

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique

Université Badji Mokhtar  
– Annaba –  
Badji Mokhtar University  
– Annaba –



جامعة باجي مختار  
– عنابة –

Année Universitaire : 2016 / 2017

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
Laboratoire LaPS



**THÈSE**

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
**DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES**

Option : Modélisation Mathématiques – Probabilités et Statistique

*Les approximations dans l'analyse stochastique des  
systèmes de files d'attente avec rappels et multiserveurs*

Présentée par  
Zidani Nesrine

**DIRECTEUR DE THÈSE :** Djellab Natalia    PROF. U.B.M. ANNABA

**Devant le jury**

**PRÉSIDENT:** Chadli Assia    PROF. U.B.M. ANNABA

**EXAMINATRICE:** Seddik Ameer Nacira    PROF. U.B.M. ANNABA

**EXAMINATEUR:** Boualem Mohamed    MCA. U. A. Mira Béjaia

**EXAMINATRICE:** Arrar Nawel Khadidja    MCA. U.B.M ANNABA

**Invité:** Spiteri Pierre    PROF. IRIT, ENSEEIHT, INP  
Toulouse

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modèles avec rappels markoviens</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Modèle général . . . . .	8
1.3 Modèles markoviens . . . . .	8
1.3.1 Modèle $M/M/1$ avec rappels . . . . .	8
1.3.2 Modèles à multiserveurs . . . . .	10
1.4 Notes bibliographiques . . . . .	19
1.5 Conclusion . . . . .	20
<b>2 Approches d'analyse des modèles à multiserveurs avec rappels M/M/C</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	21
2.2 Modèles tronqués . . . . .	22
2.2.1 Description du modèle . . . . .	22
2.2.2 Concept de troncation . . . . .	25
2.2.3 Méthode numérique . . . . .	28
2.3 Modèles tronqués généralisés . . . . .	36
2.3.1 Modèle $\tilde{S}^{(M)}$ . . . . .	36
2.3.2 Modèle $\hat{S}^{(M)}$ . . . . .	37
2.3.3 Modèle processus de quasi-naissance-et-mort . . . . .	39
2.3.4 Analyse du modèle $\tilde{S}^{(M)}$ . . . . .	42
2.3.5 Analyse du modèle $\hat{S}^{(M)}$ . . . . .	44

---

2.4	Problème de convergence . . . . .	48
2.4.1	Convergence de la solution approximative vers la solution exacte . .	48
2.4.2	Estimation d'erreur . . . . .	49
2.5	Approche d'Extrapolation de Valeur . . . . .	52
2.5.1	Processus de Markov Décisionnels . . . . .	52
2.5.2	Ajustement polynomial . . . . .	54
2.5.3	Fonction Revenu . . . . .	57
2.5.4	Effet de l'extrapolation de la valeur dans les équations d'Howard . .	57
2.5.5	Divers . . . . .	60
2.6	Comparaison . . . . .	63
2.7	Conclusion . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Analyse du modèle d'attente M/M/C/K avec rappels</b>	<b>66</b>
3.1	Introduction . . . . .	66
3.2	Description du modèle . . . . .	67
3.3	Condition d'existence d'un régime stationnaire . . . . .	69
3.4	Régime stationnaire . . . . .	74
3.5	Troncature Finie . . . . .	75
3.6	Extrapolation de Valeur . . . . .	80
3.7	Conclusion . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Performance de la méthode EV et du système M/M/C/K avec rappels</b>	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	89
4.2	Comparaison de EV et TF . . . . .	90
4.3	Aspects numériques . . . . .	92
4.3.1	Méthodes de résolution . . . . .	93
4.3.2	Application . . . . .	99
4.4	Etude de la performance du système . . . . .	103
4.5	Conclusion . . . . .	108
	<b>Conclusion générale</b>	<b>109</b>

<b>Annexes</b>	<b>111</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>118</b>

---

# Liste des Figures

1.2.1 Schéma général d'un système de files d'attente avec rappels. . . . .	9
1.3.1 Graphe des transitions du modèle M/M/C. . . . .	12
1.3.2 Graphe des transitions du modèle M/M/2. . . . .	15
2.2.1 Structure de l'espace d'états des modèles avec rappels. . . . .	26
2.2.2 Forme de $U_\epsilon$ . . . . .	27
2.2.3 Forme de $U_\epsilon$ dans le cas de lourdes pertes. . . . .	27
2.2.4 Cas de base et cas asymptotique. . . . .	28
2.6.1 Précision des résultats en fonction du niveau de troncature $M$ . . . . .	64
2.6.2 Précision des résultats en fonction du temps de calcul. . . . .	65
3.2.1 Graphe des transitions du modèle étudié. . . . .	70
4.4.1 Mesures de performance par rapport à $\gamma$ ( $K = 10$ ). . . . .	106
4.4.2 Mesures de performance par rapport à $K - C$ . . . . .	107

---

# Liste des Tableaux

2.1	Définition de la fonction revenu. . . . .	58
2.2	Valeurs minimales du niveau de troncature $M$ ( $\epsilon_{PC} < 10^{-8}$ ). . . . .	63
3.1	Exemple de choix du niveau de troncature. . . . .	80
3.2	Définition de la fonction revenu. . . . .	82
3.3	Choix du niveau de troncature $M$ et du degré $(n - 1)$ de polynôme. . . . .	88
4.1	Comparaison entre TF et EV. . . . .	91
4.2	Probabilité de blocage $P_K$ avec différentes méthodes. . . . .	100
4.3	Nombre moyen de clients en orbite $\overline{N}_o$ avec différentes méthodes. . . . .	103
4.4	$\overline{C}$ avec différentes méthodes. . . . .	104
4.5	Probabilité de blocage $P_K$ pour $\rho = 0.875$ avec différentes méthodes. . . . .	105
4.6	Influence du taux d'effacement $\eta_1$ ( $\theta = 10$ ). . . . .	107

---

# Dédicaces

A ceux qui m'ont tout donné sans rien demander,

Qui m'ont offert tout soutènement toute ma vie, qui n'ont rien préservé pour m'aider,  
qui m'ont appris mes principes, à qui tous les mots du monde n'arriveront jamais à le  
décrire.

A mes chers parents, qui sont toujours là pour moi.

A ma soeur et mon frère à qui je souhaite une réussite dans la vie.

A mon cher époux Nassim pour tout son aide, son soutien et ses encouragements.

A toute ma famille....

A toutes mes amies.

A mon très gentil encadreur pour son assistance, ses orientations et ses conseils.

A tous mes collègues de promotion.

A tous ceux et celles qui me sont chers.

---

# Remerciements

QU'ALLAH soit loué et remercié de m'avoir aidé pour accomplir cet humble travail.

J'ai aussi le devoir d'exprimer ma gratitude et mes sincères remerciements à mon encadreur *Professeur Natalia Djellab*, pour m'avoir confié ce sujet de thèse, pour m'avoir encadré durant ces années avec beaucoup de patience, de disponibilité et de professionnalisme, et pour m'avoir transmis sa passion pour le domaine des systèmes de files d'attente,.... Ce fut pour moi un grand honneur et un réel plaisir de profiter de ses conseils et son soutien.

Je remercie très chaleureusement le Professeur Pierre Spiteri pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire IRIT. Je tiens également à le remercier pour sa disponibilité, la confiance qu'il m'a accordé et pour ses conseils.

Je tiens à exprimer également mes remerciements aux membres de jury qui m'ont fait l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Enfin, mes remerciements sont destinés à toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



## Résumé

**Résumé:** Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude d'un système de files d'attente  $M/M/C/K$  avec abandons exponentiels auquel les clients positifs et négatifs arrivent selon des processus de Poisson. Ce modèle est d'un intérêt pratique: il peut être utilisé pour analyser les performances dans les centres d'appels et les systèmes de contact par courrier électronique. Pour le modèle étudié, nous trouvons des conditions d'ergodicité et aussi une solution approchée en utilisant des méthodes de Troncation Finie et Extrapolation de Valeur. Nous présentons des résultats numériques pour examiner la performance de la méthode d'Extrapolation de Valeur ainsi que la performance du système.

**Mots-clés:** Abandon; Troncature; Condition d'ergodicité; Extrapolation; Arrivées Négatives.

**La Classification Mathématique par Matières 2010 (AMS):** 60K25, 90B22, 68M20.

## Abstract

**Abstract:** In this work, we were interested to the study of M/M/C/K retrial queue with exponential abandonments at which positive and negative customers arrive according to Poisson processes. This model is of practical interest: it can be used for analyzing the performance in call centers and e-mail contact systems. For model under investigation, we find the ergodicity conditions and also the approximate solution by using Finite Truncation and Value Extrapolation methods. We present some numerical results to examine the performance of Value Extrapolation method as well as the system performance.

**Keywords:** Abandonment; Truncation; Ergodicity Condition; Extrapolation; Negative Arrivals.

**2010 Mathematics Subject Classification (AMS):** 60K25, 90B22, 68M20.

## المخلص

في هذا العمل، ركزنا اهتمامنا لدراسة طابور إعادة المحاكاة M/M/C/K مع التخلي الآسي حيث العملاء الايجابيين والسليبين يصلون وفقا لعمليات بواسون. هذا النموذج ذو فائدة عملية يمكن استخدامه لتحليل الأداء في مراكز الاتصال وأنظمة الاتصال بالبريد الالكتروني. بالنسبة للنموذج قيد التحقيق نجد شرط الاستقرار وأيضا الحل التقريبي باستخدام طريقة الاقتران المحددة وطريقة قيمة الاستقرار، كما اننا نقدمنا بعض النتائج العددية لدراسة أداء طريقة قيمة الاستقرار وكذلك أداء النظام.

الكلمات الدالة: التخلي، اقتران، شرط الاستقرار، الوافدين السليبين.

2010 تصنيف موضوع الرياضيات : 60K25, 90B22, 68M20.

---

# Introduction

La théorie des files d'attente constitue une approche pour la modélisation stochastique, l'évaluation des performances et le contrôle des systèmes de production, systèmes informatiques, réseaux de communication,... Elle est la plus apte à fournir une estimation quantitative d'un système [35, 61].

Les origines de la théorie des files d'attente remontent à 1909 à l'époque où A.K. Erlang en a posé les bases dans ses recherches sur le trafic téléphonique. Ses travaux ont par la suite été intégrés à la recherche opérationnelle. Malheureusement, les publications sur la théorie des files d'attente ont adopté un langage de plus en plus mathématique, ce qui a freiné son utilisation. La situation a toutefois changé quand des chercheurs ont commencé à appliquer la théorie des files d'attente à l'évaluation des performances. Pour ce type d'applications, il est apparu que même des modèles relativement simples fournissaient des résultats qui correspondaient de près aux observations réelles. On assistera alors à une évolution rapide de la théorie des files d'attente [79].

Toutefois, la théorie des files d'attente classique offre deux possibilités pour résoudre le conflit qui apparaît lorsqu'un client arrive dans le système et trouve l'espace de service occupé : soit le client quitte le système sans recevoir le service (modèle d'Erlang à demandes refusées), soit il prend place dans une file d'attente (système de files d'attente). Une possibilité alternative est de permettre au client de répéter sa demande de service après une durée de temps aléatoire. Entre deux tentatives successives (rappels), le client en question est en orbite. Un tel système est appelé *système de files avec rappels*. De

nombreuses études sont consacrées aux modèles d'attente avec rappels. Les tentatives de classifier les résultats obtenus pour la période allant jusqu'à 2015 sont présentées dans les articles bibliographiques de Artalejo [6, 10] et Shekhar et al. [75].

Au cours des dernières années, on a constaté un intérêt croissant pour l'étude du phénomène des rappels dans les systèmes de communications. En conséquence, la modélisation des tentatives répétées a fait l'objet de nombreuses recherches portant sur l'influence du phénomène des rappels sur la qualité de service (QoS) et l'analyse de la performance des systèmes de communication réels. Les documents existants incluent des applications aux centres d'appels, aux réseaux mobiles cellulaires ou à radio cognitive, à l'internet, au protocole CSMA pour les réseaux locaux [15, 20, 49, 68, 81, 5]. Ainsi, il existe un besoin pratique d'analyser les systèmes de files d'attente avec rappels et multiserveurs de type M/M/C (en particulier ceux, qui incluent certains phénomènes spécifiques: espace d'attente, abandons). Ces modèles sont caractérisés par l'hétérogénéité spatiale des processus de Markov associés et leurs espaces d'états infinis, dû au phénomène des rappels. En général, les rappels sont régis par la politique des tentatives répétées classique, où chaque client devient une source de demandes répétées de service indépendamment du reste de clients en orbite, la durée inter-rappels suit une loi exponentielle et le taux des rappels total dépend du nombre de clients en orbite. De ce fait, les résultats exacts pour les caractéristiques pertinentes n'ont pas été obtenus à l'exception de quelques cas particuliers [44], [69] et de nombreuses tentatives ont été faites pour développer un certain nombre de méthodes algorithmiques efficaces [9], [11].

Cependant, de nombreux chercheurs recourent à des approximations, qui sont souvent basées sur des modèles tronqués finis [77], des modèles tronqués généralisés ou sur une homogénéisation de l'espace d'états [63]. Dans les deux premiers cas, le processus stochastique hétérogène, décrivant l'état du système et possédant un espace d'états infini, est remplacé par un autre homogène et ayant l'espace d'états fini ou infini mais résoluble. Le troisième type d'approximation consiste à analyser le système de files d'attente comme

un processus de quasi-naissance-et-mort dont les probabilités stationnaires peuvent être obtenues en utilisant une méthode matricielle géométrique [62]. Ces approches fournissent une solution numérique à la distribution stationnaire des chaînes de Markov à temps continu. Une approche alternative a été proposée dans [58] pour calculer les mesures de performance des processus de Markov à espace d'états infini, appelé Extrapolation de Valeur. L'approche en question consiste à étudier un processus stochastique de Markov en tant qu'un processus de Markov décisionnel : on ne considère plus la probabilité d'être dans un certain état, mais on s'intéresse à une nouvelle métrique, appelée *valeur d'état relative*. Le but est de trouver la valeur relative moyenne, représentant une mesure de performance du modèle, en résolvant les équations d'Howard.

Nous nous intéressons aux systèmes de files d'attente avec rappels, plusieurs serveurs, positions d'attente, deux types d'arrivées: clients positifs et ceux négatifs pour la suppression des clients en service, et aussi avec abandons. Les modèles d'attente avec les arrivées négatives, G-queues, ont d'abord été introduits par Gelenbe (1989) [36] pour modéliser les réseaux de neurones. Dans sa version la plus simple, une arrivée négative a pour effet de supprimer un client positif du système selon une stratégie, par exemple: l'arrivée d'un client négatif élimine tous les clients dans le système ou supprime le client en tête de la file d'attente (y compris celui en service), ou supprime le client en fin de la file d'attente. Quelques études détaillées des modèles d'attente avec arrivées négatives sont réalisées dans [7], [37], [18], [71]. Les clients négatifs peuvent être interprétés comme des virus ou des signaux inhibiteurs [72], [82]. Ils peuvent également représenter certains comportements supplémentaires dans les systèmes de communication tels que les pannes, les signaux de destruction ou les pertes d'appel. Par exemple [84]:

- Dans les réseaux informatiques, si un virus entre dans un noeud, un ou plusieurs fichiers peuvent être infectés et le gestionnaire du système peut avoir à faire plusieurs sauvegardes pour récupérer les fichiers infectés.

- Dans un système de ressources multiples avec des demandes de service (clients positifs), les décisions d'annulation de certaines demandes représentent les clients négatifs.
- Dans les réseaux locaux, la communication entre deux utilisateurs est réalisée par un canal qui peut subir une panne lors de la transmission des paquets de données, due à une attaque de pirates ou à certains virus. Par conséquent, le paquet en cours de la transmission sera perdu. Une panne du serveur peut être représentée par l'arrivée d'un client négatif qui entraîne la perte du client en service. Il s'agit du cas lorsque l'arrivée négative supprime uniquement les clients en service.

Dans cette thèse, nous considérons un système de files d'attente  $M/M/C/K$  avec rappels et abandons exponentiels, auquel les clients positifs et négatifs arrivent selon des processus de Poisson. Pour le modèle étudié, nous trouvons les conditions d'ergodicité et aussi la solution approchée pour les caractéristiques de performance essentielles. À cette fin, nous appliquons deux approches alternatives: Troncature Finie et Extrapolation de Valeur. Nous présentons des résultats numériques pour examiner la performance de la méthode d'Extrapolation de Valeur dans le cas du modèle considéré ayant une structure complexe. Nous montrons que la méthode basée sur les outils de la théorie des Processus de Markov Décisionnels est plus appropriée pour la résolution de notre modèle que celle qui donne la solution pour la distribution stationnaire de la chaîne de Markov à temps continu. Nous étudions également la performance du système.

Cette thèse est constituée d'une introduction générale, quatre chapitres, d'une conclusion générale, d'une bibliographie et des Annexes.

Dans le premier chapitre, nous présentons la description du modèle général d'un système de files d'attente avec rappels, en particulier celui  $M/M/C$  avec rappels, puis les solutions exactes proposées dans la littérature pour ces modèles markoviens, et quelques notes bibliographiques sur la résolution exacte des modèles avec rappels et multiserveurs

ainsi que sur la résolution par une approche algorithmique.

Le second chapitre contient l'état de l'art des méthodes d'approximation utilisées par les chercheurs lors des investigations sur les modèles avec rappels et multiserveurs. En effet, nous décrivons Troncature Finie, Troncature Généralisée, modélisation par un processus de quasi-naissance-et-mort, Extrapolation de Valeur; et présentons la comparaison de leur performance en termes de précision et temps de calcul. Ce chapitre contient également une étude bibliographique.

Dans le troisième chapitre, nous réalisons l'analyse stochastique du modèle à l'étude: M/M/C avec rappels, espace d'attente de capacité limité, abandons exponentiels et arrivées négatives. A cet effet, nous donnons une description mathématique du modèle en appuyant sa conception avec un exemple réel, trouvons les conditions d'ergodicité, présentons les étapes d'application des méthodes de résolution approchée : Troncature Finie et Extrapolation de Valeur.

Dans le quatrième chapitre, nous examinons la performance de la méthode Extrapolation de Valeur, en termes de précision, en comparant les résultats numériques fournis par cette méthode avec ceux issus de l'application de Troncature Finie. Vu que l'application de Extrapolation de Valeur conduit à la résolution d'un système d'équation linéaires algébriques, nous discutons les aspects numériques de cette application. Le quatrième chapitre se termine par une étude de l'influence des paramètres du système (dimension de l'espace d'attente, taux des rappels, taux d'abandon, taux des arrivées négatives) sur les mesures de performance du système considéré.

Dans la conclusion générale, nous présentons quelques perspectives de recherche.



Ce travail a permis par la production scientifique suivante :

- **Publication internationale**

- N. Zidani et N. Djellab. On the multiserver retrial queues with negative arrivals. *International Journal of Mathematics in Operational Research*. DOI: 10.1504/IJ-MOR.2018.1005307.

- N. Zidani, P. Spiteri et N. Djellab. Numerical solution for the performance characteristics of the M/M/C/K retrial queue with negative customers and exponential abandonments by using value extrapolation method. *RAIRO Operations Research*, 2017.

- **Communication internationale**

- N. Zidani et N. Djellab. Approximation of multiserver retrial queues by truncation technique. *6<sup>th</sup> Operational Research Practice in Africa Conference*, University of Sciences and Technology Houari Boumediene, 20-22 Avril 2015.

---

# Modèles avec rappels markoviens

## 1.1 Introduction

Les systèmes de files d'attente avec rappels sont caractérisés par la propriété qu'un client qui trouve à son arrivée les serveurs occupés quitte l'espace de service et rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Entre deux rappels successifs, le client est dit "en orbite". Ces modèles d'attente apparaissent dans la modélisation stochastique de plusieurs situations réelles et des réseaux de télécommunications. Par exemple dans la transmission de données, un paquet transmis de la source à la destination peut être retourné, et le processus doit être répété jusqu'à ce que le paquet soit finalement transmis. Les premières tentatives rigoureuses sur les systèmes de files d'attente avec rappels remontent aux travaux de Kosten (1947) [54], Wilkinson (1956) [83], Cohen (1957) [16], et ceci afin d'effectuer la modélisation du service d'abonnés dans un central téléphonique. Les progrès dans ce domaine sont résumés dans [4, 28, 32]...., et dans les monographies de Falin et Templeton (1997) [33] et Artalejo et Gomez-Corral (2008) [11].

## 1.2 Modèle général

Le modèle général d'un système de files d'attente avec répétition de demandes peut être décrit comme suit : le système est composé de  $C \geq 1$  dispositifs de service et de  $m - C$  ( $m \geq C$ ) positions d'attente. Les clients arrivent dans le système selon un processus aléatoire avec une loi de probabilité donnée, et forment un flux de clients primaires. A l'arrivée d'un client, s'il y a un ou plusieurs dispositifs libres, le client sera immédiatement pris en charge. Sinon, s'il y a une position d'attente libre, le client rejoint la file d'attente. Dans le cas contraire, il quitte l'espace de service temporairement avec une probabilité  $H_0$  pour tenter sa chance après une durée de temps aléatoire, ou il quitte le système définitivement avec une probabilité  $1 - H_0$ . Entre ces tentatives, le client est en "orbite" et devient source de clients secondaires. La capacité  $O$  de l'orbite peut être finie ou infinie. Dans le cas où  $O$  est finie et si l'orbite est pleine, le client quitte le système pour toujours. Lorsqu'un client est rappelé de l'orbite, il est traité de la même manière qu'un client primaire avec une probabilité  $H_k$  (s'il s'agit de la  $k^{\text{ème}}$  tentative échouée).

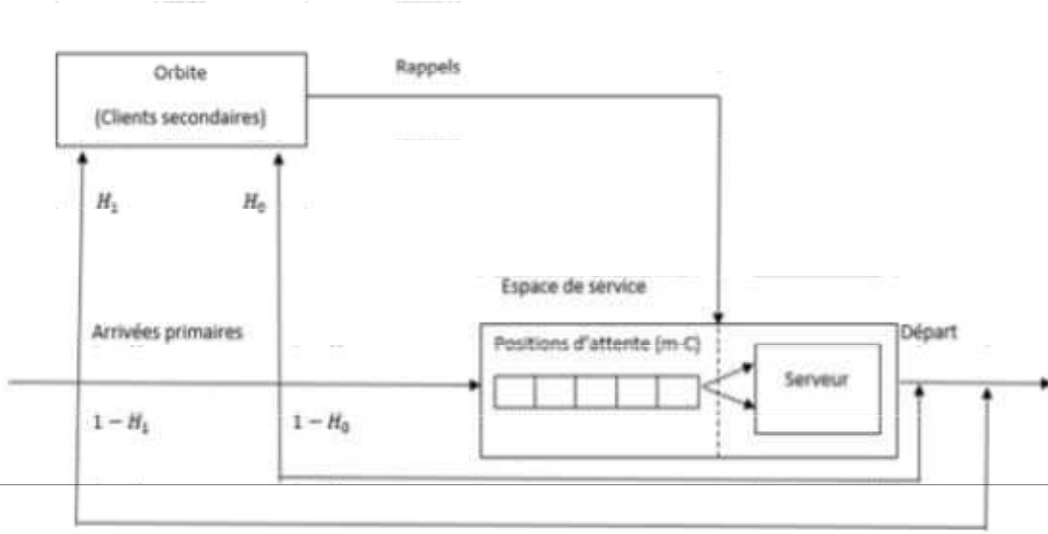
La notation de Kendall est:  $A/B/C/m/O/H$ , où  $A$  et  $B$  décrivent respectivement la distribution du temps inter-arrivées et la distribution du temps de service,  $C$  est le nombre de serveurs identiques et indépendants,  $m - C$  est la capacité de la file d'attente,  $O$  est la capacité de l'orbite,  $H$  est la fonction de persistance  $H = \{H_k, k \geq 0\}$ . Si  $m, O, H$  sont absents dans la notation de Kendall, alors  $m = C, O = \infty, H_k = 1$  pour tout  $k \geq 0$ . La distribution du temps inter-rappels n'est pas indiquée. Le schéma général d'un système de files d'attente avec rappels est présenté dans la figure 1.2.1.

## 1.3 Modèles markoviens

### 1.3.1 Modèle $M/M/1$ avec rappels

On considère un système de files d'attente sans positions d'attente. Le service est assuré par un seul serveur. Les clients primaires arrivent selon un processus de Pois-

Figure 1.2.1 : Schéma général d'un système de files d'attente avec rappels.



son de taux  $\lambda > 0$ . Les durées de service suivent une loi exponentielle de fonction de répartition  $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$ ,  $x \geq 0$  et de moyenne finie  $\frac{1}{\mu}$ . Les temps entre deux rappels consécutifs sont également exponentiels de paramètre  $\theta > 0$  (la fonction de répartition  $T(x) = 1 - e^{-\theta x}$ ,  $x \geq 0$ ). Nous admettons que les durées de service, les durées entre deux rappels consécutifs ainsi qu'entre deux arrivées primaires successives sont mutuellement indépendantes. L'état du système peut être décrit par le processus

$$\{C(t), N_o(t), t \geq 0\}, \quad (1.3.1)$$

où  $C(t)$  est égale à 0 ou 1 selon le fait que le serveur est libre ou non,  $N_o(t)$  est le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ . Supposons que le régime stationnaire existe ( $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ ) [28]. Le processus (1.3.1) est celui de Markov d'espace d'états  $S = \{0, 1\} \times N$ .

Les équations d'équilibre stationnaire sont :

$$(\lambda + j\theta)P_{0j} = \mu P_{1j}; \quad (1.3.2)$$

$$(\lambda + \mu)P_{1j} = \lambda P_{0j} + (j+1)\theta P_{0,j+1} + \lambda P_{1,j-1}. \quad (1.3.3)$$

Ici,  $P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) = i, N_o(t) = j)$ ,  $i = 0, 1$  et  $j \geq 0$ , représentent la distribution stationnaire conjointe de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite. Introduisons

les fonctions génératrices suivantes :

$$P_0(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} Z^j p_{0j};$$

$$P_1(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} Z^j p_{1j}.$$

A l'aide de ces fonctions et à partir des équations (1.3.2) et (1.3.3), on obtient:

$$P_0(Z) = (1 - \rho) \left( \frac{1 - \rho}{1 - Z\rho} \right)^{\frac{\lambda}{\theta}}; \quad (1.3.4)$$

$$P_1(Z) = \rho \left( \frac{1 - \rho}{1 - Z\rho} \right)^{\frac{\lambda}{\theta} + 1}. \quad (1.3.5)$$

Les transformées inverses de (1.3.4) et (1.3.5) nous donnent les formules analytiques explicites [34]:

$$p_{0j} = \frac{\rho}{j! \theta^j} \prod_{k=0}^{j-1} (1 + k\theta) (1 - \rho)^{\frac{\lambda}{\theta} + 1};$$

$$p_{1j} = \frac{\rho^{j+1}}{j! \theta^j} \prod_{k=1}^j (\lambda + k\theta) (1 - \rho)^{\frac{\lambda}{\theta} + 1}.$$

### 1.3.2 Modèles à multiserveurs

Les modèles à multiserveurs attirent beaucoup d'attention parce que la conception d'un système de files d'attente avec rappels est déduite d'importantes applications dans les systèmes de téléphonie [16]. Une étude d'un système d'attente avec rappels peut être considérée comme complète si la distribution stationnaire du processus stochastique en question, ou au moins une dépendance analytique explicite entre les caractéristiques essentielles du système et les paramètres initiaux  $\lambda$ ,  $\theta$ ,  $C$ ,  $\mu$  est établie. A ce jour, seuls quelques résultats peuvent être considérés comme valides pour les modèles avec rappels et multiserveurs, et ceci dans le cas d'un service exponentiel.

Nous considérons un système de files d'attente avec rappels où l'espace de service comprend  $C > 1$  serveurs. Le flux des arrivées primaires est poissonnien de taux  $\lambda > 0$ . Si un client primaire trouve au moins un serveur libre, il commence son service. Sinon, il

entre en orbite. Nous admettons que la durée de service et la durée entre deux rappels consécutifs sont exponentiellement distribuées de moyennes finies, respectivement,  $\frac{1}{\mu}$  et  $\frac{1}{\theta}$ .

Ce modèle a été étudié pour la première fois par Wilkinson (1956) [83]. L'état du système est décrit par le processus stochastique de Markov

$$\{C(t), N_o(t), t \geq 0\}, \quad (1.3.6)$$

où  $C(t)$  représente le nombre de clients dans l'espace de service, et  $N_o(t)$  est le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ . Son espace d'états est donc  $S = \{0, 1, \dots, C\} \times N$ . Les probabilités d'état sont:

$$P_{ij}(t) = P(C(t) = i, N_o(t) = j), \quad (i, j) \in S.$$

Les taux de transition en régime stationnaire sont donnés par:

1. Pour  $0 \leq i \leq C - 1$

$$q_{ij}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i + 1, j) \\ i\mu & \text{si } (k, l) = (i - 1, j) \\ j\theta & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1) \\ -(\lambda + i\mu + j\theta) & \text{si } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases};$$

2. Pour  $i = C$

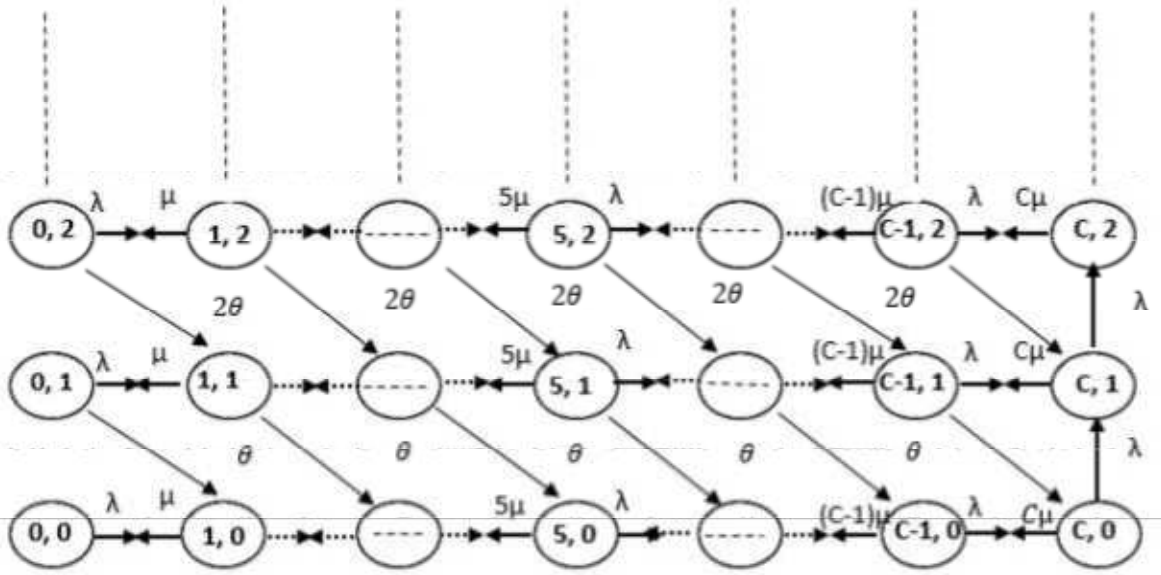
$$q_{Cj}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (C, j + 1) \\ C\mu & \text{si } (k, l) = (C - 1, j) \\ -(\lambda + C\mu) & \text{si } (k, l) = (C, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases};$$

Le graphe des transitions est présenté dans la Figure (1.3.1).

Les caractéristiques importantes de la qualité de service sont:

- probabilité que tous les serveurs sont occupés  $P_C = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) = C)$ ;
- nombre moyen de clients en orbite  $\overline{N}_o = \lim_{t \rightarrow \infty} E[N_o(t)]$ ;

Figure 1.3.1 : Graphe des transitions du modèle M/M/C.



- nombre moyen de serveurs occupés  $\bar{C} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[C(t)]$ .

En utilisant les résultats établis dans [25], la condition suffisante et nécessaire d'existence d'un régime stationnaire du système est  $\lambda < C\mu$ . La distribution stationnaire  $P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$  satisfait le système d'équations de Kolmogorov suivant:

$$(\lambda + i\mu + j\theta)P_{ij} = \lambda P_{i-1,j} + (j+1)\theta P_{i-1,j+1} + (i+1)\mu P_{i+1,j}, \quad (1.3.7)$$

$$0 \leq i \leq C-1 \text{ et } j \geq 0;$$

$$(\lambda + i\mu)P_{ij} = \lambda P_{i,j-1} + (j+1)\theta P_{i-1,j+1} + \lambda P_{i-1,j}, \quad (1.3.8)$$

$$i = C \text{ et } j \geq 0.$$

Pour les fonctions génératrices on a

$$P_i(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} Z^j P_{ij}, \quad 0 \leq i \leq C;$$

ces équations deviennent

$$(\lambda + i\mu)P_i(Z) + \theta ZP'_i(Z) = \lambda P_{i-1}(Z) + \theta P'_{i-1}(Z) + (i+1)\mu P_{i+1}(Z), \quad (1.3.9)$$

$$0 \leq i \leq C-1;$$

$$(\lambda + i\mu)P_i(Z) = \lambda P_{i-1}(Z) + \theta P'_{i-1}(Z) + \lambda z P_i(Z), \quad (1.3.10)$$

$$i = C.$$

Introduisons la fonction génératrice bivariée

$$P(x, Z) = \sum_{i=0}^C x^i P_i(Z).$$

Nous supposons que le taux de service  $\mu = 1$ , donc les équations (1.3.9)-(1.3.10) deviennent

$$\lambda(1-x)P(x, Z) + \theta(Z-x)P'_Z(x, Z) + (x-1)P'_x(x, Z) \quad (1.3.11)$$

$$+ \lambda x^C(x-Z)P_C(Z) + \theta x^C(x-Z)P'_C(Z) = 0.$$

En différenciant l'équation (1.3.11) par rapport à  $Z$ ,  $x$ ,  $xx$ ,  $xZ$ ,  $ZZ$  au point  $x = 1$ ,  $Z = 1$ , on obtient les équations suivantes:

$$\theta \overline{N}_o - \lambda P_C - \theta \overline{N}_C = 0; \quad (1.3.12)$$

$$\lambda + \theta \overline{N}_o - \overline{C} - \lambda P_C - \theta \overline{N}_C = 0;$$

$$\lambda \overline{C} + \theta P''_{xZ} - P''_{xx} - \lambda C P_C - \theta C \overline{N}_C = 0;$$

$$-\lambda \overline{N}_o - \theta P''_{ZZ} + (1+\theta)P''_{xZ} + \lambda \overline{N}_C - \theta C \overline{N}_C - \lambda C P_C + \theta P''_{CZZ} = 0;$$

$$\theta P''_{ZZ} - \lambda \overline{N}_C - \theta P''_{CZZ} = 0.$$

Ici,  $\overline{N}_o = P'_Z(1, 1)$ ,  $P_C = P_C(1)$ ,  $\overline{C} = P'_x(1, 1)$ ,  $\overline{N}_C = \lim_{t \rightarrow \infty} E[N_o(t), C(t) = C] = P'_C(1)$ .

En éliminant de ces équations les variables  $\overline{N}_C$ ,  $P''_{xZ}$ ,  $P''_{ZZ}$ ,  $P''_{CZZ}$  et en tenant compte du fait que  $P''_{xx}(1, 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} (Var[C(t)] + (E[C(t)])^2 - E[C(t)])$ , nous obtenons:

$$\overline{C} = \lambda; \quad (1.3.13)$$

$$\overline{N}_o = \frac{1+\theta}{\theta} \cdot \frac{\lambda - \lim_{t \rightarrow \infty} Var[C(t)]}{C - \lambda}. \quad (1.3.14)$$



L'équation (1.3.14) peut être réécrite sous une forme équivalente, comme suit:

$$\bar{N}_o = \frac{1 + \theta}{\theta} \cdot \frac{\lambda + \lambda^2 - \lim_{t \rightarrow \infty} E[(C(t))^2]}{C - \lambda}. \quad (1.3.15)$$

L'équation (1.3.13) peut être considérée comme une variante de la formule de Little et représente l'égalité du trafic offert et de celui transporté. L'équation (1.3.14) donne une description partielle de la dépendance de la taille moyenne de l'orbite des paramètres du système étudié et réduit le calcul de cette mesure de performance ( $\bar{N}_o$ ) au calcul des caractéristiques du nombre de serveurs occupés, ce qui est un problème plus simple.

