

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR - ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA



جامعة باجي مختار – عنابة

Faculté: Sciences de l'ingéniorat

Année: 2016

Département: Electronique

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat 3^{ème} Cycle

Intitulée

Étude statistique des ondes
électromagnétiques diffractées par un milieu stratifié formé de
surfaces rugueuses

Option: Multimédia et communications numériques

Par: EL-BAH Seloua

DIRECTEUR DE THÈSE: LAFIFI Saddek Pr. Université de Annaba

DEVANT LE JURY

PRÉSIDENT: DOGHMANE Nouredine Pr. Université de Annaba

EXAMINATEURS: GHERS Mokhtar Pr. Université de Annaba

BOUFELFEL Ahmed Pr. Université de Guelma

MESSADEG Djemil MCA Université de Annaba

ملخص

في هذه الأطروحة، نقدم الدراسة النظرية للخصائص الإحصائية والمكانية لحيود الموجات الكهرومغناطيسية بواسطة السطوح ذات التشوهات الطفيفة و العشوائية ذات بعدين. تخص هذه الدراسة المنطقة الوسطى للحقل حيث يكون الحقل المنتشر عبارة عن موجات متقدمة مستوية. تتم العمليات الحسابية في إطار نظرية الاضطرابات الصغيرة من الدرجة الأولى والثانية، بحيث تقوم على فرضية أن السطح المراد دراسته مستقر ويخضع لنظرية ارقوديك مع توزيع غوس للارتفاع. من أجل أسطح غير منتهية، قمنا باشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية لطويلة وزاوية مركبات الحقل الكلي حيث وجدنا أن دالة الكثافة الاحتمالية للطويلة عبارة عن مجموع غير منته من دوال بيسل المعدلة في حين أن الدالة الخاصة بالزاوية هي بدلالة دالة الخطأ. لقد برهنا أن الحقل الكلي ليس مستقر في حالة الاسقاط المائل، أما في حالة الاسقاط العمودي فالحقل الكلي يمثل تطور عشوائي مستقر بالمعنى الدقيق. من الناحية المكانية و من أجل ارتفاع معين ومهما كان مقدار زاوية الاسقاط ، استطعنا أن نثبت أن الحقل الكلي يخضع لنظرية ارقوديك من الدرجة الثانية. كما أنه في حالة الاسقاط المائل، فإن التوزيع المكاني لطويلة الحقل الكلي عبارة عن قانون رايلي و توزيع الزاوية منتظم. أما في حالة الإسقاط العمودي، فإن عبارة التوزيع المكاني للطويلة تكون بدلالة مجموع غير منته من دوال بيسل المعدلة في حين أن التوزيع المكاني للزاوية غير منتظم.

Abstract

In this thesis, we present a theoretical derivation of the statistical and spatial properties of signal scattering by two-dimensional slightly rough random surfaces. The work concerns the intermediate field-zone where the scattered field is reduced to the contribution of the progressive plane waves. Calculations are carried out within the framework of the first-order small perturbation method. The surface is assumed to be ergodic and stationary with a Gaussian height distribution. For infinite extension surfaces, we derive the probability density functions (PDFs) for the modulus and phase of the total field components. The modulus PDF takes the form of infinite sum of modified Bessel functions while the phase PDF is expressed in terms of the error function. We demonstrate that under oblique incidence, the total field is not wide-sense stationary and under normal incidence, the total field represents a strictly stationary stochastic process. From a spatial point of view, for a given altitude and under all incidences, we show that the total field is ergodic to the second order. Under oblique incidence, the spatial distribution of the total field modulus is a Rayleigh law and the phase is uniform. Under normal incidence, the spatial distribution of the modulus is given by a law in the form of infinite sum of modified Bessel functions and the phase is not uniformly distributed.

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons une étude théorique des propriétés statistiques et spatiales de la diffraction d'une onde électromagnétique par des surfaces légèrement rugueuses aléatoires en deux dimensions. La procédure du travail concerne la zone intermédiaire où le champ diffusé est réduit à la contribution des ondes planes progressives. Les calculs sont effectués dans le cadre de la méthode des petites perturbations du premier ordre et deuxième ordre. Les surfaces sont supposées être ergodique et stationnaire avec une distribution gaussienne de la hauteur. Pour les surfaces d'extension infinies, nous tirons les fonctions de densité de probabilité (PDF) pour le module et la phase de la totalité des composants des champs. Le PDF du module prend la forme de somme infinie de fonctions de Bessel modifiées alors que le PDF de la phase est exprimée en termes de la fonction d'erreur. Nous démontrons que sous incidence oblique, le champ total n'est pas stationnaire au sens large et sous incidence normale, le champ total représente un processus stochastique strictement stationnaire. D'un point de vue spatial, pour une altitude donnée et sous tous les angles d'incidence, nous montrons que le champ total est ergodique au second ordre. Sous incidence oblique, la distribution spatiale du module du champ total est une loi de Rayleigh et la phase est uniforme. Sous incidence normale, la répartition spatiale du module est donnée par une loi sous forme de somme infinie de fonctions de Bessel modifiées et la phase n'est pas uniformément répartie.

Remerciements

Toute ma reconnaissance va a mon encadreur qui avez efficacement dirigé au jour le jour ce travail et lui avez permis d'aboutir : Mon Professeur *LAFIFI Saddek*, Son écoute et sa confiance ont été des éléments moteurs dans l'accomplissement de cette thèse qui m'ont motivée et encouragée. Merci pour votre soutien.

Je tiens également à remercier le professeur *DOUGHMANE Nourredine* président de jury et directeur de laboratoire des signaux et système d'Annaba (*L.A.S.A*). Ses conseils précieux et ses encouragements au niveau de laboratoire durant les années de recherches ont été une raison de réussir.

J'exprime mes sincères et respectueux remerciements au professeur *GUESS Mokhtar* pour avoir accepté de juger ce travail et assurer la tâche d'examineur.

À *BUFELFEL Ahmed* Professeur à l'université du Guelma: je suis très touché de l'honneur que vous me faites en acceptant d'examiner cette thèse et de prendre part à ce jury.

J'adresse également tous mes remerciements au Monsieur *MESSADEG Djamil* pour avoir accepté de participer à ce jury et d'examiner mon travail.

J'exprime toute ma gratitude aux membres du laboratoire *LASA* pour nos multiples discussions durant ces quelques années passées.

Et puis, bien sûr, je n'oublie pas tous les professeurs et les personnels du département d'électronique.

Je remercie également toute ma famille et particulièrement mon père et ma mère.

Liste des tableaux

<i>Tableau III.1. Cas particuliers.....</i>	<i>50</i>
<i>Tableau IV.1. Permittivités relatives des différents milieux.....</i>	<i>90</i>

Liste des figures

Figure I.1.	Schéma simplifié d'une surface séparant deux milieux différents	9
Figure I.2.	Polarisation horizontale et verticale de l'onde électromagnétique.....	13
Figure I.3.	Les différentes zones de propagation.....	13
Figure I.4.	Interaction onde électromagnétique avec une surface lisse.....	14
Figure I.5.	Interaction onde électromagnétique avec une surface rugueuse	15
Figure II.1.	Géométrie du problème de diffraction	18
Figure III.1.	Les moyennes statistiques des parties réelle et imaginaire des composantes non nulles du champ total	59
Figure III.2a.	Variances statistiques des parties réelle et imaginaire des composantes du champ électrique total et leurs coefficients de corrélation	60
Figure III.2b.	Variances statistiques des parties réelle et imaginaires des composantes du champ magnétique total et leurs coefficients de corrélation.....	60
Figure III.3a.	Les densités de probabilités du module et de la phase des composantes E_x , E_z et $Z_1 H_y$ du champ total (continu $z = 0.75\lambda$, pointillés $z = 4.83\lambda$).....	61
Figure III.3b.	Les densités de probabilités du module et de la phase des composantes E_y , $Z_1 H_x$ et $Z_1 H_z$ du champ total (continu $z = 0.75\lambda$, pointillés $z = 4.83\lambda$).....	62
Figure III.4.	Les densités de probabilités du module et de la phase de la composante E_y du champ total.....	63
Figure III.5.	Les densités de probabilités théoriques et les histogrammes normalisés des composantes du champ total	64
Figure III.6.	Les distributions spatiales analytiques et les histogrammes normalisés du module et de la phase de la composante E_y du champ total pour $\theta_0 = 40^\circ$	65
Figure III.7.	Les distributions spatiales analytiques et les histogrammes normalisés du module et de la phase de la composante E_y du champ total pour $\theta_0 = 0^\circ$	66
Figure IV.1.	Empilement formé de plusieurs surfaces rugueuses aléatoires 2D.....	69
Figure IV. 2.	Variances statistiques des parties réelle et imaginaire de la composante E_y champ total et leur coefficient de corrélation.....	91
Figure IV.3.	Les densités de probabilités du module et de la phase de la composante E_y du champ total.....	92

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
 CHAPITRE I: Généralités	
I.1 Introduction.....	5
I.2 Présentation des outils électromagnétiques.....	5
I.3 Interaction des ondes électromagnétiques avec une surface.....	12
I.4 Types de surfaces rugueuses.....	14
I.5 Conclusion.....	14
 CHAPITRE II: Diffraction des ondes électromagnétiques par une surface rugueuse aléatoire 2D	
II.1 Introduction.....	16
II.2 Présentation du problème	16
II.3 Onde incidente	18
II.4 Champ diffracté	20
II.5 La méthode des petites perturbations (SPM).....	24
II.6 Conclusion.....	37
 CHAPITRE III: Étude statistique du champ total diffracté par une surface rugueuse 2D	
III.1 Introduction.....	39
III.2 Etude de la stationnarité du champ total	39
III.3 Etude de l'ergodicité du champ total.....	49
III.4 Résultats numériques.....	56
III.5 Conclusion.....	64
 CHAPITRE IV: Etude statistique du champ total diffracté par un milieu stratifié formé de surfaces rugueuses	
IV.1 Introduction	67
IV.2 Présentation du problème.....	67
IV.3 Onde incidente	69

IV.4	Champ diffracté	70
IV.5	Etude de la stationnarité du champ total.....	78
IV.6	Etude de l'ergodicité du champ total.....	82
IV.7	Résultats numériques	88
IV.8	Conclusion.....	90
	CONCLUSION GÉNÉRALE.....	91
Annexe A.	Calcul des deux expressions (III.10) et (III.22).....	93
Annexe B.	Calcul des deux expressions (III.41) et (III.44).....	100
Annexe C.	Calcul des deux expressions (IV.19) et (IV.20).....	105
	BIBLIOGRAPHIE.....	107

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses a commencé depuis plus d'un siècle. Ce thème de recherche est devenu plus important au cours de ces dernières années grâce à son large domaine d'application en télédétection, en télécommunication, en optique, ou encore, en imagerie médicale.

Dans cette étude, nous intéressons au domaine de la télédétection, où l'objectif est d'analyser l'écho radar après son interaction avec des surfaces naturelles telles qu'une surface de la terre (sol agricole, mer, désert...etc). Une onde électromagnétique incidente, venant éclairer ce genre de surfaces, n'est donc pas simplement réfléchi et transmise, mais aussi diffractée. Donc, il est nécessaire d'étudier l'interaction d'une onde avec une surface afin de déterminer l'influence de la rugosité sur la diffraction des ondes électromagnétiques et en particulier le champ proche.

Dans cette thèse, l'objectif est d'étudier le comportement statistique et spatial du champ électromagnétique diffracté par une simple surface rugueuse, en première partie et en deuxième partie par un milieu stratifié formé de surfaces rugueuses. Les interfaces qui séparent l'air des différents milieux sont des surfaces rugueuses bidimensionnelles et aléatoires, elles sont caractérisées par des moments statistiques et spatiaux. Cette caractérisation nous aidera à mener l'étude statistique de la diffraction des ondes électromagnétiques.

L'approche théorique du problème de diffraction par des surfaces rugueuses a débuté avec Lord Rayleigh à la fin du XIX^{ième} siècle [1,2], qui étudia la diffraction d'ondes acoustiques par une surface sinusoïdale. Le développement de Rayleigh consiste à supposer que l'onde diffractée est formée par une somme d'ondes progressives planes et évanescentes. Malgré les nombreuses objections faites à son égard, le développement de Rayleigh donne des résultats satisfaisants pour les déformations de faibles hauteurs et aussi pour les milieux homogènes. Avec l'essor des communications radios et le développement du laser en optique, ce problème a donné lieu à de nombreuses publications dédiées à ce sujet [3-11]. Plusieurs méthodes ont été développées pour résoudre le problème, ces méthodes peuvent être classées en deux grandes catégories : les méthodes approchées et les méthodes exactes. Les méthodes approchées sont les plus anciennes, elles sont basées sur des hypothèses simplificatrices, de plus, le champ diffracté par la surface est approché de manière analytique. Parmi ces méthodes, nous citons la méthode des petites perturbations (SPM, Small Perturbation Method) [12-13], l'approximation de Kirchhoff (KA, Kirchhoff Approximation) [14], l'approximation de faible pente (SSA, Small Slope Approximation) [15] et la méthode de plan tangent.

D'autre part, avec l'apparition de l'informatique, des méthodes exactes voient le jour telles que la méthode des coordonnées curvilignes qui est connue sous le nom de la méthode C [16-17], la méthode des moments (MOM) [18, 19] et la méthode de Monte Carlo [20]...etc. Dans notre cas, nous effectuons la résolution à l'aide de la méthode des petites perturbations qui permet d'aboutir à des résultats analytiques.

Le manuscrit est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre présente les notions fondamentales de l'électromagnétisme, nécessaires pour la compréhension des chapitres suivants. Nous écrivons dans un premier temps les équations de Maxwell qui représentent la base de résolution de tous les problèmes de propagation des ondes et aussi les relations constitutives pour un milieu linéaire, homogène et isotrope, ainsi que les relations de continuité qui décrivent le passage d'un milieu à l'autre. Puis nous décrivons le comportement de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide en abordant la notion d'onde plane. Pour mieux comprendre le problème, nous étudions l'interaction des ondes électromagnétiques avec les deux types de surfaces plane et rugueuse ce qui nous permet de comprendre les phénomènes de réflexion et de diffraction.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la résolution du problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par une surface rugueuse aléatoire bidimensionnelle. Nous commençons par présenter, les propriétés statistiques et spatiales de la surface. En se basant sur ces notions, nous présentons les expressions analytiques des champs diffractés dans les deux milieux. Ces expressions qui sont établies par le développement de Rayleigh doivent vérifier les conditions aux limites qui reste l'une des étapes les plus importantes. La modélisation de ce phénomène peut se faire soit à l'aide des méthodes approchées soit par les méthodes numériques. Dans le cas où les hauteurs quadratiques sont faibles devant la longueur d'onde, la méthode des petites perturbations SPM nous permet de déterminer les amplitudes du champ diffracté en abordant les deux cas fondamentaux de la polarisation.

Le troisième chapitre est réservé à l'étude statistique du champ total pour une simple interface aléatoire. En se basant sur les résultats du deuxième chapitre, nous vérifions la stationnarité et l'ergodicité du champ total proche qui représente la somme du champ incident, réfléchi et diffracté. Dans la première partie de ce chapitre, nous déterminons les moments statistiques et les densités de probabilité du module et de la phase, sans oublier de prendre en compte les propriétés statistiques de la surface rugueuse afin d'étudier la stationnarité. Dans la deuxième partie, nous étudions l'ergodicité du champ total. Au début, nous déterminons les moments spatiaux jusqu'à l'ordre deux des composantes du champ total pour une seule réalisation arbitraire. Puis, nous élargissons cette étude en présentant les distributions spatiales du module et de la phase. Pour conclure ce chapitre, nous réalisons des simulations numériques afin de valider les résultats théoriques.

Le dernier chapitre est consacré à une étude détaillée de la stationnarité et l'ergodicité du champ total pour un milieu stratifié composé d'une structure multicouche. Avec la même démarche de celle du chapitre trois, nous déterminons les moments statistiques et spatiaux des composantes du champ total ainsi les distributions statistiques et spatiales du module et de la phase. Pour conclure ce chapitre, nous réalisons des simulations numériques afin de voir l'impact du nombre de couche sur les propriétés statistiques du champ diffracté.

CHAPITRE I

Généralités

I.1 Introduction

I.2 Présentation des outils électromagnétiques

I.3 Interaction des ondes électromagnétiques avec une surface

I.4 Types de surfaces rugueuses

I.5 Conclusion

I.1 Introduction

L'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses a commencé depuis plus d'un siècle par Lord Rayleigh, l'un des premiers physiciens qui a introduit un nombre de concepts fondamentaux dans la théorie de diffraction. Il a donné une définition rigoureuse de la rugosité électromagnétique d'une interface et a étudié explicitement l'influence de celle-ci sur la diffraction d'une onde [21,22]. Parmi les surfaces rugueuses, nous pouvons distinguer deux grandes catégories de surfaces : les surfaces périodiques comme les surfaces sinusoïdales, les surfaces en créneaux, en dents de scie et les surfaces aléatoires, dont certaines caractéristiques statistiques sont connues (hauteur quadratique moyenne, moyennes statistiques...). Pour la première catégorie, le développement de certaines méthodes rigoureuses a permis de résoudre le problème avec beaucoup de succès [23,24]. Pour la deuxième catégorie, la forme aléatoire de la surface augmente considérablement la difficulté du problème.

Au départ, les méthodes qui ont été utilisées pour résoudre ce problème étaient exclusivement analytiques. Parmi ces méthodes, l'une des plus anciennes est la méthode de perturbation. Ensuite, avec l'arrivée de l'outil informatique, plusieurs approches numériques ont également été développées. Malgré leurs différences, toutes les méthodes de détermination de l'onde diffractée par une surface rugueuse ont en commun la théorie de base qui est la théorie électromagnétique de Maxwell.

Ce chapitre est consacré à la description du problème et à l'introduction des grandeurs et notations utilisées dans les chapitres suivants. Dans un premier temps, nous rappelons quelques généralités sur les ondes électromagnétiques telles que les équations de Maxwell qui constituent la base de l'électromagnétisme. Nous présentons les ondes planes ainsi que leurs équations de propagation dans le vide. Nous étudions par la suite l'interaction des ondes avec une interface plane ou bien la réflexion, la transmission et l'interaction avec une surface rugueuse c'est-à-dire le phénomène de diffraction. Sachant que la modélisation de ce dernier représente le but de notre thèse afin de caractériser les surfaces rugueuses.

I.2 Présentation des outils électromagnétiques

I.2.1 Les équations de Maxwell

L'interprétation des ondes électromagnétiques par le physicien et le mathématicien écossais James Clerk Maxwell (1831-1879) est la réalisation la plus importante de l'histoire de sciences. Ce physicien a traduit les connaissances scientifiques dans le domaine de l'électricité et du magnétisme sous forme d'équations locales permettant d'exprimer les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} à

chaque point du vide et à chaque instant t , à partir des densités de charge ρ et de courant \mathbf{J} . Les équations de Maxwell dans les milieux sont données par [25] :

$$\text{Div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.1})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{I.2})$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (\text{I.3})$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{I.4})$$

Avec :

\mathbf{E} : Champ électrique (v/m).

\mathbf{B} : Densité du flux magnétique (Tesla).

\mathbf{D} : Densité de déplacement (C/m^2).

\mathbf{H} : Champ magnétique (A/m).

\mathbf{J} : Densité de courant électrique (A/m^2).

ρ : Densité de charge électrique (C/m^3).

L'équation (I.1) est appelée l'équation du flux magnétique, cette loi exprime l'absence de charge ou monopole magnétique, cela permet de montrer que le flux magnétique à travers n'importe quelle surface de Gauss est nul. La deuxième équation (I.2) est nommée équation de Maxwell-Faraday, cette équation exprime la relation entre le champ électrique et le flux magnétique en fonction du temps. L'équation (I.3) est l'équation Maxwell-Gauss, elle présente la loi de Gauss en électrostatique sous forme intégrale qui décrit la relation entre le champ électrique d'une surface fermée et la charge électrique existant dans cette surface. La quatrième équation (I.4) est l'équation de Maxwell-Ampère qui montre que le champ magnétique peut être généré par des courants électriques.

I.2.2 Relations constitutives

Comme nous le savons, les ondes électromagnétiques se propagent dans tous les différents milieux (le vide, matériaux diélectriques, matériaux magnétiques,...) et chacun de ces milieux a ses propriétés électromagnétiques, telles que l'indice de réfraction n , la permittivité ϵ , la perméabilité μ , la conductivité σ , ces trois paramètres apparaissent clairement dans les équations de Maxwell. On a alors les relations, dites constitutives.

Dans le cas le plus simple d'un milieu linéaire, homogène et isotrope (LHI), les équations constitutives sont écrites comme suit :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{I.5})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{I.6})$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{I.7})$$

où ε , μ et σ représentent respectivement la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la conductivité, avec ε_0 , μ_0 leurs constantes dans le vide :

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad (\text{I.8})$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad (\text{I.9})$$

I.2.3 Conditions aux limites

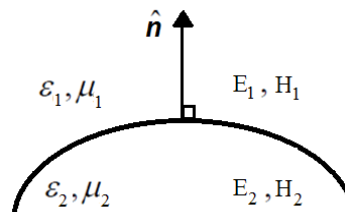


Figure I.1. Schéma simplifié d'une surface séparant deux milieux différents.

Les équations de Maxwell sont valides pour les milieux continus, mais en réalité cela n'est pas le cas car tous les milieux sont finis. Le comportement du champ électromagnétique aux frontières entre deux milieux de propriétés électromagnétiques différentes suit certaines règles, ces règles sont appelées les conditions aux limites. En posant par convention que la normale $\hat{\mathbf{n}}$ est dirigée du milieu 2 vers le milieu 1. Dans un premier temps, nous supposons que les deux milieux sont (LHI, linéaire, homogène et isotrope). Les relations de continuité au niveau de l'interface de séparation sont données par :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (\text{I.10})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (\text{I.11})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad (\text{I.12})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad (\text{I.13})$$

où \mathbf{J}_s et ρ_s désignant respectivement les densités de courant et de charge surfaciques libres.

Si les deux milieux (LHI) sont diélectriques, les équations peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (\text{I.14})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (\text{I.15})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (\text{I.16})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (\text{I.17})$$

Si le milieu inférieur est conducteur parfait, les champs macroscopiques sont nuls, donc les relations deviennent

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_1 = 0 \quad (\text{I.18})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 = -\rho_s \quad (\text{I.19})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_1 = -\mathbf{J}_s \quad (\text{I.20})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 = 0 \quad (\text{I.21})$$

I.2.4 L'équation de propagation

Les équations de Maxwell présentent les ondes électromagnétiques dans le cas le plus général, mais leur utilisation directe n'est pas pratique. Par conséquent, dans le cas des milieux linéaires, homogènes et isotropes (LHI), en l'absence de charge $\rho = 0$ et de courant $J = 0$, nous pouvons obtenir les équations de propagation plus simples qui suivent les lois de l'optique géométrique. En appliquant l'opérateur rot et en utilisant la propriété suivante:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\mathbf{Div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{I.22})$$

où ∇^2 représente le Laplacien vectoriel.

Pour trouver l'équation de propagation de \mathbf{E} , on remplace l'équation (I.6) dans le rotationnel de l'équation (I.2), on obtient :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{E}) = \mathbf{rot}\left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rot} \mathbf{H}) \quad (\text{I.23})$$

D'où

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\mu \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right) \quad (\text{I.24})$$

Utilisant l'équation (I.22), sachant que $\text{Div} \mathbf{E} = 0$ selon l'équation (I.3), nous trouvons :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (\text{I.25})$$

À partir des équations (I.24) et (I.25), la propagation d'onde électrique est décrite par :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.26})$$

Sachant que la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique est donnée par :

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{I.27})$$

Suivant les mêmes étapes, nous pouvons obtenir l'équation d'onde pour le vecteur magnétique du champ :

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.28})$$

I.2.5 Onde plane

L'onde plane est une notion théorique, c'est un modèle qui sert à simplifier l'étude des ondes réelles. En notions complexes, une onde plane monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} s'écrit :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (\text{I.29})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (\text{I.30})$$

avec

$$\mathbf{k} = \sqrt{\varepsilon \mu} \omega \hat{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{u} \quad (\text{I.31})$$

où λ désigne la longueur d'onde dans le milieu et \hat{u} un vecteur unitaire choisi arbitrairement.

I.2.6 Equation de Helmholtz

Appliquée à une onde plane, l'équation de Helmholtz conduit à l'équation de dispersion qui relie le vecteur d'onde à la pulsation ω . La dérivée des équations de Maxwell par rapport au temps, en utilisant l'équation se ramène à une multiplication par $-i\omega$, donc :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = i\omega \cdot i\omega \cdot \mathbf{E} = -\omega^2 \mathbf{E} \quad (\text{I.32})$$

Le terme de gauche de l'équation de l'onde électrique (I.26) devient dans ce cas :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon(-\omega^2 \mathbf{E}) = \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} \quad (\text{I.33})$$

Finalement, nous pouvons dire que \mathbf{E} vérifie l'équation de Helmholtz :

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.34})$$

L'équation de Helmholtz (I.34), c'est une forme de l'équation des ondes applicables aux ondes harmoniques. Dans cette équation le temps ne figure pas.

Note : Suivant les mêmes étapes nous trouvons que le champ magnétique \mathbf{H} vérifie l'équation de Helmholtz.

