

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté des Sciences de l'Ingéniorat

Département d'Hydraulique

Année : 2017/2018

## THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en Sciences

### COEFFICIENT DE RESISTANCE DES ECOULEMENTS UNIFORMES

Option **Hydraulique**

Par

**LOUKAM Imed**

Président	AMARCHI Hocine	Prof.	Université de Annaba
Directeur de thèse	ACHOUR Bachir	Prof.	Université de Biskra
Co-Directeur de thèse	DJEMILI Lakhdar	Prof.	Université de Annaba
Examineur	REMINI Boualem	Prof.	Université de Blida
Examineur	HOUICHI Larbi	Prof.	Université de Batna
Examineur	LAKEHAL Moussa	MCA	Université de Annaba

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

La première personne que je tiens à remercier est le directeur de thèse **Pr. Achour Bachir** pour l'orientation, la confiance et la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Mes remerciements s'étendent également au co-directeur de thèse **Pr. Djemili Lakhdar** pour son aide et sa collaboration pour l'accomplissement de ce travail.

Mes vifs remerciements vont également au président de jury **Pr. Amarchi Houcine** et aux membres du jury **Pr. Remini Boualem, Pr .Houichi Larbi** et **Dr. Lakehal Moussa** pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

## ملخص

عند حساب السيلان المنتظم في الأفتنية و القنوات المفتوحة، معامل المقاومة شيزي أو مانينغ ليس بمعطى . حيث يتم اختيار قيمه بشكل عشوائي. لتفادي هذا العيب الرئيسي في جميع القنوات بمختلف أشكالها الهندسية ، يتوجب معرفة قيمة هذه المعاملات لإمكانية تصميم القناة وحتى حساب العمق الطبيعي. الهدف الرئيسي لهذا البحث هو التركيز على تحديد علاقة معامل المقاومة على أساس طريقة النموذج الخشن لحساب القنوات ،نستطيع ايجاد علاقة عامة صريحة لمعامل المقاومة في مجال السيلان المضطرب للقنوات ذات الأشكال الهندسية المختلفة ، وخاصة القناة المستطيلة، القناة الدائرية، قناة حدوة حصان و القناة البيضوية . ويعتمد معامل مقاومة شيزي ومانينغ بقوة على نسبة امتلاء القناة ، التدفق، المنحدر الطولي، الخشونة المطلقة للجدران الداخلية للقناة واللزوجة الحركية للسائل. وعلاوة على ذلك، في هذا العمل، يتم عرض الطريقة المبسطة لتحديد معامل المقاومة شيزي مع عدد محدود من المعطيات، وهي التدفق، منحدر القناة، الخشونة المطلقة واللزوجة الحركية. وأخيراً، بعد دراسة التغير في معامل المقاومة شيزي ومانينغ بدلالة نسبة امتلاء القناة ، يمكن التعبير بشكل صريح عن القيمة القصوى لمعامل شيزي.

الكلمات المفتاحية: السيلان المنتظم ؛ معامل مقاومة شيزي؛ معامل مقاومة مانينغ؛ طريقة النموذج الخشن ؛ السيلان المضطرب ؛ نسبة امتلاء القناة ؛ الطريقة المبسطة.

## Abstract

When calculating uniform flows in pipes and open channels, *Chezy's* and *Manning's* Resistance Coefficient are not a problem data and their values is arbitrarily chosen. Such major disadvantage is met in all the geometric profiles of conduits and channels. Knowing the value of these coefficients is essential to both the design of the channel and normal depth calculation. The main objective of our research work is to focus upon the identification of the resistance coefficient relationship. On the basis of the Rough Model Method (RMM) for the calculation of conduits and channels, a general explicit relation of the Resistance Coefficient in turbulent flow is established with different geometric profiles, particularly rectangular channel, circular pipe, horseshoe tunnels the egg-shaped conduit. *Chezy's* and *Manning's* Resistance Coefficient depend strongly on the filling rate, the discharge, the longitudinal slope, the absolute roughness of the internal walls of the conduit and the kinematic viscosity of the liquid. Moreover, in this work, a simplified method is presented to determine *Chezy's* Resistance Coefficient with a limited number of data, namely the discharge, the slope of the conduit, the absolute roughness and the kinematic viscosity. Last but not least, after studying the variation of *Chezy's* and *Manning's* Resistance Coefficient as a function of the filling rate, an equally explicit expression is given for the easy calculation of the *Chezy's* coefficient when its maximum value is reached.

**Key words:** uniform flow ; *Chezy's* resistance coefficient ; *Manning's* resistance coefficient ; rough model method; turbulent flow ; filling rate ; a simplified method.

### ***Résumé***

Dans le calcul des écoulements uniformes en conduites et canaux à surface libre, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* ou de *Manning* n'est pas une donnée du problème et sa valeur est considérée de manière arbitraire, ce qui implique un calcul plutôt approximatif. Cet inconvénient majeur se rencontre dans tous les profils géométriques de conduites et de canaux. La connaissance de la valeur de ces coefficients est indispensable au dimensionnement de l'ouvrage, voire même pour le calcul de la profondeur normale. C'est dans ce contexte, que s'inscrit l'objectif de notre recherche en orientant principalement nos travaux sur l'identification et l'établissement de la relation du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning*. En se basant sur la méthode du modèle rugueux (MMR) destinée au calcul des conduites et canaux, nous pouvons établir la relation générale du coefficient de résistance d'une manière explicite dans le domaine de l'écoulement turbulent, pour les différents profils géométriques, notamment pour le canal rectangulaire, la conduite circulaire, la conduite en forme de fer à cheval et l'ovoïde à canette rétrécie. Il apparaît clairement que les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* dépendent fortement du taux de remplissage, du débit volume, de la pente longitudinale, de la rugosité absolue des parois interne de la conduite et la viscosité cinématique du liquide en écoulement. En outre, dans ce travail, une méthode simplifiée par rapport à celle citée précédemment est exposée pour déterminer le coefficient de résistance avec un nombre limité de données, à savoir, le débit volume, la pente de la conduite, la rugosité absolue et la viscosité cinématique. Enfin, après une étude de variation qui a été menée des coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* en fonction du taux de remplissage, une expression également explicite a été donnée pour le calcul aisé du coefficient de *Chézy* quand il atteint sa valeur maximale lors de l'écoulement dans la conduite.

***Mots clés : Ecoulement uniforme ; Coefficient de résistance de Chézy ; Coefficient de résistance de Manning ; méthode du modèle rugueux ; écoulement turbulent ; taux de remplissage ; méthode simplifiée.***

## Sommaire

Liste des figures.....4

Introduction générale.....6

### .....Chapitre 1.....

#### I. Etude bibliographique

##### (Ecoulement uniforme)

I.1. Introduction.....8

I.2. Formule de *Chézy*.....11

I.3. Formule de *Manning-Strickler*.....14

I.4. Formule de *Darcy – Weisbach* et évaluation du coefficient de frottement.....17

I.5. Équations théoriques de l'écoulement uniforme.....19

I.6. Interprétation théorique du coefficient de rugosité de *Manning*.....23

I.7. Méthode de détermination du coefficient de *Manning*.....24

I.8. Calcul de l'écoulement uniforme.....25

I.9. Conclusion.....31

### .....Chapitre 2.....

#### II. Coefficient de résistance dans un canal rectangulaire

II.1. Introduction.....33

II.2. Coefficient de résistance de *Chézy*.....33

II.2.1. Expression générale du coefficient de résistance de *Chézy*.....33

II.2.2. Variation du coefficient de *Chézy*.....36

II.2.3. Calcul du paramètre de forme.....38

II.2.4. Etapes de calcul du coefficient de *Chézy*.....42

II.3. Coefficient de résistance de *Manning* .....46

II.3.1. Expression générale du coefficient de résistance de *Manning*.....46

II.3.2. Variation du coefficient de résistance de *Manning*.....48

II.3.3. Calcul du coefficient de résistance de *Manning* par la méthode du modèle rugueux (MMR).....50

II.4. Conclusion.....57

.....Chapitre 3.....

**III. Coefficient de résistance dans une conduite de forme circulaire**

III.1. Introduction.....59

III.2. Caractéristiques géométriques et hydrauliques.....59

III.3. Coefficient de résistance de Chézy.....60

III.3.1.Expression générale du coefficient de résistance de Chézy.....61

III.3.2. Calcul du coefficient de résistance de *Chézy* par la méthode du modèle rugueux (MMR).....62

III.3.3. Méthode simplifiée.....66

III.3.4. Coefficient de résistance maximal de *Chézy*.....68

III.4. Coefficient de résistance de *Manning*.....74

III.4.1. Expression générale du coefficient de résistance de *Manning*.....74

III.4.2. Calcul du coefficient de résistance de *Manning* par la méthode du modèle rugueux (MMR).....75

III.4.3. Variation du coefficient de *Manning*.....78

III.5. Conclusion.....82

.....Chapitre 4.....

**IV. Coefficient de résistance dans une conduite en forme de fer à cheval**

IV.1. Introduction.....83

IV.2. Caractéristiques géométriques de conduite en forme de fer à cheval.....83

IV. 3. Caractéristiques hydrauliques.....84

IV. 4. Coefficient de résistance de *Chézy*.....85

IV.4.1.Expression générale du coefficient de résistance de *Chézy*.....85

IV.4.2. Calcul du coefficient de résistance de <i>Chézy</i> par la méthode du modèle rugueux (MMR).....	88
IV.4.3. Méthode simplifiée.....	95
IV.4.4. Coefficient de résistance maximal de <i>Chézy</i> .....	98
IV.5. Coefficient de résistance de <i>Manning</i> .....	102
IV.5.1. Expression générale du coefficient de résistance de <i>Manning</i> .....	102
IV.5.2. Calcul du coefficient de résistance de <i>Manning</i> par la méthode du modèle rugueux (MMR).....	104
IV.5.3. Variation du coefficient de <i>Manning</i> .....	111
IV.6. Conclusion.....	115

## .....Chapitre 5.....

### V. Coefficient de résistance dans un ovoïde à canette rétrécie

V.1. Introduction.....	116
V.2. Caractéristiques géométriques d'ovoïde à canette rétrécie.....	116
V. 3. Caractéristiques hydrauliques.....	117
V. 4. Coefficient de résistance de <i>Chézy</i> .....	119
V.4.1.Expression générale du coefficient de résistance de <i>Chézy</i> .....	119
V.4.2. Calcul du coefficient de résistance de <i>Chézy</i> par la méthode du modèle rugueux (MMR).....	122
V.4.3. Méthode simplifiée.....	129
V.4.4. Coefficient de résistance maximal de <i>Chézy</i> .....	131
V.5. Coefficient de résistance de <i>Manning</i> .....	135
V.5.1. Expression générale du coefficient de résistance de <i>Manning</i> .....	135
V.5.2. Calcul du coefficient de résistance de <i>Manning</i> par la méthode du modèle rugueux (MMR).....	137
V.5.3. Variation du coefficient de <i>Manning</i> .....	144
V.6. Conclusion.....	148
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>149</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>154</b>

## Liste des figures

- **Fig.1.1** : Établissement de l'écoulement uniforme dans un canal de grande longueur. (- - -): profondeur critique. (—): profondeur normale de l'écoulement uniforme. ....9
- **Fig.1.2** : Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de la formule de *Chézy*. ....12
- **Fig.1.3** : Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de l'équation de *Keulegan*. ....21
- **Fig. 1.4** : Facteur de section relatif en fonction de la profondeur normale relative pour le cas de la conduite de forme circulaire. Courbe tracée selon les valeurs du tableau 1.1. ....28
- **Fig.1.5** : Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire selon *Camp* (1946). ....29
- **Fig. 2.1** : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon/b=0$ . (Ecoulement lisse). Canal rectangulaire. ....36
- **Fig. 2.2** : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon/b=10^{-4}$ . Les courbes se confondent pour  $R^* \geq 10^7$ . Canal rectangulaire. ....37
- **Fig. 2.3** : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon/b=10^{-3}$ . Les courbes se confondent pour  $R^* \geq 10^6$ . Canal rectangulaire. ....37
- **Fig.2.4** : Variation de  $N$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon/b=0$  (Ecoulement lisse). Canal rectangulaire. ....48
- **Fig.2.5** : Variation de  $N$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon/b=10^{-4}$ . Canal rectangulaire. ....49
- **Fig.2.6** : Variation de  $N$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon/b=10^{-3}$ . Canal rectangulaire. ....49
- **Fig.3.1** : Schéma de profil de conduite en forme circulaire. ....60
- **Fig.3.2.1** : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  dans une conduite selon la relation (3.14) pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  dans une conduite de forme circulaire. ....69
- **Fig.3.2.2** : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  selon la relation (3.14) pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0.05$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  dans une conduite de forme circulaire. ....69



- **Fig.3.3 :** (a) ; (b) ; (c) ; (d) ; (e) ; (f) ; (g) ;(h) : Variation de  $N=D^{1/6}/n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon les relations (3.44) dans une conduite de forme circulaire.....**78-79-80**
  
- **Fig. 4.1 :** Schéma de profil de conduite en forme de fer à cheval. .... **84**
  
- **Fig.4.2.1 :** Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  selon les relations (4.24) ; (4.27) ; (4.30) pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  dans une conduite en forme de fer à cheval. ....**98**
  
- **Fig.4.2.2 :** Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  selon les relations (4.24) ; (4.27) ; (4.30) pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0.05$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  . dans une conduite en forme de fer à cheval. .... **99**
  
- **Fig.4.3 :** (a) ; (b) ; (c) ; (d) ; (e) ; (f) ; (g) ;(h) : Variation de  $N=D^{1/6}/n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon les relations (4.84), (4.86) et (4.88) dans une conduite en forme de fer à cheval. ....**111-112-113-114**
  
- **Fig. 5.1 :** Schéma de profil d'ovoïde à canette rétrécie. ....**117**
  
- **Fig.5.2.1 :** Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  selon les relations (5.24) ; (5.27) ; (5.30) pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  dans un ovoïde à canette rétrécie. ....**131**
  
- **Fig.5.2.2 :** Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  selon les relations (5.24) ; (5.27) ; (5.30) pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0.05$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  dans un ovoïde à canette rétrécie. ....**132**
  
- **Fig.5.3 :** (a) ; (b) ; (c) ; (d) ; (e) ; (f) ; (g) ;(h) : Variation de  $N=D^{1/6}/n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon les relations (5.84), (5.86) et (5.88) dans un ovoïde à canette rétrécie. ....**144-145-146-147**

## **Introduction générale**

## Introduction générale

Dans les canaux artificiels ou naturels à surface libre et dans le but de simplifier le calcul des ouvrages hydrauliques, on considère le plus souvent que l'écoulement est uniforme, car c'est rare de le rencontrer un tel écoulement dans la pratique. Il est caractérisé par l'invariabilité de sa ligne d'énergie par rapport à la pente géométrique du canal, d'où la profondeur d'eau, la section transversale, la vitesse moyenne lors de l'écoulement dans l'espace et dans le temps sont les mêmes. Celui-ci peut lui procurer la caractéristique d'être un écoulement permanent.

Actuellement, et depuis plus de deux siècles, le calcul hydraulique est basé sur les deux fameuses formules habituelles de *Chézy* et de *Manning* qui ont prouvé leurs efficacité dans le domaine de l'ingénierie car d'un point de vue conceptuel et pratique ce sont les formules les plus fondées et les plus simples à utiliser.

Ces deux formules exprimaient la vitesse moyenne de l'écoulement en fonction du rayon hydraulique, la pente longitudinale du canal et le coefficient de résistance à l'écoulement qui est absolument considéré comme une constante.

L'application des deux formules de *Chézy* et de *Manning* au fil du temps et depuis leurs apparitions ne cessait de poser une problématique par plusieurs auteurs qui discutaient la constance du coefficient de résistance notamment sur les trois domaines de l'écoulement : le domaine turbulent rugueux, le domaine de transition et le domaine turbulent lisse.

Malgré les efforts qui ont été fournis par des auteurs dans de nombreuses études, ces dernières n'ont pas pu exprimer d'une façon explicite les coefficients de *Chézy* ou de *Manning* notamment, lorsque l'écoulement est dans le domaine de transition ou lisse. Cependant pour le cas du régime d'écoulement turbulent rugueux, les valeurs des coefficients de résistance sont généralement tabulées dépendant de plusieurs facteurs essentiellement la nature du matériau constituant le canal. Plusieurs formules ont été proposées pour exprimer ces coefficients depuis *Prony*, *Bazin*, *Ganguillet*, *Kutter*, jusqu'à *Powell*, *Swamee* et *Rathie*.

Suite à ce qui a été précédé, dans le calcul des écoulements uniformes en conduites et canaux à surface libre, la valeur du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* ou de *Manning* est généralement choisie de manière arbitraire, ce qui implique un calcul plutôt approximatif. Cet inconvénient majeur se rencontre dans tous les profils géométriques de conduites et de canaux. La connaissance de la valeur de ce coefficient est indispensable au dimensionnement de l'ouvrage, voire même pour le calcul de la profondeur normale. L'objectif de ce travail est

d'orienter principalement nos travaux sur l'identification et l'établissement de la relation du coefficient de résistance à l'écoulement. En se basant sur la méthode du modèle rugueux (MMR) destinée au calcul des conduites et canaux, nous pouvons établir la relation générale du coefficient de résistance d'une manière explicite dans le domaine de l'écoulement turbulent, pour les différents profils géométriques.

Cette thèse est composée de plusieurs chapitres, au début, le premier chapitre, expose le fondement et les définitions théoriques concernant l'écoulement uniforme puis il décrit les équations de mouvement qui gouvernent les relations habituelles de *Darcy* et de *Chézy* en expliquant la relation entre le coefficient  $C$  de *Chézy* et coefficient de frottement  $f$  de *Darcy*. Ceci est suivi par une synthèse bibliographique citant et expliquant les importantes études et œuvres réalisés qui ont pu exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement uniforme depuis l'apparition de la formule de *Chézy* et sa dérivée celle de *Manning*.

Le premier chapitre est suivi par quatre autres chapitres où notre apport à cette étude apparaît clairement. Chaque chapitre prend à sa charge l'étude d'un profil géométrique de conduite ou canaux artificiels qui peuvent être rencontrés dans la pratique. Ainsi, nous suggérons le traitement de quatre profils géométriques de conduite chacun à part, qui sont, la forme rectangulaire, la forme circulaire, la forme de fer à cheval, et l'ovoïde à canette rétrécie. Par rapport à chaque forme géométrique proposée et en fonction du taux de remplissage dans les conduites fermées ou en fonction du paramètre de forme dans les canaux ouverts, l'étude du coefficient de résistance à l'écoulement uniforme de *Chézy* ou de *Manning* peut prendre deux volets. Le premier volet traite lorsque le diamètre est une donnée du problème, la détermination du coefficient de résistance à l'écoulement tandis que le second volet s'occupe de l'établissement du coefficient de résistance par la méthode du modèle rugueux (MMR) lorsque le diamètre de la conduite n'est pas une donnée du problème.

# **I. Etude bibliographique**

## **(Ecoulement uniforme)**

## **I.1. Introduction**

Un écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur  $h$  ou  $y_n$  de l'écoulement appelée aussi profondeur normale, l'aire de la section mouillée  $A$ , la vitesse  $V$  de l'écoulement et le débit  $Q$ . Dans les écoulements à surface libre, la ligne de charge totale est à la fois parallèle à la ligne piézométrique et à la pente géométrique du canal.

D'un point de vue pratique, la constance de la vitesse  $V$  est généralement associée à la constance de la vitesse moyenne de l'écoulement ; mais de façon plus rigoureuse, cela signifie que l'écoulement est caractérisé par une vitesse constante en tout point de son domaine. En d'autres termes, la distribution des vitesses dans chacune des sections transversales de l'écoulement est uniforme, correspondant à une couche limite pleinement développée.

Bien que la condition d'un écoulement uniforme, dans le sens stricte du terme, ne soit pratiquement jamais satisfaite, elle est cependant fréquemment admise lors du calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivières. Cette approche, bien que simplifiée, donne des résultats assez satisfaisants dans bon nombre de cas pratiques.

L'écoulement uniforme peut être soit en régime laminaire soit en régime turbulent, mais il se produit sous de grandes vitesses. A vitesse élevée, l'écoulement uniforme est instable et il est le siège d'un fort entraînement d'air.

Dans les canaux ouverts, l'écoulement uniforme se développe lorsque les forces de résistance s'opposant à l'écoulement sont équilibrées par les forces de gravité. Les forces de résistances sont proportionnelles à  $V$ .

Lorsqu'un écoulement entrant dans un canal s'effectue de façon lente, la vitesse et par conséquent la résistance à l'écoulement sont faibles. Les forces de gravité sont alors prédominantes et l'écoulement subit alors une accélération depuis l'amont. La vitesse ainsi que la résistance augmentent au fur et à mesure que l'on se déplace vers l'aval, jusqu'à ce que les forces de gravité soient équilibrées. A cet instant, l'écoulement uniforme apparaît. La zone sur laquelle s'étend l'écoulement accéléré, et au-delà de laquelle l'écoulement uniforme apparaît, est dite zone de transition. Si la longueur du canal est inférieure à la longueur de la zone transitoire, l'écoulement uniforme ne peut être atteint.

Plus à l'aval de l'écoulement uniforme, les forces de gravité deviennent de plus en plus prédominantes en raison de l'accélération que subit l'écoulement. L'écoulement uniforme disparaît alors en laissant place à un écoulement varié. La figure 1.1 montre l'état d'un écoulement à l'entrée et à l'intérieur d'un canal

rectangulaire de grande longueur et de différentes pentes géométriques  $i$ . La pente  $i$  est comparée à la pente critique  $i_c$ .

Lorsque la pente  $i$  est suave (figure 1.1.a), la zone transitoire se présente sous l'aspect d'ondulations. L'écoulement est uniforme au milieu du canal mais varie aux extrémités de celui-ci. D'un point de vue théorique, l'écoulement varié tend vers l'écoulement uniforme de manière graduelle et asymptotique. On considère généralement dans la pratique que la profondeur de l'écoulement reste constante si la variation qu'elle subit n'excède pas 1% de la valeur moyenne de la profondeur normale.

Lorsque la pente  $i$  correspond à la pente critique  $i_c$  (figure 1.1.b), la surface libre de l'écoulement critique est instable. Des ondulations peuvent se produire au milieu du canal, mais la profondeur oscille autour d'une valeur moyenne et l'écoulement est alors considéré comme étant uniforme.

Lorsque la pente  $i$  est supercritrique ou prononcée (figure 1.1.c), la surface libre dans la zone transitoire chute de manière graduelle d'un niveau subcritique ou suave à un niveau supercritique ou prononcé. Au-delà de la zone transitoire, l'écoulement devient uniforme.

La longueur sur laquelle s'étend la zone transitoire dépend essentiellement du débit volume  $Q$  entrant dans le canal ainsi que des caractéristiques de celui-ci, telles que la rugosité absolue, la pente et la géométrie d'entrée. D'un point de vue hydrodynamique, la longueur de la zone transitoire ne doit pas être inférieure à la longueur pour laquelle, sous des conditions données de l'écoulement, la couche limite est pleinement développée.

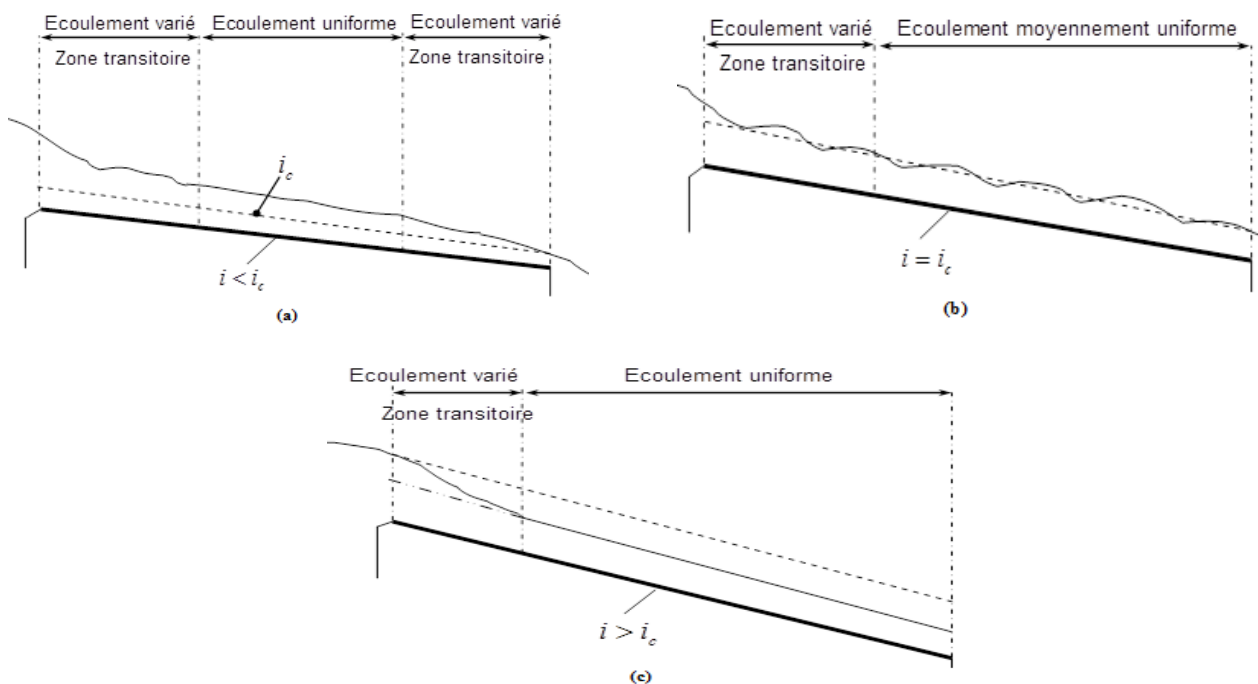


Fig.1.1 : Établissement de l'écoulement uniforme dans un canal de grande longueur.  
 (- - -): profondeur critique. (—): profondeur normale de l'écoulement uniforme.

Le calcul de la profondeur d'un écoulement uniforme, appelée profondeur normale de l'écoulement est très important. Le classement des profils géométriques par exemple est tributaire de la valeur de la profondeur normale. Comme le montre la figure 1.1.c, la profondeur normale est inférieure à la profondeur critique et c'est cette inégalité qui permet de conclure sur le caractère prononcé ou supercritique de la pente géométrique du canal.

Le calcul de la profondeur normale dans les canaux se base sur les relations dites " relations de l'écoulement normal ". Celles-ci expriment, de manière approximative, la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Les formules pratiques de l'écoulement uniforme s'expriment généralement sous la forme  $V = C R_h^\beta J^\gamma$  où  $R_h$  est le rayon hydraulique et  $J$  est la pente de la ligne de charge. Comme nous l'avons déjà indiqué,  $J$  correspond également à la pente  $i$ . Le paramètre  $C$  traduit la résistance de l'écoulement et dépend de  $V$ , de  $R_h$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$  caractérisant les parois du canal, de la viscosité du liquide et de beaucoup d'autres facteurs.

La distinction doit être faite entre l'écoulement uniforme se produisant d'une part dans les canaux artificiels et dans les canaux naturels d'autre part. Dans la pratique, l'écoulement dans les canaux naturels est considéré comme étant uniforme à condition que la profondeur de l'écoulement ne subisse pas de variation brusque pouvant être causée par les irrégularités des parois du canal. L'application des relations de l'écoulement uniforme aux canaux naturels mène à des résultats plutôt approximatifs en raison du fait que l'écoulement dépend en réalité d'un plus grand nombre de facteurs que ceux qui influencent l'écoulement dans les canaux artificiels. Selon *Schnackenberg* (1951), une bonne relation de l'écoulement uniforme dans un canal naturel sans transport de sédiments est celle qui devrait tenir compte d'au moins 10 paramètres qui sont  $A$ ,  $V$ ,  $V_{ms}$  qui correspond à la vitesse maximale à la surface, le périmètre mouillé  $P$ ,  $R_h$ , la profondeur maximale  $y$  de l'écoulement, la pente  $S_w$  de la surface libre, le coefficient  $n$  qui caractérise la rugosité du canal, la viscosité dynamique  $\mu$  du liquide et la température  $T$ .

Lorsque l'on se réfère à la bibliographie (*Houk*, 1918; *Forchheimer*, 1930; *Lindquist*, 1933; *Vladislavljévitch*, 1951), on peut s'apercevoir que de très nombreuses relations ont été proposées au calcul de l'écoulement uniforme. Cependant, aucune d'entre elles ne répond au qualificatif de " bonne relation " selon la conception de *Schnackenberg*.

Différentes approches ont été également présentées au calcul de la vitesse de l'écoulement dans les canaux naturels, telle que celle de *Toebes* (1955). Dans cette approche, une analyse par corrélation multiple est appliquée aux différents facteurs influençant la vitesse de l'écoulement dans un canal naturel. Ces facteurs, selon *Toebes* (1955) sont  $A$ ,  $V_{ms}$ ,  $S_w$ ,  $n$  et  $T$ . Par cette approche, il est possible d'estimer l'influence de chacun des dits facteurs sur la vitesse  $V$  et la valeur de celle-ci est égale à la somme



algébrique des diverses contributions de chacun des paramètres en question. Cependant, la méthode de *Toebes* (1955) ne peut être appliquée que dans la région géographique pour laquelle a été faite l'analyse de l'influence des facteurs ci-dessus cités, ce qui malheureusement exclut toute généralisation de cette méthode.

A travers de nombreux exemples pratiques concernant l'écoulement uniforme, on peut s'apercevoir que les formules dites de *Chézy* et de *Manning* (ou de *Manning – Strickler*) sont les plus largement utilisées. La forme de leur expression est telle que nous l'avons déjà indiqué  $V = C R_h^\beta J^\gamma$  où les exposants  $\beta$  et  $\gamma$  ont des valeurs bien déterminées. En raison de leur utilisation fiable et très répandue, ces relations seront développées aussi clairement que possible, en tentant d'éclaircir leur limite et leur domaine d'applicabilité. D'autres relations seront également exposées, telle que la formule de *Darcy – Weisbach* dont l'application est universelle. Cette relation joue un rôle important dans le calcul des écoulements évoluant dans les conduites, et sa généralisation aux canaux ouverts connaît un grand succès.

## **I.2. Formule de *Chézy***

La formule de *Chézy* est probablement la première formule destinée au calcul de l'écoulement uniforme. La vitesse moyenne  $V$  s'exprime par :

$$V = C \sqrt{R_h J} \tag{1.1}$$

Rappelons que  $R_h$  est le rayon hydraulique,  $J$  est la pente de la ligne de charge totale ou gradient de perte de charge (à l'écoulement uniforme à surface libre,  $J$  étant également la pente  $i$  du canal) et  $C$  est le facteur caractérisant la résistance de l'écoulement. Le facteur  $C$  est habituellement appelé coefficient de *Chézy*.

*Chézy* stipule que la force de résistance s'opposant à l'écoulement et par unité de surface de canal est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne  $V$ . Cette force peut donc s'écrire :  $F_r (1m^2) = K V^2$ , où  $K$  est le facteur de proportionnalité. Comme le montre la figure 1.2, la surface du canal en contact avec le liquide est égale au produit du périmètre mouillé  $P$  par la longueur  $L$  du canal. La force totale  $F_r$  mise en jeu s'écrit ainsi :

$$F_r = K V^2 P L \tag{1.2}$$

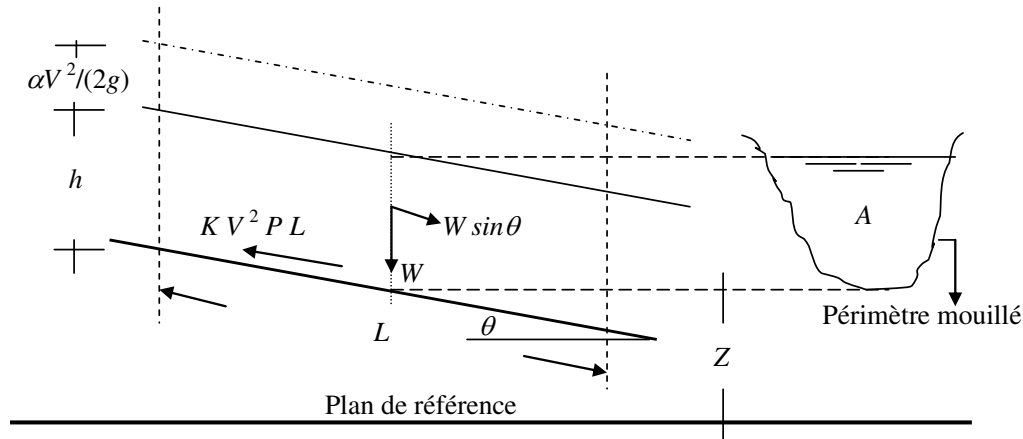


Fig.1.2: Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de la formule de Chézy.

Nous avons déjà indiqué que l'écoulement uniforme s'établit lorsque les forces de gravité sont équilibrées par les forces de résistance  $F_r$ . La quantité  $(W \sin \theta)$ , représentée sur la figure 1.2, correspond à la composante tangentielle du poids propre  $W$  du liquide. C'est cette composante qui intervient dans l'écoulement et qui doit être équilibrée par la force  $F_r$ . Le poids propre  $W$  peut s'écrire  $W = \rho g A L$  où  $\rho$  est la masse volumique du liquide,  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Le produit  $(A L)$  désigne le volume de liquide sur toute la longueur  $L$  considérée. Ainsi, nous pouvons écrire  $\rho g A L \sin \theta = K V^2 P L$ , soit :  $V^2 = (\rho g / K) (A / P) \sin \theta$ . La quantité  $A / P$  représente par définition le rayon hydraulique  $R_h$ . En désignant par  $C^2 = (\rho g / K)$  et par  $J = \sin \theta$  (où  $\theta$  est faible), il vient que :

$$V = C R_h^{1/2} J^{1/2} \quad (1.3)$$

Comme l'exige la relation (1.3), le coefficient  $C$  de Chézy doit avoir pour unité  $[L^{1/2} T^{-1}]$ . Plusieurs relations ont été proposées au calcul du coefficient  $C$  et nous verrons dans ce qui suit les plus importantes d'entre elles.

### I.2.1. Détermination du coefficient $C$ de Chézy par la formule de Ganguillet – Kutter

La formule de Ganguillet – Kutter (1869) exprime le coefficient  $C$  de Chézy en fonction de la pente  $J$  ou  $i$  du canal, du rayon hydraulique  $R_h$  et du coefficient de rugosité  $n$ . Elle a été élaborée à partir des mesures expérimentales effectuées sur divers types de canaux et rivières naturelles :

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J}\right) \frac{n}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.4)$$

Le coefficient  $n$  de la relation (1.4) est connu sous le nom de " coefficient  $n$  de Kutter ". Bien que la

relation (1.4) apparaisse quelque peu encombrante, elle donne néanmoins des résultats assez satisfaisants. De nombreux auteurs proposent d'éliminer le terme contenant la pente  $J$ , afin de simplifier la forme de l'équation. On peut en effet s'apercevoir que le terme  $0,00155/ J$  n'a pas d'effet significatif sur la valeur du coefficient  $C$ , pour une même valeur du coefficient de rugosité  $n$  et du rayon hydraulique  $R_h$ . A titre indicatif, pour  $n = 0,01$  et  $R_h = 1,20$  m,  $C$  ne subit pratiquement aucun changement dans une large gamme de valeurs de  $J$  :  $102 \leq C \leq 103$  lorsque  $0,00005 \leq J \leq 0,01$ .

### **I.2.2. Détermination du coefficient $C$ de Chézy par la formule de Bazin**

*Bazin* (1897) considère que la valeur du coefficient  $C$  de Chézy dépend du rayon hydraulique  $R_h$  mais ne dépend pas de la pente  $J$  du canal. Le coefficient  $C$  peut alors être déterminé par la relation :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.5)$$

$m$  est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal considéré et dont la valeur est tabulée. Les valeurs de  $m$  sont sans commune mesure avec celles qui correspondent au coefficient de rugosité  $n$  figurant dans la relation (1.4) de *Ganguillet – Kutter* et ceci pour le même matériau. A titre indicatif, pour le cas d'un canal fabriqué en ciment lisse, les tables de valeurs indiquent que  $n = 0,01$  et  $m = 0,11$ .

La formule de *Bazin* a été développée à l'origine pour de petits canaux, si bien que sa généralisation ne donne pas d'aussi bons résultats que ceux obtenus par la formule de *Ganguillet – Kutter*.

### **I.2.3. Détermination du coefficient $C$ de Chézy par la formule de Powell**

*Powell* (1950) propose une relation de type logarithmique au calcul du coefficient  $C$  de Chézy, mais elle se présente sous une forme implicite :

$$C = -23,2 \log \left( \frac{1,811C}{R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.6)$$

" log " désigne le logarithme décimal,  $R$  est le nombre de *Reynolds*,  $\varepsilon$  est la rugosité absolue des parois du canal. A l'origine, la formule de *Powell* a été présentée en unité anglaise et les constantes figurant dans la relation (1.6) sont alors différentes et beaucoup plus simples :

$$C = -42 \log \left( \frac{C}{4R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.7)$$

Pour le cas des canaux rugueux, l'écoulement est en général turbulent correspondant aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds*. Le terme  $C/(4R) \rightarrow 0$  et la relation (1.7) devient :

$$C = -42 \log \left( \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.8)$$

Par contre, pour les canaux lisses, l'effet de la rugosité est tellement faible que la relation (1.7) peut s'écrire :

$$C = -42 \log \left( \frac{C}{4R} \right) \quad (1.9)$$

### I.3. Formule de *Manning-Strickler*

La vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement uniforme peut être également évaluée par la formule dite de *Manning* (1891). La vitesse  $V$  est liée au coefficient  $C$  de résistance de l'écoulement, au rayon hydraulique  $R_h$  et à la pente  $J$  du canal. A l'origine, la formule de *Manning – Strickler* se présentait sous une forme compliquée, puis elle a été simplifiée pour s'écrire, avec  $C = kR_h^{1/6}$ :

$$V = k R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.10)$$

La relation (1.10) a été ensuite modifiée par plusieurs auteurs pour s'écrire, en unité métrique :

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.11)$$

( $n$  selon *Manning* et  $1/n = k$  selon *Strickler*).

La conversion en unité anglaise, la relation (1.11) donne :

$$V = \frac{1,486}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.12)$$

Dans cette conversion, la valeur numérique du coefficient de rugosité  $n$  reste inchangée et la même valeur est utilisée dans les deux systèmes d'unité. Comme l'exige la forme de la relation (1.11), le coefficient  $n$  doit avoir pour dimension  $[TL^{-1/3}]$ . Cependant, il paraît physiquement injustifié que la dimension de temps

T puisse intervenir dans l'unité d'une rugosité puisque celle-ci ne devrait dépendre que de la nature du matériau constituant les parois du canal considéré. Pour cette raison, certains auteurs énoncent que le numérateur de la relation (1.11) devrait contenir le terme  $\sqrt{g}$ , où  $g$  est l'accélération de la pesanteur, ce qui conduirait à donner à  $n$  la dimension  $[L^{1/6}]$ . En outre, il a été démontré que le coefficient de rugosité  $n$  pouvait s'écrire :

$$n = [\phi(R_h / \varepsilon)] \varepsilon^{1/6} \quad (1.13)$$

où  $\varepsilon$  est la rugosité absolue. Si la fonction  $\phi(R_h / \varepsilon)$  doit être considérée comme étant adimensionnelle, le coefficient de rugosité  $n$  doit alors avoir la même dimension que  $\varepsilon^{1/6}$ , c'est à dire  $[L^{1/6}]$ . *Hager* (1987) a pu montrer que la rugosité absolue  $\varepsilon$  et le coefficient  $k$  de *Strickler* sont liés par la relation :

$$\frac{k \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{g}} = 1 \quad (1.14)$$

D'autre part, il est également possible d'admettre que le terme  $1,486/n$  figurant dans la relation (1.12) puisse contenir de manière implicite la dimension  $[L^{1/3} T^{-1}]$ , ou que  $\phi(R_h / \varepsilon)$  contienne un facteur ayant une dimension. Ceci rendrait alors le coefficient  $n$  adimensionnel. Sous cette dernière condition, la conversion en unité anglaise conduit à la constante  $(3,2808)^{1/3} = 1,486$ , puisque  $1\text{m} = 3,2808\text{ft}$ .

Si l'on considère que la dimension de  $n$  est  $[L^{1/6}]$ , sa valeur numérique en unité anglaise doit être différente de sa valeur en unité métrique, à moins de tenir compte d'un facteur de correction ou de compensation.

Si  $n$  est la valeur du coefficient de rugosité en unité métrique et  $n'$  en unité anglaise, on peut écrire alors  $n' = (3,2808)^{1/6} n = 1,219 n$ . Lorsque la formule de *Manning* subit la conversion de l'unité métrique vers l'unité anglaise, la constante figurant dans l'expression qui en résulte est égale à  $(3,2808)^{1/3 + 1/6} = \sqrt{3,2808} = 1,811$  et la dimension de  $n$  est alors  $[L^{1/6}]$ .

En raison de sa forme simplifiée et aux résultats satisfaisants auxquels elle aboutit, la formule de *Manning – Strickler* est celle qui est largement utilisée pour les écoulements uniformes dans les canaux ouverts.

De nombreuses applications ont montré que les valeurs de  $n$  de *Manning* et  $n$  de *Kutter* sont pratiquement identiques lorsque la pente du canal est supérieure ou égale à 0,0001 pour un rayon hydraulique variant approximativement entre 0,30 m et 9 m.

En comparant la formule de *Manning – Strickler*, exprimée en unité métrique, à celle de *Chézy*, on peut

écrire  $C = (1/n)R_h^{1/6}$ . Ainsi, la formule de *Manning – Strickler* est souvent considérée comme une variante de la formule de *Chézy*.

De nombreuses études dont celle de *Bazin*, et qui concernent les canaux artificiels, ont montré que l'exposant de  $R_h$  ne serait pas égal à  $2/3$  comme le suggère *Manning*, mais sa valeur moyenne varie entre 0,6499 et 0,8395 suivant la forme du canal et la rugosité de celui-ci, tandis que *Blench* (1939) considère le coefficient  $C$  comme une variable qui dépend non seulement de  $n$  mais aussi de  $R_h$  et dont l'exposant dépend à son tour de  $n$  et de  $R_h$  ; c'est la formule dite de *Pavlovski* (1940) qui s'exprime, en unité métrique, par :

$$C = (1/n)R_h^y \tag{1.15}$$

où  $y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - \frac{3}{4}\sqrt{R_h}(\sqrt{n} - 0,10)$ .

La relation (1.15) est applicable pour un rayon hydraulique variant entre 0,10 m et 3 m et pour  $n$  compris entre 0,011 et 0,04. Des relations approchées au calcul de l'exposant  $y$  ont été également proposées :

$y = 1,5\sqrt{n}$  pour  $R_h < 1$  m et  $y = 1,3\sqrt{n}$  pour  $R_h > 1$  m.

L'application de la formule de *Manning – Strickler*, comme celle d'ailleurs de *Ganguillet – Kutter* est tributaire de la valeur du coefficient  $n$ . Il n'existe aucune méthode exacte qui permet d'évaluer  $n$ . Évaluer  $n$  revient à estimer la résistance de l'écoulement dans un canal donné, ce qui nécessite beaucoup d'expérience et de pratique. En se référant à la bibliographie, plusieurs auteurs concluent que pour estimer  $n$  les étapes suivantes sont nécessaires :

1. Recenser puis apprécier l'influence des paramètres pouvant affecter le coefficient  $n$ , tels que la présence de végétation dans le canal, la dimension moyenne des grains du matériaux constituant les parois du canal, l'irrégularité du canal due à la présence de courbures ou de variation même réduite de la section transversale de l'écoulement, etc...
2. Consulter les tables de valeurs de  $n$  déjà évalué pour des canaux de différents types.
3. Examiner et s'informer de l'état physique caractérisant des canaux existants et dont la valeur de  $n$  a déjà été déterminée.
4. Déterminer la valeur de  $n$  par une approche analytique basée sur la répartition théorique de la vitesse dans les sections transversales de l'écoulement.

#### 1.4. Formule de *Darcy – Weisbach* et évaluation du coefficient de frottement

La formule de *Darcy – Weisbach* exprime la proportionnalité entre le gradient de la perte de charge  $J$ , la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement et le diamètre hydraulique  $D_h = 4A/P = 4R_h$ . Le facteur de proportionnalité étant le coefficient de frottement  $f$ . Le gradient  $J$  est inversement proportionnel à  $D_h$  et proportionnel au carré de la vitesse  $V$  :

$$J = \frac{f V^2}{D_h 2g} \quad (1.16)$$

La formule (1.16) est aussi bien valable pour les canaux ouverts que pour les conduites fermées.

Le coefficient de frottement  $f$  peut être évalué par diverses relations, selon la nature du régime d'écoulement.