De même, les moments supérieurs du nombre de clients en orbite peuvent être exprimés en termes de distribution du nombre de serveurs occupés. Par exemple, le deuxième moment factoriel  $\Phi_2 \equiv E[N_o(t) \cdot (N_o(t) - 1)] = P''_{ZZ}(1, 1)$  est donné par [33]:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{1 + 2\theta}{2\theta^2(C - \lambda)^2} \left\{ -(2 + \theta)(C - \lambda)P'''_{xxx}(1, 1) \right. \\ &+ [\lambda(4 + \theta)(C - \lambda) + 2C(1 + \theta)(C - \lambda - 1)]P''_{xx}(1, 1) \\ &\left. - 2\lambda^2C(1 + \theta)(C - \lambda - 1) - 2\lambda^3(C - \lambda) \right\}. \end{aligned}$$

Une autre information intéressante sur la distribution stationnaire du nombre de serveurs occupés  $P_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) = i)$  peut être obtenue comme suit. Si nous mettons dans les équations (1.3.9) et (1.3.10) la valeur de  $Z$  à 1:

$$\lambda P_i + \theta \bar{N}_i - (i + 1)P_{i+1} = \lambda P_{i-1} + \theta \bar{N}_{i-1} - iP_i, \quad 0 \leq i \leq C - 1;$$

$$\lambda P_{C-1} + \theta \bar{N}_{C-1} - CP_C = 0.$$

Ici,  $\bar{N}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} E[N_o(t); C(t) = i]$ . Les équations précédentes donnent

$$\lambda P_i + \theta \bar{N}_i - (i + 1)P_{i+1} = 0, \quad 0 \leq i \leq C - 1. \quad (1.3.16)$$

Définissons le taux du flux des clients secondaires étant donné que le nombre de serveurs occupés est égal à  $i$  par  $r_i = \frac{\theta \bar{N}_i}{P_i}$ . Alors, l'équation (1.3.16) devient:

$$P_{i+1} = \frac{\lambda + r_i}{i + 1} P_i, \quad 0 \leq i \leq C - 1.$$

Enfin,

$$P_i = \frac{(\lambda + r_{i-1}) \dots (\lambda + r_0)}{i!} P_0, \quad 0 \leq i \leq C. \quad (1.3.17)$$

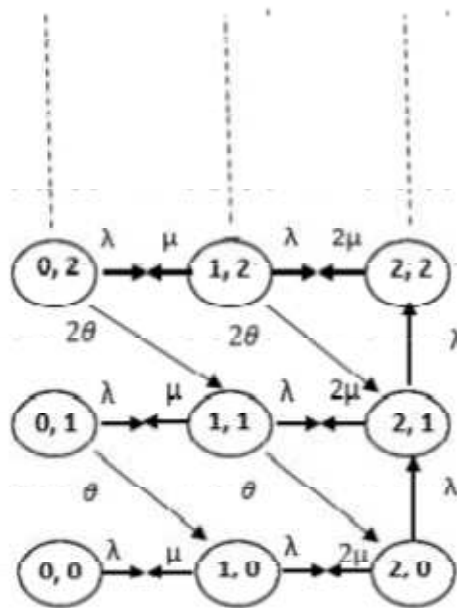
La probabilité  $P_0$  s'obtient à partir de l'équation de normalisation  $\sum_{i=0}^C P_i = 1$ . En effet,

$$P_0 = \left[ \sum_{i=0}^C \frac{(\lambda + r_{i-1}) \dots (\lambda + r_0)}{i!} \right]^{-1}. \quad (1.3.18)$$

Bien que les taux  $r_i$ ,  $0 \leq i \leq C - 1$ , soient inconnus et que les équations (1.3.17)-(1.3.18) ne présentent pas de solution sous une forme "fermée", ces dernières fournissent un aperçu du problème et seront utilisées dans le chapitre 2. En outre, l'équation (1.3.13) permet d'avoir une relation, telle que

$$\sum_{i=0}^C i \frac{(\lambda + r_{i-1}) \dots (\lambda + r_0)}{i!} = \lambda \sum_{i=0}^C \frac{(\lambda + r_{i-1}) \dots (\lambda + r_0)}{i!}. \quad (1.3.19)$$

**Figure 1.3.2 :** Graphe des transitions du modèle M/M/2.



Il n'existe pas de formules analytiques explicites pour  $C > 2$ . Un effort considérable a été fait pour  $C = 2$ . Hanschke (1987) [44] a montré que les fonctions génératrices

partielles des probabilités  $P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$ ,  $0 \leq i \leq 2$  et  $j \geq 0$  peuvent être exprimées en termes de fonctions hypergéométriques généralisées. Supposons que  $\mu = 1$  et  $C = 2$ . A partir du graphe des transitions (Figure 1.3.2), on obtient les équations de Kolmogorov suivantes:

$$(\lambda + j\theta)P_{0j} = P_{1j}; \quad (1.3.20)$$

$$(\lambda + 1 + j\theta)P_{1j} = \lambda P_{0j} + (j + 1)\theta P_{0,j+1} + 2P_{2j}; \quad (1.3.21)$$

$$(\lambda + 2)P_{2j} = \lambda P_{1j} + (j + 1)\theta P_{1,j+1} + \lambda P_{2,j-1}; \quad (1.3.22)$$

ainsi que l'équation de normalisation

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{0j} + \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j} + \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j} = 1. \quad (1.3.23)$$

L'équation (1.3.20) fournit une expression de  $P_{1j}$  en fonction de  $P_{0j}$ . A l'aide de l'équation (1.3.21), on trouve

$$2P_{2j} = [(\lambda + j\theta)^2 + j\theta]P_{0j} - (j + 1)\theta P_{0,j+1}. \quad (1.3.24)$$

En substituant les équations (1.3.20) et (1.3.24) dans (1.3.22), on obtient une relation récursive pour  $P_{0j}$ :

$$\begin{aligned} & \lambda[(\lambda + j\theta)^2 + j\theta]P_{0j} - (j + 1)\theta[2 + 3\lambda + 2(j + 1)\theta]P_{0,j+1} \\ &= \lambda[(\lambda + (j - 1)\theta)^2 + (j - 1)\theta]P_{0,j-1} - j\theta[2 + 3\lambda + 2j\theta]P_{0j}. \end{aligned}$$

D'où

$$\lambda[(\lambda + (j - 1)\theta)^2 + (j - 1)\theta]P_{0,j-1} - j\theta[2 + 3\lambda + 2j\theta]P_{0j} = 0,$$

ou bien

$$P_{0j} = \frac{\lambda}{j\theta} \frac{(\lambda + (j - 1)\theta)^2 + (j - 1)\theta}{[2 + 3\lambda + 2j\theta]} P_{0,j-1},$$

ou encore

$$P_{0j} = \frac{\lambda^j}{j!\theta^j} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(\lambda + k\theta)^2 + k\theta}{2 + 3\lambda + 2\theta + 2k\theta} P_{00}.$$

Par suite, des équations (1.3.20) et (1.3.24), on a

$$P_{1j} = (\lambda + j\theta) \frac{\lambda^j}{j!\theta^j} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(\lambda + k\theta)^2 + k\theta}{2 + 3\lambda + 2\theta + 2k\theta} P_{00};$$

$$P_{2j} = (1 + \lambda + (j + 1)\theta) \frac{\lambda^j}{j!\theta^j} \prod_{k=0}^j \frac{(\lambda + k\theta)^2 + k\theta}{2 + 3\lambda + 2\theta + 2k\theta} P_{00}.$$

De l'équation (1.3.23), on trouve

$$P_{00}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!\theta^k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda + j\theta)^2 + j\theta}{2 + 3\lambda + 2\theta + 2j\theta} \times \left[ 1 + \lambda + j\theta + \frac{(1 + \lambda + (j + 1)\theta)((\lambda + j\theta)^2 + j\theta)}{2 + 3\lambda + 2(j + 1)\theta} \right].$$

Introduisons les fonctions hypergéométriques

$$F(a, b, c; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(a + k)(b + k)}{(c + k)},$$

dont les propriétés sont les suivantes:

$$F'(a, b, c; x) = \frac{ab}{c} F(a + 1, b + 1, c + 1; x);$$

$$F''(a, b, c; x) = \frac{ab}{x(1-x)} \left\{ F(a, b, c; x) - \frac{c - (a + b + 1)x}{c} F(a + 1, b + 1, c + 1; x) \right\};$$

$$F'(a + 1, b + 1, c + 1; x) = \frac{c}{x(1-x)} \left\{ F(a, b, c; x) - \frac{c - (a + b + 1)x}{c} F(a + 1, b + 1, c + 1; x) \right\}.$$

**Théorème 1.3.1** [17] *Pour un système M/M/2 avec rappels, la distribution stationnaire conjointe de l'état du serveur et de la taille de l'orbite est donnée par*

$$P_0(z) = F(a, b, c; \frac{\lambda z}{2}) P_{00};$$

$$P_1(z) = \left\{ \lambda F(a, b, c; \frac{\lambda z}{2}) + \frac{\lambda^3 z}{2 + 3\lambda + 2\theta} F(a + 1, b + 1, c + 1; \frac{\lambda z}{2}) \right\} P_{00};$$

$$P_2(z) = \left\{ \frac{\lambda^2}{2 - \lambda z} F(a, b, c; \frac{\lambda z}{2}) + \frac{\lambda^3 (\lambda z - 1)}{2 + 3\lambda + 2\theta} F(a + 1, b + 1, c + 1; \frac{\lambda z}{2}) \right\} P_{00};$$

où

$$a = \frac{2\lambda + 1 + \sqrt{4\lambda + 1}}{2\theta}; \quad b = \frac{2\lambda + 1 - \sqrt{4\lambda + 1}}{2\theta}; \quad c = \frac{2 + 3\lambda + 2\theta}{2\theta};$$

$$p_{00} = \frac{2 - \lambda}{(2 + \lambda)F(a, b, c; \frac{\lambda}{2}) + \frac{\lambda^3}{2 + 3\lambda + 2\theta} F(a + 1, b + 1, c + 1; \frac{\lambda}{2})}.$$

La distribution stationnaire marginale de la taille de l'orbite est donnée par

$$P(z) = P_{00} \left( 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2 - \lambda z} \right) F \left( a, b, c; \frac{\lambda z}{2} \right) + \frac{\lambda^3}{2 + 3\lambda + 2\theta} \left( z - 1 + \frac{1}{2 - \lambda z} \right) F \left( a + 1, b + 1, c + 1; \frac{\lambda z}{2} \right).$$

**Preuve** Considérons la fonction génératrice

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j P_{0j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^j}{j! \theta^j} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{k^2 \theta^2 + k\theta(2\lambda + 1) + \lambda^2}{2 + 3\lambda + 2\theta + 2k\theta} P_{00} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda z}{2})^j}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{k^2 + k^2 \frac{\lambda+1}{\theta} + \frac{\lambda^2}{\theta^2}}{k + \frac{2+3\lambda+2\theta}{2\theta}} P_{00} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda z}{2})^j}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{\left( k + \frac{2\lambda+1+\sqrt{4\lambda+1}}{2\theta} \right) \left( k + \frac{2\lambda+1-\sqrt{4\lambda+1}}{2\theta} \right)}{k + \frac{2+3\lambda+2\theta}{2\theta}} P_{00}. \end{aligned}$$

A l'aide des valeurs des variables  $a, b$ , et  $c$ , on obtient

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda z}{2})^j}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)} P_{00} \\ &= F(a, b, c; \frac{\lambda z}{2}) P_{00}. \end{aligned}$$

A partir de l'équation (1.3.20), on a

$$P_1(z) = \lambda P_0(z) + \theta z P_0'(z).$$

En exprimant  $P_0(z)$  en termes de la fonction hypergéométrique, on trouve

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \lambda F(a, b, c; \frac{\lambda z}{2}) P_{00} + \theta z \frac{\lambda}{2} F'(a, b, c; \frac{\lambda z}{2}) P_{00} \\ &= \left\{ \lambda F(a, b, c; \frac{\lambda z}{2}) + \theta z \frac{\lambda ab}{2c} F(a + 1, b + 1, c + 1; \frac{\lambda z}{2}) \right\} P_{00}. \end{aligned}$$

En remplaçant  $a, b$  et  $c$  par leurs définitions, on déduit la fonction génératrice  $P_1(z)$ . La fonction génératrice  $P_2(z)$  s'obtient d'une façon analogue à partir de l'équation (1.3.24).

La probabilité  $P_{00}$  peut être trouvée à l'aide de l'équation

$$P_0(1) + P_1(1) + P_2(1) = 1.$$

■

**Théorème 1.3.2** [17] *Pour un système M/M/2 avec rappels,*

$$P_C = \frac{\lambda^2 + (\lambda - 1)g}{2 + \lambda + g};$$

$$\overline{N}_o = \frac{1 + \theta \lambda^3 + (\lambda^2 - 2\lambda + 2)}{\theta (2 - \lambda)(2 + \lambda + g)};$$

où

$$g = \frac{\lambda^3}{2 + 3\lambda + 2\theta} \frac{F(a + 1, b + 1, c + 1; \frac{\lambda}{2})}{F(a, b, c; \frac{\lambda}{2})}.$$

et les variables  $a$ ,  $b$  et  $c$  étant définies dans le théorème (1.3.1).

## 1.4 Notes bibliographiques

Dans le paragraphe précédent, nous avons mentionné que pour les modèles d'attente avec rappels et multiserveurs, les solutions exactes pour la distribution stationnaire de l'état du système et, par suite, pour les caractéristiques de performance sont obtenues uniquement dans quelques cas particuliers. En effet, les résultats détaillés, établis par Hanschke (1987) [44] dans le cas du modèle markovien à deux serveurs, ont été présentés dans (1.3.2). Dans [69], en utilisant l'approche par fraction continue et en supposant que la capacité du système est inférieure ou égale à 4, les auteurs ont obtenu la solution analytique pour la distribution stationnaire conjointe du nombre de clients dans l'espace de service et en orbite, et ceci pour le système M/M/C/K avec abandonnements de Bernoulli et à dépendance d'état.

De nombreuses recherches sur les modèles avec rappels et multiserveurs sont concernées par l'approche algorithmique. Dans [31], l'auteur a développé un algorithme de calcul numérique de la distribution stationnaire conjointe du nombre de clients en orbite et du nombre de serveurs occupés, vu par un observateur à l'extérieur; puis il a obtenu une relation entre cette distribution et la distribution observée par un client arrivant dans le système avec rappels, multiserveurs et nombre de sources de clients potentiels fini. Dans [8], la période d'activité du système M/M/C avec rappels a été étudiée. Les auteurs ont élaboré des schémas récursifs stables pour l'obtention des moments de la distribution de la

période d'activité. Pour le même modèle, un certain nombre de méthodes algorithmiques efficaces permettant le calcul de la distribution stationnaire de l'état du système ainsi que du temps d'attente ont été résumées dans [13]. Un système de files d'attente avec rappels, multiserveurs et processus de point des arrivées (ayant des incréments strictement stationnaires et ergodiques) a été analysé à l'aide de l'approche martingale [1]. A cet effet, la condition d'ergodicité a été établie, le comportement des distributions limites de la taille du système (lorsque le taux des rappels tend vers infini) a été étudié, et la convergence de ces distributions vers celles d'un système à multiserveurs ordinaire (sans rappels) correspondant a été prouvée. Pour un modèle ayant une grande capacité d'attente, un algorithme numériquement stable et permettant d'obtenir les caractéristiques de performance a été élaboré dans [19].

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu sur les systèmes de files d'attente avec rappels et service exponentiel. Vu que l'analyse stochastique classique des modèles en question présente de grandes difficultés analytiques (de ce fait nous observons l'absence des formules explicites et des procédures récursives pour calculer la distribution stationnaire du processus stochastique décrivant l'état du système M/M/C avec rappels ( $C \geq 2$ )), nous optons pour l'implémentation des approximations traitables et précises numériquement. Ceci est l'objet du prochain chapitre.

---

# Approches d'analyse des modèles à multiserveurs avec rappels M/M/C

## 2.1 Introduction

L'une des plus importantes caractéristiques des systèmes avec rappels et multi-serveurs est l'hétérogénéité spatiale des chaînes de Markov associées et l'espace d'états infini dû au phénomène des rappels. Ceci conduit à l'absence de formules analytiques explicites pour les caractéristiques probabilistes des modèles en question. La seule méthode pour obtenir des données numériques précises consiste à résoudre les équations de Kolmogorov (1.3.7) et (1.3.8) numériquement. Mais dès que ce système d'équations est infini, il ne peut pas être résolu directement même sur ordinateur. Les transformations, qui réduisent ces équations à une solution d'un petit problème fini, dans le cas général ne sont pas disponibles. C'est pourquoi, nous nous adressons aux approches d'approximation.

Dans ce chapitre, nous présentons les approches d'obtention des solutions, rencontrées dans la littérature, pour les modèles avec rappels et multi-serveurs.



## 2.2 Modèles tronqués

L'approche de troncation finie de l'espace d'états est celle la plus connue. Introduite par Wilkinson [83], elle consiste à remplacer l'espace d'états infini par un autre fini, de telle manière que la distribution stationnaire de l'état du système puisse être obtenue. Autrement dit, le système de files d'attente avec rappels et multi-serveurs initial  $S$ , où la capacité de l'orbite est illimitée, est remplacé par un système similaire  $S^{(M)}$ , où le nombre de clients en orbite est limité par une constante  $M$  suffisamment large. Cependant, l'implémentation d'un tel schéma peut conduire à prendre en considération un grand nombre d'états ayant des probabilités négligeables. A l'aide de la méthodologie proposée par Stepanov (1999) [77], cet inconvénient pourrait être atténué en explorant toutes les directions dans l'espace d'états considéré où les probabilités d'état diminuent puis en déterminant les bornes de troncation. Ceci nous donne la possibilité de prévoir l'erreur relative donnée des estimations des mesures de performance [89].

### 2.2.1 Description du modèle

Supposons que la taille de l'orbite est bornée par une constante  $M$  (choisie de manière appropriée). De ce fait, le nouveau processus  $\{C^{(M)}(t), N_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$  est de Markov et possède l'espace d'états  $S^{(M)} = \{0, 1, \dots, C\} \times \{0, 1, \dots, M\}$ . Comme l'espace d'états est fini, le régime stationnaire existe toujours. Les taux de transitions deviennent:

1. Si  $0 \leq i \leq C - 1, 0 \leq j \leq M$

$$q_{ij}^{(M)}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i + 1, j) \\ i\mu & \text{si } (k, l) = (i - 1, j) \\ j\theta & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1) \quad ; \\ -(\lambda + i\mu + j\theta) & \text{si } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Si  $i = C$ ,  $0 \leq j \leq M - 1$

$$q_{Cj}^{(M)}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (C, j + 1) \\ C\mu & \text{si } (k, l) = (C - 1, j) \\ -(\lambda + C\mu) & \text{si } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

3. Si  $i = C$ ,  $j = M$

$$q_{CM}^{(M)}(k, l) = \begin{cases} C\mu & \text{si } (k, l) = (C - 1, M) \\ -C\mu & \text{si } (k, l) = (C, M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

La distribution stationnaire  $P_{ij}^{(M)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C^{(M)}(t) = i, N_o^{(M)}(t) = j)$  satisfait le système d'équations suivant [33]:

$$(\lambda + i\mu + j\theta)P_{ij}^{(M)} = \lambda P_{i-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta P_{i-1,j+1}^{(M)} + (i+1)\mu P_{i+1,j}^{(M)}, \quad (2.2.1)$$

$$0 \leq i \leq C - 1 \text{ et } 0 \leq j \leq M - 1;$$

$$(\lambda + i\mu + M\theta)P_{iM}^{(M)} = \lambda P_{i-1,M}^{(M)} + (i+1)\mu P_{i+1,M}^{(M)}, \quad (2.2.2)$$

$$0 \leq i \leq C - 1 \text{ et } j = M;$$

$$(\lambda + C\mu)P_{ij}^{(M)} = \lambda P_{C-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta P_{C-1,j+1}^{(M)} + \lambda P_{C,j-1}^{(M)}, \quad (2.2.3)$$

$$i = C \text{ et } 0 \leq j \leq M - 1;$$

$$C\mu P_{C,M}^{(M)} = \lambda P_{C-1,M}^{(M)} + \lambda P_{C,M-1}^{(M)}, \quad (2.2.4)$$

$$i = C \text{ et } j = M;$$

ainsi que l'équation de normalisation:

$$\sum_{i=0}^C \sum_{j=0}^M P_{ij}^{(M)} = 1. \quad (2.2.5)$$

Pour les fonctions génératrices

$$P_i^{(M)}(Z) = \sum_{j=0}^M Z^j P_{ij}^{(M)}, \quad 0 \leq i \leq C,$$

les équations (2.2.1)-(2.2.4) deviennent:

$$(\lambda + i\mu)P_i^{(M)}(Z) + \theta Z \frac{dP_i^{(M)}(Z)}{dZ} = \lambda P_{i-1}^{(M)}(Z) + \theta \frac{P_{i-1}^{(M)}(Z)}{dZ} + P_{i+1}^{(M)}(Z), \quad (2.2.6)$$

$$0 \leq i \leq C - 1;$$

$$(\lambda + i\mu)P_i^{(M)}(Z) - \lambda Z^M P_{iM}^{(M)} = \lambda P_{i-1}^{(M)}(Z) + \theta \frac{dP_{i-1}^{(M)}(Z)}{dZ} + \lambda Z P_i^{(M)}(Z) - \lambda Z^{M+1} P_{iM}^{(M)}(Z),$$

$$i = C. \quad (2.2.7)$$

Introduisons maintenant la fonction génératrice bivariée

$$P^{(M)}(x, Z) = \sum_{i=0}^C x^i P_i^{(M)}(Z).$$

Nous supposons toujours que le taux de service  $\mu = 1$ . Alors les équations (2.2.6)-(2.2.7) deviennent

$$\lambda(1-x)P^{(M)}(x, Z) + \theta(Z-x) \frac{\partial P^{(M)}(x, Z)}{\partial Z} + (x-1) \frac{\partial P^{(M)}(x, Z)}{\partial x}$$

$$+ \lambda x^C (x-Z) P_C^{(M)}(Z) + \theta x^C (x-Z) \frac{dP_C^{(M)}(Z)}{dZ} + \lambda Z^M x^C (Z-1) P_{CM}^{(M)} = 0.$$

En différenciant cette équation par rapport à  $Z$ ,  $x$ ,  $xx$ ,  $xZ$ ,  $ZZ$  au point  $x = 1$ ,  $Z = 1$ ; on obtient les équations suivantes:

$$\theta \bar{N}_o^{(M)} - \lambda P_C^{(M)} - \theta \bar{N}_C^{(M)} + \lambda P_{CM}^{(M)} = 0;$$

$$\lambda + \theta \bar{N}_o^{(M)} - \bar{C}^{(M)} - \lambda P_C^{(M)} - \theta \bar{N}_C^{(M)} = 0;$$

$$\theta \frac{\partial^2 P^{(M)}(1, 1)}{\partial Z^2} - \lambda \bar{N}_C^{(M)} - \theta \frac{d^2 P_C^{(M)}(1)}{dZ^2} + \lambda M P_{CM}^{(M)} = 0;$$

$$-\lambda \bar{N}_o^{(M)} - \theta \frac{\partial^2 P^{(M)}(1, 1)}{\partial Z^2} + (1 + \theta) \frac{\partial^2 P^{(M)}(1, 1)}{\partial x \partial Z}$$

$$+ \lambda \bar{N}_C^{(M)} - \theta C \bar{N}_C^{(M)} - \lambda C P_C^{(M)} + \theta \frac{d^2 P_C^{(M)}(1)}{dZ^2} + \lambda C P_{CM}^{(M)} = 0;$$

$$\lambda \bar{C}^{(M)} + \theta \frac{\partial^2 P^{(M)}(1, 1)}{\partial x \partial Z} - \frac{\partial^2 P^{(M)}(1, 1)}{\partial x^2} - \lambda C P_C^{(M)} = \theta C \bar{N}_C^{(M)}.$$

Dans ces équations,

$$\bar{N}_o^{(M)} = \lim_{t \rightarrow \infty} E [N_o^{(M)}(t)] = \frac{\partial P^{(M)}(1, 1)}{\partial Z},$$

$$P_C^{(M)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) = C) = P_C^{(M)}(1),$$

$$\overline{C}^{(M)} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[C(t)] = \frac{\partial P^{(M)}(1, 1)}{\partial x},$$

$$\overline{N}_C^{(M)} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[N_o^{(M)}(t), C(t) = C] = \frac{dP_C^{(M)}(1)}{dZ}.$$

En appliquant le même calcul que dans le paragraphe 1.3.2, nous obtenons

$$\overline{C}^{(M)} = \lambda - \lambda P_{CM}^{(M)}, \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} \overline{N}_o^{(M)} &= \frac{1 + \theta}{\theta} \cdot \frac{\lambda + \lambda^2 - \lim_{t \rightarrow \infty} E[(C^{(M)}(t))^2]}{C - \lambda} \\ &\quad - \frac{\lambda}{\theta} \cdot \frac{(C + 1 + \lambda)(1 + \theta) + M\theta}{C - \lambda} P_{CM}^{(M)}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

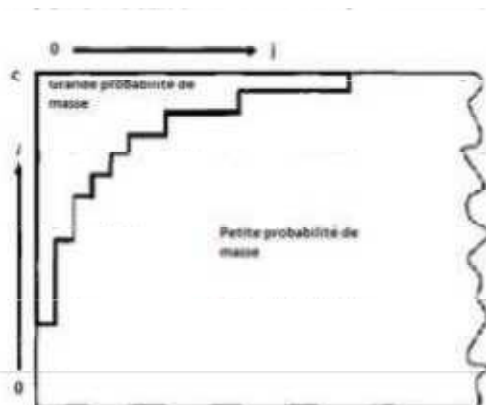
## 2.2.2 Concept de troncation

### Espace d'états tronqué

Pour trouver les mesures de performance, on doit calculer les valeurs des probabilités stationnaires  $P_{ij}^{(M)}$ . On peut aisément deviner que presque dans tous les cas intéressants, les probabilités  $P_{ij}^{(M)}$  diminuent fortement quand  $i$  diminue avec  $j$  fixé ou quand  $j$  croit avec  $i$  fixé. Cette propriété reflète la caractéristique claire du modèle étudié: la probabilité d'avoir un grand nombre de clients en orbite et plusieurs serveurs libres doit être très petite. Cette propriété détermine la distribution de la probabilité de masse dans l'espace d'états utilisé  $S$  (voir Figure 2.2.1).

On définit l'espace d'états tronqué  $S^{(M)}$  comme un sous ensemble arbitraire de  $S$  avec l'exception de  $S$  lui-même,  $S^{(M)} \subset S$ . La limite  $P_{ij}$  de l'espace d'états tronqué va être définie comme le sous ensemble de  $S^{(M)}$  dans lequel  $r(t)$  ( qui est un processus de Markov tel que  $r(t) = P(C^{(M)}(t) = i, N_o^{(M)}(t) = j)$  [77]) peut quitter  $S^{(M)}$  en une seule transition. Pour illustrer ce fait, il est naturel de considérer une classe spéciale des espaces d'états tronqués  $U_\epsilon$  qui peut être définie comme un ensemble des états  $(i, j) \in S$  satisfaisant la condition  $P_{ij}^{(M)} \geq \epsilon$ . L'analyse numérique montre que  $U_\epsilon$  est fortement dépendant des valeurs des paramètres d'entrée. Comme il a été dit précédemment, presque

Figure 2.2.1 : Structure de l'espace d'états des modèles avec rappels.



dans tous les cas intéressants, la forme de  $U_\epsilon$  a la structure présentée dans la Figure 2.2.1.

Les résultats de quatre cas asymptotiques sont présentés dans les Figures 2.2.2 et 2.2.3. La Figure 2.2.2(a) montre une grande valeur du nombre de serveurs  $C$ . La Figure 2.2.2(b) donne une petite valeur d'intensité des rappels  $\theta$ . La Figure 2.2.3(a) montre une forte perte dans le cas de clients absolument persistants, quand  $\lambda$  est proche de  $C$ . La Figure 2.2.3(b) montre une forte perte dans le cas où  $\lambda \rightarrow \infty$ . Avec la diminution de  $\epsilon$ , on obtient l'ensemble de cinq principaux types d'espaces d'états tronqués montrés dans les Figures 2.2.1-2.2.3. En se basant sur une étude numérique extensive présentée par partie dans les Figures 2.2.1-2.2.3 [77], toutes les formes des espaces d'états tronqués peuvent être réduites en deux principaux types qui sont montrés dans la Figure 2.2.4(a) (cas de base) et la Figure 2.2.4.(b) (cas asymptotique). Les flèches montrent comment le processus étudié peut se déplacer en dehors de l'espace d'états tronqué. Dans le cas de base, la définition formelle de l'espace d'états tronqué  $S^{(M)}$  est donnée comme suit:  $(i, j) \in S^{(M)}$ ,  $L(j) \leq i \leq C$ ,  $0 \leq j \leq M$ . Ici,  $L(j)$  est une fonction entière non décroissante définie sur  $0, 1, \dots, M$ . Dans le cas asymptotique les formes de l'espace d'états tronqué qui sont montrées dans les Figures 2.2.2(b) et 2.2.3(b) vont être approximées par l'espace d'états tronqué  $S^{(M)}$  de la forme rectangulaire définie comme suit:  $(i, j) \in S^{(M)}$ ,  $0 \leq i \leq C$ ,  $j = M_1, M_1 + 1, \dots, M_2$  (voir Figure 2.2.4(b)).

Figure 2.2.2 : Forme de  $U_\epsilon$ .

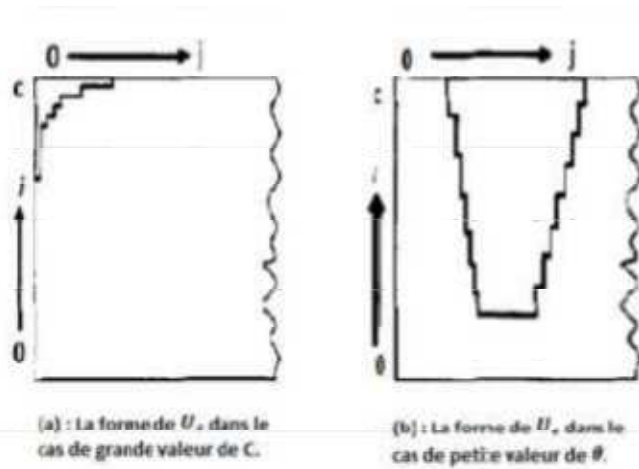
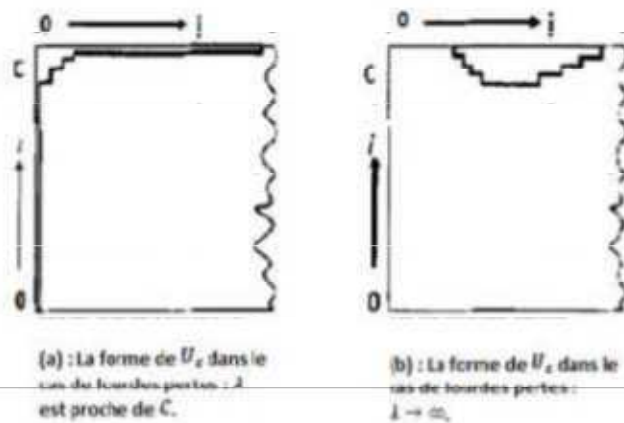


Figure 2.2.3 : Forme de  $U_\epsilon$  dans le cas de lourdes pertes.

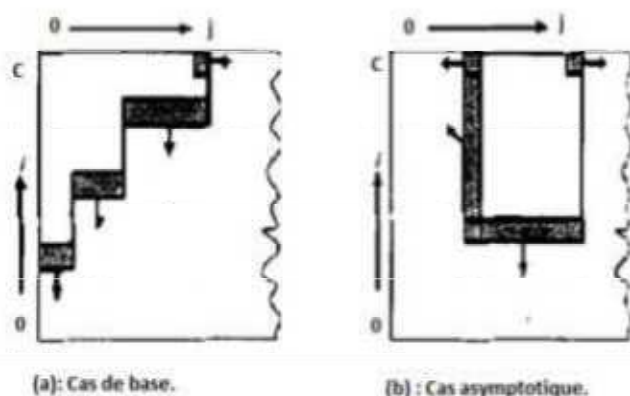


### Étapes de troncation

Les étapes principales dans la réalisation de l'approche proposée sont les suivantes:

1. Après la résolution du système d'équations d'état, il est nécessaire de trouver les limites de l'espace d'états tronqué qui fournissent l'erreur de l'estimation des mesures de performance spécifiée.

Figure 2.2.4 : Cas de base et cas asymptotique.



2. Pour utiliser uniquement l'espace d'états tronqué, on doit construire un processus aléatoire auxiliaire dont les mesures de performance estiment les mesures de performance correspondantes du modèle initial.
3. Après la fin de calcul et l'estimation des mesures de performance, on doit trouver l'erreur causée par l'utilisation de l'espace d'états tronqué. Si elle dépasse la valeur spécifiée, revoir la méthode de la reconstruction de l'espace d'états utilisé et aller à l'étape 1 [77].

### 2.2.3 Méthode numérique

Pour obtenir une précision correcte de la solution dans le cas d'un trafic fort ou intensité de rappels faible, la valeur  $M$  doit être vraiment large (environ centaine). Si le nombre de serveurs est aussi large, alors le nombre d'inconnues peut atteindre quelques centaines de milliers et, ainsi l'application de la méthode de troncation rencontre des difficultés considérables. Donc il est important pour les modèles essentiels de bien simplifier les calculs. Comment ceci peut être réalisée? Une idée est due à Wilkinson [83]: on introduit les nouvelles inconnues  $r_{ij}^{(M)} = \frac{P_{ij}^{(M)}}{P_{0M}^{(M)}}$ . Si on peut trouver  $r_{ij}^{(M)}$ , alors on peut calculer  $P_{ij}^{(M)}$ :

$$P_{ij}^{(M)} = \frac{r_{ij}^{(M)}}{\sum_{i=0}^C \sum_{j=0}^M r_{ij}^{(M)}}. \quad (2.2.10)$$

## 2.2. Modèles tronqués

---

Les variables  $r_{ij}^{(M)}$  satisfont l'ensemble d'équations suivant obtenu à partir des équations (2.2.1)-(2.2.5) pour les probabilités  $P_{ij}^{(M)}$  [88]:

$$r_{0M}^{(M)} = 1; \quad (2.2.11)$$

$$(\lambda + i\mu + j\theta)r_{ij}^{(M)} = \lambda r_{i-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta r_{i-1,j+1}^{(M)} + (i+1)\mu r_{i+1,j}^{(M)}, \quad (2.2.12)$$

$$0 \leq i \leq C-1, \quad 0 \leq j \leq M-1;$$

$$(\lambda + i\mu + M\theta)r_{iM}^{(M)} = \lambda r_{i-1,M}^{(M)} + (i+1)\mu r_{i+1,M}^{(M)}, \quad (2.2.13)$$

$$0 \leq i \leq C-1, \quad j = M;$$

$$(\lambda + C\mu)r_{Cj}^{(M)} = \lambda r_{C-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta r_{C-1,j+1}^{(M)} + \lambda r_{C,j-1}^{(M)}, \quad (2.2.14)$$

$$i = C, \quad 0 \leq j \leq M-1;$$

$$C\mu r_{CM}^{(M)} = \lambda r_{C-1,M}^{(M)} + \lambda r_{C,M-1}^{(M)}, \quad (2.2.15)$$

$$i = C, \quad j = M.$$

Calculons les variables  $r_{ij}^{(M)}$  par groupe, chacun de taille  $C+1$ . Au début, on calcule  $r_{0M}^{(M)}, \dots, r_{CM}^{(M)}$ , ensuite  $r_{0,M-1}^{(M)}, \dots, r_{C,M-1}^{(M)}$  et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve  $r_{00}^{(M)}, \dots, r_{C0}^{(M)}$ .