I.2.7 Polarisation de l'onde incidente

La polarisation d'une onde électromagnétique est définie par les propriétés du vecteur champ électrique \mathbf{E}_i de l'onde plane incidente dans un plan donné. En effet, le champ électrique de cette onde plane peut se décomposer selon deux vecteurs indépendants et perpendiculaires à la direction de propagation. Ces deux vecteurs représentent deux états de polarisation de l'onde plane, la polarisation horizontale et la polarisation verticale. Dans le cas d'une polarisation horizontale (transverse électrique TE) le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence (voir figure I.2).

Lorsque le champ \mathbf{H} est perpendiculaire au plan d'incidence, on parle d'une polarisation verticale (transverse magnétique TM).

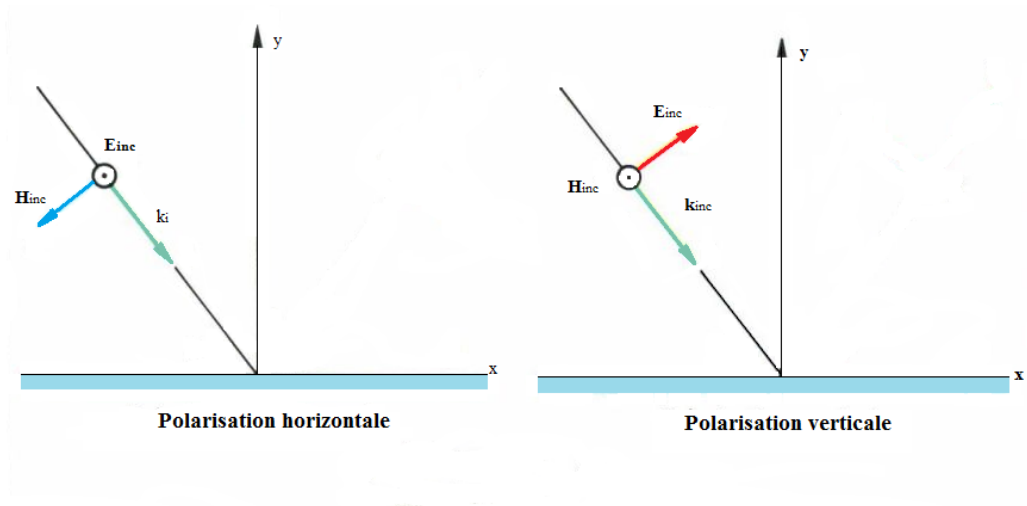


Figure I.2. Polarisation horizontale et verticale de l'onde électromagnétique.

I.2.8 Les zones de propagation

L'onde électromagnétique n'a pas les mêmes propriétés de propagation dans tout l'espace entourant une source (antenne). Pour modéliser la propagation d'une onde dans l'environnement d'une source, on peut distinguer trois zones principales : zone de Rayleigh, zone de Fresnel, zone de Fraunhofer.

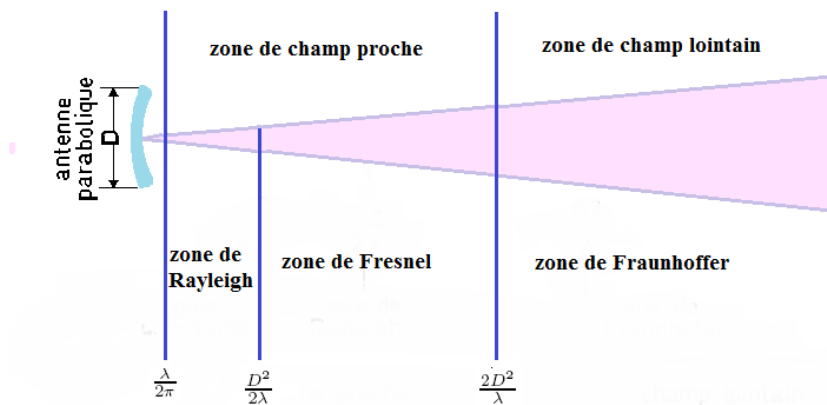


Figure I.3. Les différentes zones de propagation.

- **Zone de Rayleigh**

C'est la zone la plus proche de l'émetteur, elle est située entre $\frac{\lambda}{2\pi}$ et $\frac{D^2}{2\lambda}$ où D est l'hauteur de l'antenne et λ la longueur d'onde, dans cette zone la propagation se fait sans atténuation.

- **Zone de Fresnel (zone intermédiaire)**

Cette zone se trouve entre $\frac{D^2}{2\lambda}$ et $\frac{2D^2}{\lambda}$, ici les ondes électromagnétiques se divergent, et c'est à cette zone que notre étude est réalisée, on note que la zone intermédiaire constitue avec la première zone la zone du champ proche.

- **Zone de Fraunhofer**

Cette zone se situe à très grande distance de l'émetteur au-delà de $\frac{2D^2}{\lambda}$, le champ propagé dans cette zone est un champ lointain.

I.3 Interaction des ondes électromagnétiques avec une surface

Le phénomène de la diffraction d'une onde électromagnétique par une surface dépend de la géométrie de celle-ci. Par exemple, les réponses d'une surface lisse et d'une surface rugueuse à une excitation électromagnétique sont totalement différentes. Dans le cas d'une surface lisse S qui sépare deux milieux diélectriques de permittivités relatives différentes, soient $\epsilon_{r,1}$ pour le milieu 1 et $\epsilon_{r,2}$ pour le milieu 2, l'interaction d'une onde plane (milieu 1) avec la surface S donne naissance à une onde réfléchie dans la direction spéculaire (milieu 1) et une onde transmise (milieu 2). Ce phénomène obéit, géométriquement, aux lois de Snell-Descartes

$$\theta_i = \pm \theta_r \quad (I.35)$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (I.36)$$

où $n_i = \sqrt{\epsilon_{r,i}}$ ($i=1,2$) est l'indice de réfraction du milieu considéré, avec θ_i et θ_t désignent respectivement l'angle d'incidence et l'angle de transmission.

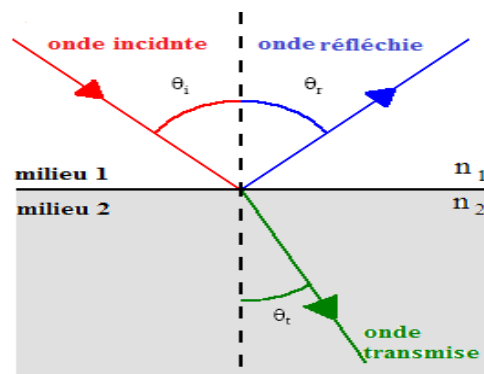


Figure I.4. Interaction onde électromagnétique avec une surface lisse.

Utilisant les deux lois de Snell-Descartes (I.35, I.36) et les relations de continuité (I.14, I.15), nous pouvons définir les coefficients de Fresnel pour les deux cas de polarisation [26]. En polarisation horizontale, les coefficients de réflexion r_H et de transmission (réfraction) t_H s'écrivent:

$$r_H = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (\text{I.37})$$

$$t_H = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (\text{I.38})$$

Et à la polarisation verticale, les coefficients de réflexion r_V et de transmission t_V s'écrivent comme suit :

$$r_V = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (\text{I.39})$$

$$t_V = \frac{2n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (\text{I.40})$$

Dans le cas d'une surface rugueuse, le champ incident se trouve diffracté dans plusieurs directions, la modélisation de ce phénomène peut se faire soit à l'aide de théories approchées qui sont basées sur des hypothèses simplificatrices, soit avec des théories rigoureuses basées sur la résolution numérique des équations de Maxwell. Dans la suite du document, nous traitons le problème de diffraction par une structure rugueuse en détails.

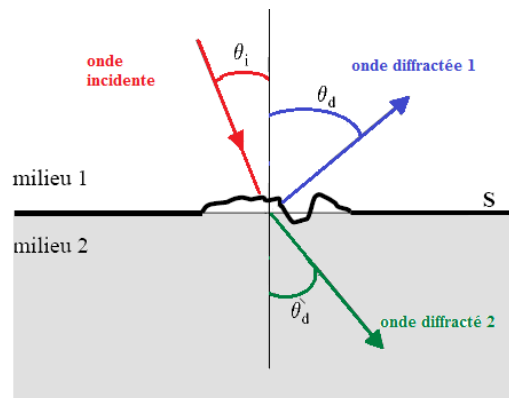


Figure I.5. Interaction onde électromagnétique avec une surface rugueuse.

I.4 Types de surfaces rugueuses

En pratique, les surfaces rencontrées présentent des irrégularités, ces surfaces peuvent être réparties en deux catégories, des surfaces périodiques et des surfaces aléatoires. La surface rugueuse périodique appelée aussi un réseau possède des irrégularités périodiques. Dans les problèmes de diffusion électromagnétique, ce genre de surfaces modélise par exemple les antennes réseaux, les composants optiques, les composants micro-ondes...etc.

Les surfaces aléatoires sont utilisées pour modéliser les surfaces naturelles par exemple la surface du sol ou de la mer, les surfaces de végétations ou encore les surfaces métalliques, . . .etc. Dans cette étude nous traitons le cas des surfaces rugueuses aléatoires 2D.

I.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les bases du sujet qu'est la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses, nous avons tout d'abord introduit les équations de Maxwell et quelques rappels d'électromagnétisme. Ensuite nous avons abordé le concept d'onde plane qui représente l'onde incidente qui éclaire la surface rugueuse sans oublier les conditions aux limites qui décrivent le comportement du champ à la frontière entre deux milieux. De plus, nous avons présenté les deux lois Snell-Descartes et les coefficients de Fresnel pour décrire les phénomènes de réflexion et de transmission dans le cas d'une surface de séparation lisse. Finalement, nous avons abordé superficiellement le phénomène de diffraction que nous allons l'étudier dans la suite du document.

CHAPITRE II

Diffraction des ondes électromagnétiques par une surface rugueuse aléatoire 2D

II.1 Introduction

II.2 Présentation du problème

II.3 Onde incidente

II.4 Champ diffracté

II.5 La méthode des petites perturbations (SPM)

II.6 Conclusion

II.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du champ électromagnétique diffracté par une surface rugueuse aléatoire. Au contraire des surfaces périodiques qui sont bien connues et bien déterminées, les surfaces aléatoires telles que les champs labourés et la surface de la mer ne peuvent pas être connues avec exactitude, mais il est possible d'en connaître certaines caractéristiques statistiques. Ces caractéristiques vont nous aider à mettre une description statistique de la surface aléatoire rugueuse. Généralement, les statistiques jusqu'à l'ordre deux suffisent à décrire la surface aléatoire.

La connaissance statistique de la surface constitue la base de la deuxième partie de ce chapitre, qui traite la procédure que nous allons suivre, conduisant à la détermination des amplitudes de diffraction. De nombreuses méthodes de résolution suivant les cadres d'application ont été proposées, parmi elles, nous nous intéresserons plus particulièrement à la méthode approchée qui est la méthode des petites perturbations (SPM, *Small Perturbation Method*), en abordant les deux cas de polarisations fondamentales, polarisation horizontale et polarisation verticale.

II.2 Présentation du problème

II.2.1 Géométrie de la surface

La géométrie du problème est représentée sur la figure (II.1). La structure est une surface rugueuse aléatoire séparant le vide (au dessus) d'un milieu diélectrique (au dessous). L'interface est un plan aléatoirement déformé de dimensions $L \times L$.

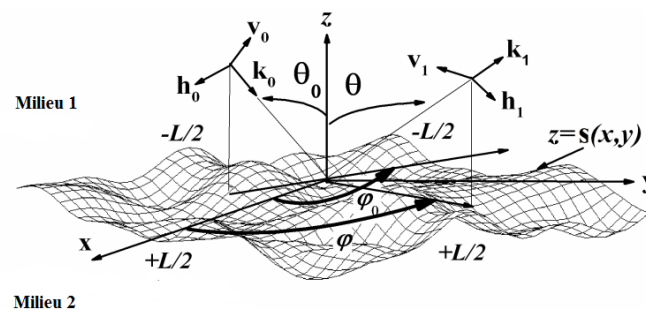


Figure II.1. Géométrie du problème de diffraction

II.2.2 Description statistique

La fonction décrivant l'interface $z = S(x, y)$ est un processus aléatoire gaussien stationnaire à l'ordre deux, de plus il est centré, cela signifie que sa moyenne statistique est nulle :

$$\langle S(x, y) \rangle = 0 \quad \forall (x, y) \quad (\text{II.1})$$

L'opérateur $\langle \rangle$ représente une moyenne statistique. Nous considérons que cette interface présente une fonction de corrélation gaussienne. La fonction d'autocorrélation statistique $R_{ss}(x, y)$ est définie par :

$$R_{ss}(x, y) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{l^2}\right) \quad (\text{II.2})$$

où σ représente la hauteur quadratique moyenne et l la longueur de corrélation.

Le spectre de la fonction d'autocorrélation est aussi gaussien, il est donné par :

$$\hat{R}_{ss}(\alpha, \beta) = \sigma^2 l^2 \pi \exp\left[-\frac{l^2(\alpha^2 + \beta^2)}{4}\right] \quad (\text{II.3})$$

Sachant que $\hat{R}_{ss}(\alpha, \beta)$ est la transformée de Fourier bidimensionnelle de $R(x, y)$. Comme nous l'avons noté, la surface est supposée stationnaire au sens large à l'ordre deux, ce qui implique que l'autocorrélation statistique s'écrit également :

$$R_{ss}(x, y) = \langle S(x', y') S(x + x', y + y') \rangle \quad (\text{II.4})$$

De plus, cette fonction $R_{ss}(x, y)$ est supposée avoir une mémoire finie, qui disparaît lorsque $x, y \rightarrow \pm\infty$ [27].

Et pour la même raison, les propriétés statistiques sont indépendantes de l'origine des coordonnées de x et y .

D'autre part, la surface est supposée aussi érgodique au deuxième ordre, et la moyenne spatiale $\overline{s(x, y)}$ de la réalisation $s(x, y)$ est donnée par :

$$\overline{s(x, y)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} s(x, y) dx dy \quad (\text{II.5})$$

On définit la fonction d'autocorrélation spatiale par :

$$C_{ss}(x, y) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} s(x', y') s(x + x', y + y') dx' dy' \quad (\text{II.6})$$

L'ergodicité de la surface implique que ses propriétés spatiales $\overline{s(x, y)}$ et $C_{ss}(x, y)$ sont les mêmes quelle que soit la réalisation.

Selon le théorème de Birkhoff, pour un processus aléatoire stationnaire et ergodique à l'ordre 2, les moments statistiques et spatiales sont interchangeables, cela nous permet d'écrire :

$$\langle S(x, y) \rangle = \overline{s(x, y)} = 0 \quad (\text{II.7})$$

et

$$R_{SS}(x, y) = C_{ss}(x, y) \quad (\text{II.8})$$

II.3 Onde incidente

L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé (Oxyz), muni d'une base orthonormée (\mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z}). La surface présentée dans la *Figure. II.1*, est éclairée par une onde plane monochromatique se dirigeant vers le bas avec une longueur d'onde λ , de polarisation horizontale (h) ou verticale (v). Le milieu supérieur est assimilé au vide avec une impédance $Z_1 = 120\pi$, le nombre d'onde correspondant $k_1 = 2\pi/\lambda$. Par la suite, les grandeurs, $Z_{1,2}$ et $k_{1,2}$ désignent les impédances et les nombres d'ondes des deux milieux 1 et 2. On considère une dépendance temporelle en $\exp(j\omega t)$ (ω est la fréquence angulaire). Le champ électromagnétique incident est donné par :

$$\Psi_{0(a)}(x, y, z) = \mathbf{h}_{0-} \exp(-j\mathbf{k}_{0-} \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{II.9})$$

Le vecteur d'onde incident \mathbf{k}_{0-} est défini par l'angle de site θ_0 par rapport à l'axe (Oz) et l'angle d'azimut φ_0 dans le plan (xOy).

$$\mathbf{k}_{0-} = \alpha_0 \mathbf{x} + \beta_0 \mathbf{y} - \gamma_0 \mathbf{z} \quad (\text{II.10})$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_0 = k_1 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\ \beta_0 = k_1 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \\ \gamma_0 = k_1 \cos \theta_0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

où : $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$

On désigne par « \mathbf{r} » le vecteur position :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z} \quad (\text{II.12})$$

La lettre (a) indique le type de la polarisation, lorsque ($a=h$), la polarisation est horizontale, dans ce cas le vecteur électrique est parallèle au plan Oxy .

$$\Psi_{0(h)}(x, y, z) = \mathbf{E}_{0(h)}(x, y, z) \quad (\text{II.13})$$

Et lorsque ($a=v$) la polarisation est verticale et le vecteur magnétique est parallèle au plan Oxy .

$$\Psi_{0(v)}(x, y, z) = \mathbf{H}_{0(v)}(x, y, z) \quad (\text{II.14})$$

Dans le vide, les expressions du champ électrique et magnétique incidents sont définies comme suit :

$$\mathbf{E}_0 = (A_{0(h)}\mathbf{h}_{0-} + A_{0(v)}\mathbf{v}_{0-})\exp(-j\mathbf{k}_{0-}\cdot\mathbf{r}) \quad (\text{II.15})$$

Pour obtenir l'expression du vecteur magnétique dans chaque milieu, nous pouvons appliquer la relation d'orthogonalité suivante:

$$\mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{k}_i}{k_i Z_i} \wedge \mathbf{E}_i \quad (i=1,2) \quad (\text{II.16})$$

Le symbole \wedge désigne le produit vectoriel. Donc, l'expression obtenue du champ magnétique est :

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{Z_1} (-A_{0(h)}\mathbf{v}_{0-} + A_{0(v)}\mathbf{h}_{0-})\exp(-j\mathbf{k}_{0-}\cdot\mathbf{r}) \quad (\text{II.17})$$

Les indices (h) et (v) désignent respectivement les polarisations horizontale ($E_{//}$) et verticale ($H_{//}$). En polarisation horizontale, on a $A_{0(h)} \neq 0$, $A_{0(v)} = 0$ et en polarisation verticale, on a $A_{0(h)} = 0$, $A_{0(v)} \neq 0$.

Puisque l'onde incidente est une onde plane, \mathbf{k}_{0-} est perpendiculaire au champ incident, et le vecteur du champ électrique incident \mathbf{E}_0 est décomposé en deux vecteurs unités \mathbf{h}_{0-} et \mathbf{v}_{0-} qui correspondent aux polarisations horizontale ($E_{//}$) et verticale ($H_{//}$) respectivement. Sachant que $(\mathbf{v}_{0-}, \mathbf{h}_0, \mathbf{k}_{0-}/k_1)$ représente un système orthogonal. Les vecteurs \mathbf{h}_{0-} et \mathbf{v}_{0-} sont définis par:

$$\mathbf{h}_{0-} = \frac{\mathbf{k}_{0-} \wedge \mathbf{z}}{|\mathbf{k}_{0-} \wedge \mathbf{z}|} = \frac{1}{\chi_0} (\beta_0 \mathbf{x} - \alpha_0 \mathbf{y}) \quad (\text{II.18})$$

$$\mathbf{v}_{0-} = \mathbf{h}_{0-} \wedge \frac{\mathbf{k}_{0-}}{k_1} = \frac{\gamma_0}{k \chi_0} (\alpha_0 \mathbf{x} + \beta_0 \mathbf{y}) + \frac{\chi_0}{k_1} \mathbf{z} \quad (\text{II.19})$$

II.4 Champ diffracté

D'après le principe d'Huyghens-Fresnel, les points de la surface se comportent comme des sources secondaires qui émettent des ondes, le champ diffracté résultant de l'interférence de ces ondes. Dans cette section, on va déterminer les amplitudes du champ diffracté par la surface étudiée, dans les deux cas de la polarisation, horizontale et verticale.

II.4.1 Le développement de Rayleigh

L'approche théorique du problème de diffraction par des surfaces rugueuses a été introduite par Lord Rayleigh [22] à la fin du XIXème siècle. Le développement de Rayleigh est obtenu à partir de la transformée de Fourier de l'équation de Helmholtz. Il permet d'exprimer l'onde diffractée par une série d'ondes planes montantes et descendantes. Ces ondes pouvant être propagatives ou évanescentes. L'application de développement de Rayleigh donne des résultats acceptables pour des hauteurs faibles de déformation. Ce développement peut ainsi vérifier les conditions aux limites, ce qui est suffisant pour déterminer les amplitudes et résoudre complètement le problème de diffraction par une structure rugueuse.

Nous allons désormais représenter le champ diffracté dans les deux milieux sous la forme de développements de Rayleigh. Notre but est toujours de déterminer les amplitudes du champ diffracté qui sont notées par $A_{i(h/v)}$ ($i=1,2$) pour les deux cas de polarisation, soit l'indice (h) pour la polarisation horizontale et l'indice (v) pour la polarisation verticale. Dans le vide, le champ électrique et magnétique diffracté s'exprime sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{1(h)} \mathbf{h}_1^+ + A_{1(v)} \mathbf{v}_1^+) \exp(-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{II.20})$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{4\pi^2 Z_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-A_{1(h)} \mathbf{v}_1^+ + A_{1(v)} \mathbf{h}_1^+) \exp(-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{II.21})$$

Dans le milieu 2, les ondes se déplacent vers le bas :

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{2(h)} \mathbf{h}_2^- + A_{2(v)} \mathbf{v}_2^-) \exp(+j\mathbf{k}_2^- \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{II.22})$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi^2 Z_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-A_{2(h)} \mathbf{v}_2^- + A_{2(v)} \mathbf{h}_2^-) \exp(+j\mathbf{k}_2^- \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{II.23})$$

Rappelons que $(\mathbf{v}_i^\pm, \mathbf{h}_i^\pm, \mathbf{k}_i^\pm / k_i)$ est un système orthogonal, il est défini par :

$$\mathbf{k}_i^\pm = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \pm \gamma_i \mathbf{z} \quad (\text{II.24})$$

$$\mathbf{h}_i^\pm = \frac{\mathbf{k}_i^\pm \wedge \mathbf{z}}{|\mathbf{k}_i^\pm \wedge \mathbf{z}|} = \frac{1}{\chi}(\beta\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}) \quad (\text{II.25})$$

$$\mathbf{v}_i^\pm = \mathbf{h}_i^\pm \wedge \frac{\mathbf{k}_i^\pm}{k_i} = \frac{\mp\gamma_i}{k_i\chi}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) + \frac{\chi}{k_i}\mathbf{z} \quad (\text{II.26})$$

$$\mathbf{k}_i^\pm \mathbf{k}_i^\pm = k_i^2 = \frac{k_1^2}{n_i^2} \quad (\text{II.27})$$

où $\chi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et k_i est le nombre d'ondes dans le milieu i . $n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri}}$ est l'indice optique du milieu i et ε_{ri} sa permittivité relative.

Le signe (+/-) montre la direction de la propagation, soit (+) pour la propagation vers le haut et (-) pour la propagation vers le bas. γ_i ($i = 1, 2$) sont des constantes de propagation possédant une partie imaginaire inférieure ou égale à zéro avec :

$$\gamma_i^2 + \beta^2 + \alpha^2 = k_i^2, \quad \text{Im}(\gamma_i) \leq 0 \quad (\text{II.28})$$

On note γ_{i0} , les constantes de propagation γ_i qui sont associées à (α_0, β_0) avec $\gamma_0 = \gamma_{10}$.

D'après l'hypothèse de Rayleigh, le développement de Rayleigh est valable en tout point de l'espace, y compris sur la surface [22, 28, 29]. Cette hypothèse doit vérifier les conditions aux limites.

