha} f\right)\right\}(s) = s^{\alpha}\left(\mathcal{L}f\right)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k}\ f^{(k)}\left(0^+\right), \qquad (2.26)$$

sous la condition que la transformée de Laplace existe.

Preuve. On sait que, pour $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}_*$, $t > 0$

$${}^cD_{0^+}^{\alpha}\ f(t) = I_{0^+}^{n-\alpha} f^{(n)}(t).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left\{\mathcal{L}\left({}^cD_{0^+}^{\alpha} f\right)\right\}(s) &= \left\{\mathcal{L}\left(I_{0^+}^{n-\alpha} f^{(n)}\right)\right\}(s) \\ &= s^{-n+\alpha}\left(\mathcal{L}\ f^{(n)}\right)(s), \qquad \text{(d'après (2.9))}.\end{aligned}$$

$$\left\{\mathcal{L}\left({}^cD_{0^+}^{\alpha} f\right)\right\}(s) = s^{\alpha}\left(\mathcal{L}f\right)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}\left(0^+\right), \quad \text{(d'après (1.18))}.$$

■

2.4 Dérivée de Grünwald-Letnikov

Maintenant, on donne une autre définition de la dérivée fractionnaire, qui permettra d'établir des méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles fractionnaires ;

Définition 2.4.1 *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, *la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est définie par*

$${}^{GL}D_a^{\alpha}\ f(t) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\frac{(t-a)}{h}} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh)\ ,\ (t > a), \qquad (2.27)$$

sous condition que la limite existe.

Dans le cas où $\alpha = n \in \mathbb{N}$,

$$D^{n}\ f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} f(t-kh), \tag{2.28}$$

est la dérivée $n-$ *ième de la fonction* f.

On peut définir l'intégrale de Grünwald-Letnikov en remplaçant α *par* $-\alpha$ *dans (2.27).*

Alors on a

$$\begin{aligned} {}^{GL}I_{a}^{\alpha}\ f(x) &= \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{(t-a)}{h}} (-1)^{k} \binom{-\alpha}{k} f(t-kh)\ ,\ \alpha > 0 \\ &= \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{(t-a)}{h}} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\ \Gamma(\alpha)} f(t-kh)\ ,\ \alpha > 0. \end{aligned}$$

Une relation entre la dérivée de Grünwald-Letnikov et les autres dérivées(Riemann-Liouville et Caputo) est formulée dans le théorème suivant ;

Théorème 2.4.1 [34] *Soient* $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$.*Si* $f \in C^{n}[a,b]$, *alors*

$$ {}^{GL}D_{a}^{\alpha}\ f(t) = {}^{c}D_{a^{+}}^{\alpha}\ f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} = D_{a^{+}}^{\alpha}\ f(t). \tag{2.29}$$

Remarque 2.4.1 *La relation* (2.27) *est très utilisée pour calculer numériquement une dérivée fractionnaire connaissant* f *avant la valeur* t.

Remarque 2.4.2 *Il faut noter que pour* α *non entier, la dérivée d'ordre* α *au point* t *dépend du comportement de la fonction sur tout l'intervalle* $[a,t]$.

2.5 Equation différentielle au sens de Caputo

Théorème 2.5.1 [21] *Soit le problème associé à l'équation différentielle au sens de Caputo :*

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0+}^{\alpha} y(x) - \lambda y(x) = 0, \\ \qquad y^{(k)}(0) = c_k \in \mathbb{R}, \qquad (k = 0, ..., n-1, \ \ n-1 < \alpha < n, \ \ \lambda \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

où $n = [\alpha] + 1$, la solution $y(x)$ de ce problème est donnée par

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \ x^k \ E_{\alpha,k+1}(\lambda \ x^{\alpha}). \tag{2.30}$$

Preuve. On a

$${}^{c}D_{0+}^{\alpha} y(x) - \lambda y(x) = 0,$$

Si on applique la transformée de Laplace, on obtient

$$s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} \ y^{(k)}\left(0^{+}\right) - \lambda(\mathcal{L}y)(s) = 0,$$

$$s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - \lambda(\mathcal{L}y)(s) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \ s^{\alpha-1-k}.$$

Ainsi

$$(\mathcal{L}y)(s) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \ \frac{s^{\alpha-1-k}}{s^{\alpha} - \lambda}.$$

D'après (1.32) on a

$$\frac{s^{\alpha-1-k}}{s^{\alpha} - \lambda} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} \ t^k \ E_{\alpha,k+1}(\lambda \ t^{\alpha}) \ dt,$$

$$\frac{s^{\alpha-1-k}}{s^{\alpha} - \lambda} = \mathcal{L}\left(x^k \ E_{\alpha,k+1}(\lambda \ x^{\alpha})\right)(s),$$

Ensuite, en appliquant la transformation inverse,on trouve

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \ x^k \ E_{\alpha,k+1}(\lambda \ x^{\alpha}),$$

d'où le résultat. ■

Chapitre 3

Principe du maximum pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à établir un principe du maximum pour la fonction $u - v$ différence des solutions de l'inéquation différentielle fractionnaire de la forme

$$\begin{aligned} & \partial_t u(x,t) + \mu^c D^{\alpha}_{0^+,t} u(x,t) - f(x,t,u,Du,D^2u) \\ \leq \quad & \partial_t v(x,t) + \mu^c D^{\alpha}_{0^+,t} v(x,t) - f(x,t,v,Dv,D^2v) \end{aligned}$$

Ensuite, nous introduisions un problème mixte associé à l'équation aux dérivées partielles fractionnaires appelée équation d'advection-dispersion avec une dérivée temporelle fractionnaire de Caputo. Enfin, en utilisant ce principe, nous montrons que ce problème a au plus une solution. D'autre part, nous utiliserons la méthode de séparation des variables pour démontrer l'existence de la solution.

3.1 Principe du maximum

Soit l'inégalité différentielle fractionnaire

$$\begin{aligned} & \partial_t u(x,t) + \mu^c D^{\alpha}_{0^+,t} u(x,t) - f(x,t,u,Du,D^2u) \\ \leq \quad & \partial_t v(x,t) + \mu^c D^{\alpha}_{0^+,t} v(x,t) - f(x,t,v,Dv,D^2v) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\mu > 0,\ 0 < \alpha < 1,\ \ (x,t) \in \Omega := G \times (0,T)\,;\ G \in \mathbb{R}^n.$$

Le domaine G avec le bord S est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Ici D^2u est la matrice qui représente la dérivée seconde de u par rapport à la variable x, Du est le gradient de u (par rapport à x).

${}^cD^{\alpha}_{0+,t}u$ représente la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo d'ordre α de la fonction u par rapport au temps t.

Une propriété très importante de la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo est formulée dans le théorème suivant

Théorème 3.1.1 [20] *Si une fonction* $f \in W^1((0,T]) \cap C([0,T])$ *atteint son maximum sur l'intervalle* $(0,T]$ *au point* $\tau = t_0$, $t_0 \in (0,T]$, *alors la dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction* f *est non négative au point* t_0 *pour tout* $0 < \alpha < 1$:

$$\left({}^cD^{\alpha}_{0+}f\right)(t_0) \geq 0, \;\; 0 < \alpha < 1. \tag{3.2}$$

Où $W^1((0,T])$ étant l'espace des fonctions $f \in C^1([0,T])$ définies dans l'intervalle $[0,T]$ telles que $f' \in L^1((0,T))$.