1. Pour  $j = M$ .

(a) Pour trouver le groupe  $r_{0M}^{(M)}, \dots, r_{CM}^{(M)}$ , réécrire l'équation (2.2.13) comme suit:

$$r_{i+1,M}^{(M)} = \frac{(\lambda + i\mu + M\theta)r_{iM}^{(M)} - \lambda r_{i-1,M}^{(M)}}{(i+1)\mu}, \quad 0 \leq i \leq C-1,$$

ce qui est équivalent à

$$r_{i,M}^{(M)} = \frac{(\lambda + (i-1)\mu + M\theta)r_{i-1,M}^{(M)} - \lambda r_{i-2,M}^{(M)}}{i\mu}, \quad 1 \leq i \leq C.$$

D'après (2.2.11)  $r_{0M}^{(M)} = 1$ . De ce fait, il est possible de calculer récursivement les variables  $r_{1M}^{(M)}, \dots, r_{CM}^{(M)}$ .

2. Pour  $j = j-1$ . Calculons les variables  $r_{0j}^{(M)}, \dots, r_{Cj}^{(M)}$ .



- (a) La dernière variable,  $r_{Cj}^{(M)}$ , peut être trouvée à partir de l'équation (2.2.15) (si  $j = M - 1$ ):

$$r_{C,M-1}^{(M)} = \frac{C\mu r_{C,M}^{(M)} - \lambda r_{C-1,M}^{(M)}}{\lambda}, \quad (2.2.16)$$

où à partir de l'équation (2.2.14) avec  $j$  remplacé par  $j + 1$  (si  $j < M - 1$ ):

$$r_{Cj}^{(M)} = \frac{(\lambda + C\mu)r_{C,j+1}^{(M)} - \lambda r_{C-1,j+1}^{(M)} - (j+2)\theta r_{C-1,j+2}^{(M)}}{\lambda}. \quad (2.2.17)$$

- (b) Pour trouver les variables  $r_{0j}^{(M)}, \dots, r_{C-1,j}^{(M)}$ , nous utilisons l'équation (2.2.12) pour  $i = 0, \dots, C - 1$ . Cet ensemble d'équations a la forme:

$$\alpha_i x_{i-1} + \beta_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = \delta_i, \quad 0 \leq i \leq C - 1, \quad (2.2.18)$$

où

$$x_i = r_{ij}^{(M)},$$

$$\alpha_i = -\lambda,$$

$$\beta_i = \lambda + i\mu + j\theta,$$

$$\gamma_i = -(i+1)\mu,$$

$$\delta_i = (j+1)\theta r_{i-1,j+1}^{(M)},$$

et les valeurs

$$x_{-1} = 0, \quad x_C = r_{Cj}^{(M)}.$$

sont connues.

Ces équations, qui sont des équations aux différences, produisent des solutions numériques de façon identique au procédé utilisé pour résoudre numériquement les équations différentielles de second ordre. L'algorithme le plus efficace pour leur résolution peut être trouvé dans plusieurs livres sur les méthodes numériques (voir, par exemple [40]). D'après cet algorithme, on calcule en premier lieu les variables  $B_i, D_i, 0 \leq i \leq C - 1$ , par des formules récursives

$$B_0 = \beta_0, \quad D_0 = \delta_0,$$

$$B_i = \beta_i - \frac{\alpha_i \gamma_{i-1}}{B_{i-1}}, \quad D_i = \delta_i - \frac{\alpha_i D_{i-1}}{B_{i-1}}, \quad 1 \leq i \leq C-1,$$

puis, à partir de l'équation

$$B_i x_i + \gamma_i x_{i+1} = D_i, \quad 0 \leq i \leq C-1,$$

on calcule récursivement (dans l'ordre inverse) les inconnues  $x_{C-1}, \dots, x_0$ .

Dans le cas présent, nous avons la procédure suivante:

- Calculer les variables  $B_{ij}, D_{ij}, 0 \leq i \leq C-1$ , à l'aide des équations

$$B_{0j} = \lambda + j\theta,$$

$$B_{ij} = \lambda + i\mu + j\theta - \frac{\lambda i}{B_{i-1,j}}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq C-1,$$

$$D_{0j} = 0, \tag{2.2.19}$$

$$D_{ij} = (j+1)\theta r_{i-1,j+1}^{(M)} + \frac{\lambda D_{i-1,j}}{B_{i-1,j}}, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq C-1.$$

- Puis calculer récursivement  $r_{ij}^{(M)}, 0 \leq i \leq C-1$ , (dans l'ordre inverse, commencer par  $r_{Cj}^{(M)}$  connu à partir de l'étape 2.(a) à l'aide de l'équation

$$r_{ij}^{(M)} = \frac{D_{ij} + (i+1)\mu r_{i+1,j}^{(M)}}{B_{ij}}, \quad i = C-1, C-2, \dots, 1, 0.$$

- (c) La répétition de l'étape 2 tant que  $j \geq 0$  permet d'obtenir toutes les variables  $r_{ij}^{(M)}$  (ce qui est fait, successivement pour  $j = M-2, M-3, \dots, 0$ ).

Puisque  $P_{ij}^{(M)} = r_{ij}^{(M)} \cdot P_{0M}^{(M)}$ , alors on aura:

$$P_{0M}^{(M)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^C \sum_{j=0}^M r_{ij}^{(M)}}.$$

A présent, on peut calculer les probabilités  $P_{ij}^{(M)} = r_{ij}^{(M)} \cdot P_{0M}^{(M)}$  et les principales caractéristiques probabilistes du système tronqué  $S^{(M)}$  [87]:

- La probabilité de blocage

$$P_C^{(M)} = \sum_{j=0}^M r_{Cj}^{(M)} \cdot P_{0M}^{(M)};$$

- Le nombre moyen de serveurs occupés

$$\overline{C}^{(M)} = \sum_{i=0}^C \sum_{j=0}^M i r_{ij}^{(M)} \cdot P_{0M}^{(M)};$$

- Le nombre moyen de clients en orbite

$$\overline{N}_o^{(M)} = \sum_{i=0}^C \sum_{j=0}^M j r_{ij}^{(M)} \cdot P_{0M}^{(M)}.$$

Le nombre moyen de clients en orbite peut être aussi calculé à l'aide de la formule suivante:

$$\overline{N}_o^{(M)} = \frac{1 + \theta}{\theta} \cdot \frac{\lambda + \lambda^2 - \lim_{t \rightarrow \infty} E[(C^{(M)}(t))^2]}{C - \lambda} - \frac{\lambda}{\theta} \cdot \frac{(C + 1 + \lambda)(1 + \theta) + M\theta}{C - \lambda} P_{CM}^{(M)},$$

où

$$\overline{C}^{(M)} = \sum_{i=0}^C \sum_{j=0}^M i^2 r_{ij}^{(M)} \cdot P_{0M}^{(M)}.$$

Pour éviter la soustraction dans les équations (2.2.19), on introduit de nouvelles variables  $b_{ij} = B_{ij} - (\lambda + j\theta)$ . Alors les équations récursives (2.2.19) deviennent:

$$b_{0j} = 0,$$

$$b_{ij} = i\mu \cdot \frac{j\theta + b_{i-1,j}}{\lambda + j\theta + b_{i-1,j}}, \quad 1 \leq i \leq C - 1,$$

$$D_{0j} = 0,$$

$$D_{ij} = (j + 1)\theta r_{i-1,j+1}^{(M)} + \frac{\lambda D_{i-1,j}}{\lambda + j\theta + b_{i-1,j}}, \quad 1 \leq i \leq C - 1.$$

Par conséquent, les inconnues  $r_{ij}^{(M)}$  doivent être calculées à partir des relations

$$r_{ij}^{(M)} = \frac{D_{ij} + (i + 1)\mu r_{i+1,j}^{(M)}}{\lambda + j\theta + b_{ij}}, \quad i = C - 1, C - 2, \dots, 1, 0.$$

Pour la même raison, il peut être utile de remplacer les équations (2.2.16)-(2.2.17) par des équations qui ne contiennent pas des soustractions. Dans ce but, on fait la somme des équations de Kolmogorov (2.2.1)-(2.2.4) sur  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, C$ ). On aura donc

$$\lambda P_{Cj}^{(M)} - (j + 1)\theta \sum_{i=0}^{C-1} P_{i,j+1}^{(M)} = \lambda P_{C,j-1}^{(M)} - j\theta \sum_{i=0}^{C-1} P_{ij}^{(M)}, \quad 0 \leq j \leq M - 1;$$

$$\lambda P_{C,M-1}^{(M)} - M\theta \sum_{i=0}^{C-1} P_{iM}^{(M)} = 0.$$

Donc

$$\lambda P_{Cj}^{(M)} - (j+1)\theta \sum_{i=0}^{C-1} P_{i,j+1}^{(M)} = 0, \quad 0 \leq j \leq M-1. \quad (2.2.20)$$

Enfin,

$$\lambda r_{Cj}^{(M)} = (j+1)\theta \sum_{i=0}^{C-1} r_{i,j+1}^{(M)}, \quad 0 \leq j \leq M-1. \quad (2.2.21)$$

Cette relation peut être utilisée au lieu de (2.2.16) et (2.2.17) pour calculer  $r_{Cj}^{(M)}$  à l'aide des variables connues  $r_{i,j+1}^{(M)}$  (voir l'étape précédente).

Dans le but d'approximer le système initial dans le cas d'un taux de rappels faible, la limite de troncation  $M$  doit être assez grande. Si le nombre de serveurs  $C$  est également grand, le nombre d'inconnues  $r_{ij}^{(M)}$  peut être de plusieurs centaines de milliers. Donc, leur stockage dans la mémoire d'ordinateur peut être problématique. Pour résoudre ce problème notons que pour le calcul du rang courant  $r_{ij}^{(M)}$ ,  $0 \leq i \leq C$ , on a besoin seulement du rang précédent  $r_{i,j+1}^{(M)}$ ,  $0 \leq i \leq C$ , (ainsi que la valeur  $r_{C-1,j+2}^{(M)}$  dans le but de calculer  $r_{Cj}^{(M)}$ , si l'équation (2.2.17) est utilisée au lieu de l'équation (2.2.21)). Par conséquent, on peut stocker dans la mémoire d'ordinateur seulement deux rangs d'inconnus  $r_{ij}^{(M)}$ , "le courant":  $r_{ij}^{(M)}$ ,  $0 \leq i \leq C$ , et "le précédent":  $r_{i,j+1}^{(M)}$ ,  $0 \leq i \leq C$ .

Les sommes qui sont nécessaires pour le calcul de  $P_{0M}^{(M)}$ ,  $P_C^{(M)}$ ,  $\overline{N}_o^{(M)}$  (ainsi que n'importe quelle autre caractéristique) doivent être calculées successivement après le calcul de la nouvelle variable  $r_{ij}^{(M)}$ . Quand le rang  $r_{ij}^{(M)}$ ,  $0 \leq i \leq C$ , est calculé, il devient "précédent" et le rang  $r_{i,j+1}^{(M)}$ ,  $0 \leq i \leq C$ , devient non utile. L'utilisation de cette approche nécessite  $2(C+1)$  cellules de la mémoire d'ordinateur indépendamment de la valeur de  $M$  (au lieu de  $(M+1)(C+1)$  cellules utilisées pour une approche directe).

L'utilisation du système tronqué  $S^{(M)}$  soulève les questions suivantes:

Est ce que les caractéristiques stationnaires d'un système tronqué convergent quand  $M \rightarrow \infty$  vers les caractéristiques stationnaires correspondantes au système original ? Si la réponse à cette question est affirmative, qu'elle est l'erreur de cette approximation ? Une réponse affirmative à la première question dans le cas du modèle principal a été donnée par Cohen [16], et ceci à l'aide des formules explicites pour  $P_{ij}^{(M)}$ . Sa preuve a été purement analytique. En outre, son extension pour des modèles plus compliqués n'est pas claire. Pour le modèle avec clients non persistants, où il est supposé qu'un client quitte le système définitivement après l'échec d'une tentative primaire, Falin [27] a obtenu la solution en utilisant la propriété de monotonie des modèles tronqués. En effet, les ordres stochastiques sont maintenant un domaine de recherche bien établi, qui est toujours en développement intensif et qui offre plusieurs problèmes ouverts. Ils mènent à des méthodes d'approximation robustes et fournissent des bornes dans des situations où les modèles stochastiques réels sont trop complexes pour un traitement rigoureux [51].

**Définition 2.2.1** [78] *On dit que la variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F$ , est stochastiquement inférieure à la variable aléatoire  $Y$  de fonction de répartition  $G$ , et on note  $F \leq_{st} G$ , lorsque*

$$F(x) \geq G(x), \forall x \in R.$$

*On écrit aussi  $X \leq_{st} Y$ .*

*Dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes prenant des valeurs sur l'ensemble des entiers relatifs  $Z$ , si nous notons par  $P_i^{(1)} = P\{X = i\}$  et  $P_i^{(2)} = P\{Y = i\}$  pour  $i \in Z$ , alors*

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(1)} \geq \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(2)}, \quad i \in Z,$$

*ce qui est équivalent à:*

$$\sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(2)}, \quad i \in Z.$$

**Théorème 2.2.1** [33] *Si*

$$\{C^{(M)}(0), N_o^{(M)}(0)\} \leq_{st} \{C^{(M+1)}(0), N_o^{(M+1)}(0)\}, \quad (2.2.22)$$

alors pour tout  $t \geq 0$ , on a:

$$\{C^{(M)}(t), N_o^{(M)}(t)\} \leq_{st} \{C^{(M+1)}(t), N_o^{(M+1)}(t)\}. \quad (2.2.23)$$

En particulier, pour les distributions stationnaires correspondantes, on aura:

$$\{P_{ij}^{(M)}\} \leq_{st} \{P_{ij}^{(M+1)}\}.$$

**Théorème 2.2.2** [33] Si

$$\{C^{(M)}(0), N_o^{(M)}(0)\} \leq_{st} \{C(0), N_o(0)\},$$

alors pour tout  $t \geq 0$ , on a:

$$\{C^{(M)}(t), N_o^{(M)}(t)\} \leq_{st} \{C(t), N_o(t)\},$$

En particulier, pour les distributions stationnaires correspondantes, on aura:

$$\{P_{ij}^{(M)}\} \leq_{st} \{P_{ij}\}.$$

Un résultat similaire a été établi par Greenberg [43]. Falin [29, 30] a étudié ce problème dans le contexte plus général d'approximation par des processus de migration. Dans le cas de clients impatient (ou clients nonpersistants) Falin [25, 29] a donné également une solution pour les modèles non markoviens. Le résultat est basé sur la théorie de renouvellement et n'est pas lié à un modèle d'attente spécifique. Des tentatives pour répondre à la deuxième question ont été faites depuis longtemps, commençant par Wilkinson [83], qui a évité le problème en supposant que la variable  $M$  doit être choisie de telle façon que la probabilité de perte complète  $P_{CM}^{(M)}$  dans le système tronqué est égale à la probabilité  $1 - H_0$  qu'un client ne fait aucune tentative supplémentaire après l'échec d'une tentative primaire. Cette condition est une recommandation anormale car dans le modèle initial, les clients sont supposés absolument persistants. Cohen [16] a fait une tentative pour résoudre ce problème par des calculs numériques et a trouvé quelques propriétés de dépendance de l'erreur d'approximation avec les paramètres du modèle. Toutefois, sa recherche était brève et il n'a pas donné aucune recommandation concernant le choix du seuil de troncation  $M$ .

## 2.3 Modèles tronqués généralisés

Le schéma récursif de la troncation finie est efficace lors du calcul des probabilités stationnaires. Cependant, aux niveaux élevés de la congestion et du point de vue de calcul, cette troncation directe est très exigeante dû au fait que le niveau de troncation devient très élevé. Pour pallier à cette situation, les approches basées sur les modèles tronqués généralisés sont proposées dans la littérature. Leur idée est la suivante: remplacer le processus stochastique décrivant l'état du système, qui est hétérogène (dû au phénomène des rappels) et possède un espace d'états infini, par un autre homogène et ayant l'espace d'états également infini mais résoluble [33].

### 2.3.1 Modèle $\tilde{S}^{(M)}$

On considère le système  $\tilde{S}^{(M)}$  qui diffère du modèle principal par l'intensité de répétition qui devient égale à l'infini quand le nombre de clients en orbite excède un niveau  $M$  [26]. Le processus  $\{\tilde{C}^{(M)}(t), \tilde{N}_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$ , où  $\tilde{C}^{(M)}(t)$  est le nombre de serveurs occupés et  $\tilde{N}_o^{(M)}(t)$  est le nombre de clients en orbite dans ce nouveau système "tronqué", possède l'espace d'états  $\tilde{S}^{(M)} = \{0, 1, \dots, C\} \times \{0, 1, \dots, M\} \cup \{C\} \times Z_+$ . Les taux de transition en régime stationnaire sont donnés par:

1. Si  $0 \leq i \leq C - 1, 0 \leq j \leq M$

$$q_{ij}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i + 1, j) \\ i\mu & \text{si } (k, l) = (i - 1, j) \\ j\theta & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1) \quad ; \\ -(\lambda + i\mu + j\theta) & \text{si } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Si  $i = C, 0 \leq j \leq M$

$$q_{Cj}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (C, j + 1) \\ C\mu & \text{si } (k, l) = (C - 1, j) \quad ; \\ -(\lambda + C\mu) & \text{si } (k, l) = (C, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Si  $i = C, j \geq M + 1$

$$q_{Cj}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (C, j + 1) \\ C\mu & \text{si } (k, l) = (C, j - 1) \\ -(\lambda + C\mu) & \text{si } (k, l) = (C, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $\lambda < C\mu$  alors la distribution stationnaire  $\tilde{P}_{ij}^{(M)}$  du processus existe et, comme il a été démontré par Falin [26], cette distribution stationnaire est liée à la distribution stationnaire  $P_{ij}^{(M)}$  du processus  $\{C^{(M)}(t), N_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$  associé au modèle de Wilkinson comme suit:

$$\tilde{P}_{ij}^{(M)} = \frac{P_{ij}^{(M)}}{\left(1 + \frac{\lambda}{C\mu - \lambda} P_{CM}^{(M)}\right)}, \text{ si } 0 \leq i \leq C, 0 \leq j \leq M;$$

$$\tilde{P}_{Cj}^{(M)} = \left(\frac{\lambda}{C\mu}\right)^{j-M} P_{CM}^{(M)}, \text{ si } i = C, j \geq M.$$

### 2.3.2 Modèle $\hat{S}^{(M)}$

Ce nouveau type d'approximation est définie de la manière suivante: supposons que quand le nombre de clients en orbite dépasse un niveau  $M$ , alors seulement  $M + 1$  parmi eux sont acceptés pour représenter des rappels. Notons ce modèle par  $\hat{S}^{(M)}$ .

Le processus  $\{\hat{C}^{(M)}(t), \hat{N}_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$ , où  $\hat{C}^{(M)}(t)$  est le nombre de serveurs occupés et  $\hat{N}_o^{(M)}(t)$  est le nombre de clients en orbite dans ce nouveau système tronqué, est un processus markovien avec l'espace d'états  $\hat{S}^{(M)} = \{0, 1, \dots, C\} \times Z_+$ . Les taux de transition en régime stationnaire sont donnés par:

1. Si  $0 \leq i \leq C - 1, 0 \leq j \leq M$

$$q_{ij}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i + 1, j) \\ i\mu & \text{si } (k, l) = (i - 1, j) \\ j\theta & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1) \\ -(\lambda + i\mu + j\theta) & \text{si } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$



2. Si  $i = C, 0 \leq j \leq M$

$$q_{Cj}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (C, j + 1) \\ C\mu & \text{si } (k, l) = (C - 1, j) \\ -(\lambda + C\mu) & \text{si } (k, l) = (C, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

3. Si  $0 \leq i \leq C - 1, j \geq M + 1$

$$q_{ij}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i + 1, j) \\ i\mu & \text{si } (k, l) = (i - 1, j) \\ (M + 1)\theta & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1) \\ -(\lambda + i\mu + (M + 1)\theta) & \text{si } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

4. Si  $i = C, j \geq M + 1$

$$q_{Cj}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (C, j + 1) \\ C\mu & \text{si } (k, l) = (C - 1, j) \\ -(\lambda + C\mu) & \text{si } (k, l) = (C, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Supposons que le taux des rappels  $\theta$  est une fonction du nombre total de clients en orbite:

$\theta = \theta_j$ . Alors

1. Le cas  $\theta_j \equiv \theta$  correspond au modèle principal  $S$ ;

2. Le cas

$$\theta_j = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 \leq j \leq M \\ \infty & \text{si } j \geq M + 1 \end{cases}$$

correspond au premier modèle tronqué généralisé  $\tilde{S}^{(M)}$ ;

3. Le cas

$$\theta_j = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 \leq j \leq M \\ \frac{(M+1)\theta}{j} & \text{si } j \geq M + 1 \end{cases}$$

correspond au deuxième modèle tronqué généralisé  $\hat{S}^{(M)}$ .

### 2.3.3 Modèle processus de quasi-naissance-et-mort

Une caractéristique importante des deux modèles tronqués généralisés est que le processus correspondant  $\{C(t), N_o(t), t \geq 0\}$  possède la propriété d'une homogénéité spatiale limitée par rapport à la seconde coordonnée, dans le sens où pour  $j > M$  les taux de transition d'un point  $(i, j)$  à un point  $(k, l)$  de l'espace d'états dépendent de  $j$  et  $l$  seulement par  $l - j$ . Ces chaînes sont bien étudiées dans une monographie de Neuts (1981) [62]. Nous rappelons les principales définitions et résultats de cette théorie.

Soit  $\zeta_t = (x_t, y_t)$  une chaîne de Markov à temps continu avec

$$S = \{(0, 0), (1, 0), \dots, (C_0, 0)\} \cup \{0, 1, \dots, C\} \times \{1, 2, \dots\}$$

comme l'espace d'états. Dénotons par  $q_{(i,j)(k,l)}$  le taux de transition du point  $(i, j) \in S$  au point  $(k, l) \in S$  et par  $Q_{jl} = (q_{(i,j)(k,l)})$  les matrices correspondantes. La matrice  $Q_{00}$  est une matrice de dimension  $(C_0 + 1) \times (C_0 + 1)$ , les matrices  $Q_{j0}$  pour  $j \geq 1$  sont des matrices de dimension  $(C + 1) \times (C_0 + 1)$ , les matrices  $Q_{0l}$  pour  $l \geq 1$  sont des matrices de dimension  $(C_0 + 1) \times (C + 1)$ , les matrices  $Q_{jl}$  pour  $j, l \geq 1$  sont des matrices de dimension  $(C + 1) \times (C + 1)$ . Nous supposons que  $Q_{jl} = 0$ , si  $|j - l| > 1$ . Cela signifie que la deuxième coordonnée du processus  $\zeta_t$  ne peut changer que de  $\pm 1$ ; dans la plupart des applications pratiques, cette hypothèse est valable.

La chaîne  $\zeta_t$  est dite homogène sur un espace limité, si les taux  $q_{(i,j)(k,l)}$  dépendent de  $j$  et  $l$  à travers  $l - j$ , probablement à l'exception de  $j, l \leq 1$ ,

$$q_{(i,j)(k,l)} = q_{ik}^{(l-j)}, \text{ si } j \text{ ou } l > 1.$$

Dénotons les matrices  $(q_{i,k}^{(g)})_{0 \leq i, k \leq C}$  de dimension  $(C + 1) \times (C + 1)$  par  $Q_g$ ,  $g = -1, 0, +1$ . En réalisant la partition de l'espace d'état  $S$  de la manière suivante  $S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots$ , où  $S_0 = \{(0, 0), (1, 0), \dots, (C_0, 0)\}$  et  $S_j = \{(0, j), (1, j), \dots, (C, j)\}$  pour  $j \geq 1$ , nous pouvons

écrire le générateur infinitésimal de la chaîne  $\zeta_t$  comme suit:

$$\begin{bmatrix} Q_{00} & Q_{01} & O & O & O & O & \cdots \\ Q_{10} & Q_{11} & Q_1 & O & O & O & \cdots \\ O & Q_{-1} & Q_0 & Q_1 & O & O & \cdots \\ O & O & Q_{-1} & Q_0 & Q_1 & O & \cdots \\ O & O & O & Q_{-1} & Q_0 & Q_1 & \cdots \\ O & O & O & O & Q_{-1} & Q_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (2.3.1)$$

où  $O$  est la matrice avec tous les éléments égaux à zéro. Une telle chaîne est également connue comme un processus de quasi-naissance-et-mort (quasi-birth-and-death process, QBD).

Soit

$$Q = Q_{-1} + Q_0 + Q_{+1} = (q_{ik})_{0 \leq i, k \leq C},$$

où

$$q_{ik} = q_{ik}^{(-1)} + q_{ik}^{(0)} + q_{ik}^{(+1)}.$$

Évidemment  $q_{ik} \geq 0$  pour  $i \neq k$  et  $\sum_{k=0}^C q_{ik} = 0$ . Ainsi, la matrice  $Q$  peut être considérée comme le générateur infinitésimal d'une chaîne de Markov à temps continu avec  $\{0, 1, \dots, C\}$  comme l'espace d'états. On dit que cette chaîne est une chaîne induite. Nous supposons qu'elle est irréductible et désignons par  $\pi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, C$ , sa distribution stationnaire.

Désignons par  $d_i = \sum_{k=0}^C (q_{ik}^{(+1)} - q_{ik}^{(-1)})$  le taux moyen d'accroissement de la deuxième coordonnée de la chaîne  $\zeta_t$  lorsque l'état initial est  $(i, j) \in S$  avec  $j \geq 2$ . Il est bien connu que la chaîne est ergodique si et seulement si la moyenne des accroissements moyens  $\sum_{i=0}^C \pi_i d_i$  est négative, auquel cas la distribution stationnaire  $P_{ij}$  de la chaîne  $\zeta_t$  peut être calculée comme suit:

La distribution  $P_{ij}$  peut être présentée comme  $(p_0, p_1, \dots)$ , où

$$p_0 = (P_{00}, \dots, P_{C_00})$$

et

$$p_j = (P_{0j}, \dots, P_{Cj}) \text{ pour } j \geq 1.$$

De ce fait, pour  $j \geq 1$

$$p_j = p_1 \cdot R^{j-1},$$

où la matrice  $R$  de dimension  $(C+1) \times (C+1)$  représente la solution non négative unique avec un rayon spectral inférieur à 1 de l'équation matricielle

$$R^2 Q_{-1} + R Q_0 + Q_{+1} = O. \quad (2.3.2)$$

Les vecteurs  $p_0, p_1$  peuvent être trouvés comme une solution de l'ensemble fini d'équations linéaires suivantes:

$$p_0 Q_{00} + p_1 Q_{10} = 0,$$

$$p_0 Q_{01} + p_1 (Q_{11} + R Q_{-1}) = 0,$$

satisfaisant à la condition de normalisation

$$p_0 \cdot e_0 + p_1 (I - R)^{-1} \cdot e = 1, \quad (2.3.3)$$

où  $I$  est la matrice d'identité de dimension  $(C+1) \times (C+1)$ ,  $e_0$  et  $e$  sont des vecteurs colonnes de  $R^{C_0+1}$  et  $R^{C+1}$  respectivement avec tous les éléments égaux à 1.

Ainsi, les équations de Kolmogorov pour les probabilités  $P_{ij}$ , qui correspondent aux états  $(i, j) \in S_0$ , sont maintenues sans changement, tandis que dans les équations, qui correspondent aux états  $(i, j) \in S_1$ , les probabilités des états de  $S_2$  sont remplacées selon la relation  $p_2 = p_1 \cdot R$ .

La matrice  $R$ , qui joue le rôle clé dans l'analyse, peut être calculée efficacement comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k$ , où la séquence  $R_k$  est donnée par la formule récursive suivante:

$$R_{k+1} = -(Q_{+1} + R_k^2 Q_{-1}) Q_0^{-1} \quad (2.3.4)$$

avec la condition initiale

$$R_0 = O.$$

### 2.3.4 Analyse du modèle $\tilde{S}^{(M)}$

Considérons comme les états initiaux  $C_0$  les états  $(i, j)$  avec  $0 \leq i \leq C, j \leq M - 1$  et  $0 \leq i \leq C - 1, j = M$ , disposés comme suit:

$$(0, 0), (1, 0), \dots, (C, 0); \dots; (0, M), (1, M), \dots, (C - 1, M),$$

et organisons les états restants de la manière suivante:  $(C, M), (C, M + 1), \dots$

Alors le générateur infinitésimal du processus  $\{\tilde{C}^{(M)}(t), \tilde{N}_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$ , peut être écrit comme suit:

$$\begin{bmatrix} Q_{00} & (0, \dots, 0, \lambda)^T & 0 & 0 & \dots \\ (0, \dots, 0, C\mu) & -(C\mu + \lambda) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & C\mu & -(C\mu + \lambda) & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & C\mu & -(C\mu + \lambda) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

L'application de la théorie générale des chaînes de Markov avec le vecteur invariant géométrique matriciel modifié conduit à la procédure ci-dessous (en fait, tous les résultats ultérieurs peuvent être facilement obtenus directement à partir des équations de Kolmogorov pour la distribution stationnaire du processus  $\{\tilde{C}^{(M)}(t), \tilde{N}_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$ ).

1. La chaîne induite a l'état unique  $C$  et donc sa distribution stationnaire est  $\pi_C = 1$ .
2. Les matrices  $Q_{-1}, Q_0, Q_1$  sont les matrices  $1 \times 1$ , c'est-à-dire simplement des nombres réels:

$$Q_{-1} = C\mu, \quad Q_0 = -(C\mu + \lambda), \quad Q_1 = \lambda.$$

Donc l'accroissement moyen  $d_C = \lambda - C\mu$ . Ainsi la moyenne des accroissements moyens  $\sum d_i \pi_i = \lambda - C\mu$ , de sorte que la condition  $\lambda < C\mu$  est nécessaire et suffisante pour l'ergodicité du processus  $\{\tilde{C}^{(M)}(t), \tilde{N}_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$ .

3. La matrice  $R$  est une matrice  $1 \times 1$ , c'est-à-dire un nombre réel, satisfaisant l'équation:

$$R^2.C\mu - R.(C\mu + \lambda) + \lambda = 0.$$

Cette équation a deux racines: 1 et  $\frac{\lambda}{C\mu}$ . La seconde racine est inférieure à 1 et donc  $R = \frac{\lambda}{C\mu}$ . Ainsi, pour  $j \geq M$

$$\tilde{P}_{Cj}^{(M)} = \tilde{P}_{CM}^{(M)} \cdot \left( \frac{\lambda}{C\mu} \right)^{j-M}. \quad (2.3.5)$$

4. Par conséquent, pour les probabilités  $\tilde{P}_{ij}^{(M)}$ ,  $0 \leq i \leq C$ ,  $0 \leq j \leq M$  les équations suivantes ont lieu:

$$(\lambda + i\mu + j\theta)\tilde{P}_{ij}^{(M)} = \lambda\tilde{P}_{i-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta\tilde{P}_{i-1,j+1}^{(M)} + (i+1)\mu\tilde{P}_{i+1,j}^{(M)}, \quad (2.3.6)$$

$$0 \leq i \leq C-1, \quad 0 \leq j \leq M-1;$$

$$(\lambda + C\mu)\tilde{P}_{Cj}^{(M)} = \lambda\tilde{P}_{C-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta\tilde{P}_{C-1,j+1}^{(M)} + \lambda\tilde{P}_{C,j-1}^{(M)}, \quad (2.3.7)$$

$$0 \leq j \leq M-1;$$

$$(\lambda + i\mu + M\theta)\tilde{P}_{iM}^{(M)} = \lambda\tilde{P}_{i-1,M}^{(M)} + (i+1)\mu\tilde{P}_{i+1,M}^{(M)}, \quad (2.3.8)$$

$$0 \leq i \leq C-1;$$

$$C\mu\tilde{P}_{CM}^{(M)} = \lambda\tilde{P}_{C-1,M}^{(M)} + \lambda\tilde{P}_{C,M-1}^{(M)}, \quad (2.3.9)$$

avec la condition de normalisation

$$\sum_{i=0}^C \sum_{j=0}^M \tilde{P}_{ij}^{(M)} + \tilde{P}_{CM}^{(M)} \cdot \frac{\lambda}{C\mu - \lambda} = 1. \quad (2.3.10)$$

Il est intéressant de noter que les équations (2.3.6)-(2.3.9) sont identiques aux équations de Kolmogorov pour les probabilités stationnaires  $P_{ij}^{(M)}$  du modèle tronqué ordinaire. Ainsi, pour  $0 \leq i \leq C$ ,  $0 \leq j \leq M$  les probabilités  $\tilde{P}_{ij}^{(M)}$  coïncident avec  $P_{ij}^{(M)}$  jusqu'à une constante de normalisation:

$$\tilde{P}_{ij}^{(M)} = Const \cdot P_{ij}^{(M)}, \quad 0 \leq i \leq C, \quad 0 \leq j \leq M. \quad (2.3.11)$$

En additionnant (2.3.11) par rapport à  $0 \leq i \leq C$ ,  $0 \leq j \leq M$  et en utilisant (2.3.10), nous obtenons:

$$Const = \sum_{i=0}^C \sum_{j=0}^M \tilde{P}_{ij}^{(M)} = 1 - \frac{\lambda}{C\mu - \lambda} \tilde{P}_{CM}^{(M)}. \quad (2.3.12)$$

Maintenant à partir de (2.3.11), nous avons:

$$\tilde{P}_{CM}^{(M)} = \frac{P_{CM}^{(M)}}{1 + \frac{\lambda}{C\mu - \lambda} P_{CM}^{(M)}},$$

$$Const = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\lambda - C\mu} P_{CM}^{(M)}}.$$

Ceci nous permet de relier les performances stationnaires des modèles tronqués  $S^{(M)}$ ,  $\tilde{S}^{(M)}$ . En particulier, la probabilité de blocage  $\tilde{P}_C^{(M)}$  dans le système  $\tilde{S}^{(M)}$  est donnée par

$$\tilde{P}_C^{(M)} = \frac{P_C^{(M)} + \frac{\lambda}{C\mu - \lambda} P_{CM}^{(M)}}{1 + \frac{\lambda}{C\mu - \lambda} P_{CM}^{(M)}},$$

où  $P_C^{(M)}$  est la probabilité de blocage dans le système  $S^{(M)}$ , et le nombre moyen de clients en orbite  $\tilde{N}_o^{(M)}$  dans le système  $\tilde{S}^{(M)}$  est donné par:

$$\tilde{N}_o^{(M)} = \frac{\overline{N}_o^{(M)} + \frac{(M+1)C\mu - M\lambda}{(C\mu - \lambda)^2} \lambda P_{CM}^{(M)}}{1 + \frac{\lambda}{C\mu - \lambda} P_{CM}^{(M)}},$$

où  $\overline{N}_o^{(M)}$  est le nombre moyen de clients en orbite dans le système  $S^{(M)}$ .