II.4.2 Les conditions aux limites

Les expressions générales des champs obtenues par le développement de Rayleigh font intervenir les amplitudes de diffraction $A_{1(h,v)}$, $A_{2(h,v)}$ qui représentent les inconnues du problème. L'objectif sera de calculer ces amplitudes. Pour réaliser cet objet, nous utilisons les conditions aux limites à l'interface qui sépare les deux milieux. Sachant que les conditions aux limites stipulent que les composantes tangentielles, à la surface $z = S(x, y)$, des champs électrique et magnétique sont continues, soient :

$$\left[\mathbf{n} \wedge (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) \right]_{z=S(x,y)} = \left[\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_2 \right]_{z=S(x,y)} \quad (\text{II.29})$$

$$\left[\mathbf{n} \wedge (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1) \right]_{z=S(x,y)} = \left[\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_2 \right]_{z=S(x,y)} \quad (\text{II.30})$$

\mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface, il est défini par :

$$\mathbf{n} = \frac{-s_x \mathbf{x} - s_y \mathbf{y} + \mathbf{z}}{\sqrt{1 + s_x^2 + s_y^2}} \quad (\text{II.31})$$

avec

$$\begin{cases} s_x = \frac{\partial s(x, y)}{\partial x} \\ s_y = \frac{\partial s(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Les produits vectoriels sont donnés par :

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{h}_i^\pm = \frac{1}{\chi} \left[\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha s_x + \beta s_y) \mathbf{z} \right] \quad (\text{II.33})$$

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{v}_i^\pm = \frac{1}{k_i} \left[\left(\frac{\pm \gamma_i \beta}{\chi} - \chi s_y \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\mp \gamma_i \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \mathbf{y} + \frac{\mp \gamma_i}{\chi} (\alpha s_y - \beta s_x) \mathbf{z} \right] \quad (\text{II.34})$$

L'application des conditions (II.29) et (II.30) sur les expressions du champ (II.20- 23) permet d'avoir un système d'équations algébriques liant ces amplitudes de diffraction.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{A_{0(h)}}{\chi} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 s) + \frac{A_{1(h)}}{\chi} \exp(-j\gamma_1 s) \right] \left[\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha s_x + \beta s_y) \mathbf{z} \right] \right. \\ & + \frac{A_{0(v)}}{k_1} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 s) \left[- \left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} + \chi s_y \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_1}{\chi} (\alpha s_y - \beta s_x) \mathbf{z} \right] \\ & \left. + \frac{A_{1(v)} \exp(-j\gamma_1 s)}{k_1} \left[\left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} - \chi s_y \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \mathbf{y} - \frac{\gamma_1}{\chi} (\alpha s_y - \beta s_x) \mathbf{z} \right] \right\} \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{A_{2(h)}}{\chi} \exp(+j\gamma_2 s) \left[\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha s_x + \beta s_y) \mathbf{z} \right] \right. \\ & \left. + \frac{A_{2(v)} \exp(+j\gamma_2 s)}{k_2} \left[\left(-\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} - \chi s_y \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_2}{\chi} (\alpha s_y - \beta s_x) \mathbf{z} \right] \right\} \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{A_{0(v)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 s) + A_{1(v)} \exp(-j\gamma_1 s)}{Z_1 \chi} \left[\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha s_x + \beta s_y) \bar{\mathbf{u}}_z \right] \right. \\
& - \frac{A_{0(h)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 s)}{k_1 Z_1} \left[- \left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} + \chi s_y \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_1}{\chi} (\alpha s_y - \beta s_x) \mathbf{z} \right] \\
& \left. - \frac{A_{1(h)} \exp(-j\gamma_1 s)}{k_1 Z_1} \left[\left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} - \chi s_y \right) \mathbf{x} + \left(-\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \mathbf{y} - \frac{\gamma_1}{\chi} (\alpha s_y - \beta s_x) \mathbf{z} \right] \right\} \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{A_{2(v)} \exp(+j\gamma_2 s)}{Z_2 \chi} \left[\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha s_x + \beta s_y) \mathbf{z} \right] \right. \\
& \left. - \frac{A_{2(h)} \exp(+j\gamma_2 s)}{k_2 Z_2} \left[- \left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} + \chi s_y \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \mathbf{y} + \frac{\gamma_2}{\chi} (\alpha s_y - \beta s_x) \mathbf{z} \right] \right\} \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{II.36}$$

Le symbole δ représente la distribution de Dirac. Nous pouvons écrire les expressions précédentes qui représentent les conditions aux limites selon les directions \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} , ce qui nous permet d'obtenir trois équations scalaires pour chaque équation vectorielle. On note que les équations scalaires linéaires pour des directions \mathbf{x} et \mathbf{y} sont indépendantes, alors que les équations scalaires linéaires pour la direction \mathbf{z} ne sont pas indépendantes. Donc on va obtenir :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\alpha A_{1(h)} \exp(-j\gamma_1 s) + \left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} - \chi s_y \right) \frac{A_{1(v)} \exp(-j\gamma_1 s)}{k_1}}{\chi} \right. \\
& \left. - \frac{\alpha A_{2(h)} \exp(+j\gamma_2 s) + \left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} + \chi s_y \right) \frac{A_{2(v)} \exp(+j\gamma_2 s)}{k_2}}{\chi} \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} + \chi s_y \right) \frac{A_{0(v)}}{k_1} - \frac{\alpha A_{0(h)}}{\chi} \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 s) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{II.37}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\beta A_{1(h)} \exp(-j\gamma_1 s) - \left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} - \chi s_x \right) \frac{A_{1(v)} \exp(-j\gamma_1 s)}{k_1}}{\chi} \right. \\
& \left. - \frac{\beta A_{2(h)} \exp(+j\gamma_2 s) - \left(\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \frac{A_{2(v)} \exp(+j\gamma_2 s)}{k_2}}{\chi} \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\beta A_{0(h)}}{\chi} - \left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \frac{A_{0(v)}}{k_1} \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 s) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{II.38}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[- \left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} - \chi s_y \right) \frac{1}{k_1 Z_1} A_{1(h)} \exp(-j\gamma_1 s) + \frac{\alpha}{Z_1 \chi} A_{1(v)} \exp(-j\gamma_1 s) \right. \\
& \left. - \left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} + \chi s_y \right) \frac{A_{2(h)} \exp(+j\gamma_2 s)}{k_2 Z_2} - \frac{\alpha}{Z_2 \chi} A_{2(v)} \exp(+j\gamma_2 s) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[- \left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} + \chi s_y \right) \frac{A_{0(h)}}{k_1 Z_1} - \frac{\alpha A_{0(v)}}{Z_1 \chi} \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 s) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{II.39}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} - \chi s_x \right) \frac{A_{1(h)} \exp(-j\gamma_1 s)}{k_1 Z_1} + \frac{\beta A_{1(v)} \exp(-j\gamma_1 s)}{Z_1 \chi} \right. \\
& \left. + \left(\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \frac{A_{2(h)} \exp(+j\gamma_2 s)}{k_2 Z_2} - \frac{\beta}{Z_2 \chi} A_{2(v)} \exp(+j\gamma_2 s) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \frac{1}{k_1 Z_1} A_{0(h)} - \frac{\beta}{Z_1 \chi} A_{0(v)} \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp(+j\gamma_1 s) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned}
\tag{II.40}$$

II.4.3 Méthode de résolution

L'étude du phénomène de la diffraction des ondes électromagnétiques par des structures rugueuses peut se faire au moyen de méthodes exactes ou de méthodes approchées. Les méthodes exactes sont résolues par des méthodes appelées numériques, nécessitant de disposer d'une réalisation numérique de la surface étudiée. Leur avantage commun est leur robustesse et la possibilité d'intégrer des phénomènes complexes comme les milieux anisotropes ou dispersifs. En revanche, l'inconvénient majeur de ces méthodes est la lourdeur tant en temps de calcul qu'en espace mémoire. Parmi ces méthodes, nous trouvons *la méthode de Monte Carlo* [30], *méthode des coordonnées curvilignes* (la méthode C) [16,20] et *la méthode des différences finies* (FDTD) [17], ... etc.

Au contraire des méthodes exactes, les méthodes approchées ou bien méthodes asymptotiques sont basées sur les caractéristiques physiques et statistiques des surfaces rugueuses. D'autre part, elles nécessitent peu de temps de calculs, et sont donc employées pour des applications où la vitesse de calcul et la taille mémoire sont plus importantes que la précision. Historiquement, les premières théories approchées sont celles des *petites perturbations* (SPM) [12,32], *la méthode des faibles pentes* (SSA, Small Slope Approximation), *l'approximation de Kirchhoff* (AK) [13] et *l'approximation de l'Optique Géométrique* (OG) [14].

Dans ce chapitre, on va déterminer les inconnues du problème qui sont les amplitudes des champs diffractés par la méthode des petites perturbations (SPM).

II.5 La méthode des petites perturbations (SPM)

La théorie des petites perturbations (SPM) est certainement la plus répandue des méthodes asymptotiques, elle est aussi, la plus utilisée dans la résolution du problème de la diffraction des ondes par des surfaces naturelles [32]. Cette méthode est valable pour des surfaces rugueuses dont la hauteur est petite devant la longueur d'onde λ . Elle est introduite par Lord Rayleigh [13] pour résoudre les problèmes d'acoustique pour des surfaces sinusoïdales (surfaces périodiques). Puis elle a été adaptée par Fano [13] pour les réseaux optiques. Ensuite, Rice a obtenu la formule explicite pour des surfaces

parfaitement conductrices et diélectriques monodimensionnelles [33,34]. Cette méthode permet d'obtenir des solutions approchées valables lorsque les hauteurs quadratiques moyennes sont relativement faibles devant la longueur d'onde.

II.5.1 Le principe général

Pour déterminer les amplitudes de diffraction, la méthode des petites perturbations permet de représenter l'amplitude de diffraction et les fonctions exponentielles dépendant du profil de la surface par leur développement en série entière [3].

$$A_i(\alpha, \beta) = \sum_P A_i^P(\alpha, \beta) \quad (\text{II.41})$$

$$\exp(\pm j\gamma_i s_i(x, y)) = \sum_p \frac{[\pm j\gamma_i s_i(x, y)]^p}{p!} \quad (\text{II.42})$$

Le symbole p indique l'ordre de perturbation. Donc, on va remplacer dans les expressions précédentes (II. 37-40) les valeurs approximatives à l'ordre deux :

$$A_{i(a)} \approx A_{i(a)}^{(0)} + A_{i(a)}^{(1)} + A_{i(a)}^{(2)} \quad (i = 1, 2 ; a = h, v) \quad (\text{II.43})$$

$A_{i(a)}^{(0)}$ correspond à l'amplitude d'ordre zéro, $A_{i(a)}^{(1)}$ et $A_{i(a)}^{(2)}$ correspondent aux amplitudes d'ordre un et deux respectivement. On aboutit aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\alpha(A_{1(h)}^{(0)} + A_{1(h)}^{(1)} + A_{1(h)}^{(2)})}{\chi} \left(1 - j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) + \left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} - \chi s_y \right) \frac{(A_{1(v)}^{(0)} + A_{1(v)}^{(1)} + A_{1(v)}^{(2)})}{k_1} \left(1 - j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\alpha(A_{2(h)}^{(0)} + A_{2(h)}^{(1)} + A_{2(h)}^{(2)})}{\chi} \left(1 + j\gamma_2 s - \frac{\gamma_2^2 s^2}{2} \right) + \left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} + \chi s_y \right) \frac{(A_{2(v)}^{(0)} + A_{2(v)}^{(1)} + A_{2(v)}^{(2)})}{k_2} \left(1 + j\gamma_2 s - \frac{\gamma_2^2 s^2}{2} \right) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} + \chi s_y \right) \frac{A_{0(v)}}{k_1} - \frac{\alpha A_{0(h)}}{\chi} \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \left(1 + j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\beta(A_{1(h)}^{(0)} + A_{1(h)}^{(1)} + A_{1(h)}^{(2)})}{\chi} \left(1 - j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) - \left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} - \chi s_x \right) \frac{(A_{1(v)}^{(0)} + A_{1(v)}^{(1)} + A_{1(v)}^{(2)})}{k_1} \left(1 - j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\beta(A_{2(h)}^{(0)} + A_{2(h)}^{(1)} + A_{2(h)}^{(2)})}{\chi} \left(1 + j\gamma_2 s - \frac{\gamma_2^2 s^2}{2} \right) - \left(\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \frac{(A_{2(v)}^{(0)} + A_{2(v)}^{(1)} + A_{2(v)}^{(2)})}{k_2} \left(1 + j\gamma_2 s - \frac{\gamma_2^2 s^2}{2} \right) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\beta A_{0(h)}}{\chi} - \left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \frac{A_{0(v)}}{k_1} \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \left(1 + j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} - \chi s_y \right) \frac{1}{k_1 Z_1} \left(A_{1(h)}^{(0)} + A_{1(h)}^{(1)} + A_{1(h)}^{(2)} \right) \left(1 - j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) + \frac{\alpha}{Z_1 \chi} \left(A_{1(v)}^{(0)} + A_{1(v)}^{(1)} + A_{1(v)}^{(2)} \right) \left(1 - j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{\gamma_2 \beta}{\chi} + \chi s_y \right) \frac{\left(A_{2(h)}^{(0)} + A_{2(h)}^{(1)} + A_{2(h)}^{(2)} \right)}{k_2 Z_2} \left(1 + j\gamma_2 s - \frac{\gamma_2^2 s^2}{2} \right) - \frac{\alpha}{Z_2 \chi} \left(A_{2(v)}^{(0)} + A_{2(v)}^{(1)} + A_{2(v)}^{(2)} \right) \left(1 + j\gamma_2 s - \frac{\gamma_2^2 s^2}{2} \right) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\left(\frac{\gamma_1 \beta}{\chi} + \chi s_y \right) \frac{A_{0(h)}}{k_1 Z_1} - \frac{\alpha A_{0(v)}}{Z_1 \chi} \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \left(1 + j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{II.46}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} - \chi s_x \right) \frac{\left(A_{1(h)}^{(0)} + A_{1(h)}^{(1)} + A_{1(h)}^{(2)} \right)}{k_1 Z_1} \left(1 - j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) + \frac{\beta \left(A_{1(v)}^{(0)} + A_{1(v)}^{(1)} + A_{1(v)}^{(2)} \right)}{Z_1 \chi} \left(1 - j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{\gamma_2 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \frac{\left(A_{2(h)}^{(0)} + A_{2(h)}^{(1)} + A_{2(h)}^{(2)} \right) \exp(+j\gamma_2 s)}{k_2 Z_2} \left(1 + j\gamma_2 s - \frac{\gamma_2^2 s^2}{2} \right) - \frac{\beta}{Z_2 \chi} \left(A_{2(v)}^{(0)} + A_{2(v)}^{(1)} + A_{2(v)}^{(2)} \right) \left(1 + j\gamma_2 s - \frac{\gamma_2^2 s^2}{2} \right) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\gamma_1 \alpha}{\chi} + \chi s_x \right) \frac{1}{k_1 Z_1} A_{0(h)} - \frac{\beta}{Z_1 \chi} A_{0(v)} \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \left(1 + j\gamma_1 s - \frac{\gamma_1^2 s^2}{2} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{II.47}$$

II.5.2 Résolution à l'ordre zéro

À l'ordre zéro de perturbation ($p=0$), la surface est considérée comme plane (absence de rugosité), donc les fonctions qui décrivent les interfaces sont nulles c'est-à-dire que $s(x, y) = 0$. À cet ordre, l'onde diffractée se réduit à une onde plane réfléchie dans la direction spéculaire, d'où le système d'équations suivant.

$$\alpha A_{1(h)}^{(0)} + \frac{\gamma_1 \beta}{k_1} A_{1(v)}^{(0)} - \alpha A_{2(h)}^{(0)} + \frac{\gamma_2 \beta}{k_2} A_{2(v)}^{(0)} = - \left(\alpha A_{0(h)} - \frac{\gamma_1 \beta}{k_1} A_{0(v)} \right) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \tag{II.48}$$

$$\beta A_{1(h)}^{(0)} - \frac{\gamma_1 \alpha}{k_1} A_{1(v)}^{(0)} - \beta A_{2(h)}^{(0)} - \frac{\gamma_2 \alpha}{k_2} A_{2(v)}^{(0)} = - \left(\beta A_{0(h)} + \frac{\gamma_1 \alpha}{k_1} A_{0(v)} \right) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \tag{II.49}$$

$$-\frac{\gamma_1 \beta}{k_1 Z_1} A_{1(h)}^{(0)} + \frac{\alpha}{Z_1} A_{1(v)}^{(0)} - \frac{\gamma_2 \beta}{k_2 Z_2} A_{2(h)}^{(0)} - \frac{\alpha}{Z_2} A_{2(v)}^{(0)} = - \left(\frac{\gamma_1 \beta}{k_1 Z_1} A_{0(h)} + \frac{\alpha}{Z_1} A_{0(v)} \right) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \tag{II.50}$$

$$\frac{\gamma_1 \alpha}{k_1 Z_1} A_{1(h)}^{(0)} + \frac{\beta}{Z_1} A_{1(v)}^{(0)} + \frac{\gamma_2 \alpha}{k_2 Z_2} A_{2(h)}^{(0)} - \frac{\beta}{Z_2} A_{2(v)}^{(0)} = \left(\frac{\gamma_1 \alpha}{k_1 Z_1} A_{0(h)} - \frac{\beta}{Z_1} A_{0(v)} \right) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \tag{II.51}$$

La résolution de ces équations nous permet de déterminer les amplitudes à l'ordre zéro pour les deux types de polarisation. Ces amplitudes correspondent aux coefficients de Fresnel pour une surface diélectrique.

En polarisation horizontale, on prend $A_{0(v)} = 0$ et on obtient :

$$A_{1(h)}^{(0)}(\alpha, \beta) = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} A_{0(h)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{II.52})$$

$$A_{2(h)}^{(0)}(\alpha, \beta) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} A_{0(h)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{II.53})$$

Pour la polarisation incidente verticale, on prend $A_{0(h)} = 0$ et on obtient :

$$A_{1(v)}^{(0)}(\alpha, \beta) = \frac{\gamma_1 k_2^2 - \gamma_2 k_1^2}{\gamma_2 k_1^2 + \gamma_1 k_2^2} A_{0(v)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{II.54})$$

$$A_{1(v)}^{(0)}(\alpha, \beta) = \frac{2\gamma_1 k_2 k_1}{\gamma_2 k_1^2 + \gamma_1 k_2^2} A_{0(v)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \quad (\text{II.55})$$

II.5.3 Résolution à l'ordre un

Dans le cadre du premier ordre de la méthode de petites perturbations, nous pouvons représenter le champ diffracté sous la forme :

$$\Psi_{(a)}^{(0)}(x, y, z) = \Psi_{0(a)}^{(0)}(x, y, z) + \Psi_{(a)}^{(0)}(x, y, z) + \Psi_{(a)}^{(1)}(x, y, z) \quad (\text{II.56})$$

$\Psi_{(a)}^{(0)}(x, y, z)$ désigne le champ à l'ordre zéro, à cet ordre le champ est réfléchi dans la direction spéculaire.

$$\Psi_{(a)}^{(0)}(x, y, z) = A_{(a)}^{(0)} \mathbf{h}_{0+} \exp(-j\mathbf{k}_{0+} \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{II.57})$$

\mathbf{k}_{0+} est le vecteur d'onde de l'onde plane réfléchie, soit :

$$\mathbf{k}_{0+} = \alpha_0 \mathbf{x} + \beta_0 \mathbf{y} + \gamma_0 \mathbf{z} \quad (\text{II.58})$$

\mathbf{h}_{0+} est obtenu par la relation (II.18), en remplaçant \mathbf{k}_{0-} par \mathbf{k}_{0+} . Dans le cas d'une polarisation horizontale ($a=h$) :

$$\Psi_{(h)}^{(0)}(x, y, z) = \mathbf{E}_{(h)}^{(0)}(x, y, z) \quad (\text{II.59})$$

Pour une polarisation verticale ($a=v$), le champ réfléchi est donné par :

$$\Psi_{(v)}^{(0)}(x, y, z) = \mathbf{H}_{(v)}^{(0)}(x, y, z) \quad (\text{II.60})$$

$\Psi_{(a)}^{(1)}(x, y, z)$ représente le champ diffracté au premier ordre.

À cet ordre de perturbation ($p=1$), nous prenons en compte la rugosité de la surface ($s(x, y) \neq 0$ sur le domaine $[-L/2, L/2] \times [-L/2, L/2]$). On s'intéresse à la résolution du problème de la diffraction à l'ordre zéro (absence de rugosité) et à l'ordre un (présence de rugosité). La solution obtenue à l'ordre zéro est toutefois une étape nécessaire à la construction de la solution à l'ordre un. À partir des équations (II.44-47), on obtient le système suivant:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\alpha A_{1(h)}^{(1)}}{\chi} + \frac{\gamma_1 \beta A_{1(v)}^{(1)}}{k_1 \chi} - \frac{\alpha A_{2(h)}^{(1)}}{\chi} + \frac{\gamma_2 \beta A_{2(v)}^{(1)}}{k_2 \chi} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\begin{aligned} & \chi s_y \left[\frac{A_{0(v)}^{(0)}}{k_1} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) + \frac{A_{1(v)}^{(0)}}{k_1} - \frac{A_{2(v)}^{(0)}}{k_2} \right] \\ & + js \frac{\beta}{\chi} \left[\frac{\gamma_1^2}{k_1} A_{0(v)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) + \frac{\gamma_1^2}{k_1} A_{1(v)}^{(0)} - \frac{\gamma_2^2}{k_2} A_{2(v)}^{(0)} \right] \\ & - js \frac{\alpha}{\chi} \left[\gamma_1 A_{0(h)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) - \gamma_1 A_{1(h)}^{(0)} - \gamma_2 A_{2(h)}^{(0)} \right] \end{aligned} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\beta A_{1(h)}^{(1)}}{\chi} - \frac{\gamma_1 \alpha A_{1(v)}^{(1)}}{k_1 \chi} - \frac{\beta A_{2(h)}^{(1)}}{\chi} - \frac{\gamma_2 \alpha A_{2(v)}^{(1)}}{k_2 \chi} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\begin{aligned} & -\chi s_x \left[\frac{A_{0(v)}^{(0)}}{k_1} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) + \frac{A_{1(v)}^{(0)}}{k_1} - \frac{A_{2(v)}^{(0)}}{k_2} \right] \\ & + js \frac{\beta}{\chi} \left[\gamma_1 A_{1(h)}^{(0)} - \gamma_1 A_{0(h)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) + \gamma_2 A_{2(h)}^{(0)} \right] \\ & - js \frac{\alpha}{\chi} \left[\frac{\gamma_1^2}{k_1} A_{1(v)}^{(0)} + \frac{\gamma_1^2}{k_1} A_{0(v)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) - \frac{\gamma_2^2}{k_2} A_{2(v)}^{(0)} \right] \end{aligned} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{\gamma_1 \beta A_{1(h)}^{(1)}}{k_1 Z_1 \chi} + \frac{\alpha A_{1(v)}^{(1)}}{Z_1 \chi} - \frac{\gamma_2 \beta A_{2(h)}^{(1)}}{k_2 Z_2 \chi} - \frac{\alpha A_{2(v)}^{(1)}}{Z_2 \chi} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\begin{aligned} & \chi s_y \left[\frac{A_{2(h)}^{(0)}}{k_2 Z_2} - \frac{A_{1(h)}^{(0)}}{k_1 Z_1} - \frac{A_{0(h)}}{k_1 Z_1} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \right] \\ & js \frac{\beta}{\chi} \left[\frac{\gamma_2^2}{k_2 Z_2} A_{2(h)}^{(0)} - \frac{\gamma_1^2}{k_1 Z_1} A_{0(h)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) - \frac{\gamma_1^2}{k_1 Z_1} A_{1(h)}^{(0)} \right] \\ & js \frac{\alpha}{\chi} \left[\frac{\gamma_2}{Z_2} A_{2(v)}^{(0)} - \frac{\gamma_1}{Z_1} A_{0(v)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) + \frac{\gamma_1}{Z_1} A_{1(v)}^{(0)} \right] \end{aligned} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\gamma_1 \alpha A_{1(h)}^{(1)}}{k_1 Z_1 \chi} + \frac{\beta A_{1(v)}^{(1)}}{Z_1 \chi} + \frac{\gamma_2 \alpha A_{2(h)}^{(1)}}{k_2 Z_2 \chi} - \frac{\beta A_{2(v)}^{(1)}}{Z_2 \chi} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\begin{aligned} & \chi s_x \left[\frac{1}{k_1 Z_1} A_{0(h)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) + \frac{A_{1(h)}^{(0)}}{k_1 Z_1} - \frac{A_{2(h)}^{(0)}}{k_2 Z_2} \right] + \\ & j s \frac{\alpha}{\chi} \left[\frac{\gamma_1^2}{k_1 Z_1} A_{0(h)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) + \frac{\gamma_1^2}{k_1 Z_1} A_{1(h)}^{(0)} - \frac{\gamma_2^2}{k_2 Z_2} A_{2(h)}^{(0)} \right] \\ & + j s \frac{\beta}{\chi} \left[-\frac{\gamma_1}{Z_1} A_{0(v)} \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) + \frac{\gamma_1}{Z_1} A_{1(v)}^{(0)} + \frac{\gamma_2}{Z_2} A_{2(v)}^{(0)} \right] \end{aligned} \right) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{II.64}$$

À cette étape, nous devons appliquer la transformée de Fourier (TF) sur le système (II.61-64), en utilisant la relation suivante:

$$\begin{aligned}
& TF \{ s(x, y) TF^{-1} [G(\alpha, \beta) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0)] \} \\
& = \hat{s}(\alpha, \beta) * [G(\alpha, \beta) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0)] \\
& = \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) G(\alpha_0, \beta_0)
\end{aligned} \tag{II.65}$$

avec :

$$\begin{aligned}
& TF [s(x, y)] = \hat{s}(\alpha, \beta) \\
& TF [s_x(x, y)] = -j\alpha \hat{s}(\alpha, \beta) \\
& TF [s_y(x, y)] = -j\beta \hat{s}(\alpha, \beta)
\end{aligned} \tag{II.66}$$