La formule de *Colebrook – White* permet d'évaluer le coefficient de frottement  $f$  lorsque l'écoulement est en régimes de transition, turbulent rugueux et lisse :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) , R > 2300 \quad (1.17)$$

Dans le cas où le régime d'écoulement est de transition, le coefficient de frottement dépend à la fois de la rugosité relative  $\varepsilon / D_h$  et du nombre de *Reynolds*  $R$ . La représentation graphique de la relation (1.17) dans un système d'axes de coordonnées à divisions semi-logarithmiques montre que, pour la même valeur de  $\varepsilon / D_h$ , le coefficient de frottement  $f$  diminue lorsque  $R$  augmente. Pour des valeurs données de  $\varepsilon / D_h$  et de  $R$ , l'évaluation du coefficient de frottement  $f$ , par application de la relation (1.17), nécessite un procédé itératif. Une excellente relation approchée de (1.17) a été proposée par *Achour* (1997):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \quad (1.18)$$

A partir d'une valeur  $R = R_{lim}$  dépendant de la valeur de  $\varepsilon / D_h$ , le coefficient de frottement demeure pratiquement inchangé avec l'augmentation de  $R$ . Cette particularité caractérise la nature de l'écoulement dans la zone de pleine turbulence ou domaine rugueux. Dans ce domaine, le coefficient de frottement  $f$  peut être évalué par la relation explicite de *Nikuradse* :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \quad (1.19)$$

La relation (1.19) peut être obtenue à partir des relations (1.17) ou (1.18), en écrivant que  $R \rightarrow \infty$ .

Dans le domaine pratiquement lisse correspondant à  $\varepsilon/D_h \rightarrow 0$ , la relation (1.17) mène à écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.20)$$

et l'évaluation de  $f$  nécessite également un procédé itératif. Dans le même domaine d'écoulement, ce procédé itératif peut être évité par l'application de la relation (1.18) pour  $\varepsilon/D_h \rightarrow 0$ :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \quad (1.21)$$

Dans la large gamme  $2,35 \cdot 10^3 \leq R \leq 10^9$ , l'application de la relation (1.21) occasionne un écart relatif inférieur à 0,7% par rapport à (1.20).

La formule de *Swamee et Jain* (1976) permet également d'évaluer de manière explicite le coefficient  $f$  dans le domaine pratiquement lisse :

$$f = \left[ 2 \log \left( \frac{5,74}{R^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.22)$$

Mais, dans la même gamme de valeurs ci-dessus indiquée de  $R$ , l'application de (1.22) occasionne un écart relatif atteignant 2,8% par rapport à (1.20). Dans une gamme plus restreinte de  $R$  telle que  $5 \cdot 10^3 < R < 10^8$ , cet écart se réduit mais atteint tout de même 1,5%.

En comparant les relations (1.1) et (1.16), on peut montrer que le coefficient  $C$  de *Chézy* est étroitement lié au coefficient de frottement  $f$  :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (1.23)$$



## 1.5. Équations théoriques de l'écoulement uniforme

### 1.5.1. Distribution de la vitesse dans un écoulement uniforme

La distribution de la vitesse dans un écoulement turbulent demeure quasi uniforme lorsque la couche limite est pleinement développée, et suit approximativement une loi logarithmique. La contrainte de cisaillement ou tangentielle en n'importe quel point de l'écoulement turbulent se produisant au-dessus d'une paroi solide est donnée par la relation de *Prandtl* (1926) :

$$\tau = \rho l^2 (dv/dy)^2 \quad (1.24)$$

$\rho$  est la masse volumique du liquide en écoulement,  $l$  est une longueur caractéristique dite longueur de mélange,  $dv/dy$  est le gradient de vitesse à la hauteur  $y$  de la paroi solide et normale à celle-ci. La longueur de mélange peut être interprétée comme étant la longueur au-delà de laquelle la particule liquide voit sa quantité de mouvement diminuer.

Dans la région proche de la paroi solide, *Prandtl* utilise deux approches:

1. La longueur de mélange est proportionnelle à  $y$ , soit  $l = Ky$  où  $K$  est le facteur de proportionnalité entre  $l$  et  $y$  et dont la valeur a été estimée à 0,40 environ.
2. La contrainte tangentielle est constante.

Puisque la contrainte tangentielle à la surface est égale à la force tractrice unitaire  $\tau_0$ , la constance de la contrainte tangentielle implique que  $\tau = \tau_0$ . La relation (1.24) devient :

$$dv = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{dy}{y} \quad (1.25)$$

L'intégration de la relation (1.25) mène à :

$$v = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \operatorname{Ln} \frac{y}{y_0} \quad (1.26)$$

"  $\operatorname{Ln}$  " désigne le logarithme népérien et  $y_0$  représente la constante d'intégration. La force tractrice  $\tau_0$  s'exprime par la relation  $\tau_0 = (\varpi R_h J)$  où  $\varpi = \rho g$  est le poids spécifique du liquide et  $J$  est la pente du canal. On peut alors écrire que  $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g R_h J} = v_f$ , où  $v_f$  a la dimension d'une vitesse et elle est connue

sous le nom de vitesse de frottement. La relation (1.26) devient alors :

$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{y}{y_o} \quad (1.27)$$

La relation (1.27) indique que la vitesse dans un écoulement turbulent est une fonction logarithmique de la distance  $y$ . Elle est connue sous le nom de loi universelle de *Prandtl – Von – Karman* de la distribution des vitesses. Cette loi a été vérifiée par plusieurs expériences et les résultats ont montré une remarquable similitude entre la distribution des vitesses observée expérimentalement et celle issue de la théorie. Lorsque la surface solide est lisse, la constante  $y_o$  ne dépend que de la vitesse de frottement  $v_f$  et de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide :

$$y_o = m_o \frac{\nu}{v_f} \quad (1.28)$$

$m_o$  est une constante égale à 1/9 lorsque la surface solide est lisse. Cette constante a été déduite des essais de *Nikuradse* concernant les conduites lisses. La combinaison des relations (1.27) et (1.28) donne ainsi, pour les surfaces lisses, la répartition de la vitesse dans un écoulement turbulent :

$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{9y v_f}{\nu} \quad (1.29)$$

Lorsque la surface est rugueuse, la constante  $y_o$  dépend de la rugosité absolue  $\varepsilon$  :

$$y_o \approx m_o \varepsilon \quad (1.30)$$

La constante  $m_o$  est approximativement égale à 1/30.

La relation (1.27) devient alors :

$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{30y}{\varepsilon} \quad (1.31)$$

### 1.5.2. Équation de *Keulegan*

En utilisant la loi universelle de *Prandtl – Von – Karman* de la distribution des vitesses, *Keulegan* (1938) aboutit à des équations donnant la vitesse moyenne d'un écoulement turbulent dans les canaux ouverts par une approche théorique simple. En se basant sur l'équation de continuité, le débit volume  $Q$  passant par une section quelconque de l'écoulement peut s'écrire :

$$Q = VA = \int_{\delta_0=0}^{y=h} v B dy \quad (1.32)$$

$V$  est la vitesse moyenne de l'écoulement,  $h$  est la profondeur,  $A$  est l'aire de la section mouillée,  $B$  est la longueur de la courbe d'égale vitesse (figure 1.3) et  $y$  est la profondeur verticale comptée à partir du fond du canal jusqu'à la courbe d'égale vitesse. la sous-couche laminaire d'épaisseur  $\delta_0$  est considérée comme étant très mince ( $\delta_0 = 0$ ).

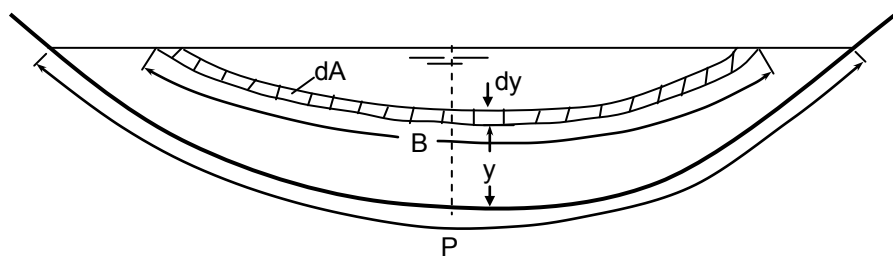


Fig.1.3 : Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de l'équation de Keulegan.

Le maximum de vitesse est supposé être à la surface et que la longueur  $B$  est proportionnelle à la distance  $y$  ; ceci permet d'écrire :

$$B = P - \gamma y \quad (1.33)$$

$P$  est le périmètre mouillé de la surface considérée et  $\gamma$  est une fonction dépendant de la forme de la section. Ainsi, l'aire de la section mouillée  $A$  est :

$$A = \int_0^h B dy = Ph - \frac{1}{2} \gamma h^2 \quad (1.34)$$

La combinaison des relations (1.27), (1.32), (1.33) et (1.34) permet d'écrire, après intégration :

$$V = v_f \left[ 5,75 \log \left[ \frac{h}{m_o R_h} \exp \left( -1 - \frac{\gamma h^2}{4A} \right) \right] + 5,75 \log \frac{m_o R_h}{y_o} \right] \quad (1.35)$$

Le premier terme du membre droit de l'équation (1.35) est une fonction de la forme de la section du canal considéré. Cependant, la variation que subit ce terme pour différentes formes de canaux est relativement

faible et il a été remplacé par une constante désignée par  $A_0$ . La relation (1.35) prend alors une forme plus simplifiée et s'écrit :

$$V = v_f \left[ A_0 + 5,75 \log \frac{m_o R_h}{y_o} \right] \quad (1.36)$$

La relation (1.36) représente l'équation théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts.

Pour les canaux à parois lisses, l'étude de *Keulegan*, basée sur les valeurs expérimentales de *Nikuradse*, montre que  $A_0 \approx 3,25$ . Ainsi, l'équation théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois lisses est, en tenant compte de (1.28):

$$V = v_f \left[ 3,25 + 5,75 \log \left( \frac{R_h v_f}{\nu} \right) \right] \quad (1.37)$$

En ce qui concerne les canaux ouverts à parois rugueuses, *Keulegan* montre, après avoir analysé les mesures de *Bazin*, que la constante  $A_0$  varie dans une large gamme, en fonction de la forme de la section du canal ( $3,23 \leq A_0 \leq 16,92$ ), et la valeur moyenne  $A_0 = 6,25$  est alors adoptée. Ainsi, l'expression théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois rugueuses est, en tenant compte de (1.30):

$$V = v_f \left[ 6,25 + 5,75 \log \left( \frac{R_h}{\varepsilon} \right) \right] \quad (1.38)$$

En combinant les expressions  $V = C \sqrt{R_h J}$  de *Chézy* (relation 1.1) et  $\sqrt{g R_h J} = v_f$  de la vitesse de frottement, on peut écrire :

$$\frac{V}{v_f} = \frac{C}{\sqrt{g}} \quad (1.39)$$

ou bien, en faisant appel à (1.23):

$$\frac{V}{v_f} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{f}} \quad (1.40)$$

En tenant compte de (1.39) et de la définition du nombre de *Reynolds* modifié tel que  $R = VR_h/\nu$ , les

relations (1.37) et (1.38) permettent d'exprimer les coefficients  $C$  et  $f$ , respectivement pour un canal à parois lisses et rugueuses :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = 3,25 + 5,75 \log \left( \frac{R\sqrt{g}}{C} \right) \quad (1.41)$$

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = 6,25 + 5,75 \log \left( \frac{R_h}{\varepsilon} \right) \quad (1.42)$$

ou bien :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,231 + 2,033 \log (R\sqrt{f}) \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,210 + 2,033 \log \left( \frac{R_h}{\varepsilon} \right) \quad (1.44)$$

### I.6. Interprétation théorique du coefficient de rugosité de Manning

En éliminant le coefficient  $C$  de Chézy entre les relations  $C = (1/n)R_h^{1/6}$  et (1.42), le coefficient  $n$  de Manning s'écrit :

$$n = \varepsilon^{1/6} \phi(R_h / \varepsilon) \quad (1.45)$$

avec :

$$\phi(R_h / \varepsilon) = \frac{\left( \frac{R_h}{\varepsilon} \right)^{1/6}}{\sqrt{g} \left[ 6,25 + 5,75 \log \frac{R_h}{\varepsilon} \right]} \quad (1.46)$$

La représentation graphique de (1.46), pour une large gamme de valeurs de la rugosité relative ( $R_h / \varepsilon$ ), se traduit par une courbe plate presque horizontale. La fonction  $\phi(R_h / \varepsilon)$  peut alors être remplacée par une constante dont la valeur est approximativement égale à 0,0342.

Si l'on admet que la fonction  $\phi(R_h / \varepsilon)$  est constante, la relation (1.45) indique alors que le coefficient  $n$  de Manning varie en fonction de la puissance 1/6 de la rugosité absolue  $\varepsilon$ . En d'autres termes, lorsque  $\varepsilon$  subit une variation de 1/1000 ème, le coefficient  $n$  ne varie que de 1/3 environ. Ainsi,  $\varepsilon$  est donc plus

sensible que le coefficient  $n$ . En conséquence, l'application de la relation (1.45) n'entraîne qu'une erreur relativement faible sur le calcul du coefficient  $n$ .

L'étude comparative de *Bakhmeteff* et *Feodoroff* (1943) entre les formules de *Manning*, de *Ganguillet – Kutter* et de *Prandtl – Von – Karman* mise sous une forme identique à celle de la relation (1.45), montre que la formule de *Manning* est la plus adaptée.

### I.7. Méthode de détermination du coefficient de *Manning*

Deux méthodes de détermination du coefficient  $n$  de *Manning*, basées sur la répartition théorique des vitesses dans un canal à parois rugueuses, ont été développées. La première méthode, dite méthode liée à la mesure de la rugosité, admet la validité de la relation (1.46). Ainsi, la valeur de  $n$  peut être calculée en application de (1.45) pour la valeur connue de la rugosité absolue  $\varepsilon$ .

La seconde méthode est dite méthode liée à la mesure de la vitesse. En se référant à la loi logarithmique de la répartition de la vitesse exprimée par (1.31), on peut s'apercevoir que cette répartition dépend de la rugosité absolue  $\varepsilon$  liée au coefficient  $n$  de *Manning* par la relation (1.45). En d'autres termes, la rugosité dans le sens du coefficient  $n$  de *Manning* peut être considérée comme le facteur prédominant affectant la répartition de la vitesse. Si celle-ci était connue, le coefficient  $n$  de *Manning* peut alors être évalué.

On définit  $V_{0,2}$  la vitesse aux deux dixièmes de la profondeur ou à la distance  $0,8y$  comptée à partir du fond du canal de grande largeur et à parois rugueuses ;  $y$  représente la profondeur de l'écoulement. En vertu de la relation (1.31), on peut écrire:

$$V_{0,2} = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \left( \frac{24y}{\varepsilon} \right) \quad (1.47)$$

$$V_{0,8} = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \left( \frac{6y}{\varepsilon} \right) \quad (1.48)$$

En éliminant la vitesse  $v_f$  entre les relations (1.47) et (1.48), on peut écrire en posant  $X = V_{0,2}/V_{0,8}$  :

$$(1 - X) \operatorname{Ln} \frac{y}{\varepsilon} = X \operatorname{Ln} 6 - \operatorname{Ln} 24$$

ou bien :

$$\text{Ln} \frac{y}{\varepsilon} = \frac{1,792 X - 3,178}{1 - X} \quad (1.49)$$

L'équation (1.38), qui exprime la vitesse moyenne de l'écoulement dans un canal à parois rugueuses, devient alors pour un canal de grande largeur ( $R_h = y$ ):

$$\frac{V}{v_f} = \frac{1,775 X + 1,686}{X - 1} \quad (1.50)$$

En outre, la combinaison des relations  $C = (1/n)R_h^{1/6}$  et (1.39), pour  $R_h = y$ , donne :

$$\frac{V}{v_f} = \frac{y^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (1.51)$$

Ainsi, le coefficient  $n$  de *Manning* peut être évalué à partir de l'égalité des relations (1.50) et (1.51), soit :

$$n = \frac{y^{1/6} (X - 1)}{1,775\sqrt{g} (X + 0,95)} \quad (1.52)$$

La relation (1.52) permet ainsi d'évaluer le coefficient  $n$  de *Manning* pour le cas d'un canal de grande largeur à parois rugueuses et dans l'hypothèse que la distribution de la vitesse suit une loi logarithmique.

## I.8. Calcul de l'écoulement uniforme

### I.8.1. Conductivité

Le débit volume  $Q$  de l'écoulement uniforme dans une conduite ou un canal s'exprime par le produit de la vitesse moyenne  $V$  et l'aire de la section mouillée  $A$  :

$$Q = VA = CAR_h^\beta J^\gamma \quad (1.53)$$

La relation (1.53) peut aussi s'écrire :

$$Q = KJ^\gamma \quad (1.54)$$

où :

$$K = CAR_h^\beta \quad (1.55)$$

Le facteur  $K$  est connu sous le terme de conductivité de la conduite ou du canal. Il s'agit de la capacité d'évacuation de la section de la conduite ou du canal considéré, étant donné que  $K$  est directement lié au débit volume  $Q$ .

Lorsque l'une des relations de *Chézy* ou de *Manning* est utilisée, correspondant à  $\gamma = 1/2$ , la relation (1.54) permet alors de déduire que la conductivité est :

$$K = Q / \sqrt{J} \quad (1.56)$$

La relation (1.56) peut être utilisée pour calculer la conductivité  $K$  lorsque le débit volume  $Q$  et la pente  $J$  sont donnés.

Lorsque la formule de *Chézy* est utilisée, correspondant à  $\gamma = 1/2$ , l'équation (1.55) devient :

$$K = C A R_h^{1/2} \quad (1.57)$$

$C$  est le coefficient de résistance de *Chézy*.

Lorsque la relation de *Manning* est utilisée, la conductivité  $K$  s'écrit :

$$K = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \quad (1.58)$$

Les relations (1.57) et (1.58) peuvent être utilisées pour calculer la conductivité  $K$ , lorsque la géométrie de la section ainsi que le coefficient de résistance sont connus.

### **I.8.2. Facteur de section**

L'expression  $A R_h^{2/3}$  est appelée facteur de section au calcul de l'écoulement uniforme. Selon la relation (1.58), nous pouvons écrire :

$$A R_h^{2/3} = n K \quad (1.59)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (1.56) :

$$A R_h^{2/3} = \frac{n Q}{\sqrt{J}} \quad (1.60)$$



Le second terme de la relation (1.60) contient les paramètres  $n$ ,  $Q$  et  $J$ , alors que le premier terme dépend de la géométrie de la section mouillée de la conduite ou du canal considéré. Pour les valeurs données de  $n$ ,  $Q$  et  $J$ , il n'existe qu'une profondeur possible pour maintenir l'écoulement uniforme, à condition toutefois que  $A R_h^{2/3}$  augmente avec l'accroissement de la profondeur. Cette profondeur est la profondeur normale.

Lorsque  $n$  et  $J$  sont connus, la relation (1.60) donne un seul débit pour maintenir l'écoulement uniforme dans la section considérée de la conduite ou du canal, à condition toutefois que  $A R_h^{2/3}$  augmente avec l'accroissement de la profondeur. Ce débit est appelé débit normal.

Notons que dans le cas le plus général, la quantité  $A R_h^{2/3}$  augmente avec l'accroissement de la profondeur, à l'exception du cas des conduites dont le toit est graduellement fermé telle que la conduite de forme circulaire. Dans ce cas,  $A R_h^{2/3}$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement de la profondeur, puis décroît dans un second temps en fonction de la profondeur à l'approche de la pleine section. La valeur maximale de  $A R_h^{2/3}$  est atteinte à une profondeur légèrement inférieure à la profondeur de pleine section. En conséquence, il est possible d'avoir deux profondeurs pour la même valeur de  $A R_h^{2/3}$ ; une profondeur inférieure et l'autre supérieure à la profondeur correspondant au maximum de  $A R_h^{2/3}$ .

La relation (1.60) peut être très utile pour l'analyse et le calcul de l'écoulement uniforme. Lorsque le débit volume  $Q$ , la pente  $J$  et  $n$  sont connus, cette relation donne la valeur du facteur de section  $A_n R_{h,n}^{2/3}$ , où l'indice  $n$  désigne l'écoulement normal, et par suite la profondeur normale  $y_n$ . D'autre part, lorsque  $n$ ,  $J$  et  $y_n$  sont donnés, la relation (1.60) permet de calculer le débit volume normal  $Q_n$ .

Dans le but de simplifier le calcul, des courbes adimensionnelles ont été tracées pour le cas de la conduite de forme circulaire en particulier, montrant la relation entre la profondeur et le facteur de section  $A R_h^{2/3}$ . Ces courbes sont un moyen de détermination de la profondeur pour un facteur de section  $A R_h^{2/3}$  donné et vice-versa.

Pour le cas de la conduite de forme circulaire de diamètre  $D$ , le tableau de valeurs suivant a été dressé (Chow, 1973) et a permis le tracé de la courbe de la figure 1.4.

**Tableau 1.1** : Valeurs du facteur de section relatif en fonction de la profondeur relative pour le cas de la conduite de forme circulaire (Chow, 1973).

$y_n / D$	$AR_h^{2/3} / D^{8/3}$	$y_n / D$	$AR_h^{2/3} / D^{8/3}$
0,01	0,0000	0,31	0,0650
0,02	0,0002	0,32	0,0690
0,03	0,0005	0,33	0,0736
0,04	0,0009	0,34	0,0776
0,05	0,0015	0,35	0,0820
0,06	0,0022	0,36	0,0864
0,07	0,0031	0,37	0,0909
0,08	0,0040	0,38	0,0955
0,09	0,0052	0,39	0,1020
0,10	0,0065	0,40	0,1050
0,11	0,0079	0,41	0,1100
0,12	0,0095	0,42	0,1147
0,13	0,0113	0,43	0,1196
0,14	0,0131	0,44	0,1245
0,15	0,0152	0,45	0,1298
0,16	0,0173	0,46	0,1348
0,17	0,0196	0,47	0,1401
0,18	0,0220	0,48	0,1452
0,19	0,0247	0,49	0,1505
0,20	0,0273	0,50	0,1558
0,21	0,0301	0,55	0,1825
0,22	0,0333	0,60	0,2092
0,23	0,0359	0,65	0,2358
0,24	0,0394	0,70	0,2608
0,25	0,0427	0,75	0,2840
0,26	0,0464	0,80	0,3045
0,27	0,0497	0,85	0,3212
0,28	0,0536	0,90	0,3324
0,29	0,0571	0,95	0,3349
0,30	0,0610	1,00	0,3117

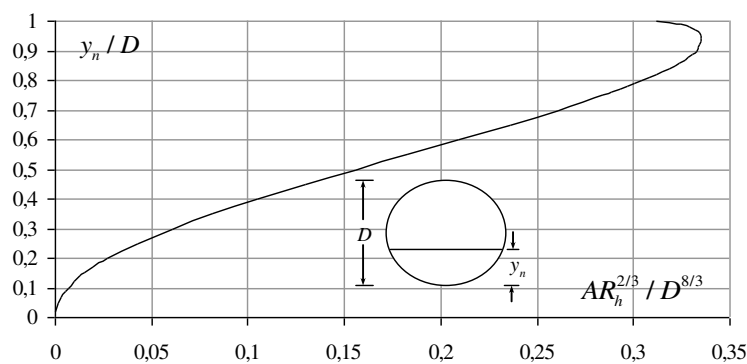


Fig. 1.4 : Facteur de section relatif en fonction de la profondeur normale relative pour le cas de la conduite de forme circulaire. Courbe tracée selon les valeurs du tableau 1.1.

### I.8.3. Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire

En prenant pour exemple la conduite circulaire, les courbes adimensionnelles pour les quantités  $AR_h^{2/3} / A_o R_{h,o}^{2/3}$  et  $R_h^{2/3} / R_{h,o}^{2/3}$ , où l'indice « o » est relatif à l'état plein de la conduite, sont représentées sur la figure 1.5 (Camp, 1946).

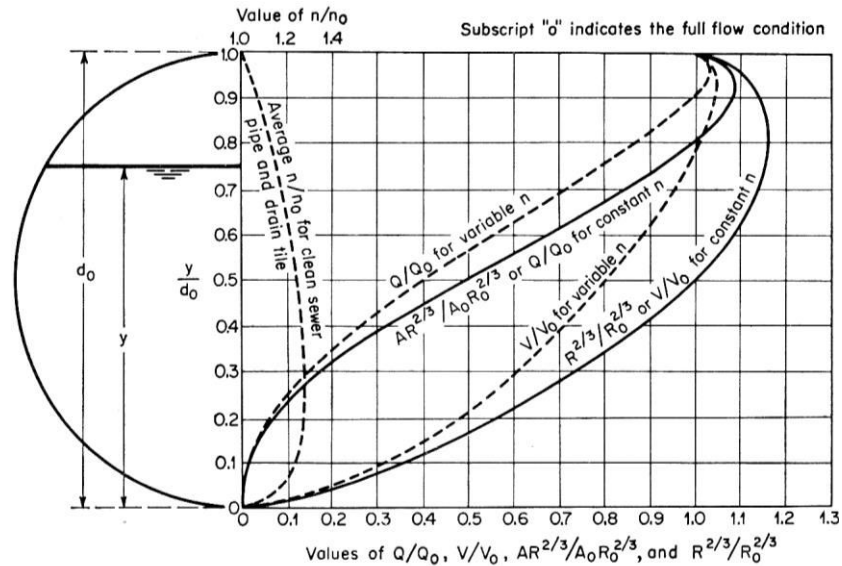


Fig.1.5 : Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire selon Camp (1946).

Si la valeur du coefficient  $n$  de Manning est considéré comme une constante ou indépendant de la variation de la profondeur, les deux courbes  $AR_h^{2/3} / A_o R_{h,o}^{2/3}$  et  $R_h^{2/3} / R_{h,o}^{2/3}$  représentent respectivement la variation du rapport  $Q/Q_o$  et  $V/V_o$ . Les deux courbes, en trait plein, montrent des valeurs maximales qui s'obtiennent à environ  $0,938d_o$  et  $0,81d_o$  respectivement. D'un point de vue mathématique, la profondeur correspondant au débit maximum, soit  $0,938d_o$ , peut être simplement obtenue en égalant à zéro la dérivée première de  $AR_h^{2/3}$  par rapport à la profondeur  $y$ , puisque le débit volume  $Q$ , calculé par la formule de Manning, est proportionnel à  $AR_h^{2/3}$  pour  $n$  et  $J$  constants. Parallèlement, puisque la vitesse moyenne  $V$ , selon la formule de Manning, est proportionnelle à  $R_h^{2/3}$ , la profondeur correspondant au maximum de la vitesse, soit  $0,81d_o$ , peut être obtenue en égalant à zéro la dérivée première de  $R_h^{2/3}$  par rapport à la profondeur  $y$ .

En outre, la courbe adimensionnelle  $Q/Q_o$  de la figure 1.5 montre que, lorsque la profondeur est environ plus grande que  $0,82d_o$ , il est possible d'avoir deux profondeurs

différentes pour le même débit volume ; une première profondeur au-dessus et une seconde en-dessous de la valeur  $0,938d_o$ .

En outre, la courbe  $V/V_o$  montre que, lorsque la profondeur est plus grande que  $y/d_o = 1/2$ , il est possible d'avoir deux profondeurs différentes pour la même vitesse ; une première profondeur au-dessus et une seconde en-dessous de la valeur  $0,81d_o$ .

Toutes ces remarques restent valables tant que le coefficient de résistance est supposé être constant, même si la profondeur varie. Il a été cependant constaté (figure 1.5) que le coefficient de résistance augmente de plus de 28% de  $1,00 d_o$  à  $0,25d_o$  où il apparaît clairement admettre un maximum. Cette variation du coefficient de résistance fait que le maximum de débit et de vitesse apparaît à environ  $0,97d_o$  et  $0,94d_o$  respectivement. Les courbes correspondantes de  $Q/Q_o$  et de  $V/V_o$  ont été représentées en trait discontinu sur la figure 1.5.

En considérant comme étant constant le coefficient de résistance  $n$ , la vitesse moyenne de l'écoulement serait la même dans la conduite à moitié pleine ou à pleine section. Par contre, si l'on considère que  $n$  varie en fonction de la profondeur, comme il est indiqué sur la figure 1.5, alors la vitesse de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine n'est que de 80% de la vitesse à pleine section.

## **I.9. Conclusion**

Ce chapitre a eu pour objectif de passer en revue les principaux résultats connus sur l'écoulement uniforme. Nous avons précisé les conditions d'établissement d'un écoulement uniforme dont les caractéristiques ont été représentées sur la figure 1.1, en comparant la pente du canal à la pente critique.

A partir d'un schéma de définition, nous avons montré les différentes forces intervenant dans un volume de contrôle de l'écoulement uniforme, ce qui a conduit à la démonstration de la formule universellement connu de *Chézy*. Nous avons montré que le coefficient de résistance  $C$  de *Chézy* est tel que  $C = \sqrt{\rho g / K}$ , où  $\rho$  est la masse volumique du liquide en écoulement,  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $K$  est un facteur de proportionnalité intervenant dans l'expression de la force de résistance à l'écoulement (Relation 1.2). Nous avons présenté trois relations permettant d'évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy*. La première relation est celle de *Ganguillet – Kutter* dans laquelle le coefficient  $C$  est tel que  $C(J, R_h, n)$ , où  $J$  est la pente de la ligne de charge totale égale à la pente géométrique du canal,  $R_h$  est le rayon hydraulique et  $n$  est le coefficient de rugosité. La seconde relation est celle de *Bazin* dans laquelle le coefficient  $C$  est tel que  $C(R_h, m)$ , où  $m$  est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal considéré. La troisième relation est celle de *Powell*. Elle exprime de manière implicite le coefficient  $C$  en fonction du nombre de *Reynolds*, du rayon hydraulique et de la rugosité absolue des parois du canal.

Nous avons présenté la formule de *Manning* ou de *Manning-Strickler* qui exprime la vitesse moyenne du liquide en écoulement. Le coefficient  $n$  selon *Manning* et  $1/n = k$  selon *Strickler* a été discuté et son unité a été précisée. Le coefficient  $k$  est lié à la rugosité absolue  $\varepsilon$  par la relation de *Hager*. Nous avons surtout précisé qu'il n'existe aucune méthode analytique d'évaluation du coefficient  $n$  de *Manning*, à l'exception du cas d'un canal de grande largeur à parois rugueuses et dans l'hypothèse que la distribution de la vitesse suit une loi logarithmique. Le coefficient  $n$  est alors donné par la relation (1.52), après avoir déterminé les vitesses  $V_{0,2}$  et  $V_{0,8}$ . Pour l'évaluation pratique du coefficient  $n$ , nous avons présenté les étapes à suivre, préconisées par certains auteurs.

La relation de *Darcy-Weisbach* a été présentée (Relation 1.16). Elle exprime la pente de la ligne de charge totale comme étant un paramètre inversement proportionnel au diamètre hydraulique et directement proportionnel à la hauteur capable de la vitesse de l'écoulement. Le facteur de proportionnalité est représenté par le coefficient  $f$ , appelé coefficient de frottement. Celui-ci peut être évalué par la relation de *Colebrook-White* en s'appuyant sur un procédé itératif. Des relations explicites au calcul de  $f$  ont été proposées par certains auteurs, tels que *Achour* et *Swamee*.

Le chapitre a été achevé par le calcul de l'écoulement uniforme. Nous avons rappelé la notion de conductivité qui est représentée par le facteur  $K$ . Il s'agit de la capacité d'évacuation de la section de la conduite ou du canal considéré, étant donné que  $K$  est directement lié au débit volume  $Q$  (Relation 1.56). Nous avons également rappelé la notion de facteur de section dont l'importance est capitale dans le calcul de l'écoulement uniforme. Le facteur de section est représenté par la quantité  $AR_h^{2/3}$  et dépend, par conséquent, de la géométrie de la section de la conduite ou du canal considéré. Nous avons indiqué que dans le cas le plus général, la quantité  $AR_h^{2/3}$  augmente avec l'accroissement de la profondeur, à l'exception du cas des conduites dont le toit est graduellement fermé telle que la conduite de forme circulaire. Pour ce type de conduites fermées, le facteur de section  $AR_h^{2/3}$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement de la profondeur, puis décroît dans un second temps en fonction de la profondeur à l'approche de la pleine section. Cette particularité a été illustrée sur la courbe adimensionnelle de la figure 1.4.

Les courbes adimensionnelles de *Camp* (Figure 1.5) ont permis l'analyse des caractéristiques de l'écoulement dans une conduite de forme circulaire. Le facteur de section, rapporté à celui de la conduite pleine, a été représenté en fonction du paramètre de forme de la section pour les cas d'un coefficient de *Manning* supposé constant et dépendant de la variation de la profondeur. Dans le premier cas, la vitesse moyenne de l'écoulement serait la même dans la conduite à moitié pleine ou à pleine section. Par contre, dans le second cas, la vitesse de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine n'est que de 80% de la vitesse à pleine section.

Les courbes adimensionnelles de *Camp* ont pu mettre en évidence la nature variable du coefficient de  $n$  de *Manning* et son incidence sur les valeurs maximales du débit volume  $Q$  et de la vitesse moyenne  $V$ .

## **II. Coefficient de résistance dans un canal rectangulaire**

## II.1. Introduction

Les écoulements uniformes dans les canaux et conduites sont régis par les relations de *Chézy* et de *Manning*, dites « relations de l'écoulement uniforme » (*Carlier, 1972; Chow, 1973; French, 1986*). Ces relations expriment le débit volume écoulé par le canal en fonction des paramètres géométriques de l'ouvrage et hydrauliques de l'écoulement. Dans ces relations, nous pouvons relever la présence des coefficients de résistance à l'écoulement, dits de *Chézy* et de *Manning* que l'on note souvent par les lettres  $C$  et  $n$  respectivement.

Dans la pratique, il existe des tableaux qui donnent les valeurs des coefficients  $C$  et  $n$  en fonction de la nature du matériau constituant le canal. Ces valeurs de  $C$  et de  $n$  sont tabulées de manière indépendante de la profondeur de l'écoulement ou du rayon hydraulique et encore moins du nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement.

Donner des valeurs constantes aux coefficients  $C$  et  $n$ , suppose que l'écoulement est en régime turbulent rugueux où le nombre de *Reynolds* n'a aucune influence. Cependant, cette démarche peut paraître peu fiable eu égard au fait que le coefficient de résistance à l'écoulement doit en principe dépendre des caractéristiques hydrauliques de l'écoulement, en particulier du rayon hydraulique, de la pente géométrique et de la viscosité cinématique du liquide. Cette vision est beaucoup plus moderne et nécessite une étude particulière en observant l'évolution de ces coefficients de résistance lorsque l'écoulement est supposé être uniforme.

C'est dans ce contexte que nous proposons le présent chapitre dans lequel nous établissons des relations générales destinées non seulement à l'évaluation des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning*, mais à examiner aussi leur variation en fonction de la profondeur de l'écoulement et d'autres paramètres hydrauliques qui influencent l'écoulement.

## II.2. Coefficient de résistance de *Chézy*

### II.2.1. Expression générale du coefficient de résistance de *Chézy*

Le débit volume  $Q$  écoulé par un canal de forme quelconque s'exprime par la relation suivante (*Achour et Bedjaoui, 2006*) :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.1)$$

Où :

$A$  est l'aire de la section mouillée,  $R_h$  est le rayon hydraulique,  $i$  est la pente du canal et  $R$  est un nombre de *Reynolds* défini par la relation suivante :



$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (2.2)$$

$\nu$  est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour un canal de forme rectangulaire, l'aire de la section mouillée  $A$  et le périmètre mouillé  $P$  s'écrivent respectivement :

$$A = b y_n \quad (2.3)$$

Où  $b$  est la largeur du canal et  $y_n$  est la profondeur normale de l'écoulement.

$$P = b + 2y_n \quad (2.4)$$

A partir des relations (2.3) et (2.4), nous pouvons écrire que le rayon hydraulique  $R_h = A/P$  est :

$$R_h = \frac{b y_n}{b + 2y_n} \quad (2.5)$$

La relation (2.5) peut également s'écrire :

$$R_h = \frac{y_n}{y_n} \frac{b}{\left(\frac{b}{y_n} + 2\right)}$$

Soit :

$$R_h = \frac{b}{(\eta + 2)} \quad (2.6)$$

Où  $\eta = b / y_n$  exprime le paramètre de forme de la section mouillée, ou le rapport d'aspect.

Compte tenu de la relation (2.6), la relation (2.2) peut s'écrire :

$$R = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta + 2)^{3/2}} \frac{\sqrt{g i b^3}}{\nu} \quad (2.7)$$

Désignons par :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta + 2)^{3/2}} \quad (2.8)$$

$$R^* = \frac{\sqrt{g i b^3}}{\nu} \quad (2.9)$$

Ainsi, la relation (2.7) s'écrit :

$$R = R^* \varphi(\eta) \quad (2.10)$$

D'autre part, la relation de *Chézy* s'écrit :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} \quad (2.11)$$

Où  $C$  est le coefficient de *Chézy*.

En comparant les relations (2.1) et (2.11), nous pouvons déduire que le coefficient  $C$  de *Chézy* est tel que :

$$C = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.12)$$

La relation (2.12) peut s'écrire en termes adimensionnels sous la forme suivante :

$$C / \sqrt{g} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.13)$$

En introduisant les relations (2.6) et (2.10) dans la relation (2.13), il vient que :

$$C / \sqrt{g} = -4\sqrt{2} \log\left[\frac{\varepsilon/b}{14,8/(\eta+2)} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)}\right] \quad (2.14)$$

En tenant compte de la relation (2.8), la quantité  $14,8/(\eta+2)$  peut s'écrire :

$$14,8/(\eta+2) = \frac{14,8[\varphi(\eta)]^{2/3}}{(32\sqrt{2})^{2/3}}$$

Après calcul, il vient que :

$$14,8/(\eta+2) = 1,165[\varphi(\eta)]^{2/3} \quad (2.15)$$

En substituant la relation (2.15) dans la relation (2.14), il vient que :

$$C / \sqrt{g} = -4\sqrt{2} \log\left[\frac{\varepsilon/b}{1,165[\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)}\right] \quad (2.16)$$

Dans la relation (2.16),  $\varepsilon/b$  représente la rugosité relative du canal rectangulaire étudié. Au regard de la relation (2.16), il apparaît que  $C / \sqrt{g}$  dépend de trois paramètres qui sont la rugosité relative  $\varepsilon/b$ , le paramètre de forme  $\eta$  et le nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ . Nous pouvons alors écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$C / \sqrt{g} = f(\varepsilon / b; \eta; R^*) \tag{2.17}$$

### II.2.2. Variation du coefficient de Chézy

Pour représenter la variation du coefficient sans dimension  $C / \sqrt{g}$  en fonction du paramètre de forme  $\eta$ , nous pouvons faire appel à la relation (2.16). On fixe une valeur de la rugosité relative  $\varepsilon / b$  et l'on fait varier le nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ . La valeur nulle du paramètre de forme  $\eta$  correspond, pour un canal rectangulaire donné, à une profondeur d'écoulement très élevée. Par la suite, nous allons commenter la variation de  $C / \sqrt{g}$  en fonction du paramètre de forme  $\eta$ .

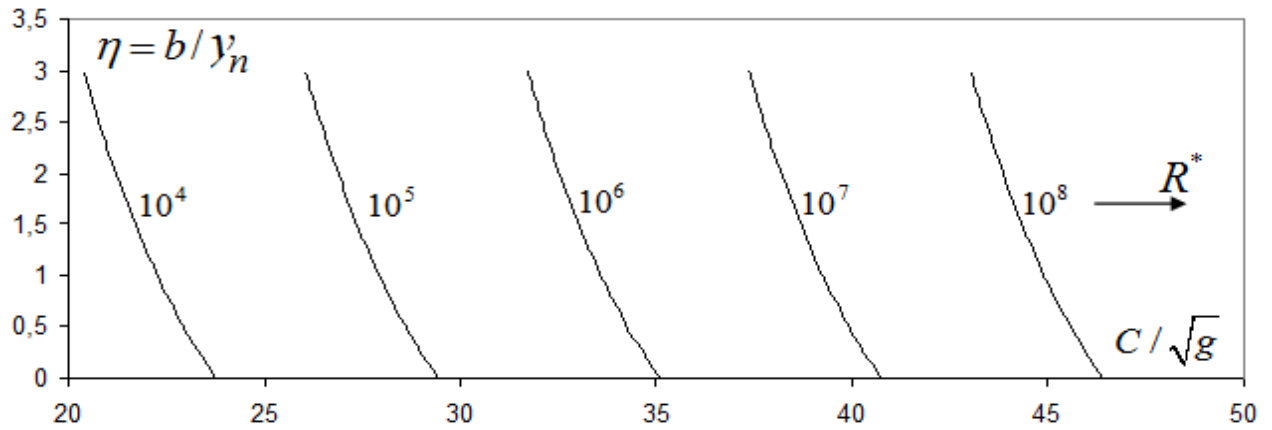


Fig. 2.1 : Variation de  $C / \sqrt{g}$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon / b = 0$   
(Écoulement lisse). Canal rectangulaire.

La figure 2.1 montre clairement que pour un nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$  fixé, le coefficient  $C / \sqrt{g}$  augmente au fur et à mesure que le paramètre de forme  $\eta$  diminue. Cela signifie que pour un canal donné dont la largeur  $b$  est connue, le coefficient  $C / \sqrt{g}$  augmente lorsque la profondeur de l'écoulement  $y_n$  augmente. Nous pouvons également constater que pour un paramètre de forme  $\eta$  fixé, le coefficient  $C / \sqrt{g}$  augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ .

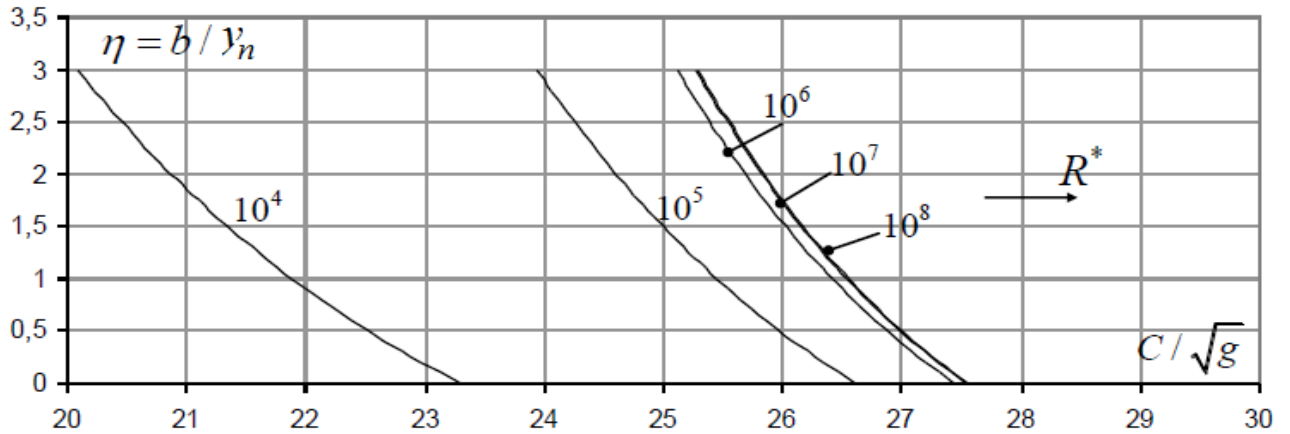


Fig. 2.2 : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon/b = 10^{-4}$ .

Les courbes se confondent pour  $R^* \geq 10^7$ . Canal rectangulaire.

Il ressort de la figure 2.2 que pour une valeur fixée du nombre de Reynolds modifié  $R^*$ , le coefficient  $C/\sqrt{g}$  augmente avec la diminution du paramètre de forme  $\eta$ , comme dans le cas de la figure 2.1. Nous pouvons également observer que pour un paramètre de forme  $\eta$  donné, le coefficient  $C/\sqrt{g}$  augmente avec le nombre de Reynolds modifié  $R^*$ . Ce qui ressort de particulier de la figure 2.2, c'est le fait qu'au-delà de  $R^* = 10^7$  les courbes de variation du coefficient  $C/\sqrt{g}$  se confondent. Cela signifie qu'à partir de la valeur  $R^* = 10^7$ , le nombre de Reynolds modifié  $R^*$  n'a aucune influence sur la variation du coefficient  $C/\sqrt{g}$  et le régime d'écoulement turbulent rugueux est alors atteint. En d'autres termes, il n'y a plus aucune influence de la viscosité cinématique  $\nu$  au-delà de  $R^* = 10^7$ .

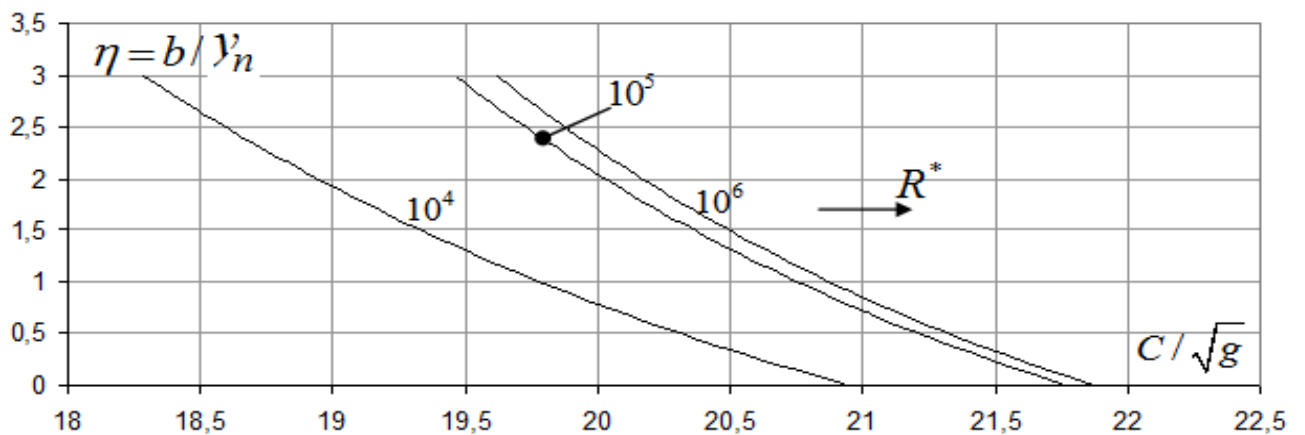


Fig. 2.3 : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon/b = 10^{-3}$ .