### 2.3.5 Analyse du modèle $\hat{S}^{(M)}$

Divisons l'espace d'état  $S = \{0, 1, \dots, C\} \times Z_+$  du processus  $\{\hat{C}^{(M)}(t), \hat{N}_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$  comme  $S_0 \cup S_1 \cup \dots$ , où le sous-ensemble  $S_j$  est formé par les états  $\{(0, j), (1, j), \dots, (C, j)\}$ , et considérons comme les états initiaux les  $(C+1) \times M$  états  $(i, j)$  pour  $0 \leq i \leq C$ ,  $0 \leq j \leq M-1$ . Pour mettre le générateur infinitésimal du processus  $\{\hat{C}^{(M)}(t), \hat{N}_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$

sous la forme (2.3.1), introduisons les matrices de dimension  $(C + 1) \times (C + 1)$  suivantes:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$B_j = \begin{bmatrix} 0 & j\theta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\theta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & j\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & j\theta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

$$A_j = \begin{bmatrix} q_{0j} & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & q_{1j} & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & q_{2j} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (C-1)\mu & q_{C-1,j} & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C\mu & q_{C,j} \end{bmatrix},$$

où  $q_{ij} = -(\lambda + i\mu + j\theta)$ , si  $0 \leq i \leq C - 1$  et  $q_{Cj} = -(\lambda + C\mu)$ .

Alors nous pouvons écrire le générateur infinitésimal du processus  $\{\widehat{C}^{(M)}(t), \widehat{N}_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$



sous la forme (2.3.1) avec

$$Q_{00} = \begin{bmatrix} A_0 & Q_1 & O & \cdots & O & O & O \\ B_1 & A_1 & Q_1 & \cdots & O & O & O \\ O & B_2 & Q_2 & \cdots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A_{M-3} & Q_1 & O \\ O & O & O & \cdots & B_{M-2} & A_{M-2} & Q_1 \\ O & O & O & \cdots & O & B_{M-1} & A_{M-1} \end{bmatrix},$$

$$Q_{01} = \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \\ \vdots \\ O \\ O \\ Q_1 \end{bmatrix},$$

$$Q_{10} = (OOO \cdots OOB_M),$$

$$Q_{11} = A_M,$$

$$Q_0 = A_{M+1},$$

$$Q_{-1} = B_{M+1},$$

où  $O$  est la matrice de dimension  $(C + 1) \times (C + 1)$  avec tous les éléments égaux à zéro, et la matrice  $Q_1$  a été introduite plus tôt.

L'application de la théorie générale ci-dessus des chaînes de Markov avec un vecteur invariant géométrique modifié conduit à la procédure suivante:

1. La chaîne induite possède l'espace d'états  $0, 1, \dots, C$ . Son générateur infinitésimal est la matrice tri-diagonale suivante:

$$Q = \begin{bmatrix} -\Lambda_M & \Lambda_M & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -(\mu + \Lambda_M) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -((C-1)\mu + \Lambda_M) & \Lambda_M \\ 0 & 0 & \cdots & C\mu & -C\mu \end{bmatrix},$$

où  $\Lambda_M = \lambda + (M+1)\theta$ . Il est le générateur du processus du nombre de serveurs occupés dans le modèle d'Erlang M/M/C/C qui sert un flux d'entrée de Poisson avec un taux  $\Lambda_M$ . Ainsi, la distribution stationnaire de la chaîne induite est

$$\pi_i = \frac{\Lambda_M^i}{i!} / \sum_{g=0}^C \frac{\Lambda_M^g}{g!}, \quad 0 \leq i \leq C.$$

2. Le vecteur des accroissements moyens  $d = (Q_{+1} - Q_{-1})e$  est

$$(-(M+1)\theta, -(M+1)\theta, \dots, -(M+1)\theta, \lambda).$$

Ainsi, la moyenne des accroissements moyens est égale à  $-(M+1)\theta(1 - \pi_C) + \lambda\pi_C$ , de sorte que le processus  $\{\widehat{C}^{(M)}(t), \widehat{N}_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$  est ergodique si et seulement si

$$\lambda < \frac{(M+1)\theta(1 - \pi_C)}{\pi_C}. \quad (2.3.13)$$

Comme  $M \rightarrow \infty$ , le membre de droite de cette inégalité tend vers  $C\mu$ . Donc, pour tout

$\lambda \in (0, C\mu)$  donné (quand le système de files d'attente avec rappels initial est ergodique) on devrait prendre  $M$  assez grand pour garantir que la relation (2.3.13) a lieu.

3. Pour calculer la matrice  $R$ , on peut utiliser la procédure récursive (2.3.4). Notons que puisque la matrice  $Q_0$  est tri-diagonale, le produit  $(Q_{+1} + R_n^2 Q_{-1})Q_0^{-1}$  peut être aisément calculé avec l'algorithme "élimination avant, substitution arrière" sans calcul de la matrice inverse  $Q_0^{-1}$ .

## 2.4. Problème de convergence

4. On peut maintenant écrire un ensemble fermé d'équations linéaires pour les probabilités  $\widehat{P}_{ij}^{(M)}$ ,  $0 \leq i \leq C$ ,  $0 \leq j \leq M$ :

$$(\lambda + i\mu + j\theta)\widehat{P}_{ij}^{(M)} = \lambda\widehat{P}_{i-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta\widehat{P}_{i-1,j+1}^{(M)} + (i+1)\mu\widehat{P}_{i+1,j}^{(M)},$$

$$0 \leq i \leq C-1, 0 \leq j \leq M-1;$$

$$(\lambda + C\mu)\widehat{P}_{Cj}^{(M)} = \lambda\widehat{P}_{C-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta\widehat{P}_{C-1,j+1}^{(M)} + \lambda\widehat{P}_{C,j-1}^{(M)},$$

$$0 \leq j \leq M-1;$$

$$(\lambda + i\mu + M\theta)\widehat{P}_{iM}^{(M)} = \lambda\widehat{P}_{i-1,M}^{(M)} + (i+1)\mu\widehat{P}_{i+1,M}^{(M)} + (M+1)\theta \sum_{f=0}^C \widehat{P}_{fM}^{(M)} r_{f,i-1},$$

$$0 \leq i \leq C-1;$$

$$(\lambda + C\mu)\widehat{P}_{CM}^{(M)} = \lambda\widehat{P}_{C-1,M}^{(M)} + \lambda\widehat{P}_{C,M-1}^{(M)} + (M+1)\theta \sum_{f=0}^C \widehat{P}_{fM}^{(M)} r_{f,C-1};$$

où  $r_{g,i}$  sont des éléments de la matrice  $R$ .

## 2.4 Problème de convergence

### 2.4.1 Convergence de la solution approximative vers la solution exacte

Notons la somme  $\sum_{k=i}^{\infty} \sum_{l=j}^{\infty} P_{kl}$  par  $\overline{P}_{ij}$ , l'inégalité  $P_{ij}^{(M)} \leq_{st} P_{ij}^{(M+1)} \leq_{st} P_{ij}$ , implique en particulier que  $\overline{P}_{ij}^{(M)} \leq \overline{P}_{ij}^{(M+1)} \leq \overline{P}_{ij}$ , c'est à dire la monotonie de la séquence et que celle-ci est bornée par  $\overline{P}_{ij}^{(M)}$ . Ainsi, nous pouvons garantir l'existence de la limite  $a_{ij} = \lim_{M \rightarrow \infty} \overline{P}_{ij}^{(M)}$  et l'inégalité  $a_{ij} \leq \overline{P}_{ij}$ . Mais

$$P_{ij}^{(M)} = \overline{P}_{ij}^{(M)} + \overline{P}_{i+1,j+1}^{(M)} - \overline{P}_{i+1,j}^{(M)} - \overline{P}_{i,j+1}^{(M)}.$$

Donc, il existe  $b_{ij} = \lim_{M \rightarrow \infty} P_{ij}^{(M)} = a_{ij} + a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j} - a_{i,j+1}$  et (puisque  $\overline{a}_{ij} \leq \overline{\overline{P}}_{ij} < \infty$ )  $\overline{b}_{ij} = a_{ij}$ . En prenant les limites des deux côtés dans les équations de Kolmogorov pour les probabilités  $P_{ij}^{(M)}$  nous obtenons que les variables  $b_{ij}$  satisfont

## 2.4. Problème de convergence

---

l'ensemble des équations de Kolmogorov pour le processus  $\{C(t), N_o(t), t \geq 0\}$ . En plus,

$$\sum_{i=0}^C \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} = \bar{b}_{00} = a_{00} = \lim_{M \rightarrow \infty} \bar{P}_{00}^{(M)} = \lim_{M \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

c'est à dire que les variables  $b_{ij}$  satisfont aussi la condition de normalisation, de sorte que  $b_{ij} = P_{ij}$ .

En utilisant les théorèmes généraux sur la convergence des mesures de probabilité [86], il est possible de garantir la convergence de la distribution stationnaire du nombre de serveurs occupés. En outre, en appliquant l'équation (1.2.14), on a  $\bar{N}_o^{(M)} \rightarrow \bar{N}_o$ .

En utilisant des formules qui relient les caractéristiques du modèle tronqué généralisé  $\tilde{S}^{(M)}$  avec les caractéristiques correspondantes du modèle tronqué  $S^{(M)}$ , on peut garantir la convergence des caractéristiques du modèle  $\tilde{S}^{(M)}$  vers les caractéristiques correspondantes du modèle initial.

### 2.4.2 Estimation d'erreur

Considérons deux mesures de performance: la probabilité de blocage et le nombre moyen de clients en orbite.

- *Probabilité de blocage*

Vu que  $\{C^{(M)}(t), t \geq 0\} \leq_{st} \{C(t), t \geq 0\}$ , nous avons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(C^{(M)}(t) \geq k) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) \geq k), \quad 0 \leq k \leq C.$$

Dans le cas où  $k = C$ , cette inégalité devient:

$$P_C^{(M)} \leq P_C, \quad \text{ou bien } P_C - P_C^{(M)} \geq 0.$$

Dans le but d'obtenir une estimation pour  $P_C - P_C^{(M)}$ , nous utilisons les équations (1.2.13) et (2.2.8). De ce fait,

$$\bar{C} = \sum_{k=1}^C \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) \geq k), \quad \bar{C}^{(M)} = \sum_{k=1}^C \lim_{t \rightarrow \infty} P(C^{(M)}(t) \geq k)$$

et

$$\begin{aligned}
 P_C - P_C^{(M)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) \geq C) - \lim_{t \rightarrow \infty} P(C^{(M)}(t) \geq C) \\
 &\leq \sum_{k=1}^C \lim_{t \rightarrow \infty} (P(C(t) \geq k) - \lim_{t \rightarrow \infty} P(C^{(M)}(t) \geq k)) \\
 &= \bar{C} - \bar{C}^{(M)} \\
 &= \lambda P_{CM}^{(M)}.
 \end{aligned}$$

La probabilité  $P_{CM}^{(M)}$  peut être considérée comme connue puisqu'elle est calculée numériquement (voir le paragraphe 2.2.3).

- *Nombre moyen de clients en orbite*

Des équations (1.3.15) et (2.2.9), nous avons:

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_o - \bar{N}_o^{(M)} &= \frac{1 + \theta}{\theta} \cdot \frac{(C + 1 + \lambda + M \frac{\theta}{1 + \theta}) \lambda P_{CM}^{(M)}}{C - \lambda} \\
 &\quad - \frac{1 + \theta}{\theta} \cdot \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} E[(C(t))^2] - \lim_{t \rightarrow \infty} E[(C^{(M)}(t))^2]}{C - \lambda}.
 \end{aligned}$$

Vu que  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[(C(t))^2] - \lim_{t \rightarrow \infty} E[(C^{(M)}(t))^2] = \sum_{k=1}^C (2k - 1) [\lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) \geq k) - \lim_{t \rightarrow \infty} P(C^{(M)}(t) \geq k)]$  et tous les termes dans cette somme sont non négatifs, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} E[(C(t))^2] - \lim_{t \rightarrow \infty} E[(C^{(M)}(t))^2] &\leq (2C - 1) \sum_{k=1}^C \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) \geq k) \\
 &\quad - (2C - 1) \sum_{k=1}^C \lim_{t \rightarrow \infty} P(C^{(M)}(t) \geq k)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} E[(C(t))^2] - \lim_{t \rightarrow \infty} E[(C^{(M)}(t))^2] &\geq \sum_{k=1}^C \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) \geq k) \\
 &\quad - \sum_{k=1}^C \lim_{t \rightarrow \infty} P(C^{(M)}(t) \geq k) \\
 &= \bar{C} - \bar{C}^{(M)} = \lambda P_{CM}^{(M)}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1 + \theta}{\theta} \cdot \frac{\lambda - C + 2 + M \frac{\theta}{1 + \theta}}{C - \lambda} \lambda P_{CM}^{(M)} \leq \bar{N}_o - \bar{N}_o^{(M)} \leq \frac{1 + \theta}{\theta} \cdot \frac{\lambda + C + M \frac{\theta}{1 + \theta}}{C - \lambda} \lambda P_{CM}^{(M)}.$$

#### 2.4. Problème de convergence

A présent, obtenons l'estimation de la probabilité  $P_{CM}^{(M)}$ . A l'aide de la relation (2.2.20), nous transformons l'équation (2.2.3) comme suit (le taux de service  $\mu$  est toujours supposé égal à 1);

$$\begin{aligned} (\lambda + C)P_{Cj}^{(M)} &= \lambda P_{C-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta P_{C-1,j+1}^{(M)} + \lambda P_{C,j-1}^{(M)} \\ &\leq \lambda \sum_{i=0}^{C-1} P_{ij}^{(M)} + (j+1)\theta \sum_{i=0}^{C-1} P_{i,j+1}^{(M)} + \lambda P_{C,j-1}^{(M)} \\ &= \lambda \frac{\lambda}{j\theta} P_{C,j-1}^{(M)} + \lambda P_{Cj}^{(M)} + \lambda P_{C,j-1}^{(M)}, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$CP_{Cj}^{(M)} \leq \lambda \frac{\lambda + j\theta}{j\theta} P_{C,j-1}^{(M)}, \quad 1 \leq j \leq M-1. \quad (2.4.1)$$

De la même manière, de l'équation (2.2.4) nous pouvons montrer que (2.4.1) a lieu également pour  $j = M$ .

De (2.4.1),

$$P_{Cj}^{(M)} \geq \frac{\frac{(\lambda/C)^j}{j!\theta^j} \prod_{i=1}^j (\lambda + i\theta)}{\frac{(\lambda/C)^M}{M!\theta^M} \prod_{i=1}^M (\lambda + i\theta)} P_{CM}^{(M)}, \quad 0 \leq j \leq M.$$

En additionnant ces inégalités par rapport à  $j = 0, \dots, M$ , nous obtenons que

$$P_C^{(M)} \geq \frac{\sum_{j=0}^M \frac{(\lambda/C)^j}{j!\theta^j} \prod_{i=1}^j (\lambda + i\theta)}{\frac{(\lambda/C)^M}{M!\theta^M} \prod_{i=1}^M (\lambda + i\theta)} P_{CM}^{(M)}. \quad (2.4.2)$$

D'autre part, vu que  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[C^{(M)}(t)] = \lambda - \lambda P_{CM}^{(M)}$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[C^{(M)}(t)] \geq CP_C^{(M)}$ , nous pouvons garantir que

$$CP_C^{(M)} \leq \lambda - \lambda P_{CM}^{(M)}. \quad (2.4.3)$$

De (2.4.2)-(2.4.3), nous avons l'inégalité suivante:

$$\lambda - \lambda P_{CM}^{(M)} \geq \frac{C \sum_{j=0}^M \frac{(\lambda/C)^j}{j!\theta^j} \prod_{i=1}^j (\lambda + i\theta)}{\frac{(\lambda/C)^M}{M!\theta^M} \prod_{i=1}^M (\lambda + i\theta)} P_{CM}^{(M)}.$$

Enfin,

$$P_{CM}^{(M)} \leq \frac{\frac{(\lambda/C)^M}{M!\theta^M} \prod_{i=0}^M (\lambda + i\theta)}{\sum_{j=0}^M \frac{(\lambda/C)^j}{j!\theta^j} (C + \lambda + j\theta) \prod_{i=0}^{j-1} (\lambda + i\theta)}.$$

## 2.5 Approche d'Extrapolation de Valeur

Les approches présentées ci-dessus fournissent une solution numérique à la distribution stationnaire  $P_{ij}$  des chaînes de Markov à temps continu. Elles utilisent les équations de Kolmogorov pour calculer les caractéristiques de performance souhaitées. Le problème à résoudre est de trouver la solution du système d'équations suivant:

$$P_{ij} \sum_{s' \neq s} q_{s's} = \sum_{s' \neq s} q_{s's} P_{ij}, \quad \forall s \in S;$$

$$\sum_s P_s = 1,$$

où  $q_{s's}$  représente le taux de transition de l'état  $s = (i, j)$  à  $s' = (k, l)$ .

Dans ce qui suit, nous considérons une approche alternative, appelée Extrapolation de Valeur [58]. L'approche en question est basée sur les outils de la théorie des Processus de Markov Décisionnels [70] et également sur le principe de troncation. L'idée est de trouver la valeur relative moyenne en résolvant les équations de Howard, écrites pour un espace d'états tronqué. Sa particularité consiste dans le fait qu'au lieu d'une simple troncation, les valeurs d'état relatives à l'extérieur de l'espace d'états tronqué sont estimées par l'extrapolation polynomiale des valeurs d'état relatives à l'intérieur de l'espace tronqué en question. De cette manière, nous obtenons un système fermé ainsi que les résultats précis avec de faibles niveaux de troncation.

### 2.5.1 Processus de Markov Décisionnels

Un processus de Markov Décisionnel (PMD) [70] est défini comme  $\{S, A, P, R\}$  où  $S$  est un ensemble d'états,  $A$  est un ensemble d'actions,  $P$  est une fonction de transition d'état et  $R$  est une fonction de revenu. L'état du système peut être contrôlé, en choisissant les actions  $a$  de  $A$ , influençant ainsi les transitions d'état. La fonction de transition  $P : S \times S \times A \rightarrow R_+$  spécifie le taux de transition entre deux états lorsqu'une certaine action est prise à l'état d'origine [46].

La première caractéristique de la technique Extrapolation de Valeur est la nécessité de la définition d'une fonction de revenu qui doit être une fonction de l'état du système, qui est  $r(s)$ . A la suite de la définition de la fonction de revenu pour chaque état, en régime stationnaire, on peut introduire un taux de revenu moyen du processus entier comme  $\bar{r} = \sum_{(i,j) \in S} P_{ij} r(i, j)$ . Dans la technique Extrapolation de Valeur, la fonction de revenu  $R$  doit être définie de sorte que le revenu moyen résultant  $\bar{r}$  coïncide avec la métrique de performance souhaitée. Une fois que nous avons défini le cadre PMD ainsi que la fonction de revenu, nous sommes en mesure de définir les valeurs d'état relatives. Il est évident qu'après avoir exécuté une action dans un état  $s \in S$ , le système collectera un revenu pour cette action ( $r(s)$ ), mais à mesure que le nombre de transitions augmente, le revenu moyen collecté converge vers  $\bar{r}$  [58]. La valeur d'état relative  $v(s)$  montre la différence entre le revenu total cumulé lorsque le processus débute à l'état  $s$  et le revenu total cumulé par le processus, le taux moyen de revenu étant  $\bar{r}$ :

$$v(s) = E\left[\int_0^{\infty} (r(S(t)) - \bar{r}) dt / S(0) = s\right].$$

Les équations de Howard mettent en relation les revenus, les valeurs d'état relatives et les taux de transition de la manière suivante [45]:

$$r(s) - \bar{r} + \sum_{s'} q_{ss'} (v(s') - v(s)) = 0; \quad \forall s \in S.$$

Les équations de Howard qui correspondent au système étudié M/M/C avec rappels sont:

$$\begin{aligned} r(i, j) - \bar{r} + \lambda(v(i+1, j) - v(i, j)) + i\mu(v(i-1, j) - v(i, j)) \\ + j\theta(v(i+1, j-1) - v(i, j)) = 0, \\ 0 \leq i \leq C-1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(i, j) - \bar{r} + \lambda(v(C, j+1) - v(C, j)) + C\mu(v(C-1, j) - v(C, j)) = 0, \\ i = C. \end{aligned}$$

Comme nous pouvons observer le nombre d'états est infinie parce que  $j$  peut prendre n'importe quelle valeur dans  $Z_+$ . Nous devons donc tronquer l'espace d'état  $S$  à  $S^{(M)}$ :

$$S^{(M)} = \{s = (i, j); 0 \leq i \leq C; 0 \leq j \leq M\}. \quad (2.5.1)$$



En effet, il y aura autant d'équations d'Howard que le nombre d'états,  $|S^{(M)}|$ . Le nombre d'inconnus sera les  $|S^{(M)}|$  valeurs d'état relatives plus le revenu attendu  $\bar{r}$ , c'est-à-dire  $|S^{(M)}| + 1$  inconnues. Cependant, comme seules les différences dans les valeurs relatives apparaissent dans les équations de Howard, nous pouvons poser  $v(0) = 0$ . Par conséquent on aura un système linéaire d'équations résoluble ayant le même nombre d'équations que le nombre d'inconnues.

### 2.5.2 Ajustement polynomial

L'Extrapolation de Valeur considère les valeurs d'état relatives en dehors de  $S^{(M)}$  qui apparaissent dans les équations de Howard comme une extrapolation de certaines valeurs relatives correspondant aux états se trouvant à l'intérieur de  $S^{(M)}$ . En résumé, l'objectif de l'Extrapolation de Valeur est de trouver une fonction d'extrapolation qui s'adapte à certains points de  $S^{(M)}$  de telle sorte qu'elle se rapproche également de points en dehors de  $S^{(M)}$ . Il est important de choisir une fonction d'extrapolation qui fait que les équations de Howard forment un système fermé d'équations linéaires [58]. Les fonctions les plus courantes qui remplissent cette condition sont les polynômes. Nous pouvons utiliser tous les états de  $S^{(M)}$  dans la procédure d'implantation globale ou ce qui est le plus couramment utilisé, seulement un sous-ensemble ( $S_f$ ) de leur localisation. Par souci de simplicité, dans la description qui suit, on suppose qu'il existe une application  $W$  à partir de l'ensemble bidimensionnel d'états vers un ensemble à une dimension, par exemple les nombres réels :  $W : \widehat{S}_f \rightarrow R$ . Donc, l'application  $W$  traite des états comme s'ils étaient des valeurs réelles  $w = W(s)$ . Le choix de  $W$  dépendra fortement des états dans lesquels nous voulons extrapoler sa valeur d'état relative. Notons également que la fonction d'extrapolation  $f(w)$  et l'ensemble  $S_f^{(M)}$  doivent être choisis de façon à ce que les paramètres de  $f(w)$  aient des valeurs non ambiguës, c'est-à-dire que dans le cas du choix d'un polynôme comme fonction d'extrapolation, le nombre de points différents dans  $S_f^{(M)}$  doit être égal ou supérieur au nombre de coefficients dans le polynôme. En général, la procédure du calcul des coefficients du polynôme consiste à minimiser l'erreur quadratique minimale

[39]:

$$E = \sum_{w \in W} (f(w) - v(w))^2. \quad (2.5.2)$$

Alors les valeurs optimales pour les coefficients du polynôme  $a_i$  peuvent être calculées en résolvant les équations:

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \quad \forall i. \quad (2.5.3)$$

Dans notre cas, nous utilisons autant de points que le nombre de paramètres du polynôme d'interpolation, de sorte que la procédure d'ajustement est une interpolation polynomiale ordinaire et  $E = 0$ , c'est-à-dire que tous les points considérés se trouveront dans la courbe du polynôme. Dans ce cas, le problème peut être formulé comme suit: Etant donné un ensemble de  $n = (W(S_f^{(M)})) = |S_f^{(M)}|$  points  $(w_0, v(w_0)), \dots, (w_{n-1}, v(w_{n-1}))$ , on peut déterminer un polynôme de degré  $(n-1)$  de sorte que  $f(w_i) = v(w_i)$ , pour  $i = 0, \dots, n-1$ , où

$$f(w) = a_0 + a_1w + a_2w^2 + \dots + a_{n-1}w^{n-1}.$$

Le polynôme d'interpolation satisfait aux  $n$  équations linéaires suivantes:

$$f(w_i) = a_0 + a_1w_i + a_2w_i^2 + \dots + a_{n-1}w_i^{n-1} = v(w_i), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Ces dernières, sous forme matricielle, se présentent de la manière suivante:

$$Za = \begin{bmatrix} 1 & w_0 & \dots & W_0^{n-1} \\ 1 & w_1 & \dots & W_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & w_{n-1} & \dots & W_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(w_0) \\ v(w_1) \\ \vdots \\ v(w_{n-1}) \end{bmatrix} = b.$$

La matrice des coefficients de ce système  $A$  est une matrice de Vendermonde, dont le déterminant est non nul et donc  $A$  est inversible. Ainsi, il existe toujours une solution unique au système linéaire d'équations considéré ou, de façon équivalente, il existe un polynôme unique qui passe par tous les  $n$  points. Cependant, les matrices de Vandermonde sont souvent mal conditionnées [42], surtout si certaines  $w_i$  sont très proches, donc la procédure pour calculer le polynôme est également mal conditionnée. Il est important de noter que l'unicité du polynôme d'interpolation ne signifie pas qu'il ne peut pas être

## 2.5. Approche d'Extrapolation de Valeur

---

écrit dans une base différente de la base standard [48]. Plus concrètement dans ce travail, nous avons utilisé la base de Lagrange. Pour le problème d'interpolation considéré, le polynôme est une combinaison linéaire

$$L(w) = \sum_{j=0}^{n-1} v(w_j) l_j(w),$$

où

$$l_j(w) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n-1} \frac{w - w_i}{w_j - w_i} = \frac{w - w_0}{w_j - w_0} \dots \frac{w - w_{j-1}}{w_j - w_{j-1}} \frac{w - w_{j+1}}{w_j - w_{j+1}} \dots \frac{w - w_{n-1}}{w_j - w_{n-1}}.$$

Pour le problème étudié, nous aurons une équation de Howard dans laquelle apparaît  $v(C, M+1)$ , c'est-à-dire une valeur relative d'un état qui n'appartient pas à  $S^{(M)}$ . Nous devons donc approximer la valeur relative  $v(C, M+1)$  à l'aide de certaines valeurs d'état relatives des états appartenant à  $S^{(M)}$ . Il est important de souligner que pour l'extrapolation de  $v(C, M+1)$ , nous n'utilisons que des états de la forme  $s = (C, j)$  avec  $j$  variables. De ce fait, on définit l'application  $w$  comme  $w((C, j)) = j$ . De plus, on utilise un polynôme de degré  $(n-1)$  qui interpole les  $n$  points de  $S_f = \{s_i = (C, Q-i)/i = 0, \dots, n-1\}$  et alors  $W(S_f) = \{w_i = Q-i/i = 0, \dots, n-1\}$ . En effet,

$$\begin{aligned} w_0 = M &\rightarrow v(w_0) = v(C, M); \\ w_1 = M - 1 &\rightarrow v(w_1) = v(C, M - 1); \\ &\vdots \\ w_j = M - j &\rightarrow v(w_j) = v(C, M - j); \\ w_{n-1} = M - (n - 1) &\rightarrow v(w_{n-1}) = v(C, M - (n - 1)). \end{aligned}$$

De cette façon, la forme générale d'extrapolation lors de l'utilisation d'un polynôme de degré  $(n-1)$  est :

$$v^{(n)}(C, M+1) = L^{(n)}(M+1) = \sum_{j=0}^{n-1} v(C, M-j) l_j(M+1). \quad (2.5.4)$$

Par exemple, dans le cas de l'extrapolation linéaire  $n = 2$ , on utilise  $(M, v(C, M))$  et  $(M - 1, v(C, M - 1))$ :

$$\begin{aligned} v^{(2)}(C, M + 1) &= L^{(2)}(M + 1) = v(C, M)l_0(M + 1) + v(C, M - 1)l_1(M + 1) \\ &= v(C, M)\frac{(M + 1) - (M - 1)}{M - (M - 1)} + v(C, M - 1)\frac{(M + 1) - M}{(M - 1) - M} \\ &= 2v(C, M) - v(C, M - 1). \end{aligned}$$

Suivant la procédure similaire, nous obtenons les relations suivantes pour  $n = 3$  et  $n = 4$ :

$$\begin{aligned} v^{(3)}(C, M + 1) &= 3v(C, M) - 3v(C, M - 1) + v(C, M - 2); \\ v^{(4)}(C, M + 1) &= 4v(C, M) - 6v(C, M - 1) + 4v(C, M - 2) - v(C, M - 3). \end{aligned}$$

Finalement,

$$v^{(n)}(C, M + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} v(C, M - k),$$

où  $n$  est le nombre de coefficients pris pour les polynômes de Lagrange.

### 2.5.3 Fonction Revenu

Par définition,  $r(s)$  est le taux de revenu obtenu lorsque le système est dans l'état  $s$ . Par conséquent, nous devons définir le revenu comme la caractéristique de performance que nous voulons calculer. De plus, les entrées  $r(s)$  dans les équations de Howard doivent être correctement définies. Le tableau 2.1 donne plusieurs exemples sur la façon dont  $r(s)$  peuvent être déterminés pour obtenir certaines caractéristiques de performance. Par exemple, nous choisissons la probabilité de blocage et nous définissons la fonction de revenu comme étant 1 dans les états où un client est bloqué, c'est-à-dire  $r(C, j) = 1$ , pour tout  $0 \leq j \leq M$ , et 0 dans le reste des états  $r(i, j) = 0$ , pour  $0 \leq i \leq C - 1$  et pour tout  $0 \leq j \leq M$ .

### 2.5.4 Effet de l'extrapolation de la valeur dans les équations d'Howard

Dans notre problème, nous n'aurons qu'à remplacer  $v(C, M + 1)$  par sa valeur approximative dans l'équation de Howard qui correspond à l'état  $(C, M + 1)$  [24]. Par exemple,

**Tableau 2.1:** Définition de la fonction revenu.

Probabilité de blocage	$P_C$	$r(i, j) = 1$ , pour $i = C$ et $j \geq 0$ $r(i, j) = 0$ sinon
Nombre moyen de clients en orbite	$\bar{N}_o$	$r(i, j) = j$ , pour $0 \leq i \leq C$ et $0 \leq j \leq M$ $r(i, j) = 0$ sinon
Nombre moyen de serveurs occupés	$\bar{C}$	$r(i, j) = i$ , pour $0 \leq i \leq C$ et $0 \leq j \leq M$ $r(i, j) = 0$ sinon

si nous utilisons l'extrapolation linéaire  $n = 2$ , cette équation devient:

$$\begin{aligned} & r(C, M) - r + v(C, M)(-\lambda - C\mu) + \lambda v(C, M + 1) + C\mu v(C - 1, M) \\ & = r(C, M) - r + v(C, M)(\lambda - C\mu) + C\mu v(C - 1, M) - (C, M - 1) = 0. \end{aligned}$$

Comme  $v(C, M + 1)$  n'apparaît plus dans les équations de Howard, nous avons un système linéaire de  $(C + 1) \times (M + 1)$  équations ayant le même nombre d'inconnues. Ce système peut être exprimé sous forme matricielle pour des raisons de simplicité. Par conséquent, le système peut être réécrit comme  $xT = b$ , où  $x$  est un vecteur avec les inconnues  $(C + 1) \times (M + 1)$  ( $\bar{r}$  et les valeurs d'état relatives  $v(s)$ ) et  $b$  comporte les taux de revenu négatifs pour les différents états [38]:

$$\begin{aligned} x &= [\bar{r}, v(0, 1), \dots, v(0, Q), v(1, 0), \dots, v(C, Q)]; \\ b &= [-r(0, 0), -r(0, 1), \dots, -r(C, 0), -r(C, Q)]. \end{aligned}$$

La matrice  $T$  représente la matrice des coefficients et peut être construite en mettant tous les éléments de la première rangée de la matrice  $T_0$  égale à  $-1$ . La matrice  $T_0$  est donnée par:

$$T_0 = \begin{bmatrix} A_1^0 & A_0^0 & \cdots & O & O \\ A_2^1 & A_1^1 & \cdots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_1^{C-1} & A_0^{C-1} \\ O & O & \cdots & A_2^C & A_1^C \end{bmatrix},$$

où les sous-matrices sont définies comme

$$A_0^i = (i+1)\mu I, \quad 0 \leq i \leq C-1;$$

$$A_2^i = \begin{bmatrix} \lambda & \theta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & M\theta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq C;$$

$$A_1^i = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha - \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 2\theta & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha - M\theta \end{bmatrix}, \quad \text{pour } \alpha = -\lambda - i\mu, \quad 0 \leq i \leq C-1.$$

Lorsque  $i = C$ , et s'il s'agit de l'extrapolation linéaire  $n = 2$  et quadratique  $n = 3$ , nous obtenons respectivement:

$$A_1^C = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & -\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \lambda - C\mu \end{bmatrix},$$

$$A_1^C = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & -3\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 2\lambda - C\mu \end{bmatrix},$$

où  $\beta = -\lambda - C\mu$ . En général, si l'extrapolation est faite avec  $n \leq M + 1$  points, la matrice  $A_1^C$  est donnée par:

$$A_1^C = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & \lambda c_M^{(n)} \\ \lambda & \beta & \cdots & 0 & \lambda c_{M-1}^{(n)} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \lambda c_{M-2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda c_2^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & \lambda c_1^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\lambda - C\mu + \lambda c_0^{(n)} \end{bmatrix},$$

où

$$c_l^{(n)} = \begin{cases} (-1)^l C_n^{l+1}, & \text{si } l < n \\ 0, & \text{si } l \geq n \end{cases}.$$

Nous soulignons que la taille de la matrice  $T$  ne dépend pas du degré de polynôme utilisé pour effectuer l'extrapolation; seule la dernière colonne de la matrice  $A_1^C$  dépend de l'ajustement polynômial. Cette caractéristique à l'avantage suivant: il n'y aura pas de différence dans le coût de calcul lorsqu'on utilise un degré d'extrapolation plus élevé.

L'inconvénient principal de la technique d'extrapolation de valeur est que cette technique est seulement capable de calculer une mesure de performance chaque fois que nous résolvons le système. Néanmoins, nous pouvons surmonter cet inconvénient de la manière suivante. D'une manière générale, la solution du système  $xT = b$  peut être obtenue en utilisant la matrice inverse de  $T$  en faisant  $x = bT^{-1}$ . Notons également que le choix d'une autre mesure de performance n'affectera que les valeurs dans  $b$ . Par conséquent, le calcul d'une seconde mesure de performance augmentera seulement les dépenses de calcul par le coût du produit  $bT^{-1}$ , car le reste du processus du calcul de la matrice inverse  $T^{-1}$  n'est résolu qu'une seule fois [24].

### 2.5.5 Divers

Les approximations basées sur le concept de troncature généralisée ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. En effet, dans [63], le modèle standard M/M/C avec rap-

pels classiques (où le taux des rappels total dépend du nombre de clients en orbite) a été approximé par un modèle à multiserveurs avec un taux des rappels constant (ne dépendant pas du nombre de clients bloqués) tant que le nombre de clients en orbite dépasse une valeur spécifiée. Avec cette hypothèse, la distribution stationnaire de l'état du système a été calculée à l'aide d'une méthode matricielle-géométrique. Pour le même modèle, un schéma efficace et numériquement stable pour le calcul de la distribution susmentionnée a été développé dans [32]. Le concept de troncature généralisée a également été utilisé lors de l'étude sur le système de files d'attente M/M/C/K avec rappels, blocage (balking) et découragement (reneging) [76]. Domenech-Benlloch et al. [22] ont proposé quelques méthodes de troncature généralisée (inspirées de [63]) qui permettent une résolution efficace des systèmes de files d'attente avec rappels et multiserveurs. Les performances des modèles tronqués finis et des modèles tronqués généralisés ont été comparées dans [11] et [13] avec la conclusion que la troncature généralisée fournit une meilleure précision que la troncature finie (directe). Le problème de convergence des modèles tronqués a été discuté dans [23].