On obtient

$$\frac{\alpha A_{1(h)}^{(1)}}{\chi} + \frac{\gamma_1 \beta A_{1(v)}^{(1)}}{k_1 \chi} - \frac{\alpha A_{2(h)}^{(1)}}{\chi} + \frac{\gamma_2 \beta A_{2(v)}^{(1)}}{k_2 \chi} = \left[\begin{aligned} & -(\beta - \beta_0) \chi_0 \left(\frac{A_{0(v)}}{k_1} + \frac{A_{1(v)}^{(0)}}{k_1} - \frac{A_{2(v)}^{(0)}}{k_2} \right) \\ & + \frac{\beta_0}{\chi_0} \left(\frac{\gamma_{10}^2}{k_1} A_{0(v)} + \frac{\gamma_{10}^2}{k_1} A_{1(v)}^{(0)} - \frac{\gamma_{20}^2}{k_2} A_{2(v)}^{(0)} \right) \end{aligned} \right] j\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \tag{II.67}$$

$$\frac{\beta A_{1(h)}^{(1)}}{\chi} - \frac{\gamma_1 \alpha A_{1(v)}^{(1)}}{k_1 \chi} - \frac{\beta A_{2(h)}^{(1)}}{\chi} - \frac{\gamma_2 \alpha A_{2(v)}^{(1)}}{k_2 \chi} = \left[\begin{aligned} & (\alpha - \alpha_0) \chi_0 \left(\frac{A_{0(v)}}{k_1} + \frac{A_{1(v)}^{(0)}}{k_1} - \frac{A_{2(v)}^{(0)}}{k_2} \right) \\ & - \frac{\alpha_0}{\chi_0} \left(\frac{\gamma_{10}^2}{k_1} A_{0(v)} + \frac{\gamma_{10}^2}{k_1} A_{1(v)}^{(0)} - \frac{\gamma_{20}^2}{k_2} A_{2(v)}^{(0)} \right) \end{aligned} \right] j\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \tag{II.68}$$

$$-\frac{\gamma_1 \beta A_{1(h)}^{(1)}}{\chi} + \frac{k_1 \alpha A_{1(v)}^{(1)}}{\chi} - \frac{\gamma_2 \beta A_{2(h)}^{(1)}}{\chi} - \frac{k_2 \alpha A_{2(v)}^{(1)}}{\chi} = \left[\begin{aligned} & \frac{\beta_0}{\chi_0} \left(-\gamma_{10}^2 A_{0(h)} - \gamma_{10}^2 A_{1(h)}^{(0)} + \gamma_{20}^2 A_{2(h)}^{(0)} \right) \\ & + \frac{\alpha_0}{\chi_0} \left(-k_1 \gamma_{10} A_{0(v)} + k_1 \gamma_{10} A_{1(v)}^{(0)} + k_2 \gamma_{20} A_{2(v)}^{(0)} \right) \end{aligned} \right] j\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \tag{II.69}$$

$$\frac{\gamma_1 \alpha A_{1(h)}^{(1)}}{\chi} + \frac{k_1 \beta A_{1(v)}^{(1)}}{\chi} + \frac{\gamma_2 \alpha A_{2(h)}^{(1)}}{\chi} - \frac{k_2 \beta A_{2(v)}^{(1)}}{\chi} = \left[\begin{array}{l} \frac{\alpha_0}{\chi_0} (\gamma_{10}^2 A_{0(h)} + \gamma_{10}^2 A_{1(h)}^{(0)} - \gamma_{20}^2 A_{2(h)}^{(0)}) \\ + \frac{\beta_0}{\chi_0} (-k_1 \gamma_{10} A_{0(v)} + k_1 \gamma_{10} A_{1(v)}^{(0)} + k_2 \gamma_{20} A_{2(v)}^{(0)}) \end{array} \right] j \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \quad (\text{II.70})$$

La résolution des équations (II.67-70) permet d'obtenir les amplitudes de diffraction. Nous trouvons les amplitudes à l'ordre un sous la forme d'une somme des composantes directes (aa) et croisées (ba). La composante horizontale des champs diffractés dans les deux milieux se met sous la forme :

$$A_{i(h)}^{(1)} = A_{i(hh)}^{(1)} + A_{i(hv)}^{(1)} \quad \text{où} : \quad i = \{1, 2\} \quad (\text{II.71})$$

avec

$$A_{1(hh)}^{(1)}(\alpha, \beta) = \frac{2j\gamma_{10}(k_1^2 - k_2^2)(\beta\beta_0 + \alpha\alpha_0)\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)}{(\gamma_{10} + \gamma_{20})(\gamma_2 + \gamma_1)\chi\chi_0} A_{0(h)} \quad (\text{II.72})$$

$$A_{1(hv)}^{(1)}(\alpha, \beta) = \frac{2jk_1\gamma_{20}\gamma_{10}(k_1^2 - k_2^2)(\beta\alpha_0 - \alpha\beta_0)\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)}{(\gamma_{20}k_1^2 + \gamma_{10}k_2^2)(\gamma_2 + \gamma_1)\chi\chi_0} A_{0(v)} \quad (\text{II.73})$$

$$A_{2(hh)}^{(1)}(\alpha, \beta) = \frac{2j\gamma_{10}(k_1^2 - k_2^2)(\beta\beta_0 + \alpha\alpha_0)\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)}{(\gamma_{10} + \gamma_{20})(\gamma_2 + \gamma_1)\chi\chi_0} A_{0(h)} \quad (\text{II.74})$$

$$A_{2(hv)}^{(1)}(\alpha, \beta) = \frac{2jk_1\gamma_{20}\gamma_{10}(k_1^2 - k_2^2)(\beta\alpha_0 - \alpha\beta_0)\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)}{(\gamma_{20}k_1^2 + \gamma_{10}k_2^2)(\gamma_2 + \gamma_1)\chi\chi_0} A_{0(v)} \quad (\text{II.75})$$

La composante verticale des champs diffractés dans les deux milieux se met sous la forme :

$$A_{i(v)}^{(1)} = A_{i(vh)}^{(1)} + A_{i(vv)}^{(1)} \quad \text{où} \quad i = \{1, 2\} \quad (\text{II.76})$$

avec

$$A_{1(vh)}^{(1)}(\alpha, \beta) = \frac{2jk_1\gamma_2\gamma_{10}(k_1^2 - k_2^2)(\beta\alpha_0 - \beta_0\alpha)\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)}{\chi\chi_0(\gamma_{10} + \gamma_{20})(k_1^2\gamma_2 + k_2^2\gamma_1)} A_{0(h)} \quad (\text{II.77})$$

$$A_{1(vv)}^{(1)}(\alpha, \beta) = \frac{2j\gamma_{10}(k_2^2 - k_1^2)(k_1^2\gamma_{20}\gamma_2(\beta\beta_0 + \alpha\alpha_0) - k_2^2\chi_0^2\chi^2)\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)}{\chi\chi_0(\gamma_{20}k_1^2 + \gamma_{10}k_2^2)(k_1^2\gamma_2 + k_2^2\gamma_1)} A_{0(v)} \quad (\text{II.78})$$

$$A_{2(vh)}^{(1)}(\alpha, \beta) = \frac{2jk_2\gamma_1\gamma_{10}(k_1^2 - k_2^2)(\beta_0\alpha - \beta\alpha_0)\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)}{\chi\chi_0(\gamma_{10} + \gamma_{20})(k_1^2\gamma_2 + k_2^2\gamma_1)} A_{0(h)} \quad (\text{II.79})$$

$$A_{2(vv)}^{(1)} = \frac{2jk_1k_2\gamma_{10}(k_1^2 - k_2^2) [\chi_0^2\chi^2 + \gamma_{20}\gamma_1(\beta\beta_0 + \alpha\alpha_0)] \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)}{\chi\chi_0(\gamma_{20}k_1^2 + \gamma_{10}k_2^2)(k_1^2\gamma_2 + k_2^2\gamma_1)} A_{0(v)} \quad (\text{II.80})$$

D'après les résultats obtenus (II.72-75) et (II.77-80), nous trouvons que le champ diffracté est proportionnel à la transformée de Fourier de la surface diffractante notée par $\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)$.

À cause du phénomène de dépolarisation, le champ est exprimé par ses composantes directes (*aa*) et croisées (*ba*):

$$\Psi_{i(a)}^{(1)}(x, y, z) = \Psi_{i(aa)}^{(1)}(x, y, z) + \Psi_{i(ba)}^{(1)}(x, y, z) \quad (\text{II.81})$$

La lettre en indice à droite désigne la polarisation de l'onde incidente, et la lettre de gauche désigne la polarisation de l'onde diffractée, avec :

$$\Psi_{i(aa)}^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D K_{i(aa)}(\alpha, \beta) \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \mathbf{h}_i^{+/-}(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_i^{+/-}(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{II.82})$$

$$\Psi_{i(ba)}^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D K_{i(ba)}(\alpha, \beta) \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \mathbf{v}_i^{+/-}(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_i^{+/-}(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{II.83})$$

Sachant que

$$A_{i(aa/ab)}^{(1)} = K_{i(aa/ba)} \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \quad (\text{II.84})$$

$\mathbf{k}_i^{+/-}$ est défini par la relation (II.24), avec :

$$\begin{cases} \alpha = k_i \sin \theta \cos \varphi \\ \beta = k_i \sin \theta \sin \varphi \\ \gamma = k_i \cos \theta \end{cases} \quad (\text{II.85})$$

Le domaine d'intégration dans les équations (II.82-II.83) est défini par : $D = \{\alpha^2 + \beta^2 < k^2\}$.

Dans le cas d'une polarisation horizontale ($a=h$), $\Psi_{i(h)}^{(1)}(x, y, z)$ représente le champ électrique au premier ordre. Lorsque ($a=v$), $\Psi_{i(v)}^{(1)}(x, y, z)$ représente le champ magnétique au premier ordre. Les composantes du champ magnétique et électrique dans les polarisations horizontale et verticale respectivement, sont obtenues à partir des relations d'orthogonalité entre le vecteur électrique et le

vecteur magnétique et le vecteur d'onde des ondes planes élémentaires des intégrales définies par (II.82) et (II.83).

II.5.4 Résolution à l'ordre deux

Les amplitudes d'ordre deux ($p=2$) peuvent être déterminées par l'utilisation des résultats obtenus à l'ordre zéro et à l'ordre un. À partir des équations (II.44-II.47), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\chi} \left[\alpha A_{1(h)}^{(2)} + \frac{\gamma_1 \beta}{k_1} A_{1(v)}^{(2)} - \alpha A_{2(h)}^{(2)} + \frac{\gamma_2 \beta}{k_2} A_{2(v)}^{(2)} \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left[j \frac{s}{\chi} \left(\alpha \gamma_1 A_{1(h)}^{(1)} + \alpha \gamma_2 A_{2(h)}^{(1)} + \frac{\gamma_1^2 \beta}{k_1} A_{1(v)}^{(1)} - \frac{\gamma_2^2 \beta}{k_2} A_{2(v)}^{(1)} \right) + s_y \chi \left(\frac{A_{1(v)}^{(1)}}{k_1} - \frac{A_{2(v)}^{(1)}}{k_2} \right) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] \\ & + \left[\frac{s^2}{2\chi} \left(\alpha \gamma_1^2 A_{1(h)}^{(0)} - \alpha \gamma_2^2 A_{2(h)}^{(0)} + \alpha \gamma_1^2 A_{0(h)} \right) \right. \\ & \left. + j s_y \alpha \chi \left(\frac{\gamma_1}{k_1} A_{0(v)} - \frac{\gamma_2}{k_2} A_{2(v)}^{(0)} - \frac{\gamma_1}{k_1} A_{1(v)}^{(0)} \right) \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] \end{aligned} \right\} d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{II.86}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\chi} \left[\beta A_{1(h)}^{(2)} - \frac{\gamma_1 \alpha}{k_1} A_{1(v)}^{(2)} - \beta A_{2(h)}^{(2)} - \frac{\gamma_2 \alpha}{k_2} A_{2(v)}^{(2)} \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left[j \frac{s}{\chi} \left(\beta \gamma_1 A_{1(h)}^{(1)} + \beta \gamma_2 A_{2(h)}^{(1)} + \frac{\gamma_2^2 \alpha}{k_2} A_{2(v)}^{(1)} - \frac{\gamma_1^2 \alpha}{k_1} A_{1(v)}^{(1)} \right) + s_x \chi \left(\frac{A_{2(v)}^{(1)}}{k_2} - \frac{A_{1(v)}^{(1)}}{k_1} \right) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] \\ & + \left[\frac{s^2}{2\chi} \left(\beta \gamma_1^2 A_{1(h)}^{(0)} - \beta \gamma_2^2 A_{2(h)}^{(0)} + \beta \gamma_1^2 A_{0(h)} \right) \right. \\ & \left. + j s_x s \chi \left(\frac{\gamma_1}{k_1} A_{1(v)}^{(0)} + \frac{\gamma_2}{k_2} A_{2(v)}^{(0)} - \frac{\gamma_1}{k_1} A_{0(v)} \right) \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] \end{aligned} \right\} d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{II.87}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\chi} \left[-\frac{\gamma_1 \beta}{Z_1 k_1} A_{1(h)}^{(2)} + \frac{\alpha}{Z_1} A_{1(v)}^{(2)} - \frac{\alpha}{Z_2} A_{2(v)}^{(2)} - \frac{\gamma_2 \beta}{Z_2 k_2} A_{2(h)}^{(2)} \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left[j \frac{s}{\chi} \left(-\frac{\beta \gamma_1^2}{Z_1 k_1} A_{1(h)}^{(1)} + \frac{\beta \gamma_2^2}{Z_2 k_2} A_{2(h)}^{(1)} + \frac{\alpha \gamma_1}{Z_1} A_{1(v)}^{(1)} + \frac{\alpha \gamma_2}{Z_2} A_{2(v)}^{(1)} \right) + s_y \chi \left(\frac{A_{2(h)}^{(1)}}{Z_2 k_2} - \frac{A_{1(h)}^{(1)}}{Z_1 k_1} \right) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] \\ & \left[\frac{s^2}{2\chi} \left(\frac{\beta \gamma_1^3}{k_1 Z_1} A_{0(h)} + \frac{\alpha \gamma_1^2}{Z_1} A_{0(v)} - \frac{\beta \gamma_1^3}{Z_1 k_1} A_{1(h)}^{(0)} - \frac{\gamma_2^3 \beta}{Z_2 k_2} A_{2(h)}^{(0)} + \frac{\alpha \gamma_1^2}{Z_1} A_{1(v)}^{(0)} - \frac{\alpha \gamma_2^2}{Z_2} A_{2(v)}^{(0)} \right) \right. \\ & \left. + j s_y s \chi \left(\frac{\gamma_2}{Z_2 k_2} A_{2(h)}^{(0)} + \frac{\gamma_1}{Z_1 k_1} A_{1(h)}^{(0)} - \frac{\gamma_1}{k_1 Z_1} A_{0(h)} \right) \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] \end{aligned} \right\} d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{II.88}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\chi} \left[\frac{\gamma_1 \alpha}{Z_1 k_1} A_{1(h)}^{(2)} + \frac{\beta}{Z_1} A_{1(v)}^{(2)} - \frac{\beta}{Z_2} A_{2(v)}^{(2)} + \frac{\gamma_2 \alpha}{Z_2 k_2} A_{2(h)}^{(2)} \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} & \left[+ j \frac{s}{\chi} \left(\frac{\alpha \gamma_1^2}{Z_1 k_1} A_{1(h)}^{(1)} - \frac{\alpha \gamma_2^2}{Z_2 k_2} A_{2(h)}^{(1)} + \frac{\beta \gamma_1}{Z_1} A_{1(v)}^{(1)} + \frac{\beta \gamma_2}{Z_2} A_{2(v)}^{(1)} \right) + s_x \chi \left(\frac{A_{1(h)}^{(1)}}{Z_1 k_1} - \frac{A_{2(h)}^{(1)}}{Z_2 k_2} \right) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] \\ & \left[\frac{s^2}{2\chi} \left(-\frac{\alpha \gamma_1^3}{Z_1 k_1} A_{0(h)} + \frac{\alpha \gamma_1^3}{Z_1 k_1} A_{1(h)}^{(0)} + \frac{\alpha \gamma_2^3}{Z_2 k_2} A_{2(h)}^{(0)} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\beta \gamma_1^2}{Z_1} A_{0(v)} + \frac{\beta \gamma_1^2}{Z_1} A_{1(v)}^{(0)} - \frac{\beta \gamma_2^2}{Z_2} A_{2(v)}^{(0)} \right] \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \exp[-j(\alpha x + \beta y)] \\ & \left[+ j s_x s \chi \left(-\frac{\gamma_1}{Z_1 k_1} A_{1(h)}^{(0)} - \frac{\gamma_2}{Z_2 k_2} A_{2(h)}^{(0)} + \frac{\gamma_1}{Z_1 k_1} A_{0(h)} \right) \right] \end{aligned} \right\} d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{II.89}$$

On applique la transformée de Fourier sur le système (II.86-II.89), en utilisant les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
& TF \left\{ s(x, y) \cdot TF^{-1} \left[G(\alpha, \beta) j \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \right] \right\} \\
& = \hat{s}(\alpha, \beta) * \left[G(\alpha, \beta) j \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \right] \\
& = j \iint G(\alpha', \beta') \hat{s}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \hat{s}(\alpha - \alpha', \beta - \beta') d\alpha' d\beta'
\end{aligned} \tag{II.90}$$

et

$$\begin{aligned}
& TF \left\{ s(x, y)^2 \cdot TF^{-1} \left[G(\alpha, \beta) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \right] \right\} \\
& = TF \left(s(x, y)^2 \right) * \left[G(\alpha, \beta) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \right] \\
& = \left(\hat{s}(\alpha, \beta) * \hat{s}(\alpha, \beta) \right) * \left[G(\alpha, \beta) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) \right]
\end{aligned} \tag{II.91}$$

Le symbole * désigne le produit de convolution. Le système d'équations obtenu est :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\chi} \left[\alpha A_{1(h)}^{(2)} + \frac{\gamma_1 \beta}{k_1} A_{1(v)}^{(2)} - \alpha A_{2(h)}^{(2)} + \frac{\gamma_2 \beta}{k_2} A_{2(v)}^{(2)} \right] \\
& = \left(\frac{\alpha_0 \gamma_1^2}{2\chi_0} A_{1(h)}^{(0)} - \frac{\alpha_0 \gamma_2^2}{2\chi_0} A_{2(h)}^{(0)} + \frac{\alpha_0 \gamma_1^2 A}{2\chi_0} A_{0(h)} + \frac{\beta_0 \gamma_2^3}{2\chi_0 k_2} A_{2(v)}^{(0)} + \frac{\beta_0 \gamma_1^3}{2\chi_0 k_1} A_{1(v)}^{(0)} - \frac{\beta_0 \gamma_1^3}{2\chi_0 k_1} A_{0(v)} \right) \iint F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \\
& + \iint \left[- \left(\frac{\alpha' \gamma_1}{\chi'} A_{1(h)}^{(1)} + \frac{\alpha' \gamma_2}{\chi'} A_{2(h)}^{(1)} + \frac{\gamma_1^2 \beta'}{k_1} A_{1(v)}^{(1)} - \frac{\gamma_2^2 \beta'}{k_2} A_{2(v)}^{(1)} \right) + (\beta - \beta') \chi' \left(\frac{A_{1(v)}^{(1)}}{k_1} - \frac{A_{2(v)}^{(1)}}{k_2} \right) \right] F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta'
\end{aligned} \tag{II.92}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\chi} \left[\beta A_{1(h)}^{(2)} - \frac{\gamma_1 \alpha}{k_1} A_{1(v)}^{(2)} - \beta A_{2(h)}^{(2)} - \frac{\gamma_2 \alpha}{k_2} A_{2(v)}^{(2)} \right] \\
& = \left(\frac{\beta_0 \gamma_1^2}{2\chi_0} A_{1(h)}^{(0)} - \frac{\beta_0 \gamma_2^2}{2\chi_0} A_{2(h)}^{(0)} + \frac{\beta_0 \gamma_1^2}{2\chi_0} A_{0(h)} + \frac{\gamma_1^3 \alpha_0}{k_1} A_{0(v)} - \frac{\gamma_1^3 \alpha_0}{k_1} A_{1(v)}^{(0)} - \frac{\gamma_2^3 \alpha_0}{k_2} A_{2(v)}^{(0)} \right) \iint F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \\
& + \iint \left[- \left(\frac{\beta' \gamma_1}{\chi'} A_{1(h)}^{(1)} + \frac{\beta' \gamma_2}{\chi'} A_{2(h)}^{(1)} - \frac{\gamma_1^2 \alpha'}{\chi' k_1} A_{1(v)}^{(1)} + \frac{\gamma_2^2 \alpha'}{\chi' k_2} A_{2(v)}^{(1)} \right) + (\alpha - \alpha') \chi' \left(\frac{A_{2(v)}^{(1)}}{k_2} - \frac{A_{1(v)}^{(1)}}{k_1} \right) \right] F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta'
\end{aligned} \tag{II.93}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\chi} \left[-\gamma_1 \beta A_{1(h)}^{(2)} + \alpha k_1 A_{1(v)}^{(2)} - \alpha k_1 A_{2(v)}^{(2)} - \gamma_2 \beta A_{2(h)}^{(2)} \right] \\
& = \left(\frac{\alpha_0 \gamma_1^2 k_1}{2\chi_0} A_{0(v)} - \frac{\gamma_1^3 \beta_0}{2\chi_0} A_{1(h)}^{(0)} - \frac{\gamma_2^3 \beta_0}{2\chi_0} A_{2(h)}^{(0)} + \frac{\gamma_1^3 \beta_0}{2\chi_0} A_{0(h)} + \frac{\alpha_0 \gamma_1^2 k_1}{2\chi_0} A_{1(v)}^{(0)} - \frac{\alpha_0 \gamma_2^2 k_2}{2\chi_0} A_{2(v)}^{(0)} \right) \iint F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \\
& + \iint \left[- \left(\frac{\beta' \gamma_1^2}{\chi'} A_{1(h)}^{(1)} + \frac{\beta' \gamma_2^2}{\chi'} A_{2(h)}^{(1)} + \frac{\alpha' \gamma_1 k_1}{\chi'} A_{1(v)}^{(1)} + \frac{\alpha' \gamma_2 k_2}{\chi'} A_{2(v)}^{(1)} \right) \right] F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta'
\end{aligned} \tag{II.94}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\chi} \left[\gamma_1 \alpha A_{1(h)}^{(2)} + \beta k_1 A_{1(v)}^{(2)} - \beta k_1 A_{2(v)}^{(2)} + \gamma_2 \alpha A_{2(h)}^{(2)} \right] \\
& = \frac{1}{2\chi_0} \left(-\alpha_0 \gamma_1^3 A_{0(h)} + \alpha_0 \gamma_1^3 A_{1(h)}^{(0)} + \alpha_0 \gamma_2^3 A_{2(h)}^{(0)} + \beta_0 \gamma_1^2 k_1 A_{0(v)} + \beta_0 \gamma_1^2 k_1 A_{1(v)}^{(0)} - \beta_0 \gamma_2^2 k_2 A_{2(v)}^{(0)} \right) \iint F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \\
& + \iint - \frac{1}{\chi'} \left(\alpha' \gamma_1^2 A_{1(h)}^{(1)} - \alpha' \gamma_2^2 A_{2(h)}^{(1)} + \beta' \gamma_1 k_1 A_{1(v)}^{(1)} + \beta' \gamma_2 k_2 A_{2(v)}^{(1)} \right) F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta'
\end{aligned} \tag{II.95}$$

avec

$$F(\alpha', \beta') = \hat{s}(\alpha - \alpha', \beta - \beta') \hat{s}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \tag{II.96}$$