Les courbes se confondent pour  $R^* \geq 10^6$ . Canal rectangulaire.

Comme dans le cas des figures 2.1 et 2.2, il ressort de la figure 2.3 que pour une même valeur du nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ , le coefficient  $C/\sqrt{g}$  augmente au fur et à mesure que le paramètre de forme  $\eta$  diminue. Ceci signifie que le coefficient  $C/\sqrt{g}$  augmente lorsque la profondeur  $y_n$  de l'écoulement augmente. Nous pouvons également observer que pour un paramètre de forme  $\eta$  fixé, le coefficient  $C/\sqrt{g}$  augmente avec le nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ . Pour la valeur de la rugosité relative  $\varepsilon/b=10^{-3}$ , les courbes de variation du coefficient  $C/\sqrt{g}$  se confondent à partir de la valeur  $R^*=10^6$ . L'écoulement turbulent rugueux est atteint plus tôt que dans le cas des courbes de la figure 2.2. Cela peut se justifier par le fait que plus la rugosité relative  $\varepsilon/b$  augmente et plus le régime d'écoulement turbulent rugueux est atteint rapidement.

Une conclusion peut être tirée au regard des figure 2.1, 2.2 et 2.3, c'est que plus la rugosité relative  $\varepsilon/b$  augmente et plus le coefficient  $C/\sqrt{g}$  diminue, quelle que soit la valeur du nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ .

### **II.2.3. Calcul du paramètre de forme $\eta$**

Selon la relation fonctionnelle (2.17), pour évaluer le coefficient de *Chézy*  $C$ , il est nécessaire de connaître le paramètre de forme  $\eta$ . Rappelons que les données du problème sont le débit volume  $Q$ , la largeur  $b$  du canal, la pente  $i$  du canal, la rugosité absolue  $\varepsilon$  caractérisant l'état de la paroi interne du canal et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Pour calculer le paramètre de forme  $\eta$ , nous pouvons faire appel à la méthode du modèle rugueux (MMR) (*Achour, 2014; Achour, 2015a, 2015b, 2015c; Achour et Bedjaoui, 2006; Achour et Bedjaoui, 2012; Achour et Sehtal, 2014*).

Les caractéristiques du modèle rugueux sont affectés du symbole «  $\bar{\quad}$  ». Le modèle rugueux est un canal de forme rectangulaire caractérisée par une rugosité relative  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h=0,037$  (*Achour, 2007*) arbitrairement choisie, où  $\bar{D}_h$  désigne le diamètre hydraulique. La rugosité relative ainsi choisie est tellement élevée que l'écoulement dans le modèle rugueux se situe dans le domaine turbulent rugueux. Pour ce domaine, la formule de *Nikuradsé* demeure en vigueur et nous pouvons alors écrire que (*Achour, 2007*):

$$\bar{f}^{-1/2} = -2 \log \left( \frac{\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h}{3,7} \right) \quad (2.18)$$

$\bar{f}$  est le coefficient de frottement dans le modèle rugueux (Achour, 2007). Compte du fait que la rugosité relative  $\bar{\varepsilon} / \bar{D}_h$  est égale à 0,037, la relation (2.18) mène à :

$$\bar{f} = \frac{1}{16} \quad (2.19)$$

Ainsi, le coefficient de frottement dans le modèle rugueux est une constante. Ceci était prévisible puisque l'écoulement dans le modèle rugueux est turbulent rugueux.

Considérons un modèle rugueux dont le débit volume  $\bar{Q}$  est égal au débit volume  $Q$  écoulé par le canal rectangulaire étudié. Admettons également que la pente  $\bar{i}$  du modèle rugueux est égale à la pente  $i$  du canal rectangulaire étudié. Admettons enfin que la largeur  $\bar{b}$  du modèle rugueux est égale à la largeur  $b$  du canal considéré. Nous pouvons alors écrire les égalités suivantes :

$$\bar{Q} = Q, \bar{i} = i, \bar{b} = b \quad (2.20)$$

Rappelons que la relation de *Darcy-Weisbach* exprime la pente  $i$  du canal sous la forme suivante :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (2.21)$$

Où  $f$  est le coefficient de frottement dans le canal rectangulaire étudié.

Appliquons la relation (2.21) au modèle rugueux, en tenant compte des égalités (2.20). Il vient que :

$$i = \frac{\bar{f}}{\bar{D}_h} \frac{Q^2}{2g\bar{A}^2} \quad (2.22)$$

Dans cette dernière relation, le diamètre hydraulique  $\bar{D}_h$  est par définition  $\bar{D}_h = 4\bar{A} / \bar{P}$ , où  $\bar{P}$  est le périmètre mouillé dans le modèle rugueux. En introduisant la définition du diamètre hydraulique  $\bar{D}_h$  dans la relation (2.22) et en tenant compte de la relation (2.19), nous pouvons écrire que :

$$i = \frac{1}{128g} \bar{P} \frac{Q^2}{\bar{A}^3} \quad (2.23)$$

L'aire de la section mouillée  $\bar{A}$  et le périmètre mouillé  $\bar{P}$  s'écrivent respectivement :

$$\bar{A} = b\bar{y}_n \quad (2.24)$$

$$\bar{P} = b + 2\bar{y}_n \quad (2.25)$$

Dans les relations (2.24) et (2.25),  $\bar{y}_n$  désigne la profondeur normale de l'écoulement dans le modèle rugueux. En substituant les relations (2.24) et (2.25) dans la relation (2.23), il vient que :

$$i = \frac{1}{128g} (b + 2\bar{y}_n) \frac{Q^2}{b^3 \bar{y}_n^3} \quad (2.26)$$

Cette dernière relation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$i = \frac{1}{128g} b \left( 1 + 2 \frac{\bar{y}_n}{b} \right) \frac{Q^2}{b^6 \left( \frac{\bar{y}_n}{b} \right)^3} \quad (2.27)$$

Définissons le paramètre de forme  $\bar{\eta}_0 = \bar{y}_n / b$  pour le modèle rugueux. La relation (2.27) s'écrit alors :

$$i = \frac{1}{128g} (1 + 2\bar{\eta}_0) \frac{Q^2}{b^5 \bar{\eta}_0^3} \quad (2.28)$$

La relation (2.28) peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$1 = \frac{1}{128} \frac{(1 + 2\bar{\eta}_0)}{\bar{\eta}_0^3} \left( \frac{Q^2}{gib^5} \right) \quad (2.29)$$

Désignons par la quantité  $Q_b^* = Q / \sqrt{gib^5}$ , la conductivité relative du modèle rugueux rapportée à la largeur  $b$ . Elle est égale à la conductivité relative du canal rectangulaire étudié. Ainsi, et après réarrangements, la relation (2.29) devient :

$$\bar{\eta}_0^3 - \frac{Q_b^{*2}}{64} \bar{\eta}_0 - \frac{Q_b^{*2}}{128} = 0 \quad (2.30)$$

On obtient ainsi une équation de troisième degré en  $\bar{\eta}_0$ , sans terme de second ordre. Dans la relation (2.30), la conductivité relative  $Q_b^*$  est connue, puisque  $Q$ ,  $i$ ,  $g$  et  $b$  sont des paramètres donnés. Pour résoudre l'équation de troisième degré (2.30), nous pouvons faire appel aux fonctions trigonométriques ou hyperboliques.

La relation (2.30) est de la forme :

$$x^3 - px - q = 0 \quad (2.31)$$

Avec :  $p = \frac{Q_b^{*2}}{64}$  et  $q = \frac{Q_b^{*2}}{128}$

Le discriminant  $\Delta$  de la relation (2.31) est donné par la relation :

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (2.32)$$

Après calculs, le discriminant  $\Delta$  s'écrit :

$$\Delta = \left(\frac{Q_b^*}{16}\right)^4 \left(1 - \frac{Q_b^*}{6\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{Q_b^*}{6\sqrt{3}}\right) \quad (2.33)$$

Nous pouvons ainsi constater que le discriminant  $\Delta$  peut être négatif, nul ou positif selon la valeur de la conductivité relative  $Q_b^*$ . Ainsi :

*i.* Lorsque  $Q_b^* \geq 6\sqrt{3}$ , il vient que  $\Delta \leq 0$  et la racine réelle de l'équation est :

$$\bar{\eta}_0 = \frac{Q_b^*}{4\sqrt{3}} \cos(\beta/3) \quad (2.34)$$

où l'angle  $\beta$  est tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{6\sqrt{3}}{Q_b^*} \quad (2.35)$$

*ii.* Lorsque  $Q_b^* \leq 6\sqrt{3}$ , il vient que  $\Delta \geq 0$  et la racine réelle de l'équation est :

$$\bar{\eta}_0 = \left(\frac{Q_b^{*2}}{256}\right)^{1/3} \left[ \left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}}\right)^{1/3} \right] \quad (2.36)$$

Une fois calculé le paramètre de forme  $\bar{\eta}_0$  par l'une des relations (2.34) ou (2.36), selon le signe du discriminant  $\Delta$  dépendant de la valeur de la conductivité relative  $Q_b^*$ , les étapes suivantes indiquent la procédure de calcul du paramètre de forme  $\eta$ , selon la MMR. Nous rappelons que les paramètres connus du problème sont  $Q$ ,  $b$ ,  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$ .

*i.* Avec la valeur calculée de  $\bar{\eta}_0$ , on détermine la valeur de l'aire de la section mouillée  $\bar{A}$ , du périmètre mouillé  $\bar{P}$  de l'écoulement dans le modèle rugueux, du diamètre hydraulique  $\bar{D}_h$  et celle du nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$ , selon les relations suivantes :

$$\bar{A} = b\bar{y}_n = b^2\bar{\eta}_0 \quad (2.37)$$

$$\bar{P} = b + 2\bar{y}_n = b(1 + 2\bar{\eta}_0) \quad (2.38)$$

$$\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P} \quad (2.39)$$



$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} \quad (2.40)$$

- ii. Avec la valeur donnée de la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la valeur calculée du diamètre hydraulique  $\bar{D}_h$  et celle du nombre de Reynolds  $\bar{R}$ , on détermine la valeur du facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  en application de la relation suivante :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.41)$$

- iii. On affecte au modèle rugueux la nouvelle dimension linéaire suivante, issue de la relation fondamentale de la MMR :

$$\bar{b} = b / \psi$$

- iv. Avec la nouvelle dimension linéaire calculée à l'étape iii, on détermine la nouvelle valeur de la conductivité relative selon la relation suivante :

$$Q_b^* = \frac{Q}{\sqrt{gi(b/\psi)^5}} \quad (2.42)$$

- v. Avec cette nouvelle valeur de la conductivité relative, on calcule le paramètre de forme  $\bar{\eta}_0$  par application de l'une des relations (2.34) ou (2.36), selon le signe du discriminant  $\Delta$ . Cette valeur calculée de  $\bar{\eta}_0$  correspond à la valeur du paramètre de forme  $\eta_0 = y_n / b$  de l'écoulement dans le canal rectangulaire étudié. Soit :

$$\bar{\eta}_0 = \eta_0 \quad (2.43)$$

- vi. Finalement le paramètre de forme  $\eta = b / y_n$  recherché est tel que :

$$\eta = \frac{1}{\eta_0} \quad (2.44)$$

#### **II.2.4. Etapes de calcul du coefficient de Chézy**

Pour calculer le coefficient  $C$  de Chézy, il est nécessaire que les paramètres suivants soient connus : le débit volume  $Q$ , la pente  $i$  du canal, la rugosité absolue  $\varepsilon$ , la largeur  $b$  du canal, la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement et l'accélération de la pesanteur  $g$ . Avec ces paramètres connus, le paramètre de forme  $\eta$  est déduit, selon les étapes de calcul précédemment présentées. C'est la relation (2.16) qui régit le coefficient  $C$  de Chézy et selon

cette relation, les étapes suivantes sont recommandées pour le calcul de  $C$  :

- i. On calcule le paramètre de forme  $\eta$  en suivant les étapes indiquées lors du paragraphe précédent.
- ii. Avec la valeur ainsi calculée de  $\eta$ , on calcule la valeur de la fonction  $\varphi(\eta)$  en application de la relation (2.8). Soit :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta + 2)^{3/2}}$$

- iii. On détermine la valeur de la rugosité relative  $\varepsilon / b$ .
- iv. On calcule la valeur du nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$  selon la relation (2.9). Soit :

$$R^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu}$$

- v. Finalement, le coefficient  $C$  de *Chézy* est déduit de la relation (2.16). Soit :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left[ \frac{\varepsilon / b}{1,165 [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)} \right]$$

### **Exemple 1**

On souhaite calculer la valeur du coefficient  $C$  de *Chézy* pour le cas d'un canal rectangulaire, connaissant les données suivantes :

$$Q = 3,861 \text{ m}^3/\text{s}, \quad b = 2 \text{ m}, \quad \varepsilon = 0,001 \text{ m}, \quad i = 0,001, \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

### **Solution**

1. On calcule la conductivité relative  $Q_b^*$  telle que :

$$Q_b^* = Q / \sqrt{gib^5} = 3,861 / \sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2^5} = 6,89112787$$

On peut constater que  $Q_b^* < 6\sqrt{3} = 10,3923048$ .

2. Conformément à la relation (2.33), le discriminant  $\Delta$  de l'équation de troisième degré (2.30) est positif. Le paramètre de forme  $\bar{\eta}_0$  est donc régi par la relation (2.36). Soit :

$$\bar{\eta}_0 = \left( \frac{Q_b^{*2}}{256} \right)^{1/3} \left[ \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} + \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} \right]$$

$$= \left( \frac{6,89112787^2}{256} \right)^{1/3} \times \left[ \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{6,89112787^2}{108}} \right)^{1/3} + \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{6,89112787^2}{108}} \right)^{1/3} \right]$$

$$= 1,047052833$$

3. Avec la valeur ainsi calculée du paramètre de forme  $\bar{\eta}_0$ , les caractéristiques hydrauliques du modèle rugueux sont :

L'aire de la section mouillée  $\bar{A}$ , donnée par la relation (2.37). Soit :

$$\bar{A} = b^2 \bar{\eta}_0 = 2^2 \times 1,047052833 = 4,18821133m^2$$

Le périmètre mouillé  $\bar{P}$ , donné par la relation (2.38). Soit :

$$\bar{P} = b(1 + 2\bar{\eta}_0) = 2 \times (1 + 2 \times 1,047052833) = 6,18821133m$$

Le diamètre hydraulique  $\bar{D}_h$ , donné par la relation (2.39). Soit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A} / \bar{P} = 4 \times 4,18821133 / 6,18821133 = 2,70721933m$$

Le nombre de Reynolds  $\bar{R}$ , donné par la relation (2.39). Soit :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P} \nu} = \frac{4 \times 3,861}{6,18821133 \times 10^{-6}} = 2495713,09$$

4. Les caractéristiques hydrauliques du modèle rugueux ainsi calculées permettent de déterminer le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$ , selon la relation (2.41). Soit :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{0,001 / 2,7063875}{4,75} + \frac{8,5}{2494946,25} \right) \right]^{-2/5} = 0,76845584$$

5. Affectons au modèle rugueux la nouvelle dimension linéaire suivante :

$$\bar{b} = b / \psi = 2 / 0,76845584 = 2,60262191m$$

6. Avec cette nouvelle dimension linéaire, calculons la conductivité relative selon la relation (2.42). Soit :

$$Q_b^* = \frac{Q}{\sqrt{gi(b/\psi)^5}} = \frac{3,861}{\sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2,60262191^5}} = 3,56728326$$

7. Nous pouvons constater que la valeur de la conductivité relative ainsi calculée est inférieure à  $6\sqrt{3} = 10,3923048$ . Ceci permet de conclure que le paramètre de forme

$\bar{\eta}_0$  est régi par la relation (2.36). Soit :

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_0 &= \left(\frac{Q_b^{*2}}{256}\right)^{1/3} \left[ \left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}}\right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{3,56728326^2}{256}\right)^{1/3} \times \left[ \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3,56728326^2}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3,56728326^2}{108}}\right)^{1/3} \right] \\ &= 0,603067235\end{aligned}$$

Cette valeur calculée du paramètre de forme  $\bar{\eta}_0$  correspond exactement au paramètre de forme  $\eta_0$  de l'écoulement dans le canal rectangulaire étudié. Soit :

$$\eta_0 = y_n / b = 0,603067235$$

8. Le paramètre de forme  $\eta = b / y_n$  est donc :

$$\eta = \frac{1}{\eta_0} = \frac{1}{0,603067235} = 1,6581899$$

9. Selon la relation (2.8), la fonction  $\varphi(\eta)$  est telle que :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta+2)^{3/2}} = \frac{32 \times \sqrt{2}}{(1,6581899+2)^{3/2}} = 6,46793439$$

10. La valeur de la rugosité relative  $\varepsilon / b$  est :

$$\varepsilon / b = 0,001 / 2 = 0,0005$$

11. La valeur du nombre de Reynolds modifié  $R^*$  est, selon la relation (2.9) :

$$R^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} = \frac{\sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2^3}}{10^{-6}} = 280142,821$$

12. Finalement, la valeur recherchée du coefficient  $C$  de Chézy est, selon la relation (2.16) :

$$\begin{aligned}C &= -4\sqrt{2g} \log \left[ \frac{\varepsilon / b}{1,165[\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)} \right] \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left[ \frac{0,0005}{1,165 \times 6,46793439^{2/3}} + \frac{10,04}{280142,821 \times 6,46793439} \right] \\ &= 68,9013858 \approx 69m^{0,5} / s\end{aligned}$$

13. Vérifions la valeur ainsi calculée de  $C$  par celle issue de la MMR. Selon la MMR, le coefficient  $C$  de Chézy est donné par la relation suivante (Achour, 2015) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (2.45)$$

Le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  a été calculé à l'étape 4 et vaut :

$$\psi = 0,76845584$$

Le coefficient  $C$  de *Chézy* est par suite, selon la relation (2.45) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,76845584^{5/2}} = 68,4529552 m^{0,5} / s \approx 68,5 m^{0,5} / s$$

Ainsi, nous pouvons constater que l'écart relatif entre les valeurs de  $C$  calculées selon la méthode que nous avons présentée et la MMR est de :

$$\frac{\Delta C}{C} = 100 \times \frac{(68,9013858 - 68,4529552)}{68,9013858} = 0,65\%$$

Nous pouvons alors conclure, tenant compte du faible écart relatif obtenu, que les deux méthodes aboutissent pratiquement au même résultat.

### **II.3. Coefficient de résistance de *Manning***

#### **II.3.1. Expression générale du coefficient de résistance de *Manning***

La relation de *Manning* exprime le débit volume  $Q$  écoulé par le canal par la relation suivante :

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.46)$$

Où  $n$  désigne le coefficient de *Manning*.

En comparant la relation (2.46) à la relation générale du débit volume exprimée par (2.1), nous pouvons déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.47)$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  est, pour rappel, donné par la relation (2.10), tandis que le rayon hydraulique  $R_h$  est donné par la relation (2.6). La relation (2.47) montre bien que le coefficient  $n$  de *Manning* est fonction de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , du nombre de *Reynolds*  $R$  et du rayon hydraulique  $R_h$ . Cette dépendance de  $n$  vis-à-vis de  $R_h$  traduit bien le fait que  $n$  varie en fonction du paramètre de forme  $\eta$  de la section mouillée du canal.

En introduisant la fonction  $\varphi(\eta)$ , donnée par la relation (2.8), dans l'expression du rayon hydraulique  $R_h$  exprimée par (2.6), nous pouvons écrire :

$$R_h = b \frac{[\varphi(\eta)]^{2/3}}{(32\sqrt{2})^{2/3}} \quad (2.48)$$

En remplaçant les relations (2.10) et (2.48), qui expriment le nombre de *Reynolds*  $R$  et le rayon hydraulique  $R_h$  respectivement, dans la relation (2.47), il vient que :

$$\frac{1}{n} = -\frac{4}{(32\sqrt{2})^{-1/9}} \sqrt{2g} b^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{-1/9} \log \left( \frac{\varepsilon / b}{\frac{14,8}{(32\sqrt{2})^{2/3}} [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)} \right) \quad (2.49)$$

Après calculs, la relation (2.49) s'écrit en définitive :

$$\frac{1}{n} = -8,64 \sqrt{g} b^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{-1/9} \log \left( \frac{\varepsilon / b}{1,165 [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)} \right) \quad (2.50)$$

Introduisons le paramètre adimensionnel suivant :

$$N = \frac{b^{1/6}}{n \sqrt{g}} \quad (2.51)$$

La relation (2.50) s'écrit alors, en termes adimensionnels, de la manière suivante :

$$N = -8,64 [\varphi(\eta)]^{-1/9} \log \left( \frac{\varepsilon / b}{1,165 [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta)} \right) \quad (2.52)$$

La relation (2.52) constitue l'expression finale du coefficient adimensionnel  $N$  de *Manning*.

Lorsque les paramètres  $\eta, \varepsilon, b, i$  et  $\nu$  sont connus, la relation (2.50) ou (2.52) permet d'évaluer le coefficient  $n$  de *Manning*. Au regard de la relation (2.52), nous pouvons écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$N = f(\varepsilon / b; \eta; R^*) \quad (2.53)$$

### II.3.2. Variation du coefficient de résistance de Manning

Des courbes ont été établies montrant la variation du paramètre adimensionnel  $N$  en fonction du paramètre de forme  $\eta$  pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/b$  et en faisant varier le nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ . Ces courbes seront commentées et discutées.

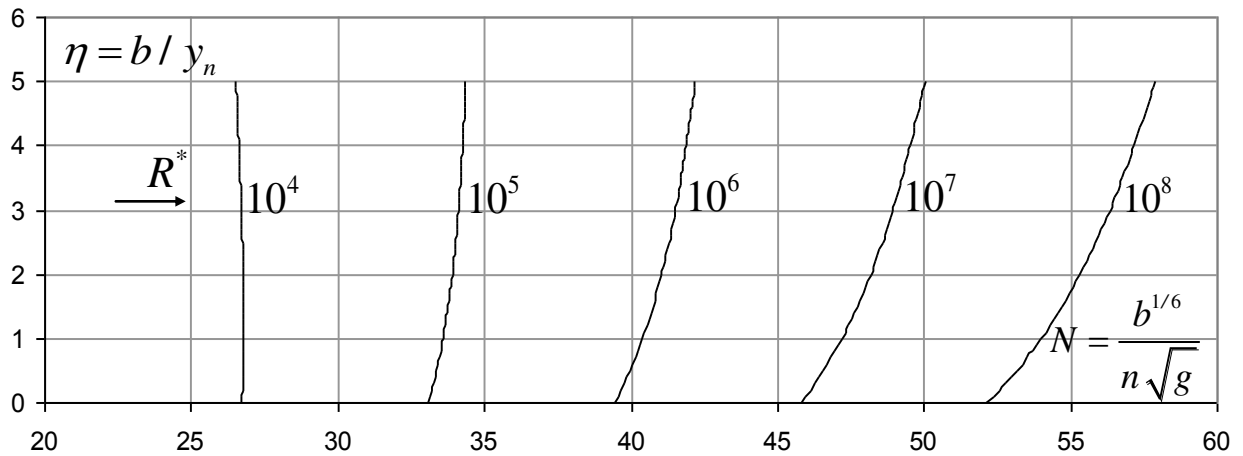


Fig. 2.4 : Variation de  $N$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon/b = 0$   
(Écoulement lisse). Canal rectangulaire.

La figure 2.4 montre clairement que pour un nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$  fixé, le paramètre adimensionnel  $N$  augmente avec l'accroissement du paramètre de forme  $\eta$ . Cependant, nous pouvons constater que la courbe correspondant à  $R^* = 10^4$  fait exception. En effet, pour cette valeur de  $R^*$ , la courbe subit une légère augmentation dans un premier temps, puis diminue très lentement. Mais, cette variation de  $N$  n'est pas significative et l'on peut considérer que  $N$  demeure pratiquement constant. Au fur et à mesure que  $R^*$  augmente, l'accroissement de  $N$  est plus rapide. Pour un canal rectangulaire donné, c'est-à-dire pour une largeur  $b$  connue, l'augmentation du paramètre adimensionnel  $N$  signifie que  $1/n$  augmente ou que  $n$  diminue, lorsque le paramètre de forme  $\eta = b/y_n$  augmente ou que la profondeur  $y_n$  diminue. Cette constatation est tout à fait physiquement justifiée. Nous pouvons enfin constater que pour une valeur donnée du paramètre de forme  $\eta$ , le paramètre adimensionnel  $N$  augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ . Cela signifie que le coefficient  $n$  diminue au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ .

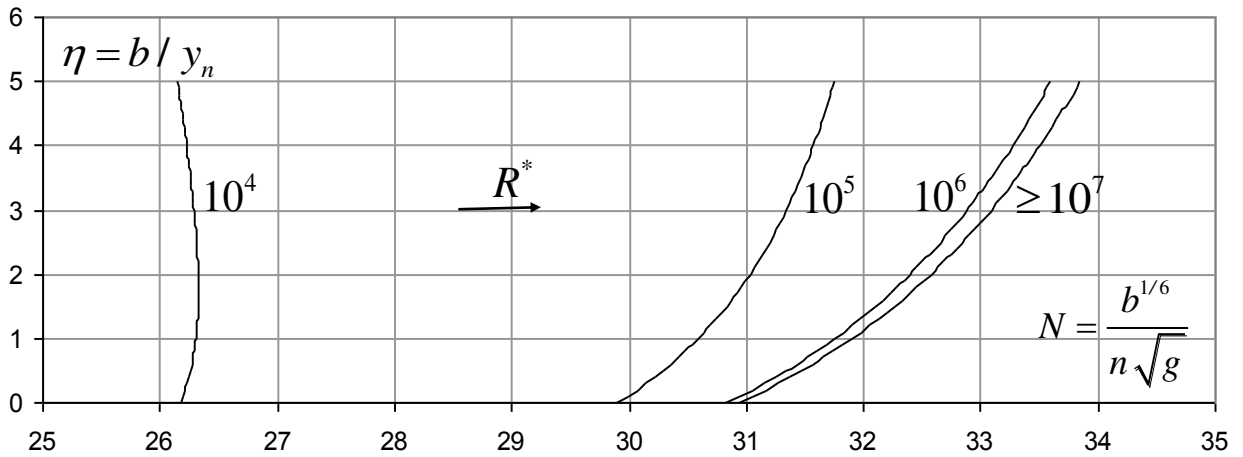


Fig. 2.5 : Variation de  $N$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon/b = 10^{-4}$ . Canal rectangulaire.

La figure 2.5 montre, à l'exception de la courbe correspondant à  $R^* = 10^4$ , que le nombre adimensionnel  $N$  augmente avec l'accroissement du paramètre de forme  $\eta = b/y_n$ , pour un nombre de Reynolds modifié  $R^*$  fixé. Cela signifie que le coefficient  $n$  diminue au fur et à mesure que la profondeur  $y_n$  de l'écoulement décroît. La courbe de  $R^* = 10^4$  fait l'exception, car  $N$  augmente dans un premier temps puis diminue dans un second temps. Cependant, cette variation n'est pas très significative. La figure 2.5 montre également que les courbes se confondent lorsque le nombre de Reynolds modifié atteint la valeur  $R^* = 10^7$ . Au-delà de cette valeur, le nombre de Reynolds modifié  $R^*$  n'a aucune influence sur la variation du nombre adimensionnel  $N$ , cela signifie que la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement ne joue aucun rôle. L'état turbulent rugueux de l'écoulement est donc atteint pour  $R^* = 10^7$ . Seul le paramètre de forme  $\eta = b/y_n$  influence la variation de  $N$ .

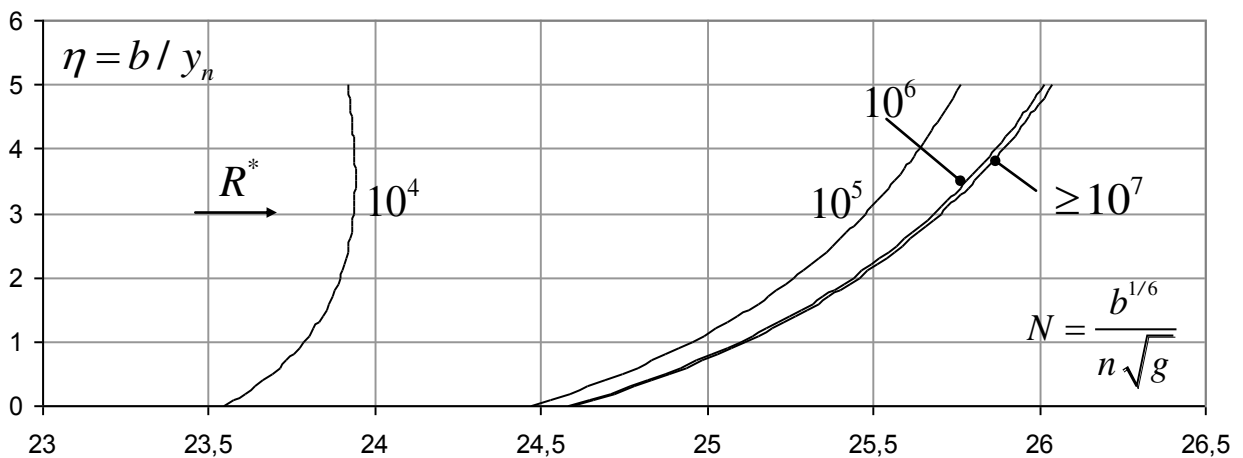


Fig.2.6 : Variation de  $N$  en fonction de  $\eta$ , pour  $\varepsilon/b = 10^{-3}$ . Canal rectangulaire.



Comme pour les figures 2.4 et 2.5, la figure 2.6 montre que le nombre adimensionnel  $N$  augmente avec l'accroissement du paramètre de forme  $\eta = b / y_n$ , à l'exception de la courbe correspondant à  $R^* = 10^4$ . Pour cette courbe, le nombre adimensionnel subit une augmentation dans un premier puis une légère diminution au-delà d'une certaine valeur du paramètre de forme  $\eta$ . Pour un paramètre de forme  $\eta$  donné, nous pouvons constater que  $N$  augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ . Comme nous l'avons constaté sur la figure 2.5, la figure 2.6 montre également que les courbes se confondent lorsque le nombre de *Reynolds* modifié atteint la valeur  $R^* = 10^7$ . A partir de cette valeur, le régime d'écoulement turbulent rugueux est atteint, et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement n'a aucune influence sur la variation du nombre adimensionnel  $N$ .

Au regard des figures 2.4, 2.5 et 2.6, nous pouvons observer que plus la rugosité relative  $\varepsilon / b$  augmente et plus le nombre adimensionnel  $N$  diminue, quelque soit la valeur du nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ . Cela revient à dire que  $1/n$  diminue ou que le coefficient  $n$  augmente, pour canal rectangulaire donné pour lequel la largeur  $b$  est fixée.

### **II.3.3. Calcul du coefficient de résistance de *Manning* par la méthode du modèle rugueux (MMR)**

La relation (2.50) ou (2.52) ne permet d'évaluer le coefficient  $n$  de *Manning* que si la largeur  $b$  du canal rectangulaire est une donnée du problème. Dans le cas où  $b$  n'est pas connu, il est tout de même possible de calculer la valeur de  $n$ , à condition d'avoir recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). C'est l'un des avantages de cette méthode.

En comparant les relations (2.11) et (2.46) de *Chézy* et de *Manning* respectivement, il est aisé de montrer que :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \tag{2.54}$$

Par suite, nous pouvons écrire que le coefficient  $n$  de *Manning* dans le modèle rugueux est tel que :

$$n = \frac{\overline{R_h}^{-1/6}}{C} \tag{2.55}$$

Il est utile de rappeler que selon la MMR, le coefficient  $\bar{C}$  de *Chézy* dans le modèle rugueux est (*Achour, 2007*) :

$$\bar{C} = 8\sqrt{2g} \quad (2.56)$$

Le modèle rugueux est un canal rectangulaire de largeur  $\bar{b}$  ; il écoule un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  correspondant à un taux de remplissage  $\bar{\eta}$ , pour une pente longitudinale  $\bar{i}$ . Pour déterminer le coefficient  $n$  de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

- i.  $\bar{b} \neq b$  : cette condition énonce que la largeur du canal et celle du modèle rugueux sont différentes.
- ii.  $\bar{Q} = Q$  : le canal rectangulaire considéré et le modèle rugueux écoulent le même débit volume  $Q$ .
- iii.  $\bar{i} = i$  : le canal rectangulaire considéré et le modèle rugueux sont caractérisés par la même pente longitudinale  $i$ .
- iv.  $\bar{\eta} = \eta$  : le paramètre de forme du canal considéré est égal à celui du modèle rugueux de référence.
- v.  $\bar{\nu} = \nu$  : le canal rectangulaire considéré et le modèle rugueux écoulent le même liquide à la même température.

Le débit volume  $\bar{Q}$  écoulé par le modèle rugueux s'écrit, en vertu de la relation (2.46) de *Manning* :

$$\bar{Q} = Q = \frac{1}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.57)$$

L'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le rayon hydraulique  $R_h$  de l'écoulement dans le canal rectangulaire considéré sont liés à leurs homologues du modèle rugueux  $\bar{A}$  et  $\bar{R}_h$  par les relations suivantes (*Achour, 2007 ; Achour et Sehtal, 2014*) :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (2.58)$$

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (2.59)$$

En tenant compte des relations (2.58) et (2.59), la relation (2.46) de *Manning* devient :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} = \frac{\psi^{8/3}}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.60)$$

En comparant les relations (2.57) et (2.60), il ressort que :

$$n = \bar{n} \psi^{8/3} \quad (2.61)$$

Tenant compte de la relation (2.56), la combinaison des relations (2.55) et (2.61) mène à écrire que :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.62)$$

Le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est donné par la relation (2.41), dont on rappelle l'expression :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.41)$$

Tenant compte de la relation (2.6), nous pouvons aisément écrire que :

$$\bar{D}_h = 4\bar{R}_h = 4 \frac{\bar{b}}{(\eta + 2)} \quad (2.63)$$

En combinant les relations (2.8) et (2.63), nous pouvons écrire que :

$$\bar{D}_h = \frac{4\bar{b}}{(32\sqrt{2})^{2/3}} [\varphi(\eta)]^{2/3} \quad (2.64)$$

Rappelons d'autre part que le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  figurant dans la relation (2.41) est donné par la relation (2.10) sous la forme suivante :

$$\bar{R} = \bar{R}^* \varphi(\eta) \quad (2.65)$$

Où  $\bar{R}^*$  est donné par la relation (2.9) sous la forme suivante :

$$\bar{R}^* = \frac{\sqrt{gib^{-3}}}{\nu} \quad (2.66)$$

En tenant compte des relations (2.64) et (2.65), la relation (2.41) devient :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{b}}{1,496 [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{8,5}{\bar{R}^* \varphi(\eta)} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.67)$$

Prenant en compte les relations (2.64) et (2.67), la relation (2.62) permet alors d'écrire que le coefficient  $n$  de Manning s'écrit finalement :

$$n = \frac{375}{2911\sqrt{g}} \bar{b}^{1/6} [\varphi(\eta)]^{1/9} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{b}}{1,496 [\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{8,5}{\bar{R}^* \varphi(\eta)} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.68)$$

Selon la relation (2.68), le coefficient  $n$  de *Manning* s'exprime en fonction du paramètre de forme  $\eta$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$  et des caractéristiques  $\bar{b}$  et  $\bar{R}^*$  du modèle rugueux. Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}^*$  est régi par la relation (2.66) qui dépend notamment de la largeur  $\bar{b}$  du modèle rugueux.

Pour exprimer la largeur  $\bar{b}$  du modèle rugueux, il faut faire appel à la relation (2.11) de *Chézy*. Appliquée au modèle rugueux, celle-ci s'écrit :

$$Q = \bar{C} \bar{A} \sqrt{\bar{R}_h} i \quad (2.69)$$

Le coefficient  $\bar{C}$  est le coefficient de *Chézy* dans le modèle rugueux donné par la relation (2.56) et vaut  $8\sqrt{2g}$ . L'aire de la section mouillée  $\bar{A}$  de l'écoulement dans le modèle rugueux s'exprime par la relation suivante :

$$\bar{A} = \frac{\bar{b}^2}{\eta} \quad (2.70)$$

Où  $\eta$  est, pour rappel, le paramètre de forme tel que  $\eta = b / y_n$ . Nous rappelons également que le rayon hydraulique  $\bar{R}_h$  peut être déduit de la relation (2.64).

Tenant compte de toutes ces considérations, la relation (2.69) s'écrit sous la forme suivante :

$$Q = 8\sqrt{2} \frac{\bar{b}^2}{\eta} \sqrt{\frac{\bar{b}}{(32\sqrt{2})^{2/3}} [\varphi(\eta)]^{2/3}} i \quad (2.71)$$

Après réarrangements, la largeur  $\bar{b}$  du modèle rugueux s'écrit :

$$\bar{b} = \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{(32\sqrt{2})^{2/15}}{(8\sqrt{2})^{2/5}} \frac{\eta^{2/5}}{[\varphi(\eta)]^{2/15}} \quad (2.72)$$

Après calculs, la relation (2.72) s'écrit finalement :

$$\bar{b} = 0,63 \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{\eta^{2/5}}{[\varphi(\eta)]^{2/15}} \quad (2.74)$$

La relation (2.74) permet de calculer la largeur  $\bar{b}$  du modèle rugueux, pour les valeurs connues du débit volume  $Q$ , de la pente  $i$  et du paramètre de forme  $\eta$ .

Les étapes suivantes montrent la procédure de calcul du coefficient  $n$  de *Manning*, pour les données suivantes :  $Q$ ,  $\varepsilon$ ,  $i$ ,  $\eta$ ,  $\nu$ . Notons que la largeur  $b$  du canal rectangulaire considéré n'est pas requise pour le calcul de  $n$ .

- i. Avec la valeur connue du paramètre de forme  $\eta = b / y_n$ , on calcule la valeur de la fonction  $\varphi(\eta)$  en application de la relation (2.8). Soit :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta + 2)^{3/2}}$$

- ii. Avec la valeur connue des paramètres  $Q$ ,  $i$  et  $\eta = b / y_n$ , on calcule la largeur  $\bar{b}$  du modèle rugueux selon la relation (2.74). Soit :

$$\bar{b} = 0,63 \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{\eta^{2/5}}{[\varphi(\eta)]^{2/15}}$$

- iii. Avec la valeur connue des paramètres  $i$ ,  $\bar{b}$  et  $\nu$ , on calcule le nombre de *Reynolds* modifié  $\bar{R}^*$  dans le modèle rugueux, en application de la relation (2.66). Soit :

$$\bar{R}^* = \frac{\sqrt{g i \bar{b}^3}}{\nu}$$

- iv. Pour la valeur connue des paramètres  $\bar{b}$ ,  $\varphi(\eta)$ ,  $\varepsilon$  et  $\bar{R}^*$ , l'application de la relation (2.68) permet de calculer la valeur recherchée du coefficient  $n$  de *Manning*. Soit :

$$n = \frac{375}{2911\sqrt{g}} \bar{b}^{1/6} [\varphi(\eta)]^{1/9} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{b}}{1,496[\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{8,5}{\bar{R}^* \varphi(\eta)} \right) \right]^{-16/15}$$

**Exemple 2**

Reprenons les données de l'exemple d'application 1 et calculons la valeur du coefficient  $n$  de *Manning*. Ces données sont :

$$Q = 3,861 \text{ m}^3/\text{S}, \eta = 1,6581899, \varepsilon = 0,001 \text{ m}, i = 0,001, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{S}.$$

**Solution**

i. La valeur de la fonction  $\varphi(\eta)$  est, selon la relation (2.8) :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta+2)^{3/2}} = \frac{32 \times \sqrt{2}}{(1,6581899+2)^{3/2}} = 6,46793439$$

ii. La largeur  $\bar{b}$  du modèle rugueux est, en vertu de la relation (2.74) :

$$\begin{aligned} \bar{b} &= 0,63 \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{\eta^{2/5}}{[\varphi(\eta)]^{2/15}} \\ &= 0,63 \times \left( \frac{3,861}{\sqrt{9,81 \times 0,001}} \right)^{2/5} \times \frac{1,6581899^{2/5}}{6,46793439^{2/15}} = 2,60278499 \text{ m} \end{aligned}$$

iii. En vertu de la relation (2.66), la valeur du nombre de *Reynolds* modifié  $\bar{R}^*$  est :

$$\bar{R}^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} = \frac{\sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2,60278499^3}}{10^{-6}} = 415902,896$$

iv. Le coefficient  $n$  de *Manning* est finalement, selon la relation (2.68) :

$$\begin{aligned} n &= \frac{375}{2911\sqrt{g}} \bar{b}^{1/6} [\varphi(\eta)]^{1/9} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{b}}{1,496[\varphi(\eta)]^{2/3}} + \frac{8,5}{\bar{R}^* \varphi(\eta)} \right) \right]^{-16/15} \\ n &= \frac{375}{2911\sqrt{9,81}} \times [2,60278499]^{1/6} \times [6,46793439]^{1/9} \times \left[ -\log \left( \frac{0,001/2,60278499}{1,496[6,46793439]^{2/3}} + \frac{8,5}{415902,896 \times 6,46793439} \right) \right]^{-16/15} \\ &= 0,01315253 \text{ m}^{-1/3} \text{ s} \end{aligned}$$

v. Vérifions les calculs en déterminant la largeur  $b$  du canal rectangulaire considéré, en ayant recours à la relation (2.46) de *Manning* :

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \sqrt{i}$$

Rappelons que :

$$A = b^2 / \eta, \quad R_h = \frac{b}{(32\sqrt{2})^{2/3}} [\varphi(\eta)]^{2/3}$$

En tenant compte de ces considérations, la relation de *Manning* s'écrit :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\varphi(\eta)]^{4/9}}{(32\sqrt{2})^{4/9} \eta} b^{8/3} \sqrt{i}$$

Après réarrangements, la largeur  $b$  s'écrit sous la forme suivante :

$$b = (32\sqrt{2})^{1/6} \frac{\eta^{3/8}}{[\varphi(\eta)]^{1/6}} \left( \frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8}$$

L'application numérique donne :

$$b = (32 \times \sqrt{2})^{1/6} \times \frac{1,6581899^{3/8}}{6,46793439^{1/6}} \times \left( \frac{0,01315253 \times 3,861}{\sqrt{0,001}} \right)^{3/8} = 1,99673456m \approx 2m$$

Il s'agit bien de la valeur de la largeur  $b$  du canal rectangulaire considéré, imposée dans l'exemple d'application 1. Ceci vérifie bien les calculs effectués sur le coefficient  $n$  de *Manning*.

## II.4. Conclusion

Le deuxième chapitre avait pour but l'étude des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* en écoulement uniforme dans un canal rectangulaire. Pour cela, les caractéristiques géométriques et hydrauliques ont été données tel que le périmètre mouillé, l'aire de la section mouillée et le rayon hydraulique. Ce dernier est exprimé en fonction du paramètre de forme de la section mouillée, ou le rapport d'aspect  $\eta = b / y_n$ .

Tout d'abord, ayant recours aux relations de *Chézy* et celle de *Achour et Bedjaoui (2006)*, qui exprimaient le débit volume à l'écoulement uniforme, nous avons pu établir une relation générale du coefficient de *Chézy* (2.16) dépendant de trois paramètres qui sont la rugosité relative  $\varepsilon / b$ , le paramètre de forme  $\eta$  et le nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ .

A l'aide de cette formule, des graphes contenant des courbes ont été établit représentant la variation du coefficient de *Chézy* en fonction du paramètre de forme en faisant fixer la valeur de la rugosité relative et l'on fait varier le nombre de *Reynolds* modifié. Plusieurs commentaires ont été faits sur ces courbes, dont le plus important parmi ceux-ci est plus la rugosité relative augmente et plus le coefficient de *Chézy* diminue, quelle que soit la valeur du nombre de *Reynolds*.

A partir de l'expression (2.16), l'évaluation du coefficient de *Chézy*  $C$ , a nécessité de connaître le paramètre de forme  $\eta$ , sachant que les données du problème sont le débit volume  $Q$ , la largeur  $b$ , la pente  $i$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. A cet effet, nous avons fait appel à la méthode du modèle rugueux (MMR) pour calculer le paramètre de forme  $\eta$ . Eventuellement, dans le but de rendre le calcul plus aisé, une application a été suggérée, décrivant toutes les étapes de calcul pour arriver à évaluer le coefficient de *Chézy*  $C$ .