Une autre approximation, basée sur l'homogénéisation de l'espace d'états infini des systèmes de files d'attente M/M/C avec rappels et mise au points par Neuts et Rao (1990) [63], nous permet d'analyser un modèle d'attente avec rappels comme un processus de quasi-naissance-et-mort (quasi-birth-death process, QBD process) dont les probabilités limites peuvent être obtenues en appliquant la méthode matricielle-géométrique [85], [12], [55] ou la méthode de troncation finie [67]. Dans [56], cette approche a fourni une solution pour la distribution stationnaire de l'état du système M/M/C/N+C avec rappels, retour (feedback) et taux des rappels constant. Mais elle a présenté le problème d'explosion d'états quand la capacité de la file d'attente N+C était grande. Dans [19], ce problème a été résolu à l'aide de la méthode d'expansion spectrale basée sur les valeurs propres et les vecteurs propres du polynôme associé à l'équation de balance. Dans [21], l'approche en question a permis d'obtenir l'expression exacte pour le nombre moyen conditionnel de clients en orbite dans le cas du système M/M/C avec rappels et clients impatientes,



et de construire un algorithme efficace pour calculer la distribution stationnaire de l'état du système avec la détermination d'un seuil, permettant le calcul des mesures de performance avec une précision spécifiée. Dans [65], l'évolution du nombre de clients dans le système M/M/C/K avec rappels et phénomène d'impatience ainsi que du nombre de clients en orbite a été décrite comme un processus QBD (Quasi-birth-death process) avec dépendance de niveau. En prenant en compte la structure "creuse" de ce processus, les auteurs ont développé un algorithme, numériquement stable et dont la complexité de calcul est linéaire à la capacité de la file d'attente pour trouver la distribution stationnaire conjointe. Pour le même modèle, étant donné que les distributions limites du processus QBD avec dépendance de niveau sont exprimées en termes d'une séquence de matrices de taux, un développement en série de Taylor pour des éléments non nuls des matrices de taux en question par rapport au nombre de clients en orbite a été obtenue. Ce dernier résultat a permis de trouver les formules asymptotiques pour la distribution stationnaire conjointe du nombre de clients dans le système et en orbite [66]. Dans [50], la méthodologie similaire a été appliquée à un système de files d'attente M/M/C/K avec rappels et clients prioritaires dans le but d'obtenir une borne supérieure asymptotique pour la distribution stationnaire conjointe du nombre de serveurs occupés et du nombre de clients en orbite.

L'approche basée sur les outils de la théorie des Processus de Markov Décisionnels a été appliquée lors de l'analyse d'un modèle M/M/C avec rappels et ayant deux orbites. Ce dernier a été utilisé pour évaluer les performances dans les réseaux cellulaires mobiles de communication [24].

Parmi d'autres approximations qui existent dans la littérature, on trouve les asymptotiques approcher pour la distribution conjointe stationnaire de la taille du système et du nombre de serveurs occupés [52] ou celle du nombre de clients en orbite [53]. Le nombre maximal de clients dans le système pendant un intervalle de temps fixe a été estimé dans [41].

## 2.6 Comparaison

Puisque les approximations basées sur des modèles tronqués généralisés remplacent l'espace d'états infini original par un autre espace d'états infini (mais pour lequel il est possible de trouver une solution), elles fournissent une meilleure précision que celles basées sur des modèles de troncature finie [11]. Dans [38, 90], les performances de différentes méthodes d'approximation (Troncature Finie TF, Troncature Généralisée TG, Processus QBD et Extrapolation de Valeur EV) ont été comparées. Dans tous les cas, la troncature / homogénéisation a été réalisée au-delà du niveau  $M$ . Soit  $\rho = \frac{\lambda}{C\mu}$  l'intensité du trafic globale du système de files d'attente M/M/C avec rappels. Les différentes charges du système ( $\rho$ ) ont été étudiées en modifiant le taux d'arrivée des clients primaires  $\lambda$  et en conservant le nombre de serveurs  $C = 10$  et la durée moyenne de service  $\frac{1}{\mu} = 180$  sec. Le phénomène des rappels a été configuré avec diverses valeurs du taux des rappels  $\theta \in \{0.01, 0.1, 1.0\}$ . L'erreur relative de la mesure de performance considérée (la probabilité de blocage  $P_C$ ), définie par  $\epsilon_{P_C} = \frac{|P_C^{approx} - P_C^{exact}|}{|P_C^{exact}|}$ , a été utilisée comme référence pour comparer les techniques en question.

**Tableau 2.2:** Valeurs minimales du niveau de troncature  $M$  ( $\epsilon_{P_C} < 10^{-8}$ ).

$\theta$	0.01		0.1		1.0	
$\rho$	0.5	0.7	0.5	0.7	0.5	0.7
TF	25	48	21	39	17	32
TG	22	40	15	27	10	16
QBD	21	42	18	35	16	34
EV	15	22	15	26	14	23
$P_C$	0.02523	0.15414	0.03245	0.20017	0.03558	0.21863

Les valeurs minimales du niveau de troncature  $M$  nécessaires pour obtenir  $\epsilon_{P_C} < 10^{-8}$  (lors de l'application de TF, TG, QBD et EV) sont présentées dans le tableau 2.2, tandis que la figure 2.6.1 représente l'erreur relative  $\epsilon_{P_C}$  en fonction de  $M$ . La

## 2.6. Comparaison

précision des résultats en fonction du temps de calcul est montrée dans la figure 2.6.2. En conclusion, il est possible de conclure que la méthode d'Extrapolation de Valeur présente des performances beaucoup plus élevées en termes de précision et de temps de calcul.

**Figure 2.6.1 :** Précision des résultats en fonction du niveau de troncature  $M$ .

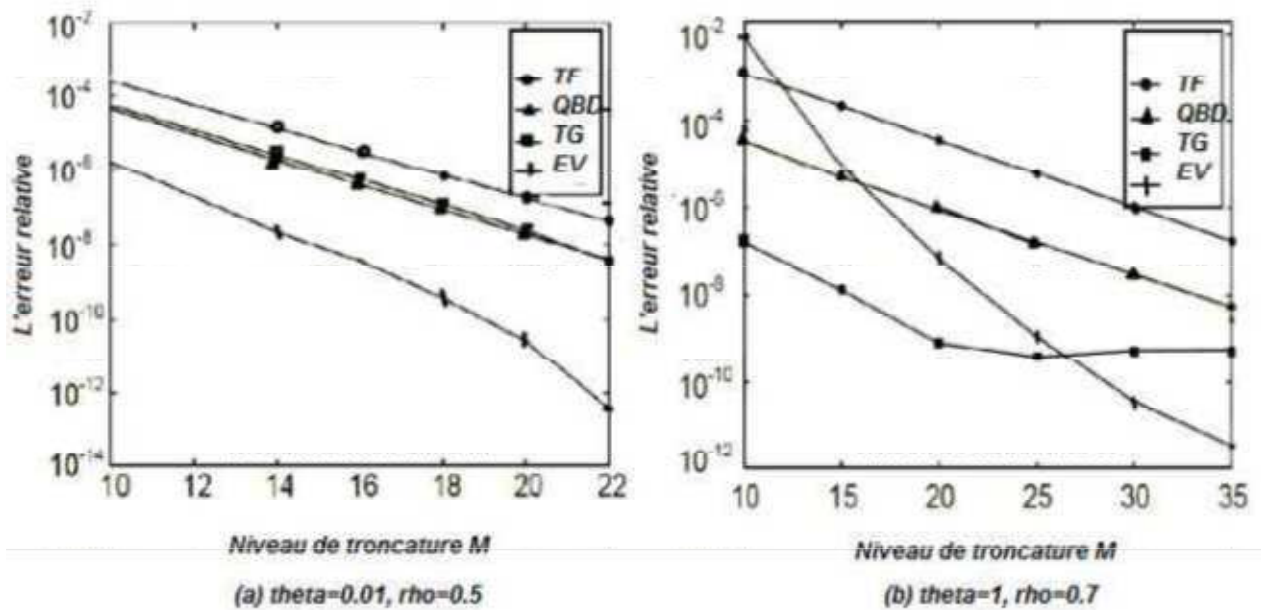
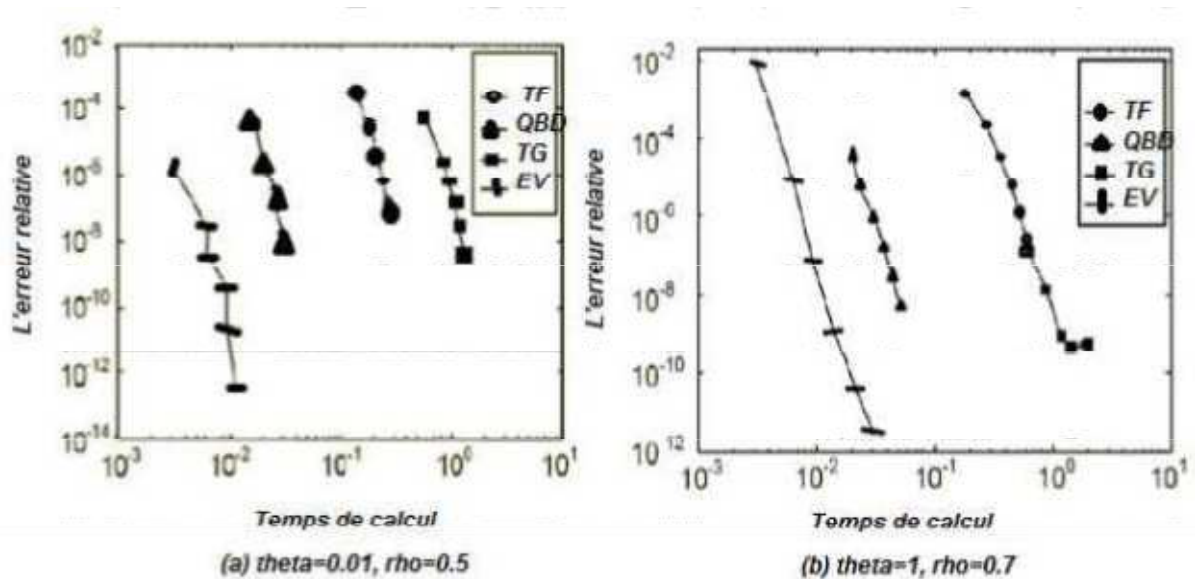


Figure 2.6.2 : Précision des résultats en fonction du temps de calcul.



## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit quelques approches d'approximation les plus performantes et les plus utilisées par les chercheurs lors de l'analyse des modèles avec rappels et multiserveurs. A cet effet, nous avons donné les fondements théoriques des approches en question ainsi qu'une comparaison de leur efficacité en termes de précision et de temps de calcul. Une étude bibliographique est également présentée.

Dans notre travail, l'approche de la Troncature Finie et celle de l'Extrapolation de Valeur seront appliquées et examinées lors de l'étude d'un système de files d'attente complexe M/M/C/K avec rappels, espace d'attente limité, possibilité d'abandon du système et arrivées négatives dont l'analyse stochastique fait l'objet de nos investigations dans le chapitre suivant.

---

## Analyse du modèle

# d'attente $M/M/C/K$ avec rappels, abandons et arrivées négatives

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons un système de files d'attente  $M/M/C/K$  avec rappels, abandons exponentiels auquel les clients positifs et négatifs arrivent selon des processus de Poisson. Pour le modèle étudié, nous trouvons les conditions d'ergodicité et aussi la solution approchée pour certaines mesures de performance essentielles. À cette effet, nous appliquons deux approches alternatives: la troncature finie et l'extrapolation de valeur.

Comme un exemple de motivation, nous considérons un centre d'appels avec intégration de téléphonie informatique (CTI) composé de plusieurs lignes réseau. Ces lignes relient les appels vers le centre via l'autocommutateur privé (PABX). Le PABX identifie automatiquement le numéro de téléphone de tous les appels entrants en utilisant l'identification automatique de numéro (ANI). Un certain nombre de serveurs répondent aux appels des clients. Lorsqu'un appel (client ordinaire) arrive, il sera immédiatement servi si un serveur

est disponible. Si tous les serveurs sont occupés avec d'autres appels, nous avons deux possibilités selon que le seuil pour le nombre de clients en attente est atteint ou non. Dans le premier cas, l'appel arrivant sera automatiquement déconnecté (par PABX) et le client entendra un message lui demandant d'essayer d'accéder au centre d'appels plus tard; alors que dans le second cas le client en question sera tenu d'attendre jusqu'à ce qu'un serveur devienne inoccupé. En outre, certains clients impatients d'attendre un serveur abandonnent après avoir attendu un certain temps. Le système peut être sujet à des interruptions de service ou des pannes (en raison des arrivées négatives). Dans ce cas, un ou plusieurs clients seront supprimés du service. Les intervalles de temps entre les interruptions de service sont aléatoires et peuvent dépendre de l'état du système et du processus d'arrivée des appels ordinaires.

Dans [2, 3], un centre d'appels a également été modélisé par des systèmes de files d'attente avec rappels, multiserveurs, espace d'attente et abandons exponentiels. Cependant, ces modèles ne prennent pas en compte les arrivées négatives et couvrent d'autres règles pour rejoindre l'orbite. Les modèles en question ont été analysés comme des chaînes de Markov à temps continu et résolus en utilisant les méthodes basées sur une approximation fluide [3] ou sur un schéma récursif proposé dans [52], qui ne demande pas de maintenir et de stocker tout l'espace d'états pendant le calcul [2]. Dans [74], le centre d'appels a été décrit comme une file d'attente avec rappels et multiserveurs, où les appels vocaux ont une priorité avec préemption sur les courriers électroniques, puis résolu par une méthode d'analyse matricielle. Toutes ces études ont été effectuées en vue d'estimer les effets des rappels sur les performances des centres d'appels.

## 3.2 Description du modèle

Nous considérons un système de files d'attente avec  $C$  serveurs et  $K - C$  positions d'attente vers lequel les clients primaires positifs et négatifs arrivent selon des processus de Poisson avec des taux  $\lambda > 0$  et  $\nu > 0$ , respectivement. Un client positif reçoit un service immédiat s'il y a un serveur inactif; sinon nous avons deux possibilités selon le fait que le nombre

### 3.2. Description du modèle

---

de clients dans l'espace d'attente est égal à  $K - C$  ou inférieur à  $K - C$ . Dans le premier cas, il quitte temporairement la zone de service pour rejoindre le groupe de clients bloqués (orbite); dans le second cas, il est tenu d'attendre dans l'espace d'attente.

Tout client en orbite va répéter à plusieurs reprises ses tentatives jusqu'au moment où il trouve soit un serveur inactif ou une position d'attente libre. Les temps de rappels sont répartis de façon exponentielle avec la fonction de répartition  $T(x) = 1 - e^{-\theta x}$ ,  $x \geq 0$  et le taux  $\theta > 0$ . Il s'agit d'une politique des rappels classique: les tentatives répétées sont faites individuellement par chaque client bloqué et le taux total des rappels est  $j\theta$  lorsque la taille de l'orbite est  $j \geq 0$ . Les clients positifs en attente (les clients dans l'espace d'attente) abandonneront le système si leur seuil de patience est dépassé. Nous supposons que les clients abandonnent après avoir attendu un temps exponentiellement distribué avec la fonction de répartition  $W(x) = 1 - e^{-\gamma x}$ ,  $x \geq 0$  et le taux  $\gamma > 0$ .

Une arrivée négative a pour effet de supprimer un certain nombre de clients du service. Soit  $q_s$  la probabilité de supprimer  $1 \leq s \leq C$  clients lorsqu'une arrivée négative se produit. Ainsi, le taux d'effacement est définie par  $\eta_s = \nu q_s$ . Les temps de service suivent une loi exponentielle de fonction de répartition  $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$ ,  $x \geq 0$  et de moyenne finie ( $\frac{1}{\mu}$ ). Enfin, nous admettons l'hypothèse de l'indépendance mutuelle entre toutes les variables aléatoires définies ci-dessus.

L'état du système à l'instant  $t$  peut être décrit au moyen du processus  $\{C(t), N_o(t), t \geq 0\}$ , où  $C(t)$  est le nombre de clients dans les zones de service et d'attente,  $N_o(t)$  représente le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ . Il s'agit d'une chaîne de Markov continue avec un espace d'états  $S = \{0, 1, \dots, C, C + 1, \dots, K\} \times N$ . Ses taux de transition infinitésimaux  $q_{ij}(k, l)$  sont donnés par:

1. Pour  $0 \leq i \leq C - 1$

$$q_{ij}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i + 1, j) \\ i\mu & \text{si } (k, l) = (i - 1, j) \\ \eta_s & \text{si } (k, l) = (i - s, j), 1 \leq s \leq i \\ j\theta & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1) \\ -(\lambda + i\mu + j\theta + \eta_s) & \text{si } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

2. Pour  $C \leq i \leq K - 1$

$$q_{ij}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i + 1, j) \\ C\mu + (i - C)\gamma & \text{si } (k, l) = (i - 1, j) \\ \eta_s & \text{si } (k, l) = (i - s, j), 1 \leq s \leq i \\ j\theta & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1) \\ -(\lambda + C\mu + (i - C)\gamma + j\theta + \eta_s) & \text{si } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

3. Pour  $i = K$

$$q_{Kj}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (K, j + 1) \\ C\mu + (K - C)\gamma & \text{si } (k, l) = (K - 1, j) \\ -(\lambda + C\mu + (K - C)\gamma) & \text{si } (k, l) = (K, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Le graphe des transitions est présenté dans la Figure (3.2.1).

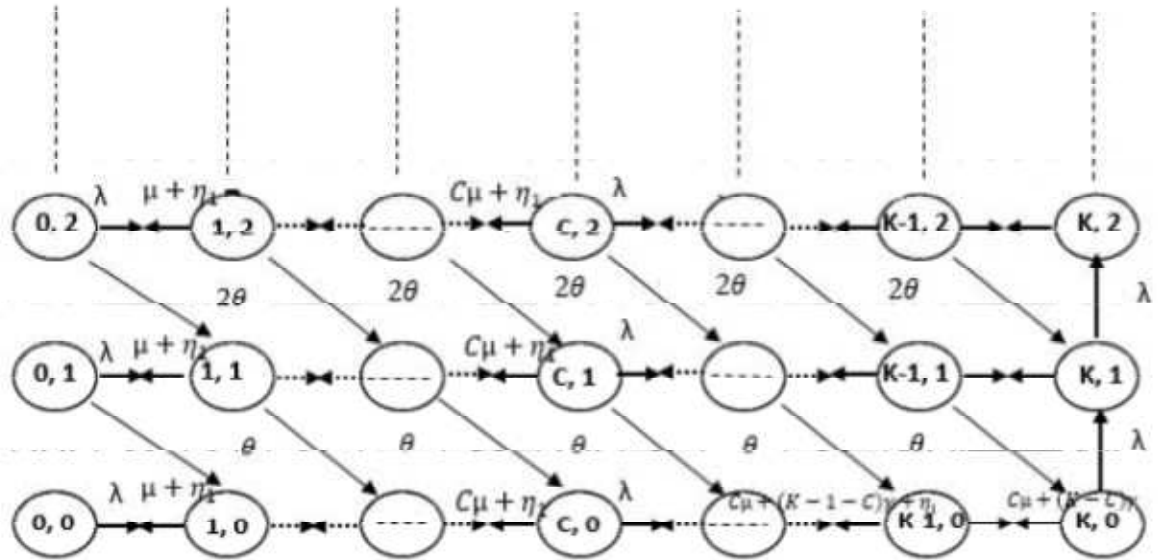
Puisque le modèle à étudier a une structure complexe incluant les arrivées négatives, les rappels et les abandons, son analyse mathématique présente un intérêt particulier ainsi qu'une difficulté analytique particulière.

### 3.3 Condition d'existence d'un régime stationnaire

La question suivante à étudier est l'ergodicité du processus de Markov  $\{C(t), N_o(t), t \geq 0\}$ .



Figure 3.2.1 : Graphe des transitions du modèle étudié.



**Théorème 3.3.1** [91] *Le processus de Markov  $\{C(t), N_o(t), t \geq 0\}$  est ergodique si et seulement si  $\lambda < C\mu + (K - C)\gamma$ .*

**Preuve**

### Condition suffisante pour l'ergodicité

Nous utilisons un critère basé sur les accroissements moyens (théorie des fonctions de Lyapunov [64]), en particulier un résultat (nommé théorème de Tweedie dans [33]) donné dans [80], qui définit les hypothèses pour qu'un processus de Markov soit régulier et ergodique [46, 47].

**Théorème 3.3.2** *Soit  $X(t)$  un processus de Markov avec espace d'états discret  $S$  et taux de transition  $q_{sp}$ ,  $s, p \in S$ ,  $\sum_p q_{sp} = 0$ . Supposons qu'il existe:*

- *une fonction  $\varphi(s)$ ,  $s \in S$  bornée en bas (cette fonction est appelée fonction test ou fonction de Lyapunov);*
- *un nombre positif  $\epsilon$  tel que:*

### 3.3. Condition d'existence d'un régime stationnaire

---

- (a) variables  $y_s = \sum_{p \neq s} q_{sp} (\varphi(p) - \varphi(s)) < \infty$ , pour tous  $s \in S$ ;  
 (b)  $y_s \leq -\epsilon$  pour tous  $s \in S$  sauf peut être un nombre fini d'états.

Alors le processus  $X(t)$  est régulier et ergodique.

Nous considérons la fonction de test suivante  $\varphi(s) \equiv \varphi(i, j) = ai + j$ , où  $a$  est un paramètre inconnu et  $s \in S$ . Les accroissements moyens  $y_s \equiv y_{ij}$  sont donnés par:

$$y_{ij} = \begin{cases} \lambda a + i\mu(-a) + s\eta_s(-a) + j\theta(a-1), & \text{si } 0 \leq i \leq C-1 \\ \lambda a + (C\mu + (i-C)\gamma)(-a) + s\eta_s(-a) + j\theta(a-1), & \text{si } C \leq i \leq K-1 \\ \lambda + (C\mu + (K-C)\gamma)(-a), & \text{si } i = K \end{cases} .$$

Puisque pour tout  $i = 0, 1, \dots, K$ , il existe

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_{ij} = L_i = \begin{cases} (a-1) \cdot \infty, & \text{si } 0 \leq i \leq C-1 \\ (a-1) \cdot \infty, & \text{si } C \leq i \leq K-1 \\ \lambda - a[C\mu + (K-C)\gamma], & \text{si } i = K \end{cases} ;$$

les hypothèses du théorème de Tweedie restent vraies si et seulement si toutes les variables  $L_i$  sont négatives. Ainsi,

$$\begin{aligned} a-1 &< 0; \\ a-1 &< 0; \\ \lambda - a[C\mu + (K-C)\gamma] &< 0. \end{aligned}$$

Ces conditions représentent un ensemble d'inégalités linéaires pour le paramètre inconnu  $a$ . Ces conditions peuvent être écrites sous la forme

$$\frac{\lambda}{[C\mu + (K-C)\gamma]} < a < 1.$$

Un tel  $a$  peut être trouvé si l'intervalle  $((\lambda/(C\mu + (K-C)\gamma)), 1)$  est non vide, c'est-à-dire si  $\lambda < C\mu + (K-C)\gamma$ .

La dernière expression est une condition suffisante pour l'ergodicité du modèle étudié.

### Condition nécessaire pour l'ergodicité

Pour prouver que la condition ci-dessus est aussi une condition nécessaire, on applique le théorème suivant.

**Théorème 3.3.3** [59]: Soit  $\{\zeta_n\}$  une chaîne de Markov avec espace d'états  $S$  et probabilités de transition  $r_{sp}$ . Supposons qu'il existe:

- Une fonction non négative  $\varphi(s)$ ,  $s \in S$ , telle que pour un certains  $d$  on a

$$r_{sp} \neq 0: |\varphi(s) - \varphi(p)| \leq d;$$

- Un nombre positif  $b$  tel que :

(a) L'ensemble  $A_b \equiv \{s \in S / \varphi(s) > b\} \neq \emptyset$  ;

(b)  $\inf_{s \in A_b} x_s \equiv \inf_{s \in A_b} E(\varphi(\zeta_{n+1}) - \varphi(s) / \zeta_n = s)$  est non négatif (ou positif).

Alors la chaîne  $\{\zeta_n\}$  est non-ergodique (n'admet pas un régime stationnaire ou elle est transitoire).

Considérons  $\{\zeta_n\}$  une chaîne de Markov induite pour le processus de Markov défini ci-dessus  $\{C(t), N_o(t), t \geq 0\}$ . Ses probabilités de transition sont données par

1. Pour  $0 \leq i \leq C - 1$

$$r_{ij}(k, l) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda + i\mu + j\theta + \eta_s} & \text{si } (k, l) = (i + 1, j) \\ \frac{i\mu}{\lambda + i\mu + j\theta + \eta_s} & \text{si } (k, l) = (i - 1, j) \\ \frac{\eta_s}{\lambda + i\mu + j\theta + \eta_s} & \text{si } (k, l) = (i - s, j), 1 \leq s \leq i \ ; \\ \frac{j\theta}{\lambda + i\mu + j\theta + \eta_s} & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Pour  $C \leq i \leq K - 1$

$$r_{ij}(k, l) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda + C\mu + (i - C)\gamma + j\theta + \eta_s} & \text{si } (k, l) = (i + 1, j) \\ \frac{C\mu + (i - C)\gamma}{\lambda + C\mu + (i - C)\gamma + j\theta + \eta_s} & \text{si } (k, l) = (i - 1, j) \\ \frac{\eta_s}{\lambda + C\mu + (i - C)\gamma + j\theta + \eta_s} & \text{si } (k, l) = (i - s, j), 1 \leq s \leq i \ ; \\ \frac{j\theta}{\lambda + C\mu + (i - C)\gamma + j\theta + \eta_s} & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 3.3. Condition d'existence d'un régime stationnaire

---

3. Pour  $i = K$

$$r_{Kj}(k, l) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda + C\mu + (K-C)\gamma} & \text{si } (k, l) = (K, j + 1) \\ \frac{C\mu + (K-C)\gamma}{\lambda + C\mu + (K-C)\gamma} & \text{si } (k, l) = (K - 1, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Supposons que  $\lambda \geq C\mu + (K - C)\gamma$  et considérons la fonction de test  $\varphi(i, j) = i + j$ .

Alors,

- Si  $r_{ij}(n, m) \neq 0$ , alors  $|i - n| \leq 1, |j - m| \leq 1$ . Par conséquent:

$$|\varphi(i, j) - \varphi(n, m)| = |i - n + j - m| \leq |i - n| + |j - m| \leq 2.$$

- Puisque la variable  $b$  peut prendre un nombre positif quelconque. Alors,

$$(a) A_b = \{(i, j) / i = 0, 1, \dots, K; j > \max(b - i, 0)\} \neq \emptyset;$$

(b)

$$x_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda - i}{\lambda + i\mu + j\theta + \eta_s} & \text{si } 0 \leq i \leq C - 1 \\ \frac{\lambda - i}{\lambda + C\mu + (i - C)\gamma + j\theta + \eta_s} & \text{si } C \leq i \leq K - 1 \\ \frac{\lambda - K}{\lambda + C\mu + (K - C)\gamma} & \text{si } i = K \end{cases} .$$

Ainsi, la variable  $x_{ij}$  est toujours non négative et de plus  $x_{ij} \geq 0$  pour  $(i, j) \in A_b$ . Par conséquent, le processus de Markov  $\{C(t), N_o(t); t \geq 0\}$  est non-ergodique.

A présent, considérons le cas où  $\lambda > C\mu + (K - C)\gamma$  et la fonction test est  $\varphi(i, j) = ai + j$  avec  $a \in (1, (\lambda / (C\mu + (K - C)\gamma)))$ . Alors:

- Si  $r_{ij}(n, m) \neq 0$  alors  $|i - n| \leq 1, |j - m| \leq 1$ .

Par conséquent,  $|\varphi(i, j) - \varphi(n, m)| = |a(i - n) + j - m| \leq a|i - n| + |j - m| \leq a + 1$ , c'est à dire  $d = a + 1$ .

- L'ensemble  $A_b$  est non vide quelque soit  $b > 0$ . Alors, on doit choisir  $b$  de telle sorte que  $\inf_{(i, j) \in A_b} x_{ij} > 0$ . Mais pour  $i = K$ ,  $x_{Kj} = \frac{\lambda - aK}{\lambda + C\mu + (K - C)\gamma} > 0$  (pour tous  $j$ ); et pour  $0 \leq i \leq K - 1, \lim_{j \rightarrow \infty} x_{ij} = a - 1 > 0$ .

Par conséquent pour tout  $i = 0, 1, \dots, K$ , il existe  $N_i$  tel que  $x_{ij} > \frac{a-1}{2}$  pour tout  $N_i$ . Ici,  $N_i$  est le nombre de  $i$ -clients en orbite. Si  $\epsilon = \min \left\{ \frac{\lambda - aK}{\lambda + C\mu + (K - C)\gamma}, \frac{a-1}{2} \right\}$ , alors  $x_{ij} \geq \epsilon$  pour

tout  $(i, j) \in S$  sauf pour  $(i, j)$  tels que  $i = 0, 1, \dots, K-1$  et  $0 \leq j \leq N_i-1$ . Supposons que  $b$  est assez grand pour que l'ensemble  $A_b$  ne contienne pas ces états. Alors  $x_{ij} \geq \epsilon$ , pour tout  $(i, j) \in A_b$ , ou  $\inf_{(i,j) \in A_b} x_{ij} \geq \epsilon > 0$ . En conséquence, la chaîne de Markov à temps continu  $\{C(t), N_o(t), t \geq 0\}$  est non-ergodique.

Enfin, le processus de Markov considéré  $\{C(t), N_o(t), t \geq 0\}$  est ergodique si et seulement si  $\lambda < C\mu + (K - C)\gamma$ . ■

### 3.4 Régime stationnaire

Supposons que la condition d'ergodicité  $\lambda < C\mu + (K - C)\gamma$  soit satisfaite. Soit

$$P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) = i, N_o(t) = j), \quad (i, j) \in S,$$

la distribution conjointe stationnaire du nombre de clients dans les zones de service et d'attente et du nombre de clients en orbite, pour laquelle les équations de Kolmogorov sont données par:

$$\begin{aligned} (\lambda + i\mu + j\theta + \eta_s)P_{ij} &= \lambda P_{i-1,j} + (j+1)\theta P_{i-1,j+1} + ((i+1)\mu + \eta_s)P_{i+1,j}, \\ 0 \leq i \leq C-1 \text{ et } j \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda + C\mu + (i-C)\gamma + j\theta + \eta_s)P_{ij} &= \lambda P_{i-1,j} + (j+1)\theta P_{i-1,j+1} \\ &+ (C\mu + (i+1-C)\gamma + \eta_s)P_{i+1,j}, \\ C \leq i \leq K-2 \text{ et } j \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda + C\mu + (i-C)\gamma + j\theta + \eta_s)P_{ij} &= \lambda P_{i-1,j} + (j+1)\theta P_{i-1,j+1} \\ &+ (C\mu + (i+1-C)\gamma)P_{i+1,j}, \\ i = K-1 \text{ et } j \geq 0; \end{aligned}$$

$$(\lambda + C\mu + (K - C)\gamma)P_{K,j} = \lambda P_{K-1,j} + (j + 1)\theta P_{K-1,j+1} + \lambda P_{K,j-1},$$

$$i = K \text{ et } j \geq 0;$$

$$\sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1.$$

La distribution stationnaire  $P_{ij}$  contribue à l'obtention des mesures de performance, telles que:

- probabilité de blocage  $P_K = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) = K)$ ;
- nombre moyen de clients en orbite  $\bar{N}_o = \lim_{t \rightarrow \infty} E[N_o(t)]$ ;
- nombre moyen de clients dans les zones de service et d'attente  $\bar{C} = \lim_{t \rightarrow \infty} E[C(t)]$ .

Les caractéristiques essentielles de l'espace d'états du modèle considéré sont: sa dimension infinie (due à l'orbite illimitée) et la non-homogénéité le long de celui-ci (produite par la caractéristique des rappels). On ne peut donc pas obtenir la solution analytique exacte pour la distribution stationnaire  $P_{ij}$ . Dans ces circonstances, nous nous intéressons à deux approches approximatives: la Troncature Finie et l'Extrapolation de Valeur.

## 3.5 Troncature Finie

La manière intuitive d'exécuter la procédure de troncature consiste à inclure dans la description du modèle la condition selon laquelle le nombre maximal de clients en orbite ne dépasse pas une valeur  $M$  (choisie suffisamment grande). Cependant, la mise en oeuvre de ce schéma de troncature peut conduire à prendre en compte un grand nombre d'états avec des probabilités négligeables. Vu la méthodologie, qui est proposée dans [77] et décrite dans le paragraphe 2.2.2, cet inconvénient peut être atténué en explorant toutes les directions dans l'espace d'états considéré où les probabilités d'état diminuent, puis en déterminant des frontières de troncature. Nous avons donc la possibilité de fournir

l'erreur relative donnée de l'estimation des mesures de performance.