Les expressions de (II.92) à (II.95), nous permettant d'obtenir les expressions finales des amplitudes sous la forme d'une somme des composantes directes (*aa*) et croisées (*ba*) pour chaque type de polarisation :

$$A_{i(h)}^{(2)} = A_{i(hh)}^{(2)} + A_{i(hv)}^{(2)} \quad \text{où : } i = \{1, 2\} \tag{II.97}$$

avec

$$\begin{aligned}
& A_{1(hh)}^{(2)} \\
&= \frac{\gamma_{10}(k_2^2 - k_1^2)(\gamma_{20} + \gamma_2)(\beta\beta_0 + \alpha_0\alpha)}{(\gamma_2 + \gamma_1)(\gamma_{10} + \gamma_{20})\chi\chi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' A_{0(h)} \\
&- \frac{2\gamma_{10}}{(\gamma_2 + \gamma_1)(\gamma_{20} + \gamma_{10})} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{-\gamma'_1 \gamma'_2}{(k_1^2 \gamma'_2 + \gamma'_1 k_2^2)} \frac{(\beta\alpha' - \beta'\alpha)(\beta'\alpha_0 - \alpha'\beta_0)}{\chi\chi' \chi'_0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\gamma'_1 + \gamma'_2)} \frac{(\beta\beta' + \alpha'\alpha)(\beta'\beta_0 + \alpha'\alpha_0)}{\chi\chi' \chi'_0} \right] A_{0(h)} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta'
\end{aligned} \tag{II.98}$$

$$\begin{aligned}
& A_{1(hv)}^{(2)} \\
&= \frac{k_1 \gamma_{10}(k_2^2 - k_1^2)(k_2^2 + \gamma_2 \gamma_{20})(\beta\alpha_0 - \alpha\beta_0)}{(\gamma_2 + \gamma_1)(k_2^2 \gamma_{10} + k_1^2 \gamma_{20})\chi\chi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' A_{0(v)} \\
&- \frac{2k_1 \gamma_{10}(k_2^2 - k_1^2)}{(\gamma_2 + \gamma_1)(k_1^2 \gamma_{20} + k_2^2 \gamma_{10})} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{k_2^2 \chi' \chi_0}{(\chi'^2 + \gamma'_2 \gamma'_1)} \frac{(\beta\alpha' - \beta'\alpha)}{\chi\chi'} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_{20}(k_2^2 - k_1^2)}{(k_1^2 \gamma'_2 + \gamma'_1 k_2^2)} \left[+(\chi'^2 + \gamma'_2 \gamma'_1) \frac{(\beta'\beta + \alpha'\alpha)(\beta'\alpha_0 - \alpha'\beta_0)}{\chi\chi' \chi_0 \chi'} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma'_1 \gamma'_2}{\chi_0 \chi'} \frac{(\beta'\beta_0 + \alpha'\alpha_0)(\beta\alpha' - \beta'\alpha)}{\chi\chi'} \right\} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' A_{0(v)}
\end{aligned} \tag{II.99}$$

$$\begin{aligned}
& A_{2(hh)}^{(2)} \\
&= \frac{\gamma_{10}(\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0)(\gamma_{20}(\gamma_{10}^2 + \gamma_{20}^2) + \gamma_1(k_1^2 - k_2^2))}{\chi\chi_0(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_{10} + \gamma_{20})} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' A_{0(h)} \\
&+ \frac{2\gamma_{10}(k_1^2 - k_2^2)^2}{(\gamma_{10} + \gamma_{20})(\gamma_1 + \gamma_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\gamma'_1 \gamma'_2}{(k_2^2 \gamma'_1 + k_1^2 \gamma'_2)} \frac{(\alpha'\beta - \alpha\beta')(\beta'\alpha_0 - \beta_0\alpha')}{\chi\chi' \chi'_0} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(\gamma'_2 + \gamma'_1)} \frac{(\alpha\alpha' + \beta\beta')(\beta'\beta_0 + \alpha'\alpha_0)}{\chi\chi' \chi'_0} \right) F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' A_{0(h)}
\end{aligned} \tag{II.100}$$

$$\begin{aligned}
& A_{2(hv)}^{(2)} \\
&= \frac{\gamma_{10} k_1 (\gamma_1 \gamma_{20} - k_2^2)(k_1^2 - k_2^2)(\alpha_0 \beta - \alpha \beta_0)}{\chi\chi_0(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_{20} k_1^2 + \gamma_{10} k_2^2)} A_{0(v)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \\
&= \frac{2\gamma_{10}(k_1^2 - k_2^2)}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_{20} k_1^2 + \gamma_{10} k_2^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{k_1 \gamma_{20}(k_2^2 - k_1^2)}{(k_2^2 \gamma'_1 + k_1^2 \gamma'_2)} \left[\frac{(\gamma'_1 \gamma'_2 + \chi'^2)(\alpha\alpha' + \beta\beta')(\beta'\alpha_0 - \alpha'\beta_0)}{\chi\chi' \chi'_0} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma'_1 \gamma'_2}{\chi' \chi} \frac{(\alpha'\beta - \alpha\beta')(\beta'\beta_0 + \alpha'\alpha_0)}{\chi'_0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{k_1 k_2^2 \chi_0 \chi'}{(\gamma'_1 \gamma'_2 + \chi'^2)} \frac{(\alpha'\beta - \alpha\beta')}{\chi' \chi} \right\} A_{0(v)} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta'
\end{aligned} \tag{II.101}$$

La composante verticale des champs diffractés dans les deux milieux est donnée par :

$$A_{i(v)}^{(2)} = A_{i(vh)}^{(2)} + A_{i(vv)}^{(2)} \quad \text{où } i = \{1, 2\} \tag{II.102}$$

avec

$$\begin{aligned}
& A_{1(vh)}^{(2)} \\
&= \frac{k_1 \gamma_{10} (k_2^2 - k_1^2) (k_2^2 + \gamma_2 \gamma_{20}) (\alpha_0 \beta - \beta_0 \alpha)}{(k_1^2 \gamma_2 + k_2^2 \gamma_1) (\gamma_{10} + \gamma_{20})} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' A_{0(h)} \\
&- \frac{2k_1 \gamma_{10} (k_2^2 - k_1^2)}{(k_1^2 \gamma_2 + k_2^2 \gamma_1) (\gamma_{20} + \gamma_{10})} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_2^2 \chi' \chi}{(\chi'^2 + \gamma_1' \gamma_2')} \frac{(\beta' \alpha_0 - \alpha' \beta_0)}{\chi_0 \chi'} + \frac{\gamma_2 (k_2^2 - k_1^2)}{(k_1^2 \gamma_2' + k_2^2 \gamma_1')} \left[(\chi'^2 + \gamma_1' \gamma_2') \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \frac{(\beta \alpha' - \beta' \alpha) (\beta' \beta_0 + \alpha' \alpha_0)}{\chi \chi'} + \gamma_1' \gamma_2' \frac{(\beta' \beta + \alpha' \alpha) (\beta' \alpha_0 - \alpha' \beta_0)}{\chi \chi'} \right] \right] F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' A_{0(h)}
\end{aligned} \tag{II.103}$$

$$\begin{aligned}
& A_{1(vv)}^{(2)} \\
&= - \frac{k_1^2 k_2^2 \gamma_{10} (k_2^2 - k_1^2) (\gamma_{20} + \gamma_2) (\beta_0 \beta + \alpha_0 \alpha)}{(k_1^2 \gamma_2 + k_2^2 \gamma_1) (k_2^2 \gamma_{10} + k_1^2 \gamma_{20}) \chi \chi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' A_{0(v)} \\
&- \frac{2k_1 \gamma_{10} (k_2^2 - k_1^2)}{(k_1^2 \gamma_2 + k_2^2 \gamma_1) (k_1^2 \gamma_{20} + k_2^2 \gamma_{10})} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{k_1 \gamma_2 \gamma_{20}}{(\gamma_1' + \gamma_2')} \frac{(k_2^2 - k_1^2) (\alpha' \beta - \beta' \alpha) (\beta' \alpha_0 - \alpha' \beta_0)}{\chi \chi' \chi_0 \chi'} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(k_1^2 \gamma_2' + \gamma_1' k_2^2)} \left[\frac{k_2^2 (k_2^2 - k_1^2) \chi \chi_0 \chi'^2 - \chi' \chi_0 k_1 k_2^2 \gamma_2 (\gamma_1' + \gamma_2') (\beta' \beta + \alpha' \alpha)}{k_1 \chi \chi'} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - k_1 \gamma_2 \gamma_{20} (k_2^2 - k_1^2) \gamma_1' \gamma_2' \frac{(\beta' \beta_0 + \alpha' \alpha_0) (\beta' \beta + \alpha' \alpha)}{\chi_0 \chi' \chi \chi'} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - k_2^2 k_1 \gamma_{20} \chi' \chi (\gamma_1' + \gamma_2') \frac{(\beta' \beta_0 + \alpha' \alpha_0)}{\chi_0 \chi'} \right] \right] F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' A_{0(v)}
\end{aligned} \tag{II.104}$$

$$\begin{aligned}
& A_{2(vh)}^{(2)} \\
&= \frac{k_2 \gamma_{10} (\gamma_1 \gamma_{20} - k_1^2) (k_1^2 - k_2^2) (\alpha_0 \beta - \alpha \beta_0)}{\chi_0 \chi (\gamma_{10} + \gamma_{20}) (k_1^2 \gamma_2 + k_2^2 \gamma_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' A_{0(h)} \\
&+ \frac{2\gamma_{10} k_2 (k_1^2 - k_2^2)}{(\gamma_{10} + \gamma_{20}) (k_1^2 \gamma_2 + k_2^2 \gamma_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\gamma_1 (k_1^2 - k_2^2)}{(k_1^2 \gamma_2' + k_2^2 \gamma_1')} \left(\frac{\gamma_1' \gamma_2' (\alpha \alpha' + \beta \beta') (\beta' \alpha_0 - \beta_0 \alpha')}{\chi' \chi \chi' \chi_0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\chi'^2 + \gamma_1' \gamma_2') \frac{(\alpha \beta' - \alpha' \beta) (\beta' \beta_0 + \alpha' \alpha_0)}{\chi' \chi \chi' \chi_0} \right) \right. \\
&\quad \left. + \chi' \chi \frac{k_1^2 (\beta' \alpha_0 - \beta_0 \alpha')}{(\chi'^2 + \gamma_1' \gamma_2') \chi' \chi_0} \right] F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' A_{0(h)}
\end{aligned} \tag{II.105}$$

$$\begin{aligned}
& A_{2(vv)}^{(2)} \\
&= \frac{\gamma_1 \gamma_{10} \gamma_{20} k_1 k_2 (\gamma_{20} k_2^2 - \gamma_{10} k_1^2) (\alpha \alpha_0 + \beta \beta_0)}{\chi_0 \chi (\gamma_{20} k_1^2 + \gamma_{10} k_2^2) (k_1^2 \gamma_2 + k_2^2 \gamma_1)} A_{0(v)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \\
&+ \frac{2\gamma_{10} k_1 k_2 (k_1^2 - k_2^2)}{(\gamma_{20} k_1^2 + \gamma_{10} k_2^2) (k_1^2 \gamma_2 + k_2^2 \gamma_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\gamma_1 \gamma_{20}}{(\gamma_1' + \gamma_2')} \frac{(k_2^2 - k_1^2) (\beta' \alpha_0 - \alpha' \beta_0) (\alpha \beta' - \alpha' \beta)}{\chi' \chi_0 \chi \chi'} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{k_2^2 \gamma_1' + k_1^2 \gamma_2'} \left[\frac{+\gamma_1 \gamma_1' \gamma_2' \gamma_{20} (k_2^2 - k_1^2) (\alpha \alpha' + \beta \beta') (\beta' \beta_0 + \alpha' \alpha_0)}{\chi \chi' \chi' \chi_0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma_1 k_2^2 \chi_0 \chi' (\gamma_1' + \gamma_2') \frac{(\alpha \alpha' + \beta \beta')}{\chi \chi'} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \chi' \chi k_1^2 \gamma_{20} (\gamma_2' + \gamma_1') \frac{(\beta' \beta_0 + \alpha' \alpha_0)}{\chi' \chi_0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \chi'^2 \chi \chi_0 (k_2^2 - k_1^2) \right] \right\} A_{0(v)} F(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta'
\end{aligned} \tag{II.106}$$

D'après les résultats (II.98-101) et (II.103-106), nous pouvons voir que le champ diffracté à l'ordre deux s'accorde avec le produit de transformée de Fourier de deux fonctions du profil diffractant.

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a déterminé les amplitudes du champ diffracté par une surface rugueuse bidimensionnelle par la méthode de petites perturbations (SPM). À partir de l'ordre zéro qui représente une surface lisse nous avons passé à l'ordre un et déterminer les amplitudes $A_{i(h,v)}^{(1)}$ qui dépendent de la transformée de Fourier de la surface puis l'ordre deux qui nous permet d'obtenir les amplitudes $A_{i(h,v)}^{(2)}$ qui prennent une forme un peu complexe exprimée par une intégrale dépendant d'un produit des transformées de Fourier des surfaces.

CHAPITRE III

Etude statistique du champ total diffracté par une surface rugueuse 2D

III.1 Introduction

III.2 Etude de la stationnarité du champ total

III.3 Etude de l'ergodicité du champ total

III.4 Résultats numériques

III.5 Conclusion

III.1 Introduction

L'objectif de ce troisième chapitre est principalement d'étudier la stationnarité et l'ergodicité du champ total diffracté par une surface rugueuse aléatoire 2D. Selon la méthode SPM, le champ total est défini par la somme des champs incident et réfléchi dans la direction spéculaire ainsi que le champ diffracté par la surface rugueuse 2D à l'ordre un (II.56). Comme il est présenté précédemment dans le deuxième chapitre, cette surface est qualifiée rugueuse aléatoire. Le profil de la surface étudiée dans cette thèse représente un processus Gaussien stationnaire caractérisé par des paramètres statistiques telles que la moyenne (II.1) et la fonction d'autocorrélation (II.2).

En nous basant sur ces notions, nous étudierons le comportement statistique du champ total et plus particulièrement la stationnarité et l'ergodicité. Ce concept traduit la capacité d'un processus à ne pas dépendre d'un point d'observation. On comprend ainsi qu'une telle propriété est d'une grande importance pour modéliser un champ stochastique. Pour conclure ce chapitre, des résultats de simulation sont exposés dans le but de valider les résultats théoriques obtenus.

III.2 Etude de la stationnarité du champ total

III.2.1 Stationnarité au sens strict

La stationnarité est une propriété particulièrement importante pour l'analyse des signaux aléatoires. On dit qu'un processus est stationnaire au sens strict si sa densité de probabilité (PDF) dans notre cas est indépendante des coordonnées de l'espace x , y et z .

III.2.2 Stationnarité au sens large

Pour étudier la stationnarité au sens large du champ total, il suffit de montrer que les moments statistiques de premier et de deuxième ordre (moyenne, variance, densité de probabilité,...) sont indépendants de coordonnées de l'espace x , y et z [40].

Donc l'objectif de cette partie c'est de déterminer :

- La moyenne statistique.
- La variance statistique.
- La fonction densité de probabilité (PDF) statistique.

Notons que la stationnarité au sens stricte implique, bien entendu, la stationnarité au sens large, alors que la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Dans cette étude, on va s'intéresser uniquement au champ diffracté dans le milieu 1 (le vide), c'est pourquoi on va utiliser dans la suite, les symboles k , \mathbf{v} , \mathbf{h} , \mathbf{k} , $K_{(aa)}$ et $K_{(ba)}$ à la place de k_i ,

$\mathbf{v}_i^\pm, \mathbf{h}_i^\pm, \mathbf{k}_i^\pm, K_{i(aa)}$ et $K_{i(ba)}$. Le profil sera étendu à l'infini ($L \rightarrow \infty$). Le problème sera traité selon l'angle d'incidence.

III.2.3 La moyenne statistique du champ total

On peut obtenir le moment d'ordre un de la composante $\langle \Psi_{(a),i} \rangle$ dans la direction oi ($i = x, y, z$) du champ total $\langle \Psi_{(a)} \rangle$ c'est-à-dire la moyenne statistique en utilisant les équations (II.56) et (II.82-83).

$$\langle \Psi_{(a),i} \rangle = (\psi_{0(a),i}(x, y, z) + \psi_{(a),i}^{(0)}(x, y, z)) + \langle \Psi_{(a),i}^{(1)}(x, y, z) \rangle \quad (\text{III.1})$$

Les crochets $\langle \rangle$ désignent toujours la moyenne statistique. En tenant compte que la surface étudiée représente un processus centré (II.1), la moyenne statistique de $\langle \Psi_{(a),i}^{(1)} \rangle$ est donnée par :

$$\langle \Psi_{i(aa/ba)}^{(1)} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D K_{(aa/ba)}(\alpha, \beta) \langle \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \rangle \mathbf{h}/\mathbf{v}(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{III.2})$$

On a

$$\langle \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \rangle = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \langle s(x, y) \rangle e^{j(\alpha - \alpha_0)x} e^{j(\beta - \beta_0)y} dx dy = 0 \quad (\text{III.3})$$

On obtient ainsi :

$$\langle \Psi_{(a),i}^{(1)} \rangle = 0 \quad (\text{III.4})$$

Ce qui implique que la moyenne statistique $\langle \Psi_{(a),i} \rangle$ de la composante $\Psi_{(a),i}$ ($i = x, y, z$) du champ total par rapport à la direction Oi est définie seulement par la somme de la composante incidente $\psi_{0(a),i}(x, y, z)$ et la composante réfléchie $\psi_{(a),i}^{(0)}(x, y, z)$ dans la direction spéculaire :

$$\langle \Psi_{(a),i} \rangle = \psi_{0(a),i}(x, y, z) + \psi_{(a),i}^{(0)}(x, y, z) \quad (\text{III.5})$$

À partir (III.5), nous trouvons que sous l'incidence oblique ($\theta_0 \neq 0$), le moment statistique de premier ordre du champ total $\langle \Psi_{(a),i} \rangle$ dépend du point $P(x, y, z)$, alors que sous l'incidence normale ($\theta_0 = 0$), il dépend seulement de l'altitude z .

III.2.4 Le moment statistique d'ordre deux

Le moment d'ordre deux $\langle \Psi_{(a),i}^2 \rangle$, encore appelé variance, est obtenu à partir des équations (II.56), (II.82-83) et (III.5). Sachant que la moyenne statistique de la surface est nulle (II.1), la moyenne statistique de $\langle \Psi_{(a),i}^{(1)} \rangle$ sera aussi nulle (III.4). Dans ce cas, la variance correspond au moyennage sur le carré de la composante $\Psi_{(a),i}$ du champ total.

$$\text{variance} = \langle \Psi_{(a),i}^2 \rangle \quad (\text{III.6})$$

Avec

$$\langle \Psi_{(a),i}^2 \rangle = (\Psi_{0(a),i} + \Psi_{(a),i}^{(0)})^2 + \langle \Psi_{(a),i}^{(1)2} \rangle \quad (\text{III.7})$$

où

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{(a),i}^{(1)2} \rangle = & \frac{1}{16\pi^4} \iint_{D'} \iint_{D'} F_{(a),i}(\alpha, \beta) F_{(a),i}(\alpha', \beta') \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle \\ & \times e^{-j(\alpha + \alpha')x} e^{-j(\beta + \beta')y} e^{-j[\gamma(\alpha, \beta) + \gamma(\alpha', \beta')]z} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

avec $D' = \{\alpha^2 + \beta^2 < k^2\}$ et $F_{(a),i}(\alpha, \beta)$ représente seulement une expression simplificatrice, elle est définie par:

$$F_{(a),i}(\alpha, \beta) = K_{(aa)}(\alpha, \beta) h_i(\alpha, \beta) + K_{(ba)}(\alpha, \beta) v_i(\alpha, \beta) \quad (\text{III.9})$$

Par la suite, on va noter la variance par $\langle \Psi_{(a),i}^{(1)2} \rangle$. Afin de déterminer $\langle \Psi_{(a),i}^{(1)2} \rangle$, nous devons calculer $\langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle$, en utilisant les expressions (II.4) et (II.66), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = & \int_{-L/2-L/2}^{+L/2+L/2} \int_{-L/2-L/2}^{+L/2+L/2} \int_{-L/2-L/2}^{+L/2+L/2} \int_{-L/2-L/2}^{+L/2+L/2} R_{SS}(x - x', y - y') \\ & \times e^{j(\alpha - \alpha_0)x} e^{j(\beta - \beta_0)y} e^{j(\alpha' - \alpha_0)x'} e^{j(\beta' - \beta_0)y'} dx dy dx' dy' \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

On pose

$$\begin{aligned} x - x' &= u \\ y - y' &= v \\ x' &= t \\ y' &= w \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Ce changement de variable (III.11), change le domaine d'intégration, ce qui nous permet d'obtenir après quelques manipulations algébriques (**Annexe A.1**) la relation suivante

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = & \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{SS}(u, v) (L - |u|)(L - |v|) \operatorname{sinc} \left(\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0 \right) (L - |u|) \right) \\ & \times \operatorname{sinc} \left(\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0 \right) (L - |v|) \right) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) dudv \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Avec

$$\operatorname{sinc} cx = \frac{\sin x}{x} \quad (\text{III.13})$$

Nous rappelons que la fonction d'autocorrelation a une mémoire finie. En utilisant la propriété suivante de la distribution de Dirac :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L \operatorname{sinc} \frac{\alpha L}{2} = 2\pi \delta(\alpha) \quad (\text{III.14})$$

À grande distance c'est-à-dire lorsque $L \rightarrow +\infty$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = \\ 4\pi^2 \delta(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0) \delta(\beta + \beta' - 2\beta_0) \hat{R}_{SS} \left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}, \frac{\beta - \beta'}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

En remplaçant (III.15) dans l'équation (III.8), ce que nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{(a),i}^{(1)2} \rangle = & \frac{e^{-j2\alpha_0 x} e^{-j2\beta_0 y}}{4\pi^2} \iint_{D \cap D_0} F_{(a),i}(\alpha, \beta) F_{(a),i}(2\alpha_0 - \alpha, 2\beta_0 - \beta) \\ & \times \hat{R}_{SS}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) e^{-j[\gamma(\alpha, \beta) + \gamma(2\alpha_0 - \alpha, 2\beta_0 - \beta)]z} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

avec $D_0 = D(\alpha - 2\alpha_0, \beta - 2\beta_0)$ et $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}$. Finalement, en substituant (III.16) dans l'équation (III.7), nous déduisons l'expression de la variance

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{(a),i}^2 \rangle = & (\Psi_{0(a),i} + \Psi_{(a),i}^{(0)})^2 + \frac{e^{-j2\alpha_0 x} e^{-j2\beta_0 y}}{4\pi^2} \iint_D F_{(a),i}(\alpha, \beta) F_{(a),i}(2\alpha_0 - \alpha, 2\beta_0 - \beta) \\ & \times \hat{R}_{SS}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) e^{-j[\gamma(\alpha, \beta) + \gamma(2\alpha_0 - \alpha, 2\beta_0 - \beta)]z} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Prenant en compte que la distribution de Dirac réduit l'intégration quadruple à une intégration double. À partir (III.17), nous trouvons que sous l'incidence oblique ($\theta_0 \neq 0$), le moment statistique de deuxième ordre du champ total complexe $\langle \Psi_{(a),i}^2 \rangle$ dépend du point $P(x, y, z)$, alors que sous l'incidence normale ($\theta_0 = 0$), il dépend seulement de l'altitude z . Nous pouvons remarquer aussi que :

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \langle \Psi_{(a),i}^{(1)2} \rangle = 0 \quad (\text{III.18})$$

Ce qui implique que

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \langle \Psi_{(a),i}^2 \rangle = (\Psi_{0(a),i} + \Psi_{(a),i}^{(0)})^2 \quad (\text{III.19})$$

III.2.5 La moyenne statistique du module du champ total

Nous pouvons obtenir la moyenne statistique de $|\Psi_{(a),i}|^2$ à partir de l'expression (II.56), nous obtenons la relation suivante :

$$\langle |\Psi_{(a),i}|^2 \rangle = |\Psi_{0(a),i} + \Psi_{(a),i}^{(0)}|^2 + \langle |\Psi_{(a),i}^{(1)}|^2 \rangle \quad (\text{III.20})$$

On a

$$\begin{aligned} \langle |\Psi_{(a),i}^{(1)}|^2 \rangle &= \frac{1}{16\pi^4} \iint_D \iint_D F_{(a),i}(\alpha, \beta) F_{(a),i}^*(\alpha', \beta') \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle \\ &\times e^{-j(\alpha - \alpha')x} e^{-j(\beta - \beta')y} e^{-j[\gamma(\alpha, \beta) - \gamma(\alpha', \beta')]z} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

avec

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle &= \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} R_{SS}(x - x', y - y') \\ &\times e^{j(\alpha - \alpha_0)x} e^{j(\beta - \beta_0)y} e^{-j(\alpha' - \alpha_0)x'} e^{-j(\beta' - \beta_0)y'} dx dy dx' dy' \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Le changement de variable (III.11), nous permet d'obtenir après quelques manipulations algébriques (**Annexe A.2**), la relation suivante

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle &= \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{SS}(u, v) (L - |u|)(L - |v|) \sin c \left(\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2} \right) (L - |u|) \right) \\ &\times \sin c \left(\left(\frac{\beta - \beta'}{2} \right) (L - |v|) \right) \exp(+j \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0 \right) u) \exp(+j \left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0 \right) v) dudv \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

L'astérisque * désigne le conjugué complexe. Appliquant l'expression de la fonction delta de Dirac (III.15), nous conduit à :

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = 4\pi^2 \delta(\alpha - \alpha') \delta(\beta - \beta') \hat{R}_{SS} \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0, \frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0 \right) \quad (\text{III.24})$$

En remplaçant (III.24) dans l'expression (III.21), nous déduisons l'expression de $\langle |\Psi_{(a),i}^{(1)}|^2 \rangle$

$$\langle |\Psi_{(a),i}^{(1)}|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D |F_{(a),i}(\alpha, \beta)|^2 \hat{R}_{SS}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) d\alpha d\beta \quad (\text{III.25})$$

En substituant (III.25) dans (III.20), nous obtenons l'expression finale de $\langle |\Psi_{(a),i}|^2 \rangle$

$$\langle |\Psi_{(a),i}|^2 \rangle = |\Psi_{0(a),i} + \Psi_{(a),i}^{(0)}|^2 + \frac{1}{4\pi^2} \iint_D |F_{(a),i}(\alpha, \beta)|^2 \hat{R}_{SS}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) d\alpha d\beta \quad (\text{III.26})$$

Nous pouvons déduire, à partir des expressions (III.17) et (III.26), que sous l'incidence oblique, le moment statistique de deuxième ordre du module du champ dépend du point d'observation $P(x, y, z)$. Mais sous l'incidence normale, il dépend seulement de l'altitude z .