En deuxième partie de ce chapitre, de la même manière, nous avons pu donner une expression générale exprimant le coefficient  $n$  de *Manning* par la relation (2.50) et en termes de coefficient adimensionnel  $N$  par la relation (2.52). Ces deux relations pouvant évaluer le coefficient  $n$  de *Manning* si les paramètres  $\eta, \varepsilon, b, i$  et  $\nu$  sont connus. A cet effet, en se basant sur la relation (2.52), l'étude de variation du coefficient de *Manning*, comme pour le coefficient de *Chézy* a été effectuée en établissant des courbes montrant la variation du coefficient adimensionnel  $N$  en fonction du paramètre de forme  $\eta$ . Nous avons également appuyé sur la méthode du modèle rugueux (MMR) pour pouvoir sortir la relation (2.68) exprimant le coefficient de *Manning* et ce dans le cas où la largeur  $b$  du canal n'est pas



connue. Enfin un deuxième exemple a été mis pour détailler les démarches nécessaires du calcul du coefficient de *Manning*.

### **III. Coefficient de résistance dans une conduite de forme circulaire**

### **III.1. Introduction**

Dans les aqueducs et conduites artificielles, à l'écoulement uniforme, nous référons, généralement aux formules connues de *Chézy* et de *Manning-Strickler* (*Carlier, 1972; Chow, 1973; French, 1986*) exprimant le débit en fonction des coefficients de résistance à l'écoulement, l'aire de la section mouillée, le rayon hydraulique et la pente longitudinale de la conduite.

Le plus souvent, les coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* sont considérés comme des constantes. Nous pouvons trouver leurs valeurs tabulées dans n'importe quels recueils ou ouvrages techniques spécialisés, éventuellement, tout en sachant, auparavant la nature de la paroi de la conduite ou du canal.

A cet égard, nous constatons que les relations usuelles de *Chézy* et celle *Manning-Strickler* ne tiennent compte que de peu de paramètres régissant l'écoulement notamment pour le cas de l'influence de la viscosité cinématique qui est totalement exclue, menant à dire que ces formules sont exclusivement applicables dans le cas de l'écoulement uniforme en régime turbulent rugueux laissant à l'écart les deux régimes de transition et lisse.

A cet effet, il est indispensable à consolider la notion que les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* peuvent dépendre de plusieurs paramètres régissant l'écoulement, essentiellement, en ce qui concerne le taux de remplissage dans la conduite qui représente le rapport entre la profondeur d'eau et la dimension linéaire caractérisant la géométrie de la conduite ou du canal.

Dans ce contexte, ce volet d'étude s'occupe des coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* en écoulement uniforme dans la conduite circulaire dont les coefficients de résistance peuvent être exprimés explicitement par plusieurs relations englobant tous les paramètres régissant l'écoulement selon le cas étudié.

### **III.2. Caractéristiques géométriques et hydrauliques**

Ce travail consiste à étudier les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* en écoulement uniforme dans la conduite circulaire. Cette dernière est considérée comme la plus utilisée dans les différents réseaux d'aménagements hydrauliques à cause de sa forme simple et pratique.

La figure 3.1 montre l'écoulement uniforme de profondeur normale  $y_n$  dans une conduite circulaire de diamètre interne  $D$ .

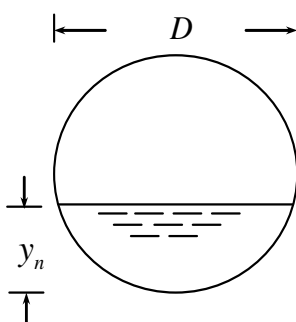


Fig.3.1 : Schéma de profil de conduite en forme circulaire.

Selon la géométrie simple de la conduite circulaire, des caractéristiques hydrauliques sont exprimées en fonction du taux de remplissage de la conduite  $\eta = y_n/D$ .

Où :

- $y_n$  est la profondeur normale d'eau dans la conduite ;
- $D$  est le diamètre de la conduite.

Ces caractéristiques hydrauliques, particulièrement, le périmètre mouillé  $P$ , la section mouillée  $A$  et le rayon hydraulique  $R_h$  sont exploitées par la suite pour pouvoir établir les relations exprimant les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning*.

$$P = D\sigma(\eta) \tag{3.1}$$

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta)\varphi(\eta) \tag{3.2}$$

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) \tag{3.3}$$

Où :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) \tag{3.4}$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)[\sqrt{\eta(1-\eta)}]}{\cos^{-1}(1-2\eta)} \tag{3.5}$$

### III.3. Coefficient de résistance de *Chézy*

En général, à l'écoulement à surface libre, pour n'importe qu'elle forme géométrique de conduite ou de canal, particulièrement la forme circulaire, lorsqu'il s'agit de dimensionner une conduite ou un canal, les paramètres connus sont le débit volume  $Q$ , la pente longitudinale  $i$  de la conduite, la rugosité absolue  $\varepsilon$  caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite, le taux de remplissage  $\eta$  et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Dans le cas où le

coefficient de résistance représente une inconnue et ne figure pas parmi les données du problème et lorsqu'il s'agit de dimensionner la conduite en utilisant les formules de *Chézy* ou de *Manning*, dans cet état il serait impératif de déterminer la valeur des coefficients de résistance qui sont à leurs tour des variables en fonction du taux de remplissage.

### III.3.1. Expression générale du coefficient de résistance de *Chézy*

L'écoulement uniforme à surface libre est souvent régi par les formules habituelles telles que celle de *Chézy* qui exprime le débit volume  $Q$  et s'écrit :

$$Q = C A \sqrt{R_h i} \quad (3.6)$$

A partir de l'idée que le coefficient  $C$  de *Chézy* peut être variable en fonction de tous les paramètres régissant l'écoulement, (*Achour et Bedjaoui, 2006*) ont suggérés une relation applicable à tous les profils géométriques. Cette formule a été établie dans le domaine entier de l'écoulement turbulent englobant ainsi les régimes d'écoulement turbulent lisse, de transition et turbulent rugueux. Le débit volume, est donné par :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right] \quad (3.7)$$

Où  $\varepsilon$  est la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et  $R$  est un nombre de *Reynolds* que l'on peut exprimer par la relation :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (3.8)$$

En comparant les deux relations (3.6) et (3.7), nous pouvons déduire que le coefficient  $C$  de *Chézy* s'écrit :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right] \quad (3.9)$$

La relation (3.9) fait apparaitre que le coefficient de résistance  $C$  de *Chézy* dépend de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , du rayon hydraulique  $R_h$  et du nombre de *Reynolds*  $R$ . Ce dernier paramètre, d'après la relation (3.8) est en fonction de la pente  $i$ , de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide et du rayon hydraulique  $R_h$ . En prenant en considération la relation (3.3), le rayon hydraulique  $R_h$  dépend du taux de remplissage  $\eta$  et du diamètre  $D$  de la conduite.

En terme adimensionnel, la relation (3.9) devient :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right] \quad (3.10)$$

D'après (3.8) et (3.3), on a :

$$R = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (3.11)$$

A l'état plein de la conduite où  $\eta = 1$ , et à partir des relations (3.3) et (3.5), la relation (3.8) devient :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} \quad (3.12)$$

La relation (3.11) peut être réécrite :

$$R = R_p [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (3.13)$$

L'indice  $P$  désigne l'état plein de la conduite.

En ayant recours aux relations (3.3) et (3.13), la relation (3.10) s'écrit :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right] \quad (3.14)$$

Aussi, d'après la relation (3.14) le coefficient de résistance  $C$  de Chézy dépend de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ , du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite et du nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite  $R_p$ . Lorsque ces paramètres sont connus, cette relation permet la détermination explicite du coefficient  $C$ .

### III.3.2. Calcul du coefficient de résistance de Chézy par la méthode du modèle rugueux (MMR)

S'il s'agit de calculer le coefficient de résistance  $C$  de Chézy pour dimensionner la conduite, le diamètre  $D$  est exclu des paramètres connus du problème, qui sont le débit volume  $Q$ , le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite, la pente longitudinale  $i$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. La relation (3.14) ne sera plus utile pour le calcul explicite du coefficient  $C$  de Chézy. Dans cette situation, on peut faire appel à la méthode du modèle rugueux (MMR) (Achour, 2014; Achour, 2015a, 2015b, 2015c; Achour et Bedjaoui, 2006; Achour et Bedjaoui, 2012; Achour et Sehtal, 2014) pour déterminer ce coefficient.

Le modèle rugueux de référence définit un coefficient de frottement  $\bar{f} = 1/16$  (Achour, 2007), d'où l'expression d'un coefficient de résistance de Chézy:

$$\bar{C} = \sqrt{8g/\bar{f}} = 8\sqrt{2g} = \text{constante} \quad (3.15)$$

Le modèle rugueux est défini par un diamètre  $\bar{D}$ , écoulant un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  correspondant à un taux de remplissage  $\bar{\eta}$ , sous une pente longitudinale  $\bar{i}$ . Pour la détermination du coefficient de résistance  $C$  de Chézy, caractérisant l'écoulement dans la conduite, on peut admettre les conditions suivantes :  $\bar{D} \neq D$  ;  $\bar{Q} = Q$  ;  $\bar{i} = i$  ;  $\bar{\eta} = \eta$  ;  $\bar{\nu} = \nu$ .

D'après les relations (3.2) et (3.3), la relation (3.6) devient :

$$Q = \frac{1}{8} \sigma(\eta) \varphi(\eta)^{\frac{3}{2}} \sqrt{C^2 D^5 i} \quad (3.16)$$

$$\text{On met : } Q^* = \frac{1}{8} \sigma(\eta) \varphi(\eta)^{\frac{3}{2}} \quad (3.17)$$

$$\text{Donc : } Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (3.18)$$

Selon la relation (3.18), la conductivité relative du modèle rugueux de référence sera :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{\bar{C}^2 \bar{D}^5 i}} \quad (3.19)$$

Ou bien, selon la relation (3.15), la relation (3.19) devient :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128g \bar{D}^5 i}} \quad (3.20)$$

La relation (3.17) s'écrit, pour le modèle rugueux de référence :

$$\frac{Q}{\sqrt{128g \bar{D}^5 i}} = \frac{1}{8} \sigma(\eta) \varphi(\eta)^{\frac{3}{2}} \quad (3.21)$$

Soit :

$$\bar{D} = [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right]^{0,4} \quad (3.22)$$

La relation (3.22) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence sachant que les paramètres  $Q$ ,  $i$  et  $\eta$  sont connus.

Le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (3.11) :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (3.23)$$

Soit :

$$\bar{R} = \bar{R}_P [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (3.24)$$

Dont :

$$\bar{R}_P = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g\bar{D}^3}}{\nu} \quad (3.25)$$

Selon la MMR, le coefficient  $C$  de Chézy est donné comme suit (Achour, 2015):

$$C = \frac{\bar{c}}{\psi^{5/2}} \quad (3.26)$$

Où  $\psi$  est un paramètre adimensionnel déterminé par la relation suivante (Achour et Bedjaoui, 2006; Achour et Bedjaoui, 2012; Achour et Sehtal, 2014):

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{R}_h}{19} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} \quad (3.27)$$

D'après les relations (3.3) et (3.24), la relation (3.27) devient :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75\varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} \quad (3.28)$$

D'après (3.15) et (3.26) :

$$C = \frac{\bar{c}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (3.29)$$

Selon la relation (3.28), la relation (3.29) devient :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75\varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (3.30)$$

La relation (3.30) peut s'écrire en terme adimensionnel comme suit :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -5,343 \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75\varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (3.31)$$

Ainsi, avec les valeurs connues des paramètres  $\varepsilon$ ,  $\bar{D}$ ,  $\eta$  et  $\bar{R}_P$ , la relation (3.30) permet le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.



**Exemple 1**

Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,7$ , le débit  $Q = 0,8\text{m}^3/\text{s}$  et la pente de conduite en forme circulaire  $i = 2.10^{-4}$ , calculer le coefficient de résistance  $C$  de Chézy par la méthode du modèle rugueux.

Avec : La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4}\text{m}$ .

**Solution**

Pour  $\eta = 0,7$ , le calcul se fera par les relations (3.4) et (3.5).

Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , la relation (3.22) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

$$\eta = 0,7; \quad \sigma(0,7) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,7) = 1,982$$

$$\varphi(0,7) = 1 - \frac{2(1 - 2 \times 0,7) \left[ \sqrt{0,7(1 - 0,7)} \right]}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,7)} = 1,185$$

$\eta = 0,7$ , la relation (3.22) donne le diamètre  $\bar{D}$  :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right]^{0,4} = [\sqrt{2} \times 1,982]^{-0,4} [1,185]^{-0,6} \left[ \frac{0,8}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}} \right]^{0,4} \\ &= 1,903\text{m} \end{aligned}$$

Avec la relation (3.25), on peut calculer le nombre de Reynolds dans le modèle rugueux  $\bar{R}_P$  à l'état plein:

$$\bar{R}_P = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times (1,903)^3}}{10^{-6}} = 657783,04$$

Le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy, est déterminé sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème, par la relation (3.30) :

$$\begin{aligned} C &= -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75\varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) = -5,343 \sqrt{9,81} \log \left( \frac{0,0001/1,903}{4,75 \times 1,185} + \right. \\ &\left. \frac{8,5}{657783,04 \times [1,185]^{3/2}} \right) = 78,9 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \end{aligned}$$

### III.3.3. Méthode simplifiée

Le calcul en tout aisance et d'une façon pratique du coefficient  $C$  de *Chézy* par la méthode simplifiée, notamment s'il n'a besoin qu'un nombre limité de données c'est un avantage exclusif pour les conduites et aqueducs fermés. Cette méthode est aussi basée sur la théorie du modèle rugueux, les paramètres donnés nécessaires pour son application sont seulement, le débit volume, la pente de la conduite, la rugosité absolue et la viscosité cinématique du liquide. Ainsi, le calcul du coefficient de *Chézy* effectué par cette méthode et celui effectué par la méthode du modèle rugueux présentée dans le paragraphe (III.3.2.), montre une erreur relative moyenne inférieure à 1,25% et ce après avoir essayé plusieurs exemples de calcul en faisant varier les valeurs des paramètres donnés.

Supposant que  $\eta \neq \bar{\eta}$ , en appliquant la relation (3.22) pour le modèle rugueux, on aura :

$$\bar{Q}^* = \sqrt{2}[\sigma(\bar{\eta})] [\varphi(\bar{\eta})]^{\frac{3}{2}} \quad (3.32)$$

Où  $Q^*$  est la conductivité relative exprimée comme suit, selon la relation :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128 g \bar{D}^5 i}} \quad (3.33)$$

Examinons un modèle rugueux de référence ayant un diamètre  $\bar{D}$  égal à celui de l'état plein de la conduite correspondant à  $\bar{\eta} = 1$  :

A  $\bar{\eta} = 1$ , les relations, (3.4) et (3.5) deviendront :

$$\sigma(\bar{\eta}) = \pi, \quad \varphi(\bar{\eta}) = 1$$

Par conséquent, la relation (3.32) conduit à :  $\bar{Q}^* = \pi\sqrt{2}$ .

Pour cette valeur de conductivité relative, la relation (3.32) indique une seconde valeur du taux de remplissage  $\bar{\eta} \approx 0,852$  différente de  $\bar{\eta} = 1$  (*Achour et Sehtal, 2014*).

Pour  $\bar{\eta} = 0,852$ , le rayon hydraulique  $\bar{R}_h$  est donné d'après la relation (3.3) comme suit:

$$\bar{R}_h = 0,3031\bar{D} \quad (3.34)$$

Pour la conductivité relative  $Q^* = \pi\sqrt{2}$ , est attribué le diamètre  $\bar{D}$  à l'état plein de la conduite suivant :

$$\bar{D} = (\pi\sqrt{2})^{-0,4} \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (3.35)$$

Le calcul du coefficient de *Chézy* se fera facilement en suivant les étapes suivantes:

1. Calculer le diamètre  $\bar{D}$  de l'état plein de la conduite en utilisant la relation (3.35) ;
2. Ainsi, le calcul du rayon hydraulique  $\bar{R}_h$  se fera en utilisant la relation (3.34) ;
3. Ensuite, la relation (3.8) calcule directement le nombre de *Reynolds* du modèle rugueux ;
4. Par conséquent, le facteur de correction adimensionnel  $\psi$  est explicitement déterminé en utilisant la relation (3.27) ;
5. Enfin, le coefficient  $C$  de *Chézy*, est facilement obtenu par la relation (3.29).

### **Exemple 2**

Selon les données de l'exemple 1, dont le débit  $Q = 0,8 \text{ m}^3/\text{s}$ , la pente de la conduite  $i = 2 \cdot 10^{-4}$ , la viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et la rugosité absolue  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ , calculer par la méthode simplifiée le coefficient  $C$  de *Chézy*.

### **Solution**

1. En appliquant la relation (3.35), le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux plein est :

$$\bar{D} = (\pi\sqrt{2})^{-0,4} \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = (\pi\sqrt{2})^{-0,4} \left( \frac{0,8}{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 1,752 \text{ m}$$

2. Le calcul du rayon hydraulique  $\bar{R}_h$  se fera en utilisant la relation (3.34).

$$\bar{R}_h = 0,3031\bar{D} = 0,3031 \times 1,752 = 0,5311 \text{ m}$$

3. Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  du modèle rugueux est calculé à partir de la relation (3.8):

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{R}_h^{-3}}}{\nu} = 32\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times 0,5311^3}}{10^{-6}} = 775852,08$$

4. En utilisant la relation (3.27), le calcul du facteur de correction adimensionnel est comme suit :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{R}_h}{19} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{10^{-4}/0,5311}{19} + \frac{8,5}{775852,08} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} = 0,728$$

5. Le coefficient  $C$  de Chézy est facilement calculé par la relation (3.29) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\sqrt{2 \times 9,81}}{(0,728)^{5/2}} = 78,36 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

La valeur du coefficient de Chézy calculée par la méthode simplifiée ( $C_{\text{Méthode simplifiée}} = 78,36$ ) est inférieure à celle calculée dans l'exemple 1 par la Méthode du modèle rugueux ( $C_{MMR} = 78,9$ ). Le taux d'erreur relative entre ces deux valeurs est environ 0,7 % inférieur au taux donné en début de paragraphe.

### III.3.4. Coefficient de résistance maximal de Chézy

En conduite de forme circulaire, la relation (3.14) exprimait le coefficient  $C$  de Chézy en fonction des variables adimensionnelles : le taux de remplissage  $\eta$ , le nombre de Reynolds à l'état plein  $R_p$  et la rugosité relative  $\varepsilon/D$ . D'après cette relation, l'étude de la variation du coefficient de Chézy en fonction du taux de remplissage, nécessite le traçage des courbes indicatives pour des différentes valeurs de rugosité relative et plusieurs valeurs du nombre de Reynolds. Deux figures ont été réalisées, exposant cette variation pour les deux états de l'écoulement turbulent dans la conduite, l'une pour l'état lisse  $\varepsilon/D = 0$  et la seconde pour l'état rugueux  $\varepsilon/D = 0,05$ .

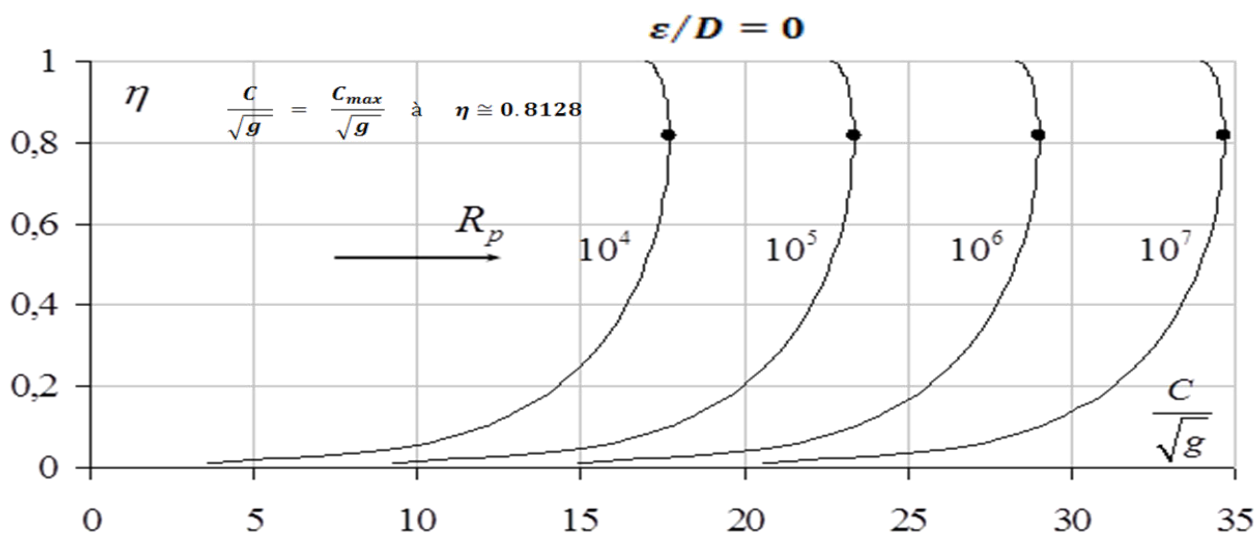


Fig.3.2.1 : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  dans une conduite selon la relation (3.14) pour une valeur fixée de la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0$  dans une conduite de forme circulaire.

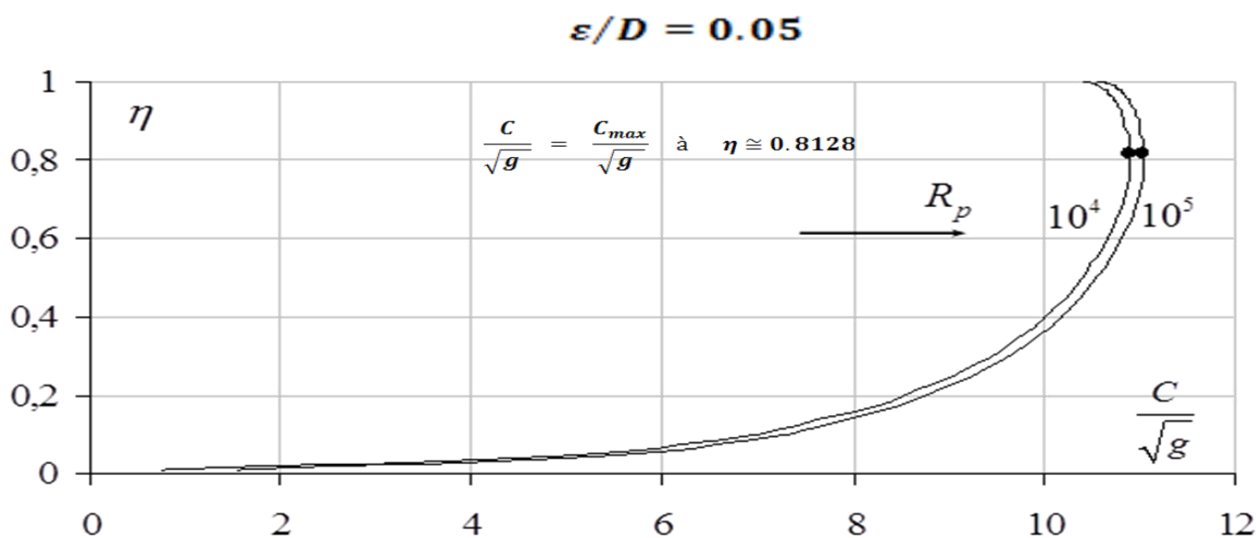


Fig.3.2.2 : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  selon la relation (3.14) pour une valeur fixée de la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0,05$  dans une conduite de forme circulaire.

Les figures 3.2.1 et 3.2.2 exposent la variation  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour plusieurs valeurs du nombre de *Reynolds*  $R_p$  à des valeurs de rugosité relative différentes.  $C/\sqrt{g}$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  jusqu'à une valeur maximale donnée. Au-delà de cette valeur,  $C/\sqrt{g}$  commence à diminuer avec l'augmentation de  $\eta$  jusqu'à l'état plein de la conduite correspondant à  $\eta = 1$ . Nous pouvons remarquer aussi, qu'indépendamment de  $R_p$ , la variation de  $C/\sqrt{g}$  s'effectue de manière rapide quand  $\eta < 0,2$ . Au-delà de la valeur  $\eta = 0,2$ , les courbes subissent une variation lente de  $C/\sqrt{g}$  en fonction de  $\eta$ .

Sur la figure 3.2.2 où la rugosité est forte, la singularité notable est que les courbes se confondent au-delà de la valeur  $10^5$  du nombre de *Reynolds*, ce qui explique que la variation de  $C/\sqrt{g}$  ne dépend que du taux de remplissage  $\eta$  en régime turbulent rugueux.

Particulièrement, pour la conduite de forme circulaire, le coefficient de résistance de *Chézy* atteint un maximum sur les deux figures à la même valeur du taux de remplissage  $\eta \cong 0,8128$ , ce qui revient à dire que cette conséquence ne dépend ni de l'état de la paroi interne de la conduite (rugueux ou lisse), ni de la valeur du nombre de *Reynolds*.

Alors, à  $\eta \cong 0,8128$  :

$$\varphi(0,8128) = 1 - \frac{2(1 - 2 \times 0,8128) \left[ \sqrt{0,8128 (1 - 0,8128)} \right]}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,8128)} = 1,217$$

Avec cette valeur de (0,8128), la relation (3.14) devient :

$$\frac{C_{MAX}}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{4,503} + \frac{7,478}{R_p} \right] \tag{3.36}$$

Soit :

$$C_{MAX} = -4\sqrt{2g} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{4,503} + \frac{7,478}{R_p} \right] \tag{3.37}$$

Cette expression permet la détermination du coefficient de résistance maximal de *Chézy*, à condition que les deux paramètres : la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et le nombre de *Reynolds*  $R_p$  soient connus.

Dans le cas contraire, où le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas une donnée du problème, le coefficient de résistance maximal de Chézy  $C_{MAX}$  peut être déterminé par la relation (3.31), en affectant au taux de remplissage  $\eta$  la valeur 0,8128 .

Ainsi à  $\eta \cong 0,8128$  ,  $\varphi(0,8128) = 1,217$

$$\frac{C_{MAX}}{\sqrt{g}} = -5,343 \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{5,781} + \frac{6,331}{\bar{R}_P} \right) \quad (3.38)$$

Soit :

$$C_{MAX} = -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{5,781} + \frac{6,331}{\bar{R}_P} \right) \quad (3.39)$$

### Exemple 3

Pour une conduite en forme circulaire donnée, on a le taux de remplissage  $\eta = 0,6$ , le débit  $Q = 0,75 \text{ m}^3/\text{s}$  et la pente  $i = 2 \cdot 10^{-4}$ , calculer le coefficient de résistance maximal  $C$  de Chézy.

La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

### Solution

Les paramètres  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , sont connus, la relation (3.22) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

Pour  $\eta = 0,6$  :

$$\sigma(0,6) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,6) = 1,772$$

$$\varphi(0,6) = 1 - \frac{2(1 - 2 \times 0,6) \left[ \sqrt{0,6(1 - 0,6)} \right]}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,6)} = 1,111$$

La relation (3.22) donne le diamètre  $\bar{D}$  :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right]^{0,4} = [\sqrt{2} \times 1,772]^{-0,4} [1,111]^{-0,6} \left[ \frac{0,75}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}} \right]^{0,4} \\ &= 2,016 \text{ m} \end{aligned}$$

Avec la relation (3.25), on peut calculer le nombre de Reynolds  $\bar{R}_P$  à l'état plein:

$$\bar{R}_P = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times (2,016)^3}}{10^{-6}} = 717233,031$$

Le calcul direct du coefficient de résistance maximal à l'écoulement  $C_{MAX}$  de Chézy, est déterminé sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème, par la relation (3.39)

$$C_{MAX} = -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon/D}{5,781} + \frac{6,331}{R_p} \right) = -5,343 \times \sqrt{9,81} \times \log \left( \frac{0,0001/2,016}{5,781} + \frac{6,331}{717233,031} \right) = 79,645 \text{ m}^{0,5}/\text{s}.$$

### III.4. Coefficient de résistance de Manning

#### III.4.1. Expression générale du coefficient de résistance de Manning

L'écoulement uniforme à surface libre est également dirigé par la formule habituelle de Manning qui exprime le débit volume  $Q$  et s'écrit :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (3.40)$$

L'expression générale du coefficient  $n$  de Manning peut être déduite des relations (3.40) et (3.7). En comparant ces deux relations, nous pouvons en effet déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right] \quad (3.41)$$

Le nombre de Reynolds  $R$  est donné par la relation (3.8). La relation (3.41) montre que le coefficient  $n$  de Manning est fonction de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , du nombre de Reynolds  $R$  et du rayon hydraulique  $R_h$ . La dépendance de  $n$  à  $R_h$  conduit ainsi à déduire que  $n$  varie en fonction du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite.

En ayant recours aux relations (3.3) et (3.13) qui expriment respectivement le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de Reynolds  $R$ , la relation (3.41) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{n} = -7,127\sqrt{g} D^{(-1/6)} [\varphi(\eta)]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right] \quad (3.42)$$

Soit le paramètre adimensionnel  $N$ :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (3.43)$$

On peut écrire :

$$N = -7,127 [\varphi(\eta)]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right] \quad (3.44)$$

Le coefficient  $n$  de Manning peut être calculé par l'expression (3.42) ou (3.44) dans le cas où les paramètres  $\eta$ ,  $\varepsilon$ ,  $i$ ,  $D$  et  $v$  sont connus.



### III.4.2. Calcul du coefficient de résistance de *Manning* par la méthode du modèle rugueux (MMR)

La relation (3.42) ou (3.44) permet de calculer le coefficient  $n$  de *Manning* dans le cas où le diamètre  $D$  de la conduite soit une donnée du problème. Dans le cas contraire, où  $D$  n'est pas une donnée, il est possible de calculer la valeur de  $n$ , en faisant appel à la méthode du modèle rugueux (MMR).

D'après les relations (3.6) et (3.40), on peut tirer la relation suivante :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \quad (3.45)$$

Le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de *Manning* tel que :

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{1/6}}{\bar{C}} \quad (3.46)$$

Sachant que :  $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$

La conduite du modèle rugueux est caractérisée par un diamètre  $\bar{D}$  pour une pente longitudinale  $\bar{\tau}$ , écoulant un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  correspondant à un taux de remplissage  $\bar{\eta}$ .

Pour déterminer le coefficient  $n$  de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

- i.  $\bar{D} \neq D$  : Cette condition énonce que le diamètre de la conduite et celui du modèle rugueux de référence sont différents.
- ii.  $\bar{Q} = Q$  : La conduite considérée et celle du modèle rugueux de référence écoulent le même débit volume  $Q$ .
- iii.  $\bar{\tau} = i$  : La conduite considérée et celle du modèle rugueux de référence ont la même pente longitudinale  $i$ .
- iv.  $\bar{\eta} = \eta$  : Le taux de remplissage de la conduite considérée est égal à celui du modèle rugueux de référence.
- v.  $\bar{\nu} = \nu$  : La viscosité cinématique de la conduite considérée et celle du modèle rugueux de référence sont les mêmes.

Le débit volume  $\bar{Q}$  écoulé par le modèle rugueux de référence s'écrit, en vertu de la relation de *Manning* :

$$\bar{Q} = Q = \frac{1}{\bar{n}} \bar{A} \bar{R}_h^{\frac{2}{3}} \sqrt{\bar{\tau}} \quad (3.47)$$

L'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le rayon hydraulique  $R_h$  de l'écoulement dans la conduite considérée sont liés à leurs homologues du modèle rugueux de référence  $\bar{A}$  et  $\bar{R}_h$  par les relations suivantes (Achour, 2007 ; Achour et Sehtal, 2014):

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (3.48)$$

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (3.49)$$

En tenant compte des relations (3.48) et (3.49), la relation (3.40) devient :

$$Q = \frac{1}{n} \psi^{\frac{8}{3}} \bar{A} (\bar{R}_h)^{\frac{2}{3}} \sqrt{i} \quad (3.50)$$

Ainsi, à partir des relations (3.47) et (3.50), nous avons :

$$n = \bar{n} \psi^{\frac{8}{3}} \quad (3.51)$$

D'après les deux relations (3.46) et (3.51) et en tenant compte de  $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$ , on peut déduire que :

$$n = \frac{\frac{1}{\bar{R}_h^6} \psi^{\frac{8}{3}}}{8\sqrt{2g}} \quad (3.52)$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est donné par la relation générale (3.27)

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{R}_h}{19} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}}$$

$\psi$ , est aussi donné par la relation (3.28) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75\varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}}$$

Ainsi, d'après la relation (3.3), on peut écrire :

$$\bar{R}_h = \frac{\bar{D}}{4} \varphi(\eta) \quad (3.53)$$

Donc, la relation (3.52) devient :

$$n = \frac{0,156}{\sqrt{g}} [\bar{D} \varphi(\eta)]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75\varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \quad (3.54)$$

La relation (3.54) exprime le coefficient  $n$  de Manning en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$  et des caractéristiques  $\bar{D}$  et  $\bar{R}_P$  du modèle rugueux de référence. Le diamètre  $\bar{D}$  est donné par la relation (3.22). Ainsi, le nombre de Reynolds  $\bar{R}_P$  est donné par la relation (3.25).

**Exemple 4**

Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,4$  , le débit  $Q = 0,15 \text{ m}^3/\text{s}$  et la pente de conduite en forme circulaire  $i = 2 \cdot 10^{-4}$ , calculer les coefficients de résistance  $C$  et  $n$  de *Chézy* et de *Manning* respectivement par la méthode du modèle rugueux.

La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

**Solution**

Pour  $\eta = 0,4$ , le calcul se fera par les relations (3.4) et (3.5).

Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$  ,  $\eta$  et  $i$  , la relation (3.22) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

$$\eta = 0,4 ; \quad \sigma(0,4) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,4) = 1,369$$

$$\varphi(0,4) = 1 - \frac{2(1 - 2 \times 0,4) \left[ \sqrt{0,4(1 - 0,4)} \right]}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,4)} = 0,857$$

$\eta = 0,4$  , la relation (3.22) donne le diamètre  $\bar{D}$  :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right]^{0,4} = [\sqrt{2} \times 1,369]^{-0,4} [0,857]^{-0,6} \left[ \frac{0,15}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}} \right]^{0,4} \\ &= 1,372 \text{ m} \end{aligned}$$

Avec la relation (3.25), on peut calculer le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_P$  à l'état plein:

$$\bar{R}_P = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times (1,372)^3}}{10^{-6}} = 402675,92$$

Le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy*, est déterminé sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème, par la relation (3.30) :

$$\begin{aligned} C &= -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75\varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) = \\ &= -5,343 \sqrt{9,81} \log \left( \frac{0,0001/1,372}{4,75 \times 0,857} + \frac{8,5}{402675,92 \times [0,857]^{3/2}} \right) = 72,82 \text{ m}^{0,5}/\text{s} \end{aligned}$$

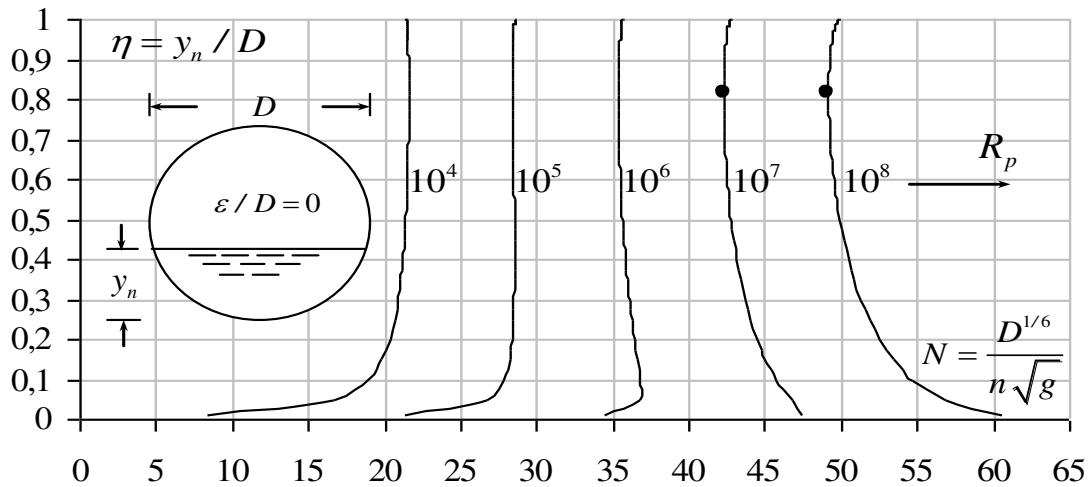
La relation (3.54), permet le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de *Manning*, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$n = \frac{0,156}{\sqrt{g}} [\bar{D} \varphi(\eta)]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{4,75\varphi(\eta)} + \frac{8,5}{R_p[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} =$$

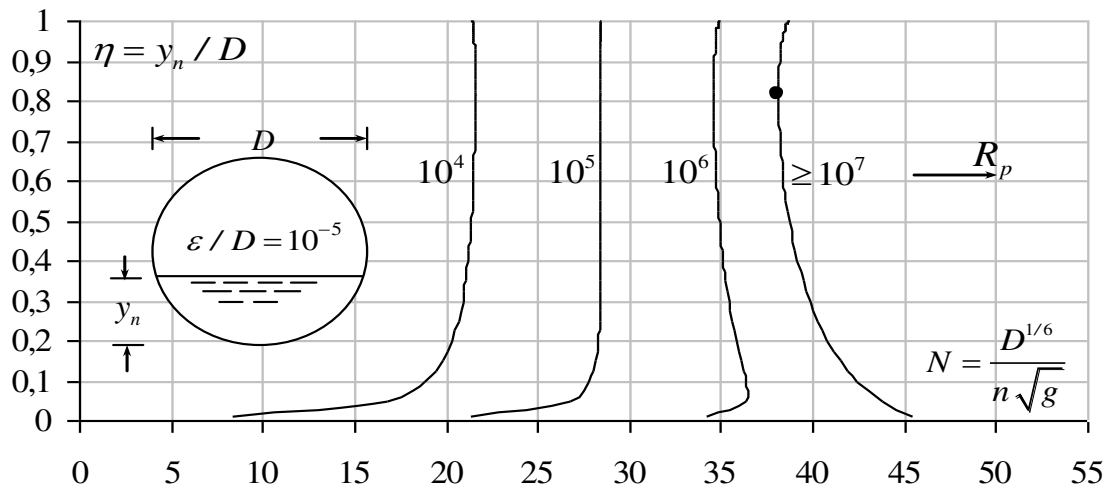
$$\frac{0,156}{\sqrt{9,81}} [1,372 \times 0,857]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{0,0001/1,372}{4,75 \times 0,857} + \frac{8,5}{402675,92 \times [0,857]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} = 0,011 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$$

### III.4.3. Variation du coefficient de Manning

Dans les figures qui suivent, il a été établi des courbes montrant la variation du paramètre adimensionnel  $N$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  pour différentes valeurs de rugosité relative  $\varepsilon/D$  et plusieurs valeurs du nombre de Reynolds à l'état plein  $R_p$ .

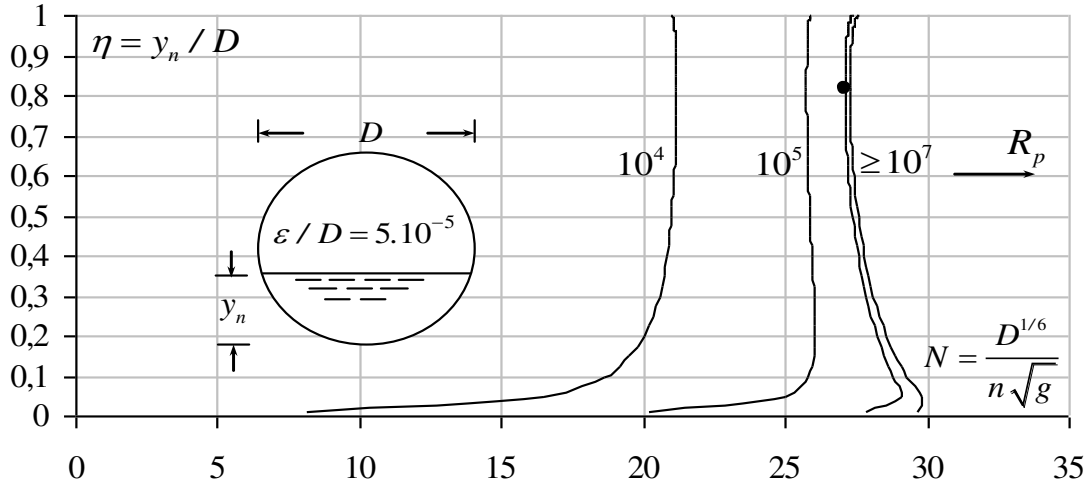


a)

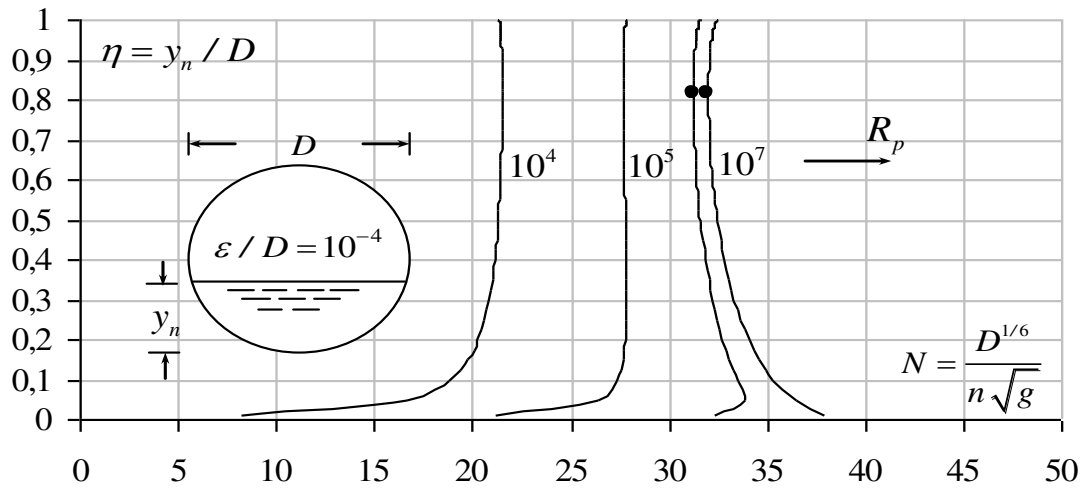


b)

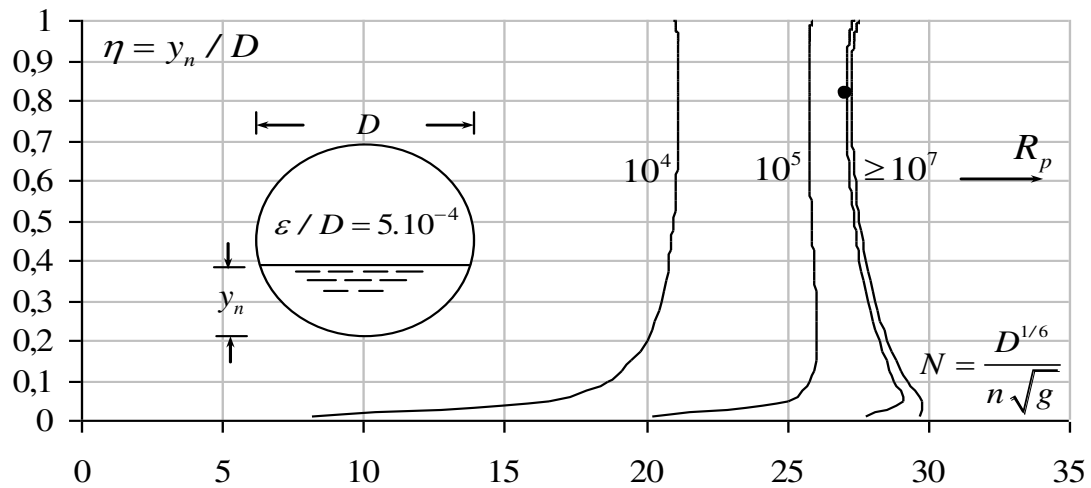
Fig.3.3 : (a) ; (b) : Variation de  $N = D^{1/6} / n \sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon la relation (3.44) pour une conduite de forme circulaire.



c)



d)



e)

Fig.3.3 : (c) ; (d) ; (e) : Variation de  $N = D^{1/6} / n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\epsilon / D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon la relation (3.44) pour une conduite de forme circulaire.