Preuve. Pour prouver le théorème, on définit la fonction auxiliaire

$$g(\tau) := f(t_0) - f(\tau), \quad \tau \in [0,T],$$

qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} g(\tau) \geq 0, \;\; \tau \in [0,T], & (3.3) \\ \left({}^cD^{\alpha}_{0+}g\right)(t) = -\left({}^cD^{\alpha}_{0+}f\right)(t), \quad t \in [0,T], & (3.4) \\ |g(\tau)| \leq C_\epsilon |t_0 - \tau|, \;\; \tau \in [\epsilon, T], \;\; 0 < \epsilon < T & (3.5) \end{cases}$$

Pour tout $0 < \epsilon < t_0$, on a

$$\begin{aligned} \left({}^cD^{\alpha}_{0+}g\right)(t_0) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_0} (t_0-\tau)^{-\alpha} g'(\tau)\, d\tau = \\ & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\epsilon} (t_0-\tau)^{-\alpha} g'(\tau)\, d\tau + \\ & + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\epsilon}^{t_0} (t_0-\tau)^{-\alpha} g'(\tau)\, d\tau \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Comme $f \in W^1((0,T])$, alors $g \in W^1((0,T])$, et ça signifie que $g' \in L^1(0,T)$, donc d'après le théorème1.4.1, on a

$$\forall\delta > 0\ \exists\epsilon_0 > 0 \text{ tel que } |I_1| < \delta \quad \forall\epsilon \in (0,\epsilon_0].$$

Pour I_2, on utilise l'intégration par parties :

$$I_2 = \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t_0-\tau)^{-\alpha} g(\tau)\right]_{\epsilon}^{t_0} - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\epsilon}^{t_0} (t_0-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau)\, d\tau,$$

et comme

$$\frac{|g(\tau)|}{|t_0-\tau|^{\alpha}} \leq C_\epsilon |t_0-\tau|^{1-\alpha}, \qquad \tau \in [\epsilon, T], \text{ (d'après (3.5))},$$

alors I_2devient

$$I_2 = -\frac{(t_0-\epsilon)^{-\alpha} g(\epsilon)}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\epsilon}^{t_0} (t_0-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau)\, d\tau.$$

De (3.3) on déduit

$$\begin{aligned} I_2 &\leq -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\epsilon}^{t_0} (t_0-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau)\, d\tau \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Alors

$$I_1 + I_2 \leq \delta - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\epsilon}^{t_0} (t_0-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau)\, d\tau.$$

Soit

$$\delta := \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{t_0} (t_0-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau)\, d\tau,$$

donc

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &\leq \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{t_0} (t_0-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau)\, d\tau \\ &\quad -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\epsilon}^{t_0} (t_0-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &\leq \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\epsilon}(t_0-\tau)^{-\alpha-1}g(\tau)\,d\tau \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\epsilon}^{t_0}(t_0-\tau)^{-\alpha-1}g(\tau)\,d\tau,
\end{aligned}
$$

puisque

$$[0,\epsilon] \subset [0,\epsilon_0]$$

$$\int_{\epsilon}^{t_0}(t_0-\tau)^{-\alpha-1}g(\tau)\,d\tau \geq \int_{\epsilon_0}^{t_0}(t_0-\tau)^{-\alpha-1}g(\tau)\,d\tau,$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &\leq \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\epsilon}(t_0-\tau)^{-\alpha-1}g(\tau)\,d\tau \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\epsilon_0}^{t_0}(t_0-\tau)^{-\alpha-1}g(\tau)\,d\tau \\
I_1 + I_2 &\leq 0, \quad \forall\epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0,
\end{aligned}
$$

à partir de (3.4) on termine la démonstration. ■

En utilisant le théorème précédent, on établit un principe du maximum donné par ;

Théorème 3.1.2 *Supposons que*

(i) G est borné

(ii) Il existe une fonction non négative K telle que :

$$f(x,t,u,Du,r_1) - f(x,t,u,Du,r_2) \geq K(x,t)\,Tr\,(r_1 - r_2)$$

où r_1 et r_2 sont deux matrices symétriques et $r_1 \geq r_2$ (terme à terme).

(iii) f est décroissante par rapport à u.

(iv) f est lipschitzienne i.e.

$$\exists L > 0 \ t.q \ |f(x,t,m_1,r_1) - f(x,t,m_2,r_2)| \leq L(|m_1-m_2| + |r_1-r_2|),$$

$$\forall (x,t) \in \Omega \ et \ u, m_1, m_2, r_1, r_2.$$

(v) u et v sont deux solutions de (3.1) dans Ω.

Alors, $u - v$ atteint son maximum sur la partie $S_G^T := \left(\bar{G} \times \{0\}\right) \cup (S \times [0, T])$ de la frontière de Ω.

Preuve. Soient

$$M = \max\left\{u(x,t) - v(x,t)\,;\ \ (x,t) \in \bar{\Omega}\right\},$$

$$m = \sup\left\{0, u(x,t) - v(x,t)\,;\ \ (x,t) \in S_G^T\right\}.$$

Supposons le contraire i.e $M > m$.

Soient $\phi(x,t) = \gamma(T - t)\, e^{-\gamma x}$, $\qquad \gamma > 0$, $(x,t) \in \Omega$,

avec la condition suivante

$$L(1 + n\gamma) < \frac{\mu}{\Gamma(2-\alpha)},$$

et le nombre positif $\epsilon > 0$ tel que

$$\epsilon\phi(x,t) < M - m, \qquad \forall (x,t) \in \bar{\Omega}.$$

Maintenant, on définit la fonction auxiliaire

$$w(x,t) := u(x,t) - v(x;t) + \epsilon\phi(x,t),$$

ceci implique que $w < M$ sur la frontière S_G^T, d'où w atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$ au point $(x_0, t_0) \in \Omega$. Donc en ce point on a

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t w(x_0,t_0) = 0,\ {}^c D_{0+,t}^{\alpha} w(x_0,t_0) \geq 0, \\ D^2 w(x_0,t_0) \leq 0,\ D_i u(x_0,t_0) - D_i v(x_0,t_0) = \epsilon\gamma\phi(x_0,t_0), \quad (i = 1, 2, ...n). \end{array}\right.$$

D_i est la dérivée par rapport à x_i.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \partial_t w(x_0,t_0) + \mu^c D_{0+,t}^{\alpha} w(x_0,t_0) \\ &\leq \partial_t u(x_0,t_0) + \mu^c D_{0+,t}^{\alpha} u(x_0,t_0) - \partial_t v(x_0,t_0) - \\ &\quad -\mu^c D_{0+,t}^{\alpha} v(x_0,t_0) - \epsilon\gamma e^{-\gamma x_0} - \frac{\mu\epsilon\gamma e^{-\gamma x_0}}{\Gamma(2-\alpha)} t_0^{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \partial_t w(x_0,t_0) + \mu^c D_{0+,t}^{\alpha} w(x_0,t_0) \\ &\leq f\left(x_0, t_0, u(x_0,t_0), Du(x_0,t_0), D^2 u(x_0,t_0)\right) - \\ &\quad -f\left(x_0, t_0, v(x_0,t_0), Dv(x_0,t_0), D^2 v(x_0,t_0)\right) - \epsilon\gamma e^{-\gamma x_0} - \frac{\mu\epsilon\gamma e^{-\gamma x_0}}{\Gamma(2-\alpha)} t_0^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} D^2w(x_0,t_0) &= D^2u(x_0,t_0) - D^2v(x_0,t_0) + \epsilon\gamma^3(T-t_0)Ie^{-\gamma x_0} \\ D^2u(x_0,t_0) &= D^2w(x_0,t_0) - \epsilon\gamma^3(T-t_0)Ie^{-\gamma x_0} + D^2v(x_0,t_0) \\ D^2u(x_0,t_0) &= D^2w(x_0,t_0) + A, \end{aligned}$$

on pose

$$\begin{aligned} J &= f\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),Du(x_0,t_0),D^2u(x_0,t_0)\right) - \\ &\quad -f\left(x_0,t_0,v(x_0,t_0),Dv(x_0,t_0),D^2v(x_0,t_0)\right) \\ J &= J_1+J_2+J_3, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} J_1 &= f\left(x_0,t_0,u(x_0,t_0),Du(x_0,t_0),D^2w(x_0,t_0)+A\right) - \\ &\quad -f(x_0,t_0,u(x_0,t_0),Du(x_0,t_0),A), \end{aligned}$$

$$J_2 = f(x_0,t_0,u(x_0,t_0),Du(x_0,t_0),A) - f(x_0,t_0,v(x_0,t_0),Du(x_0,t_0),A),$$

$$J_3 = f(x_0,t_0,v(x_0,t_0),Du(x_0,t_0),A) - f\left(x_0,t_0,v(x_0,t_0),Dv(x_0,t_0),D^2v(x_0,t_0)\right).$$