III.2.6 Les moments statistiques d'ordre 2 des parties réelle et imaginaire du champ total

Pour $L \rightarrow \infty$, nous déduisons à partir les (III.17) et (III.26) les variances σ_R^2 et σ_I^2 de la partie réelle $\Psi_{(a)R,i}$ et la partie imaginaire $\Psi_{(a)I,i}$ de la composante $\Psi_{a,i}$ comme suit :

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2} [\langle |\Psi_{(a),i}|^2 \rangle + \text{Re} \langle (\Psi_{(a),i})^2 \rangle] - \text{Re}^2 \langle \Psi_{(a),i} \rangle \quad (\text{III.27})$$

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{2} [\langle |\Psi_{(a),i}|^2 \rangle - \text{Re} \langle (\Psi_{(a),i})^2 \rangle] - \text{Im}^2 \langle \Psi_{(a),i} \rangle \quad (\text{III.28})$$

On note Γ_{RI} la covariance de la partie réelle et imaginaire de la composante $\Psi_{a,i}$, elle est exprimée par :

$$\Gamma_{RI} = \frac{1}{2} \text{Im} \langle (\Psi_{(a),i})^2 \rangle - \text{Re} \langle \Psi_{(a),i} \rangle \text{Im} \langle \Psi_{(a),i} \rangle \quad (\text{III.29})$$

D'après (III.27) et (III.28), les variances statistiques des parties réelle σ_R^2 et imaginaire σ_I^2 sont exprimées en fonction de la moyenne statistique $\langle \Psi_{(a),i} \rangle$. Selon la formule (III.5), les composantes incidentes et réfléchies du champ par rapport à la direction Oi sont différentes de zéro, d'où les parties réelle et imaginaire des composantes du champ total sont non centrées avec des moyennes différentes $\langle \Psi_{R,i} \rangle \neq \langle \Psi_{I,i} \rangle$. Par ailleurs, les équations (III.17) et (III.26-29) montrent que ces variables aléatoires $\Psi_{(a)R,i}$ et $\Psi_{(a)I,i}$ sont corrélées c'est-à-dire que leur covariance n'est pas nulle ($\Gamma_{RI} \neq 0$), avec des variances différentes $\sigma_R^2 \neq \sigma_I^2$.

Compte tenu de ces résultats, nous constatons que sous l'incidence oblique, le champ total n'est pas stationnaire au sens large, car ses moments statistiques de premier et de deuxième ordre dépendent de coordonnées de l'espace. Par contre sous l'incidence normale, le champ total représente un processus stationnaire au sens large pour une altitude donnée z .

III.2.7 Lois de probabilité du champ total

Les expressions (II.82) et (II.83) sont des transformations linéaires du processus Gaussien $S(x, y)$, et par conséquent le champ total est aussi un processus Gaussien. Dans ce cas, la densité de probabilité est entièrement déterminée par cinq paramètres qui sont les moyennes statistiques des parties réelle $\langle \Psi_{(a)R,i} \rangle$ et imaginaire $\langle \Psi_{(a)I,i} \rangle$ du champ total, les écarts type σ_R , σ_I et la covariance Γ_{RI} des parties réelle et imaginaire respectivement. Nous pouvons exprimer la densité de probabilité conjointe des parties réelle et imaginaire [3]-[41] :

$$p_{RI}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_R\sigma_I(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(u - \langle \Psi_{(a)R,i} \rangle)^2}{\sigma_R^2} - 2\rho \frac{(u - \langle \Psi_{(a)R,i} \rangle)(v - \langle \Psi_{(a)I,i} \rangle)}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{(v - \langle \Psi_{(a)I,i} \rangle)^2}{\sigma_I^2} \right]\right\} \quad (\text{III.30})$$

où ρ est le coefficient de corrélation. Il est donné par

$$\rho = \frac{\Gamma_{RI}}{\sigma_R\sigma_I} \quad (\text{III.31})$$

En passant en coordonnées polaires

$$\text{Re}[\Psi_{(a),i}] = m \cos \phi \quad (\text{III.32})$$

$$\text{Im}[\Psi_{(a),i}] = m \sin \phi \quad (\text{III.33})$$

On trouve que m est le jacobien de la transformation aux coordonnées polaires, $-\pi \leq \phi \leq +\pi$. La densité de probabilité conjointe du module M et de la phase Φ s'écrit sous la forme suivante :

$$p_{M\Phi}(m, \phi) = mp_{Rl}(m \cos \phi, m \sin \phi) \quad (\text{III.34})$$

Au point d'observation $P(x, y, z)$, sous une onde incidente de polarisation (a) , et après quelques opérations mathématiques, nous obtenons la densité de probabilité bidimensionnelle de module M et la phase Φ :

$$p_{M\Phi}(m, \phi) = \frac{g_1(m)}{2\pi\sigma_R\sigma_I(1-\rho^2)^{1/2}} \exp[g_2(m) \cos(2\phi - \zeta)] \exp[g_3(m) \cos(\phi - \mathcal{G})] \quad (\text{III.35})$$

Avec

$$g_1(m) = m \exp\left[-\frac{m^2(\sigma_R^2 + \sigma_I^2)}{4\sigma_R^2\sigma_I^2(1-\rho^2)}\right] \exp\left[-\frac{\sigma_I^2\langle\Psi_{(a)R,i}\rangle^2 + \sigma_R^2\langle\Psi_{(a)I,i}\rangle^2}{2\sigma_R^2\sigma_I^2(1-\rho^2)}\right] \exp\left[\frac{\rho\langle\Psi_{(a)R,i}\rangle\langle\Psi_{(a)I,i}\rangle}{\sigma_R\sigma_I(1-\rho^2)}\right] \quad (\text{III.36})$$

$$g_2(m) = -\frac{m^2[(\sigma_R^2 - \sigma_I^2)^2 + 4\sigma_R^2\sigma_I^2\rho^2]^{1/2}}{4\sigma_R^2\sigma_I^2(1-\rho^2)} \quad (\text{III.37})$$

$$g_3(m) = \frac{m}{\sigma_R^2\sigma_I^2(1-\rho^2)} [\sigma_R^2(\sigma_R\langle\Psi_{(a)I,i}\rangle - \sigma_I\rho\langle\Psi_{(a)R,i}\rangle)^2 + \sigma_I^2(\sigma_I\langle\Psi_{(a)R,i}\rangle - \sigma_R\rho\langle\Psi_{(a)I,i}\rangle)^2]^{1/2} \quad (\text{III.38})$$

$$\zeta = \text{arctg}\left[\frac{2\rho\sigma_R\sigma_I}{\sigma_R^2 - \sigma_I^2}\right] \quad (\text{III.39})$$

$$\mathcal{G} = \text{arctg}\left[\frac{\sigma_R^2\langle\Psi_{(a)I,i}\rangle - \rho\sigma_R\sigma_I\langle\Psi_{(a)R,i}\rangle}{\sigma_I^2\langle\Psi_{(a)R,i}\rangle - \rho\sigma_R\sigma_I\langle\Psi_{(a)I,i}\rangle}\right] \quad (\text{III.40})$$

III.2.7.1 La densité de probabilité du module

La densité de probabilité (PDF) du module M est obtenue par l'intégration de l'équation (III.35) par rapport à ϕ , après quelques opérations mathématiques, nous obtenons l'expression suivante:

$$p_M(m) = \frac{g_1(m)}{2\pi\sigma_R\sigma_I(1-\rho^2)^{1/2}} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp[g_2(m)\cos(2\phi-\zeta)] \exp[g_3(m)\cos(\phi-\mathcal{G})] d\phi \quad (\text{III.41})$$

Pour exprimer $\exp[g_2\cos(2\phi-\zeta)]$ et $\exp[g_3\cos(\phi-\mathcal{G})]$ en fonction des séries de fonctions Bessel de première espèce, nous utilisons l'expansion de Jacobi définie en référence [31], on en déduit (**Annexe B.1**) donc:

$$p_M(m) = \frac{g_1(m)}{\sigma_R\sigma_I(1-\rho^2)^{1/2}} \{I_0[g_2(m)]I_0[g_3(m)] + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n[g_2(m)]I_{2n}[g_3(m)]\cos[n(2\mathcal{G}-\zeta)]\} \quad (\text{III.42})$$

$I_n(g)$ est le $n^{\text{ième}}$ ordre de la fonction Bessel de première espèce modifiée [43], il est défini par :

$$I_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\phi_1} \exp(g\cos\phi_1) d\phi_1 \quad (\text{III.43})$$

avec : $\phi - \mathcal{G} = \phi_1$.

III.2.7.2 La densité de probabilité de la phase

Par l'intégration de (III.35) par rapport à m , après quelques opérations mathématiques, nous trouvons la densité de probabilité (PDF) de la phase du champ diffracté Φ (**Annexe B.2**):

$$p_\Phi(\phi) = \frac{\sigma_R\sigma_I(1-\rho^2)^{1/2}}{2\pi(\sigma_I^2\cos^2\phi - 2\sigma_R\sigma_I\rho\cos\phi\sin\phi + \sigma_R^2\sin^2\phi)} \times \exp\left[-\frac{\sigma_I^2\langle\Psi_{(a)R,i}\rangle^2 + \sigma_R^2\langle\Psi_{(a)I,i}\rangle^2 - 2\sigma_R\sigma_I\rho\langle\Psi_{(a)R,i}\rangle\langle\Psi_{(a)I,i}\rangle}{2\sigma_R^2\sigma_I^2(1-\rho^2)}\right] \times \left\{1 + \xi(\phi)\sqrt{\pi} \exp(+\xi^2(\phi))[1 + \text{erf}(\xi(\phi))]\right\} \quad (\text{III.44})$$

où

$$\xi(\phi) = \frac{1}{\sigma_R\sigma_I(1-\rho^2)^{1/2}} \times \frac{1}{[\sigma_R^2 + \sigma_I^2 + (\sigma_I^2 - \sigma_R^2)\cos 2\phi - 2\rho\sigma_R\sigma_I\sin 2\phi]^{1/2}} \times \left[\sigma_R(\sigma_R\langle\Psi_{(a)I,i}\rangle - \sigma_I\rho\langle\Psi_{(a)R,i}\rangle)\sin\phi + \sigma_I(\sigma_I\langle\Psi_{(a)R,i}\rangle - \sigma_R\rho\langle\Psi_{(a)I,i}\rangle)\cos\phi\right] \quad (\text{III.45})$$

$\text{erf}(\xi)$ est la fonction erreur [33], elle est définie par:

$$\text{erf}(\xi) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^\xi \exp(-t^2) dt \quad (\text{III.46})$$

D'après les équations (III.42) et (III.44) nous pouvons constater que sous une incidence oblique, les densités de probabilités du module M et la phase Φ dépendent du point d'observation $P(x, y, z)$. Pour une altitude donnée z , sous l'incidence normale, les densités de probabilité ne dépendent pas des coordonnées x et y .

III.2.7.3 Cas particuliers

À partir des équations (III.42) et (III.44) qui représentent le cas général des densités de probabilité du module M et de la phase Φ , nous pouvons déduire trois cas particuliers (Tableau III.1).

En résumé, nous pouvons dire que sous l'incidence oblique, les moments statistiques de premier et de deuxième ordre dépendent du point $P(x, y, z)$. Ceci veut dire que, le champ total n'est pas stationnaire au sens large (stationnarité à l'ordre 2). En conséquence le champ total n'est pas stationnaire au sens strict. D'autre part, on a montré que sous l'incidence normale, les moments statistiques de premier et de deuxième ordre dépendent seulement de l'altitude z , donc pour une valeur donnée de z , le champ total représente un processus stochastique stationnaire au sens strict car les densités de probabilité (PDF) ne dépendent pas de coordonnées de l'espace.

		PDF du module	PDF de la phase
cas n°01	$\langle \Psi_{(a)R,i} \rangle = \langle \Psi_{(a)I,i} \rangle = 0$	Loi de Hoyt	Distribution non uniforme
	$\sigma_R^2 \neq \sigma_I^2$		
	$\rho \neq 0$		
Cas n°02	$\langle \Psi_{(a)R,i} \rangle = \langle \Psi_{(a)I,i} \rangle = 0$	Loi de Rayleigh [34]	Distribution uniforme entre 0 et 2π
	$\sigma_R^2 = \sigma_I^2$		
	$\rho = 0$		
Cas n°03	$\langle \Psi_{(a)R,i} \rangle \neq \langle \Psi_{(a)I,i} \rangle$	Loi de Rice	Distribution non uniforme
	$\sigma_R^2 = \sigma_I^2$		
	$\rho = 0$		

Tableau III.1 Cas particuliers

III.3 Etude de l'ergodicité du champ total

III.3.1 Introduction

Dans cette deuxième partie du chapitre, on va étudier de manière détaillée l'ergodicité du champ total, afin de bien modéliser le problème. La surface rugueuse est considérée comme un processus aléatoire Gaussien qui vérifie certaines propriétés spatiales telles que la moyenne (II.5) et la fonction d'autocorrélation (II.6). D'après ces propriétés la surface est spatialement centrée, de plus, elle est ergodique au deuxième ordre.

Dans un premier temps, nous devons donner une définition à l'ergodicité d'un processus aléatoire. L'importance de cette propriété réside dans le fait de créer une liaison entre les moments statistiques et les moments spatiales. Ensuite nous allons présenter les moments spatiales du champ total et ses distributions du module et de la phase sous l'incidence normale et oblique, en tenant compte des propriétés spatiales de la surface rugueuse. Dans le cadre de la méthode SPM [12, 13], cette étude est basée sur les expressions des champs au premier ordre de perturbation.

On dit qu'un processus aléatoire est ergodique lorsque ses moments spatiales existent et sont indépendants de la réalisation c'est-à-dire qu'ils peuvent être obtenus à partir d'une seule réalisation du processus aléatoire. De plus, l'ergodicité au second ordre nécessite que les moments spatiales jusqu'à l'ordre deux ne changent pas d'une réalisation à une autre. Il faut noter que le concept de l'ergodicité renforce la notion de stationnarité puisque l'ergodicité implique la stationnarité tandis que la réciproque n'est pas forcément vraie. Ainsi que le théorème de Birkhoff (1931) qui affirme que si un processus aléatoire est ergodique d'ordre n , alors ses moments spatiales et statistiques sont égaux [28].

III.3.2 Moyenne spatiale du champ total

Soit $s(x, y)$ une seule réalisation du processus aléatoire $S(x, y)$ selon une surface horizontale à l'altitude z_0 . Nous considérons $\psi_{(a)}(x, y, z)$ le champ diffracté par cette réalisation. Alors la moyenne spatiale de la composante $\psi_{(a),i}(x, y, z)$ dans la direction oi ($i = x, y, z$) du champ total $\psi_{(a)}(x, y, z)$ peut être estimée par

$$\overline{\psi_{(a),i}(z_0)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \psi_{(a),i}(x, y, z_0) dx dy \quad (\text{III.47})$$

D'autre part, la moyenne spatiale de $\psi_{(a)}(x, y, z)$ est définie par la somme des moyennes spatiales de ses composantes du champ incident, réfléchi et diffracté. Les équations (II.9), (II.56), (II.57) et (II.81) permettent d'écrire :

$$\overline{\psi_{(a),i}(z_0)} = \overline{\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)}} + \overline{\psi_{(a),i}^{(1)}} \quad (\text{III.48})$$

avec

$$\overline{(\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)})} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} (\psi_{0(a),i}(x, y, z_0) + \psi_{(a),i}^{(0)}(x, y, z_0)) dx dy \quad (\text{III.49})$$

et

$$\overline{\psi_{(a),i}^{(1)}(z_0)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 L^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \iint_D F_{(a),i}(\alpha, \beta) \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) e^{-j(\alpha x + \beta y + \gamma z_0)} d\alpha d\beta dx dy \quad (\text{III.50})$$

$F_{(a),i}(\alpha, \beta)$ est défini par (III.9) et $D = \{\alpha^2 + \beta^2 < k^2\}$. Sous l'incidence oblique ($\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$), les composantes du champ incident et du champ réfléchi représentent des fonctions périodiques, donc leur moyenne spatiale est nulle.

$$\overline{\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)}} = 0 \quad (\text{III.51})$$

Sous l'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$), la moyenne spatiale des composantes du champ incident et le champ diffracté à l'ordre zéro en direction de Oi est différente de zéro :

$$\overline{\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)}} = h_{0,i} \exp(+j\gamma_0 z_0) + A_{(a)}^{(0)} h_{0,i} \exp(-j\gamma_0 z_0) \quad (\text{III.52})$$

Pour déterminer $\overline{\psi_{(a),i}^{(1)}(z_0)}$, on change l'ordre de l'intégration dans l'expression (III.50), et nous effectuons une intégration par rapport à x et y . Cela permet d'obtenir l'expression suivante

$$\overline{\psi_{(a),i}^{(1)}(z_0)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 L^2} \iint_D F_{(a),i}(\alpha, \beta) \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) L^2 \sin c\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \sin c\left(\frac{\beta L}{2}\right) e^{-j\gamma z_0} d\alpha d\beta \quad (\text{III.53})$$

En appliquant la fonction delta de Dirac (III.14) et sachant que $\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)$ représente la transformée de Fourier de $s(x, y)$, nous obtenons :

$$\overline{\psi_{(a),i}^{(1)}} = F_{(a),i}(0, 0) e^{-jkz_0} \overline{s(x, y) \exp(-j\alpha_0 x) \exp(-j\beta_0 y)} \quad (\text{III.54})$$

On sait que la moyenne spatiale de la surface est nulle $\overline{s(x, y)} = 0$ (II.5), donc on peut écrire [45] :

$$\overline{s(x, y) \exp(-j\alpha_0 x) \exp(-j\beta_0 y)} = 0 \quad (\text{III.55})$$

Quel que soit l'angle d'incidence, la moyenne spatiale de $\overline{\psi_{(a),i}^{(1)}}$ est nulle:

$$\overline{\psi_{(a),i}^{(1)}} = 0 \quad (\text{III.56})$$

On constate d'après les expressions (III.48) et (III.56), que quelle que soit la réalisation $s(x, y)$ du processus aléatoire $S(x, y)$, la moyenne spatiale selon la surface horizontale à l'altitude z_0 est donnée par :

$$\overline{\psi_{(a),i}(z_0)} = \overline{\psi_{0(a),i}} + \overline{\psi_{(a),i}^{(0)}} \quad (\text{III.57})$$

III.3.3 Variance spatiale du champ total

Pour déterminer la variance spatiale du champ total diffracté par la surface horizontale à l'altitude z_0 , on utilise l'équation (II.56), on obtient :

$$\overline{\psi_{(a),i}^2(z_0)} = \overline{(\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)})^2} + 2\overline{\psi_{0(a),i}\psi_{(a),i}^{(1)}} + 2\overline{\psi_{(a),i}^{(0)}\psi_{(a),i}^{(1)}} + \overline{(\psi_{(a),i}^{(1)})^2} \quad (\text{III.58})$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{(\psi_{(a),i}^{(1)})^2} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi^4 L^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \iint_{D'} \iint_{D'} F_{(a),i}(\alpha, \beta) F_{(a),i}(\alpha', \beta') \\ &\times \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) e^{-j(\alpha + \alpha')x} e^{-j(\beta + \beta')y} e^{-j[\gamma(\alpha, \beta) + \gamma(\alpha', \beta')]z_0} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' dx dy \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

où $D' = \{\alpha'^2 + \beta'^2 < k'^2\}$. Nous trouvons à partir de (II.9) et (II.56) que sous l'incidence oblique ($\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$), le terme $\overline{(\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)})^2}$ est nul :

$$\overline{(\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)})^2} = 0 \quad (\text{III.60})$$

Alors que sous l'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$), le terme $\overline{(\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)})^2}$ n'est pas nul

$$\overline{(\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)})^2} = \left[\mathbf{h}_{0,i} \exp(+j\gamma_0 z_0) + A_{(a)}^{(0)} \mathbf{h}_{0,i} \exp(-j\gamma_0 z_0) \right]^2 \quad (\text{III.61})$$

Pour déterminer $\overline{\psi_{0(a),i}\psi_{(a),i}^{(1)}}$ et $\overline{\psi_{(a),i}^{(0)}\psi_{(a),i}^{(1)}}$, il suffit d'utiliser les équations (II.9), (II.56) et (III.53). Nous trouvons que ces termes dépendent de la moyenne spatiale de la surface $\overline{s(x,y)}$, sachant que cette dernière est nulle. Ceci implique que

$$\overline{\psi_{0(a),i}\psi_{(a),i}^{(1)}} = F_{(a),i}(\alpha_0, \beta_0)\overline{s(x,y)} = 0 \quad (\text{III.62})$$

$$\overline{\psi_{(a),i}^{(0)}\psi_{(a),i}^{(1)}} = F_{(a),i}(\alpha_0, \beta_0)\exp(-j2\gamma_0 z_0)\overline{s(x,y)} = 0 \quad (\text{III.63})$$

Quel que soit l'angle d'incidence, les moyennes spatiales $\overline{\psi_{0(a),i}\psi_{(a),i}^{(1)}}$ et $\overline{\psi_{(a),i}^{(0)}\psi_{(a),i}^{(1)}}$ sont nulles.

Finalement, on détermine $\overline{(\psi_{(a),i}^{(1)})^2}$ en utilisant la fonction delta de Dirac (III.14). La relation (III.59) est réduite à une double intégration

$$\begin{aligned} \overline{(\psi_{(a),i}^{(1)})^2} &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_D F_{(a),i}(\alpha, \beta) F_{(a),i}(-\alpha, -\beta) e^{-j2\gamma(\alpha, \beta)z_0} \\ &\quad \times \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

Selon [46], et après quelques manipulations algébriques (**Annexe C**), nous pouvons écrire dans le cas d'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$) :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} = 0 \quad (\text{III.65})$$

et sous l'incidence oblique ($\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$) (**Annexe C**):

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} = \hat{C}_{ss}(\alpha, \beta) \quad (\text{III.66})$$

Sachant que $\hat{C}_{ss}(\alpha, \beta)$ représente la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation spatiale $C_{ss}(x, y)$ qui est définie par (II.6).

Nous pouvons conclure à partir des équations (III.58), (III.60-62) et (III.65-66) que sous l'incidence oblique ($\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$), la variance spatiale de la composante du champ total est nulle :

$$\overline{\psi_{(a),i}^2(z_0)} = 0 \quad (\text{III.67})$$

Sous l'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$), en prenant en compte que $\hat{C}_{ss}(\alpha, \beta) = \hat{R}_{SS}(\alpha, \beta)$, le moment d'ordre deux est donné par :

$$\begin{aligned} \overline{\psi_{(a),i}^2}(z_0) &= \left(h_{0,i} \exp(+j\gamma_0 z_0) + A_{(a)}^{(0)} h_{0,i} \exp(-j\gamma_0 z_0) \right)^2 \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \iint_D F_{(a),i}(\alpha, \beta) F_{(a),i}(-\alpha, -\beta) \hat{R}_{SS}(\alpha, \beta) e^{-j2\gamma(\alpha, \beta)z_0} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{III.68})$$

D'après (III.68), à l'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$), le moment spatial d'ordre deux dépend seulement de l'altitude z_0 , donc il ne change pas d'une réalisation à une autre.

III.3.4 Moment spatial à l'ordre deux du module du champ total

On fait de même pour déterminer la moyenne spatiale du module au carré du champ total diffracté par la surface horizontale à l'altitude z_0 . À partir de (II.56), nous obtenons :

$$\overline{|\psi_{(a),i}|^2}(z_0) = \overline{|\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)}|^2} + 2\text{Re} \left[\overline{(\psi_{0(a),i})^* \psi_{(a),i}^{(1)}} \right] + 2\text{Re} \left[\overline{(\psi_{(a),i}^{(0)})^* \psi_{(a),i}^{(1)}} \right] + \overline{|\psi_{(a),i}^{(1)}|^2} \quad (\text{III.69})$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{|\psi_{(a),i}^{(1)}|^2}(z_0) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi^4 L^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \iint_D \iint_D F_{(a),i}(\alpha, \beta) F_{(a),i}^*(\alpha', \beta') \\ &\times \hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) e^{-j(\alpha - \alpha')x} e^{-j(\beta - \beta')y} e^{-j[\gamma(\alpha, \beta) - \gamma(\alpha', \beta')]z_0} d\alpha d\alpha' d\beta d\beta' dx dy \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

L'astérisque * désigne le conjugué complexe. Pour déterminer $\overline{|\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)}|^2}$, on utilise (II.9) et (II.56), nous trouvons que sous l'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$) :

$$\overline{|\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)}|^2} = |h_{0,i}|^2 \left| \exp(+j\gamma_0 z_0) + A_{(a)}^{(0)} \exp(-j\gamma_0 z_0) \right|^2 \quad (\text{III.71})$$

et sous l'incidence oblique ($\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$)

$$\overline{|\psi_{0(a),i} + \psi_{(a),i}^{(0)}|^2} = |h_{0,i}|^2 (1 + |A_{(a)}^{(0)}|^2) \quad (\text{III.72})$$

Les équations (II.9), (II.56) et (II.81) nous permet de déterminer $\overline{(\psi_{0(a),i})^* \psi_{(a),i}^{(1)}}$ et $\overline{(\psi_{(a),i}^{(0)})^* \psi_{(a),i}^{(1)}}$. Sachant que $\overline{s(x, y)} = 0$ (II.5), nous trouvons que :

$$\overline{(\psi_{0(a),i})^* \psi_{(a),i}^{(1)}} = \overline{(\psi_{(a),i}^{(0)})^* \psi_{(a),i}^{(1)}} = 0 \quad (\text{III.73})$$

On déduit que leurs parties réelle sont aussi nulles. Pour déterminer $\overline{|\psi_{(a),i}^{(1)}|^2}$, d'abord, on intègre par rapport à x et y et ensuite on utilise la fonction delta de Dirac (III.14). L'équation (III.70) est réduite à une double intégration et dépend seulement de l'altitude z_0 :

$$\overline{|\psi_{(a),i}^{(1)}|^2}(z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D |F_{(a),i}(\alpha, \beta)|^2 \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)|^2}{L^2} d\alpha d\beta \quad (\text{III.74})$$

À partir les équations (III.65) et (III.66), et après quelques manipulations algébriques, nous pouvons déduire [46]

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)|^2}{L^2} = \hat{C}_{ss}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \quad (\text{III.75})$$

Donc l'expression (III.70) devient

$$\overline{|\psi_{(a),i}^{(1)}|^2}(z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D |F_{(a),i}(\alpha, \beta)|^2 \hat{C}_{ss}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) d\alpha d\beta \quad (\text{III.76})$$

À la fin nous pouvons dire que l'expression (III.69) peut s'écrire dans le cas d'incidence normale sous la forme :

$$\begin{aligned} \overline{|\psi_{(a),i}^{(1)}|^2}(z_0) &= |h_{0,i}|^2 \left| \exp(+j\gamma_0 z_0) + A_{(a)}^{(0)} \exp(-j\gamma_0 z_0) \right|^2 \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \iint_D |F_{(a),i}(\alpha, \beta)|^2 \hat{C}_{ss}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{III.77})$$

et sous l'incidence oblique,

$$\overline{|\psi_{(a),i}^{(1)}|^2}(z_0) = |h_{0,i}|^2 (1 + |A_{(a)}^{(0)}|^2) + \frac{1}{4\pi^2} \iint_D |F_{(a),i}(\alpha, \beta)|^2 \hat{C}_{ss}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) d\alpha d\beta \quad (\text{III.78})$$

D'après les équations (III.77-78) et pour $L \rightarrow \infty$, avec $\hat{C}_{ss}(\alpha, \beta) = \hat{R}_{ss}(\alpha, \beta)$, nous pouvons conclure que le moment spatial d'ordre deux du module du champ ne dépend pas de l'altitude z_0 et aussi il ne change pas d'une réalisation à une autre.