Supposons que la taille de l'orbite de notre modèle soit bornée par une constante donnée  $M$ , choisie de manière appropriée. Dans le cadre de l'hypothèse ci-dessus, le nouveau processus  $\{C^{(M)}(t), N_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$  est un Markovien avec l'espace d'états  $S^{(M)} = \{0, \dots, C, C+1, \dots, K-1, K\} \times \{0, 1, \dots, M\}$ . En supposant que le taux de service  $\mu = 1$  (ceci est toujours possible sans perte de généralité), nous avons les taux de transition infinitésimaux suivants  $q_{ij}^{(M)}(k, l)$ :

1. Pour  $0 \leq i \leq C-1, 0 \leq j \leq M-1$

$$q_{ij}^{(M)}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i+1, j) \\ i & \text{si } (k, l) = (i-1, j) \\ \eta_s & \text{si } (k, l) = (i-s, j), 1 \leq s \leq i \\ j\theta & \text{si } (k, l) = (i+1, j-1) \\ -(\lambda + i + j\theta + \eta_s) & \text{si } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

2. Pour  $0 \leq i \leq C-1, j = M$

$$q_{iM}^{(M)}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i+1, M) \\ i & \text{si } (k, l) = (i-1, M) \\ \eta_s & \text{si } (k, l) = (i-s, M), 1 \leq s \leq i \\ M\theta & \text{si } (k, l) = (i+1, M-1) \\ -(\lambda + i + M\theta + \eta_s) & \text{si } (k, l) = (i, M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

3. Pour  $C \leq i \leq K - 1, 0 \leq j \leq M - 1$

$$q_{ij}^{(M)}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i + 1, j) \\ C + (i - C)\gamma & \text{si } (k, l) = (i - 1, j) \\ \eta_s & \text{si } (k, l) = (i - s, j), 1 \leq s \leq i \\ j\theta & \text{si } (k, l) = (i + 1, j - 1) \\ -(\lambda + C + (i - C)\gamma + j\theta + \eta_s) & \text{si } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

4. Pour  $C \leq i \leq K - 1, j = M$

$$q_{iM}^{(M)}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i + 1, M) \\ C + (i - C)\gamma & \text{si } (k, l) = (i - 1, M) \\ \eta_s & \text{si } (k, l) = (i - s, M), 1 \leq s \leq i \\ M\theta & \text{si } (k, l) = (i + 1, M - 1) \\ -(\lambda + C + (i - C)\gamma + M\theta + \eta_s) & \text{si } (k, l) = (i, M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

5. Pour  $i = K, 0 \leq j \leq M - 1$

$$q_{Kj}^{(M)}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (K, j + 1) \\ C + (K - C)\gamma & \text{si } (k, l) = (K - 1, j) \\ -(\lambda + C + (K - C)\gamma) & \text{si } (k, l) = (K, j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

6. Pour  $i = K, j = M$

$$q_{KM}^{(M)}(k, l) = \begin{cases} C + (K - C)\gamma & \text{si } (k, l) = (K - 1, M) \\ -(C + (K - C)\gamma) & \text{si } (k, l) = (K, M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Comme l'espace d'états  $S^{(M)}$  est fini, le processus  $\{C^{(M)}(t), N_o^{(M)}(t), t \geq 0\}$  est toujours ergodique. Sa distribution en régime stationnaire

$P_{ij}^{(M)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C^{(M)}(t) = i, N_o^{(M)}(t) = j)$  satisfait aux équations suivantes:



$$(\lambda + i + j\theta + \eta_s)P_{ij}^{(M)} = \lambda P_{i-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta P_{i-1,j+1}^{(M)} + ((i+1) + \eta_s)P_{i+1,j}^{(M)}, \quad (3.5.1)$$

$$0 \leq i \leq C-1, \quad 0 \leq j \leq M-1;$$

$$(\lambda + C + (i-C)\gamma + j\theta + \eta_s)P_{ij}^{(M)} = \lambda P_{i-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta P_{i-1,j+1}^{(M)} \quad (3.5.2)$$

$$+(C + (i+1-C)\gamma + \eta_s)P_{i+1,j}^{(M)},$$

$$C \leq i \leq K-2, \quad 0 \leq j \leq M-1;$$

$$(\lambda + C + (i-C)\gamma + j\theta + \eta_s)P_{ij}^{(M)} = \lambda P_{i-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta P_{i-1,j+1}^{(M)} \quad (3.5.3)$$

$$+(C + (i+1-C)\gamma + \eta_s)P_{i+1,j}^{(M)},$$

$$i = K-1, \quad 0 \leq j \leq M-1;$$

$$(\lambda + i + M\theta + \eta_s)P_{iM}^{(M)} = \lambda P_{i-1,M}^{(M)} + ((i+1) + \eta_s)P_{i+1,M}^{(M)}, \quad (3.5.4)$$

$$0 \leq i \leq C-1, \quad j = M;$$

$$(\lambda + C + (i-C)\gamma + M\theta + \eta_s)P_{iM}^{(M)} = (C + (i+1-C)\gamma + \eta_s)P_{i+1,M}^{(M)} \quad (3.5.5)$$

$$+\lambda P_{i-1,M}^{(M)},$$

$$C \leq i \leq K-2, \quad j = M;$$

$$(\lambda + C + (i-C)\gamma + M\theta + \eta_s)P_{iM}^{(M)} = (C + (i+1-C)\gamma)P_{i+1,M}^{(M)} \quad (3.5.6)$$

$$+\lambda P_{i-1,M}^{(M)},$$

$$i = K-1, \quad j = M;$$

$$(\lambda + C + (K-C)\gamma)P_{K,j}^{(M)} = \lambda P_{K-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta P_{K-1,j+1}^{(M)} + \lambda P_{K,j-1}^{(M)}, \quad (3.5.7)$$

$$i = K, \quad 0 \leq j \leq M-1;$$

$$(C + (K-C)\gamma)P_{K,M}^{(M)} = \lambda P_{K-1,M}^{(M)} + \lambda P_{K,M-1}^{(M)}, \quad (3.5.8)$$

$$i = K, \quad j = M;$$

$$\sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^M P_{ij}^{(M)} = 1. \quad (3.5.9)$$

Cet ensemble d'équations peut être résolu par un algorithme récursif, décrit dans le paragraphe 2.2.3, et nous permet de trouver certaines variables  $r_{ij}^{(M)} = \frac{P_{ij}^{(M)}}{P_{0M}^{(M)}}$ ,  $0 \leq i \leq K$  et  $0 \leq j \leq M$ . Ensuite, on calcule les probabilités  $P_{ij}^{(M)} = \frac{r_{ij}^{(M)}}{\sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^M r_{ij}^{(M)}}$ . En prenant en considération les spécificités de notre modèle, nous avons adapté cet algorithme pour calculer les mesures de performance introduites ci-dessus pour le système tronqué:

$$P_K^{(M)} = \sum_{j=0}^M r_{Kj}^{(M)} P_{0M}^{(M)};$$

$$\overline{N}_o^{(M)} = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^M jr_{ij}^{(M)} P_{0M}^{(M)};$$

$$\overline{C}^{(M)} = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^M ir_{ij}^{(M)} P_{0M}^{(M)}.$$

**Remarque 3.5.1** *Les détails de cette adaptation sont dans l'Annexe A.*

Pour obtenir le niveau de troncature approprié  $M$ , nous avons utilisé la méthode proposée dans [77]. Par exemple, pour les valeurs des paramètres du système suivants:  $K = 5$ ,  $C = 3$ ,  $\lambda = 4$ ,  $\mu = 1$ ,  $\nu = 1$ ,  $q_1 = 0,2$ ,  $\theta = 3$  et  $\gamma = 2$ , le niveau en question  $M \approx 22$ . Ce fait est confirmé dans la Table 3.1, lorsque, en appliquant l'algorithme adapté, nous avons calculé les mesures de performance considérées pour différentes valeurs de  $M$ .

**Tableau 3.1:** Exemple de choix du niveau de troncature.

$M$	$P_K^{(M)}$	$\bar{N}_o^{(M)}$	$\bar{C}^{(M)}$
0	0.1250	0.0000	2.8996
2	0.1815	0.3309	3.1150
6	0.2130	0.6097	3.2134
10	0.2176	0.6725	3.2260
15	0.2182	0.6844	3.2276
20	0.2183	0.6855	3.2277
22	0.2183	0.6856	3.2277
30	0.2183	0.6856	3.2277
50	0.2183	0.6856	3.2277
60	0.2183	0.6856	3.2277
70	0.2183	0.6856	3.2277
80	0.2183	0.6856	3.2277
100	0.2183	0.6856	3.2277
$\infty$	0.2183	0.6856	3.2277

## 3.6 Extrapolation de Valeur

L'idée de la méthode Extrapolation de Valeur est de considérer le système dans le contexte des Processus de Markov Décisionnels et d'obtenir la valeur prévue à partir des équations de Howard écrites pour un espace d'état tronqué.

Considérons notre système. En utilisant les taux de transition donnés dans le paragraphe 3.2 et en suivant la méthodologie d'application de cette approche, décrite dans le paragraphe 2.5, nous pouvons écrire les équations de Howard suivantes:

$$\begin{aligned}
 & r(i, j) - \bar{r} + \lambda(v(i+1, j) - v(i, j)) + i\mu(v(i-1, j) - v(i, j)) & (3.6.1) \\
 & + j\theta(v(i+1, j-1) - v(i, j)) + \eta_s(v(i-s, j) - v(i, j)) = 0, \\
 & 0 \leq i \leq C-1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & r(i, j) - \bar{r} + \lambda(v(i+1, j) - v(i, j)) + (C\mu + (i-C)\gamma)(v(i-1, j) & (3.6.2) \\
 & -v(i, j)) + j\theta(v(i+1, j-1) - v(i, j)) + \eta_s(v(i-s, j) - v(i, j)) = 0, \\
 & C \leq i \leq K-1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & r(K, j) - \bar{r} + (C\mu + (K-C)\gamma)(v(K-1, j) - v(K, j)) & (3.6.3) \\
 & + \lambda(v(K, j+1) - v(K, j)) = 0, \\
 & i = K.
 \end{aligned}$$

Ici,  $\bar{r}$  représente soit la probabilité de blocage  $P_K$ , ou le nombre moyen de clients en orbite  $\bar{N}_o$ , ou le nombre moyen de clients dans les zones de service et d'attente  $\bar{C}$ . Nous supposons également (sans perte de généralité) qu'un client négatif, lors d'une arrivée, supprime un seul client en service, alors  $\eta_s = \eta_1$ . Ceci est assez réaliste: dans un centre d'appels, on observe plus fréquemment qu'une seule ligne téléphonique souffre de l'interruption de service.

Comme l'espace d'état  $S$  du processus  $\{C(t), N_o(t), t \geq 0\}$  est infini, nous effectuerons une procédure de troncature pour obtenir  $\hat{S} := \{s = (i, j) : 0 \leq i \leq K, 0 \leq j \leq M\}$ . Le nombre d'équations de Howard correspond au nombre d'états,  $|\hat{S}|$ , et le nombre d'inconnues est défini par  $|\hat{S}|$  valeurs d'état relatives plus le taux moyen de revenu  $\bar{r}$ . Cependant, comme seules les différences dans les valeurs relatives apparaissent dans les équations de Howard, on peut fixer  $v(0) = 0$ . Nous avons donc un système linéaire d'équations avec le même nombre d'équations que d'inconnues. Maintenant nous pouvons fixer les taux de revenus afin d'obtenir les mesures de performance (voir Table 3.2):

**Tableau 3.2:** Définition de la fonction revenu.

Probabilité de blocage	$P_K$	$r(i, j) = 1$ pour $i = K$ et $0 \leq j \leq M$ $r(i, j) = 0$ sinon
Nombre moyen de clients en orbite	$\bar{N}_o$	$r(i, j) = j$ , pour $0 \leq i \leq K$ et $0 \leq j \leq M$ $r(i, j) = 0$ sinon
Nombre moyen de serveurs occupés	$\bar{C}$	$r(i, j) = i$ , pour $0 \leq i \leq K$ et $0 \leq j \leq M$ $r(i, j) = 0$ sinon

Le point suivant à étudier est la détermination des valeurs d'état relatives extrapolées,  $v(s)$ . Pour cela, nous devons choisir une fonction d'extrapolation  $f(s)$  qui extrapole quelques points  $(s, v(s))$  pour  $s \in \hat{S}$  de sorte qu'elle s'approche également de  $(s, v(s))$  pour  $s \notin \hat{S}$ . Comme c'était mentionné au paragraphe 2.5, nous avons deux types de procédures d'extrapolation selon le fait que nous utilisons toutes les paires  $(s, v(s))$  de l'espace d'états ou un sous-ensemble de celles-ci,  $S_f$ . Le choix d'une fonction d'extrapolation et d'un sous-ensemble  $S_f$  est régi par le fait que le nombre de différentes paires  $(s, v(s))$  dans le sous-ensemble en question doit être égal ou supérieur au nombre de coefficients dans le polynôme. De plus, le choix de  $S_f$  dépend aussi de la valeur d'état relative que nous voulons extrapoler. Ainsi, nous avons un problème d'interpolation. Le polynôme, sous forme de Lagrange, est  $L(w) = \prod_{j=0}^{n-1} v(w_j) l_j(w)$ , où

$$l_j(w) = \prod_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{w-w_i}{w_j-w_i} = \frac{w-w_0}{w_j-w_0} \cdots \frac{w-w_{j-1}}{w_j-w_{j-1}} \frac{w-w_{j+1}}{w_j-w_{j+1}} \cdots \frac{w-w_{n-1}}{w_j-w_{n-1}}.$$

Pour le problème de troncature en question, nous aurons une équation de Howard (voir l'équation (3.6.3) pour  $j = M + 1$ ) dans laquelle apparaît la valeur d'état  $v(K, M + 1)$  de l'état  $(K, M + 1)$  qui n'appartient pas à  $\hat{S}$ . Par conséquent, nous devons approximer  $v(K, M + 1)$  en utilisant certaines valeurs d'état relatives des états appartenant à  $\hat{S}$ . Il est important de souligner que l'extrapolation de  $v(K, M + 1)$  sera réalisée en utilisant les états de forme  $s = (K, j)$  (avec des valeurs différentes de  $j$ ). Avec ce choix, on peut définir la cartographie  $w$  comme  $w = w((K, j)) = j$ . De plus, nous utilisons un polynôme

### 3.6. Extrapolation de Valeur

---

de degré  $(n - 1)$  pour interpoler les  $n$  points dans  $S_f := \{s_i = (K, M - i) | i = 0, \dots, n - 1\}$ .

Par conséquent,  $w(S_f) = \{w_i = M - i | i = 0, \dots, n - 1\}$ :

$$w_0=M \longrightarrow v(w_0) = v(K, M);$$

$$w_1=M - 1 \longrightarrow v(w_1) = v(K, M - 1);$$

$$w_{n-1}=M - (n - 1) \longrightarrow v(w_{n-1}) = v(K, M - (n - 1)).$$

De cette manière, l'expression générale de la valeur d'état relative extrapolée est

$$v^{(n)}(K, M + 1)=L^{(n)}(M + 1) = \sum_{j=0}^{n-1} v(K, M - j)l_j(M + 1).$$

Par exemple, dans le cas de l'extrapolation linéaire avec  $n = 2$ , nous utilisons  $(M, v(K, M))$  et  $(M - 1, v(K, M - 1))$ . Alors

$$\begin{aligned} v^{(2)}(K, M + 1) &= L^{(2)}(M + 1) = v(K, M)l_0(M + 1) + v(K, M - 1)l_1(M + 1) \\ &= v(K, M) \frac{(M+1)-(M-1)}{(M-(M-1))} + v(K, M - 1) \frac{((M+1)-M)}{((M-1)-M)} \\ &= 2v(K, M) - v(K, M - 1). \end{aligned}$$

Suivant une procédure similaire, nous obtenons les relations suivantes pour  $n = 3$  et  $n = 4$ , respectivement:

$$v^{(3)}(K, M + 1) = 3v(K, M) - 3v(K, M - 1) + v(K, M - 2);$$

$$v^{(4)}(K, M + 1) = 4v(K, M) - 6v(K, M - 1) + 4v(K, M - 2) - v(K, M - 3).$$

### 3.6. Extrapolation de Valeur

---

Enfin, pour le polynôme de degré  $(n - 1)$ , en utilisant la base de Lagrange pour réduire la complexité de la procédure, on obtient l'expression suivante pour la valeur d'état relative extrapolée:

$$v^{(n)}(K, M + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^{k+1} v(K, M - j),$$

où  $n$  est le nombre de coefficients pris pour le polynôme de Lagrange.

Pour le modèle étudié, il suffit de remplacer  $v(K, M + 1)$  par sa valeur approximative dans l'équation de Howard qui correspond à l'état  $(K, M + 1)$ . Par exemple, si on utilise l'extrapolation linéaire ( $n = 2$ ), cette équation (voir (3.6.3)) devient:

$$r(K, M) - \bar{r} + v(K, M)(-\lambda - C\mu - (K - C)\gamma) + (C\mu + (K - C)\gamma)v(K - 1, M) + \lambda v(K, M + 1) = 0;$$

$$r(K, M) - \bar{r} + v(K, M)(\lambda - C\mu - (K - C)\gamma) + (C\mu + (K - C)\gamma)v(K - 1, M) - \lambda v(K, M - 1) = 0.$$

Comme  $v(K, M + 1)$  n'apparaît plus dans les équations de Howard, nous avons un système linéaire de  $(K + 1) \times (M + 1)$  équations avec le même nombre d'inconnues. Les équations de Howard (3.6.1)-(3.6.3) peuvent être exprimées sous une forme matricielle  $xT = b$ , où  $x$  est un vecteur ayant  $(K + 1) \times (M + 1)$  inconnues et  $b$  contient les taux de revenu négatifs:

$$x = [\bar{r}, v(0, 1), \dots, v(0, M), v(1, 0), \dots, v(C, 0), \dots, v(C, M), \dots, v(K, 0), \dots, v(K, M)];$$

$$b = [-r(0, 0), -r(0, 1), \dots, -r(C, 0), -r(C, 1), \dots, -r(K, M)].$$

La matrice  $T$  peut être construite en mettant tous les éléments de la première ligne de  $T'$  égaux à -1, c'est-à-dire tous les éléments de la première rangée de toutes les sous-matrices qui sont en première ligne de la matrice  $T'$  sera remplacée par -1. Initialement, la matrice  $T'$  est donnée par

$$T' = \begin{bmatrix} A_1^0 & A_0^0 & O & \cdots & O & O & O \\ A_2^1 & A_1^1 & A_0^1 & \cdots & O & O & O \\ O & A_2^2 & \ddots & \ddots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & A_1^C & A_0^C & \vdots & \vdots \\ O & O & O & A_2^C & \ddots & \ddots & O \\ O & O & O & \cdots & \ddots & A_1^{K-1} & A_0^{K-1} \\ O & O & O & \cdots & O & A_2^K & A_1^K \end{bmatrix},$$

où chaque sous-matrice a la dimension  $(M + 1) \times (M + 1)$  et  $O$  est la matrice nulle.

$$A_0^i = ((i + 1)\mu + \eta_s)I, \quad 0 \leq i \leq C - 1;$$

$$A_0^i = (C\mu + (i + 1 - C)\gamma + \eta_s)I, \quad C \leq i \leq K - 2;$$

$$A_0^i = (C\mu + (i + 1 - C)\gamma)I, \quad i = K - 1;$$

$$A_2^i = \begin{bmatrix} \lambda & \theta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & M\theta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq K;$$

$$A_1^i = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha - \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 2\theta & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha - M\theta \end{bmatrix},$$

où  $\alpha = -\lambda - i\mu - \eta_1$  pour  $0 \leq i \leq C - 1$  et  $\alpha = -\lambda - C\mu - (i - C)\gamma - \eta_1$  pour  $C \leq i \leq K - 1$ .

Lorsque  $i = K$ , en utilisant les extrapolations linéaire ( $n = 2$ ) et quadratique ( $n = 3$ ), nous obtenons respectivement,



### 3.6. Extrapolation de Valeur

$$A_1^K = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & -\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \lambda - C\mu - (K - C)\gamma \end{bmatrix}, \quad A_1^K = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & -3\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 2\lambda - C\mu - (K - C)\gamma \end{bmatrix},$$

où  $\beta = -\lambda - C\mu - (K - C)\gamma$ . Ainsi, si l'extrapolation est faite avec  $n \leq M + 1$  points, la matrice  $A_1^K$  sera définie comme

$$A_1^K = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & \lambda c_M^{(n)} \\ \lambda & \beta & \cdots & 0 & \lambda c_{M-1}^{(n)} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \lambda c_{M-2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda c_2^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & \lambda c_1^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\lambda - C\mu - (K - C)\gamma + \lambda c_0^{(n)} \end{bmatrix},$$

où

$$c_l^{(n)} = \begin{cases} (-1)^l C_n^{l+1}, & \text{si } l < n \\ 0, & \text{si } l \geq n \end{cases}.$$

Nous soulignons que la taille de la matrice  $T$  ne dépend pas du degré du polynôme utilisé pour effectuer l'extrapolation; seule la dernière colonne de la matrice  $A_1^K$  dépend de l'ajustement polynomial. Il faut noter que la méthode Extrapolation de Valeur nous permet de calculer une mesure de performance chaque fois que nous résolvons le système. Cependant, on peut obtenir la solution du système  $xT = b$  en utilisant la matrice inverse de  $T$  en faisant  $x = bT^{-1}$ . Ainsi, le choix d'une autre mesure à calculer n'affectera que les valeurs en  $b$ .

Pour obtenir des estimations précises des mesures de performance considérées, nous appliquons la méthode Extrapolation de Valeur, en augmentant les valeurs de  $M$  et aussi le nombre de coefficients  $n$  (pris pour le polynôme de Lagrange), jusqu'à ce que les valeurs numériques de toutes les mesures de performance se stabilisent au 8<sup>eme</sup> chiffre décimal,

voir par exemple la Table 3.3 ( $K = 12, C = 8, \lambda = 8, \mu = 1, \nu = 1, q_1 = 0.2, \theta = 1, \gamma = 2$ ). A partir de la Table 3.3, on voit que les valeurs numériques des mesures de performance sont influencées de façon significative par le niveau de troncature  $M$  et légèrement par le degré  $(n - 1)$  du polynôme utilisé lors de l'extrapolation. Nous concluons aussi qu'il n'y a pas de choix clair dans l'ordre du meilleur polynôme. Nous observons que, les polynômes d'ordre le plus bas, et le plus élevé ne sont pas intéressants. De ce fait, par la suite, nous utiliserons donc les cas intermédiaires.

## 3.7 Conclusion

Nous avons réalisé l'analyse stochastique du modèle M/M/C/K avec rappels, abandons et arrivées négatives. Nous avons présenté deux approches de résolution du modèle en question, à savoir: Troncature Finie et Extrapolation de Valeur.

Dans le chapitre suivant, nous obtenons les résultats numériques afin d'examiner la performance de la méthode Extrapolation de Valeur dans le cas du modèle considéré. Nous étudions également la performance du système.

### 3.7. Conclusion

**Tableau 3.3:** Choix du niveau de troncature  $M$  et du degré  $(n - 1)$  de polynôme.

n-1 \ . . . M	M=3	M=5	M=7	M=9	M=10	M=11	P.M
n-1=1	0.27201430	0.27597880	0.27730480	0.27772420	0.27780650	0.27785140	$\overline{N}_o$
	0.02911269	0.02926946	0.02932649	0.02932649	0.02932859	0.02932966	$P_K$
	7.22378700	7.22332600	7.22322000	7.22319700	7.22319300	7.22319200	$\overline{C}$
n-1=2	0.27708420	0.27769810	0.27785480	0.27789250	0.27789830	0.27790110	$\overline{N}_o$
	0.02933573	0.02933412	0.02933202	0.02933113	0.02933094	0.02933084	$P_K$
	7.22302300	7.22315000	7.22318100	7.22318800	7.22318900	7.22319000	$\overline{C}$
n-1=4	-	0.27790920	0.27790360	0.27790330	0.27790340	0.27790350	$\overline{N}_o$
	-	0.02932984	0.02933050	0.02933068	0.02933071	0.02933072	$P_K$
	-	7.22319200	7.22319000	7.22319000	7.22319000	7.22319000	$\overline{C}$
n-1=5	-	0.27789630	0.27790210	0.27790330	0.27790350	0.27790360	$\overline{N}_o$
	-	0.02933059	0.02933076	0.02933075	0.02933074	0.02933073	$P_K$
	-	7.22318700	7.22319000	7.22319000	7.22319000	7.22319000	$\overline{C}$
n-1=7	-	-	0.27790390	0.27790360	0.27790360	0.27790360	$\overline{N}_o$
	-	-	0.02933069	0.02933072	0.02933072	0.02933073	$P_K$
	-	-	7.22319000	7.22319000	7.22319000	7.22319000	$\overline{C}$
n-1=9	-	-	-	0.27790360	0.27790360	0.27790360	$\overline{N}_o$
	-	-	-	0.02933073	0.02933073	0.02933073	$P_K$
	-	-	-	7.22319000	7.22319000	7.22319000	$\overline{C}$
n-1=11	-	-	-	-	-	0.27790360	$\overline{N}_o$
	-	-	-	-	-	0.02933073	$P_K$
	-	-	-	-	-	7.22319000	$\overline{C}$

---

# Performance de la méthode Extrapolation de Valeur et performance du système M/M/C/K avec rappels, abandons exponentiels et arrivées négatives

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous examinons efficacité et effectivité de l'approche Extrapolation de Valeur en comparant avec une autre approche basée sur la troncature directe de l'espace d'états infini. En outre, l'application de EV conduit à la résolution d'un certain système d'équations linéaires algébriques  $AX = b$ . Nous avons posé la question suivante: Est-ce que, dans le cas du système de files d'attente complexe étudié dans le chapitre 3, la

matrice  $A$ , ayant peu de propriétés, est réellement inversible? Etant donné l'impossibilité de réaliser une démonstration mathématique rigoureuse, nous utilisons cinq méthodes numériques pour résoudre ces systèmes linéaires.

Enfin, nous étudions l'influence des paramètres du modèle considéré sur sa performance.

## 4.2 Comparaison de EV et TF

Ce paragraphe traite des résultats numériques rendus disponibles par les procédures données en 3.5 et 3.6: Troncature Finie et Extrapolation de Valeur. Nous comparons leurs performances en termes de précision [91]. De toute évidence, pour le système de files d'attente étudié, nous ne sommes pas en mesure de calculer les valeurs exactes des mesures de performance considérées. Pour cette raison, nous supposons que les valeurs exactes peuvent être obtenues en choisissant des valeurs croissantes et suffisamment élevées du niveau de troncature  $M$  (le système considéré devient plus semblable au modèle exact à mesure que le niveau de troncature augmente). Plus particulièrement, nous exécutons les deux méthodes jusqu'à ce que les valeurs de toutes les mesures de performance se stabilisent jusqu'au 8<sup>ème</sup> chiffre décimal. Nous considérons une erreur relative  $\epsilon_y = \frac{|y^{approx} - y^{exact}|}{y^{exact}}$  où  $y$  est la mesure de performance (Probabilité de blocage  $P_K$ , Nombre moyen de clients en orbite  $\bar{N}_o$ , Nombre moyen de clients dans les zones de service et d'attente  $\bar{C}$ ) comme une référence pour comparer les méthodes utilisées.

Nous analysons les deux méthodes dans une gamme de scénarios. Tout au long de cette étude, nous gardons:

- le nombre de serveurs  $C = 8$ ;
- la capacité du système  $K = 12$ ;
- le taux de service  $\mu = 1$ ;

#### 4.2. Comparaison de EV et TF

- le taux d'abandon  $\gamma = 2$ ;
- le taux d'effacement  $\eta_1 = 0, 2$ ;
- le degré polynomial  $n - 1 = 8$ .

En prenant en compte que l'intensité du trafic  $\rho = \lambda/(C\mu+(K-C)\gamma)$  doit être inférieur à 1, nous modifions l'intensité d'arrivée des clients positifs  $\lambda$  pour étudier les effets de la charge de système  $\rho$  sur la performance des deux solutions. Le choix des valeurs du taux des rappels  $\theta$ ,  $\theta \in \{1, 10, 100\}$ , repose sur la considération intuitive (justifiée dans de nombreuses applications) le temps moyen de rappels ( $1/\theta$ ) est suffisamment petit par rapport au temps moyen de service ( $1/\mu$ ). Ainsi, pendant une période de service, un client en orbite effectue de nombreux rappels.

**Tableau 4.1:** Comparaison entre TF et EV.

P.M	$\theta$	1		10		100	
$\bar{N}_o$	$\rho$	0.5	0.75	0.5	0.75	0.5	0.75
	FT	24	66	23	60	24	57
	VE	8	23	13	23	12	21
	Valeur de $\bar{N}_o$	0.27790360	4.20388800	0.07300969	1.39122400	0.04861599	1.05695100
$P_K$	$\rho$	0.5	0.75	0.5	0.75	0.5	0.75
	FT	22	57	19	48	20	46
	VE	8	26	12	25	12	22
	Valeur de $P_K$	0.02933073	0.22249990	0.03720557	0.28178520	0.04374314	0.32660000
$\bar{C}$	$\rho$	0.5	0.75	0.5	0.75	0.5	0.75
	FT	16	48	15	40	16	39
	VE	8	19	8	18	9	14
	Valeur de $\bar{C}$	7.22319000	9.81022200	7.20986600	9.78239000	7.20715400	9.77676600

Dans la Table 4.1, nous présentons les valeurs numériques des mesures de performance  $(\overline{N}_o, P_K, \overline{C})$  et les valeurs minimales de  $M$  nécessaires pour obtenir une erreur relative inférieure à  $10^{-8}$ .

A partir de la Table 4.1, pour les deux méthodes considérées, nous pouvons voir que l'augmentation de la charge de système  $\rho$  entraîne une augmentation importante du niveau de troncature  $M$ . D'autre part, le niveau de troncature semble ne pas être très affecté par les changements du taux des rappels  $\theta$ . Les résultats numériques obtenus pour  $M$  montrent que EV dépasse nettement FT parce qu'elle a besoin d'une valeur beaucoup plus faible de  $M$  pour obtenir l'exactitude donnée dans tous les scénarios à l'étude et pour toutes les mesures de performance. Ce fait devient plus évident lorsque le système est sous un trafic intense ( $\rho = 0,75$ ).

**Remarque 4.2.1** *Dans ce paragraphe, pour résoudre le système d'équations de Howard, le logiciel abordable et personnalisable R a été utilisé.*

## 4.3 Aspects numériques

La résolution du modèle considéré à l'aide de la méthode EV conduit à résoudre un système linéaire algébrique:

$$AX = B, \tag{4.3.1}$$

où  $X$  et  $B$  sont deux vecteurs,  $X, B \in R^N$ , avec la matrice  $A$  de dimension  $N = (K + 1) \times (M + 1)$ .

**Remarque 4.3.1** *La transformation de  $xT = b$  en  $AX = B$  est donnée dans Annexe B.*

La solution numérique de (4.3.1) n'est pas a priori facile et peut être délicate. Dans notre application, la matrice  $A$  est creuse, de structure tridiagonale et éventuellement de grande dimension. En outre,  $A$  n'est pas une matrice symétrique définie positive ou une matrice strictement ou diagonalement dominante. Cependant,  $A$  est une matrice irréductible; d'un point de vue mathématique, cette propriété peut être vérifiée en utilisant l'un des résultats suivants (voir [57] et [73]).

**Théorème 4.3.1** *Si une matrice est irréductible, il existe sur chaque ligne et sur chaque colonne, au moins une entrée hors-diagonale non nulle.*

En effet, le théorème 4.3.1. donne une condition d'irréductibilité suffisante. Nous pouvons également utiliser un résultat plus général pour prouver l'irréductibilité de la matrice  $A$ :

**Théorème 4.3.2** *Une matrice  $A \in L(R^N)$  est irréductible si et seulement si, pour tous les deux indices  $1 \leq i, j \leq N$ , il existe une séquence d'éléments non nulles de  $A$  de la forme  $a_{i,i_1}, a_{i_1,i_2}, \dots, a_{i_m,j}$ .*

Pour la matrice  $A$ , il est possible, en tant qu'exercice, d'écrire explicitement une chaîne d'éléments non nuls pour tout  $i, j$ , mais la vérification peut devenir complexe. Il est plus évident de revenir à l'application envisagée; alors l'irréductibilité de  $A$  provient immédiatement et évidemment du fait que tous les états de  $S$  communiquent, c'est-à-dire que la matrice de transition est formée d'une seule classe des états récurrents; par conséquent, l'irréductibilité de  $A$  reflète le fait que tout état est accessible de tout autre état et réciproquement. Néanmoins, l'irréductibilité de  $A$  ne signifie rien en général quant à son inversibilité. Malheureusement, comme indiqué précédemment, la matrice  $A$  n'est pas une matrice diagonale dominante. Une fois de plus, nous devons revenir à l'application afin de prouver l'inversibilité de  $A$ . Cette propriété d'inversibilité résulte du fait que la chaîne de Markov est ergodique si  $\lambda < C\mu + (K - C)\gamma$ : irréductible, apériodique et évidemment positif puisque les éléments de la matrice de transition sont des probabilités de transition. Par conséquent, lorsque la condition d'ergodicité  $\lambda < C\mu + (K - C)\gamma$  est vérifiée, la matrice  $A$  est inversible [80].

Pour la solution numérique du système algébrique (4.3.1), nous pouvons utiliser plusieurs méthodes.

#### 4.3.1 Méthodes de résolution

Habituellement, il existe deux classes principales de méthodes numériques [92]:



- Les méthodes directes, telles que la méthode d'élimination de Gauss classique et optimale dont la complexité est l'ordre des opérations arithmétiques  $2/3N^3$ ;
- les méthodes itératives, qui conviennent le mieux lorsque la matrice  $A$  est creuse, en raison du fait que le nombre d'opérations arithmétiques est faible; néanmoins, pour de telles méthodes itératives, la convergence et le taux de convergence asymptotique doivent être étudiés.

Parmi les méthodes itératives classiques nous trouvons d'une part les méthodes de relaxation, tels que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel et d'autre part la méthode du gradient conjugué classique. La méthode de Jacobi diverge; en effet si  $\varphi(J)$  désigne le rayon spectral de la matrice  $J$  de Jacobi, définie par:

$$J = Id - H^{-1}.A,$$

où  $H$  désigne la diagonale de  $A$ , en raison du fait que

$$\varphi(J) \leq \|J\|_\infty,$$

où  $\|J\|_\infty$  est la valeur maximale de la somme des modules des éléments de  $J$ , au moins  $\|J\|_\infty = (N - 1)$  puisque la première colonne de  $J$  est formée de  $(N - 1)$  termes égaux à  $(-1)$ , le terme diagonal de cette première colonne est nul, donc, au pire, indépendamment de ce qui se passe sur les autres colonnes,  $\|J\|_\infty = (N - 1)$  et la méthode de Jacobi risque de diverger. Il semble plus difficile de prédire la convergence ou la divergence des Gauss-Seidel, mais en tenant compte du comportement divergent de la méthode de Jacobi, nous rejetons les méthodes de relaxation.

La méthode du gradient conjugué n'est pas applicable dans notre cas, car la matrice  $A$  n'est pas symétrique définie positive. Notons qu'il existe de nombreuses variantes de la méthode du gradient conjugué lorsque la matrice  $A$  n'est pas symétrique définie positive.

L'une des méthodes les plus utilisées est la méthode de projection sur les sous-espaces de Krylov  $\{e^0, Ae^0, A^2e^0, A^m e^0\}$ ; les différentes versions des méthodes de sous-espaces

de Krylov proviennent du choix différent des sous-espaces. Notons également que sur ces sous-espaces, les vecteurs définissant la base sont orthonormés par le processus de Gram-Schmidt. Cela conduit au FOM (Full Orthogonalization Method) et la méthode GMRES (Generalised Minimum Residual Method), la dernière étant la plus connue. La méthode GMRES est conçue de telle sorte que la convergence soit assurée, mais avec l'inconvénient que le stockage de l'information peut être très élevé, c'est pourquoi nous avons abandonné cet algorithme. Étant donné que l'algorithme GMRES devient impraticable lorsque la dimension de  $A$  est grande, en raison de la croissance de l'occupation mémoire et des exigences de calcul, les variantes de la méthode GMRES consistent à soit redémarrer la méthode, soit tronquer la méthode de GMRES (voir [73]).

Parmi les méthodes très faciles à coder lorsque la matrice n'est pas symétrique définie positive, nous retiendrons: la méthode CGNR ou Gradient Conjugué appliqué sur les équations normales (voir [57] à la page 536), la méthode de gradient biconjugué (voir [60] à la page 371), la méthode BiCG au carré gradient conjugué (voir [60] à la page 379), la méthode BiCGSTAB (voir [60] à la page 379).

Ces quatre derniers algorithmes seront brièvement résumés et décrits dans la suite.

Nous ne savons pas non plus si la matrice est bien conditionnée, c'est-à-dire si la propagation d'erreurs d'arrondissement peut dénaturer le résultat calculé. Comme  $A$  n'est pas symétrique, le nombre de conditionnement est donné par [57]:

$$Z(A) = \frac{\mu_{max}}{\mu_{min}},$$

où  $\mu_{max}$  et  $\mu_{min}$  représentent les valeurs singulières les plus grandes et les plus petites de la matrice  $A$ . Ce calcul est particulièrement important lors de l'utilisation de la méthode de Gauss qui comprend un nombre relativement important d'opérations arithmétiques, mais peut être utile pour mesurer la vitesse de convergence des méthodes itératives considérées.

Lorsque des méthodes itératives sont utilisées, pour la définition du critère d'arrêt, l'erreur à posteriori (voir [73]) définie par:

$$\tau_{A,B}(X) = \frac{\|e\|}{(\|A\| \cdot \|X\| + \|B\|)},$$

est généralement utilisé, où  $e = AX - B$  est le résidu. L'analyse de l'erreur à posteriori est un concept puissant pour analyser la qualité d'une solution approximative; en effet, cette analyse d'erreur arrière est indépendante des détails de la propagation d'arrondi, car les erreurs introduites lors du calcul sont interprétées en termes de perturbations de la prévision initiale  $X^0$ , et la solution calculée est considérée comme exacte pour le problème perturbé; de plus, les erreurs d'arrondi sont perçues comme des perturbations de données et peuvent être comparées à une approximation numérique ou à des mesures d'incertitude physique. Ainsi, dans les méthodes itératives présentées, le processus itératif est arrêté lorsque

$$\tau_{A,B}(X) < \epsilon,$$

où  $\epsilon$  est un seuil donné.

Comme indiqué précédemment, et parmi les méthodes itératives utilisées, nous décrirons les algorithmes précédents.