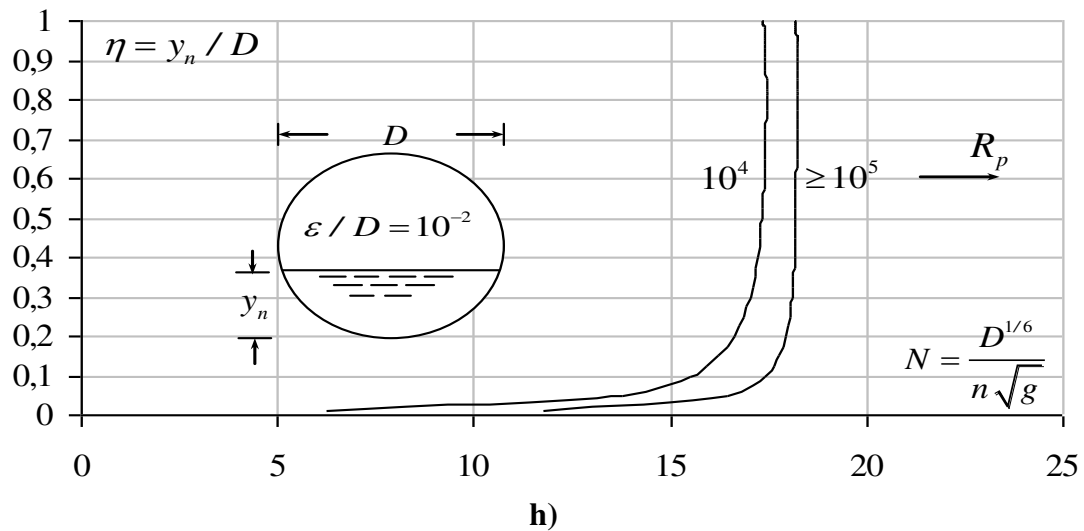
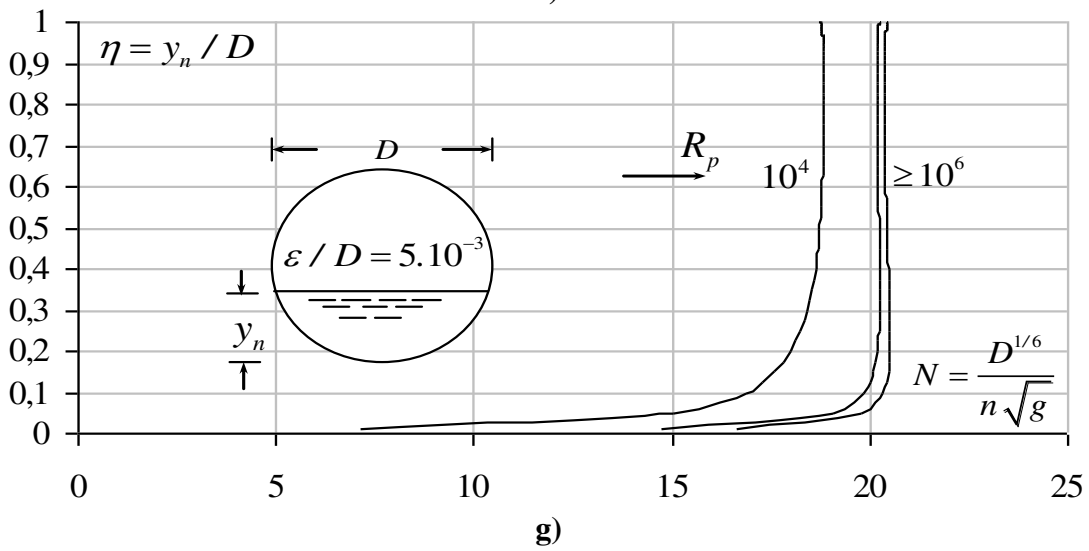
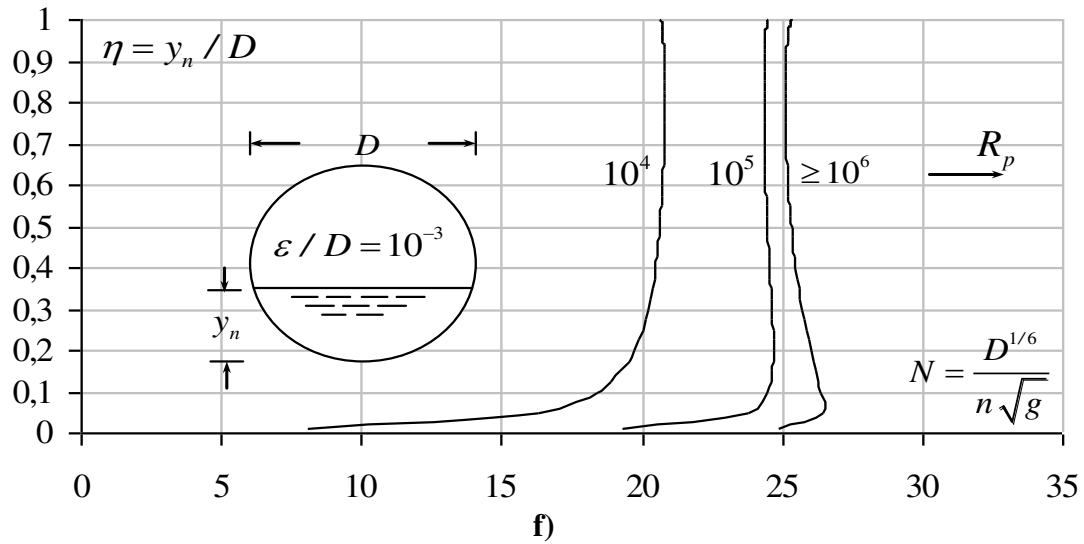


Fig.3.3 : (f) ; (g) ;(h) : Variation de  $N = D^{1/6} / n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\epsilon / D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon la relation (3.44) pour une conduite de forme circulaire.

Les formes des courbes et leurs variations peuvent révéler beaucoup de remarques et commentaires qui sont décrits dans ce qui suit :

- Pour les différentes valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$  et pour des faibles taux de remplissage  $\eta$ , le coefficient  $N$  subit une variation remarquable ;
- Pour  $\eta > 0,1$ , le coefficient  $N$  varie d'une façon très faible et devient constant à l'augmentation de  $\eta$ , notamment pour la valeur  $R_p = 10^6$ . Au-delà de cette dernière valeur, les courbes commencent à être concaves. La concavité de chaque courbe présente une valeur minimale de  $N$  qui n'est pas vraiment remarquable vu l'écart insignifiant entre cette valeur minimale et les autres valeurs que peut prendre le paramètre  $N$ . Dans toutes les courbes établies, le paramètre  $N$  prend ses valeurs minimales au taux de remplissage  $\eta \cong 0,8128$ , valeur pour laquelle le coefficient  $C$  de *Chézy* devient maximal ;
- Pour une valeur fixée de  $\eta$ , le coefficient  $N$  s'accroît avec l'augmentation du nombre de *Reynolds*  $R_p$  et diminue avec l'augmentation de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  ;
- A l'accroissement simultané de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$ , les courbes se rapprochent et tendent à se confondre au-delà d'une valeur bien déterminée de  $R_p$ , notamment, dans l'exemple où la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0,0005$  et  $R_p > 10^7$  et l'exemple dans lequel la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0,005$  et  $R_p > 10^6$ .

### III.5. Conclusion

Cette partie d'étude s'est occupée de la détermination des coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* dans la conduite de forme circulaire.

Ces coefficients ont été déjà cités dans les formules habituelles de *Chézy* et de *Manning-Strickler* dont leurs valeurs étaient prises dans la plupart du temps approximatives ou d'une façon arbitraire.

Partant de l'idée que le coefficient de résistance peut être variable en fonction de plusieurs paramètres régissant l'écoulement dans les conduites artificielles, particulièrement le taux de remplissage. Ce chapitre a été commencé par donner les caractéristiques géométriques et hydrauliques de la conduite de forme circulaire en fonction du taux de remplissage  $\eta$ .

Les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* dans la conduite en forme circulaire ont été exprimés selon le cas étudié par plusieurs manières.

Les deux expressions générales (3.14) et (3.42) sont obtenues respectivement, pour la détermination explicite du coefficient de résistance  $C$  de *Chézy* et  $n$  de *Manning*. Ces formules dépendent de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ , du taux de remplissage  $\eta$  et du nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite  $R_p$ . Ensuite, selon toujours ces deux expressions, une étude de variation du coefficient de *Chézy* et de *Manning* en fonction du taux de remplissage de la conduite est effectuée à travers l'établissement des courbes nécessaires, en affectant des valeurs fixes à la rugosité relative ainsi qu'au nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite. Les courbes ont montré que les deux coefficients de résistance atteignent leurs valeurs extrêmes au taux de remplissage  $\eta \cong 0,8128$  d'où il était possible de tirer les expressions (3.37) et (3.39) de détermination du coefficient maximal de résistance de *Chézy*  $C_{MAX}$ .

Cependant, si le problème est posé autrement, dont il est besoin de dimensionner la conduite en question où le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas un paramètre donné, les relations (3.30) et (3.54) du coefficient de *Chézy* et de *Manning* respectivement, sont obtenues en utilisant la méthode du modèle rugueux (MMR) pour calculer directement ces coefficients en fonction des paramètres  $\varepsilon, \bar{D}, \eta$  et  $\bar{R}_p$ .

Une méthode simplifiée est proposée facilitant encore une fois le calcul du coefficient  $C$  de *Chézy*. Elle est basée sur la (MMR) et a l'avantage de pouvoir utiliser un nombre limité de données qui sont le débit volume  $Q$ , la pente  $i$  de la conduite, la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$ .

Quatre exemples de calcul ont été utilisés pour mettre à l'épreuve l'application des méthodes et expressions issues de cette partie d'étude.



#### **IV. Coefficient de résistance dans une conduite en forme de fer à cheval**

## **IV.1. Introduction**

Dans ce chapitre, le coefficient de résistance de *Chézy*  $C$  et  $n$  de *Manning* sera mis en étude pour la forme géométrique de conduite en forme de fer en cheval. Cette conduite fermée est souvent utilisée comme un ouvrage souterrain pour l'évacuation des eaux d'assainissement. Nous commençons tout d'abord par l'exposition du profil de la conduite et ses caractéristiques géométriques pour pouvoir tirer par la suite ses caractéristiques hydrauliques particulièrement le périmètre mouillé, la section mouillée et le rayon hydraulique.

Le coefficient de résistance de *Chézy* ou de *Manning* peut être déterminé par rapport aux trois cas d'écoulement qui peuvent être distingués selon la profondeur d'eau dans la conduite.

L'étude de ces deux coefficients de résistance dévoile ainsi, deux cas d'étude après avoir comparé les deux expressions de débit en écoulement uniforme de *Chézy* et celle de *Manning* (*Carlier, 1972; Chow, 1973; French, 1986*) avec l'expression de de *Achour et Bedjaoui (2006)* dont le diamètre de la conduite peut être une donnée du problème ou non.

Dans le premier cas, les coefficients de résistance sont exprimés par de relations qui sont nécessaires pour mener une étude de variations en fonction du taux de remplissage dans les domaines turbulent lisse et turbulent rugueux. Cette étude de variation est affectée par des graphes permettant de déterminer le coefficient de résistance maximal en fonction d'un taux de remplissage donnée, notamment pour le coefficient de résistance de *Chézy*.

Dans le deuxième cas, ou le diamètre de la conduite est exclu des paramètres données du problème. Ce dernier peut être résout et les coefficients de résistance sont calculés en faisant appel à la méthode du modèle rugueux (MMR) (*Achour, 2014; Achour, 2015a, 2015b, 2015c; Achour et Bedjaoui, 2006; Achour et Bedjaoui, 2012; Achour et Sehtal, 2014*). La méthode simplifiée est aussi présentée dans ce chapitre pour le calcul du coefficient de résistance de *Chézy*.

## **IV.2. Caractéristiques géométriques de la conduite en forme de fer à cheval**

Le profil de conduite en forme de fer à cheval (Fig. 4.1) en écoulement uniforme, est souvent utilisé comme d'autres profils artificiels pour l'évacuation des eaux d'assainissement. Il est défini géométriquement par les éléments suivants (*Achour, 2007*):

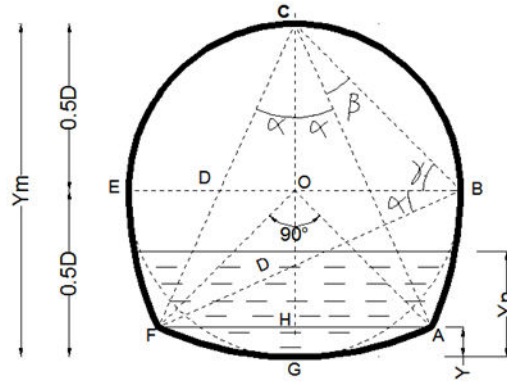


Fig. 4.1: Schéma de profil de conduite en forme de fer à cheval.

- Le tronçon  $\widehat{FA}$  , un arc du cercle de centre C et de diamètre 2D ;
- Le tronçon  $\widehat{FE}$  , un arc du cercle de centre B et de diamètre 2D ;
- Le tronçon  $\widehat{BA}$  , un arc du cercle de centre E et de diamètre 2D ;
- Le demi cercle ECB , de centre o et de diamètre D ;
- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$  ,  $\alpha = 0,42403104 \text{ radian}$  et  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  ;
- $Y = 0.088562171D$  ,  $y_m = D$  .

### IV. 3. Caractéristiques hydrauliques

Dans la conduite (Fig.4.1), trois cas d'études peuvent se présenter selon la position de la profondeur normale  $y_n$  . Les caractéristiques hydrauliques pour les trois zones d'écoulement, à savoir : le périmètre mouillé  $P$  , l'aire de la section mouillée  $A$  et le rayon hydraulique  $R_h$  , s'expriment en fonction du taux de remplissage  $\eta = y_n/D$  .

❖ **Cas 01 :  $\eta \leq 0,088562171$**

$$P = 2D \cdot \sigma(\eta) \tag{4.1}$$

$$A = D^2 \sigma(\eta) \varphi(\eta) \tag{4.2}$$

$$R_h = \frac{D}{2} \varphi(\eta) \tag{4.3}$$

$$\text{Où : } \sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - \eta) \tag{4.4}$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{(1-\eta)\sqrt{\eta(2-\eta)}}{\cos^{-1}(1-\eta)} \tag{4.5}$$

❖ **Cas 02** :  $0,088562171 \leq \eta \leq 0,5$

$$P = \rho(\eta)D \quad (4.6)$$

$$A = D^2 \chi(\eta) \quad (4.7)$$

$$R_h = D \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \quad (4.8)$$

Où :

$$\rho(\eta) = 1,696124162 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} - \eta \right) \quad (4.9)$$

$$\chi(\eta) = 0,9366242523 - \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} - \eta \right) - \left( \frac{1}{2} - \eta \right) \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{1}{2} - \eta \right)^2} \right] - \eta \quad (4.10)$$

❖ **Cas 03** :  $0,5 \leq \eta \leq 1$

$$P = D \omega(\eta) \quad (4.11)$$

$$A = D^2 \lambda(\eta) \quad (4.12)$$

$$R_h = \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} D \quad (4.13)$$

Où :

$$\omega(\eta) = 3,26692049 - \cos^{-1}(2\eta - 1) \quad (4.14)$$

$$\lambda(\eta) = 0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left( \eta - \frac{1}{2} \right) \left[ \sqrt{\eta(1 - \eta)} \right] \quad (4.15)$$

#### IV. 4. Coefficient de résistance de Chézy

##### IV.4.1. Expression générale du coefficient de résistance de Chézy

L'écoulement uniforme à surface libre est souvent régi par les formules habituelles telles que celle de Chézy qui exprime le débit volume  $Q$  et s'écrit :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} \quad (4.16)$$

Le dimensionnement de la conduite en écoulement à surface libre requiert que le débit volume  $Q$ , la pente de la conduite  $i$  dans le sens de l'écoulement, le taux de remplissage, la rugosité absolue  $\varepsilon$  de la paroi interne de la conduite, et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide soient connus. Cependant, le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  dans la formule (4.16) varie en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , ce qui mène à dire que ce coefficient n'est pas une donnée connue du problème et sa détermination sera l'objectif de notre étude.

La relation du débit volume de *Achour et Bedjaoui (2006)* valable dans tous les profils géométriques et établie dans tous les régimes de l'écoulement turbulent (turbulent lisse, de transition et turbulent rugueux) peut aider à montrer que le coefficient  $C$  de *Chézy* est variable en fonction de tous les paramètres de l'écoulement.

Le débit volume  $Q$ , selon *Achour et Bedjaoui (2006)*, est donné par :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right] \quad (4.17)$$

Où :  $\varepsilon$ , la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite ;

$R$ , nombre de *Reynolds* exprimé par la relation :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (4.18)$$

En comparant les deux relations (4.16) et (4.17), nous pouvons déduire que le coefficient  $C$  de *Chézy* s'écrit :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right] \quad (4.19)$$

La relation (4.19) fait apparaître que le coefficient de résistance  $C$  de *Chézy* dépend de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , du rayon hydraulique  $R_h$  et du nombre de *Reynolds*  $R$ . Ce dernier paramètre, d'après la relation (4.18) est en fonction de la pente  $i$ , de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide et du rayon hydraulique  $R_h$ . En prenant en considération les relations (4.3), (4.8) et (4.13), le rayon hydraulique  $R_h$  dépend du taux de remplissage  $\eta$  et du diamètre  $D$  de la conduite.

En terme adimensionnel, la relation (4.19) devient :

$$\frac{c}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right] \quad (4.20)$$

❖ **Cas 01 :**  $\eta \leq 0,088562171$

D'après (4.18) et (4.3), on a :

$$R = 16 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (4.21)$$

A l'état plein de la conduite où  $\eta = 1$ , et à partir des relations (4.18) et (4.13), on peut écrire :

$$R_p = 5,788 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (4.22)$$

L'indice  $P$  désigne l'état plein de la conduite.

Donc, on peut écrire aussi d'après les relations (4.21) et (4.22) :

$$R = 2,764 R_p [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (4.23)$$

D'après les deux relations (4.3) et (4.23), la relation (4.20) peut être réécrite de la manière suivante:

$$\frac{c}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{7,4\varphi(\eta)} + \frac{3,632}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right] \quad (4.24)$$

❖ **Cas 02 :**  $0,088562171 \leq \eta \leq 0,5$

D'après les relations (4.18) et (4.8), on a :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2} \quad (4.25)$$

Donc, on peut écrire aussi d'après les deux expressions (4.25) et (4.22) :

$$R = 7,819 R_p \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2} \quad (4.26)$$

D'après (4.8) et (4.26), la relation (4.20) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{14,8 \frac{\lambda(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,284}{R_p \cdot \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (4.27)$$

❖ **Cas 03** :  $0,5 \leq \eta \leq 1$

D'après (4.18) et (4.13), on a :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g}iD^3}{\nu} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2} \quad (4.28)$$

Donc, on peut écrire aussi d'après (4.28) et (4.22) :

$$R = 7,819 R_p \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2} \quad (4.29)$$

D'après (4.13) et (4.29), la relation (4.20) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{14,8 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{1,284}{R_p \cdot \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (4.30)$$

Aussi, d'après les relations (4.24), (4.27) et (4.30) le coefficient de résistance  $C$  de Chézy dépend de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ , du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite et du nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite  $R_p$ . Lorsque ces paramètres sont connus, les relations (4.24), (4.27) et (4.30) permettent la détermination explicite du coefficient  $C$ .

#### **IV.4.2. Calcul du coefficient de résistance de Chézy par la méthode du modèle rugueux (MMR)**

S'il s'agit de calculer le coefficient de résistance  $C$  de Chézy, le diamètre  $D$  peut être exclu des paramètres connus du problème, qui sont le débit volume  $Q$ , le taux de remplissage  $\eta$  de la

conduite, la pente longitudinale  $i$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Les relations (4.24), (4.27) et (4.30) ne seront plus utiles pour le calcul explicite du coefficient  $C$  de *Chézy*. Dans cette situation, on peut faire appel à la méthode du modèle rugueux (MMR) pour déterminer ce coefficient.

Le modèle rugueux de référence définit un coefficient de frottement  $\bar{f} = 1/16$  (*Achour, 2007*), d'où l'expression d'un coefficient de résistance de *Chézy* suivante :

$$\bar{C} = \sqrt{8g/\bar{f}} = 8\sqrt{2g} = \text{constante} \quad (4.31)$$

Le modèle rugueux est défini par un diamètre  $\bar{D}$ , écoulant un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  correspondant à un taux de remplissage  $\bar{\eta}$ , sous une pente longitudinale  $\bar{i}$ . Pour la détermination du coefficient de résistance  $C$  de *Chézy*, caractérisant l'écoulement dans la conduite, on peut admettre les conditions suivantes :  $\bar{D} \neq D$  ;  $\bar{Q} = Q$  ;  $\bar{i} = i$  ;  $\bar{\eta} = \eta$  ;  $\bar{\nu} = \nu$ .

❖ **Cas 01 :  $\eta \leq 0,088562171$**

D'après les relations (4.2) et (4.3), la relation (4.16) devient :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma(\eta) \varphi(\eta)^{\frac{3}{2}} \sqrt{C^2 D^5 i} \quad (4.32)$$

$$\text{On met : } Q^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma(\eta) \varphi(\eta)^{\frac{3}{2}} \quad (4.33)$$

$$\text{Donc : } Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (4.34)$$

Selon la relation (4.34), la conductivité relative du modèle rugueux de référence sera :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (4.35)$$

Ou bien, selon la relation (4.31), la relation (4.35) devient :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128g\bar{D}^5 i}} \quad (4.36)$$

La relation (4.33) s'écrit, pour le modèle rugueux de référence :

$$\frac{Q}{\sqrt{128g\bar{D}^5 i}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{\frac{3}{2}} \quad (4.37)$$



Soit :

$$\bar{D} = \frac{1}{2} [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right]^{0,4} \quad (4.38)$$

La relation (4.38) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence sachant que les paramètres  $Q, i$  et  $\eta$  sont connus.

Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (4.21) :

$$\bar{R} = 16 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (4.39)$$

Soit :

$$\bar{R} = 2,764 \bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (4.40)$$

Dont :

$$\bar{R}_p = 5,788 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} \quad (4.41)$$

Selon la MMR, le coefficient  $C$  de Chézy est donné comme suit (*Achour, 2015*):

$$C = \frac{\bar{C}}{\psi^{5/2}} \quad (4.42)$$

Où  $\psi$  est un paramètre adimensionnel déterminé par la relation suivante (*Achour et Bedjaoui, 2006; Achour et Bedjaoui, 2012; Achour et Sehtal, 2014*):

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{R}_h}{19} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} \quad (4.43)$$

D'après les relations (4.3) et (4.40), la relation (4.43) devient :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{9,5\varphi(\eta)} + \frac{3,075}{\bar{R}_p[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} \quad (4.44)$$

D'après (4.31) et (4.42) :

$$C = \frac{\bar{c}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (4.45)$$

Selon la relation (4.44), la relation (4.45) devient :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{9,5\varphi(\eta)} + \frac{3,075}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (4.46)$$

La relation (4.46) peut s'écrire en terme adimensionnel comme suit :

$$\frac{c}{\sqrt{g}} = -5,343 \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{9,5\varphi(\eta)} + \frac{3,075}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (4.47)$$

❖ **Cas 02 :  $0,088562171 \leq \eta \leq 0,5$**

D'après les relations (4.7) et (4.8), la relation (4.16) devient :

$$Q = [\chi(\eta)]^{\frac{3}{2}} [\rho(\eta)]^{-\frac{1}{2}} \sqrt{C^2 D^5 i} \quad (4.48)$$

$$\text{On met : } Q^* = [\chi(\eta)]^{\frac{3}{2}} [\rho(\eta)]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.49)$$

$$\text{Donc : } Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (4.50)$$

Selon la relation (4.50), la conductivité relative du modèle rugueux de référence est alors :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{\bar{c}^2 \bar{D}^5 i}} \quad (4.51)$$

Ou bien, selon la relation (4.31), la relation (4.51) devient :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128g\bar{D}^5 i}} \quad (4.52)$$

La relation (4.49) s'écrit, pour le modèle rugueux de référence :

$$\frac{Q}{\sqrt{128g\bar{D}^5 i}} = [\chi(\eta)]^{\frac{3}{2}} [\rho(\eta)]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.53)$$

Soit :

$$\bar{D} = 0,379[\rho(\eta)]^{0,2} [\chi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right]^{0,4} \quad (4.54)$$

La relation (4.54) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence sachant que les paramètres  $Q$ ,  $i$  et  $\eta$  sont connus.

Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en caractère de la relation (4.25) :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2} \quad (4.55)$$

Soit :

$$\bar{R} = 7,819\bar{R}_p \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2} \quad (4.56)$$

Dont :

$$\bar{R}_p = 5,788 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu}$$

D'après les relations (4.8) et (4.56), la relation (4.43) devient :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_p \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} \quad (4.57)$$

Selon la relation (4.57), la relation (4.45) devient :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_p \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \quad (4.58)$$

Sinon, en terme adimensionnel :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -5,343 \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_p \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \quad (4.59)$$

❖ **Cas 03** :  $0,5 \leq \eta \leq 1$

D'après les relations (4.12) et (4.13), la relation (4.16) devient :

$$Q = [\lambda(\eta)]^{\frac{3}{2}} [\omega(\eta)]^{-\frac{1}{2}} \sqrt{C^2 D^5 i} \quad (4.60)$$

$$\text{On met : } Q^* = [\lambda(\eta)]^{\frac{3}{2}} [\omega(\eta)]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.61)$$

$$\text{Donc : } Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (4.62)$$

Selon la relation (4.62), la conductivité relative du modèle rugueux de référence est alors :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (4.63)$$

Ou bien, selon la relation (4.31), la relation (4.63) devient :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gD^5i}} \quad (4.64)$$

La relation (4.61) s'écrit, pour le modèle rugueux de référence :

$$\frac{Q}{\sqrt{128gD^5i}} = [\lambda(\eta)]^{\frac{3}{2}} [\omega(\eta)]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.65)$$

Soit :

$$\bar{D} = 0,379[\omega(\eta)]^{0,2} [\lambda(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right]^{0,4} \quad (4.66)$$

La relation (4.66) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence sachant que les paramètres  $Q$ ,  $i$  et  $\eta$  sont connus.

Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en caractère de la relation (4.28) :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2} \quad (4.67)$$

Soit :

$$\bar{R} = 7,819 \bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2} \quad (4.68)$$

Dont :

$$\bar{R}_P = 5,788 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu}$$

D'après les relations (4.13) et (4.68), la relation (4.43) devient :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} \quad (4.69)$$

Selon la relation (4.69), la relation (4.45) devient :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \quad (4.70)$$

La relation (4.70) peut s'écrire en terme adimensionnel comme suit :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -5,343 \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \quad (4.71)$$

### Exemple 1

Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,7$ , le débit  $Q = 0,8 \text{ m}^3/\text{s}$  et la pente de conduite en forme de fer à cheval  $i = 2 \cdot 10^{-4}$ , calculer le coefficient de résistance  $C$  de Chézy par la méthode du modèle rugueux.

Avec : La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

### Solution

Pour  $\eta = 0,7$ , le calcul se fera par les relations (4.14) et (4.15).

Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , la relation (4.66) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

$$\eta = 0,7; \quad \omega(0,7) = 3,26692049 - \cos^{-1}(2 \times 0,7 - 1) = 2,1076$$

$$\lambda(0,7) = 0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2 \times 0,7 - 1) + \left(0,7 - \frac{1}{2}\right) \left[\sqrt{0,7(1 - 0,7)}\right] = 0,6312$$

$\eta = 0,7$ , La relation (4.66) donne le diamètre  $\bar{D}$  :

$$\bar{D} = 0,379[\omega(\eta)]^{0,2} [\lambda(\eta)]^{-0,6} \left[\frac{Q}{\sqrt{gi}}\right]^{0,4} = 0,379[2,1076]^{0,2} [0,6312]^{-0,6} \left[\frac{0,8}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}}\right]^{0,4} = 1,8447m$$

Avec la relation (4.41), on peut calculer le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_P$  à l'état plein:

$$\bar{R}_P = 5,788 \times \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 5,788 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times (1,84472623)^3}}{10^{-6}} = 642356,2$$

Le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy*, est déterminé sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème, par la relation (4.70) :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_P \left[\frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}\right]^{3/2}} \right) \right] = -5,343 \sqrt{9,81} \left[ \log \left( \frac{0,0001/1,8447}{19 \times 0,299460} + \frac{1,087}{642356,2 \times 0,299460^{3/2}} \right) \right] = 78,69 m^{0,5}/s$$

#### IV.4.3. Méthode simplifiée

Dans cette partie, une méthode simplifiée, basée sur la théorie du modèle rugueux, est présentée pour permettre la détermination facile du coefficient  $C$  de *Chézy* en disposant d'un nombre de données limité par rapport à la méthode déjà exposée en paragraphe (IV.4.2.). A cet effet, les paramètres donnés nécessaires sont seulement, le débit volume, la pente de la conduite, la rugosité absolue et la viscosité cinématique du liquide. Ainsi, le calcul du coefficient de *Chézy* effectué par cette méthode et celui effectué par la méthode du modèle rugueux présentée dans le

paragraphe (IV.4.2.), montre, une erreur relative moyenne inférieure à 2,5% et ce après avoir essayé plusieurs exemples de calcul en faisant varier les valeurs des paramètres donnés.

Supposons que  $\eta \neq \bar{\eta}$ , en appliquant la relation (4.61) du cas n°03 pour le modèle rugueux, on aura :

$$\bar{Q}^* = [\lambda(\bar{\eta})]^{\frac{3}{2}} [\omega(\bar{\eta})]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.72)$$

Où  $\bar{Q}^*$  est la conductivité relative exprimée comme suit, selon la relation (4.64):

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128 g \bar{D}^5 i}} \quad (4.73)$$

Examinons un modèle rugueux de référence ayant un diamètre  $\bar{D}$  égal à celui à l'état plein de la conduite correspondant à  $\bar{\eta} = 1$  :

A  $\bar{\eta} = 1$ , les relations, (4.14) et (4.15) deviendront :

$$\omega(\bar{\eta}) = 3,26692049, \quad \lambda(\bar{\eta}) = 0,82932333$$

Par conséquent, la relation (4.72) conduit à :  $\bar{Q}^* = 0,133 \pi$ .

Pour cette valeur de conductivité relative, la relation (4.72) indique une seconde valeur du taux de remplissage  $\bar{\eta} \approx 0,8505$  différente de  $\bar{\eta} = 1$ .

Le rayon hydraulique  $\bar{R}_h$  est donné d'après la relation (4.13), à  $\bar{\eta} = 0,8505$ , comme suit:

$$\bar{R}_h = 0,3056 \bar{D} \quad (4.74)$$

Pour la conductivité relative  $\bar{Q}^* = 0,133 \pi$ , est attribué le diamètre  $\bar{D}$  à l'état plein de la conduite suivant :

$$\bar{D} = (0,133 \pi)^{-0,4} \left( \frac{Q}{\sqrt{128 g i}} \right)^{0,4} \quad (4.75)$$

Le calcul du coefficient de *Chézy* se fera facilement en suivant ces étapes :

1. Calculer le diamètre  $\bar{D}$  à l'état plein de la conduite en utilisant la relation (4.75) ;
2. Ainsi, le calcul du rayon hydraulique  $\bar{R}_h$  se fera en utilisant la relation (4.74) ;

3. Ensuite, la relation (4.18) calcule directement le nombre de *Reynolds* du modèle rugueux;
4. Par conséquent, le facteur de correction adimensionnel  $\psi$  est explicitement déterminé en utilisant la relation (4.43) ;
5. Enfin, le coefficient  $C$  de *Chézy*, est facilement obtenu par la relation (4.45).

**Exemple 2**

Calculer par la méthode simplifiée le coefficient  $C$  de *Chézy*, selon les données de l'exemple 1, dont le débit  $Q = 0,8 \text{ m}^3/\text{s}$ , la pente de la conduite  $i = 2 \cdot 10^{-4}$ , la viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et la rugosité absolue  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

**Solution**

1. En appliquant la relation (4.75), le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux plein est :

$$\bar{D} = (0,133 \pi)^{-0,4} \left( \frac{Q}{\sqrt{128 g i}} \right)^{0,4} = (0,133 \pi)^{-0,4} \left( \frac{0,8}{\sqrt{128 \times 9,81 \times 2 \times 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 1,709 \text{ m}$$

2. Le calcul du rayon hydraulique  $\bar{R}_h$  se fera en utilisant la relation (4.74).

$$\bar{R}_h = 0,3056 \bar{D} = 0,3056 \times 1,709 = 0,5224 \text{ m}$$

3. Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  du modèle rugueux est calculé à partir de la relation (4.18):

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{g i \bar{R}_h^3}}{\nu} = 32\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times 0,5224^3}}{10^{-6}} = 756866,41$$

4. En utilisant la relation (4.43), le calcul du facteur de correction adimensionnel est comme suit :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{R}_h}{19} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{10^{-4} / 0,5224}{19} + \frac{8,5}{756866,41} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} = 0,7287$$

5. Le coefficient  $C$  de *Chézy* est facilement calculé par la relation (4.45) :



$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\sqrt{2 \times 9.81}}{(0,7287)^{5/2}} = 78,17 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

La valeur du coefficient de Chézy calculée par la méthode simplifiée ( $C_{\text{Méthode simplifiée}} = 78,17$ ) est inférieure à celle calculée dans l'exemple 1 par la Méthode du modèle rugueux ( $C_{MMR} = 78,69$ ). Le taux d'erreur relative entre ces deux valeurs est environ de 0,7 % inférieur au taux donné en début de paragraphe.

#### IV.4.4. Coefficient de résistance maximal de Chézy

Les relations (4.24), (4.27) et (4.30) expriment le coefficient  $C$  de Chézy en fonction des variables adimensionnelles : le taux de remplissage  $\eta$ , le nombre de Reynolds à l'état plein  $R_p$  et la rugosité relative  $\varepsilon/D$ . D'après ces relations, l'étude de la variation du coefficient de Chézy en fonction du taux de remplissage, nécessite le traçage des courbes indicatives pour des différentes valeurs de rugosité relative et plusieurs valeurs du nombre de Reynolds. Deux figures ont été réalisées, exposant cette variation pour les deux états de l'écoulement turbulent dans la conduite, l'une pour l'état lisse  $\varepsilon/D = 0$  et la seconde pour l'état rugueux  $\varepsilon/D = 0,05$ .

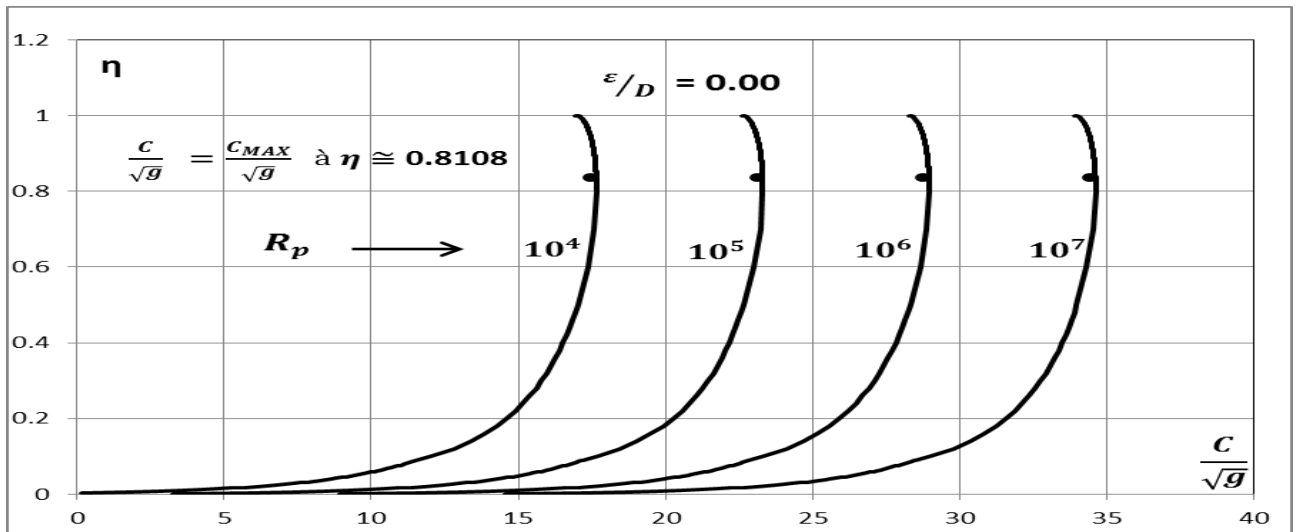


Fig.4.2.1 : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  selon les relations (4.24) ; (4.27) et (4.30) pour une valeur fixée de la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  dans une conduite en forme de fer à cheval.

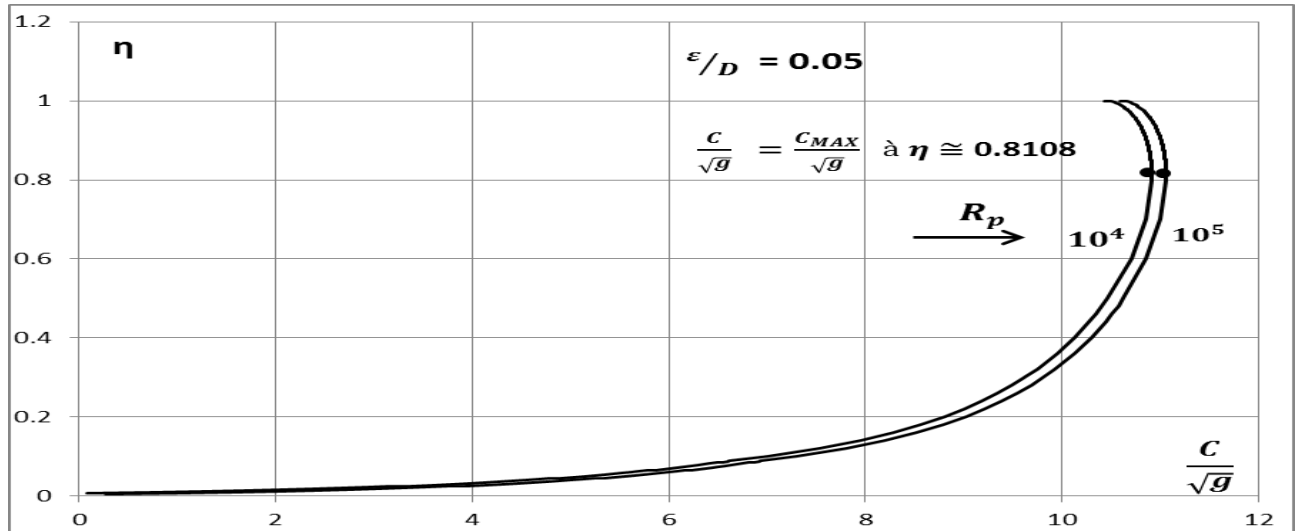


Fig.4.2.2 : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  selon les relations (4.24) ; (4.27) et (4.30) pour une valeur fixée de la rugosité relative  $\epsilon/D = 0,05$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  dans une conduite en forme de fer à cheval.

Sur les deux figures 4.2.1 et 4.2.2, nous pouvons remarquer des courbes indiquant la variation de  $C/\sqrt{g}$  en abscisse en fonction de  $\eta$  en ordonnée, pour des valeurs de nombre de Reynolds fixées ( $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$  et  $10^7$ ). Dans ces courbes,  $C/\sqrt{g}$  subit un accroissement suite à l'augmentation du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite. Cet accroissement est remarquablement rapide dans une première étape dont le taux de remplissage varie dans l'intervalle  $0 < \eta < 0,3$ . Dans une deuxième étape, où  $\eta > 0,3$  l'accroissement devient très lent jusqu'à ce que le  $C/\sqrt{g}$  prend une valeur maximale pour un même taux de remplissage  $\eta$  dans toutes les courbes égal à 0,8108. Ensuite, à cause de la diminution de  $C/\sqrt{g}$ , un changement de direction des courbes se montre avec l'accroissement toujours du taux de remplissage jusqu'à l'état plein de la conduite où  $\eta = 1$ . La singularité notable dans la figure 4.2.2, est que les courbes se confondent au-delà de la valeur  $10^5$  du nombre de Reynolds, ce qui explique que la variation de  $C/\sqrt{g}$  ne dépend que du taux de remplissage  $\eta$  en régime turbulent rugueux.

Particulièrement, pour la conduite en forme de fer à cheval, le coefficient de résistance de Chézy atteint un maximum sur les deux figures à la même valeur du taux de remplissage  $\eta \cong 0,8108$ , ce qui revient à dire que cette conséquence ne dépend ni de l'état de la paroi interne de la conduite (rugueux ou lisse), ni de la valeur du nombre de Reynolds.

A cet effet, à  $\eta \cong 0,8108$ ,

$$\frac{c}{\sqrt{g}} = \frac{c_{max}}{\sqrt{g}}$$

$$\text{Et : } \omega(\eta) = 3,26692049 - \cos^{-1}(2 \times 0,8108 - 1) = 2,36691$$

$$\lambda(\eta) =$$

$$0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2 \times 0,8108 - 1) + \left(0,8108 - \frac{1}{2}\right) \left[\sqrt{0,8108(1 - 0,8108)}\right] = 0,72605$$

Ces deux valeurs de  $\omega(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  mènent à écrire la relation (4.30) de la manière suivante:

$$\frac{C_{MAX}}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{4,54} + \frac{7,558}{R_P} \right] \quad (4.76)$$

Soit :

$$C_{MAX} = -4\sqrt{2g} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{4,54} + \frac{7,558}{R_P} \right] \quad (4.77)$$

Cette dernière relation permet la détermination du coefficient de résistance maximal de Chézy, à condition que les deux paramètres de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et le nombre de Reynolds  $R_P$  soient connus.

Dans le cas contraire, où le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas une donnée du problème, le coefficient de résistance maximal de Chézy  $C_{MAX}$  peut être déterminé par la relation (4.71), en affectant au taux de remplissage  $\eta$  la valeur 0,8108.

$$\text{Dont : } \omega(\eta) = 2,36691, \lambda(\eta) = 0,72605.$$

Donc, la relation (4.71) devient,

$$\frac{C_{MAX}}{\sqrt{g}} = -5,343 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{5,828} + \frac{6,398}{R_P} \right) \quad (4.78)$$

Soit :

$$C_{MAX} = -5,343\sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon/D}{5,828} + \frac{6,398}{R_P} \right) \quad (4.79)$$

Cette expression permet le calcul du coefficient de résistance maximal de *Chézy* sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

Un exemple d'application est suggéré pour illustrer le dernier cas traité, décrivant les démarches en détail pour le calcul de ce coefficient.

**Exemple 3**

Calculer le coefficient de résistance maximal  $C$  de *Chézy* pour une conduite en forme de fer à cheval d'un taux de remplissage  $\eta = 0,6$ , d'une pente  $i = 2 \cdot 10^{-4}$  et écoulant le débit  $Q = 0,75 \text{ m}^3/\text{s}$ .

La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

**Solution**

Pour  $\eta = 0,6$ , le calcul se fera par les relations du 3<sup>ème</sup> cas d'écoulement. Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , la relation (4.66) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

Pour  $\eta = 0,6$  :

$$\omega(\eta) = 3,26692049 - \cos^{-1}(2\eta - 1)$$

$$= 3,26692049 - \cos^{-1}(2 \times 0,6 - 1) = 1,8975$$

$$\lambda(\eta) = 0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2}\right) \left[\sqrt{\eta(1 - \eta)}\right]$$

$$= 0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2 \times 0,6 - 1) + \left(0,6 - \frac{1}{2}\right) \left[\sqrt{0,6(1 - 0,6)}\right] = 0,53595$$

La relation (4.66) donne le diamètre  $\bar{D}$  :

$$\bar{D} = 0,379[\omega(\eta)]^{0,2} [\lambda(\eta)]^{-0,6} \left[\frac{Q}{\sqrt{gi}}\right]^{0,4} =$$

$$0,379[1,8975]^{0,2} [0,53595]^{-0,6} \left[\frac{0,75}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}}\right]^{0,4} = 1,9417887 \text{ m}$$

Avec la relation (4.41), on peut calculer le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_P$  à l'état plein :

$$\bar{R}_p = 5,788 \times \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 5,788 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times (1,9417887)^3}}{10^{-6}} = 693714,829$$

Le calcul direct du coefficient de résistance maximal à l'écoulement  $C_{MAX}$  de *Chézy* est déterminé par la relation (4.79), sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème :

$$C_{MAX} = -5,343\sqrt{g} \log\left(\frac{\varepsilon/\bar{D}}{5,828} + \frac{6,398}{\bar{R}_p}\right) = -5,343\sqrt{g} \log\left(\frac{0,0001/1,9417887}{5,828} + \frac{6,398}{693714,829}\right)$$

$$= 79.378 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

#### IV.5. Coefficient de résistance de *Manning*

##### IV.5.1. Expression générale du coefficient de résistance de *Manning*

L'écoulement uniforme à surface libre est également régi par la formule habituelle de *Manning* qui exprime le débit volume  $Q$  et s'écrit :

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (4.80)$$

L'expression générale du coefficient  $n$  de *Manning* peut être déduite des relations (4.80) et (4.17). En comparant ces deux relations, nous pouvons en effet déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log\left[\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right] \quad (4.81)$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  est donné par la relation (4.18). La relation (4.81) montre que le coefficient  $n$  de *Manning* est fonction de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , du nombre de *Reynolds*  $R$  et du rayon hydraulique  $R_h$ . La dépendance de  $n$  à  $R_h$  conduit ainsi à déduire que  $n$  varie en fonction du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite.

Cette dépendance peut être étudiée pour les trois cas du taux de remplissage déjà exposés auparavant.