A partir de (ii) on trouve que

$$\begin{aligned} J_1 &\le K(x_0,t_0)\left(\sum_{i=1}^n D_i^2w(x_0,t_0)\right) \le 0 \\ J_1 &\le 0, \end{aligned}$$

de l'inégalité $w(x_0,t_0) \ge M$ on déduit que

$$\begin{aligned} u(x_0,t_0) - v(x_0,t_0) &\ge M - \epsilon\phi(x_0,t_0) \ge m > 0 \\ &\Rightarrow u(x_0,t_0) \ge v(x_0,t_0), \end{aligned}$$

et comme f est décroissante par rapport à u, alors

$$J_2 \le 0.$$

D'après l'hypothèse (iv) on obtient

$$\begin{aligned} J_3 &\le L\left\{|Du(x_0,t_0) - Dv(x_0,t_0)| + \epsilon\gamma^3(T-t_0)ne^{-\gamma x_0}\right\} \\ &\le L\left\{\epsilon\gamma\phi(x_0,t_0) + \epsilon\gamma^2 n\phi(x_0,t_0)\right\} \\ J_3 &\le L\epsilon\gamma\phi(x_0,t_0)[1+\gamma n]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} 0 &\le \partial_t w(x_0,t_0) + \mu\, {}^cD^{\alpha}_{0^+,t}w(x_0,t_0) \\ &\le L\epsilon\gamma\phi(x_0,t_0)[1+\gamma n] - \epsilon\gamma e^{-\gamma x_0} - \frac{\mu\epsilon\gamma e^{-\gamma x_0}}{\Gamma(2-\alpha)}t_0^{1-\alpha} < 0, \end{aligned}$$

d'où la contradiction. ∎

3.2 Conséquence

Comme une conséquence de ce principe, on considère l'équation aux dérivées partielles fractionnaires

$$\partial_t u(x,t) + \mu {}^c D^{\alpha}_{0+,t} u(x,t) = (K\Delta - v\nabla.)\, u(x,t). \tag{3.3}$$

Cette équation appartient à la classe plus vaste des équations d'advection-dispersion avec des dérivées temporelles fractionnaires.

Donc, soit le problème mixte suivant

$$(I)\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \mu {}^c D^{\alpha}_{0+,t} u(x,t) = (K\Delta - v\nabla.)\, u(x,t), & \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \bar{G}, \\ u(x,t) = c(x,t), & (x,t) \in S \times [0,T]. \end{cases}$$

Où $\mu > 0$, $0 < \alpha < 1$, $(x,t) \in \Omega := G \times (0,T)$, et K ,$v > 0$,

La solution de ce problème est définie sur le domaine $\bar{\Omega} := \bar{G} \times [0,T]$ à valeurs réelles et appartient à l'espace $C\left(\bar{\Omega}\right) \cap W^1_t(\Omega) \cap C^2_x(\Omega)$.

Où

$$W^1_t(\Omega) = \left\{u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R},\ \forall x \in \bar{G};\ u(x,.) \in W^1((0,T])\right\}$$

$$C^2_x(\Omega) = \left\{u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R},\ \forall t \in [0,T];\ u(.,t) \in C^2(G)\right\}$$

Théorème 3.2.1 *Soit* $u \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap W^1_t(\Omega) \cap C^2_x(\Omega)$ *une solution de l'équation* (3.3) *dans le domaine* $\Omega := G \times (0,T)$; $G \in \mathbb{R}^n$.

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées

(a) Si $u(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in \bar{\Omega}$, *alors elle atteint son maximum sur la partie* $S^T_G := \left(\bar{G} \times \{0\}\right) \cup (S \times [0,T])$ *de la frontière de* Ω *i.e.*

$$u(x,t) \leq \max_{(x,t) \in S^T_G} u(x,t) \quad , \quad \forall (x,t) \in \bar{\Omega}. \tag{3.4}$$

(b) Si $u(x,t) \leq 0$, $(x,t) \in \bar{\Omega}$, *alors*

$$u(x,t) \geq \min_{(x,t) \in S^T_G} u(x,t) \quad , \quad \forall (x,t) \in \bar{\Omega}. \tag{3.5}$$

Preuve. (a) Supposons le contraire i.e.

$\exists (x_1, t_1) \in \Omega$ tel que

$$u(x_1,t_1) > \max_{(x,t) \in S^T_G} \{0, u(x,t)\} = M > 0, \tag{3.6}$$

On défint le nombre $\epsilon := u(x_1, t_1) - M > 0$ et la fonction auxiliaire :

$$w(x,t) := u(x,t) + \frac{\epsilon}{2}\frac{T-t}{T}, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}, \tag{3.7}$$

qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w(x,t) \leq u(x,t) + \frac{\epsilon}{2}, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}, \\ w(x_1,t_1) \geq u(x_1,t_1) = \epsilon + M \geq \epsilon + u(x,t) \geq \epsilon + w(x,t) - \frac{\epsilon}{2} \geq \frac{\epsilon}{2} + w(x,t), \\ (x,t) \in S_G^T. \end{cases}$$

La dernière propriété signifie que la fonction w ne peut pas atteindre son maximum sur la partie S_G^T. Si le point maximum de w sur $\bar{\Omega}$ est désigné par (x_0, t_0) alors $x_0 \in G$, $0 < t_0 \leq T$ et

$$w(x_0,t_0) \geq w(x_1,t_1) \geq \epsilon + M > \epsilon. \tag{3.8}$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} \left({}^cD^{\alpha}_{0^+,t}w\right)(t_0) \geq 0, \ \partial_t w(x_0,t_0) = 0, \\ \nabla w(x_0,t_0) = 0, \ \Delta w(x_0,t_0) \leq 0. \end{cases}$$

De (3.7) on peut écrire

$$u(x,t) = w(x,t) - \frac{\epsilon}{2}\frac{T-t}{T}, \ (x,t) \in \bar{\Omega},$$

et comme

$$\left({}^cD^{\alpha}_{0^+,t}u\right)(x,t) = \left({}^cD^{\alpha}_{0^+,t}w\right)(x,t) + \frac{\epsilon}{2T}\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},$$

alors au point (x_0,t_0) on a

$$\begin{aligned} & \partial_t u(x_0,t_0) + \mu\, {}^cD^{\alpha}_{0^+,t}u(x_0,t_0) - (K\Delta - v\ \nabla.)\,u(x_0,t_0) \\ = \quad & \partial_t w(x_0,t_0) + \tfrac{\epsilon}{2T} + \mu\left({}^cD^{\alpha}_{0^+,t}w\right)(x_0,t_0) \\ + \quad & \mu\tfrac{\epsilon}{2T}\tfrac{t_0^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - K\Delta w(x_0,t_0) \\ \geq \quad & \tfrac{\epsilon}{2T}\left(1 + \mu\tfrac{t_1^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right) > 0. \end{aligned}$$

Ceci contredit la condition du théorème qui dit que la fonction u est une solution de l'équation (3.3) .

(b) En remplaçant u par $-u$ ci-dessus on démontre la deuxième partie.

■

3.2.1 Unicité de la solution

Le principe du maximum et le principe du minimum prouvés dans cette section sont appliqués pour prouver que le problème (I) possède au plus une solution.

Théorème 3.2.2 *Si u est une solution du problème (I), alors on a l'estimation suivante :*

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \max\{M_0, M_1\}, \tag{3.9}$$

où

$$M_0 = \|u_0\|_{C(\bar{G})} \ , \ M_1 = \|c\|_{C(S\times[0,T])}, \tag{3.10}$$

à condition que la solution garde son signe.