- La méthode **CGNR** est basée sur une technique permettant de convertir un système linéaire algébrique non symétrique en symétrique. Une telle technique résout le système linéaire  $A^t A X = A^t B$  appelé équation normale, au lieu de (4.3.1). Si  $A$  est non singulier, comme nous l'avons supposé, alors  $A^t A$  est symétrique définie positive et la méthode classique de gradient conjugué peut être appliquée. Cet algorithme **CGNR** peut être résumé sous la forme suivante:

**Algorithme 4.3.1** à partir de n'importe quel  $X^0$ , soit  $e^0 = B - AX^0$ ,  $p^0 = A^t e^0$

**For**  $k = 0, 1, \dots$  **until** la convergence **Do**

$$\alpha^k = \frac{\|A^t e^k\|^2}{\|A p^k\|^2},$$

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^k + \alpha^k p^k, \\ e^{k+1} &= e^k - \alpha^k A p^k, \\ \phi^{k+1} &= \frac{\|A^t e^{k+1}\|^2}{\|A^t e^k\|^2}, \\ p^{k+1} &= A^t e^{k+1} + \phi^{k+1} p^k. \end{aligned}$$

**Endfor**

Cette méthode sera convergente pour toute matrice  $A$  régulière, puisque  $A^t A$  est symétrique définie positive. Néanmoins, cette approche n'est pas recommandée en pratique car le nombre de conditionnement de  $A^t A$  est bien pire que le conditionnement de  $A$ ; puisque le numéro de condition  $Z(A^t A) = Z^2(A)$ , le taux de convergence est plus faible et à chaque itération il faut calculer deux produits d'une matrice par un vecteur. Cependant, l'approche de l'équation normale peut être appropriée dans certaines situations. En effet, il existe même des applications dans lesquelles elle est préférable aux techniques usuelles de Krylov.

- La méthode de gradient biconjugé (**BiCG**) revient à résoudre le système suivant:

$$\begin{bmatrix} O & A \\ A^t & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ V \end{bmatrix},$$

où  $V$  est arbitrairement choisi. La version classique de **BiCG** (Fletcher 1975) est la suivante:

**Algorithme 4.3.2** à partir de n'importe quel  $X^0$ , soit  $e^0 = B - AX^0$ ,  $\tilde{e}^0 = e^0$ ,  
 $p^0 = e^0$ ,  $\tilde{p}^0 = \tilde{e}^0$

**For**  $k = 0, 1, \dots$  **until** la convergence **Do**

$$\begin{aligned} \alpha^k &= \frac{\langle \tilde{e}^k, e^k \rangle}{\langle \tilde{p}^k, A p^k \rangle}, \\ X^{k+1} &= X^k + \alpha^k p^k, \\ e^{k+1} &= e^k - \alpha^k A p^k, \\ \tilde{e}^{k+1} &= \tilde{e}^k - \alpha^k A^t \tilde{p}^k, \\ \phi^{k+1} &= \frac{\langle \tilde{e}^{k+1}, e^{k+1} \rangle}{\langle \tilde{e}^k, e^k \rangle}, \\ p^{k+1} &= e^{k+1} + \phi^{k+1} p^k, \end{aligned}$$

$$\tilde{p}^{k+1} = \tilde{e}^{k+1} + \phi^{k+1}\tilde{p}^k.$$

**Endfor**

Le grand avantage de la méthode **BiCG** est qu'elle est simple et facile à coder et permet de stocker un grand nombre d'informations. Cependant, cette méthode présente l'inconvénient d'être erratique, c'est-à-dire instable.

Ensuite, la méthode **BiCGSTAB** est une variante la méthode **BiCG**.

- La méthode **BiCG** "Squared" ou **BiCGS** correspond à une méthode itérative plus rapide que **BiCG** et est définie comme suit:

**Algorithme 4.3.3** à partir de n'importe quel  $X^0$ , soit  $e^0 = B - AX^0$ ,  $\tilde{p}^0 = p^0 = e^0$

**For**  $k = 0, 1, \dots$  **until** la convergence **Do**

$$\alpha^k = \frac{\langle e^k, e^0 \rangle}{\langle A\tilde{p}^k, e^0 \rangle},$$

$$u^k = p^k - \alpha^k A\tilde{p}^k,$$

$$X^{k+1} = X^k + \alpha^k(p^k + u^k),$$

$$e^{k+1} = e^k - \alpha^k A(p^k + u^k),$$

$$\phi^{k+1} = \frac{\langle e^0, e^{k+1} \rangle}{\langle e^0, e^k \rangle},$$

$$p^{k+1} = e^{k+1} + \phi^{k+1}u^k,$$

$$\tilde{p}^{k+1} = p^{k+1} + \phi^{k+1}(u^k + \phi^{k+1}\tilde{p}^k).$$

**Endfor**

Notons que même si  $A^t$  n'est plus nécessaire, il existe encore deux produits vecteurs matriciels pour chaque itération.

- La méthode **BiCGSTAB** (Van der Vorst 1992) introduit un paramètre  $\omega^k$  choisi pour minimiser la norme euclidienne du résidu. Cela conduit à l'algorithme **BiCGSTAB** décrit ci-dessous:

**Algorithme 4.3.4** à partir de n'importe quel  $X^0$ , soit  $e^0 = B - AX^0$ ,  $p^0 = e^0$ ,  $\tilde{e}^0$  arbitraire

**For**  $k = 0, 1, \dots$  **until** la convergence **Do**

$$\begin{aligned}
 \alpha^k &= \frac{\langle \bar{e}^0, e^k \rangle}{\langle \bar{e}^0, Ap^k \rangle}, \\
 F^k &= e^k - \alpha^k Ap^k, \\
 \omega^k &= \frac{\langle AF^k, F^k \rangle}{\langle AF^k, \omega^k \rangle}, \\
 X^{k+1} &= X^k + \alpha^k p^k + \omega^k F^k, \\
 e^{k+1} &= F^k - \omega^k AF^k, \\
 \phi^{k+1} &= \frac{\langle \bar{e}^0, e^{k+1} \rangle \cdot \alpha^k}{\langle \bar{e}^0, e^k \rangle \cdot \omega^k}, \\
 p^{k+1} &= e^{k+1} + \phi^{k+1} (p^k - \omega^k Ap^k).
 \end{aligned}$$

**Endfor**

Notons que, la méthode **BiCGSTAB**, est plus stable et donne souvent de meilleurs résultats.

Soulignons que, pour la solution des systèmes linéaires algébriques de très grande dimension, nous pouvons également envisager une vectorisation ou une parallélisation dans la mise en oeuvre des méthodes précédentes.

En ce qui concerne la méthode de Gauss, elle a été citée pour mémoire, et n'est pas très bien adaptée pour résoudre de grands systèmes linéaires, même si les matrices sont creuses. Soulignons que, pour diminuer l'influence de l'erreur d'arrondi, dans nos expériences numériques, nous avons considéré la méthode de Gauss avec un pivoté partiel.

**Remarque 4.3.2** *Cependant, il est possible de considérer une méthode de Gauss avec élimination des blocs qui a l'avantage de réduire la complexité de la méthode classique de Gauss et pourrait être parallélisée dans le cas de systèmes très volumineux.*

### 4.3.2 Application

Les premiers résultats des expériences numériques sont résumés dans les tableaux 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5 [92]. Pour chaque implémentation, les codes ont été écrits en utilisant MATLAB, permettant de travailler sur la représentation des nombres réels de 64 bits. Nous supposons que les paramètres du système sont donnés comme suit:  $K = 12$ ,  $C = 8$ ,

### 4.3. Aspects numériques

$\lambda = 8$ ,  $\mu = 1$ ,  $\nu = 1$ , probabilité de suppression d'un client de la zone de service  $q_1 = 0.2$ ,  $\theta = 1$ ,  $\gamma = 2$ ,  $n = 2$ . Nous avons donc l'intensité du trafic  $\rho = \frac{\lambda}{C\mu + (K-C)\gamma} = \frac{1}{2} < 1$ .

**Tableau 4.2:** Probabilité de blocage  $P_K$  avec différentes méthodes.

		Gauss	BICG	BICGSTAB	BICGS	CGNR	
dim A= 52	$P_K$	0.02911268	0.02911268	0.02911269	0.02911269	0.02911268	
	max error	$8.88.10^{-16}$	$2.37.10^{-8}$	$2.14.10^{-8}$	$4.42.10^{-8}$	$1.60.10^{-8}$	
	M=3	Iteration	-	50	32	36	79
	time	0.092	0.149	0.180	0.384	0.251	
cond(A)= $2.16762645.10^2$	Norm final	-	$3.396.10^{-7}$	$3.515.10^{-7}$	$1.069.10^{-6}$	$1.631.10^{-7}$	
dim A= 78	$P_K$	0.02926945	0.02926945	0.02926946	0.02926945	0.0292694	
	max error	$1.66.10^{-15}$	$5.82.10^{-8}$	$1.57.10^{-8}$	$6.29.10^{-9}$	$1.29.10^{-8}$	
	M=5	Iteration	-	61	37	44	123
	time	0.143	0.276	0.214	0.504	0.482	
cond(A)= $3.23163797.10^2$	Norm final	-	$1.214.10^{-7}$	$5.865.10^{-7}$	$1.604.10^{-7}$	$1.937.10^{-7}$	
dim A= 104	$P_K$	0.02931432	0.02931432	0.02931433	0.02931432	0.02931432	
	max error	$2.22.10^{-15}$	$5.02.10^{-8}$	$2.43.10^{-8}$	$2.77.10^{-8}$	$2.33.10^{-8}$	
	M=7	Iteration	-	65	39	48	164
	time	0.184	0.302	0.196	0.417	0.943	
cond(A)= $4.40963672.10^2$	Norm final	-	$2.465.10^{-7}$	$2.320.10^{-7}$	$7.528.10^{-6}$	$2.691.10^{-7}$	
dim A= 130	$P_K$	0.02932648	0.02932648	0.02932648	0.02932648	0.02932648	
	max error	$3.55.10^{-15}$	$4.98.10^{-8}$	$1.37.10^{-8}$	$2.88.10^{-8}$	$1.31.10^{-8}$	
	M=9	Iteration	-	72	42	53	206
	time	0.305	0.417	0.311	0.532	1.226	
cond(A)= $5.699423.10^2$	Norm final	-	$2.051.10^{-7}$	$3.250.10^{-7}$	$2.495.10^{-7}$	$1.651.10^{-7}$	
dim A= 143	$P_K$	0.02932859	0.02932859	0.02932859	0.02932859	0.02932859	
	max error	$3.55.10^{-15}$	$2.37.10^{-8}$	$2.09.10^{-8}$	$2.73.10^{-8}$	$2.01.10^{-8}$	
	M=10	Iteration	-	73	44	56	225
	time	0.333	0.285	0.227	0.638	2.099	
cond(A)= $6.38853813.10^2$	Norm final	-	$7.229.10^{-7}$	$1.058.10^{-7}$	$2.823.10^{-7}$	$1.009.10^{-6}$	
dim A= 156	$P_K$	0.02932966	0.02932966	0.02932965	0.02932966	0.02932966	
	max error	$2.66.10^{-15}$	$1.98.10^{-8}$	$3.17.10^{-8}$	$9.96.10^{-9}$	$9.68.10^{-9}$	
	M=11	Iteration	-	80	44	57	247
	time	0.403	0.314	0.193	0.600	1.808	
cond(A)= $7.10838072.10^2$	Norm final	-	$1.776.10^{-7}$	$1.297.10^{-7}$	$0.003.10^{-7}$	$1.636.10^{-7}$	

Pour les trois caractéristiques de performance ( $P_C$ ,  $\overline{N}_o$ ,  $\overline{C}$ ), il est à noter que l'utilisation de ces 5 méthodes conduit à des résultats cohérents pour résoudre les systèmes algébriques correspondants. Cela suggère que le conditionnement des différentes matrices est relativement bon. Pour les grandes matrices, les résultats des variantes de la méthode du gradient conjugué est préférable car l'effet de la chute de la propagation des erreurs est réduit au minimum.

Pour les variantes de la méthode du gradient conjugué, le nombre d'itérations est parfois supérieur à la dimension de la matrice  $A$ ; cela est dû à des défauts d'orthogonalité en raison des erreurs d'arrondi. On peut le vérifier dans la mesure où il était possible de calculer les valeurs singulières des matrices  $A$  que le rapport des valeurs extrêmes est entre une valeur de l'ordre de 216 pour une dimension de la matrice 52 et une valeur de l'ordre de 711 pour une dimension 156. Ce nombre de condition augmente avec la dimension de la matrice. En outre, le résidu calculé est de l'ordre de  $10^{-16}$  dans le cas de l'utilisation de la méthode de Gauss et de l'ordre de  $10^{-8}$  lors de l'utilisation d'une des variantes des méthodes de gradient conjugué. Pour l'utilisation de ces méthodes, la différence de précision est due à un critère d'arrêt moins rigoureux du fait que le seuil d'arrêt est fixé à  $10^{-8}$ . En ce qui concerne la vitesse de convergence des variantes des méthodes de gradient conjugué, nous observons que la méthode avec le meilleur taux de convergence est la méthode **BICGSTAB**, ce qui n'est pas en contradiction avec le développement de cette méthode et est conforme à ce que nous pouvons trouver dans la littérature.

Une autre méthode qui converge relativement bien est la méthode **CGSsquared**, où nous trouvons les caractéristiques de la méthode de gradient conjugué lorsque la matrice doit inverser la matrice  $A^t A$ . Cette méthode est intéressante dans la mesure où le nombre de conditionnement n'est pas trop grand.

La méthode **BICG** converge plus lentement alors que la méthode de l'équation normale a une convergence extrêmement lente de l'ordre du double de la dimension de la matrice.

Les calculs sont effectués en très peu de temps. En termes de temps de calcul, il convient de noter que Gauss conduit à des temps de résolution extrêmement courts. Toutefois, dans le cas de très grandes matrices, ces temps de résolution peuvent se détériorer en raison du phénomène de remplissage qui apparaît dans la factorisation matricielle.



En ce qui concerne les calculs de temps correspondant à l'utilisation des variantes de la méthode de gradient conjugué lorsque  $A$  n'est pas symétrique défini positif, la plus rapide est la méthode **BICG**, suivie de la méthode **BICGSTAB** qui conduit à une résolution temporelle presque similaire. La méthode de l'équation normale nécessite 1,5 fois plus longtemps et la méthode **CGSsquared** nécessite environ deux fois plus longtemps. Notons que dans les résultats précédents, les matrices ont été représentées sous une forme pleine pour les méthodes itératives. Cependant, MATLAB fournit une représentation creuse de ces matrices, ce qui entraîne une diminution d'environ 10 fois moins pour le temps de calcul.

Nous avons également calculé la probabilité de blocage pour  $\lambda = 14$ ,  $K = 12$ ,  $C = 8$ ,  $\mu = 1$ ,  $\nu = 1$ , probabilité de suppression d'un client de la zone de service  $q_1 = 0.2$ ,  $\theta = 1$ ,  $\gamma = 2$ ,  $n = 2$  (nous avons donc l'intensité du trafic  $\rho = 0.875 < 1$ ). Du tableau 4.5, il est possible de déduire les mêmes conclusions que précédemment. Nous soulignons que pour les expérimentations numériques, le niveau de troncature  $M$  a été choisi pour être supérieur au degré  $(n - 1)$  du polynôme utilisé comme fonction d'extrapolation. De plus, dans le cas où  $\rho = 0.5$ , les résultats numériques changent légèrement à partir de  $M = 3$  (voir les tableaux 4.2, 4.3, 4.4), alors que lorsque l'intensité du trafic est élevée ( $\rho = 0.875$ ), la même tendance est observée à partir de  $M = 20$  (voir tableau 4.5). En conclusion, il est très difficile de choisir une méthode efficace pour résoudre le système algébrique. Lorsque la taille de la matrice est grande, la méthode de Gauss doit être évitée. La méthode qui fonctionne bien en générale est la méthode **BICG**. La bonne chose avec **BICG** est qu'elle est simple et facile à coder, de plus, le stockage correspondant est faible. L'inconvénient de **BICG** est que parfois la convergence est erratique. À cet égard, **BICGSTAB** donne souvent de meilleurs résultats.

Pour être sûr des résultats obtenus, il est préférable, comme nous l'avons fait, d'utiliser plusieurs méthodes et de comparer les résultats obtenus afin de vérifier la stabilité numérique des résultats calculés. Comme indiqué précédemment, la méthode BiCGSTAB semble

#### 4.4. Etude de la performance du système

**Tableau 4.3:** Nombre moyen de clients en orbite  $\overline{N}_o$  avec différentes méthodes.

		Gauss	BICG	BICGSTAB	BICGS	CGNR	
dim A= 52	$\overline{N}_o$	0.27201425	0.27201425	0.27201424	0.27201425	0.27201425	
	max error	$1.42108547 \cdot 10^{-14}$	$1.31042519 \cdot 10^{-8}$	$3.03612995 \cdot 10^{-8}$	$3.05643510 \cdot 10^{-10}$	$1.73245946 \cdot 10^{-8}$	
	M=3	Iteration	50	35	41	79	
	time	0.081	0.686	0.135	0.385	0.224	
cond(A)= $2.16762645 \cdot 10^2$	Norm final	-	$1.610 \cdot 10^{-7}$	$1.688 \cdot 10^{-7}$	$4.507 \cdot 10^{-7}$	$5.816 \cdot 10^{-7}$	
	dim A= 78	$\overline{N}_o$	0.27597878	0.27597878	0.27597877	0.27597878	0.27597878
		max error	$5.68 \cdot 10^{-14}$	$3.96 \cdot 10^{-8}$	$1.75 \cdot 10^{-8}$	$2.37 \cdot 10^{-8}$	$2.45 \cdot 10^{-8}$
		M=5	Iteration	60	38	45	124
time		0.116	2.882	0.302	0.453	0.473	
cond(A)= $3.23163797 \cdot 10^2$	Norm final	-	$1.008 \cdot 10^{-7}$	$2.096 \cdot 10^{-7}$	$3.125 \cdot 10^{-5}$	$2.807 \cdot 10^{-7}$	
	dim A= 104	$\overline{N}_o$	0.27730483	0.27730484	0.27730483	0.27730483	0.27730483
		max error	$9.59 \cdot 10^{-14}$	$3.46 \cdot 10^{-8}$	$2.61 \cdot 10^{-8}$	$6.97 \cdot 10^{-9}$	$2.82 \cdot 10^{-8}$
		M=7	Iteration	64	41	50	165
time		0.171	0.218	0.233	0.428	0.668	
cond(A)= $4.40963672 \cdot 10^2$	Norm final	-	$7.060 \cdot 10^{-7}$	$2.229 \cdot 10^{-7}$	$1.281 \cdot 10^{-7}$	$3.415 \cdot 10^{-7}$	
	dim A= 130	$\overline{N}_o$	0.27772422	0.27772422	0.27772422	0.27772422	0.27772422
		max error	$1.13 \cdot 10^{-13}$	$3.52 \cdot 10^{-8}$	$7.17 \cdot 10^{-9}$	$3.17 \cdot 10^{-8}$	$1.29 \cdot 10^{-8}$
		M=9	Iteration	72	45	52	206
time		0.256	0.445	0.202	0.535	0.810	
cond(A)= $5.699423 \cdot 10^2$	Norm final	-	$4.193 \cdot 10^{-7}$	$7.570 \cdot 10^{-7}$	$1.008 \cdot 10^{-6}$	$2.978 \cdot 10^{-7}$	
	dim A= 143	$\overline{N}_o$	0.27780651	0.27780651	0.27780652	0.27780651	0.27780651
		max error	$1.13 \cdot 10^{-13}$	$5.76 \cdot 10^{-8}$	$3.40 \cdot 10^{-8}$	$1.25 \cdot 10^{-8}$	$1.04 \cdot 10^{-8}$
		M=10	Iteration	76	48	56	227
time		0.341	1.430	0.304	0.767	1.142	
cond(A)= $6.38853813 \cdot 10^2$	Norm final	-	$3.780 \cdot 10^{-7}$	$2.716 \cdot 10^{-7}$	$4.407 \cdot 10^{-6}$	$1.810 \cdot 10^{-7}$	
	dim A= 156	$\overline{N}_o$	0.27785138	0.27785138	0.27785139	0.27785138	0.27785138
		max error	$1.98 \cdot 10^{-13}$	$1.54 \cdot 10^{-8}$	$2.66 \cdot 10^{-8}$	$3.37 \cdot 10^{-9}$	$1.23 \cdot 10^{-8}$
		M=11	Iteration	81	46	59	248
time		0.409	1.099	1.776	0.712	1.328	
cond(A)= $7.10838072 \cdot 10^2$	Norm final	-	$6.289 \cdot 10^{-7}$	$2.185 \cdot 10^{-7}$	$1.727 \cdot 10^{-7}$	$1.625 \cdot 10^{-7}$	

donner de très bons résultats numériques.

## 4.4 Etude de la performance du système

Maintenant, nous étudions les effets de certains paramètres pertinents caractérisant notre système (tels que les taux de rappels et d'abandon, la taille de l'espace d'attente) sur les mesures de performance  $\overline{N}_o$ ,  $P_K$  et  $\overline{C}$ . Les résultats numériques sont obtenus en appliquant la méthode Extrapolation de Valeur et à l'aide du logiciel R.

#### 4.4. Etude de la performance du système

**Tableau 4.4:** Nombre moyen de clients dans les zones de service et d'attente  $\bar{C}$  avec différentes méthodes.

		Gauss	BICG	BICGSTAB	BICGS	CGNR	
dim A= 52	$\bar{C}$	7.22378737	7.22378737	7.22378738	7.22378737	7.22378737	
	max error	$7.10.10^{-14}$	$1.79.10^{-8}$	$2.32.10^{-8}$	$6.18.10^{-8}$	$3.35.10^{-8}$	
	M=3	Iteration	-	53	36	41	81
	time	0.090	0.164	0.165	0.338	0.239	
cond(A)= $2.16762645.10^2$	Norm final	-	$2.132.10^{-7}$	$3.325.10^{-7}$	$1.928.10^{-7}$	$1.182.10^{-7}$	
dim A= 78	$\bar{C}$	7.22332619	7.22332619	7.22332620	7.22332619	7.22332619	
	max error	$7.10.10^{-14}$	$2.57.10^{-8}$	$9.02.10^{-9}$	$2.61.10^{-8}$	$2.85.10^{-8}$	
	M=5	Iteration	-	60	39	53	125
	time	0.522	0.357	0.195	0.579	0.597	
cond(A)= $3.23163797.10^2$	Norm final	-	$1.123.10^{-7}$	$1.298.10^{-7}$	$2.975.10^{-5}$	$1.261.10^{-7}$	
dim A= 104	$\bar{C}$	7.22322004	7.22322004	7.22322004	7.22322004	7.22322004	
	max error	$5.68.10^{-14}$	$3.73.10^{-8}$	$2.97.10^{-8}$	$2.03.10^{-8}$	$1.46.10^{-8}$	
	M=7	Iteration	-	73	40	56	166
	time	0.621	0.296	0.169	0.859	0.624	
cond(A)= $4.40963672.10^2$	Norm final	-	$2.535.10^{-6}$	$1.511.10^{-6}$	$6.189.10^{-7}$	$1.403.10^{-7}$	
dim A= 130	$\bar{C}$	7.22319659	7.22319659	7.22319659	7.22319659	7.22319659	
	max error	$8.52.10^{-14}$	$2.94.10^{-8}$	$1.14.10^{-8}$	$1.98.10^{-8}$	$1.10.10^{-8}$	
	M=9	Iteration	-	72	49	61	207
	time	0.984	1.406	1.213	0.522	1.295	
cond(A)= $5.699423.10^2$	Norm final	-	$2.056.10^{-7}$	$7.875.10^{-6}$	$8.615.10^{-7}$	$1.303.10^{-7}$	
dim A= 143	$\bar{C}$	7.22319313	7.22319313	7.22319314	7.22319313	7.22319313	
	max error	$1.13.10^{-13}$	$3.16.10^{-8}$	$3.63.10^{-8}$	$5.37.10^{-8}$	$1.23.10^{-8}$	
	M=10	Iteration	-	76	51	56	227
	time	1.235	0.311	0.240	0.638	1.071	
cond(A)= $6.38853813.10^2$	Norm final	-	$2.278.10^{-6}$	$1.056.10^{-7}$	$2.984.10^{-4}$	$2.179.10^{-7}$	
dim A= 156	$\bar{C}$	7.22319153	7.22319153	7.22319153	7.22319153	7.22319153	
	max error	$7.10.10^{-14}$	$2.21.10^{-8}$	$2.76.10^{-8}$	$1.30.10^{-7}$	$2.38.10^{-8}$	
	M=11	Iteration	-	80	48	70	247
	time	1.387	0.644	0.561	0.657	1.160	
cond(A)= $7.10838072.10^2$	Norm final	-	$4.497.10^{-5}$	$1.382.10^{-7}$	$1.172.10^{-7}$	$3.493.10^{-7}$	

A partir de la table 4.1, on peut voir que l'augmentation du taux des rappels  $\theta$  entraîne une amélioration sensible des valeurs numériques de  $\bar{N}_o$  et  $\bar{C}$  mais elle détériore la probabilité de blocage  $P_K$ .

Dans les figures 4.4.1 et 4.4.2, nous présentons les effets du taux d'abandon  $\gamma$  et de la taille de l'espace d'attente  $K - C$  sur la performance du système.

Le scénario considéré est:

- le nombre de serveurs  $C = 5$ ;
- le taux des rappels  $\theta = 10$ ;
- le taux d'arrivée des clients positifs  $\lambda = 7$ ;

#### 4.4. Etude de la performance du système

Tableau 4.5: Probabilité de blocage  $P_K$  pour  $\rho = 0.875$  avec différentes méthodes.

		Gauss	BICG	BICGSTAB	BICGS	CGNR
dim A= 52	$P_K$	0.38290061	0.38290061	0.38290061	0.38290061	0.38290061
	max error	$3.55 \cdot 10^{-15}$	$5.53 \cdot 10^{-8}$	$7.36 \cdot 10^{-9}$	$3.13 \cdot 10^{-8}$	$2.73 \cdot 10^{-8}$
	M=3	Iteration	-	52	34	38
	time 0.328	0.662	0.131	0.091	0.079	
cond(A)= $1.17227318 \cdot 10^3$	Norm final	-	$1.915 \cdot 10^{-7}$	$3.036 \cdot 10^{-7}$	$2.075 \cdot 10^{-7}$	$1.220 \cdot 10^{-7}$
dim A= 78	$P_K$	0.40008909	0.40008909	0.40008909	0.40008909	0.40008909
	max error	$3.55 \cdot 10^{-15}$	$3.96 \cdot 10^{-8}$	$1.96 \cdot 10^{-8}$	$1.47 \cdot 10^{-8}$	$3.45 \cdot 10^{-8}$
	M=5	Iteration	-	61	36	51
	time	0.511	0.472	0.155	0.145	0.239
cond(A)= $1.44079784 \cdot 10^3$	Norm final	-	$1.059 \cdot 10^{-7}$	$1.597 \cdot 10^{-6}$	$3.556 \cdot 10^{-7}$	$2.853 \cdot 10^{-7}$
dim A= 104	$P_K$	0.41359627	0.41359627	0.41359627	0.41359627	0.41359627
	max error	$7.10 \cdot 10^{-15}$	$2.70 \cdot 10^{-8}$	$2.75 \cdot 10^{-8}$	$3.86 \cdot 10^{-8}$	$1.55 \cdot 10^{-8}$
	M=7	Iteration	-	73	38	54
	time	0.921	1.320	0.199	0.185	0.264
cond(A)= $1.75185380 \cdot 10^3$	Norm final	-	$3.353 \cdot 10^{-6}$	$8.283 \cdot 10^{-7}$	$2.338 \cdot 10^{-7}$	$2.402 \cdot 10^{-7}$
dim A= 130	$P_K$	0.42413493	0.42413493	0.42413493	0.42413493	0.42413493
	max error	$1.06 \cdot 10^{-14}$	$3.35 \cdot 10^{-8}$	$1.79 \cdot 10^{-8}$	$3.15 \cdot 10^{-8}$	$1.47 \cdot 10^{-8}$
	M=9	Iteration	-	77	44	60
	time	0.957	0.654	0.315	0.207	0.509
cond(A)= $2.07888660 \cdot 10^3$	Norm final	-	$3.431 \cdot 10^{-7}$	$5.758 \cdot 10^{-7}$	$3.711 \cdot 10^{-5}$	$2.603 \cdot 10^{-7}$
dim A= 143	$P_K$	0.42848557	0.42848557	0.42848557	0.42848557	0.42848557
	max error	$1.06 \cdot 10^{-14}$	$6.14 \cdot 10^{-9}$	$1.01 \cdot 10^{-8}$	$3.25 \cdot 10^{-8}$	$2.15 \cdot 10^{-8}$
	M=10	Iteration	-	82	50	62
	time	1.204	0.731	0.278	0.315	0.497
cond(A)= $2.24511964 \cdot 10^3$	Norm final	-	$4.851 \cdot 10^{-7}$	$6.578 \cdot 10^{-7}$	$7.334 \cdot 10^{-6}$	$1.500 \cdot 10^{-7}$
dim A= 208	$P_K$	0.44351337	0.44351337	0.44351337	0.44351337	
	max error	$2.84 \cdot 10^{-14}$	$4.47 \cdot 10^{-8}$	$1.49 \cdot 10^{-8}$	$1.45 \cdot 10^{-8}$	$1.68 \cdot 10^{-8}$
	M=15	Iteration	-	94	53	73
	time	3.353	1.430	1.308	0.671	1.822
cond(A)= $3.07463557 \cdot 10^3$	Norm final	-	$2.151 \cdot 10^{-6}$	$4.063 \cdot 10^{-7}$	$2.712 \cdot 10^{-7}$	$1.296 \cdot 10^{-7}$
dim A= 273	$P_K$	0.45132744	0.45132744	0.45132744	0.45132744	0.45132744
	max error	$4.26 \cdot 10^{-14}$	$2.68 \cdot 10^{-8}$	$1.72 \cdot 10^{-8}$	$1.49 \cdot 10^{-8}$	$1.30 \cdot 10^{-8}$
	M=20	Iteration	-	122	63	84
	time	6.543	1.828	0.883	0.894	3.334
cond(A)= $3.86199503 \cdot 10^3$	Norm final	-	$1.785 \cdot 10^{-7}$	$3.803 \cdot 10^{-7}$	$7.895 \cdot 10^{-7}$	$1.071 \cdot 10^{-7}$
dim A= 338	$P_K$	0.45535911	0.45535911	0.45535911	0.45535911	0.45535911
	max error	$2.84 \cdot 10^{-14}$	$4.03 \cdot 10^{-8}$	$1.68 \cdot 10^{-8}$	$1.38 \cdot 10^{-7}$	$1.88 \cdot 10^{-8}$
	M=25	Iteration	-	151	74	111
	time	12.624	2.731	1.056	2.017	5.702
cond(A)= $4.58704316 \cdot 10^3$	Norm final	-	$1.180 \cdot 10^{-7}$	$1.333 \cdot 10^{-6}$	$3.072 \cdot 10^{-6}$	$1.480 \cdot 10^{-7}$
dim A= 403	$P_K$	0.45743145	0.45743145	0.45743145	0.45743145	0.45743145
	max error	$5.68 \cdot 10^{-14}$	$3.51 \cdot 10^{-8}$	$2.34 \cdot 10^{-8}$	$2.04 \cdot 10^{-7}$	$1.34 \cdot 10^{-8}$
	M=30	Iteration	-	187	85	151
	time	19.155	6.685	1.575	2.712	8.223
cond(A)= $5.26662753 \cdot 10^3$	Norm final	-	$4.254 \cdot 10^{-6}$	$6.253 \cdot 10^{-7}$	$1.711 \cdot 10^{-6}$	$1.189 \cdot 10^{-7}$

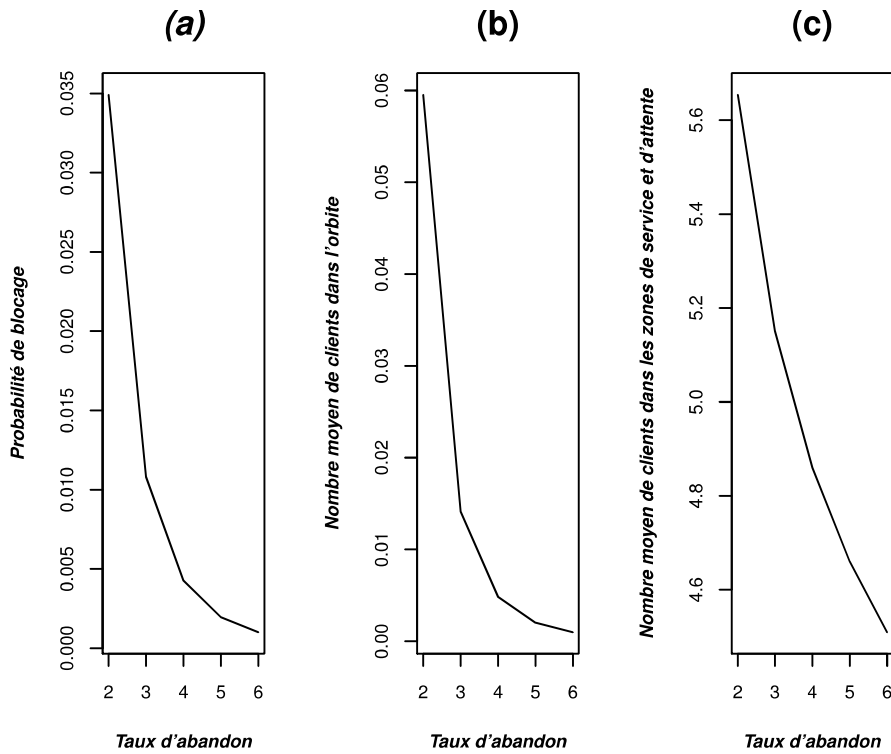
- le taux de service  $\mu = 1$ ;
- le taux d'effacement  $\eta_1 = 0.2$ .

#### 4.4. Etude de la performance du système

---

On peut observer, comme on s'y attend, que l'augmentation de  $\gamma$  (ou  $K - C$ ) entraîne une amélioration significative de  $\overline{N}_o$  ainsi que de  $\overline{C}$  et  $P_K$ .

Figure 4.4.1 : Mesures de performance par rapport à  $\gamma$  ( $K = 10$ ).



Nous avons également étudié l'influence du taux d'effacement  $\eta_1$  sur les mesures de performance. Toutefois, les résultats numériques sont obtenues en appliquant la méthode EV, où le système d'équations de Howard est résolu par la méthode numérique **BICGSTAB**, et sont résumés dans le tableau 4.6. Nous avons considéré les cas où  $\rho = 0.5$  et  $\rho = 0.875$ . Dans le tableau 4.6, nous observons que l'augmentation du taux d'effacement entraîne une amélioration sensible des valeurs numériques de  $\overline{N}_o$ ,  $\overline{C}$  et  $P_K$ ; ce qui est conforme aux considérations réelles.

Figure 4.4.2 : Mesures de performance par rapport à  $K - C$ .