##### ❖ Cas 01 : $\eta \leq 0,088562171$

En ayant recours aux relations (4.3) et (4.23) qui expriment respectivement le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de *Reynolds*  $R$ , la relation (4.81) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{n} = -6,3496\sqrt{g} D^{(-1/6)} [\varphi(\eta)]^{(-1/6)} \log\left[\frac{\varepsilon/D}{7,4\varphi(\eta)} + \frac{3,632}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}}\right] \quad (4.82)$$

En posant comme suit le paramètre adimensionnel  $N$ :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (4.83)$$

On peut écrire :

$$N = -6,3496 [\varphi(\eta)]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{7,4\varphi(\eta)} + \frac{3,632}{R_P [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right] \quad (4.84)$$

Le coefficient  $n$  de *Manning* peut être calculé par l'expression (4.82) ou (4.84) dans le cas où les paramètres  $\eta, \varepsilon, i, D$  et  $\nu$  sont connus.

❖ **Cas 02 :  $0,088562171 \leq \eta \leq 0,5$**

En ayant recours aux relations (4.8) et (4.26) qui expriment respectivement le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de *Reynolds*  $R$ , la relation (4.81) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} D^{(-1/6)} \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{14,8\frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,284}{R_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (4.85)$$

D'après (4.83), on peut écrire :

$$N = -4\sqrt{2} \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{14,8\frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,284}{R_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (4.86)$$

Le coefficient  $n$  de *Manning* peut être calculé par l'expression (4.85) ou (4.86) dans le cas où les paramètres  $\eta, \varepsilon, i, D$  et  $\nu$  sont connus.

❖ **Cas 03 :  $0,5 \leq \eta \leq 1$**

En ayant recours aux relations (4.13) et (4.29) qui expriment respectivement le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de *Reynolds*  $R$ , la relation (4.81) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} D^{(-1/6)} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{14,8\frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{1,284}{R_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (4.87)$$

D'après (4.83), on peut écrire :

$$N = -4\sqrt{2} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{14,8 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{1,284}{R_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (4.88)$$

Le coefficient  $n$  de *Manning* peut être calculé par l'expression (4.87) ou (4.88) dans le cas où les paramètres  $\eta, \varepsilon, i, D$  et  $\nu$  sont connus.

#### IV.5.2. Calcul du coefficient de résistance de *Manning* par la méthode du modèle rugueux (MMR)

Les relations (4.82) ou (4.84), (4.85) ou (4.86), (4.87) ou (4.88) permettent de calculer le coefficient  $n$  de *Manning* dans le cas où le diamètre  $D$  de la conduite soit une donnée du problème. Dans le cas contraire, où  $D$  n'est pas une donnée, il est possible de calculer la valeur de  $n$ , en faisant appel à la méthode du modèle rugueux (MMR).

D'après les relations (4.16) et (4.80), on peut tirer la relation suivante :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{c} \quad (4.89)$$

Le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de *Manning* tel que :

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{1/6}}{\bar{c}} \quad (4.90)$$

Sachant que :  $\bar{c} = 8\sqrt{2g}$

La conduite du modèle rugueux est caractérisée par un diamètre  $\bar{D}$  pour une pente longitudinale  $\bar{i}$ , écoulant un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  correspondant à un taux de remplissage  $\bar{\eta}$ .

Pour déterminer le coefficient  $n$  de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

- i.  $\bar{D} \neq D$  : cette condition énonce que le diamètre de la conduite et celui du modèle rugueux de référence sont différents.
- ii.  $\bar{Q} = Q$  : La conduite considérée et celle du modèle rugueux de référence écoulent le même débit volume  $Q$ .
- iii.  $\bar{i} = i$  : La conduite considérée et celle du modèle rugueux de référence ont la même pente longitudinale.
- iv.  $\bar{\eta} = \eta$  : Le taux de remplissage de la conduite considérée est égal à celui du modèle rugueux de référence.
- v.  $\bar{\nu} = \nu$  : La viscosité cinématique de la conduite considérée et celle du modèle rugueux de référence sont les mêmes.

Le débit volume  $\bar{Q}$  écoulé par le modèle rugueux de référence s'écrit, en vertu de la relation de *Manning* :

$$\bar{Q} = Q = \frac{1}{n} \bar{A} (\bar{R}_h)^{\left(\frac{2}{3}\right)} \sqrt{i} \quad (4.91)$$

L'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le rayon hydraulique  $R_h$  de l'écoulement dans la conduite considérée sont liés à leurs homologues du modèle rugueux de référence  $\bar{A}$  et  $\bar{R}_h$  respectivement par les relations suivantes (*Achour, 2007 ; Achour et Sehtal, 2014*) :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (4.92)$$

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (4.93)$$

En tenant compte des relations (4.92) et (4.93), la relation (4.80) devient :

$$Q = \frac{1}{n} \psi^{\frac{8}{3}} \bar{A} (\bar{R}_h)^{\left(\frac{2}{3}\right)} \sqrt{i} \quad (4.94)$$

Ainsi, à partir des relations (4.91) et (4.94), nous avons :

$$n = \bar{n} \psi^{\frac{8}{3}} \quad (4.95)$$

D'après les deux relations (4.90) et (4.95) et en tenant compte de  $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$  , on peut déduire que :

$$n = \frac{\frac{1}{R_h^6} \psi^{\frac{8}{3}}}{8\sqrt{2g}} \quad (4.96)$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est donné par la relation générale (4.43) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{R}_h}{19} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}}$$

Eventuellement, trois cas peuvent se présenter :

❖ **Cas 01 :**  $\eta \leq 0,088562171$

$\psi$  , est donné par la relation (4.44) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{9,5\varphi(\eta)} + \frac{3,075}{\bar{R}_p[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}}$$

Ainsi, d'après la relation (4.3), on peut écrire :



$$\bar{R}_h = \frac{\bar{D}}{2} \varphi(\eta) \quad (4.97)$$

Donc, la relation (4.96) devient :

$$n = \frac{0,1753}{\sqrt{g}} [\bar{D} \varphi(\eta)]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{9,5\varphi(\eta)} + \frac{3,075}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \quad (4.98)$$

❖ **Cas 02** :  $0,088562171 \leq \eta \leq 0,5$

$\psi$ , est donné par la relation (4.57) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{\frac{2}{5}}$$

Ainsi, d'après la relation (4.8), on peut écrire :

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \quad (4.99)$$

Donc, la relation (4.96) devient :

$$n = \frac{0,1968}{\sqrt{g}} \left[ \bar{D} \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{16}{15}} \quad (4.100)$$

❖ **Cas 03** :  $0,5 \leq \eta \leq 1$

$\psi$ , est donné par la relation (4.69) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{\frac{2}{5}}$$

Ainsi, d'après la relation (4.13), on peut écrire :

$$\bar{R}_h = \bar{D} \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \quad (4.101)$$

Donc, la relation (4.96) devient :

$$n = \frac{0,1968}{\sqrt{g}} \left[ \bar{D} \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{16}{15}} \quad (4.102)$$

Les relations (4.98), (4.100), (4.102), expriment le coefficient  $n$  de *Manning* en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$  et des caractéristiques  $\bar{D}$  et  $\bar{R}_P$  du modèle rugueux de référence. Le diamètre  $\bar{D}$  est donné selon le cas étudié par les relations suivantes :

**1<sup>er</sup> cas** : la relation (4.38) ;

**2<sup>ème</sup> cas** : la relation (4.54);

**3<sup>ème</sup> cas** : la relation (4.66).

Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_P$  est donné pour les 03 cas par la relation (4.41).

#### **Exemple 4**

Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,05$ , le débit  $Q = 0,030 \text{ m}^3/\text{s}$  et la pente de conduite en forme de fer à cheval de  $i = 2,5 \cdot 10^{-4}$ , calculer les coefficients de résistance  $C$  et  $n$  de *Chézy* et de *Manning* respectivement par la méthode du modèle rugueux.

La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

#### **Solution**

Si :  $\eta = 0,05$ , le calcul se fera par les relations du 1<sup>er</sup> cas d'écoulement.

Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , la relation (4.38) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

D'après (4.4) et (4.5) à  $\eta = 0,05$

On a :  $\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - \eta) = \cos^{-1}(1 - 0,05) = 0,3176$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{(1-\eta)\sqrt{\eta(2-\eta)}}{\cos^{-1}(1-\eta)} = 1 - \frac{(1-0,05)\sqrt{0,05(2-0,05)}}{\cos^{-1}(1-0,05)} = 0,0659$$

La relation (4.38) donne le diamètre  $\bar{D}$  :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{1}{2} [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right]^{0,4} = \\ &= \frac{1}{2} [\sqrt{2} \times 0,3176]^{-0,4} [0,0659]^{-0,6} \left[ \frac{0,03}{\sqrt{9,81 \times 2,5 \times 10^{-4}}} \right]^{0,4} = 2,88 \text{ m} \end{aligned}$$

Avec la relation (4.41), on peut calculer le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_P$  à l'état plein :

$$\bar{R}_P = 5,788 \times \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 5,788 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2,5 \times 10^{-4} \times (2,88)^3}}{10^{-6}} = 1402345,372$$

La relation (4.46) permet le calcul direct du coefficient de résistance  $C$  de Chézy, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$\begin{aligned}
 C &= -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{9,5\varphi(\eta)} + \frac{3,075}{\bar{R}_p[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right] \\
 &= -5,343 \sqrt{9,81} \left[ \log \left( \frac{10^{-4}/2,88}{9,5 \times 0,06588675} + \frac{3,075}{1402345,372 \times [0,06588675]^{3/2}} \right) \right] \\
 &= 62,46 \text{ m}^{0,5}/\text{s}
 \end{aligned}$$

La relation (4.98) permet le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de Manning, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{0,1753}{\sqrt{g}} [\bar{D} \varphi(\eta)]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{9,5\varphi(\eta)} + \frac{3,075}{\bar{R}_p[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \\
 n &= \frac{0,1753}{\sqrt{9,81}} [2,88 \times 0,06588675]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{10^{-4}/2,88}{9,5 \times 0,06588675} + \frac{3,075}{1402345,372 \times [0,06588675]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{16}{15}} \\
 &= 0,010412304 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}
 \end{aligned}$$

### Exemple 5

Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,4$ , le débit  $Q = 0,15 \text{ m}^3/\text{s}$  et la pente de conduite en forme de fer à cheval  $i = 2 \cdot 10^{-4}$ , calculer les coefficients de résistance  $C$  et  $n$  de Chézy et de Manning respectivement par la méthode du modèle rugueux.

La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

### Solution

Si :  $\eta = 0,4$ , le calcul se fera par les relations du 2<sup>ème</sup> cas d'écoulement.

Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , la relation (4.54) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

D'après (4.9) et (4.10) à  $\eta = 0,4$

$$\text{On a : } \rho(\eta) = 1,696124162 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} - \eta \right) =$$

$$1,696124162 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} - 0,4 \right) = 1,49578932$$

$$\chi(\eta) = 0,9366242523 - \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} - \eta \right) - \left( \frac{1}{2} - \eta \right) \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{1}{2} - \eta \right)^2} \right] - \eta =$$

$$0,9366242523 - \sin^{-1} \left( \frac{1}{2} - 0,4 \right) - \left( \frac{1}{2} - 0,4 \right) \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{1}{2} - 0,4 \right)^2} \right] - 0,4 = 0,33695809$$

La relation (4.54) donne le diamètre  $\bar{D}$  :  $\bar{D} = 0,379[\rho(\eta)]^{0,2} [\chi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right]^{0,4} =$   
 $0,379[1,49578932]^{0,2} [0,33695809]^{-0,6} \left[ \frac{0,15}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}} \right]^{0,4} = 1,28494123 \text{ m}$

Avec la relation (4.41), on peut calculer le nombre de Reynolds  $\bar{R}_P$  à l'état plein :

$$\bar{R}_P = 5,788 \times \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 5,788 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times (1,28494123)^3}}{10^{-6}} = 373424,596$$

La relation (4.58) permet le calcul direct du coefficient de résistance  $C$  de Chézy, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$C = -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right] = -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{0,0001/1,28494123}{19 \times 0,225271088} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{1,087}{373424,596 \times [0,225271088]^{3/2}} \right) \right] = 72,67625042 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

La relation (4.100) permet le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de Manning, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$n = \frac{0,1968}{\sqrt{g}} \left[ \bar{D} \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{1/6} \left[ - \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15}$$

$$= \frac{0,1968}{\sqrt{9,81}} [1,28494123 \times$$

$$0,225271088]^{1/6} \left[ - \log \left( \frac{0,0001/1,28494123}{19 \times 0,225271088} + \frac{1,087}{373424,596 \times [0,225271088]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} =$$

$$0,010669998 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$$

**Exemple 6**

Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,7$ , le débit  $Q = 0,8 \text{ m}^3/\text{s}$  et la pente de conduite en forme de fer à cheval  $i = 2 \cdot 10^{-4}$ , calculer les coefficients de résistance  $C$  et  $n$  de Chézy et de Manning respectivement par la méthode du modèle rugueux.

La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

**Solution**

Si :  $\eta = 0,7$ , le calcul se fera par les relations du 3<sup>ème</sup> cas d'écoulement. Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , la relation (4.66) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

D'après les relations (4.14) et (4.15) à  $\eta = 0,7$

On a :

$$\omega(\eta) = 3,26692049 - \cos^{-1}(2\eta - 1) = 3,26692049 - \cos^{-1}(2 \times 0,7 - 1) = 2,107641009$$

$$\lambda(\eta) = 0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta - 1) + \left(\eta - \frac{1}{2}\right) \left[\sqrt{\eta(1-\eta)}\right] = 0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2 \times 0,7 - 1) + \left(0,7 - \frac{1}{2}\right) \left[\sqrt{0,7(1-0,7)}\right] = 0,63115497$$

$$\eta = 0,7; \text{ la relation (4.66) donne le diamètre } \bar{D} : \bar{D} = 0,379[\omega(\eta)]^{0,2} [\lambda(\eta)]^{-0,6} \left[\frac{Q}{\sqrt{gi}}\right]^{0,4} = 0,379[2,107641009]^{0,2} [0,63115497]^{-0,6} \left[\frac{0,8}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}}\right]^{0,4} = 1,84472623 \text{ m}$$

Avec la relation (4.41), on peut calculer le nombre de Reynolds  $\bar{R}_P$  à l'état plein :

$$\bar{R}_P = 5,788 \times \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 5,788 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times (1,84472623)^3}}{10^{-6}} = 642356,1823$$

La relation (4.70) permet le calcul direct du coefficient de résistance  $C$  de Chézy, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

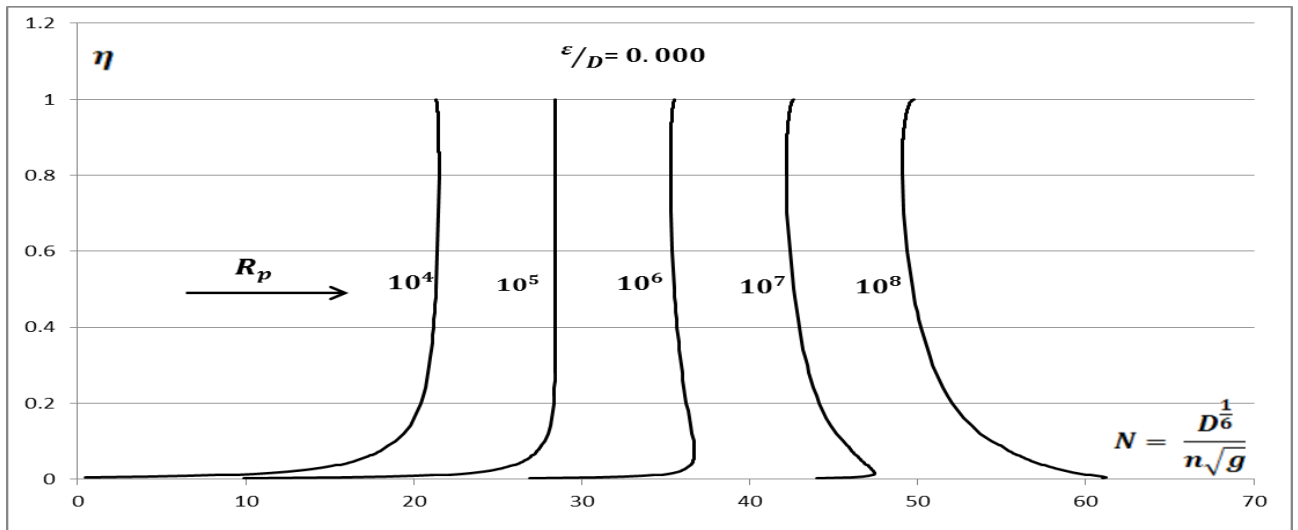
$$C = -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} + \frac{1,087}{\bar{R}_P \left[\frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}\right]^{3/2}}} \right) \right] = -5,343 \sqrt{9,81} \left[ \log \left( \frac{0,0001/1,84472623}{19 \times 0,299460378 + \frac{1,087}{642356,1823 \times 0,299460378^{3/2}}} \right) \right] = 78,68893842 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

La relation (4.102), permet le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de *Manning*, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{0,1968}{\sqrt{g}} \left[ \bar{D} \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{19 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{1,087}{\bar{R}_p \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{\frac{16}{15}} \\
 &= \frac{0,1968}{\sqrt{9,81}} [1,84472623 \times 0,299460378]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{0,0001/1,84472623}{19 \times 0,299460378} + \frac{1,087}{642356,1823 \times 0,299460378^{3/2}} \right) \right]^{\frac{16}{15}} \\
 &= 0,01091747 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}
 \end{aligned}$$

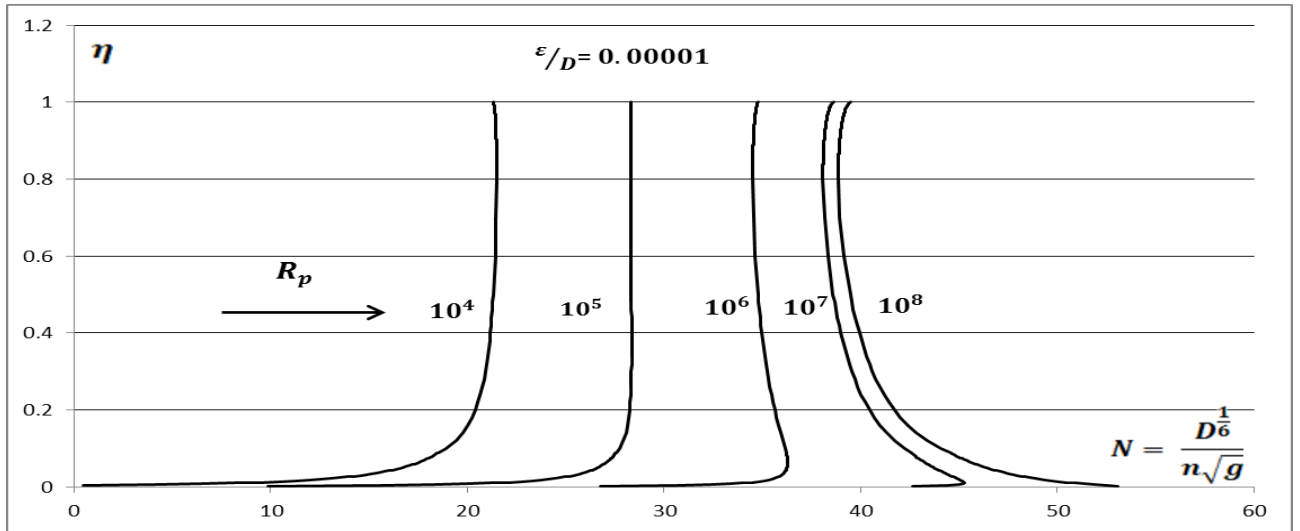
#### IV.5.3. Variation du coefficient de *Manning*

Dans les figures qui suivent, il a été établi des courbes montrant la variation du paramètre adimensionnel  $N$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  pour différentes valeurs de rugosité relative  $\varepsilon/D$  et plusieurs valeurs du nombre de *Reynolds* à l'état plein  $R_p$ .

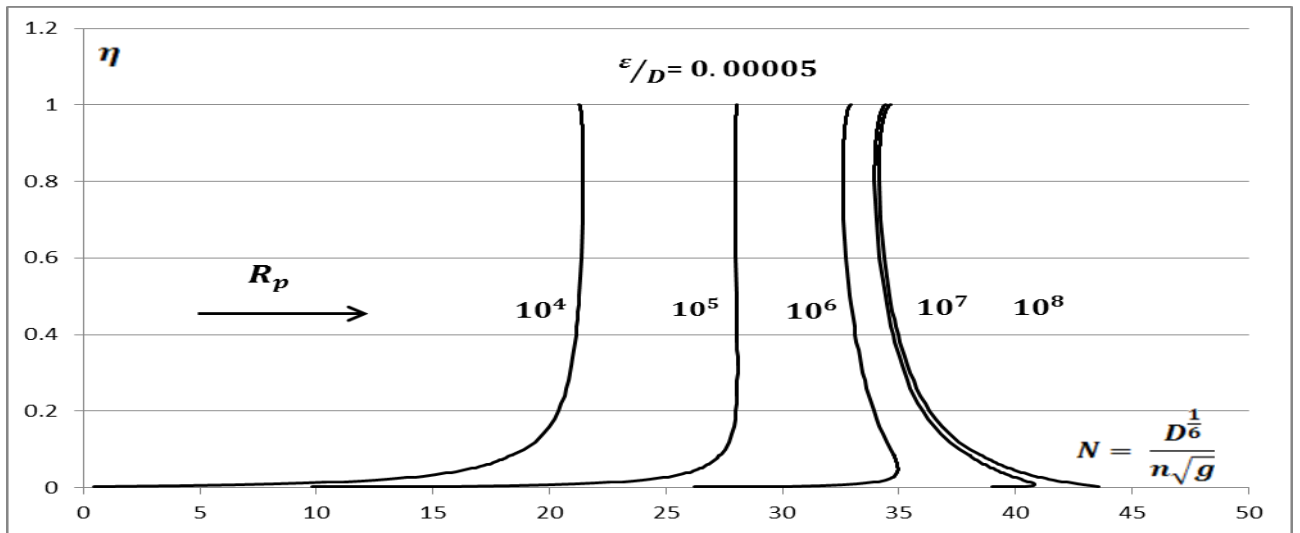


(a)

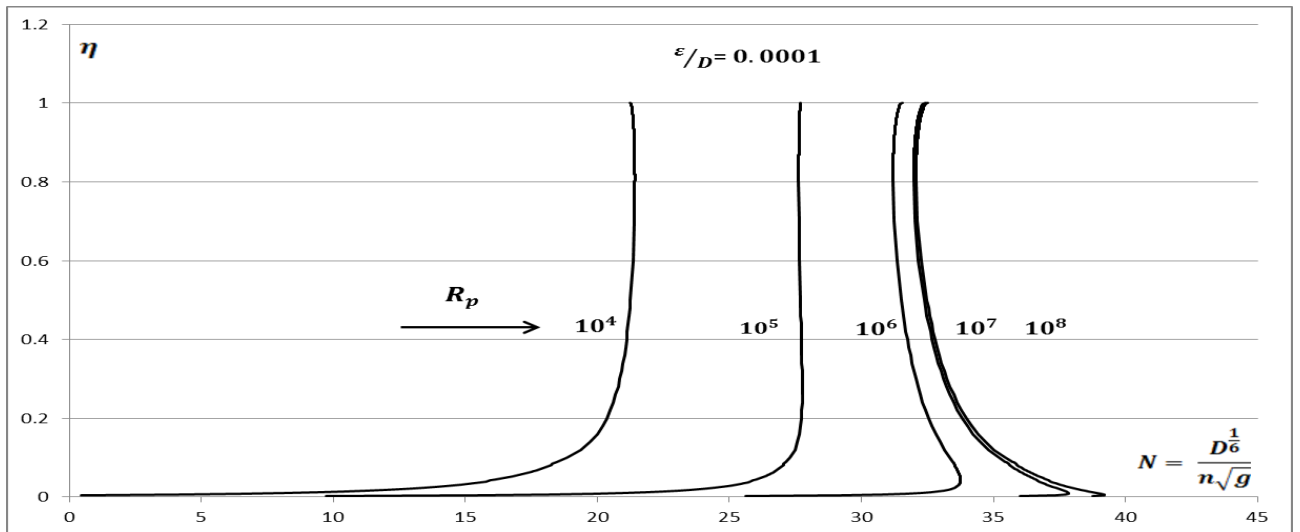
Fig.4.3 (a) : Variation de  $N = D^{1/6} / n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$ . Courbes tracées selon les relations (4.84), (4.86) et (4.88) dans une conduite en forme de fer à cheval.



(b)

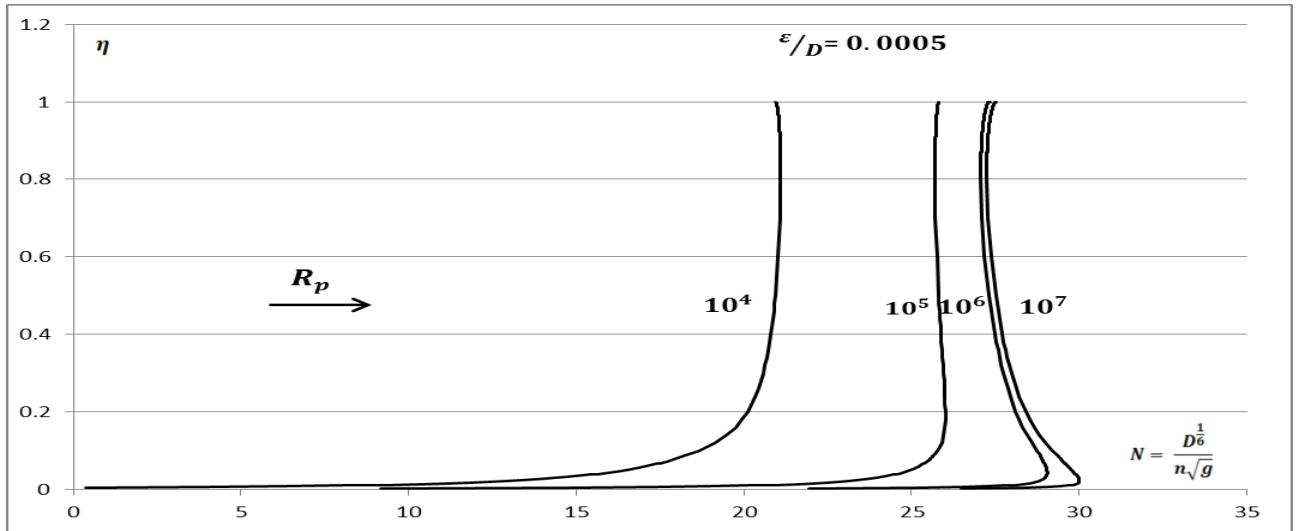


(c)

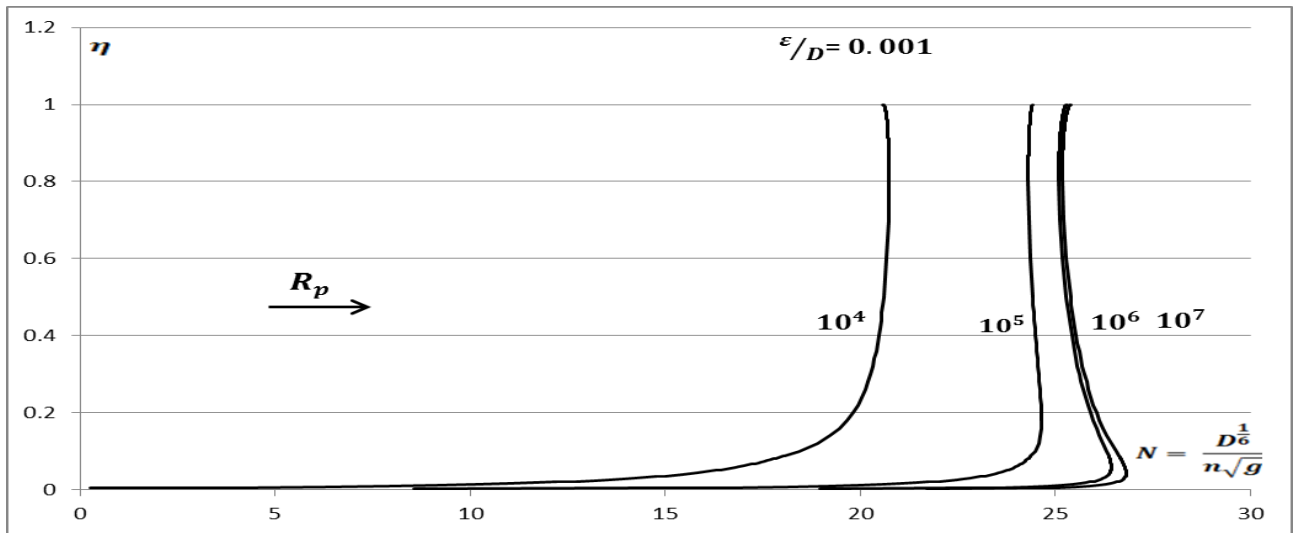


(d)

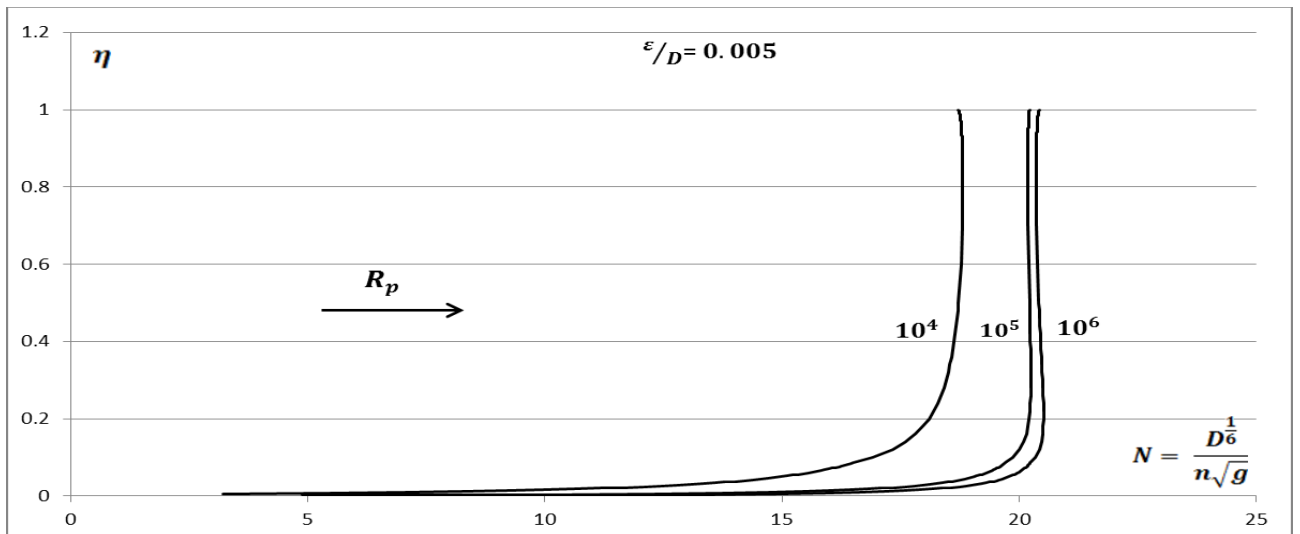
Fig.4.3 (b) ; (c) ; (d) : Variation de  $N = D^{1/6} / n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixes de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon les relations (4.84), (4.86) et (4.88) dans une conduite en forme de fer à cheval.



(e)



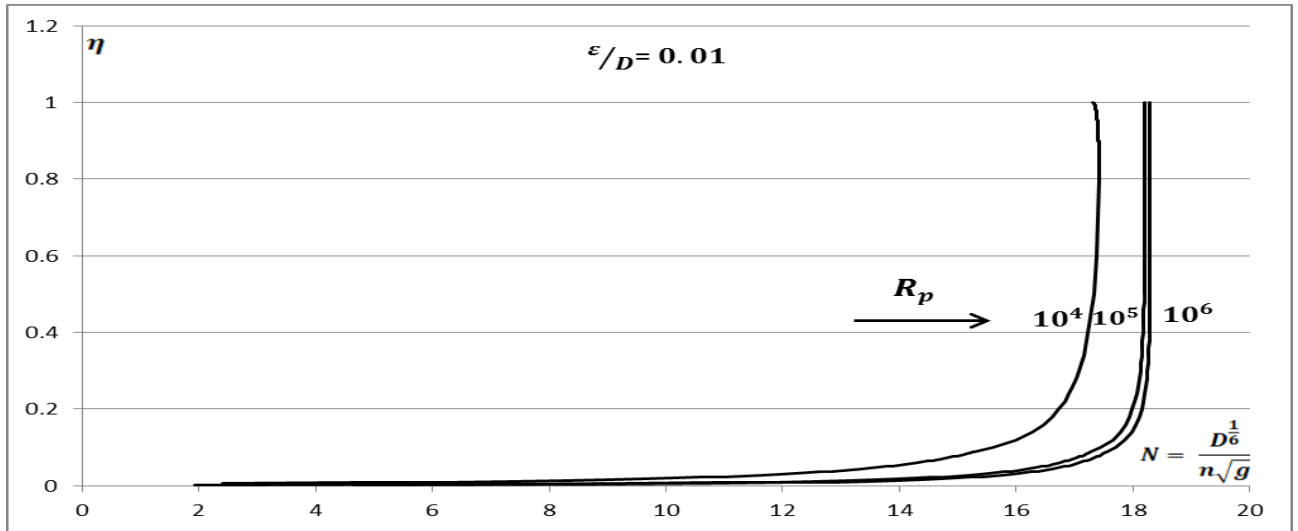
(f)



(g)

Fig.4.3 (e) ; (f) ; (g) : Variation de  $N = D^{1/6} / n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixes de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon les relations (4.84), (4.86) et (4.88) dans une conduite en forme de fer à cheval.





(h)

Fig.4.3 (h) : Variation de  $N = D^{1/6} / n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon les relations (4.84), (4.86) et (4.88) dans une conduite en forme de fer à cheval.

Ci-dessus, le coefficient  $N$  est représenté par plusieurs courbes en fonction du taux de remplissage  $\eta$  pour de différentes valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ , d'où on peut tirer les commentaires suivants :

- Pour les différentes valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  et pour des faibles taux de remplissage  $\eta$ , le coefficient  $N$  subit, généralement, une augmentation remarquable ;
- Pour  $\eta > 0,2$ , le coefficient  $N$  varie d'une façon très faible et devient constant à l'augmentation de  $\eta$ , notamment pour la valeur  $R_p = 10^5$ . Au-delà de cette dernière valeur, les courbes commencent à être concaves. La concavité de chaque courbe présente une valeur minimale de  $N$  qui n'est pas vraiment remarquable vu l'écart insignifiant entre cette valeur minimale et les autres valeurs que peut prendre le paramètre  $N$ . Dans toutes les courbes établies, le paramètre  $N$  prend ses valeurs minimales au taux de remplissage  $\eta \cong 0,8108$ , valeur pour laquelle le coefficient  $C$  de Chézy devient maximal ;
- Pour une valeur fixée de  $\eta$ , le coefficient  $N$  s'accroît avec l'augmentation du nombre de Reynolds  $R_p$  et diminue avec l'augmentation de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  ;
- A l'accroissement simultané de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ , les courbes se rapprochent et tendent à se confondre au-delà d'une valeur bien déterminée de  $R_p$ , notamment, dans l'exemple où la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0,0001$ , et  $R_p > 10^7$  et l'exemple dans lequel la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0,01$ , et  $R_p > 10^5$ .

#### IV.6. Conclusion

Dans le quatrième chapitre, selon la profondeur du liquide dans la conduite en forme de fer à cheval, trois cas d'étude ont été révélés ( $\eta \leq 0,088562171$  ;  $0,088562171 \leq \eta \leq 0,5$  ;  $0,5 \leq \eta \leq 1$ ) pour évaluer les coefficients de résistances de *Chézy* et de *Manning*.

Les caractéristiques géométriques et hydrauliques à savoir le périmètre mouillé, la section mouillée et le rayon hydraulique de la conduite en question ont été établies en fonction du taux de remplissage  $\eta$ . En exploitant ces caractéristiques et tenant compte des relations usuelles de *Chézy* et de *Manning* ainsi que celle de *Achour et Bedjaoui (2006)*, les relations générales (4.24), (4.27), (4.30), (4.82), (4.85), (4.87) des coefficients de résistance de *Chézy* ou de *Manning* ont été obtenues pour chaque cas d'étude. Certainement, ces relations dépendent de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ , du taux de remplissage  $\eta$  et du nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite  $R_p$ . Au regard de ces relations, nous avons constaté que nous ne pouvons pas calculer les coefficients  $C$  de *Chézy* ou  $n$  de *Manning* si le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas connu. A la suite de cela, les relations (4.46), (4.58), (4.70), (4.98), (4.100), (4.102) sont extraites en utilisant la méthode du modèle rugueux (MMR) pour calculer directement le coefficient de résistance  $C$  de *Chézy* ou  $n$  de *Manning* en fonction des paramètres  $\varepsilon$ ,  $\bar{D}$ ,  $\eta$  et  $\bar{R}_p$ .

Dans cette conduite en forme de fer à cheval fermée et avec un nombre limité de données  $Q$ ,  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$ , la méthode simplifiée dérivée de la (MMR) a été ainsi proposée pour calculer d'une manière explicite le coefficient  $C$  de *Chézy*.

Pour dresser des courbes montrant la variation du coefficient de *Chézy* ou de *Manning* en fonction du taux de remplissage de la conduite, nous avons fixé les valeurs de la rugosité relative pour plusieurs valeurs du nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite. Ces courbes ont montré que le coefficient de résistance de *Chézy* atteint un maximum au taux de remplissage  $\eta \cong 0,8108$ . Suite à cela on a pu tirer les expressions (4.77) et (4.79) de détermination du coefficient de résistance maximal de *Chézy*  $C_{MAX}$ .

Six exemples d'application pratiques ont été suggérés pour illustrer et mettre en clair les méthodes et relations issues de chaque étape d'étude.

## **V. Coefficient de résistance dans un ovoïde à canette rétrécie**

## V.1. Introduction

Cette partie d'étude s'occupe également de la détermination des coefficients de résistance de *Chézy*  $C$  et  $n$  de *Manning* à l'écoulement uniforme, particulièrement, dans l'ovoïde à canette rétrécie, souvent utilisé depuis beaucoup de temps dans les anciennes villes pour la collecte des eaux usées et pluviales. Sur le plan pratique, cette conduite fermée de forme ovoïdale, est plus au moins compliquée par rapport à la conduite de forme circulaire, déjà étudiée au troisième chapitre. Selon le tirant d'eau dans la conduite dont l'écoulement est à surface libre, trois cas d'études pouvant être envisagés pour chacun des coefficients de résistance de *Chézy* ou de *Manning*. Essentiellement, pour l'ovoïde à canette rétrécie les caractéristiques hydrauliques seront déterminées dans chaque cas à part, notamment le périmètre mouillé, la section mouillée et le rayon hydraulique.

En premier lieu, nous pouvons établir pour les trois cas d'étude, la relation générale du coefficient de résistance à l'écoulement après avoir exposé les deux relations habituelles de *Chézy* et de *Manning* ainsi que celle de *Achour et Bedjaoui (2006)* exprimant le débit volume valable dans tous les profils géométriques et établie dans tous les régimes de l'écoulement turbulent.

Par la suite, la méthode du modèle rugueux (MMR) (*Achour, 2014; Achour, 2015a, 2015b, 2015c; Achour et Bedjaoui, 2006; Achour et Bedjaoui, 2012; Achour et Sehtal, 2014*) est proposée pour pouvoir exprimer les deux coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* lorsque le diamètre de la conduite n'est pas nécessairement un paramètre disponible. Sachant que l'ovoïde à canette rétrécie est une conduite fermée, une autre méthode simplifiée dérivée de la méthode du modèle rugueux (MMR) est proposée pour la détermination du coefficient de résistance de *Chézy* d'une manière simple et facile.

La variation des coefficients de *Chézy* ou de *Manning* en fonction du taux de remplissage est approuvée par des graphes. Ces graphes seront commentés pour révéler le coefficient de résistance maximal de *Chézy* à un taux de remplissage donné.

## V.2. Caractéristiques géométriques de l'ovoïde à canette rétrécie

Le profil de conduite ovoïdale à canette rétrécie (Fig. 5.1) est particulièrement caractérisé par rapport au profil d'ovoïde normal par sa génératrice inférieure rétrécie. Dans le temps, ce profil a prouvé son efficacité pour les grands collecteurs des réseaux d'assainissement des villes. Il est défini géométriquement par les éléments suivants (*Achour, 2007*):

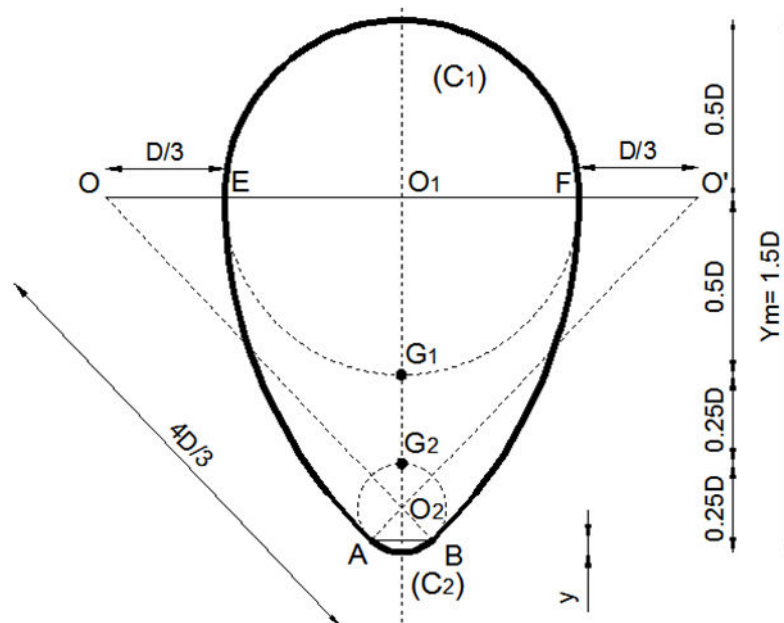


Fig. 5.1: Schéma de profil d'ovoïde à canette rétrécie.

- Demi-cercle  $(C_1)$ , de centre  $O_1$  et diamètre  $D$ ;
- $(AB)$ , un arc du cercle  $(C_2)$  de centre  $O_2$  et de diamètre  $0,25D$  ;
- $(AE)$ , un arc du cercle de centre  $O'$  et de diamètre  $8D/3$ ;
- $(BF)$ , un arc du cercle de centre  $O$  et de diamètre  $8D/3$ ;
- $G_1G_2 = 0,25 D$  ,  $y = 0,034482759 D$  ,  $y_m = 1,5 D$ .

### V. 3. Caractéristiques hydrauliques

Pour définir les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement, trois cas d'études peuvent se présenter selon le taux de remplissage  $\eta = y_n / 1,5 D$  présentant trois zones géométriques en fonction de la position de la profondeur normale  $y_n$  dans la conduite.

Les caractéristiques géométriques et hydrauliques de l'écoulement sont :

- Le périmètre mouillé  $P$  ;
- L'aire de la section mouillée  $A$  ;
- Le rayon hydraulique  $R_h$  ;

❖ **Cas 01** :  $\eta \leq 0,023$

$$P = \frac{1}{4} D \cdot \sigma(\eta) \quad (5.1)$$

$$A = \frac{D^2}{64} \sigma(\eta) \varphi(\eta) \quad (5.2)$$

$$R_h = \frac{D}{16} \varphi(\eta) \quad (5.3)$$

$$\text{Où: } \sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 12 \eta) \quad (5.4)$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{(1-12\eta)\sqrt{24\eta(1-6\eta)}}{\cos^{-1}(1-12\eta)} \quad (5.5)$$

❖ **Cas 02** :  $0,023 \leq \eta \leq 2/3$

$$P = \rho(\eta)D \quad (5.6)$$

$$A = \frac{8}{9} D^2 \chi(\eta) \quad (5.7)$$

$$R_h = \frac{8}{9} D \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \quad (5.8)$$

$$\text{Où : } \rho(\eta) = \left[ -\frac{8}{3} \sin^{-1} \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \eta \right) + 2,350 \right] \quad (5.9)$$

$$\chi(\eta) = 0,813 - 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \eta \right) - \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \eta \right) \left[ \sqrt{1 - \frac{9}{16} \left( 1 - \frac{3}{2} \eta \right)^2} - \frac{5}{4} \right] \quad (5.10)$$

❖ **Cas 03** :  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$P = 4D \tau(\eta) \omega(\eta) \quad (5.11)$$

$$A = \frac{1}{4} D^2 \tau(\eta) \lambda(\eta) \quad (5.12)$$

$$R_h = \frac{1}{16} \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} D \quad (5.13)$$

$$\text{Où : } \omega(\eta) = \left[ \frac{0,587}{\sin^{-1}(3\eta-2)} + \frac{1}{4} \right] \quad (5.14)$$

$$\tau(\eta) = \sin^{-1}(3\eta - 2) \quad (5.15.a)$$

$$\lambda(\eta) = \left[ 1 + \frac{(3\eta-2)\sqrt{1-(3\eta-2)^2} + 2,890}{\sin^{-1}(3\eta-2)} \right] \quad (5.15.b)$$

#### V.4. Coefficient de résistance de Chézy

##### V.4.1. Expression générale du coefficient de résistance de Chézy

L'écoulement uniforme à surface libre est souvent régi par les formules habituelles telles que celle de Chézy qui exprime le débit volume  $Q$  et s'écrit :

$$Q = C A \sqrt{R_h i} \quad (5.16)$$

Le dimensionnement de la conduite en écoulement à surface libre requiert que le débit volume  $Q$ , la pente de la conduite  $i$  dans le sens de l'écoulement, le taux de remplissage  $\eta$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  de la paroi interne de la conduite et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide soient connus. Cependant, le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  dans la formule (5.16) varie en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , ce qui mène à dire que ce coefficient n'est pas une donnée connue du problème et sa détermination sera l'objectif de notre étude.