III.3.5 Les moments spatiaux d'ordre deux des parties réelle et imaginaire du champ total

Nous pouvons obtenir les variances $\bar{\sigma}_R^2$ et $\bar{\sigma}_I^2$ des parties réelle et imaginaire $\psi_{(a)R,i}(x,y)$ et $\psi_{(a)I,i}(x,y)$ du champ total $\psi_{(a,i)}$ ainsi que leur covariance $\bar{\Gamma}_{RI}$ par les équations (III.56-57), (III.68), (III.73-75) et (III.77-78):

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_R^2 &= \frac{1}{2} \left(\overline{|\psi_{(a,i)}|^2} + \text{Re}(\overline{\psi_{(a,i)}^2}) \right) - \overline{\psi_{(a)R,i}}^2 \\ \bar{\sigma}_I^2 &= \frac{1}{2} \left(\overline{|\psi_{(a,i)}|^2} - \text{Re}(\overline{\psi_{(a,i)}^2}) \right) - \overline{\psi_{(a)I,i}}^2 \\ \bar{\Gamma}_{RI} &= \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{\psi_{(a,i)}^2}) - \overline{\psi_{(a)R,i} \psi_{(a)I,i}}\end{aligned}\quad (\text{III.79})$$

À partir des équations (III.56-57), (III.68) et (III.77-79), nous trouvons que :

- **Sous l'incidence oblique :**

$$\begin{aligned}\overline{\psi_{(a)R,i}} &= \overline{\psi_{(a)I,i}} = 0 \\ \bar{\Gamma}_{RI} &= 0 \\ \bar{\sigma}_R^2 &= \bar{\sigma}_I^2\end{aligned}\quad (\text{III.80})$$

Sachant que les variances spatiales $\bar{\sigma}_R^2$ et $\bar{\sigma}_I^2$ sont indépendantes de la surface horizontale à l'altitude z_0 .

- **Sous l'incidence normale :**

$$\begin{aligned}\overline{\psi_{(a)R,i}} &\neq \overline{\psi_{(a)I,i}} \neq 0 \quad \text{si} \quad (\psi_{0(a),i} \neq 0, \psi_{(a),i}^{(0)} \neq 0) \\ \bar{\Gamma}_{RI} &\neq 0 \\ \bar{\sigma}_R^2 &\neq \bar{\sigma}_I^2\end{aligned}\quad (\text{III.81})$$

Dans ce cas les variances spatiales $\bar{\sigma}_R^2$ et $\bar{\sigma}_I^2$ dépendent de la surface horizontale d'altitude z_0 . On constate d'après ces résultats que les moments spatiaux du premier et du deuxième ordre ne changent pas d'une réalisation à une autre et quel que soit l'angle d'incidence, le champ total représente un processus ergodique au deuxième ordre.

Nous avons déjà prouvé dans la partie III.2, que sous l'incidence normale pour une altitude donnée, le champ total est stationnaire au second ordre. Nous pouvons conclure que le champ total représente un processus stationnaire et érgodique au deuxième ordre et selon le théorème de Birkoff [8], les moments statistiques sont égaux aux moments spatiaux jusqu'à l'ordre deux, ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi_{(a)R,i}} &= \langle \Psi_{(a)R,i} \rangle \\
\overline{\Psi_{(a)I,i}} &= \langle \Psi_{(a)I,i} \rangle \\
\overline{\sigma_R^2} &= \sigma_R^2 \\
\overline{\sigma_I^2} &= \sigma_I^2 \\
\overline{\Gamma_{RI}} &= \Gamma_{RI}
\end{aligned} \tag{III.82}$$

III.3.6 Distribution spatiale du champ total

On en déduit les distributions spatiales en utilisant (III.42) et (III.44) avec des moments spatiaux au lieu de celles statistiques. Sous un éclairage oblique, les parties réelle et imaginaire de la composante $\Psi_{(a),i}(x, y)$ associée à une réalisation arbitraire $s(x, y)$ sont deux fonctions spatialement centrées et décorréliées avec le même écart type. Par conséquent, le module de $\Psi_{(a),i}(x, y)$ obéit à une loi de Rayleigh et la phase est uniformément répartie. Dans ce cas, nous pouvons dire que les distributions spatiales et statistiques ne sont pas interchangeables. Sous incidence normale, dans le cas général, les deux fonctions $\Psi_{(a)R,i}(x, y)$ et $\Psi_{(a)I,i}(x, y)$ ne sont pas spatialement centrées. Elles sont corrélées avec des écarts types spatiaux différents. En conséquence, les distributions spatiales de $\Psi_{(a),i}(x, y)$ en module et en phase sont données en (III.42) et (III.44). Sous un éclairage normal, les distributions spatiales et statistiques sont interchangeables.

III.4 Résultats numériques

Cette partie est consacrée aux résultats numériques à partir de la théorie vue précédemment. Toutes les simulations sont effectuées à la fréquence de 1 GHz (bande UHF), c'est-à-dire pour une longueur d'onde $\lambda = 30$ cm. La surface est caractérisée par sa fonction d'autocorrélation Gaussienne de hauteur quadratique moyenne $\sigma_s = \lambda/20$ et de longueur de corrélation $l_c = \lambda$. La permittivité relative de cette surface est $\varepsilon_r = 8.4126 - 2.1628j$, qui représente un milieu naturel d'un sol moyennement sec. L'onde incidente est en polarisation horizontale avec l'angle de azimut $\varphi_0 = 0^\circ$.

III.4.1 La moyenne statistique

La figure III. 1 représente les moyennes statistiques des parties réelle et imaginaire des composantes E_y , $Z_1 H_x$ et $Z_1 H_z$ du champ total dans le vide. La surface est éclairée sous une incidence oblique avec un angle de site $\theta_0 = 40^\circ$. La hauteur z , varie de 0.5λ à 5λ . Les courbes représentées par la figure oscillent selon l'axe Oz ($x = y = 0$) de manière périodique de période $\lambda / \cos \theta_0 = 39.2$ cm et avec une amplitude constante.

Notons que les moyennes des composantes E_x , E_z et $Z_1 H_y$ sont nulles lorsque la polarisation incidente est horizontale et l'angle azimut est nul $\varphi_0 = 0^\circ$.

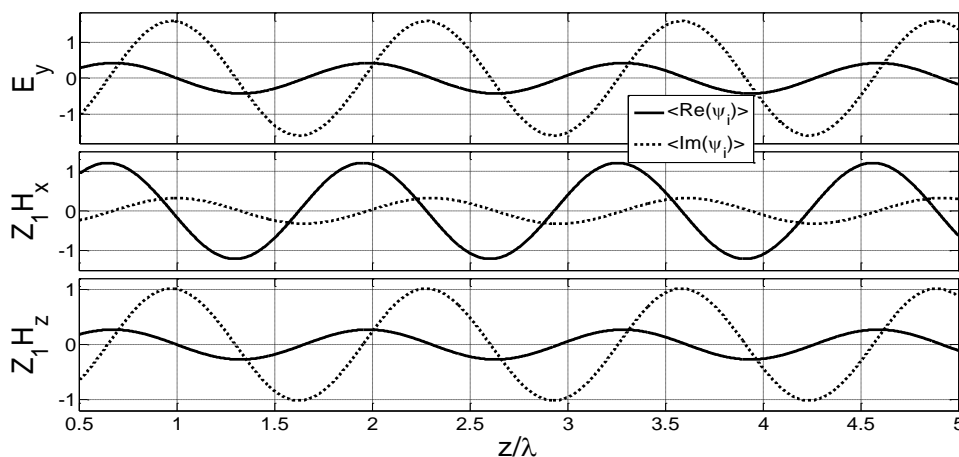


Figure III. 1. Les moyennes statistiques des parties réelle et imaginaire des composantes non nulles du champ total

III.4.2 La variance statistique

La figure III. 2 représente les variances statistiques des parties réelle et imaginaire des composantes du champ total et leur covariance selon l'axe Oz ($x = y = 0$). On a représenté les composantes électriques dans la figure III. 2a et les composantes magnétiques dans figure III. 2b. La surface est éclairée sous une incidence oblique avec $\theta_0 = 40^\circ$. Les variances et la covariance sont obtenues à partir des relations (III.27), (III.28) et (III.29) et dépendent de la coordonnée z .

Nous pouvons voir très nettement que les amplitudes d'oscillation diminuent selon l'axe Oz et tendent vers une valeur asymptotique pour lesquels $\sigma_R^2 = \sigma_I^2$ et $\rho = 0$. Nous remarquons aussi que les variances sont différentes, sauf aux points d'intersection des deux courbes (par exemple, au point $z_1 = 1.32\lambda$ pour les composantes E_x , E_z et $Z_1 H_y$ et au point $z_2 = 4.83\lambda$ pour les composants E_y , $Z_1 H_x$ et $Z_1 H_z$). À ces points, le coefficient de corrélation statistique n'est pas nul. De plus, on peut remarquer que la différence entre les variances devient maximale lorsque le coefficient de corrélation est égal à zéro. Nous notons que pour les composantes ayant des moyennes nulles (par exemple E_x , E_z et $Z_1 H_y$), les variances des parties réelle et imaginaire sont faibles comparées à celles des composantes ayant des moyennes non nulles (comme E_y , $Z_1 H_x$ et $Z_1 H_z$).

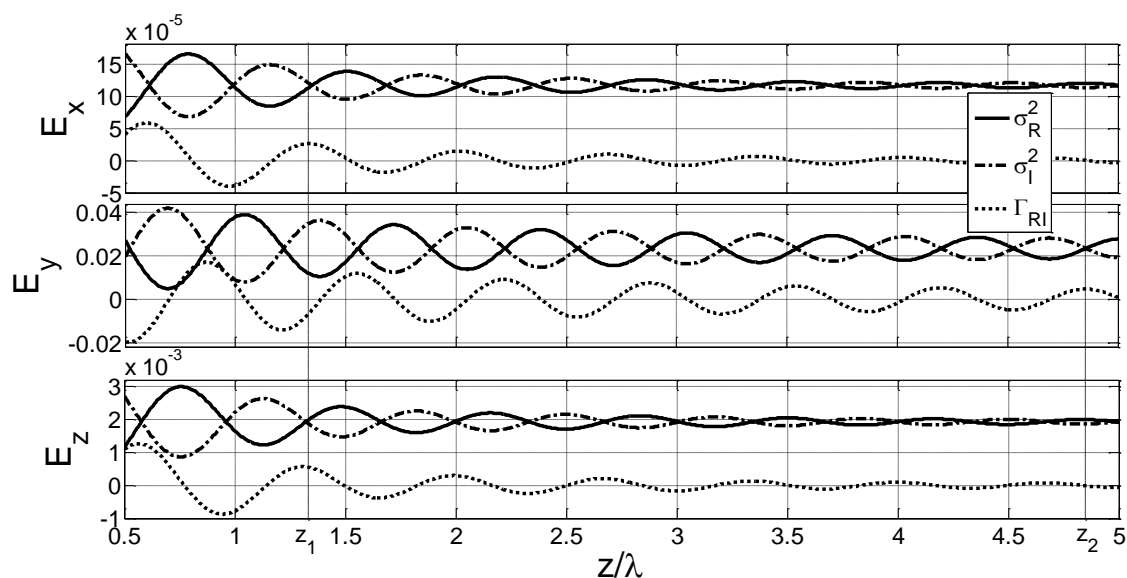


Figure III.2a. Variances statistiques des parties réelle et imaginaire des composantes du champ électrique total et leurs coefficients de corrélation.

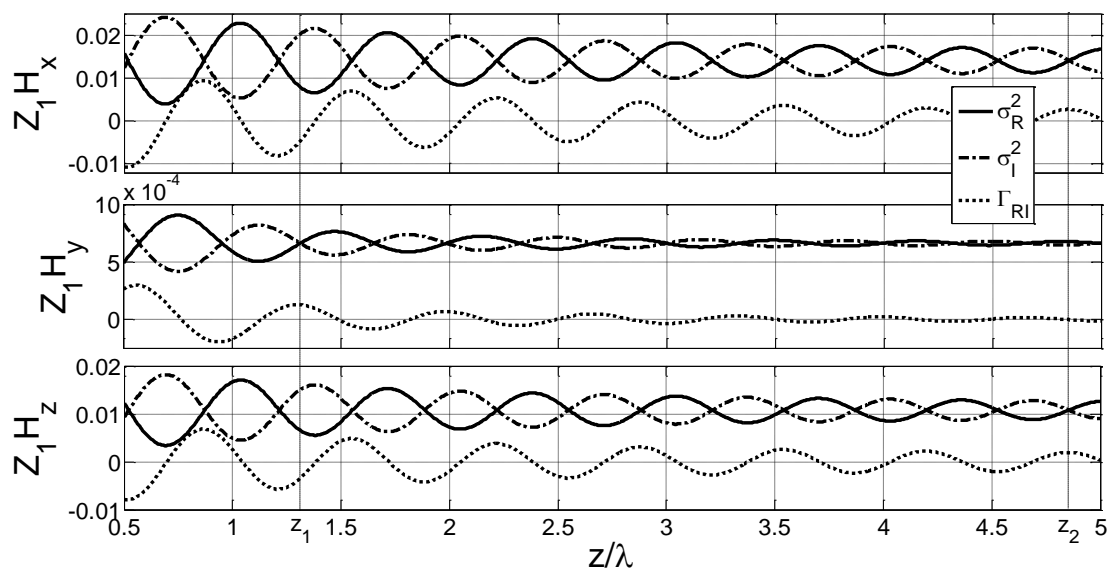


Figure III. 2b. Variances statistiques des parties réelle et imaginaire des composantes du champ magnétique total et leurs coefficients de corrélation.

III.4.3 Les densités de probabilités du module et de la phase

La figure III.3 montre les densités de probabilité (PDF) du module et de la phase des composantes du champ total pour deux points $z = 0.75\lambda$ et $z = 4.83\lambda$. Les courbes en continu sont associées avec $z = 0.75\lambda$, les courbes en pointillés avec $z = 4.83\lambda$. La surface est éclairée sous l'incidence $\theta_0 = 40^\circ$. À cause des différences entre le premier et le second moment des parties réelle

et imaginaire, les densités de probabilité du module et de la phase changent d'une composante à une autre.

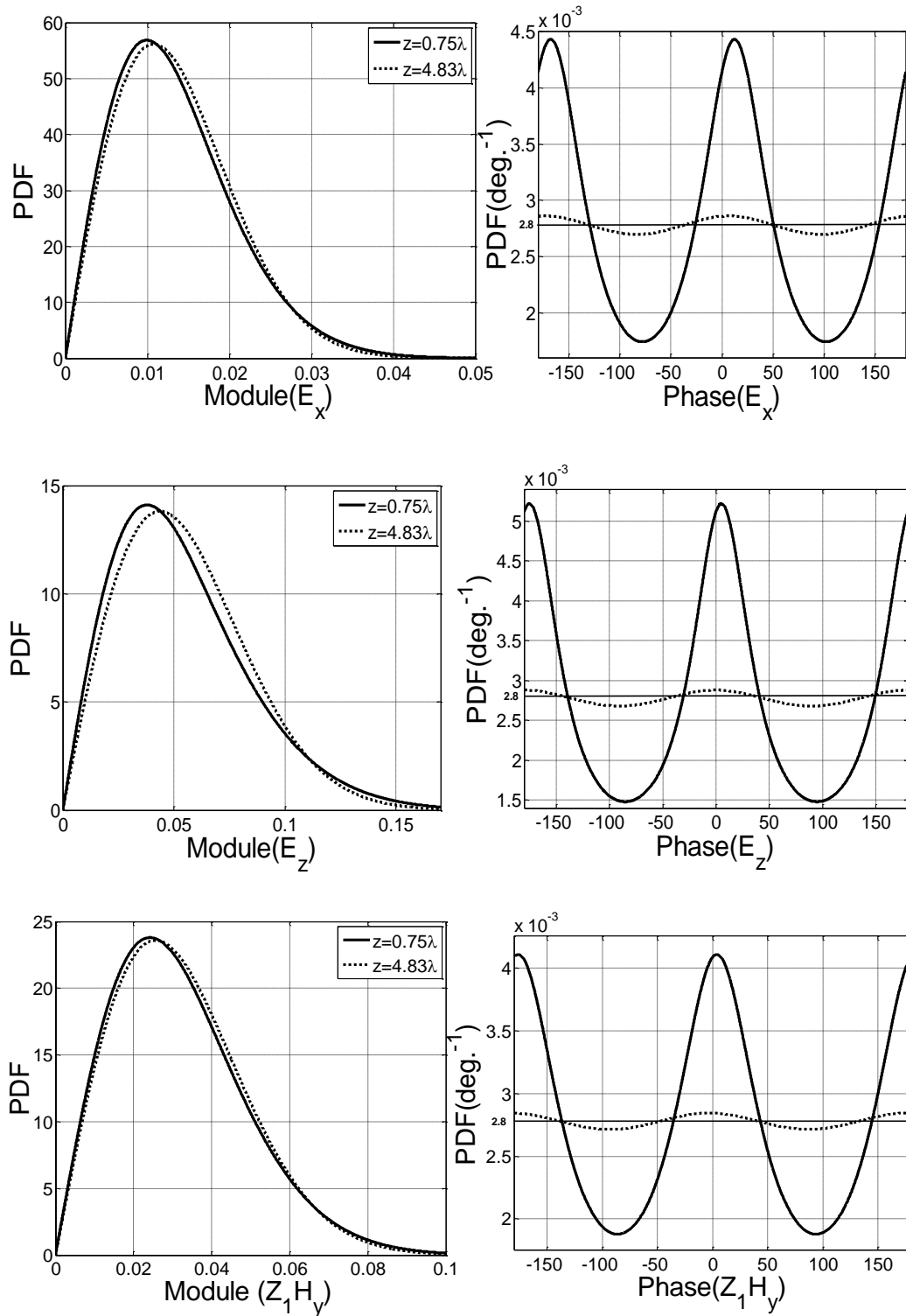


Figure III.3a. Les densités de probabilités du module et de la phase des composantes E_x , E_z et Z_1H_y du champ total (continu $z=0.75\lambda$, pointillés $z=4.83\lambda$).

D'après la figure III.3a, lorsque $z = 0.75\lambda$, le module des composantes E_x , E_z et Z_1H_y suit la loi de Hoyt et la phase n'est pas uniforme. Lorsque $z = 4.83\lambda$, le module obéit à une loi de Rayleigh et la phase est distribuée uniformément.

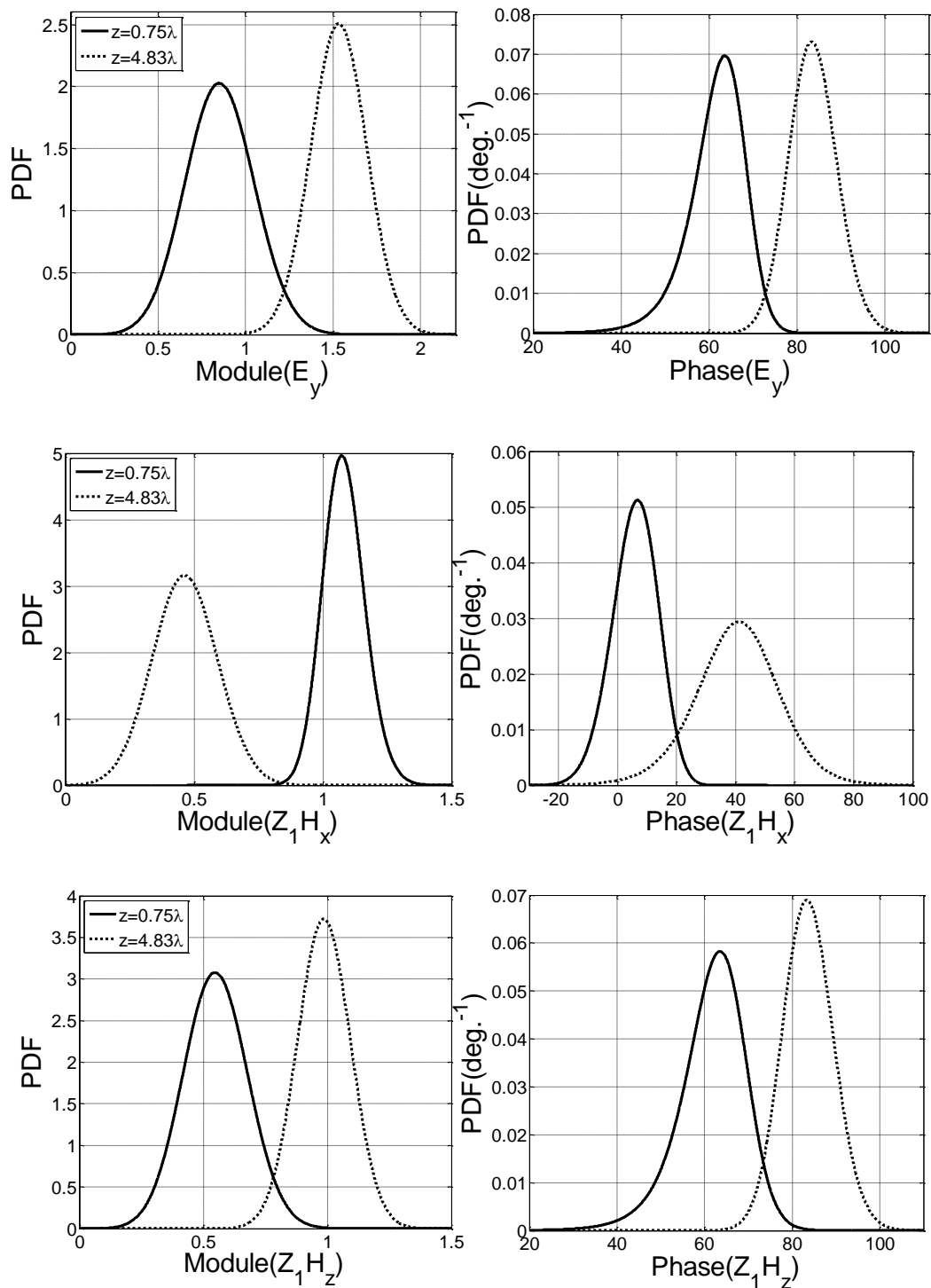


Figure III.3b. Les densités de probabilités du module et de la phase des composantes E_y , Z_1H_x et Z_1H_z du champ total (continu $z = 0.75\lambda$, pointillés $z = 4.83\lambda$).

D'autre part, dans la Figure III.3b. Pour $z=0.75\lambda$ et $z=4.83\lambda$, le module et la phase des composantes E_y , Z_1H_x et Z_1H_z suivent les lois générales (III.42) et (III.44). Dans le cas où l'altitude z est suffisamment élevée, le module de ces composantes suit la loi du Rice et leur phase n'est pas uniforme.

III.4.4 La stationnarité

Dans cette simulation, on va varier les coordonnées de l'espace pour une altitude constante pour les deux types de l'incidence, afin de vérifier la stationnarité du champ total. La figure III.4 représente les densités de probabilités du module et de phase de la composante E_y à l'altitude $z = 1.5\lambda$ pour deux points $x = 1.25\lambda$ et $x = 4.25\lambda$ avec $y = 0$.