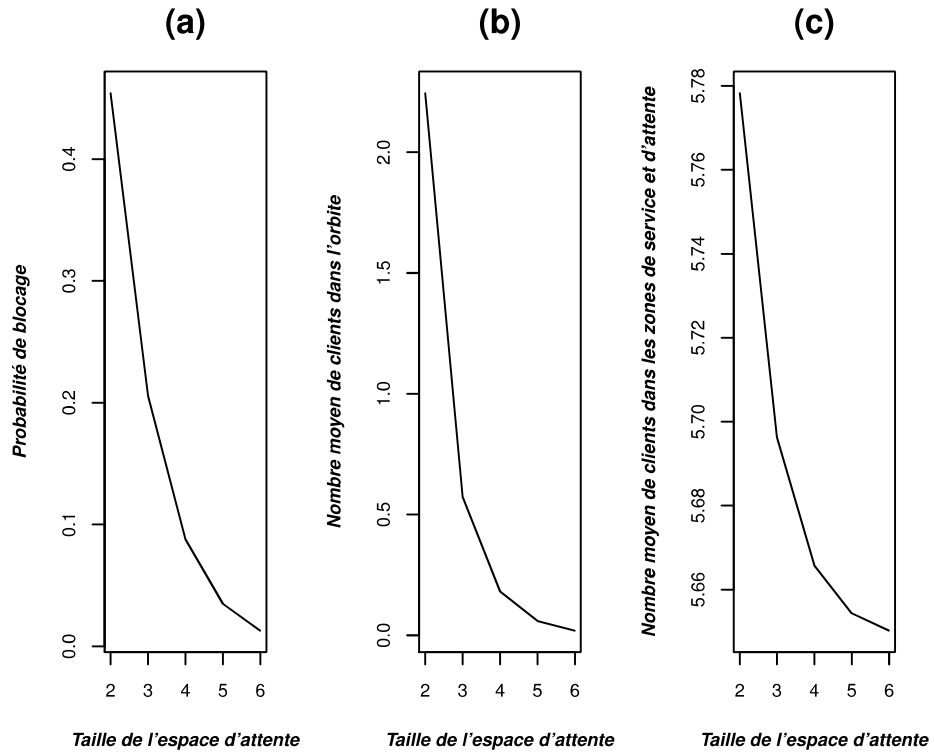


Tableau 4.6: Influence du taux d'effacement  $\eta_1$  ( $\theta = 10$ ).

$\rho$	P.M. $\cdot \eta_1$	0.2	0.4	0.6	0.8
$\rho = 0.5$	$P_K$	0.03720550	0.03407397	0.03113462	0.02838345
	$\overline{N}_o$	0.07300968	0.06666848	0.06074052	0.05521398
	$\overline{C}$	7.20986589	7.05917957	6.90568391	6.74955662
$\rho = 0.875$	$P_K$	0.54650889	0.53587380	0.52501298	0.51393124
	$\overline{N}_o$	5.59698010	5.44014686	5.28335946	5.12670179
	$\overline{C}$	10.91069305	10.85756761	10.80163107	10.74276398

## 4.5 Conclusion

Nous concluons que l'approche, basée sur les outils de la théorie des Processus de Markov Décisionnels (EV), peut être utilisée avec succès lors de la résolution du modèle multi-serveurs considéré et comprenant les abandons, les rappels, le phénomène des arrivées négatives ainsi que l'espace d'attente limite; en particulier lorsque le système opère sous un trafic intense. En outre, l'approche en question permet d'obtenir des résultats précis avec de faibles niveaux de troncature, ce qui réduit considérablement le coût de calcul.

---

# Conclusion générale

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude des modèles de type M/M/C avec rappels, espace d'attente, arrivées négatives et possibilité d'abandonner le système dans le cas où la durée d'attente dans l'espace d'attente dépasse un certain seuil. Vu l'impossibilité de fournir une solution exacte aux caractéristiques essentielles du système, nous avons considéré des méthodes approchées. En effet, nous avons considéré deux approches alternatives : la première permet d'obtenir une solution numérique approchée à la distribution stationnaire de l'état du système, puis, à l'aide des outils fondamentaux de la théorie des probabilités, calculer les mesures de performance; tandis que la seconde utilise les moyens fournis par la théorie des Processus de Markov Décisionnels et permet d'exprimer, et par la suite de déterminer les indices de performance en question en termes d'une certaine métrique, appelée valeur d'état relative. Toutefois, les deux approches sont basées sur le principe de troncature de l'espace d'états infini, ce qui a permis la comparaison de leur efficacité.

Notre apport est théorique et pratique. Dans un premier temps, nous avons décrit le modèle général d'un système de files d'attente avec rappels ainsi que d'un modèle markovien à multiserveurs. Nous avons également présenté une synthèse bibliographique des recherches réalisées dans ce domaine. Nous avons discuté les approches les plus intéressantes et les plus performantes pouvant être appliquées lors de l'analyse des modèles avec rappels et multiserveurs.



Dans un deuxième temps nous avons obtenu des solutions pour le modèle M/M/C/K avec rappels, arrivées négatives et abandons exponentiels à l'aide de la méthode de Troncature Finie et de la méthode d'Extrapolation de Valeur. En comparant les performances des méthodes en question, nous pouvons conclure que la seconde méthode est plus appropriée pour la résolution du modèle complexe étudié, en particulier sous les niveaux élevés de la congestion. Elle permet d'obtenir les résultats précis avec de faibles niveaux de troncature.

Le modèle analysé est d'un intérêt pratique. Il pourrait être utilisé non seulement lors de l'évaluation des performances d'un centre d'appels (exemple de motivation) mais également d'un réseau mobile de communication ou d'un système informatique à multiprocesseurs. Ce dernier est souvent exposé aux virus : quand un virus entre dans le système, il peut détruire le message en transmission et l'administrateur du système sera obligé de réinitialiser le système entier.

Le prolongement intéressant et direct de notre travail est l'étude théorique (mathématique) de la convergence de la solution fournie par la méthode Extrapolation de Valeur vers la solution exacte.

Les résultats obtenus dans ce travail permettent d'envisager de nouvelles perspectives de recherche :

- Résolution du système d'équations de Howard  $AX = B$  à l'aide du calcul parallèle.
- Définir une nouvelle approche de résolution des modèles à multiserveurs basée sur les notions et principes issus de la théorie des jeux.

---

# Annexes

## Annexe A

### A.1 Un algorithme pour le calcul numérique de la distribution stationnaire de l'état du système tronqué $S^{(M)}$

En utilisant la forme spécifique des équations (3.5.1)-(3.5.8), nous proposons un algorithme récursif pour le calcul des probabilités  $P_{ij}^{(M)}$ .

On introduit de nouvelles variables  $r_{ij}^{(M)}$ ,  $0 \leq i \leq K$ ,  $0 \leq j \leq M$ , comme suit:

$$r_{ij}^{(M)} = \frac{P_{ij}^{(M)}}{P_{0M}^{(M)}}.$$

Il est clair que, si on trouve les variables  $r_{ij}^{(M)}$ , alors on peut calculer les probabilités  $P_{ij}^{(M)}$  comme suit:

$$P_{ij}^{(M)} = \frac{r_{ij}^{(M)}}{\sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^M r_{ij}^{(M)}}.$$

Les variables  $r_{ij}^{(M)}$  satisfont l'ensemble d'équations suivant (obtenu à partir des équations (3.5.1)-(3.5.8) pour les probabilités  $P_{ij}^{(M)}$ ):

$$r_{0M}^{(M)} = 1; \tag{0.0.1}$$

$$(\lambda + i + j\theta + \eta_s)r_{ij}^{(M)} = \lambda r_{i-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta r_{i-1,j+1}^{(M)} + ((i+1) + \eta_s)r_{i+1,j}^{(M)}, \quad (0.0.2)$$

$$0 \leq i \leq C-1, \quad 0 \leq j \leq M-1;$$

$$\begin{aligned} (\lambda + C + (i-C)\gamma + j\theta + \eta_s)r_{ij}^{(M)} &= \lambda r_{i-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta r_{i-1,j+1}^{(M)} \\ &+ (C + (i+1-C)\gamma + \eta_s)r_{i+1,j}^{(M)}, \end{aligned} \quad (0.0.3)$$

$$C \leq i \leq K-2, \quad 0 \leq j \leq M-1;$$

$$\begin{aligned} (\lambda + C + (i-C)\gamma + j\theta + \eta_s)r_{ij}^{(M)} &= \lambda r_{i-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta r_{i-1,j+1}^{(M)} \\ &+ (C + (i+1-C)\gamma + \eta_s)r_{i+1,j}^{(M)}, \end{aligned} \quad (0.0.4)$$

$$i = K-1, \quad 0 \leq j \leq M-1;$$

$$(\lambda + i + M\theta + \eta_s)r_{iM}^{(M)} = \lambda r_{i-1,M}^{(M)} + ((i+1) + \eta_s)r_{i+1,M}^{(M)}, \quad (0.0.5)$$

$$0 \leq i \leq C-1, \quad j = M;$$

$$\begin{aligned} (\lambda + C + (i-C)\gamma + M\theta + \eta_s)r_{iM}^{(M)} &= (C + (i+1-C)\gamma + \eta_s)r_{i+1,M}^{(M)} \\ &+ \lambda r_{i-1,M}^{(M)}, \end{aligned} \quad (0.0.6)$$

$$C \leq i \leq K-2, \quad j = M;$$

$$\begin{aligned} (\lambda + C + (i-C)\gamma + M\theta + \eta_s)r_{iM}^{(M)} &= (C + (i+1-C)\gamma)r_{i+1,M}^{(M)} \\ &+ \lambda r_{i-1,M}^{(M)}, \end{aligned} \quad (0.0.7)$$

$$i = K-1, \quad j = M;$$

$$(\lambda + C + (K-C)\gamma)r_{K,j}^{(M)} = \lambda r_{K-1,j}^{(M)} + (j+1)\theta r_{K-1,j+1}^{(M)} + \lambda r_{K,j-1}^{(M)}, \quad (0.0.8)$$

$$i = K, \quad 0 \leq j \leq M-1;$$

$$(C + (K-C)\gamma)r_{K,M}^{(M)} = \lambda r_{K-1,M}^{(M)} + \lambda r_{K,M-1}^{(M)}, \quad (0.0.9)$$

$$i = K, \quad j = M.$$

Calculons les variables  $r_{ij}^{(M)}$  par groupe, chacun de taille  $K+1$ . Au début on calcule  $r_{0M}^{(M)}, \dots, r_{KM}^{(M)}$ , ensuite  $r_{0,M-1}^{(M)}, \dots, r_{K,M-1}^{(M)}$  et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve  $r_{00}^{(M)}, \dots, r_{K,0}^{(M)}$ .

1. Mettre  $j = M$

1.1 Pour trouver le groupe  $r_{0M}^{(M)}, \dots, r_{KM}^{(M)}$ , réécrire les équations (0.0.5), (0.0.6) et (0.0.7) comme suit respectivement:

$$r_{i+1,M}^{(M)} = \frac{(\lambda + i + M\theta + \eta_s)r_{iM}^{(M)} - \lambda r_{i-1,M}^{(M)}}{((i+1) + \eta_s)}, \quad 0 \leq i \leq C-1;$$

$$r_{i+1,M}^{(M)} = \frac{(\lambda + C + (i-C)\gamma + M\theta + \eta_s)r_{iM}^{(M)} - \lambda r_{i-1,M}^{(M)}}{(C + (i+1-C)\gamma + \eta_s)}, \quad C \leq i \leq K-2;$$

$$r_{i+1,M}^{(M)} = \frac{(\lambda + C + (i-C)\gamma + M\theta + \eta_s)r_{iM}^{(M)} - \lambda r_{i-1,M}^{(M)}}{(C + (i+1-C)\gamma)}, \quad i = K-1.$$

Ce qui est équivalent à

$$r_{i,M}^{(M)} = \frac{(\lambda + (i-1) + M\theta + \eta_s)r_{i-1,M}^{(M)} - \lambda r_{i-2,M}^{(M)}}{(i + \eta_s)}, \quad 1 \leq i \leq C;$$

$$r_{i,M}^{(M)} = \frac{(\lambda + C + (i-1-C)\gamma + M\theta + \eta_s)r_{i-1,M}^{(M)} - \lambda r_{i-2,M}^{(M)}}{(C + (i-C)\gamma + \eta_s)}, \quad C+1 \leq i \leq K-1;$$

$$r_{i,M}^{(M)} = \frac{(\lambda + C + (i-1-C)\gamma + M\theta + \eta_s)r_{i-1,M}^{(M)} - \lambda r_{i-2,M}^{(M)}}{(C + (i-C)\gamma)}, \quad i = K.$$

D'après (0.0.1)  $r_{0M}^{(M)} = 1$ . De ce fait il est possible de calculer récursivement les variables  $r_{1M}^{(M)}, \dots, r_{KM}^{(M)}$ .

2. Mettre  $j = j - 1$ . Calculer les variables  $r_{0j}^{(M)}, \dots, r_{Kj}^{(M)}$ .

2.1 La dernière variable  $r_{Kj}^{(M)}$ , peut être trouvée à partir de l'équation (0.0.9) (si  $j = M - 1$ )

$$r_{K,M-1}^{(M)} = \frac{(C + (K-C)\gamma)r_{KM}^{(M)} - \lambda r_{K-1,M}^{(M)}}{\lambda}.$$

Où à partir de l'équation (0.0.8) avec  $j$  remplacé par  $j + 1$  ( si  $j < M - 1$ ):

$$r_{Kj}^{(M)} = \frac{(\lambda + C + (K-C)\gamma)r_{K,j+1}^{(M)} - \lambda r_{K-1,j+1}^{(M)} - (j+2)\theta r_{K-1,j+2}^{(M)}}{\lambda}.$$

2.2 Pour trouver les variables  $r_{0j}^{(M)}, \dots, r_{K-1,j}^{(M)}$ , nous utilisons les équations (0.0.2), (0.0.3) et (0.0.3) pour  $i = 0, \dots, C, \dots, K - 1$ . Cet ensemble d'équations à la forme:

$$\alpha_i x_{i-1} + \beta_i x_i + \sigma_i x_{i+1} = \delta_i, \quad 0 \leq i \leq K - 1;$$

où

$$x_i = r_{ij}^{(M)}, \alpha_i = -\lambda, \delta_i = (j+1)\theta r_{i-1,j+1}^{(M)},$$

$$\sigma_i = -((i+1) + \eta_s), \beta_i = \lambda + i + j\theta + \eta_s, \text{ pour } C \leq i \leq K-2;$$

$$\sigma_i = -(C + (i+1-C)\gamma + \eta_s), \beta_i = \lambda + C + (i-C)\gamma + j\theta + \eta_s, \text{ pour } C \leq i \leq K-2;$$

$$\sigma_i = -(C + (i+1-C)\gamma), \beta_i = \lambda + C + (i-C)\gamma + j\theta + \eta_s, \text{ pour } i = K-1;$$

et les valeurs  $x_{-1} = 0$ ,  $x_K = r_{Kj}^{(M)}$  sont connues.

Ces équations, qui sont des équations aux différences, produisent des solutions numériques pour résoudre les équations différentielles de second ordre. L'algorithme le plus efficace pour leur résolution peut être trouvé dans plusieurs livres sur les méthodes numériques (voir, par exemple [40]). D'après cet algorithme, on calcule en premier lieu les variables  $B_i$ ,  $D_i$ ,  $0 \leq i \leq K-1$ , par des formules récursives

$$B_0 = \beta_0, D_0 = \delta_0,$$

$$B_i = \beta_i - \frac{\alpha_i \sigma_{i-1}}{B_{i-1}}, D_i = \delta_i - \frac{\alpha_i D_{i-1}}{B_{i-1}}, 1 \leq i \leq K-1;$$

et puis, à partir de l'équation

$$B_i x_i + \sigma_i x_{i+1} = D_i, 0 \leq i \leq K-1;$$

on calcule récursivement (dans l'ordre inverse) les inconnues  $x_{K-1}, \dots, x_C, \dots, x_0$ .

Dans le cas présent, nous avons la procédure suivante:

- Calculer les variables  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $0 \leq i \leq K-1$ , à l'aide des équations

$$B_{0j} = \lambda + j\theta + \eta_s;$$

$$B_{ij} = \lambda + i + j\theta + \eta_s - \frac{\lambda(i + \eta_s)}{B_{i-1,j}}, \text{ pour } 1 \leq i \leq C-1;$$

$$B_{ij} = (\lambda + C + (i-C)\gamma + j\theta + \eta_s) - \frac{\lambda(C + (i-C)\gamma + \eta_s)}{B_{i-1,j}}, \text{ pour } C \leq i \leq K-2;$$

$$B_{ij} = (\lambda + C + (i-C)\gamma + j\theta + \eta_s) - \frac{\lambda(C + (i-C)\gamma)}{B_{i-1,j}}, \text{ pour } i = K-1;$$

$$D_{0j} = 0;$$

$$D_{ij} = (j+1)\theta r_{i-1,j+1}^{(M)} + \frac{\lambda D_{i-1}}{B_{i-1,j}}, \text{ pour } 1 \leq i \leq K-1.$$

- Puis calculer récursivement  $r_{ij}^{(M)}$ ,  $0 \leq i \leq K - 1$ , (Dans l'ordre inverse, commencer par  $r_{Kj}^{(M)}$  connu à partir de l'étape 2.1) à l'aide des équations

$$r_{ij}^{(M)} = \frac{D_{ij} + (C + (i + 1 - C)\gamma)r_{i+1,j}^{(M)}}{B_{ij}}, \quad i = K - 1;$$

$$r_{ij}^{(M)} = \frac{D_{ij} + (C + (i + 1 - C)\gamma + \eta_s)r_{i+1,j}^{(M)}}{B_{ij}}, \quad i = K - 2, \dots, C;$$

$$r_{ij}^{(M)} = \frac{D_{ij} + ((i + 1) + \eta_s)r_{i+1,j}^{(M)}}{B_{ij}}, \quad i = C - 1, C - 2, \dots, 0.$$

3. La répétition de l'étape 2 tant que  $j \geq 0$  permet d'obtenir toutes les variables  $r_{ij}^{(M)}$  (ce qui est, successivement pour  $j = M - 2, M - 3, \dots, 0$ ).

Puisque  $P_{ij}^{(M)} = r_{ij}^{(M)} \cdot P_{0M}^{(M)}$ , alors on aura:

$$P_{0M}^{(M)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^M r_{ij}^{(M)}}.$$

A présent, on peut calculer les probabilités  $P_{ij}^{(M)} = r_{ij}^{(M)} \cdot P_{0M}^{(M)}$  et les principales caractéristiques probabilistes du système tronqué  $S^{(M)}$ .

## Annexe B

### B.1 La transformation matricielle de $xT = b$ en $AX = B$

Soit  $AX = B$ , où  $X$  est un vecteur ayant  $(K + 1) \times (M + 1)$  inconnues et  $B$  contient les taux de revenus négatifs:

$$X = [\bar{r}, v(0, 1), \dots, v(0, L), v(1, 0), \dots, v(C, 0), \dots, v(C, L), \dots, v(K, 0), \dots, v(K, L)]^t;$$

$$B = [-r(0, 0), -r(0, 1), \dots, -r(C, 0), -r(C, 1), \dots, -r(K, L)]^t.$$

La matrice  $A$  est composée des coefficients et peut être construite en mettant tous les éléments de la première colonne de  $A'$  égaux à -1. Initialement, la matrice  $A'$  est donnée par

$$A' = \begin{bmatrix} D_1^0 & D_2^1 & O & \dots & O & O & O \\ D_0^0 & D_1^1 & D_2^2 & \dots & O & O & O \\ O & D_0^1 & \ddots & \ddots & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & D_1^C & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & D_0^C & \ddots & \ddots & O \\ O & O & O & \dots & \ddots & D_1^{K-1} & D_2^K \\ O & O & O & \dots & O & D_0^{K-1} & (D_1^K)^t \end{bmatrix},$$

où chaque sous-matrice a la dimension  $(M + 1) \times (M + 1)$  et  $O$  est la matrice nulle.

$$D_0^i = ((i + 1)\mu + \eta_1)I, \quad 0 \leq i \leq C - 1;$$

$$D_0^i = (C\mu + (i + 1 - C)\gamma + \eta_1)I, \quad C \leq i \leq K - 2;$$

$$D_0^i = (C\mu + (i + 1 - C)\gamma)I, \quad i = K - 1;$$

$$D_2^i = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \theta & \lambda & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 2\theta & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M\theta & \lambda \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq K;$$

$$D_1^i = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha - \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 2\theta & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha - M\theta \end{bmatrix},$$

où  $\alpha = -\lambda - i\mu - \eta_1$  pour  $0 \leq i \leq C-1$  et  $\alpha = -\lambda - C\mu - (i-C)\gamma - \eta_1$  pour  $C \leq i \leq K-1$ .

Lorsque  $i = K$ , en utilisant les extrapolations linéaire ( $n = 2$ ) et quadratique ( $n = 3$ ), nous obtenons respectivement,

$$D_1^K = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & -\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \lambda - C\mu - (K-C)\gamma \end{bmatrix}, \quad D_1^K = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & -3\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 2\lambda - C\mu - (K-C)\gamma \end{bmatrix},$$

où  $\beta = -\lambda - C\mu - (K-C)\gamma$ . Ainsi, si l'extrapolation est faite avec  $n \leq M+1$  points, la matrice  $D_1^K$  sera définie comme



$$D_1^K = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \cdots & 0 & c_M^{(n)} \\ \lambda & \beta & \cdots & 0 & c_{M-1}^{(n)} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & c_{M-2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda c_2^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & \lambda c_1^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\lambda - C\mu - (K - C)\gamma + \lambda c_0^{(n)} \end{bmatrix},$$

où

$$c_l^{(n)} = \begin{cases} (-1)^l C_n^{l+1}, & \text{si } l < n \\ 0, & \text{si } l \geq n \end{cases}.$$

---

# Bibliographie

- [1] V.M. Abramov. Analysis of multiserver retrial queueing system: a martingale approach and an algorithm of solution. *Annals of Operations Research*, 141 :19-52, 2006.
- [2] M.S. Aguir, O.Z. Aksin, F. Karaesmen and Y. Dallery. On the interaction between retrials and sizing of call centers. *EJOR*, 191 :398-408, 2008.
- [3] M.S. Aguir, F. Karaesmen, O.Z. Aksin and F. Chauvet. The impact of retrials on call center performance. *OR Spectrum*, 26 :353-376, 2004.
- [4] A. Aissani. A survey on retrial queueing models. *Actes des Journées Statistiques Appliquées*, U.S.T.H.B., Alger, 1-11, 1994.
- [5] B. Almási, T. Bérczes, A. Kuki, J. Sztrik and J. Wang. Performance modeling of finite-source cognitive radio networks. *Acta Cybernetica*, 22 :617-631, 2016.
- [6] J.R. Artalejo. Accessible bibliography on retrial queues. *Mathematical and Computer Modelling*, 30 :1-6, 1999.
- [7] J.R. Artalejo. G-networks : a versatile approach for work removal in queueing systems. *EJOR*, 126 :233-249, 2000.
- [8] J.R. Artalejo, A. Economou and M.J. Lopez-Herrero. Algorithmic Approximations for the busy period distribution of the M/M/c retrial queue. *EJOR*, 176 :1687-1702, 2007.

- 
- [9] J.R. Artalejo. Retrial queues: an algorithmic approach. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 17 :83-101, 2009.
- [10] J.R. Artalejo. Accessible bibliography on retrial queues : Progress in 2000 - 2009. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 :1071-1081, 2010.
- [11] J.R. Artalejo and A. Gomez-Corral. *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*. Springer, 2008.
- [12] J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral and M.F. Neuts. Analysis of multiserver queues with constant retrial rate. *European Journal of Operational Research*, 135 :569-581, 2001.
- [13] J.R. Artalejo and V. Pla. On the impact of customer balking, impatience and retrials in telecommunication systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 57 :217-229, 2009.
- [14] J.R. Artalejo and M. Pozo. Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue. *Annals of Operations Research*, 116 :41-56, 2002.
- [15] K. Avrachenkov and U. Yechiali. Retrial networks with finite buffers and their application to internet data traffic. *Probability in the Engineering and Information Sciences*, 22(4) :519-536, 2008.
- [16] J.W. Cohen. Basic problems of the telephone traffic theory and the influence of repeated calls. *Philips Telecom. Rev*, 18(2) :49-100, 1957.
- [17] N.V. Djellab. *Files d'attente*. Cours de Post Graduation, Université Badji Mokhtar Annaba. 2007/2008.
- [18] I. Dimitrou. A mixed priority retrial queue with negative arrivals, unreliable server and multiple vacations. *Applied Mathematical Modelling*, 37(3) :1295-1309, 2013.
- [19] T.V. Do. An efficient computation algorithm for a multiserver feedback retrial queue with a large queueing capacity. *Applied Mathematical Modelling*, 34 :2272-2278, 2010.

- [20] T.V. Do. Solution for a retrial queueing problem in cellular networks with the Fractional Guard Channel policy. *Mathematical and Computer Modelling*, 53 :2059-2066, 2011.
- [21] T.V. Do, N.H. Do and J. Zhang. An enhanced algorithm to solve multiserver retrial queueing systems with impatient customers. *Computer Industrial Engineering*, 65(4) :719-728, 2013.
- [22] M.J. Domenech-Benloch, J.M. Gimenez-Guzman, V. Pla, J. Martinez-Bauset and V. Casares-Giner. Generalized truncated methods for an efficient solution of retrial systems. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation 2008 Article ID 183089, 15 pages, DOI: 10.1155/2008/183089.
- [23] M.J. Domenech-Benloch, J.M. Gimenez-Guzman, V. Pla, J. Martinez-Bauset and V. Casares-Giner. On the convergence of truncated processes of multiserver retrial queues. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, 2010 Article ID 580349, 8 pages, DOI: 10.1155/2010/580349.
- [24] M.J. Domenech-Benllach, J.M. Gimenez-Guzman, V. Pla, J. Martinez-Bauset and V. Casares-Giner. On the efficient solution of a multiserver system with two reattempt orbits. *Mathematical and Computer Modelling*, 51 :1082-1092, 2010.
- [25] G.I. Falin. Ergodicity and stability of systems with repeated attempts. *Ukrainian Mathematical Journal*, 41(7) :813-817, 1989.
- [26] G.I. Falin. Calculation of probabilistic characteristics of a multi-channel queue with repeated calls. *Vestnik Mosk. Univ.Ser. 15, Vychisl. Mat.Cybernet*, 1 :35-41, 1983.
- [27] G.I. Falin. Double-channel queueing system with repeated calls, Paper 4221-84. *All-Union Institute for Scientific and Technical information*, Moscow, 1984.
- [28] G.I. Falin. A survey of retrial queues. *Queueing Systems*, 7 :127-168, 1990.
- [29] G.I. Falin. Comparability of migration processes. *Probab. Theory Appl*, 2 :392-396, 1986.

- [30] G.I. Falin. Estimations of error in approximation of countable Markov chains associated with models of repeated calls. *Vestnik Moscov.Univ.Ser.1*, Math. Mech, 2 :12-15, 1987.
- [31] G.I. Falin. A multiserver retrial queue with a finite number of sources of primary calls. *Mathematical and Computer Modelling*, 30 :33-49, 1999.
- [32] G.I. Falin and J.R. Artalejo. A finite source retrial queue. *European Journal of Operational Research*, 108 :409-424, 1998.
- [33] G.I. Falin and J.G.C Templeton. *Retrial queues*. Chapman and Hall, 1997.
- [34] A.A. Federgruen and L. Green. Queueing systems with service interruptions. *Research Working*, Columbia University, 30 :5-84, 1984.
- [35] N. Gautam. *Analysis of Queues. Methods and Applications*. CRC Press, Taylor Francis Group, 2012.
- [36] E. Gelenbe. Random neural networks with negative and positive signals and product form solution. *Neural Computation*, 1 :502-510, 1989.
- [37] E. Gelenbe, P. Glynn and K. Singman. Queues with negative arrivals. *Journal of Applied Probability* 28 :245-250, 1991.
- [38] J.M. Gimenez-Guzman, M.J. Domenech-Belloch, V. Pla, V. Casares-Giner and J. Martinez-Bauset. Value extrapolation technique to solve retrial queues: a comparative perspective. *ETRI Journal*, 30 :492-494, 2008.
- [39] J.M. Gimenez-Guzman, M.J. Domenech-Benlloch, V. Pla, J. Martinez-Bauset and V. Casares-Giner. Efficient method to approximately solve retrial systems with impatience. *Journal of Applied Mathematics*, 2012 :1-18, 2012.
- [40] S.K. Godunov and V.S. Ryabenkii. *Difference Schemes*. North Holland, 47-50, 1987.

- 
- [41] A. Gomez-Corral and M. Lopez-Garcia. Maximum queue lengths during a fixed time interval in the M/M/c retrial queue. *Applied Mathematics and Computation*, 235 :124-136, 2014.
- [42] P. Goatin. *Analyse Numérique*. Cours de 1ère année - Var ISITV, Université du Sud Toulon.
- [43] B.S. Greenberg. *Queueing systems with returning customers and the optimal order of tandem queues*. Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1986.
- [44] T. Hanschke. Explicit formulas for the characteristics of the M/M/2/2 queue with repeated attempts. *Journal of Applied Probability*, 24 :486-494, 1987.
- [45] R. A. Howard. *Dynamic Programming and Markov Processes*. The Technology Press of MIT, Cambridge, Mass, USA, 1960.
- [46] O. Ibe. *Markov Processes for Stochastic Modeling*. Elsevier Academic Press, 2009.
- [47] D.L. Isaacson and R.W. Madsen. *Markov Chains, Theory and Applications*. John Wiley Sons, 1976.
- [48] F. Jędrzejewski. *Introduction aux méthodes numériques*. Springer, 2005.
- [49] K. Kajiwara and T. Pung-Duc. Asymptotic and numerical analysis of multiserver retrial queue with guard channel for cellular networks. Proceedings of the Eight International Conference on Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models (MAM8), pp.85-102, India 2014.
- [50] K. Kajiwara and T. Phung-Duc. Multiserver queue with guard channel for priority and retrial customers. *International Journal of Stochastic Analysis*, Vol. 2016, 2016.
- [51] T. Kamae, U. Krengel and G.L. O'Brien. Stochastic inequalities on partially ordered spaces. *Annals of Probability*, 5 :899-912, 1977.

- [52] J. Kim, J. Kim and B. Kim. Tail asymptotic of the queue size distribution in the M/M/m retrial queue. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(14) :3445-3460.
- [53] B. Kim and J. Kim. Exact tail asymptotic for the M/M/m retrial queue with non persistent customers. *Operations Research Letters*, 40 :537-540, 2012.
- [54] L. Kosten. *On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking*. De Ingenieur, 59 :1-125, 1947.
- [55] B. Krishna Kumar and J. Raja. On multiserver feedback retrial queues with balking and control retrial rate. *Annals of Operations Research*, 141 :211-232, 2006.
- [56] B. Krishna Kumar, R. Rukmani and V. Thangaraj. On multiserver feedback retrial queue with finite buffer. *Applied Mathematical Modelling*, 33 :2062-2083, 2009.
- [57] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Masson Tomes 1 and 2, 1986-1987.
- [58] J. Leino and J. Virtamo. An approximate method for calculating performance measures of Markov processes. *Proceedings of VALUETOOLS*, 2006.
- [59] V.A. Malyshev and M.V. Menshikov. Ergodicity, continuity and analyticity of countable Markov chains. *Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, 39, 1979.
- [60] G. Meurant. *Computer solution of large linear systems*. North Holland, 1999.
- [61] U. Narayan Bhat. *An Introduction to Queueing Theory. Modeling and Analysis in Applications*. Springer, New York, 2015.
- [62] M.F. Neuts. *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1981.
- [63] M.F. Neuts and B.M. Rao. Numerical investigation of a multiserver retrial model. *Queueing Systems*, 7 :169-190, 1990.

- [64] A.G. Pakes. Some conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains. *Operations Research*, 17 :1058-1061, 1969.
- [65] T. Phung-Duc. Multiserver retrial queues with two types of non persistent customers. *Asia-Pacific Journal of Operations Research*, 31(2) :1440009, 2014.
- [66] T. Phung-Duc. Asymptotic analysis for markovian queues with two types of non persistent retrial customers. *Applied Mathematics and Computation*, 265 :768-784, 2015.
- [67] T. Phung-Duc and K. Kawanishi. Multiserver retrial queues with after-call work. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 1 :639-656, 2011.
- [68] T. Phung-Duc and K. Kawanishi. Performance analysis of call centers with abandonment, retrial and after-call work. *Performance Evaluation*, 80(C) :43-62, 2014.
- [69] T. Phung-Duc, H. Masuyame, S. Kasahara and Y. Takahashi. State-depended M/M/c/c+r retrial queues with Bernoulli abandonment. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 6(3) :517-540, 2010.
- [70] M.L. Puterman. Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming. Wiley series in Probability and Statistics, Wiley, 2008.
- [71] P. Rajadurai, V.M. Chandrasekaran and M.C. Saravananarajan. Steady state analysis of batch arrival feedback retrial queue with two phases of service, negative customers, Bernoulli vacation and server breakdown. *IJMOR*, 7(5) :519-546, 2015.
- [72] M. Rajkumar. An (s,S) retrial inventory system with impatient and negative customers. *IJMOR*, 6(1) :106-122, 2014.
- [73] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Company, 1996.
- [74] M. Senthil Kumar, S.R. Chakravarthy and R. Arumuganathan. Preemptive resume priority retrial queue with two classes of MAP arrivals. *Applied Mathematical Sciences*, 52(7): 2569-2589, 2013.



- [75] C. Shekhar, A.A. Raina and A. Kumar. A brief review on retrial queue: progress in 2010-2015. *International Journal of Applied Sciences and Engineering Research*, 5(4) :324-336, 2016.
- [76] Y.W. Shin and T.S. Choo. M/M/s queue with impatient customers and retrials. *Applied Mathematical Modelling*, 33 :2596-2606, 2009.
- [77] S.N. Stepanov. Markov models with retrials: the calculation of stationary performance measures based on the concept of truncation. *Mathematical and Computer Modelling*, 30 :207-228, 1999.
- [78] D. Stoyan. *Comparison Methods for Queues and other stochastic models*. Wiley, New York, 1983.
- [79] N.T. Thomopoulos. *Fundamentals of Queuing Systems*. Springer, New York, 2012.
- [80] R.L. Tweedie. Sufficient conditions for regularity, recurrence and ergodicity of Markov processes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 78(1), 1975.
- [81] S. Upadhyaya. Performance analysis of a batch arrival retrial queue with Bernoulli feedback. *IJMOR*, 6(6) :680-703, 2014.
- [82] P. VijayaLaxmi, M.L. Soujanya and K. Jyothsna. An inventory model with negative customers and service interruptions. *IJMOR*, 9(1) :1-14, 2016.
- [83] R.I. Wilkinson. Theories for toll traffic engineering in USA. *Bell System Tech.J.*, 35 :421-507, 1956.
- [84] J. Wu and Z. Liang. A single server retrial G-queue with priority and unreliable server under Bernoulli vacation schedule. *Computer Industrial Engineering*, 64 :84-93, 2013.
- [85] D.Y. Yang, J.C. Ke and C.H. Wu. The multi-server retrial system with Bernoulli feedback and starting failures. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(5) :954-969, 2015.

- [86] H. Zeboulon. *Contribution a l'etude des convergences stochastiques des mesures aléatoires*. Thèse 3e cycle, Univ.P. et M. Curie, (1975).
- [87] N. Zidani et N. Djellab. L'approximation de la distribution stationnaire de l'état des systems des files d'attente avec rappels et multiserveurs. *Journées Jeunes Chercheurs*, Université Badji Mokhtar-Annaba, 30 septembre- 1 octobre 2014.
- [88] N. Zidani et N. Djellab. Calcul numerique des caractéristiques stationnaires du modèle tronqué. *Journées Nationales sur les Mathématiques Appliquées "JNMA '14"*, Université 20 août 1955 Skikda, 26-27 Novembre 2014.
- [89] N. Zidani et N. Djellab. Approximation of multiserver retrial queues by truncation technique. *6<sup>th</sup> Operational Research Practice in Africa Conference*, University of Sciences and Technology Houari Boumediene, 20-22 Avril 2015.
- [90] N. Zidani et N. Djellab. Analysis of multiserver retrial queues. *JSLAROMAD'III*, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 26-28 Octobre 2015.
- [91] N. Zidani et N. Djellab. On the multiserver retrial queues with negative arrivals. *International Journal of Mathematics in Operational Research*. DOI: 10.1504/IJ-MOR.2018.1005307.
- [92] N. Zidani, P. Spiteri et N. Djellab. Numerical solution for the performance characteristics of the M/M/C/K retrial queue with negative customers and exponential abandonments by using value extrapolation method. *RAIRO Operations Research*. To be appear, 2017.