La relation du débit volume (Achour et Bedjaoui, 2006) valable dans tous les profils géométriques et établie dans tous les régimes de l'écoulement turbulent (turbulent lisse, de transition et turbulent rugueux) peut aider à montrer que le coefficient  $C$  de Chézy est variable en fonction de tous les paramètres de l'écoulement.

Le débit volume  $Q$ , selon Achour et Bedjaoui (2006), est donné par :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right] \quad (5.17)$$

Où :  $\varepsilon$ , la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite ;

$R$ , nombre de Reynolds exprimé par la relation :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (5.18)$$

En comparant les deux relations (5.16) et (5.17), nous pouvons déduire que le coefficient  $C$  de Chézy s'écrit :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right] \quad (5.19)$$

La relation (5.19) fait apparaître que le coefficient de résistance  $C$  de Chézy dépend de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , du rayon hydraulique  $R_h$  et du nombre de Reynolds  $R$ . Ce dernier paramètre, d'après la relation (5.18) est en fonction de la pente  $i$ , de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide et du rayon hydraulique  $R_h$ . En prenant en considération les relations (5.3), (5.8) et (5.13), le rayon hydraulique  $R_h$  dépend du taux de remplissage  $\eta$  et du diamètre  $D$  de la conduite.

En terme adimensionnel, la relation (5.19) devient :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right] \quad (5.20)$$

❖ **Cas 01 :  $\eta \leq 0,023$**

D'après (5.18) et (5.3), on a :

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \varphi(\eta)^{3/2} \quad (5.21)$$

A l'état plein de la conduite où  $\eta = 1$ , et à partir des relations (5.18) et (5.13), on peut écrire :

$$R_p = 6,865 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (5.22)$$

L'indice  $P$  désigne l'état plein de la conduite.

Donc, on peut écrire aussi d'après les relations (5.21) et (5.22) :

$$R = R_p \left[ \frac{\varphi(\eta)}{4,551} \right]^{3/2} \quad (5.23)$$

D'après les deux relations (5.3) et (5.23), la relation (5.20) peut être réécrite de la manière suivante:

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{0,925\varphi(\eta)} + \frac{97,463}{R_p \varphi(\eta)^{3/2}} \right] \quad (5.24)$$

❖ **Cas 02 :  $0,023 \leq \eta \leq 2/3$**

D'après les relations (5.18) et (5.8), on a :



$$R = \frac{1024}{27} \cdot \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2} \quad (5.25)$$

Donc, on peut écrire aussi d'après les deux expressions (5.25) et (5.22) :

$$R = 5,525 R_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2} \quad (5.26)$$

D'après (5.8) et (5.26), (5.20) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{13,16 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,817}{R_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (5.27)$$

❖ **Cas 03** :  $\frac{2}{3} \leq \eta \leq 1$

D'après (5.18) et (5.13), on a :

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2} \quad (5.28)$$

Donc, on peut écrire aussi d'après (5.28) et (5.22) :

$$R = R_P \left[ \frac{\frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}}{4,551} \right]^{3/2} \quad (5.29)$$

D'après (5.13) et (5.29), la relation (5.20) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{0,925 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{97,463}{R_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (5.30)$$

Aussi, d'après les relations (5.24), (5.27) et (5.30) le coefficient de résistance  $C$  de Chézy dépend de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ , du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite et du nombre de Reynolds à l'état plein de la conduite  $R_P$ . Lorsque ces paramètres sont connus, les relations (5.24), (5.27) et (5.30) permettent la détermination explicite du coefficient  $C$ .

### V.4.2. Calcul du coefficient de résistance de *Chézy* par la méthode du modèle rugueux (MMR)

S'il s'agit de calculer le coefficient de résistance  $C$  de *Chézy*, le diamètre  $D$  peut être exclu des paramètres connus du problème, qui sont le débit volume  $Q$ , le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite, la pente longitudinale  $i$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Les relations (5.24), (5.27) et (5.30) ne seront plus utiles pour le calcul explicite du coefficient  $C$  de *Chézy*. Dans cette situation, on peut faire appel à la méthode du modèle rugueux (MMR) pour déterminer ce coefficient.

Le modèle rugueux de référence définit un coefficient de frottement  $\bar{f} = 1/16$  (*Achour, 2007*), d'où l'expression d'un coefficient de résistance de *Chézy* suivante :

$$\bar{C} = \sqrt{8g/\bar{f}} = 8\sqrt{2g} = \text{constante} \quad (5.31)$$

Le modèle rugueux est défini par un diamètre  $\bar{D}$  écoulant un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  correspondant à un taux de remplissage  $\bar{\eta}$ , sous une pente longitudinale  $\bar{i}$ . Pour la détermination du coefficient de résistance  $C$  de *Chézy*, caractérisant l'écoulement dans la conduite, on peut admettre les conditions suivantes :  $\bar{D} \neq D$  ;  $\bar{Q} = Q$  ;  $\bar{i} = i$  ;  $\bar{\eta} = \eta$  ;  $\bar{\nu} = \nu$ .

#### ❖ Cas 01 : $\eta \leq 0,023$

D'après les relations (5.2) et (5.3), la relation (5.16) devient :

$$Q = \frac{1}{256} \sigma(\eta) \varphi(\eta)^{\frac{3}{2}} \sqrt{C^2 D^5 i} \quad (5.32)$$

$$\text{On met : } Q^* = \frac{1}{256} \sigma(\eta) \varphi(\eta)^{\frac{3}{2}} \quad (5.33)$$

$$\text{Donc : } Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (5.34)$$

Selon la relation (5.34), la conductivité relative du modèle rugueux de référence sera :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (5.35)$$

Ou bien, selon la relation (5.31), la relation (5.35) devient :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128g\bar{D}^5i}} \quad (5.36)$$

La relation (5.33) s'écrit, pour le modèle rugueux de référence :

$$\frac{Q}{\sqrt{128g\bar{D}^5i}} = \frac{1}{256} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{\frac{3}{2}} \quad (5.37)$$

Soit :

$$\bar{D} = 4[\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{g} i} \right]^{0,4} \quad (5.38)$$

La relation (5.38) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence sachant que les paramètres  $Q$ ,  $i$  et  $\eta$  sont connus.

Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (5.21) :

$$\bar{R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{g} i \bar{D}^3}{\nu} [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (5.39)$$

Soit :

$$\bar{R} = \bar{R}_p \left[ \frac{\varphi(\eta)}{4,551} \right]^{3/2} \quad (5.40)$$

Dont :

$$\bar{R}_p = 6,865 \frac{\sqrt{g} i \bar{D}^3}{\nu} \quad (5.41)$$

Selon la MMR, le coefficient  $C$  de Chézy est donné comme suit (*Achour, 2015*):

$$C = \frac{\bar{C}}{\psi^{5/2}} \quad (5.42)$$

Où  $\psi$  est un paramètre adimensionnel déterminé par la relation suivante (*Achour et Bedjaoui, 2006; Achour et Bedjaoui, 2012; Achour et Sehtal, 2014*):

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{R}h}{19} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} \quad (5.43)$$

D'après les relations (5.3) et (5.40), la relation (5.43) devient :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875 \varphi(\eta)} + \frac{82,514}{\bar{R}_P [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} \quad (5.44)$$

D'après (5.31) et (5.42) :

$$C = \frac{\bar{c}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (5.45)$$

Selon la relation (5.44), la relation (5.45) devient :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875 \varphi(\eta)} + \frac{82,514}{\bar{R}_P [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right] \quad (5.46)$$

La relation (5.46) peut s'écrire en terme adimensionnel comme suit :

$$\frac{c}{\sqrt{g}} = -5,343 \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875 \varphi(\eta)} + \frac{82,514}{\bar{R}_P [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right] \quad (5.47)$$

❖ **Cas 02** :  $0,023 \leq \eta \leq \frac{2}{3}$

D'après les relations (5.7) et (5.8), la relation (5.16) devient :

$$Q = \frac{16\sqrt{2}}{27} [\chi(\eta)]^{\frac{3}{2}} [\rho(\eta)]^{-\frac{1}{2}} \sqrt{C^2 D^5 i} \quad (5.48)$$

$$\text{On met : } Q^* = \frac{16\sqrt{2}}{27} [\chi(\eta)]^{\frac{3}{2}} [\rho(\eta)]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.49)$$

$$\text{Donc : } Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (5.50)$$

Selon la relation (5.50), la conductivité relative du modèle rugueux de référence est alors :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (5.51)$$

Ou bien, selon la relation (5.31), la relation (5.51) devient :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gD^5i}} \quad (5.52)$$

La relation (5.49) s'écrit, pour le modèle rugueux de référence :

$$\frac{Q}{\sqrt{128 g \bar{D}^5 i}} = \frac{16\sqrt{2}}{27} [\chi(\eta)]^{\frac{3}{2}} [\rho(\eta)]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.53)$$

Soit :

$$\bar{D} = 0,407[\rho(\eta)]^{0,2} [\chi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right]^{0,4} \quad (5.54)$$

La relation (5.54) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence sachant que les paramètres  $Q$ ,  $i$  et  $\eta$  sont connus.

Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en caractère de la relation (5.25) :

$$\bar{R} = \frac{1024}{27} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2} \quad (5.55)$$

Soit :

$$\bar{R} = 5,525 \bar{R}_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2} \quad (5.56)$$

Dont :

$$\bar{R}_P = 6,865 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu}$$

D'après les relations (5.8) et (5.56), la relation (5.43) devient :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{16,89 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,538}{\bar{R}_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} \quad (5.57)$$

Selon (5.57), la relation (5.45) devient :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{16,89 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,538}{\bar{R}_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right] \quad (5.58)$$

Sinon, en terme adimensionnel :

$$\frac{c}{\sqrt{g}} = -5,343 \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{16,89 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,538}{\bar{R}_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right] \quad (5.59)$$

❖ **Cas 03** :  $2/3 \leq \eta \leq 1$

D'après les relations (5.12) et (5.13), la relation (5.16) devient :

$$Q = \frac{1}{16} [\tau(\eta)][\omega(\eta)]^{-\frac{1}{2}} [\lambda(\eta)]^{\frac{3}{2}} \sqrt{C^2 D^5 i} \quad (5.60)$$

$$\text{On met : } Q^* = \frac{1}{16} [\tau(\eta)][\omega(\eta)]^{-\frac{1}{2}} [\lambda(\eta)]^{\frac{3}{2}} \quad (5.61)$$

$$\text{Donc : } Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (5.62)$$

Selon la relation (5.62), la conductivité relative du modèle rugueux de référence est alors :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 \bar{D}^5 i}} \quad (5.63)$$

Ou bien, selon la relation (5.31), la relation (5.63) devient :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128g\bar{D}^5 i}} \quad (5.64)$$

La relation (5.61) s'écrit, pour le modèle rugueux de référence :

$$\frac{Q}{\sqrt{128g\bar{D}^5 i}} = \frac{1}{16} [\tau(\eta)][\omega(\eta)]^{-\frac{1}{2}} [\lambda(\eta)]^{\frac{3}{2}} \quad (5.65)$$

Soit :

$$\bar{D} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \tau(\eta) \right]^{-0,4} [\omega(\eta)]^{0,2} [\lambda(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right]^{0,4} \quad (5.66)$$

La relation (5.66) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence sachant que les paramètres  $Q$ ,  $i$  et  $\eta$  sont connus.

Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en caractère de la relation (5.28) :

$$\bar{R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2} \quad (5.67)$$

Soit :

$$\bar{R} = \bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2} \quad (5.68)$$

Dont :

$$\bar{R}_P = 6,865 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu}$$

D'après les relations (5.13) et (5.68), la relation (5.43) devient :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875 \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]} + \frac{82,514}{\bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} \quad (5.69)$$

Selon la relation (5.69), la relation (5.45) devient :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875 \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]} + \frac{82,514}{\bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right] \quad (5.70)$$

La relation (5.70) peut s'écrire en terme adimensionnel comme suit :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -5,343 \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875 \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]} + \frac{82,514}{\bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right] \quad (5.71)$$

### Exemple 1

Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,7$ , le débit  $Q = 0,8\text{m}^3/\text{s}$  et la pente d'un ovoïde à canette rétrécie  $i = 2.10^{-4}$ , calculer le coefficient de résistance  $C$  de Chézy par la méthode du modèle rugueux.

Avec : La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

**Solution**

Pour  $\eta = 0,7$ , le calcul se fera par les relations (5.14) et (5.15.a) and (5.15.b).

Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , la relation (5.66) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

$$\eta = 0,7, \quad \omega(\eta) = \left[ \frac{0,587}{\sin^{-1}(3\eta - 2)} + \frac{1}{4} \right] = \left[ \frac{0,587}{\sin^{-1}(3 \times 0,7 - 2)} + \frac{1}{4} \right] = 6,114$$

$$\tau(\eta) = \sin^{-1}(3\eta - 2) = \sin^{-1}(3 \times 0,7 - 2) = 0,1$$

$$\lambda(0,7) = \left[ 1 + \frac{(3\eta-2)\sqrt{1-(3\eta-2)^2}+2,890}{\sin^{-1}(3\eta-2)} \right] = \left[ 1 + \frac{(3 \times 0,7-2)\sqrt{1-(3 \times 0,7-2)^2}+2,890}{\sin^{-1}(3 \times 0,7-2)} \right] = 30,839$$

$\eta = 0,7$ , la relation (5.66) donne le diamètre  $\bar{D}$  :

$$\bar{D} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \tau(\eta) \right]^{-0,4} [\omega(\eta)]^{0,2} [\lambda(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right]^{0,4}$$

$$= \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0,1 \right]^{-0,4} [6,114]^{0,2} [30,839]^{-0,6} \left[ \frac{0,8}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}} \right]^{0,4} = 1,684 \text{ m}$$

Avec la relation (5.41), on peut calculer le nombre de Reynolds  $\bar{R}_P$  à l'état plein :

$$\bar{R}_P = 6,865 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 6,865 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times (1,684)^3}}{10^{-6}} = 6,65 \times 10^5$$

Le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est déterminé, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème, par la relation (5.70) :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875 \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]} + \frac{82,514}{\bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right] =$$

$$-5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{10^{-4}/1,684}{1,1875 \times \frac{30,839}{6,114}} + \frac{82,514}{6,65 \times 10^5 \times \left[ \frac{30,839}{6,114} \right]^{3/2}} \right) \right] = 78,327 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$



### V.4.3. Méthode simplifiée

Dans cette partie, une méthode simplifiée, basée sur la théorie du modèle rugueux, est présentée pour permettre la détermination facile du coefficient  $C$  de Chézy en disposant d'un nombre de données limité par rapport à la méthode déjà exposée en paragraphe (V.4.2.). A cet effet, les paramètres donnés nécessaires sont seulement, le débit volume, la pente de la conduite, la rugosité absolue et la viscosité cinématique du liquide. Ainsi, le calcul du coefficient de Chézy effectué par cette méthode et celui effectué par la méthode du modèle rugueux présentée dans le paragraphe (V.4.2.), montre, une erreur relative moyenne inférieure à 2 % et ce après avoir essayé plusieurs exemples de calcul en faisant varier les valeurs des paramètres donnés.

Supposant que  $\eta \neq \bar{\eta}$ , en appliquant la relation (5.61) pour le modèle rugueux, on aura :

$$\bar{Q}^* = \frac{1}{16} [\tau(\bar{\eta})][\omega(\bar{\eta})]^{-\frac{1}{2}} [\lambda(\bar{\eta})]^{\frac{3}{2}} \quad (5.72)$$

Où  $\bar{Q}^*$  est la conductivité relative exprimée comme suit, selon la relation (5.64):

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128 g \bar{D}^5 i}} \quad (5.73)$$

Examinons un modèle rugueux de référence ayant un diamètre  $\bar{D}$  égal à celui à l'état plein de la conduite correspondant à  $\bar{\eta} = 1$  :

A  $\bar{\eta} = 1$ , Les relations, (5.14), (5.15.a) et (5.15.b) deviendront :

$$\omega(\bar{\eta}) = \frac{1,174}{\pi} + \frac{1}{4}, \tau(\bar{\eta}) = \frac{\pi}{2}, \lambda(\bar{\eta}) = 1 + \frac{5,78}{\pi}.$$

Par conséquent, la relation (5.72) conduit à :  $\bar{Q}^* = 0,1894 \pi$ .

Pour cette valeur de conductivité relative, la relation (5.72) indique une seconde valeur du taux de remplissage  $\bar{\eta} \approx 0,8887$  différente de  $\bar{\eta} = 1$ .

Le rayon hydraulique  $\bar{R}_h$  est donné d'après la relation (5.13), à  $\bar{\eta} = 0,8887$ , comme suit:

$$\bar{R}_h = 0,3342 \bar{D} \quad (5.74)$$

Pour la conductivité relative  $Q^* = 0,1894 \pi$ , est attribué le diamètre  $\bar{D}$  à l'état plein de la conduite suivant :

$$\bar{D} = (0,1894 \pi)^{-0,4} \left( \frac{Q}{\sqrt{128 g i}} \right)^{0,4} \quad (5.75)$$

Le calcul du coefficient de *Chézy* se fera facilement en suivant ces étapes :

1. Calculer le diamètre  $\bar{D}$  à l'état plein de la conduite en utilisant la relation (5.75) ;
2. Ainsi, le calcul du rayon hydraulique  $\bar{R}_h$  se fera en utilisant la relation (5.74) ;
3. Ensuite, la relation (5.18) calcule directement le nombre de *Reynolds* du modèle rugueux;
4. Par conséquent, Le facteur de correction adimensionnel  $\psi$  est explicitement déterminé en utilisant la relation (5.43) ;
5. Enfin, le coefficient  $C$  de *Chézy*, est facilement obtenu par la relation (5.45).

**Exemple 2**

Calculer par la méthode simplifiée le coefficient  $C$  de *Chézy*, selon les données de l'exemple 1, dont le débit  $Q = 0,8 \text{ m}^3/\text{s}$ , la pente de la conduite  $i = 2 \cdot 10^{-4}$ , la viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et la rugosité absolue  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

**Solution**

1. En appliquant la relation (5.75), le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux plein est :

$$\bar{D} = (0,1894 \pi)^{-0,4} \left( \frac{Q}{\sqrt{128 g i}} \right)^{0,4} = (0,1894 \pi)^{-0,4} \left( \frac{0,8}{\sqrt{128 \times 9,81 \times 2 \times 10^{-4}}} \right)^{0,4}, \quad \bar{D} = 1,484 \text{ m} .$$

2. Le calcul du rayon hydraulique  $\bar{R}_h$  se fera en utilisant la relation (5.74).

$$\bar{R}_h = 0,3342 \bar{D} = 0,3342 \times 1,484 = 0,496 \text{ m}$$

3. Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  du modèle rugueux est calculé à partir de la relation (5.18):

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{R}_h^3}}{\nu} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times 0,496^3}}{10^{-6}} = 7 \times 10^5$$

4. En utilisant la relation (5.43), le calcul du facteur de correction adimensionnel est comme suit :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{R}_h}{19} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{10^{-4}/0,496}{19} + \frac{8,5}{7 \times 10^5} \right) \right]^{-\frac{2}{5}} = 0,730$$

5. Le coefficient  $C$  de Chézy est facilement calculé par la relation (5.45) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\sqrt{2 \times 9,81}}{(0,730)^{5/2}} = 77,83 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

La valeur du coefficient de Chézy calculée par la méthode simplifiée ( $C_{\text{simplified Method}} = 77,83$ ) est inférieure à celle calculée dans l'exemple 1 par la Méthode du modèle rugueux ( $C_{MMR} = 78,327$ ). Le taux d'erreur relative entre ces deux valeurs est environ de 0.6 % inférieur au taux donné en début de paragraphe.

#### V.4.4. Coefficient de résistance maximal de Chézy

Les relations (5.24), (5.27) et (5.30) expriment le coefficient  $C$  de Chézy en fonction des variables adimensionnelles : le taux de remplissage  $\eta$ , le nombre de Reynolds à l'état plein  $R_p$  et la rugosité relative  $\varepsilon/D$ . D'après ces relations, l'étude de la variation du coefficient de Chézy en fonction du taux de remplissage, nécessite le traçage des courbes indicatives pour des différentes valeurs de rugosité relative et plusieurs valeurs du nombre de Reynolds. Deux figures ont été réalisées, exposant cette variation pour les deux états de l'écoulement turbulent dans la conduite, l'une pour l'état lisse  $\varepsilon/D = 0$  et la seconde pour l'état rugueux  $\varepsilon/D = 0,05$ .

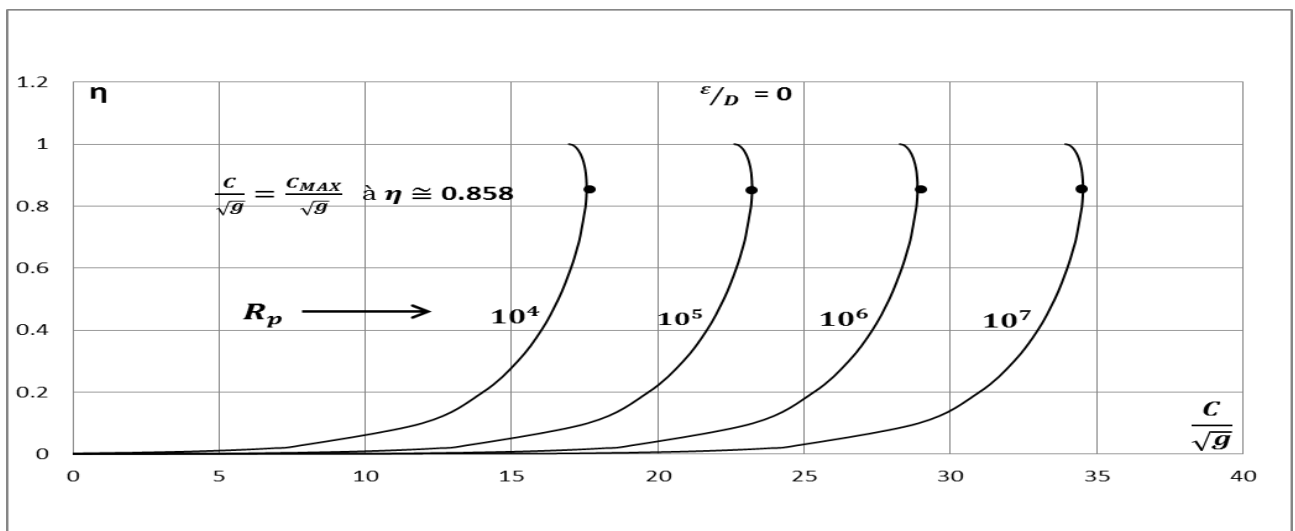


Fig.5.2.1 : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  selon les relations (5.24) ; (5.27) et (5.30) pour une valeur fixée de la rugosité relative  $\varepsilon/D = 0$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  dans un ovoïde à canette rétrécie.

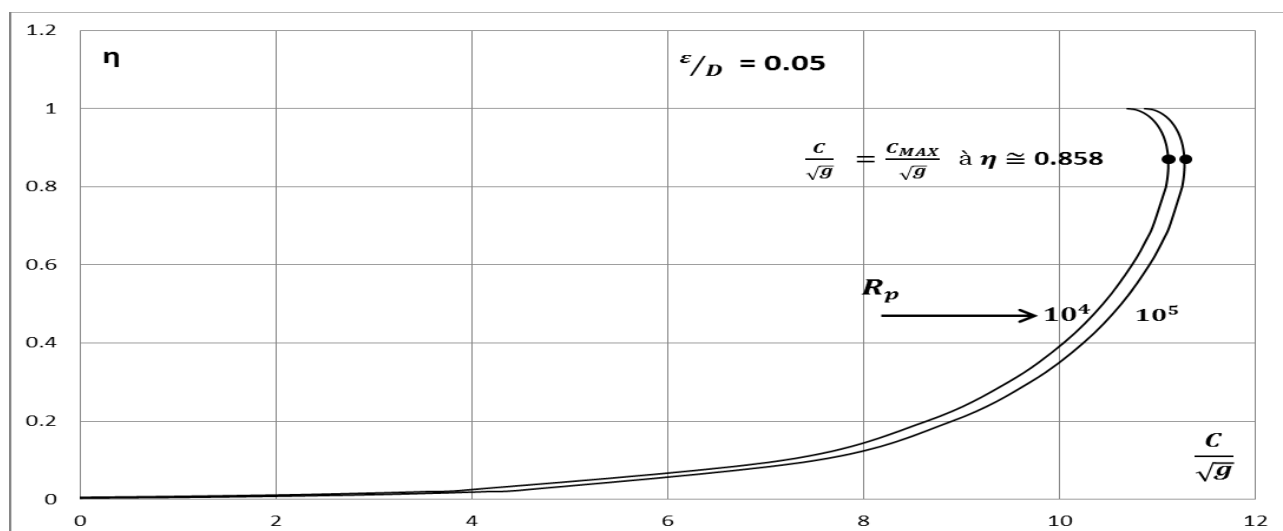


Fig.5.2.2 : Variation de  $C/\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  selon les relations (5.24) ; (5.27) et (5.30) pour une valeur fixée de la rugosité relative  $\epsilon/D = 0,05$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$  dans un ovoïde à canette rétrécie.

Sur les deux figures 5.2.1 ; 5.2.2, nous pouvons remarquer des courbes indiquant la variation de  $C/\sqrt{g}$  en abscisse en fonction de  $\eta$  en ordonnée, pour des valeurs de nombre de *Reynolds* fixées ( $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$  et  $10^7$ ). Dans ces courbes,  $C/\sqrt{g}$  subit un accroissement suite à l'augmentation du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite. Cet accroissement est remarquablement rapide dans une première étape dont le taux de remplissage varie dans l'intervalle  $0 < \eta < 0,3$ . Dans une deuxième étape, où  $\eta > 0,3$  l'accroissement devient très lent jusqu'à ce que le  $C/\sqrt{g}$  prend une valeur maximale pour un même taux de remplissage  $\eta$  dans toutes les courbes égal à 0,858. Ensuite, à cause de la diminution de  $C/\sqrt{g}$ , un changement de direction des courbes se montre avec l'accroissement toujours du taux de remplissage jusqu'à l'état plein de la conduite où  $\eta = 1$ . La singularité notable dans la figure 5.2.2, est que les courbes se confondent au-delà de la valeur  $10^5$  du nombre de *Reynolds*, ce qui explique que la variation de  $C/\sqrt{g}$  ne dépend que du taux de remplissage  $\eta$  en régime turbulent rugueux.

Particulièrement, pour l'ovoïde à canette rétrécie, le coefficient de résistance de *Chézy* atteint un maximum sur les deux figures à la même valeur du taux de remplissage  $\eta \approx 0,858$ , ce qui revient à dire que cette conséquence ne dépend ni de l'état de la paroi interne de la conduite (rugueux ou lisse), ni de la valeur du nombre de *Reynolds*.

A cet effet, à  $\eta \approx 0,858$ ,

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = \frac{C_{max}}{\sqrt{g}}$$

Et :

$$\omega(0,858) = \left[ \frac{0,587}{\sin^{-1}(3 \times 0,858 - 2)} + \frac{1}{4} \right] = 1,2101$$

$$\lambda(0,858) = \left[ 1 + \frac{(3 \times 0,858 - 2)\sqrt{1 - (3 \times 0,858 - 2)^2} + 2,890}{\sin^{-1}(3 \times 0,858 - 2)} \right] = 6,4958$$

Ces deux valeurs de  $\omega(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  mènent à écrire la relation (5.30) de la manière suivante:

$$\frac{C_{MAX}}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{4,965} + \frac{7,8365}{R_P} \right] \quad (5.76)$$

Soit :

$$C_{MAX} = -4\sqrt{2g} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{4,965} + \frac{7,8365}{R_P} \right] \quad (5.77)$$

Cette dernière relation permet la détermination du coefficient de résistance maximal de *Chézy*, à condition que les deux paramètres de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et le nombre de *Reynolds*  $R_P$  soient connus.

Dans le cas contraire, où le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas une donnée du problème, le coefficient de résistance maximal de *Chézy*  $C_{MAX}$  peut être déterminé par la relation (5.71), en affectant au taux de remplissage  $\eta$  la valeur 0,858.

Dont :  $\omega(\eta)=1,2101$  ,  $\lambda(\eta)=6,4958$ .

Donc, la relation (5.71) devient,

$$\frac{C_{MAX}}{\sqrt{g}} = -5,343 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{6,374} + \frac{6,6345}{\bar{R}_P} \right) \quad (5.78)$$

Soit :

$$C_{MAX} = -5,343\sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon/D}{6,374} + \frac{6,6345}{\bar{R}_P} \right) \quad (5.79)$$

Cette expression permet le calcul du coefficient de résistance maximal de *Chézy* sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

Un exemple d'application est suggéré pour illustrer le dernier cas traité, décrivant les démarches en détail pour le calcul de ce coefficient.

**Exemple 3**

Calculer le coefficient de résistance maximal  $C$  de Chézy de l'ovoïde à canette rétrécie d'un taux de remplissage  $\eta = 0,6$ , d'une pente  $i = 2 \cdot 10^{-4}$  et écoulant le débit  $Q = 0,75 \text{ m}^3/\text{s}$ .

La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

**Solution**

Pour  $\eta = 0,6$  , le calcul se fera par les relations du 2<sup>ème</sup> cas d'écoulement. Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , la relation (5.54) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

Pour  $\eta = 0,6$  :

$$\rho(0,6) = \left[ -\frac{8}{3} \sin^{-1} \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \times 0,6 \right) + 2,350 \right] = 2,1498$$

$$\chi(0,6) = 0,813 - 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \times 0,6 \right) - \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \right. \\ \left. \times 0,6 \right) \left[ \sqrt{1 - \frac{9}{16} \left( 1 - \frac{3}{2} \times 0,6 \right)^2} - \frac{5}{4} \right] = 0,7008$$

La relation (5.54) donne le diamètre  $\bar{D}$  :

$$\bar{D} = 0,407 [\rho(\eta)]^{0,2} [\chi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right]^{0,4} = \\ 0,407 [2,1498]^{0,2} [0,7008]^{-0,6} \left[ \frac{0,75}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}} \right]^{0,4} = 1,821 \text{ m}$$

Avec la relation (5.41), on peut calculer le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein:

$$\bar{R}_p = 6,865 \times \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 6,865 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times (1,821)^3}}{10^{-6}} = 7,47 \times 10^5$$

Le calcul direct du coefficient de résistance maximal à l'écoulement  $C_{MAX}$  de Chézy est déterminé par la relation (5.79), sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème :

$$C_{MAX} = -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{6,374} + \frac{6,6345}{\bar{R}_p} \right) = -5,343 \sqrt{g} \log \left( \frac{0,0001/1,821}{6,374} + \frac{6,6345}{7,47 \times 10^5} \right) = \\ 79,608 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

## V.5. Coefficient de résistance de *Manning*

### V.5.1. Expression générale du coefficient de résistance de *Manning*

L'écoulement uniforme à surface libre est également régi par la formule habituelle de *Manning* qui exprime le débit volume  $Q$  et s'écrit :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (5.80)$$

L'expression générale du coefficient  $n$  de *Manning* peut être déduite des relations (5.80) et (5.17). En comparant ces deux relations, nous pouvons en effet déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right] \quad (5.81)$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  est donné par la relation (5.18). La relation (5.81) montre que le coefficient  $n$  de *Manning* est fonction de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , du nombre de *Reynolds*  $R$  et du rayon hydraulique  $R_h$ . La dépendance de  $n$  à  $R_h$  conduit ainsi à déduire que  $n$  varie en fonction du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite.

Cette dépendance peut être étudiée pour les trois cas du taux de remplissage déjà exposés auparavant.

#### ❖ Cas 01 : $\eta \leq 0,023$

En ayant recours aux relations (5.3) et (5.23) qui expriment respectivement le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de *Reynolds*  $R$ , la relation (5.81) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{n} = -8,980\sqrt{g} D^{(-1/6)} [\varphi(\eta)]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{0,925\varphi(\eta)} + \frac{97,463}{R_P [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right] \quad (5.82)$$

En posant comme suit le paramètre adimensionnel  $N$ :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (5.83)$$

On peut écrire :

$$N = -8,980 [\varphi(\eta)]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{0,925\varphi(\eta)} + \frac{97,463}{R_P [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right] \quad (5.84)$$

Le coefficient  $n$  de *Manning* peut être calculé par l'expression (5.82) ou (5.84) si les paramètres  $\eta, \varepsilon, i, D$  et  $\nu$  sont connus.

❖ **Cas 02** :  $0,023 \leq \eta \leq 2/3$

En ayant recours aux relations (5.8) et (5.26) qui expriment respectivement le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de *Reynolds*  $R$ , la relation (5.81) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{n} = -5,769 \sqrt{g} D^{(-1/6)} \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{13,16 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,817}{R_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (5.85)$$

D'après (5.83), on peut écrire :

$$N = -5,769 \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{13,16 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,817}{R_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (5.86)$$

Le coefficient  $n$  de *Manning* peut être calculé par l'expression (5.85) ou (5.86) si les paramètres  $\eta, \varepsilon, i, D$  et  $\nu$  sont connus.

❖ **Cas 03** :  $2/3 \leq \eta \leq 1$

En ayant recours aux relations (5.13) et (5.29) qui expriment respectivement le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de *Reynolds*  $R$ , la relation (5.81) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{n} = -8,980 \sqrt{g} D^{(-1/6)} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{0,925 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{97,463}{R_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (5.87)$$

D'après (5.83), on peut écrire :

$$N = -8,980 \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{(-1/6)} \log \left[ \frac{\varepsilon/D}{0,925 \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)}} + \frac{97,463}{R_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right] \quad (5.88)$$

Le coefficient  $n$  de *Manning* peut être calculé par l'expression (5.87) ou (5.88) si les paramètres  $\eta, \varepsilon, i, D$  et  $\nu$  sont connus.



### V.5.2. Calcul du coefficient de résistance de *Manning* par la méthode du modèle rugueux (MMR)

Les relations (5.82) ou (5.84), (5.85) ou (5.86), (5.87) ou (5.88) permettent de calculer le coefficient  $n$  de *Manning* dans le cas où le diamètre  $D$  de la conduite soit une donnée du problème. Dans le cas contraire, où  $D$  n'est pas une donnée, il est possible de calculer la valeur de  $n$ , en faisant appel à la méthode du modèle rugueux (MMR).

D'après les relations (5.16) et (5.80), on peut tirer la relation suivante :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{c} \quad (5.89)$$

Le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de *Manning* tel que :

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{1/6}}{\bar{c}} \quad (5.90)$$

Sachant que :  $\bar{c} = 8\sqrt{2g}$

La conduite du modèle rugueux est caractérisée par un diamètre  $\bar{D}$  pour une pente longitudinale  $\bar{i}$ , écoulant un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  correspondant à un taux de remplissage  $\bar{\eta}$ .

Pour déterminer le coefficient  $n$  de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

- i.  $\bar{D} \neq D$  : cette condition énonce que le diamètre de la conduite et celui du modèle rugueux de référence sont différents.
- ii.  $\bar{Q} = Q$  : La conduite considérée et celle du modèle rugueux de référence écoulent le même débit volume  $Q$ .
- iii.  $\bar{i} = i$  : La conduite considérée et celle du modèle rugueux de référence ont la même pente longitudinale.
- iv.  $\bar{\eta} = \eta$  : Le taux de remplissage de la conduite considérée est égal à celui du modèle rugueux de référence.
- v.  $\bar{\nu} = \nu$  : La viscosité cinématique de la conduite considérée et celle du modèle rugueux de référence sont les mêmes.

Le débit volume  $\bar{Q}$  écoulé par le modèle rugueux de référence s'écrit, en vertu de la relation de *Manning* :

$$\bar{Q} = Q = \frac{1}{\bar{n}} \bar{A} (\bar{R}_h)^{\frac{2}{3}} \sqrt{\bar{i}} \quad (5.91)$$

L'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le rayon hydraulique  $R_h$  de l'écoulement dans la conduite considérée sont liés à leurs homologues du modèle rugueux de référence  $\bar{A}$  et  $\bar{R}_h$  respectivement par les relations suivantes (*Achour, 2007 ; Achour et Sehtal, 2014*):

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (5.92)$$

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (5.93)$$

En tenant compte des relations (5.92) et (5.93), la relation (5.80) devient :

$$Q = \frac{1}{n} \psi^{\frac{8}{3}} \bar{A} (\bar{R}_h)^{\frac{2}{3}} \sqrt{i} \quad (5.94)$$

Ainsi, à partir des relations (5.91) et (5.94), on peut écrire :

$$n = \bar{n} \psi^{\frac{8}{3}} \quad (5.95)$$

D'après les deux relations (5.90) et (5.95) et en tenant compte de  $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$ , on peut déduire que :

$$n = \frac{\frac{1}{\bar{R}_h^6} \psi^{\frac{8}{3}}}{8\sqrt{2g}} \quad (5.96)$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est donné par la relation générale (5.43) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{R}_h}{19} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}}$$

Eventuellement, trois cas peuvent se présenter :

❖ **Cas 01 :**       $\eta \leq 0,023$

$\psi$ , est donné par la relation (5.44) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875\varphi(\eta)} + \frac{82,514}{\bar{R}_p[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{2}{5}}$$

Ainsi, d'après la relation (5.3), on peut écrire :

$$\bar{R}_h = \frac{\bar{D}}{16} \varphi(\eta) \quad (5.97)$$

Donc, la relation (5.96) devient :

$$n = \frac{0,124}{\sqrt{g}} [\bar{D} \varphi(\eta)]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875\varphi(\eta)} + \frac{82,514}{\bar{R}_p[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \quad (5.98)$$

❖ **Cas 02** :  $0,023 \leq \eta \leq 2/3$

$\psi$ , est donné par la relation (5.57) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{16,89 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,538}{\bar{R}_p \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{\frac{2}{5}}$$

Ainsi, d'après la relation (5.8), on peut écrire :

$$\bar{R}_h = \frac{8}{9} \bar{D} \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \quad (5.99)$$

Donc, la relation (5.96) devient :

$$n = \frac{0,193}{\sqrt{g}} \left[ \bar{D} \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{16,89 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,538}{\bar{R}_p \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{16}{15}} \quad (5.100)$$

❖ **Cas 03** :  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$\psi$ , est donné par la relation (5.69) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875 \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]} + \frac{82,514}{\bar{R}_p \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{\frac{2}{5}}$$

Ainsi, d'après la relation (5.13), on peut écrire :

$$\bar{R}_h = \frac{1}{16} \bar{D} \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \quad (5.101)$$

Donc, la relation (5.96) devient :

$$n = \frac{0,124}{\sqrt{g}} \left[ \bar{D} \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875 \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]} + \frac{82,514}{\bar{R}_p \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{16}{15}} \quad (5.102)$$

Les relations (5.98), (5.100), (5.102), expriment le coefficient  $n$  de *Manning* en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$  et des caractéristiques  $\bar{D}$  et  $\bar{R}_p$  du modèle rugueux de référence. Le diamètre  $\bar{D}$  est donné selon le cas étudié par les relations suivantes :

**1<sup>er</sup> cas** : la relation (5.38) ;

**2<sup>ème</sup> cas** : la relation (5.54);

**3<sup>ème</sup> cas** : la relation (5.66).

Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_p$  est donné pour les 03 cas par la relation (5.41).

**Exemple 4**

Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,01$ , le débit  $Q = 0,0001 \text{ m}^3/\text{s}$  et la pente d'ovoïde à canette rétrécie  $i = 2 \cdot 10^{-4}$ , calculer les coefficients de résistance  $C$  et  $n$  de *Chézy* et de *Manning* respectivement par la méthode du modèle rugueux.

La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

**Solution**

Si :  $\eta = 0,01$ , le calcul se fera par les relations du 1<sup>er</sup> cas d'écoulement.

Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , la relation (5.38) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

D'après les relations (5.4) et (5.5) : à  $\eta = 0,01$

On a: 
$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 12 \eta) = \cos^{-1}(1 - 12 \times 0,01) = 0,495$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{(1-12 \eta)\sqrt{24\eta(1-6\eta)}}{\cos^{-1}(1-12 \eta)} = 1 - \frac{(1-12 \times 0,01)\sqrt{24 \times 0,01(1-6 \times 0,01)}}{\cos^{-1}(1-12 \times 0,01)} = 0,155$$

La relation (5.38) donne le diamètre  $\bar{D}$  :

$$\bar{D} = 4[\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right]^{0,4} = 4[\sqrt{2} \times 0,495]^{-0,4} [0,155]^{-0,6} \left[ \frac{0,0001}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}} \right]^{0,4} = 1.232 \text{ m} .$$

Avec la relation (5.41), on peut calculer le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_p$  à l'état plein :

$$\bar{R}_p = 6,865 \times \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 6,865 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-0,4} \times (1,232)^3}}{10^{-6}} = 415624,162$$

La relation (5.46) permet le calcul direct du coefficient de résistance  $C$  de *Chézy*, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$\begin{aligned}
 C &= -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875\varphi(\eta)} + \frac{82,514}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right] \\
 &= -5,343 \sqrt{9,81} \left[ \log \left( \frac{10^{-4}/1,232}{1,1875 \times 0,155} + \frac{82,514}{415624,162 \times [0,155]^{3/2}} \right) \right] \\
 &= 39,9186534m^{0,5}/s \cong 39,92m^{0,5}/s
 \end{aligned}$$

La relation (5.98) permet le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de *Manning*, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{0,124}{\sqrt{g}} [\bar{D} \varphi(\eta)]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875\varphi(\eta)} + \frac{82,514}{\bar{R}_P[\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} = \\
 &= \frac{0,124}{\sqrt{9,81}} [1,232 \times 0,155]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{10^{-4}/1,232}{1,1875 \times 0,155} + \frac{82,514}{415624,162 \times [0,155]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} = \\
 &= 0,01189113m^{-1/3} s
 \end{aligned}$$

### Exemple 5

Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,5$ , le débit  $Q = 0,2 m^3/s$  et la pente d'ovoïde à canette rétrécie  $i = 2 \cdot 10^{-4}$ , calculer les coefficients de résistance  $C$  et  $n$  de *Chézy* et de *Manning* respectivement par la méthode du modèle rugueux.

La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} m^2/s$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} m$

### Solution

Si :  $\eta = 0,5$ , le calcul se fera par les relations du 2<sup>ème</sup> cas d'écoulement.

Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , la relation (5.54) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

D'après (5.9) et (5.10) à  $\eta = 0,5$

On a :

$$\begin{aligned}
 \rho(\eta) &= \left[ -\frac{8}{3} \sin^{-1} \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \eta \right) + 2,350 \right] = \left[ -\frac{8}{3} \sin^{-1} \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \times 0,5 \right) + 2,350 \right] = 1,847 \\
 \chi(\eta) &= 0,813 - 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \eta \right) - \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \eta \right) \left[ \sqrt{1 - \frac{9}{16} \left( 1 - \frac{3}{2} \eta \right)^2} - \frac{5}{4} \right] = 0,813 - \\
 &= 2 \sin^{-1} \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \times 0,5 \right) - \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \times 0,5 \right) \left[ \sqrt{1 - \frac{9}{16} \left( 1 - \frac{3}{2} \times 0,5 \right)^2} - \frac{5}{4} \right] = 0,536
 \end{aligned}$$

La relation (5.54) donne le diamètre  $\bar{D}$  :  $\bar{D} = 0,407[\rho(\eta)]^{0,2} [\chi(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right]^{0,4} =$   
 $0,407[1,847]^{0,2} [0,536]^{-0,6} \left[ \frac{0,2}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}} \right]^{0,4} = 1,223 \text{ m}$

Avec la relation (5.41), on peut calculer le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_P$  à l'état plein:

$$\bar{R}_P = 6,865 \times \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 6,865 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-0,4} \times (1,223)^3}}{10^{-6}} = 411155,854$$

la relation (5.58) permet le calcul direct du coefficient de résistance  $C$  de *Chézy*, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$C = -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{16,89 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,538}{\bar{R}_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right] = -5,343 \sqrt{9,81} \left[ \log \left( \frac{10^{-4}/1,223}{16,89 \times \frac{0,536}{1,847}} + \frac{1,538}{411155,854 \times \left[ \frac{0,536}{1,847} \right]^{3/2}} \right) \right] = 70,9847038 \text{ m}^{0,5}/\text{s} \cong 70,985 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

La relation (5.100), permet le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de *Manning*, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$n = \frac{0,193}{\sqrt{g}} \left[ \bar{D} \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{16,89 \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)}} + \frac{1,538}{\bar{R}_P \left[ \frac{\chi(\eta)}{\rho(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} =$$

$$\frac{0,193}{\sqrt{9,81}} \left[ 1,223 \times \frac{0,536}{1,847} \right]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{10^{-4}/1,223}{16,89 \times \frac{0,536}{1,847}} + \frac{1,538}{411155,854 \times \left[ \frac{0,536}{1,847} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} = 0,01110026 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$$

### **Exemple 6**

Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,7$ , le débit  $Q = 0,8 \text{ m}^3/\text{s}$  et la pente d'ovoïde à canette rétrécie  $i = 2 \cdot 10^{-4}$ , calculer les coefficients de résistance  $C$  et  $n$  de *Chézy* et de *Manning* respectivement par la méthode du modèle rugueux.