Preuve. En appliquant le principe du maximum et le principe du minimum à la fonction u, on obtient :

$$-\max\{M_0, M_1\} \leq u(x,t) \leq \max\{M_0, M_1\}, \quad (x,t) \in \bar{\Omega},$$

où

$$M_0 = \|u_0\|_{C(\bar{G})} \ , \ M_1 = \|c\|_{C(S\times[0,T])},$$

d'où le résultat. ■

Théorème 3.2.3 *Le problème (I) possède au plus une solution. Cette solution dépend continûment des données du problème au sens que si*

$$\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{C(\bar{G})} \leq \epsilon_0 \qquad , \qquad \|c - \tilde{c}\|_{C(S\times[0,T])} \leq \epsilon_1$$

alors, on a l'estimation suivante

$$\|u - \tilde{u}\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \max\{\epsilon_0, \epsilon_1\}. \tag{3.11}$$

Preuve. Soient u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (I) i.e.

$$\begin{cases} \partial_t u_1(x,t) + \mu^c D^\alpha_{0^+,t} u_1(x,t) - (K\Delta - v\nabla.)\, u_1(x,t) = 0, \\ u_1(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \bar{G}, \\ u_1(x,t) = c(x,t), \qquad (x,t) \in S \times [0,T], \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t u_2(x,t) + \mu^c D^\alpha_{0^+,t} u_2(x,t) - (K\Delta - v\nabla.)\, u_2(x,t) = 0, \\ u_2(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \bar{G}, \\ u_2(x,t) = c(x,t), \qquad (x,t) \in S \times [0,T]. \end{cases}$$

Alors

$$\partial_t (u_1 - u_2)(x,t) + \mu^c D^\alpha_{0,t} (u_1 - u_2)(x,t) - (K\Delta - v\nabla.)(u_1 - u_2)(x,t) = 0.$$

Soit $w = u_1 - u_2$ une solution du problème homogène

$$\begin{cases} \partial_t w(x,t) + \mu^c D^\alpha_{0,t} w(x,t) - (K\Delta - v\nabla.)\, w(x,t) = 0, \\ w(x,0) = 0, \qquad x \in \bar{G}, \\ w(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in S \times [0,T]. \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|w\|_{C(\bar{\Omega})} &\leq \max\{M_0, M_1\}, \quad \text{avec } M_0 = 0 \text{ et } M_1 = 0 \\ &\Longrightarrow w = u_1 - u_2 = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

■

3.2.2 Existence de la solution

On montre l'existence de la solution du problème (I) sous quelques restrictions sur les données du problème, on a donc

$$(II) \begin{cases} \partial_t u(x,t) + \mu^c D^\alpha_{0^+,t}\, u(x,t) = -Lu(x,t), & -L = (K\Delta - v\nabla.), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \bar{G}, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in S \times [0,T], \end{cases}$$

Avant d'étudier l'existence on a besoin de la proposition suivante

Proposition 3.2.1 *Pour* $\mu < \frac{\Gamma(2-\alpha)}{T^{1-\alpha}}$ *l'opérateur* $\left(I + \mu I^{1-\alpha}_{0^+}\right)^{-1}$ *existe et il est borné dans* $L^p[0,T]$.

On utilise la méthode de séparation des variables, soit donc

$$u(x,t) = U(t)\, X(x) \text{ avec } X \neq 0 \text{ et } U \neq 0,$$

Alors l'équation (3.3) devient

$$\frac{U'(t) + \mu^c D^\alpha_{0^+,t}\, U(t)}{U(t)} = -\frac{L(X)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda > 0,$$

cette dernière équation avec la condition au bord est équivalente à l'équation différentielle fractionnaire

$$U'(t) + \mu^c D^\alpha_{0^+,t}\, U(t) + \lambda U(t) = 0, \tag{3.12}$$

et le problème à valeurs propres pour l'opérateur L

$$\begin{cases} L(X) = \lambda X, \\ X(x) = 0 \ , \ x \in S. \end{cases} \tag{3.13}$$

Maintenant, soit l'espace

$$M_L = \left\{ f; f_{|S} = 0 \ , \ f \in C^1\left(\bar{G}\right) \cap C^2(G), \ et \ L(f) \in L^2(G) \right\}.$$

Toute fonction $f \in M_L$ peut être représentée par sa série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f \ , \ X_i \rangle \ X_i(x), \tag{3.14}$$

où $X_i \in M_L$ sont les fonctions propres correspondantes aux valeurs propres λ_i :

$$L(X_i) = \lambda_i X_i, \qquad i = 1, 2, ... \ .$$

On peut écrire l'équation (3.12) sous la forme

$$\left(I + \mu \ I_{0^+}^{1-\alpha}\right) U'(t) = -\lambda \ U(t),$$

ainsi

$$U'(t) = -\lambda \ \left(I + \mu \ I_{0^+}^{1-\alpha}\right)^{-1} \ U(t) \tag{3.15}$$

$$\Rightarrow U'(t) = A \ U(t),$$

où

$$A \ U = -\lambda \ \left(I + \mu \ I_{0^+}^{1-\alpha}\right)^{-1} U,$$

alors, la solution de l'équation (3.15) avec $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 2, ...$ est donnée par

$$U_i(t) = S_i(t) \ U_{0i},$$

où $\{S_i(t)\}_{t \geq 0}$ est le semigroupe engendré par A et U_{0i} est la donnée initiale, pour $i = 1, 2, ...$.

Le problème étudié étant linéaire et homogème, le principe du superposition s'applique et par conséquent :

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \ S_i(t) \ U_{0i} \ X_i(x),$$

sera une solution de l'équation (3.3) et la condition au bord. Pour construire une fonction qui vérifie la condition initiale, on donne la définition suivante :

Définition 3.2.1 *La solution formelle du problème* (II) *est appelée série de Fourier, elle a la forme suivante*

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_0, X_i \rangle \; S_i(t) \; X_i(x), \qquad i = 1, 2, \dots \, . \tag{3.16}$$

D'où le théorème d'existence ;

Théorème 3.2.4 *Si la donnée initiale* u_0 *appartient à l'espace* M_L *et* $\mu < \frac{\Gamma(2-\alpha)}{T^{1-\alpha}}$, *alors la solution du problème* (II) *existe et elle est donnée par la formule* (3.16).

Chapitre 4

Système d'équations différentielles non linéaires à multi-ordres fractionnaires avec retards

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution d'un système d'équations différentielles fractionnaires non linéaires à multi-ordres et avec retards variables. les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication internationale [30].

Dans[12] El Sayed et Gaafar ont étudié certains systèmes non linéaires fractionnaires avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0,1)$ et à retards constants $\tau_j > 0$, $j = 1, ..., n$.

$$\begin{cases} D^{\alpha} x_i(t) = f_i(t, x(t)) + g_i(t, x_\tau(t)), t \in (0, T], T < \infty \\ x(t) = \Phi(t) \text{ pour } t < 0 \text{ et } \lim_{t \to 0^-} \Phi(t) = 0 \\ I^{1-\alpha} x(t) \setminus_{t=0} = 0 \end{cases}$$

où D^{α} désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, et $x_\tau(t) = (x_1(t - \tau_1), ..., x_n(t - \tau_n))$.

Récemment, cette étude a été étendue par Nisse et Bouaziz [25] pour d'autres classes d'équations différentielles à retards variables $\tau_j = \tau_j(t)$ avec une dérivée fractionnaire de Caputo, de la forme

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0^+}^{\alpha} x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))), \; i = 1, ..., n, \; t > 0 \\ x(t) = \Phi(t), \; t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

Dans ce travail, On considère le système précédent mais avec multi-ordres $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ i.e.

$$ {}^{c}D_{0^+}^{\alpha_i} x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(t, x_i(t), x_j(t-\tau_j(t))\right), \ i = 1, ..., n, \ t > 0 \tag{4.1} $$

$$ x(t) = \Phi(t) = \left(\phi_{1,}..., \phi_n\right), \ t \in [-\tau, 0] \tag{4.2} $$

où ${}^{c}D_{0^+}^{\alpha_i}$ est la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo d'ordre $\alpha_i \in (0,1)$, pour $i = 1, ..., n$. $f_{ij} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues pour $i, j = 1, ..., n$, $\tau_j : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ avec $\tau = \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \tau_j(t) : j = 1, ..., n\right\} > 0$.

4.1 Existence et unicité de la solution

Lemme 4.1.1 *La fonction vecteur* $x(t) := (x_1(t), ..., x_n(t))$ *est une solution du problème* $(4.1) - (4.2)$ *si et seulement si*

$$ x_i(t) = \begin{cases} \phi_i(0) + \sum\limits_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\alpha_i} f_{ij}\left(t, x_i(t), x_j(t-\tau_j(t))\right), & t > 0 \\ \phi_i(t), & t \in [-\tau, 0], \ i = 1, ..., n. \end{cases} \tag{4.3} $$

Preuve. Pour $t > 0$ et $i = \overline{1,n}$, l'équation (4.1) peut s'écrire comme

$$ I_{0^+}^{1-\alpha_i} D x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(t, x_i(t), x_j(t-\tau_j(t))\right). $$

En appliquant l'opérateur $I_{0^+}^{\alpha_i}$, pour $i = \overline{1,n}$ dans les deux côtés, on obtient

$$ \begin{aligned} I^1 D x_i(t) &= \sum_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\alpha_i} f_{ij}\left(t, x_i(t), x_j(t-\tau_j(t))\right). \\ x_i(t) - x_i(0) &= \sum_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\alpha_i} f_{ij}\left(t, x_i(t), x_j(t-\tau_j(t))\right). \end{aligned} $$

Alors

$$ x_i(t) = \phi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\alpha_i} f_{ij}\left(t, x_i(t), x_j(t-\tau_j(t))\right). $$

■

Soit l'espace $E = \{v \in C([-\tau, +\infty), \mathbb{R}^n) : v(t) = \Phi(t), \ t \in [-\tau, 0]\}$ muni de la distance définie pour tout x et y dans E par

$$d_\lambda(x, y) := \sum_{i=1}^{n} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-\lambda t} |x_i(t) - y_i(t)| \right\},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sera choisi plus tard.

On définit l'opérateur $F : E \to E$ par

$$(Fx)_i(t) = \begin{cases} \phi_i(0) + \sum\limits_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\alpha_i} f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))), & t > 0 \\ \phi_i(t), & t \in [-\tau, 0], \ i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Lemme 4.1.2 (E, d) *est un espace métrique complet.*

Théorème 4.1.1 *On suppose que*

(H_1) Soient $f_{ij} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et satisfont la condition de Lipschitz

$$|f_{ij}(t, x_i, y_j) - f_{ij}(t, u_i, v_j)| \leq k_i |x_i - u_i| + h_j |y_j - v_j|,$$

où $k_i, h_j > 0$, $i, j = \overline{1, n}$.

(H_2) Pour $j = \overline{1, n}$, $\tau_j \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et

$$\tau_j(t) > -\tau, \qquad t > 0.$$

(H_3) Pour $j = \overline{1, n}, \exists t_j > 0$:

$$\begin{cases} \tau_j(t) \geq t, & \forall t \in [0, t_j], \\ \tau_j(t) < t, & \forall t \in]t_j, +\infty[. \end{cases}$$

(H_4)

$$\sum_{i=1}^{n} \tau^{\alpha_i} \left(n k_i + e \sum_{j=1}^{n} h_j \right) < 1,$$

alors le problème $(4.1) - (4.2)$ a une solution unique.

Preuve. Soient $x, y \in E$, pour $i = \overline{1, n}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|Fx_i\left(t\right)-Fy_i\left(t\right)\right| \\
= &\left|\sum_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\alpha_i}\left\{f_{ij}\left(t,x_i\left(t\right),x_j\left(t-\tau_j\left(t\right)\right)\right)-f_{ij}\left(t,y_i\left(t\right),y_j\left(t-\tau_j\left(t\right)\right)\right)\right\}\right| \\
= &\left|\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\left\{f_{ij}\left(s,x_i\left(s\right),x_j\left(s-\tau_j\left(s\right)\right)\right)-f_{ij}\left(s,y_i\left(s\right),y_j\left(s-\tau_j\left(s\right)\right)\right)\right\}ds\right| \\
\leq &\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\left|f_{ij}\left(s,x_i\left(s\right),x_j\left(s-\tau_j\left(s\right)\right)\right)-f_{ij}\left(s,y_i\left(s\right),y_j\left(s-\tau_j\left(s\right)\right)\right)\right|ds.
\end{aligned}$$

D'après (H_1)

$$\begin{aligned}
&\left|Fx_i\left(t\right)-Fy_i\left(t\right)\right| \\
\leq &\sum_{j=1}^{n} k_i \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\left|x_i\left(s\right)-y_i\left(s\right)\right|ds \\
+ &\sum_{j=1}^{n} h_j \int_0^{t_j} \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\left|\phi_j\left(r_j\left(s\right)\right)-\phi_j\left(r_j\left(s\right)\right)\right|ds \\
+ &\sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\left|x_j\left(r_j\left(s\right)\right)-y_j\left(r_j\left(s\right)\right)\right|ds \\
\leq &\, nk_i \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\left|x_i\left(s\right)-y_i\left(s\right)\right|ds \\
+ &\sum_{j=1}^{n} h_j \int\limits_{t_j}^{t} \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\left|x_j\left(r_j\left(s\right)\right)-y_j\left(r_j\left(s\right)\right)\right|ds,
\end{aligned}$$

où $r_j\left(s\right)=s-\tau_j\left(s\right).$

Donc

$$\begin{aligned}
& e^{-\lambda t}\left|Fx_i(t)-Fy_i(t)\right| \\
\leq\quad & nk_i \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\lambda(t-s)} e^{-\lambda s}\left|x_i(s)-y_i(s)\right| ds \\
+\quad & \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\lambda(t-r_j(s))} e^{-\lambda r_j(s)}\left|x_j(r_j(s))-y_j(r_j(s))\right| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-\lambda t}\left|Fx_i(t)-Fy_i(t)\right| \\
\leq\quad & nk_i \sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda\zeta}\left|x_i(\zeta)-y_i(\zeta)\right|\right\} \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\lambda(t-s)} ds \\
+\quad & \sum_{j=1}^{n} h_j \sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda r_j(\zeta)}\left|x_j(r_j(\zeta))-y_j(r_j(\zeta))\right|\right\} \int_{t_j}^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\lambda(t-r_j(s))} ds.
\end{aligned}$$

En utilisant un changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}
& e^{-\lambda t}\left|Fx_i(t)-Fy_i(t)\right| \\
\leq\ & nk_i \sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda\zeta}\left|x_i(\zeta)-y_i(\zeta)\right|\right\}\tfrac{1}{\lambda^{\alpha_i}}\int_0^{\lambda t}\tfrac{u^{\alpha_i-1}e^{-u}}{\Gamma(\alpha_i)}du \\
+\ & \sum_{j=1}^{n} h_j \sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda\zeta}\left|x_j(\zeta)-y_j(\zeta)\right|\right\}\tfrac{1}{\lambda^{\alpha_i}}\int_0^{\lambda(t-t_j)}\tfrac{u^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}e^{-u}e^{-\lambda\tau_j\left(t-\frac{u}{\lambda}\right)}du \\
\leq\ & nk_i \sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda\zeta}\left|x_i(\zeta)-y_i(\zeta)\right|\right\}\tfrac{1}{\lambda^{\alpha_i}}\int_0^{\lambda t}\tfrac{u^{\alpha_i-1}e^{-u}}{\Gamma(\alpha_i)}du \\
+\ & \sum_{j=1}^{n} h_j \sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda\zeta}\left|x_j(\zeta)-y_j(\zeta)\right|\right\}\tfrac{1}{\lambda^{\alpha_i}}\int_0^{\lambda(t-t_j)}\tfrac{u^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}e^{-u}e^{\lambda\tau}du \\
\leq\ & \tfrac{nk_i}{\lambda^{\alpha_i}}\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda\zeta}\left|x_i(\zeta)-y_i(\zeta)\right|\right\}+\sum_{j=1}^{n}\tfrac{h_je^{\lambda\tau}}{\lambda^{\alpha_i}}\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda\zeta}\left|x_j(\zeta)-y_j(\zeta)\right|\right\} \\
\leq\ & \tfrac{nk_i}{\lambda^{\alpha_i}}d_\lambda(x,y)+\sum_{j=1}^{n}\tfrac{h_je^{\lambda\tau}}{\lambda^{\alpha_i}}d_\lambda(x,y).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n}\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda t}\left|Fx_i(t)-Fy_i(t)\right|\right\} \\
\leq\ & \left(\sum_{i=1}^{n}\tfrac{nk_i}{\lambda^{\alpha_i}}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tfrac{h_je^{\lambda\tau}}{\lambda^{\alpha_i}}\right)d_\lambda(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left\{ e^{-\lambda t} \left| Fx_i(t) - Fy_i(t) \right| \right\} \\
\leq \quad & \left(n\sum_{i=1}^{n} k_i \tau^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} \tau^{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} h_j e^{\lambda\tau} \right) d_\lambda(x,y), \qquad \text{avec } \tau = \tfrac{1}{\lambda} \\
\leq \quad & \left(n\sum_{i=1}^{n} k_i \tau^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} \tau^{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} h_j e \right) d_\lambda(x,y).
\end{aligned}$$