La viscosité cinématique :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ;

La rugosité absolue :  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ .

**Solution**

Si ;  $\eta = 0,7$  , le calcul se fera par les relations du 3<sup>ème</sup> cas d'écoulement. Ainsi, avec les paramètres connus  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , la relation (5.66) permet le calcul explicite du diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence.

D'après (5.14) , (5.15.a ) et (5.15.b ) à  $\eta = 0,7$

On a :

$$\omega(\eta) = \left[ \frac{0,587}{\sin^{-1}(3\eta - 2)} + \frac{1}{4} \right] = \left[ \frac{0,587}{\sin^{-1}(3 \times 0,7 - 2)} + \frac{1}{4} \right] = 6,114$$

$$\tau(\eta) = \sin^{-1}(3\eta - 2) = \sin^{-1}(3 \times 0,7 - 2) = 0,1$$

$$\lambda(\eta) = \left[ 1 + \frac{(3\eta-2)\sqrt{1-(3\eta-2)^2+2,890}}{\sin^{-1}(3\eta-2)} \right] = \left[ 1 + \frac{(3 \times 0,7-2)\sqrt{1-(3 \times 0,7-2)^2+2,890}}{\sin^{-1}(3 \times 0,7-2)} \right] = 30,839$$

La relation (5.66) donne le diamètre  $\bar{D}$  :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \tau(\eta) \right]^{-0,4} [\omega(\eta)]^{0,2} [\lambda(\eta)]^{-0,6} \left[ \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right]^{0,4} = \\ & \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0,1 \right]^{-0,4} [6,114]^{0,2} [30,839]^{-0,6} \left[ \frac{0,8}{\sqrt{9,81 \times 0,0002}} \right]^{0,4} = 1,684 \text{ m} \end{aligned}$$

Avec la relation (5.41), on peut calculer le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein :

$$\bar{R}_p = 6,865 \times \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 6,865 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 2 \times 10^{-4} \times (1,684)^3}}{10^{-6}} = 664703,114$$

La relation (5.70) permet le calcul direct du coefficient de résistance  $C$  de Chézy, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$\begin{aligned} C &= -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875 \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]} + \frac{82,514}{\bar{R}_p \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right] = -5,343 \sqrt{g} \left[ \log \left( \frac{10^{-4}/1,684}{1,1875 \times \frac{30,839}{6,114}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{82,514}{664703,114 \times \left[ \frac{30,839}{6,114} \right]^{3/2}} \right) \right] = 78,326 \text{ m}^{0,5}/\text{s} \end{aligned}$$

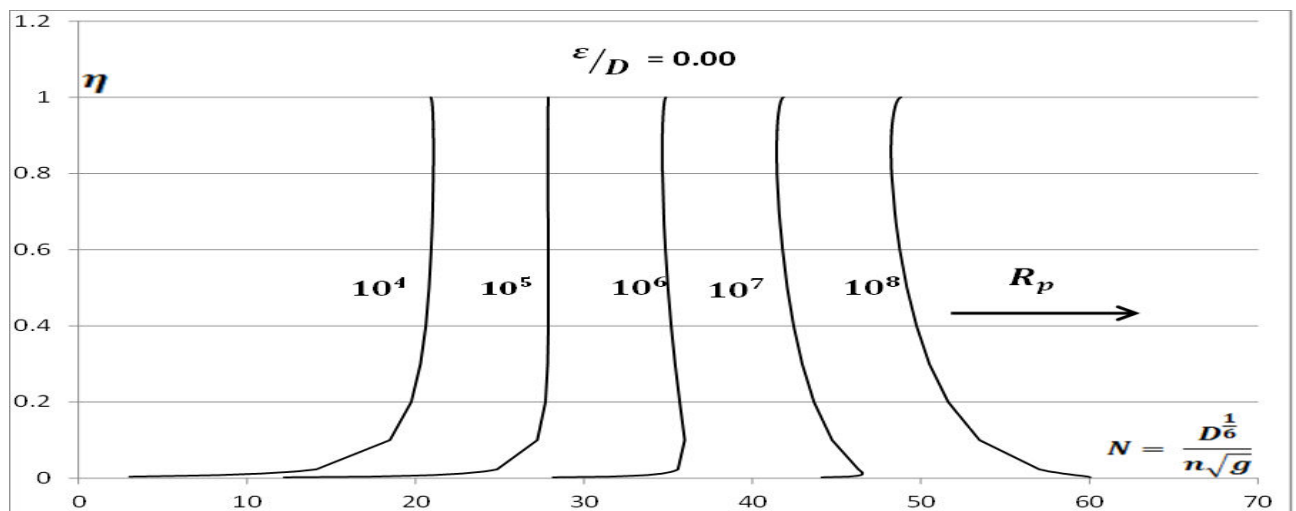
La relation (5.102), permet le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de *Manning*, sans que le diamètre  $D$  de la conduite ne soit une donnée du problème.

$$n = \frac{0,124}{\sqrt{g}} \left[ \bar{D} \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}}{1,1875 \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]} + \frac{82,514}{\bar{R}_P \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\omega(\eta)} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{16}{15}} =$$

$$\frac{0,124}{\sqrt{g}} \left[ 1,684 \times \frac{30,839}{6,114} \right]^{\frac{1}{6}} \left[ -\log \left( \frac{10^{-4}/1,684}{1,1875 \times \frac{30,839}{6,114}} + \frac{82,514}{664703,114 \times \left[ \frac{30,839}{6,114} \right]^{3/2}} \right) \right]^{-\frac{16}{15}} = 0,011 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$$

### V.5.3. Variation du coefficient de *Manning*

Dans les figures qui suivent, il a été établi des courbes montrant la variation du paramètre adimensionnel  $N$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  pour différentes valeurs de rugosité relative  $\varepsilon/D$  et plusieurs valeurs du nombre de *Reynolds* à l'état plein  $R_P$ .



(a)

Fig.5.3 (a) : Variation de  $N = D^{1/6} / n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_P$ . Courbes tracées selon les relations (5.84), (5.86) et (5.88) dans un ovoïde à canette rétrécie.



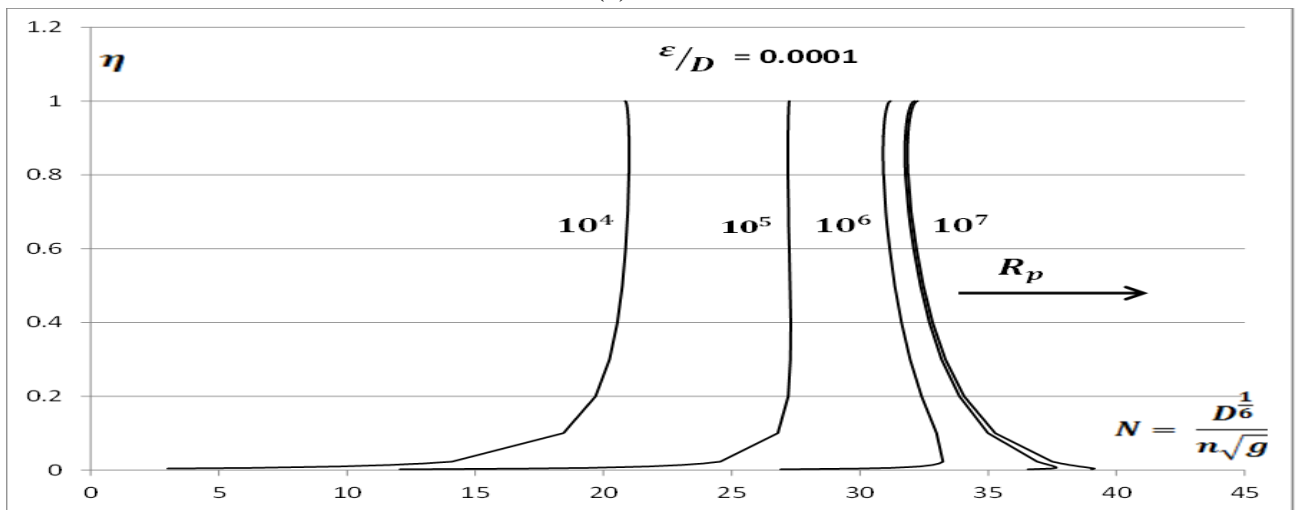
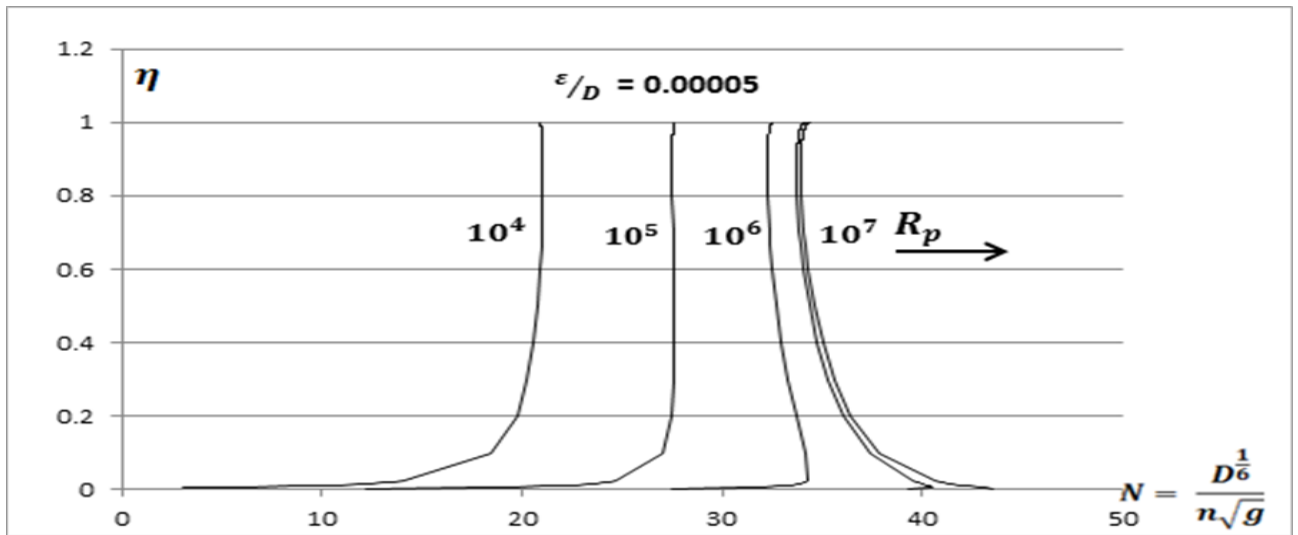
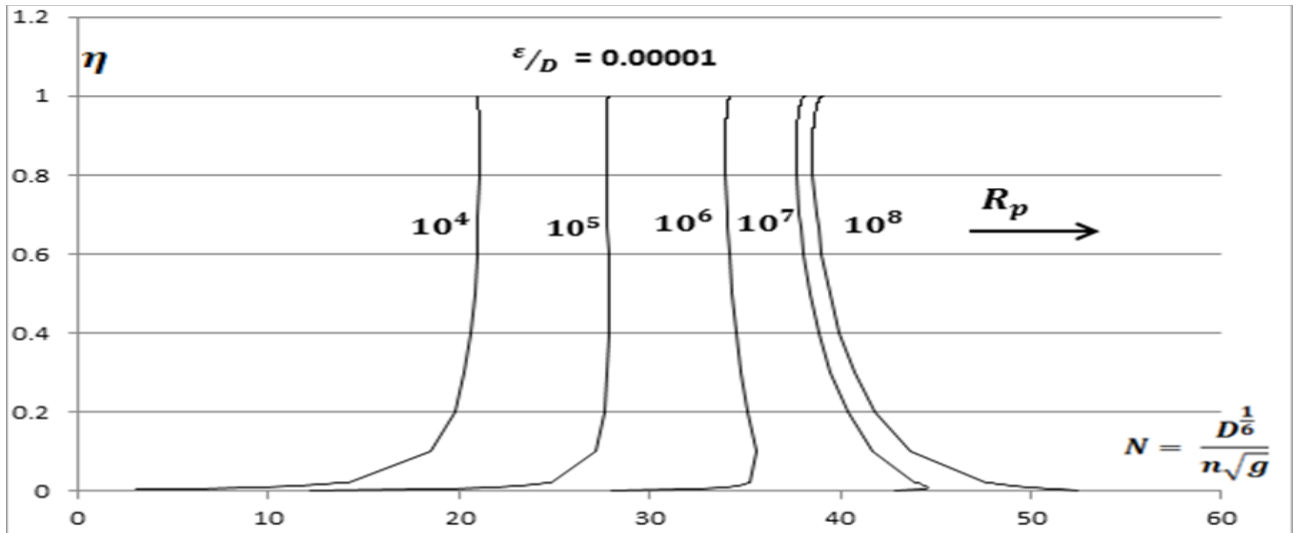
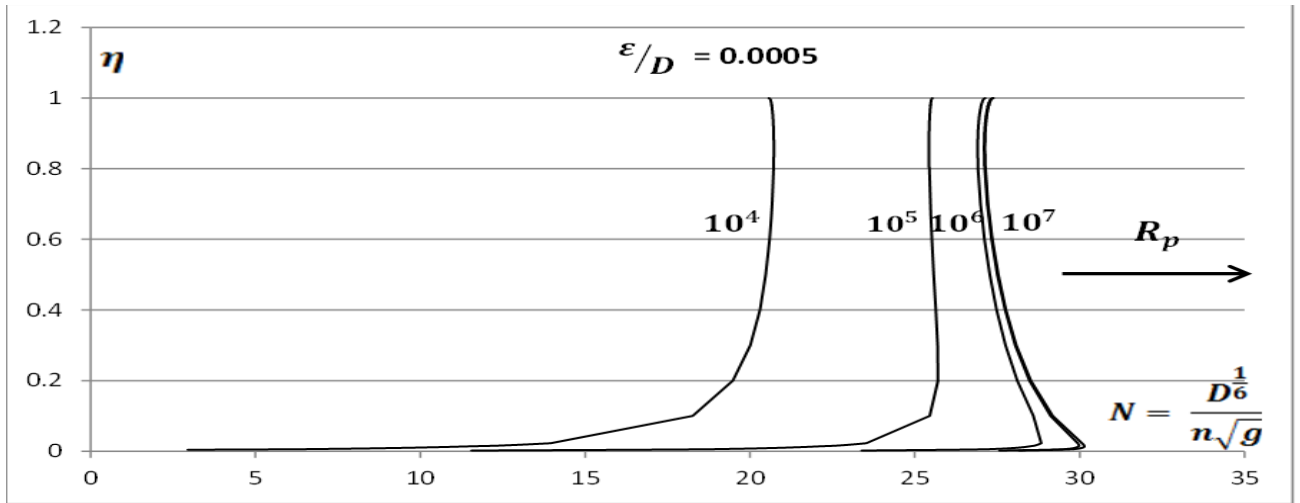
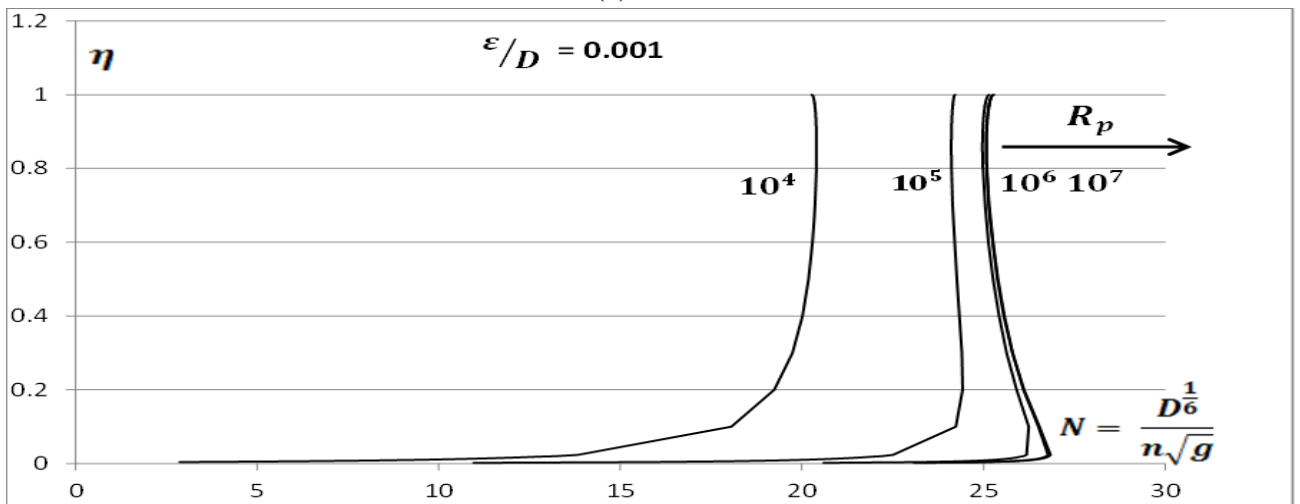


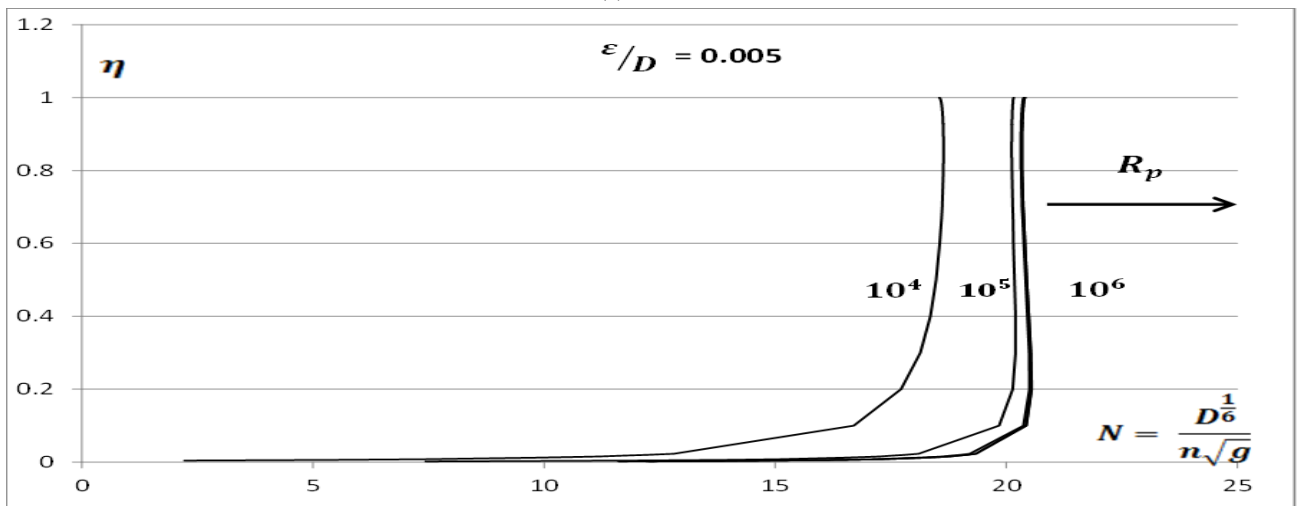
Fig.5.3 (b) ; (c) ; (d) : Variation de  $N = D^{1/6} / n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixes de la rugosité relative  $\epsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon les relations (5.84), (5.86) et (5.88) dans un ovoïde à canette rétrécie.



(e)

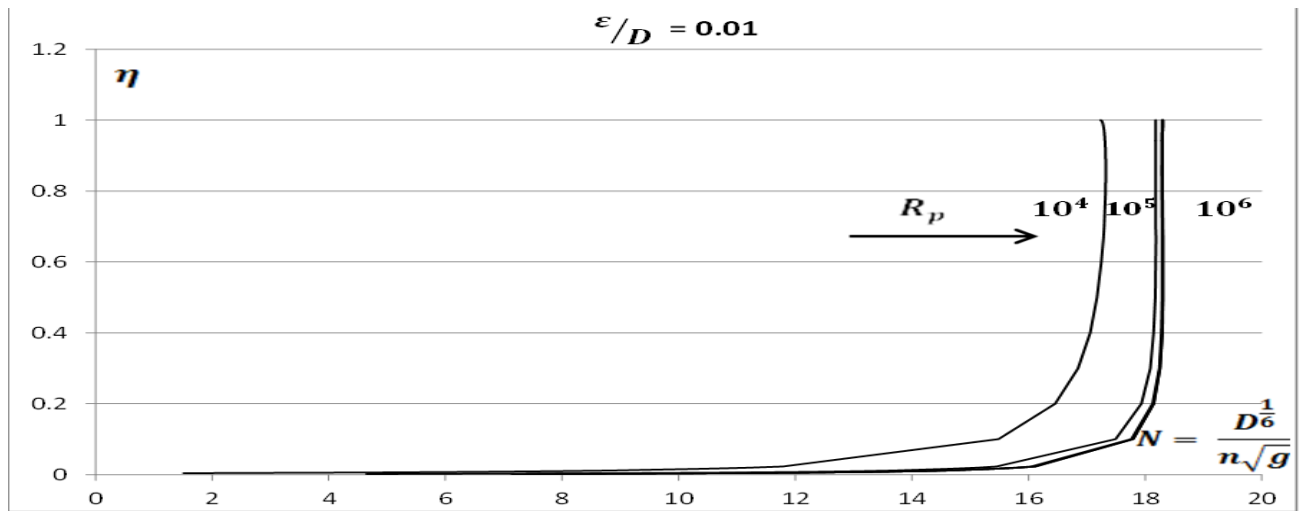


(f)



(g)

Fig.5.3 (e) ; (f) ; (g) : Variation de  $N = D^{1/6} / n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixes de la rugosité relative  $\epsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon les relations (5.84), (5.86) et (5.88) dans un ovoïde à canette rétrécie.



(h)

Fig.5.3 (h) : Variation de  $N = D^{1/6} / n\sqrt{g}$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour des valeurs fixées de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Courbes tracées selon les relations (5.84), (5.86) et (5.88) dans un ovoïde à canette rétrécie.

Les formes des courbes et leurs variations peuvent révéler beaucoup de remarques et commentaires qui sont décrit dans ce qui suit :

- Pour les différentes valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  et pour des faibles taux de remplissage  $\eta$ , le coefficient  $N$  subit, généralement, une augmentation remarquable ;
- Pour  $\eta > 0,2$ , le coefficient  $N$  subit une variation très faible et devient constant à l'augmentation de  $\eta$ , d'où la variation de  $\eta$  n'a que peu d'influence sur la valeur du coefficient  $N$ . La constance du paramètre  $N$  est remarquable pour la valeur  $R_p = 10^5$ . Au-delà de cette dernière valeur, les courbes commencent à être concaves. La concavité de chaque courbe présente une valeur minimale de  $N$  qui n'est pas vraiment remarquable vu l'écart insignifiant entre cette valeur minimale et les autres valeurs que peut prendre le paramètre  $N$ . Dans toutes les courbes établies, le paramètre  $N$  prend ses valeurs minimales au taux de remplissage  $\eta \cong 0,858$ , valeur pour laquelle le coefficient  $C$  de Chézy devient maximal ;
- A l'augmentation de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ , les courbes tendent à perdre leurs concavité pour des valeurs de  $R_p > 10^5$ ;
- Pour une valeur fixée de  $\eta$ , le coefficient  $N$  s'accroît avec l'augmentation du nombre de Reynolds  $R_p$  et diminue avec l'augmentation de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  ;
- A l'accroissement simultané de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ , les courbes se rapprochent et tendent à se confondre au-delà d'une valeur bien déterminée de  $R_p$ , notamment, dans les exemples où la rugosité relative égale à 0,0001 et égale à 0,00005 pour  $R_p > 10^7$  et les exemples dans lequel la rugosité relative égale à 0,01 et égale à 0,005 pour  $R_p > 10^5$ .

## V.6. Conclusion

Dans ce dernier chapitre, les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* dans la l'ovoïde à canette rétrécie ont été exprimés par plusieurs formules. Tenant compte de la forme de la conduite étudiée, la détermination de ses caractéristiques géométriques a révélé trois cas à traiter ( $\eta \leq 0,023$  ;  $0,023 \leq \eta \leq 2/3$  ;  $2/3 \leq \eta \leq 1$  ) selon la position de la profondeur normale du liquide en écoulement.

Des expressions générales (5.24), (5.27), (5.30), (5.82), (5.85), (5.87) sont obtenues pour la détermination explicite des coefficients de résistance  $C$  de *Chézy* ou  $n$  de *Manning* dépendant de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  , du taux de remplissage  $\eta$  et du nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite  $R_p$  . Cependant, dans le cas où le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas une donnée du problème, les relations (5.46), (5.58), (5.70), (5.98), (5.100), (5.102) sont obtenues en utilisant la méthode du modèle rugueux (MMR) pour calculer directement le coefficient de résistance  $C$  de *Chézy* ou  $n$  de *Manning* en fonction des paramètres  $\varepsilon$ ,  $\bar{D}$ ,  $\eta$  et  $\bar{R}_p$  .

Une méthode simplifiée est proposée pour le calcul explicite du coefficient  $C$  de *Chézy*. Elle est basée sur la (MMR) et a l'avantage de pouvoir utiliser un nombre limité de données qui sont le débit volume  $Q$ , la pente  $i$  de la conduite, la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$ . Enfin, une étude de variation du coefficient de *Chézy* et de *Manning* chacun à part , en fonction du taux de remplissage de la conduite est effectuée à travers l'établissement des courbes, en affectant des valeurs fixes à la rugosité relative ainsi qu'au nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite. Les courbes ont montré que le coefficient de résistance de *Chézy* atteint un maximum au taux de remplissage  $\eta \cong 0,858$  . Le coefficient de résistance maximal de *Chézy*  $C_{MAX}$  a été exprimé par les deux expressions (5.77) et (5.79).

Ainsi, six exemples d'application pratiques ont été suggérés pour pouvoir consolider les travaux qui ont été réalisés. Chaque application expose clairement dans un ordre chronologique les démarches et les étapes de calcul pour chaque méthode ou relations citées dans ce chapitre.

## **Conclusion générale**

## Conclusion générale

Le travail élaboré avait pour but dans toutes ses parties, l'étude des coefficients de résistances à l'écoulement uniforme particulièrement le coefficient de *Chézy* et le coefficient de *Manning*. Ces coefficients issus des formules usuelles des mêmes auteurs, depuis leurs premières apparitions, leurs évaluations a créé une polémique chez les scientifiques spécialistes du domaine. Beaucoup de réflexions et travaux ont été réalisés dans ce sens, parmi ceux qui étaient qualifiés de bon et d'autres non. Une grande partie de ces œuvres a été énoncée dans le premier chapitre exposant un état de connaissance d'importants efforts fournis dans cet axe de recherche.

Dans ce premier chapitre, nous avons commencé par donner les conditions d'établissement d'un écoulement uniforme. Puis, à la base d'un schéma de définition montrant les différentes forces intervenant dans un volume de contrôle de l'écoulement uniforme, nous avons pu démontrer la formule universelle de *Chézy* en fonction de son coefficient de résistance. Trois importantes relations ont été présentées exprimant ce coefficient en fonction des caractéristiques hydrauliques de l'écoulement. Celle de *Ganguillet – Kutter* est exprimée en fonction de la pente géométrique du canal, le rayon hydraulique  $R_h$  et le coefficient de rugosité  $n$ . Celle de *Bazin* est aussi exprimée en fonction du rayon hydraulique  $R_h$  et du coefficient de rugosité  $m$ . Tandis que la troisième relation de *Powell*, d'une manière implicite, a exprimé le coefficient  $C$  en fonction du nombre de *Reynolds*, du rayon hydraulique et de la rugosité absolue des parois du canal.

La deuxième formule habituelle de *Manning-Strickler* qui exprimait la vitesse moyenne d'écoulement a été amplement discutée notamment en ce qui concerne l'unité de son coefficient de résistance  $n$  et sa relation avec la rugosité absolue  $\varepsilon$  dans la relation de *Hager*.

Il a été conclu, qu'il n'existait aucune méthode exacte qui permet l'évaluation du coefficient de résistance de *Manning*. Dans ce sens et d'après la bibliographie, des étapes ont été prescrites par plusieurs auteurs conditionnant la bonne évaluation du coefficient de *Manning*  $n$ .

La formule (1.16) de *Darcy – Weisbach* est aussi présentée pour exprimer la proportionnalité entre le gradient de la perte de charge, la vitesse moyenne de l'écoulement et le diamètre hydraulique par le facteur de proportionnalité appelé le coefficient de frottement  $f$ . cette

formule est aussi bien valable pour les canaux ouverts que pour les conduites fermées. L'évaluation du coefficient de frottement  $f$  est aussi attribuée par plusieurs auteurs dans des relations implicites comme celle de *Colebrook – White* et autres explicites comme celles de *Achour et Swamee*.

Le premier chapitre a été accompli par le calcul de l'écoulement uniforme, en commençant par donner la distribution de la vitesse dans un écoulement uniforme suivi par l'équation de *Keulegan* donnant la vitesse moyenne d'un écoulement turbulent dans les canaux ouverts. La notion de facteur de section a été évoquée dans le calcul de l'écoulement uniforme après avoir expliqué la notion de conductivité donnée par le facteur  $K$ . Il représente la capacité d'évacuation de la conduite ou du canal, dont  $K$  est directement lié au débit volume  $Q$  (Relation 1.56).

Notre essentielle contribution paraît dans les quatre chapitres qui suivent, où l'étude a pris un aspect plus pratique par le passage directement à exprimer les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* et examiner leurs variations aux différents cas étudiés.

Dans le deuxième chapitre, nous avons commencé notre tâche par l'établissement d'une relation générale du coefficient de *Chézy* dans un canal de forme rectangulaire, ayant recours à la relation de *Chézy* et celle de *Achour et Bedjaoui (2006)*. La relation (2.16) dépend de trois paramètres qui sont la rugosité relative  $\varepsilon / b$ , le paramètre de forme  $\eta$  et le nombre de *Reynolds* modifié  $R^*$ . Cela nous a permis de mener une étude ayant pour objectif d'examiner à travers des courbes établies la variation du coefficient de *Chézy* en fonction du paramètre de forme en faisant fixer la valeur de la rugosité relative et l'on fait varier le nombre de *Reynolds* modifié. Plusieurs commentaires ont été faits sur ces courbes, dont le plus important parmi ceux-ci est plus la rugosité relative augmente et plus le coefficient de *Chézy* diminue, quelle que soit la valeur du nombre de *Reynolds*. En disposant des données qui sont le débit volume  $Q$ , la largeur  $b$ , la pente  $i$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement, l'expression (2.16) peut évaluer le coefficient de *Chézy*  $C$ , si le paramètre de forme  $\eta$  soit connu. Dans le cas contraire, nous avons fait appel à la méthode du modèle rugueux (MMR) pour calculer le paramètre de forme  $\eta$ . Dans le but d'éclaircir ce calcul l'exemple 1 a été proposé, décrivant tout le détail de calcul pour arriver à estimer le coefficient de *Chézy*  $C$ . Au second volet du deuxième chapitre, aussi, une expression générale a été tirée exprimant le coefficient  $n$  de *Manning* par la relation (2.50) et en termes de coefficient adimensionnel  $N$  par la relation (2.52), éventuellement en fonction des paramètres

$\eta, \varepsilon, b, i$  et  $\nu$ . Suite à cela, d'après la relation (2.52), l'étude de variation du coefficient de *Manning*, comme pour le coefficient de *Chézy* a été effectuée en établissant des courbes montrant la variation du coefficient adimensionnel  $N$  en fonction du paramètre de forme  $\eta$ . Dans le cas où la largeur  $b$  du canal rectangulaire n'est pas disponible, la relation (2.50) ne peut pas être applicable pour calculer le coefficient de résistance de *Manning*  $n$ . A cet effet, nous avons fait ainsi, appel à la méthode du modèle rugueux (MMR) qui nous a permis d'exprimer  $n$  par la relation (2.68) en fonction des paramètres  $\eta$  et  $\varepsilon$ , et des caractéristiques  $\bar{b}$  et  $\bar{R}^*$  du modèle rugueux. Un deuxième exemple a été mis pour détailler les démarches nécessaires au calcul du coefficient de *Manning*.

Le troisième chapitre avait pour objectif la détermination des coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* à l'écoulement uniforme dans la conduite de forme circulaire. Les caractéristiques géométriques et hydrauliques de la conduite de forme circulaire en fonction du taux de remplissage  $\eta$  ont été désignées. Les deux expressions générales (3.14) et (3.42) sont extraites pour exprimer explicitement les coefficients de résistance  $C$  de *Chézy* et  $n$  de *Manning* respectivement. Ces formules dépendent de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ , du taux de remplissage  $\eta$  et du nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite  $R_p$ . Selon ces deux relations, la variation du coefficient de *Chézy* et de *Manning* en fonction du taux de remplissage de la conduite a été effectuée à travers des courbes qui ont été montées en affectant des valeurs fixes à la rugosité relative ainsi qu'au nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite. Les courbes ont montré que les deux coefficients de résistance atteignent leurs valeurs extrêmes au taux de remplissage  $\eta \cong 0,8128$ . A l'issue de cette valeur du taux de remplissage, les expressions (3.37) et (3.39) ont été établies pour déterminer le coefficient de résistance maximal de *Chézy*  $C_{MAX}$ .

Dans le cas où le diamètre  $D$  de la conduite circulaire pouvait être un paramètre inconnu, ou autrement dit, s'il s'agit de chercher ce paramètre pour dimensionner la conduite, les relations (3.14) et (3.42) exprimant le coefficient de *Chézy* et de *Manning* respectivement, ne sont plus valables. A cet effet, les relations (3.30) et (3.54), sont obtenues en utilisant la méthode du modèle rugueux (MMR) pour calculer directement ces coefficients  $C$  et  $n$  en fonction des paramètres  $\varepsilon, \bar{D}, \eta$  et  $\bar{R}_p$  sans que le diamètre de la conduite soit connu.

Une méthode simplifiée est proposée facilitant encore une fois le calcul du coefficient de *Chézy*. Elle est basée sur la (MMR) et a l'avantage de pouvoir utiliser un nombre limité de



données qui sont le débit volume  $Q$ , la pente  $i$  de la conduite, la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$ .

Dans le quatrième chapitre, selon la profondeur du liquide dans la conduite en forme de fer à cheval, trois cas d'étude ont été révélés ( $\eta \leq 0,088562171$ ;  $0,088562171 \leq \eta \leq 0,5$ ;  $0,5 \leq \eta \leq 1$ ) pour évaluer les coefficients de résistances de *Chézy* et de *Manning*.

Les caractéristiques géométriques et hydrauliques de la conduite en question à savoir le périmètre mouillé, l'aire de la section mouillée et le rayon hydraulique ont été établies en fonction du taux de remplissage  $\eta$ . En exploitant ces caractéristiques et tenant compte des relations usuelles de *Chézy* et de *Manning* ainsi que celle de *Achour* et *Bedjaoui*(2006), les relations générales (4.24), (4.27), (4.30), (4.82), (4.85) et (4.87) des coefficients de résistance de *Chézy* ou de *Manning* ont été obtenue pour chaque cas d'étude. Certainement, ces relations dépendent de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ , du taux de remplissage  $\eta$  et du nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite  $R_p$ . Au regard de ces relations, nous constatons que nous ne pouvons pas calculer les coefficients  $C$  de *Chézy* ou  $n$  de *Manning* si le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas connu. A la suite de cela, les relations (4.46), (4.58), (4.70), (4.98), (4.100) et (4.102) sont extraites en utilisant la méthode du modèle rugueux (MMR) pour calculer directement le coefficient de résistance  $C$  de *Chézy* ou  $n$  de *Manning* en fonction des paramètres  $\varepsilon$ ,  $\bar{D}$ ,  $\eta$  et  $\bar{R}_p$ .

Dans cette conduite en forme de fer à cheval fermée et avec un nombre limité de données  $Q$ ,  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$ , la méthode simplifiée dérivée de la (MMR) a été ainsi proposée pour calculer d'une manière explicite et simplifiée le coefficient  $C$  de *Chézy*.

Pour dresser des courbes montrant la variation du coefficient de *Chézy* ou de *Manning* en fonction du taux de remplissage de la conduite, nous avons fixé les valeurs de la rugosité relative pour plusieurs valeurs du nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite. A travers ces courbes, le coefficient de résistance de *Chézy* atteint un maximum au taux de remplissage  $\eta \cong 0,8108$  d'où la possibilité de tirer les expressions (4.77) et (4.79) permettant la détermination du coefficient de résistance maximal de *Chézy*  $C_{MAX}$ .

Dans le dernier chapitre, les coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* dans l'ovoïde à canette rétrécie ont été exprimés par plusieurs formules. Tenant compte de la forme de la conduite étudiée, la détermination de ses caractéristiques géométriques a révélé trois cas

à traiter ( $\eta \leq 0,023$  ;  $0,023 \leq \eta \leq 2/3$  ;  $2/3 \leq \eta \leq 1$  ) selon la position de la profondeur normale du liquide en écoulement.

Les expressions générales (5.24), (5.27), (5.30), (5.82), (5.85) et (5.87) sont obtenues pour la détermination explicite des coefficients de résistance  $C$  de *Chézy* ou  $n$  de *Manning* dépendant de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  , du taux de remplissage  $\eta$  et du nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite  $R_p$  . Cependant, dans le cas où le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas une donnée du problème, les relations (5.46), (5.58), (5.70), (5.98), (5.100) et (5.102) sont obtenues en utilisant la méthode du modèle rugueux (MMR) pour calculer directement le coefficient de résistance  $C$  de *Chézy* ou  $n$  de *Manning* en fonction des paramètres  $\varepsilon$ ,  $\bar{D}$ ,  $\eta$  et  $\bar{R}_p$  .

Une méthode simplifiée est proposée pour le calcul explicite du coefficient  $C$  de *Chézy*. Elle est basée sur la (MMR) et a l'avantage de pouvoir utiliser un nombre limité de données qui sont le débit volume  $Q$ , la pente  $i$  de la conduite, la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$ . Enfin, une étude de variation du coefficient de *Chézy* et de *Manning* chacun à part, en fonction du taux de remplissage de la conduite est effectuée à travers l'établissement des courbes, en affectant des valeurs fixes à la rugosité relative ainsi qu'au nombre de *Reynolds* à l'état plein de la conduite. Les courbes ont montré que le coefficient de résistance de *Chézy* atteint un maximum au taux de remplissage  $\eta \cong 0,858$ , d'où la possibilité de tirer les expressions (5.77) et (5.79) permettant la détermination du coefficient de résistance maximal de *Chézy*  $C_{MAX}$  selon le cas du diamètre qu'il soit connu ou non.

## **RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- Achour B. 2007. Calcul des conduites et canaux par la MMR (Conduites et canaux en charge). Tome 1. Biskra (Algérie): Larhyss Edition Capitale. ISBN 978-9961-9701-0-2 pp.610.
- Achour B. 2014. Computation of normal depth in parabolic cross sections using the rough model method. *Open Civ. Eng.J.* Nr 8 p. 213-218. <http://dx.doi.org/10.2174/1874149501408010213>.
- Achour B. 2015a. Analytical solution for normal depth problem in a vertical U-shaped open channel using the rough model method. *J. Sci. Res. Rep.* Nr 6(6) p.468-475. <http://doi.org/10.9734/JSRR/2015/16682>.
- Achour B. 2015b. Chezy's resistance coefficient in a circular conduit. *Open Civ. Eng.J.* Nr 9 p. 187-195. <http://dx.doi.org/10.2174/1874149501509010187>.
- Achour B. 2015c. Chezy's resistance coefficient in a rectangular channel. *J. Sci. Res. Rep.* Nr 7(5) p. 338-347. <http://doi.org/10.9734/JSRR/2015/18385>.
- Achour B., Bedjaoui A. 2006. Discussion. Exact solutions for normal depth problem. *J. Hydraul. Res.* Nr 44(5) p. 715-717. <http://dx.doi.org/10.1080/00221686.2006.9521721>.
- Achour B., Bedjaoui A. 2012. Turbulent pipe-flow Computation using the rough model method (RMM). *J. Civil Eng. Sci.* Nr 1(1) p. 36-41.
- Achour B., Sehtal S. 2014. The Rough Model Method (RMM). Application to the computation of normal depth in circular conduit. *Open Civil Eng.J.* Nr 8 p.57-63. <http://dx.doi.org/10.2174/1874149501408010057>.
- Bakhmeteff B.A., Feodoroff N.V. 1943. Discussion on open channel flow, *Transactions, American Society of Engineers*, Vol.108, p.492-502.
- Bazin H. 1897. Etude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts. Mémoire no. 41. *Annales des ponts et chaussées.* Nr 14(7) p.20-70.
- Blench T. 1939. A new theory of turbulent flow in liquids of small viscosity, *Journal, Institution of Civil Engineers*, London, Vol.11, n°6, p.611-612.
- Camp T.R. 1946. Design of sewers to facilitate flow, *Sewage Works Journal*, Vol.18, p.1-16.
- Carlier M. 1972. *Hydraulique générale et appliquée*. Paris: Eyrolles.
- Chow V.T. 1973. *Open channel hydraulics*. New York: Ed McGraw Hill.

- Ead S.A., Rajaratnam N., Katopodis C., Ade F. 2000. Turbulent open-channel flow in circular corrugated culverts. *J. Hydraul. Eng.* Nr 126(10) p. 750–757. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2000\)126:10\(750\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2000)126:10(750)).
- Forchheimer P. 1930. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig and Berlin, p.139-163.
- French R.H. 1986. Open channel hydraulics. New York: Ed McGraw Hill.
- Ganguillet E., Kutter W.R. 1869. An investigation to establish a new general formula for uniform flow of water in canals and rivers. *Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines.* Nr 21(1) p. 6-25. Nr 21(2-3) p. 46-59.
- Giustolisi O. 2004. Using genetic programming to determine *Chézy* resistance coefficient in corrugated channels. *J.Hydroinf.* Nr 6(3) p. 157-173.
- Houk I.E. 1918. Calculation of flow in open channels, Miami Conservancy District, Technical report, Pt. IV, Dayton, Ohio.
- Keulegan G.H.1938. Laws of turbulent flow in open channels, Research paper RP 1151, Journal of Research, U.S. National Bureau of Standards, Vol. 21, p.707-741.
- Lindquist E. 1933. On velocity formulas for open channels and pipes, Transactions of the World Power Conference, Sectional Meeting, Scandinavia, Stockholm, Vol.1, p.177-234.
- Manning R. 1891. On the flow of water in open channels and pipes. *Trans. Inst. Civil Eng. Ireland.* Nr 20 p.161-207.
- Marone V. 1970. Le resistenze al movimento uniforme in unalveo chiuso o aperto di sezione rettangolare e scabrezza definita [Resistances to uniform movement in a closed or open section of rectangular cross-section and defined roughness]. *L'Energia Elettrica.* Nr 1 p. 1-20.
- Naot D., Nezu I., Nakagawa H. 1996. Hydrodynamic behavior of partly vegetated open channels. *J.Hydraul.Eng.* Nr 122(11) p.625-633. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1996\)122:11\(625\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1996)122:11(625)).
- Pavlovski N.N. 1940. “*Handbook of Hydraulic*”, *Kratkil Gidravlitcheskil, Spravochnik, Gosstrolizdat*, Leningrad and Moscow. 314p.
- Perry A.E., Schofield W.H., Joubert P.N. 1969. Rough wall turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.* Nr 37(2) p. 383-413.<https://doi.org/10.1017/S0022112069000619>.
- Powell R.W. 1950. Resistance to flow in rough channels. *Trans. Amer. Geophysics. Union.* Nr 31(4) p. 575-582. <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/TR031i004p00575/full>.

- Prandtl L. 1926. On fully developed turbulence, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Congress of Applied Mechanics, Zurich, P.62-74.
- Pyle R., Novak P. 1981. Coefficient of friction in conduits with large roughness. J. Hydraul. Res. Nr 19(2) p.119-140.<http://dx.doi.org/10.1080/00221688109499522>.
- Schnackenberg E.C.1951. Slope discharge formulae for alluvial streams and rivers, Proceeding, New Zealand Institution of Engineers, Vol. 37, p.340-409.
- Sinniger R.O., Hager W.H.1989. *Constructions hydrauliques*, Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Presses Polytechniques Romandes, (15), 1<sup>ère</sup> Edition.
- Streeter V.L. 1936. Frictional resistance in artificially roughened pipes. Trans. ASCE. Nr 101 p. 681-704.
- Swamee P.K., Jain A.K. 1976. Explicit equations for pipe-flow problems, Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol.102, HY5, p.657-664.
- Swamee P.K., Rathie P.N. 2004. Exact solutions for normal depth problem. J. Hydraul. Res. Nr 42(5) p. 543-550.<http://dx.doi.org/10.1080/00221686.2004.9641223>.
- Toebe C.1955. Streamflow : Poly-dimensional treatment of variable factors affecting the velocity in alluvial streams and rivers, Proceedings, Institution of Civil Engineers, London, Vol.4, n°3, pt. III, p.900-938.
- Vladislavljevitch Z. 1951. Aperçu critique sur les formules pour la prédétermination de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme, Transactions of the 1st Congress, International Commission on Irrigation and Drainage, New Delhi, Vol.2, rept.12, question 2, p.405-428.