Enfin

$$d_\lambda(Fx, Fy) \leq \sum_{i=1}^{n} \tau^{\alpha_i} \left(nk_i + e\sum_{j=1}^{n} h_j \right) d_\lambda(x,y).$$

Comme $\sum_{i=1}^{n} \tau^{\alpha_i} \left(nk_i + e\sum_{j=1}^{n} h_j \right) < 1$, alors d'après le principe de contraction l'opérateur $F : E \to E$ a un point fixe unique $x = Fx$, qui est l'unique solution du problème (4.1)-(4.2). ■

4.2 Stabilité

Maintenant, on étudie la stabilité de la solution du problème (4.1)-(4.2) par rapport à l'ordre de dérivation et la condition initiale dans le sens de la définition suivante;

Définition 4.2.1 *On dit que la solution x du problème* (4.1)-(4.2) *est stable par rapport à l'ordre de dérivation et la condition initiale si :*
$\forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, $\exists\ \delta > 0$ *(ne dépend pas de ϵ_1 et ϵ_2), telle que*

$$d(\boldsymbol{\alpha}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}) < \epsilon_1 \ \textit{ et } \mathbf{d}\left(\Phi, \bar{\Phi}\right) < \epsilon_2 \Rightarrow d_\lambda(x, \bar{x}) < \delta \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\},$$

où $\bar{x}$ est la solution du problème suivant

$$^{c}D_{0^+}^{\bar{\alpha}_i} \bar{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(t, \bar{x}_i(t), \bar{x}_j(t-\tau_j(t))\right), \ \bar{\alpha}_i \in (0,1), \quad i = \overline{1,n}, \quad t > 0, \tag{4.3}$$

$$\bar{x}(t) = \bar{\Phi}(t) = \left(\bar{\phi}_1(t), ..., \bar{\phi}_n(t)\right), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{4.4}$$

avec

$$d(\boldsymbol{\alpha}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}) = \max_{i=\overline{1,n}} |\alpha_i - \bar{\alpha}_i| \qquad et \ \ \mathbf{d}\left(\Phi, \bar{\Phi}\right) = \sum_{i=1}^{n} \max_{t\in[-\tau,0]} \left|\phi_i(t) - \bar{\phi}_i(t)\right|.$$

Théorème 4.2.1 *Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ du théorème précédent sont vérifiées, et qu'il existe une constante positive M telle que*

$$M = \max_{t\in\mathbb{R}^+} |f_{ij}(t, u, v)|, \ \ i, j = 1, ..., n.$$

Alors pour tout $\eta \in (0, 1)$, la solution du problème (4.1)-(4.2) est stable par rapport à la condition initiale et l'ordre de dérivation dans $[\eta, 1)$.

Preuve. Soient $x(t)$ et $\bar{x}(t)$ deux solutions des problèmes (4.1)-(4.2) et (4.3)-(4.4), avec $\alpha_i, \bar{\alpha}_i \in [\eta, 1)$, $i = \overline{1,n}$, et pour tout $t > 0$ on a

$$\begin{aligned}
x_i(t) - \bar{x}_i(t) &= \phi_i(0) - \bar{\phi}_i(0) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\alpha_i} f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\bar{\alpha}_i} f_{ij}(t, \bar{x}_i(t), \bar{x}_j(t - \tau_j(t))) \\
x_i(t) - \bar{x}_i(t) &= \phi_i(0) - \bar{\phi}_i(0) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\alpha_i} f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\alpha_i} f_{ij}(t, \bar{x}_i(t), \bar{x}_j(t - \tau_j(t))) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\alpha_i} f_{ij}(t, \bar{x}_i(t), \bar{x}_j(t - \tau_j(t))) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\bar{\alpha}_i} f_{ij}(t, \bar{x}_i(t), \bar{x}_j(t - \tau_j(t))) \\
x_i(t) - \bar{x}_i(t) &= \phi_i(0) - \bar{\phi}_i(0) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} I_{0^+}^{\alpha_i} \left\{f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))) - f_{ij}(t, \bar{x}_i(t), \bar{x}_j(t - \tau_j(t)))\right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \left\{I_{0^+}^{\alpha_i} - I_{0^+}^{\bar{\alpha}_i}\right\} f_{ij}(t, \bar{x}_i(t), \bar{x}_j(t - \tau_j(t))).
\end{aligned}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
& |x_i(t) - \bar{x}_i(t)| \\
\leq\ & \left|\phi_i(0) - \bar{\phi}_i(0)\right| \\
+\ & \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} \left|f_{ij}(s, x_i(s), x_j(s-\tau_j(s))) - f_{ij}(s, \bar{x}_i(s), \bar{x}_j(s-\tau_j(s)))\right| ds \\
+\ & \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \left|\tfrac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} - \tfrac{(t-s)^{\bar{\alpha}_i-1}}{\Gamma(\bar{\alpha}_i)}\right| \left|f_{ij}(s, \bar{x}_i(s), \bar{x}_j(s-\tau_j(s)))\right| ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|x_i(t) - \bar{x}_i(t)| \leq\ & \left|\phi_i(0) - \bar{\phi}_i(0)\right| \\
& + \sum_{j=1}^{n} k_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |x_i(s) - \bar{x}_i(s)| \, ds \\
& + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_0^{t_j} \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} \left|\phi_j(s-\tau_j(s)) - \bar{\phi}_j(s-\tau_j(s))\right| ds \\
& + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} |x_j(s-\tau_j(s)) - \bar{x}_j(s-\tau_j(s))| \, ds \\
& + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \left|\frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} - \frac{(t-s)^{\bar{\alpha}_i-1}}{\Gamma(\bar{\alpha}_i)}\right| \left|f_{ij}(s, \bar{x}_i(s), \bar{x}_j(s-\tau_j(s)))\right| ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|x_i(t) - \bar{x}_i(t)| \leq\ & \max_{s\in[-\tau,0]} \left|\phi_i(s) - \bar{\phi}_i(s)\right| \\
& + \sum_{j=1}^{n} \max_{s\in[-\tau,0]} \left|\phi_j(s) - \bar{\phi}_j(s)\right| h_j \int_0^{t_j} \frac{(t-s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} ds \\
& + \sum_{j=1}^{n} k_i \int_0^{t} \frac{(t-s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} |x_i(s) - \bar{x}_i(s)| \, ds \\
& + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} |x_j(s - \tau_j(s)) - \bar{x}_j(s - \tau_j(s))| \, ds \\
& + \sum_{j=1}^{n} \max_{\zeta\in\mathbb{R}^+} |f_{ij}(\zeta, \bar{x}_i(\zeta), \bar{x}_j(\zeta - \tau_j(\zeta)))| \int_0^{t} \left| \frac{(t-s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} - \frac{(t-s)^{\bar{\alpha}_i - 1}}{\Gamma(\bar{\alpha}_i)} \right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|x_i(t) - \bar{x}_i(t)| \leq\ & \max_{s\in[-\tau,0]} \left|\phi_i(s) - \bar{\phi}_i(s)\right| \\
& + \sum_{j=1}^{n} \max_{s\in[-\tau,0]} \left|\phi_j(s) - \bar{\phi}_j(s)\right| h_j \frac{\left[t^{\alpha_i} - (t - t_j)^{\alpha_i}\right]}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \\
& + n k_i \int_0^{t} \frac{(t-s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} |x_i(s) - \bar{x}_i(s)| \, ds \\
& + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} |x_j(s - \tau_j(s)) - \bar{x}_j(s - \tau_j(s))| \, ds \\
& + n M \int_0^{t} \left| \frac{(t-s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} - \frac{(t-s)^{\bar{\alpha}_i - 1}}{\Gamma(\bar{\alpha}_i)} \right| ds.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda t}\left|x_i(t)-\bar{x}_i(t)\right| \leq\ & e^{-\lambda t}\max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_i(s)-\bar{\phi}_i(s)\right| \\
& +e^{-\lambda t}\sum_{j=1}^{n}\max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_j(s)-\bar{\phi}_j(s)\right| h_j\frac{\left[t^{\alpha_i}-(t-t_j)^{\alpha_i}\right]}{\Gamma(\alpha_i+1)} \\
& +nk_i\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}e^{-\lambda(t-s)}e^{-\lambda s}\left|x_i(s)-\bar{x}_i(s)\right| ds \\
& +\sum_{j=1}^{n}h_j\int_{t_j}^{t}\frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}e^{-\lambda(t-r_j(s))}e^{-\lambda r_j(s)}\left|x_j(r_j(s))-\bar{x}_j(r_j(s))\right| d \\
& +e^{-\lambda t}nM\int_0^t\left|\frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}-\frac{(t-s)^{\bar{\alpha}_i-1}}{\Gamma(\bar{\alpha}_i)}\right| ds,
\end{aligned}$$

avec $r_j(s)=s-\tau_j(s)$.

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda t}\left|x_i(t)-\bar{x}_i(t)\right| \leq\ & \max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_i(s)-\bar{\phi}_i(s)\right| \\
& +\sum_{j=1}^{n}\max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_j(s)-\bar{\phi}_j(s)\right|\frac{h_j t_j^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} \\
& +nk_i\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda\zeta}\left|x_i(\zeta)-\bar{x}_i(\zeta)\right|\right\}\frac{1}{\lambda^{\alpha_i}}\int_0^{\lambda t}\frac{u^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}e^{-u}du \\
& +e^{-\lambda t}nM\int_0^t\left|\frac{(t-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}-\frac{(t-s)^{\bar{\alpha}_i-1}}{\Gamma(\bar{\alpha}_i)}\right| ds \\
& +\sum_{j=1}^{n}h_j\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda(r_j(\zeta))}\left|x_j(r_j(s))-\bar{x}_j(r_j(s))\right|\right\} \\
& \times\int_0^{\lambda(t-t_j)}\frac{u^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}e^{-u}e^{-\lambda\tau_j\left(t-\frac{u}{\lambda}\right)}du.
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème des accroissements finis, il existe $\tilde{\alpha}_i$ entre α_i et $\bar{\alpha}_i$, $i=\overline{1,n}$, tel que

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda t}\left|x_i(t)-\bar{x}_i(t)\right| \leq & \max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_i(s)-\bar{\phi}_i(s)\right| \\
& +\sum_{j=1}^{n}\max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_j(s)-\bar{\phi}_j(s)\right|\frac{h_j t_j^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} \\
& +\frac{nk_i}{\lambda^{\alpha_i}}\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda\zeta}\left|x_i(\zeta)-\bar{x}_i(\zeta)\right|\right\} \\
& +\sum_{j=1}^{n}\frac{h_j e^{\lambda\tau}}{\lambda^{\alpha_i}}\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-\lambda\zeta}\left|x_j(\zeta)-\bar{x}_j(\zeta)\right|\right\} \\
& +nMe^{-\lambda t}\int_0^t\left|g'(s)(\tilde{\alpha}_i)\right|ds\left|\alpha_i-\bar{\alpha}_i\right|,
\end{aligned}$$

avec $g(s)(\beta)=\frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ pour $\beta\in[\eta,1)$.

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda t}\left|x_i(t)-\bar{x}_i(t)\right| \leq & \max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_i(s)-\bar{\phi}_i(s)\right| \\
& +\sum_{j=1}^{n}\mathbf{d}\left(\Phi,\ \bar{\Phi}\right)\frac{h_j t_j^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} \\
& +\frac{nk_i}{\lambda^{\alpha_i}}d_\lambda(x,\bar{x})+\sum_{j=1}^{n}\frac{h_j e^{\lambda\tau}}{\lambda^{\alpha_i}}d_\lambda(x,\bar{x}) \\
& +nMe^{-\lambda t}\int_0^t\left\{\frac{\left|\ln(t-s)\right|-\psi(\tilde{\alpha}_i)}{\Gamma(\tilde{\alpha}_i)}(t-s)^{\tilde{\alpha}_i-1}\right\}ds\left|\alpha_i-\bar{\alpha}_i\right|.
\end{aligned}$$

Où ψ est la fonction digamma. Alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sup_{t\in\mathbb{R}^{+}}\left\{e^{-\lambda t}\left|x_{i}\left(t\right)-\bar{x}_{i}\left(t\right)\right|\right\}\\
\leq\; &\sum_{i=1}^{n}\max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_{i}\left(s\right)-\bar{\phi}_{i}\left(s\right)\right|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{d}\left(\Phi,\ \bar{\Phi}\right)\frac{h_{j}t_{j}^{\alpha_{i}}}{\Gamma\left(\alpha_{i}+1\right)}\\
&+\sum_{i=1}^{n}\frac{nk_{i}}{\lambda^{\alpha_{i}}}d_{\lambda}\left(x,\bar{x}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{h_{j}e^{\lambda\tau}}{\lambda^{\alpha_{i}}}d_{\lambda}\left(x,\bar{x}\right)\\
&+nM\sum_{i=1}^{n}\sup_{t\in\mathbb{R}^{+}}e^{-\lambda t}\int_{0}^{t}\left\{\frac{\left|\ln\left(t-s\right)\right|-\psi\left(\tilde{\alpha}_{i}\right)}{\Gamma\left(\tilde{\alpha}_{i}\right)}\left(t-s\right)^{\tilde{\alpha}_{i}-1}\right\}ds\left|\alpha_{i}-\bar{\alpha}_{i}\right|.
\end{aligned}$$

Donc il existe une constante K $\left(K=K\left(\eta\right)\right)$, telle que

$$\begin{aligned}
d_{\lambda}\left(x,\bar{x}\right)\;\leq\;&\mathbf{d}\left(\Phi,\ \bar{\Phi}\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{h_{j}t_{j}^{\alpha_{i}}}{\Gamma\left(\alpha_{i}+1\right)}\mathbf{d}\left(\Phi,\ \bar{\Phi}\right)\\
&+n\sum_{i=1}^{n}\frac{k_{i}}{\lambda^{\alpha_{i}}}d_{\lambda}\left(x,\bar{x}\right)+e^{\lambda\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{h_{j}}{\lambda^{\alpha_{i}}}d_{\lambda}\left(x,\bar{x}\right)\\
&+nM\sum_{i=1}^{n}K\left|\alpha_{i}-\bar{\alpha}_{i}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{\lambda}\left(x,\bar{x}\right)\;\leq\;&\left(1+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{h_{j}t_{j}^{\alpha_{i}}}{\Gamma\left(\alpha_{i}+1\right)}\right)\mathbf{d}\left(\Phi,\ \bar{\Phi}\right)\\
&+\left(n\sum_{i=1}^{n}\frac{k_{i}}{\lambda^{\alpha_{i}}}+e^{\lambda\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{h_{j}}{\lambda^{\alpha_{i}}}\right)d_{\lambda}\left(x,\bar{x}\right)\\
&+n^{2}MKd\left(\boldsymbol{\alpha},\bar{\boldsymbol{\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[1-\sum_{i=1}^{n}\tau^{\alpha_{i}}\left(nk_{i}+e\sum_{j=1}^{n}h_{j}\right)\right]d_{\lambda}\left(x,\bar{x}\right)\\
\leq\;&\left(1+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{h_{j}t_{j}^{\alpha_{i}}}{\Gamma\left(\alpha_{i}+1\right)}\right)\mathbf{d}\left(\Phi,\ \bar{\Phi}\right)+n^{2}MK\ d\left(\boldsymbol{\alpha},\bar{\boldsymbol{\alpha}}\right),
\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{\lambda} = \tau$. Alors

$$\begin{aligned} & \left[1 - \sum_{i=1}^{n} \tau^{\alpha_i} \left(nk_i + e\sum_{j=1}^{n} h_j\right)\right] d_\lambda\left(x, \bar{x}\right) \\ \leq \quad & \max\left[\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{h_j t_j^{\alpha_i}}{\Gamma\left(\alpha_i + 1\right)}\right), n^2 MK\right] \left[\mathbf{d}\left(\Phi,\ \bar{\Phi}\right) + d\left(\boldsymbol{\alpha}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}\right)\right]. \end{aligned}$$

$\forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ et $d\left(\boldsymbol{\alpha}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}\right) < \epsilon_1$, $\mathbf{d}\left(\Phi, \bar{\Phi}\right) < \epsilon_2$, il existe

$$\delta = 2\left[1 - \sum_{i=1}^{n} \tau^{\alpha_i} \left(nk_i + e\sum_{j=1}^{n} h_j\right)\right]^{-1} \max\left[\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{h_j t_j^{\alpha_i}}{\Gamma\left(\alpha_i + 1\right)}\right), n^2 MK\right],$$

tel que $d_\lambda\left(x, \bar{x}\right) \leq \delta \max\left\{\epsilon_1, \epsilon_2\right\}$. Alors, la solution du problème (4.1)-(4.2) est stable par rapport à la condition initiale et l'ordre de la dérivation.

■

Chapitre 5

Conclusion et Perspectives

Dans ce travail de recherche,notre objectif était le traitement d'une équation aux dérivées partielles avec des dérivées temporelles fractionnaires, et principalement l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité pour un système d'équations différentielles non linéaires à multi-ordres fractionnaires avec retards.

D'une part, on a établi un principe du maximum pour une équation aux dérivées partielles fractionnaires appelée équation d'advection-dispersion avec une dérivée fractionnaire de Caputo. Les résultats de ce principe sont ensuite appliqués pour démontrer l'unicité de la solution du problème mixte associé à cette équation. D'autre part, en appliquant le principe de contraction, on a donné des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles non linéaires à multi-ordres fractionnaires avec retards . En plus de l'existence et l'unicité on a établi sous certaines conditions la stabilité de la solution par rapport à la donnée initiale et l'ordre de la dérivation.

Les résultats de cette thèse ont fait l'objet de la publication [30] .

Perspectives

L'étude de la stabilité uniforme de la solution du même système différentiel.

Chapitre 6

Copie de l'article publié

Bibliographie

[1] **B. Baeumer, D.A. Denson, M.M. Meershaert**, *Advection and dispersion in time and space*, Phys .A, 350 (2-4) (2005), 245-262 .

[2] **B. Baeumer, D.A. Denson, M.M. Meershaert, and S.W. Wheatcraft**, *Subordinated advection-dispersion equation for contaminant transport*, Water Resour. Res., 37(6), (2001) 1543-1550.

[3] **D.A. Benson, S.W. Wheatcraft, and M.M.Meerschaert**, *Application of a fractional advection-dispersion equation*, Water Resour.Res., 36(6) (2000b), 1403-1412.

[4] **M. Caputo**, *Elastisità e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna (1969). [in Italian]

[5] **M. Caputo**, *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent*, Part II., Geophys. J. R. Astr. Soc., 13 (1967), 529-539.

[6] **M. Caputo and F. Mainardi**, *Linear models of dissipation in anelastic solids*, Riv. Nuovo Cimento (Ser. II), 1 (1971), 161-198.

[7] **T. Cazenave et A. Haraux**, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires,* (1990) .

[8] **J. Chabrouski and R. Výborný**, *Maximum principle for non-linear degenerate equations of the parabolic type*. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 25, doi : 10.1017/ 00004970270000 5268, (1982), 251-263.

[9] **A.V. Chechkin, R.Gorenflo and I.M. Sokolov** Phys. Rev.E 66046129, (2002).

[10] **Z.-Q.Deng, V.P. Singh, and L. Bengtsson**, *Numerical solution of fractional advection-dispersion equation*, J.Hydraul. Erg, (2004).

[11] **F. Dubois, A.C. Galucio et W. Point**, *Introduction à la dérivation fractionnaire : Théorie et applications*, (2008).

[12] **A.M.A. El-Sayed** and F.M. Gaafar,*Stability of nonlinear non-autonomous fractional order systems with different delays and non-local conditions*, Advances in Difference Equations, 1-9, (2011).

[13] **R. Gorenflo :** *Fractional calculus*, *some numerical methods,* in *: Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (Eds. **A. Carpinteri and F. Mainardi**), Springer Verlag, Wien (1997), 277-290.

[14] **R. Gorenflo and F. Mainardi**, *Fractional calculus : integral and differential equations of fractional order*, in : *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (Eds. **A. Carpinteri and F. Mainardi**), Springer Verlag, Wien and New York (1997), 223-276.

[15] **A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J Trujillo**, *Theory and applications of fractional differential Equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill , Amsterdam, (2006).

[16] **S. Kim, M.L. Kavvas**, *Generalized Fick's law and fractional ADE for pollutant tansport* in a River : *detaild derivation*, J. Hydro. Eng. , 11(1),(2006), 80-83.

[17] **A. Kolmogorov et S. Fomine**, *Elément de la théorie des fonctions et de l'Analys*e *fonctionnelle*. Ed. Mir (1974).

[18] **M.A. Krasnoselskii**, *Positive solutions of operator equations*, Noordhoff, Groningen (1964).

[19] **C. Li, W. Deng**, *Remarks on fractional derivatives,* (2006).

[20] **Yu Luchko**, *Initial-Boundary-value Problems for the generalized Time-Fractional Diffusion equation,* (2009).

[21] **Yu.Luchko and R. Gorenflo**, *An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives.* Acta Mathematica Vi-etnamica 24. (1999), 207-233.

[22] **F. Mainardi**, *Fractional calculus : some basic problems in continuum and statistical mechanics,* in : *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (Eds. **A. Carpinteri and F. Mainardi**), Springer Verlag, Wien (1997), 291-348.

[23] **F. Mainardi, Yu. Luchko, G. Pagnini**, *The fundamental Solution of the Space-Tim*e *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Vol. 4, No. 2, (2001), 153-192.

[24] **B. Maryshev, M. Joelson, D. Lybimova and MC. Néel**, *Non Fickian flux for advection-dispersion with immobile periods*, (2009).

[25] **L. Nisse, A. Bouaziz**, *Existence and stability of the solutions for systems of nonlinear fractional differential equations with deviating arguments.* Advances in Difference Equations, (2014), 2014 :275. doi : 10.1186/1687-1847-2014-275.

[26] **Protter MH and Weinberger**, *Maximum principles in differential Equations* HF (1967).

[27] **B. Rubin**, *Fractional intégrals and potentials*, Harlow :Longman, (1996) .

[28] **W. Rudin**, *Analyse réelle et complexe.* Edition Masson, Paris, (1995).

[29] **S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev**, *Fractional integrals and derivatives : Theory and applications*, Gordon and Breach, New York, (1993).

[30] **R. Sari, L. Nisse**, *On systems of nonlinear functional differential equations of fractional multi-order* , Global Journal of Pure and applied Matematics, ISSN 0973-1768 volume 12, number 4 (2016), 3545-3558.

[31] **R. Schumer, D.A. Benson, M.M Meerschaert and B. Bauemer** Water Resour. Res., 39, (10) 1296, (2003).

[32] **T. Simon**, *Fonctions de Mittag-Leffler et processus de Lévy stables sans saut négative,*(2000).

[33] **Y. Sonntag**, *Topologie et analyse fonctionnelle*, ellipse, (1997).

[34] **M. Weilbeer**, *Efficient Numerical Methods for fractional differential Equations and their Analytical Background*, Ph. D. Univ Braunschweig (2006).

[35] **K. Yosida**, *Functional Analysis*, Springer-verlag, (1980).

[36] **E. Zeidler**, *Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem*, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo (1985).

[37] **Yo. Zhang, D.A. Benson and B. Bauemer** Water Resour-Res. 445w05404, (2008).