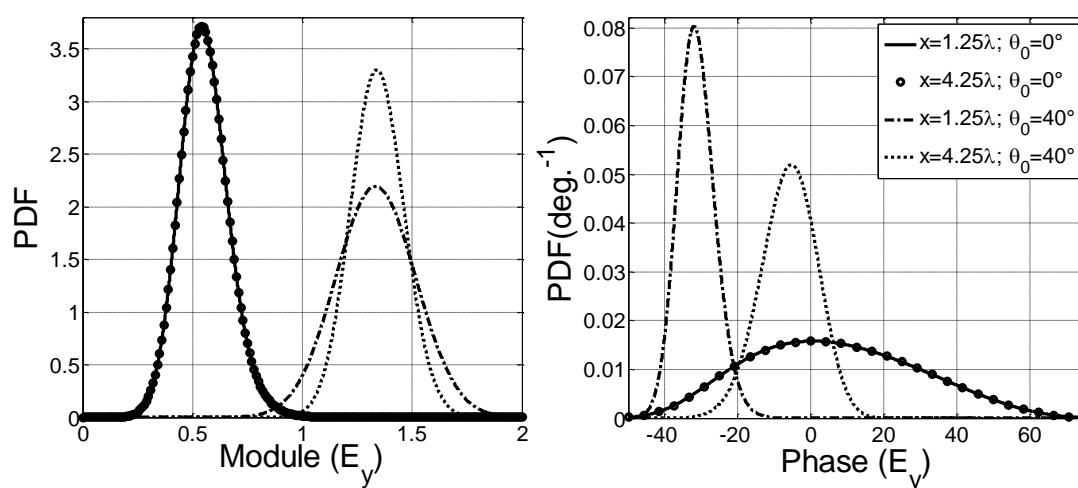


Figure III.4. Les densités de probabilités du module et de la phase de la composante E_y du champ total.

Nous voyons bien que sous l'incidence oblique ($\theta_0 = 40^\circ$), les densités de probabilité du module et de la phase changent d'un point à un autre. Alors que sous l'incidence normale ($\theta_0 = 0^\circ$) les densités de probabilité restent inchangées. À partir de ces résultats, nous constatons que les moments de premier et de deuxième ordre du champ total et les lois de probabilités ne dépendent pas des coordonnées spatiales x et y . Donc, sous une incidence normale, pour une altitude donnée, le champ total représente un processus stochastique strictement stationnaire.

III.4.5 Validation des résultats théoriques par la méthode de Monté Carlo.

Les résultats que nous avons présentés jusqu'à maintenant étaient des estimations sur une seule réalisation. Sur la figure III.5, on a déterminé numériquement les densités de probabilité du module et de la phase des composantes du champ total E_y , Z_1H_x et Z_1H_z , obtenues à partir des simulations de Monte-Carlo puis on les a comparées aux densités de probabilité théoriques de ces composantes, définies d'après (III.42) et (III.44). Les histogrammes issus des résultats de 5000

réalisations, ils sont obtenus à partir des relations (II.61) à (II.65) où $L = 20\lambda$. Le point d'observation est sur l'axe Oz à l'altitude $z_0 = 4.5\lambda$.

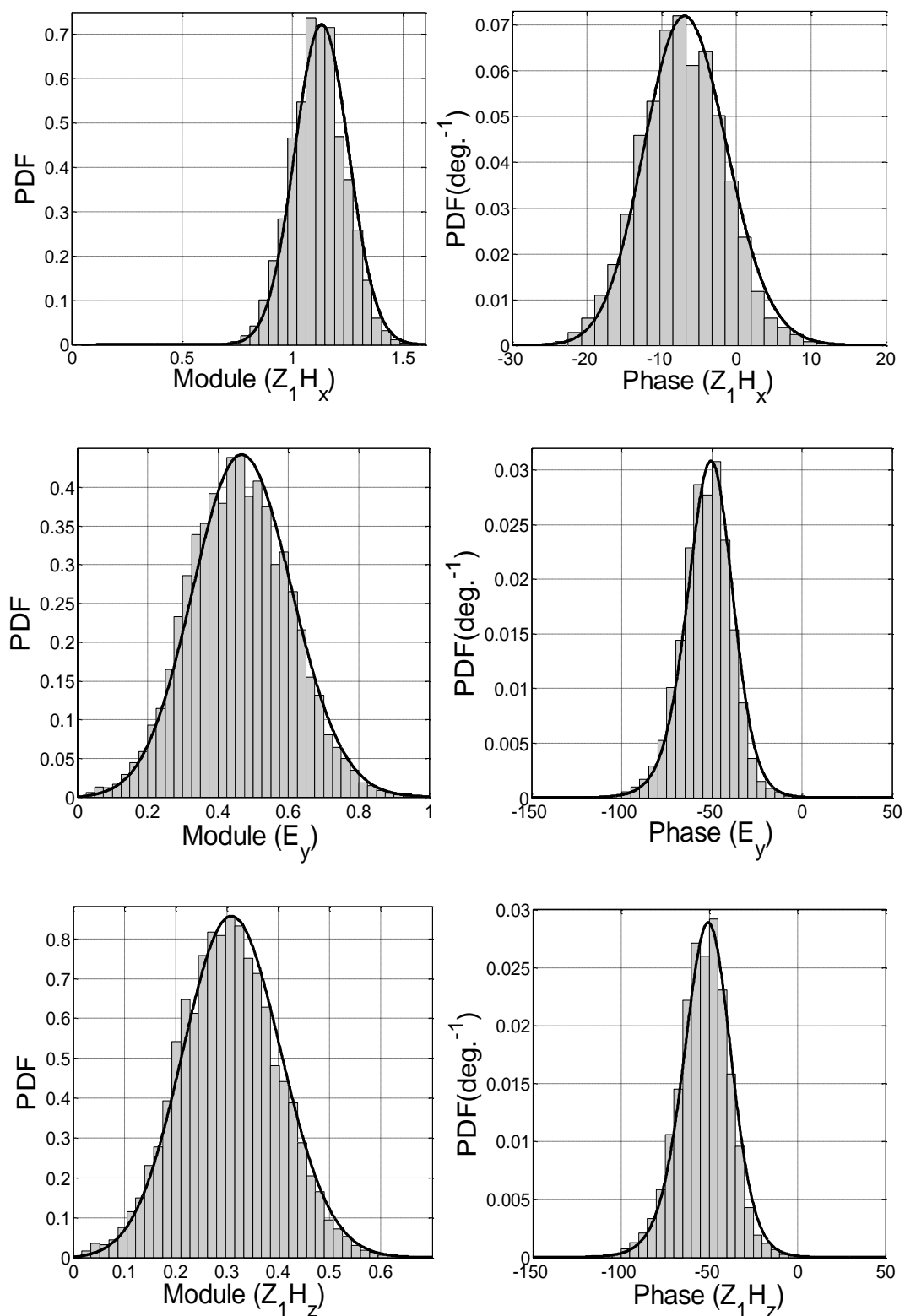


Figure III.5. Les densités de probabilités théoriques et les histogrammes normalisés des composantes du champ total.

D'après la figure III. 5, nous voyons bien que la comparaison des courbes théoriques avec la méthode de Monté Carlo est presque parfaite. Les légères différences observées peuvent être expliquées par le nombre fini de réalisations et par l'extension finie de la surface.

III.4.6 Distribution spatiale sous une incidence oblique

Afin de permettre une comparaison entre les résultats numériques et les résultats théoriques, la figure III.6 représente les histogrammes spatiaux obtenus pour une simple surface de longueur $L = 40\lambda$ à une altitude $z = 1.5\lambda$. L'angle d'incidence θ_0 est fixé à 40° . Les courbes représentent les distributions spatiales théoriques de la composante totale E_y .

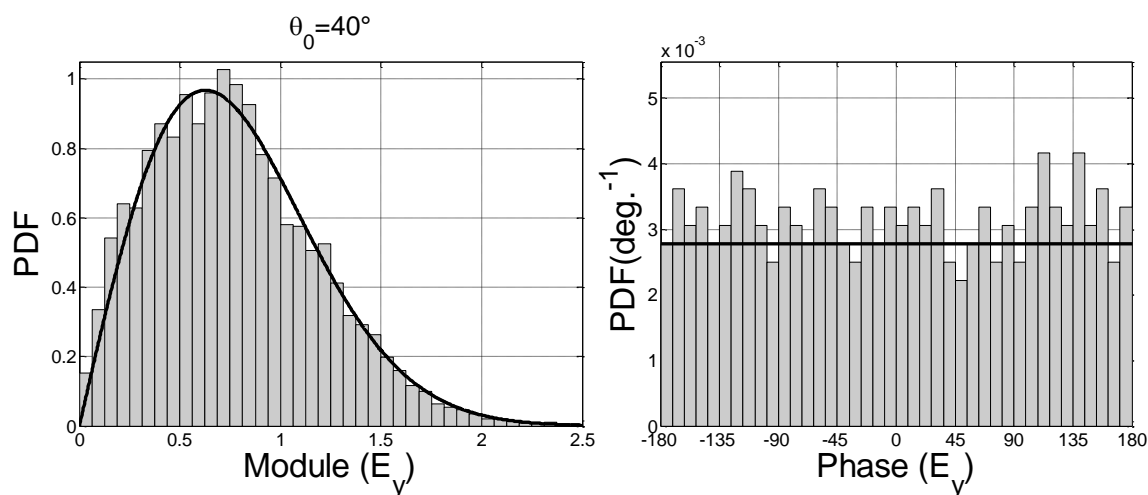


Figure III.6. Les distributions spatiales analytiques et les histogrammes normalisés du module et de la phase de la composante E_y du champ total pour $\theta_0 = 40^\circ$.

Comme on le voit sur la figure III.6, pour $\theta_0 = 40^\circ$ (incidence oblique), la distribution spatiale du module suit une loi de Rayleigh et la phase est uniformément distribuée. Nous pouvons aussi remarquer des légères différences entre les histogrammes normalisés et les courbes théoriques. Nous pouvons expliquer ces différences par l'extension finie de surfaces. De manière générale, on constate que les simulations confirment la validité des formules analytiques.

III.4.7 Distribution spatiale sous une incidence normale

La figure III.7 montre les histogrammes spatiaux obtenus pour la réalisation $s(x, y)$ et les distributions spatiales théoriques de la composante E_y du champ total. La longueur de la surface est $L = 40\lambda$ avec une altitude $z = 1.5\lambda$. L'angle d'incidence est $\theta_0 = 0^\circ$.

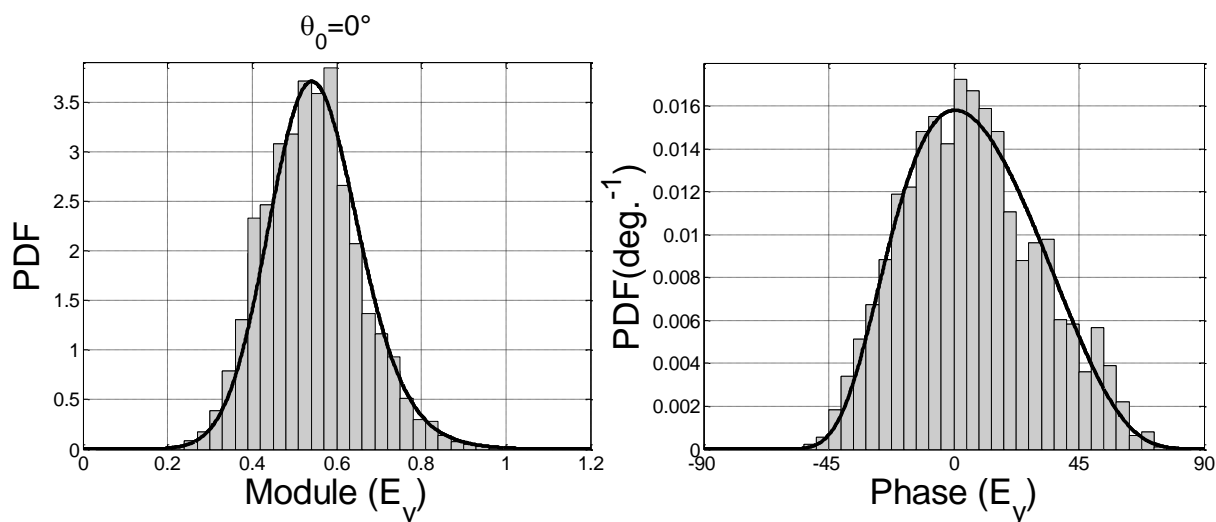


Figure III.7. Les distributions spatiales analytiques et les histogrammes normalisés du module et de la phase de la composante E_y du champ total pour $\theta_0 = 0^\circ$.

En comparant les courbes avec les histogrammes dans la figure III.7, on remarque que les courbes théoriques et les histogrammes du module et de la phase sont presque superposés. Cette observation, confirme que sous l'incidence normale ($\theta_0 = 0^\circ$), le module et la phase suivent les lois générales (III.42) et (III.44).

III.5 Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons étudié la stationnarité du champ total qui est considéré comme un processus aléatoire. D'abord, on a déterminé les moments statistiques jusqu'à l'ordre deux du champ total. On a vérifié leur dépendance avec les coordonnées de l'espace dans le cas de l'incidence normale et l'incidence oblique. Sous une incidence oblique, on a trouvé que les moments statistiques jusqu'à l'ordre deux dépendent des coordonnées de l'espace, cela signifie que le champ total est un processus non stationnaire. Dans le cas d'une incidence normale, pour une altitude donnée, ces moments statistiques et les densités de probabilité du module et de la phase ne dépendent plus de coordonnées de l'espace. Nous pouvons conclure que le champ total représente un processus stochastique stationnaire au sens strict. De plus, on a trouvé que les parties réelle et imaginaire du champ total sont corrélées et non centrées et la fonction de densité de probabilité du module est exprimée comme une somme infinie de fonctions Bessel, alors que la phase est exprimée par la fonction d'erreur. À la fin de cette partie de ce chapitre, nous avons effectué des simulations, les résultats obtenus confirment la véracité des calculs que nous avons établis.

Au cours de la deuxième de ce chapitre, nous avons présenté les moments spatiaux jusqu'à l'ordre deux afin de vérifier l'ergodicité du champ total. On a considéré le cas d'une surface aléatoire ergodique au deuxième ordre avec une moyenne spatiale nulle. D'après les résultats, on a prouvé que sous l'incidence oblique, les parties réelle et imaginaire du champ total sont centrées spatialement et non corrélées. De plus, les variances spatiales sont identiques et indépendantes de la surface horizontale à l'altitude z_0 . On a montré aussi que la distribution du module suit une loi de Rayleigh et la phase est uniformément distribuée.

Alors que sous l'incidence normale, les parties réelle et imaginaire sont spatialement corrélées et leurs variances spatiales sont totalement différentes et dépendent de la surface horizontale à l'altitude z_0 . On a trouvé aussi que les moyennes spatiales des parties réelle et imaginaire ne sont pas identiques et différentes de zéro lorsque les composantes des champs incident et réfléchi selon la direction Oi sont différentes de zéro. Dans ce cas, les distributions spatiales du module et de la phase sont obtenues par (III.42) et (III.44).

Nous avons montré que pour les deux types d'incidences (normale et oblique), les moments spatiaux du premier et du deuxième ordre ne changent pas d'une réalisation à l'autre. Ces résultats confirment que le champ total est un processus stochastique ergodique au second ordre, quel que soit l'angle d'incidence.

Nous avons déjà montré dans la première partie de ce chapitre que sous l'incidence normale, le champ total est un processus stochastique strictement stationnaire au second ordre. Nous pouvons conclure que les moments statistiques et les moments spatiaux sont interchangeable ainsi que les distributions spatiales et statistiques qui sont également interchangeables.

CHAPITRE IV

Etude statistique du champ total diffracté par un milieu stratifié formé de surfaces rugueuses

IV.1 Introduction

IV.2 Présentation du problème

IV.3 Onde incidente

IV.4 Champ diffracté

IV.5 Etude de la stationnarité du champ total

IV.6 Etude de l'ergodicité du champ total

IV.7 Résultats Numériques

IV.8 Conclusion

IV.1 Introduction

Nous avons étudié précédemment le comportement statistique et spatial du champ total par une simple surface rugueuse bidimensionnelle. Dans ce chapitre, on va étendre cette étude au cas plus compliqué c'est le cas d'un milieu stratifié formé de N surfaces rugueuses aléatoires bidimensionnelles.

D'abord, nous commençons ce chapitre par une description géométrique et statistique de la structure. Afin de pouvoir effectuer des calculs analytiques, on suppose généralement que les surfaces représentent un processus Gaussien. En s'appuyant sur les expressions analytiques des champs et la méthode des petites perturbations au premier ordre SPM1, nous pouvons déterminer les amplitudes qui sont les inconnues du problème [47]. Les résultats obtenus nous permettent de vérifier la stationnarité et l'érgodicité du champ total.

IV.2 Présentation du problème

IV.2.1 Géométrie de la surface

La géométrie du problème est représentée sur la figure IV.1. La structure est un milieu stratifié formé de N surfaces rugueuses bidimensionnelles non parallèles qui peuvent être isotropes ou anisotropes, corrélées ou non corrélées [48]. La déformation est de dimension $L \times L$. Chaque deux interfaces successives sont séparées par une couche d'épaisseur $d_i = u_{i+1} - u_i$ avec $u_1 = 0$.

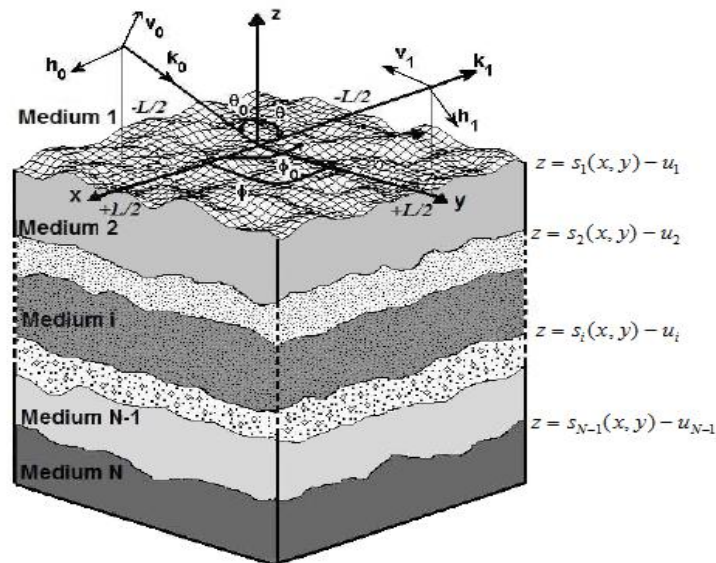


Figure IV.1. Empilement formé de plusieurs surfaces rugueuses aléatoires 2D.

IV.2.2 Description statistique

L'interface i qui sépare deux couches i et $i+1$ est décrite par la fonction $z = s_i(x, y)$ qui représente un processus aléatoire gaussien stationnaire à l'ordre deux avec une moyenne statistique nulle :

$$\langle S_i(x, y) \rangle = 0 \quad \forall (x, y) \quad (\text{IV.1})$$

Ce milieu est caractérisé par des fonctions d'autocorrélation $R_{ii}(x, y)$ et des fonctions d'intercorrélation $R_{ij}(x, y)$ qui sont définies par :

$$R_{ii}(x, y) = \sigma_i^2 \exp\left(-\frac{x^2}{l_{xi}^2} - \frac{y^2}{l_{yi}^2}\right) \quad (\text{IV.2})$$

$$R_{ij}(x, y) = 2\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \sqrt{\frac{l_{xi}l_{xj}l_{yi}l_{yj}}{(l_{xi}^2 + l_{xj}^2)(l_{yi}^2 + l_{yj}^2)}} \exp\left(-\frac{2x^2}{l_{xi}^2 + l_{xj}^2} - \frac{2y^2}{l_{yi}^2 + l_{yj}^2}\right) \quad (\text{IV.3})$$

où σ_i est la hauteur quadratique moyenne de la surface i . Les longueurs de corrélation l_{xi} , l_{yi} dans les directions Ox , Oy respectivement indiquent l'isotropie des interfaces. Dans le cas des interfaces isotropes $l_{xi} = l_{yi}$ et $l_{xi} \neq l_{yi}$ dans le cas des interfaces anisotropes. ρ_{ij} représente le coefficient de corrélation, il est défini par la relation suivante :

$$\rho_{ij} = \frac{R_{ij}(0, 0)}{\sqrt{R_{ii}(0, 0)R_{jj}(0, 0)}} \quad (\text{IV.4})$$

Quand $\rho_{ij} = 0$ les interfaces i et j sont non corrélées et quand $\rho_{ij} \neq 0$ ces interfaces sont corrélées. Les spectres des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation sont aussi gaussiens, avec:

$$\hat{R}_{ii}(\alpha, \beta) = \sigma_i^2 l_{xi} l_{yi} \pi \exp\left(-\frac{\alpha^2 l_{xi}^2 + \beta^2 l_{yi}^2}{4}\right) \quad (\text{IV.5})$$

$$\hat{R}_{ij}(\alpha, \beta) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \pi \sqrt{l_{xi} l_{xj} l_{yi} l_{yj}} \exp\left(-\frac{(l_{xi}^2 + l_{xj}^2)\alpha^2 + (l_{yi}^2 + l_{yj}^2)\beta^2}{8}\right) \quad (\text{IV.6})$$

$\hat{R}_{ii}(\alpha, \beta)$ et $\hat{R}_{ij}(\alpha, \beta)$ représentent des transformées de Fourier des fonctions $R_{ii}(x, y)$ et $R_{ij}(x, y)$ respectivement.

Comme dans le cas d'une simple surface 2D, chaque surface du milieu stratifié est supposée aussi érgodique au deuxième ordre, et la moyenne spatiale $\overline{s_i(x, y)}$ de la réalisation $s_i(x, y)$ est définie par :

$$\overline{s_i(x, y)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} s_i(x, y) dx dy = 0 \quad \forall (x, y) \quad (\text{IV.7})$$

La structure est caractérisée par la fonction d'autocorrélation spatiale suivante :

$$C_{ii}(x, y) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} s_i(x', y') s_i(x + x', y + y') dx' dy' \quad (\text{IV.8})$$

D'après le théorème de Birkhoff, nous constatons que les moments statistiques et spatiaux sont interchangeables, cela nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \langle S_i(x, y) \rangle &= \overline{s_i(x, y)} = 0 \\ R_{ii}(x, y) &= C_{ii}(x, y) \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

IV.3 Onde incidente

La structure est éclairée par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ . Cette onde est portée par son vecteur d'onde \mathbf{k}_{0-} , qui est repéré dans l'espace par l'angle de site θ_0 par rapport à l'axe (Oz) et l'angle azimut ϕ_0 dans le plan (xOy). On considère une dépendance temporelle en $\exp(j\omega t)$. On note $Z_1 = 120\pi$ l'impédance du vide et $k_0 = 2\pi/\lambda$, le nombre d'ondes. Le champ électromagnétique incident est exprimé par :

$$\Psi_{0(a)}(x, y, z) = \mathbf{h}_{0-} \exp(-j\mathbf{k}_{0-} \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{IV.10})$$

avec

$$\mathbf{k}_{0-} = \alpha_0 \mathbf{x} + \beta_0 \mathbf{y} - \gamma_0 \mathbf{z} \quad (\text{IV.11})$$

où

$$\begin{cases} \alpha_0 = k_1 \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ \beta_0 = k_1 \sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ \gamma_0 = k_1 \cos \theta_0 \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

Nous pouvons écrire les expressions du champ électrique et magnétique sous la forme suivante:

$$\mathbf{E}_0 = (A_{0(h)} \mathbf{h}_{0-} + A_{0(v)} \mathbf{v}_{0-}) \exp(-j\mathbf{k}_{0-} \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{IV.13})$$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{Z_1} (-A_{0(h)} \mathbf{v}_{0-} + A_{0(v)} \mathbf{h}_{0-}) \exp(-j\mathbf{k}_{0-} \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{IV.14})$$

avec

$$\mathbf{r} = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z} \quad (\text{IV.15})$$

Les indices (h) et (v) désignent respectivement les polarisations horizontale ($E_{||}$) et verticale ($H_{||}$). En polarisation horizontale, on a $A_{0(h)} = 1, A_{0(v)} = 0$ et en polarisation verticale, on a $A_{0(v)} = 1$ et $A_{0(h)} = 0$.

IV.4 Champ diffracté

Dans cette section, on va représenter le champ diffracté dans chaque milieu sous la forme de développement de Rayleigh afin de déterminer les amplitudes de diffraction.

IV.4.1 Les expressions analytiques du champ diffracté

IV.4.1.1 Les expressions du champ diffracté dans le milieu 1

Dans le vide (milieu 1), les ondes électriques et magnétiques se propagent vers le haut ($+z$), elles sont données par les expressions suivantes :

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{1(h)} \mathbf{h}_1^+ + A_{1(v)} \mathbf{v}_1^+) \exp(-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{IV.16})$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{4\pi^2 Z_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-A_{1(h)} \mathbf{v}_1^+ + A_{1(v)} \mathbf{h}_1^+) \exp(-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{IV.17})$$

IV.4.1.2 Les expressions du champ diffracté dans le milieu i

Dans le cas d'un milieu stratifié, en tenant compte que les ondes dans le milieu i ($i = \overline{2, N-1}$) se déplacent dans deux directions vers le haut ($+z$) et vers le bas ($-z$), les expressions des champs électriques et magnétiques, dans ce cas, sont données par :

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(A_{i(h)}^- \mathbf{h}_i^- + A_{i(v)}^- \mathbf{v}_i^-) \exp(-j\mathbf{k}_i^- \cdot \mathbf{r}) + (A_{i(h)}^+ \mathbf{h}_i^+ + A_{i(v)}^+ \mathbf{v}_i^+) \exp(-j\mathbf{k}_i^+ \cdot \mathbf{r}) \right] d\alpha d\beta \quad (\text{IV.18})$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{4\pi^2 Z_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(-A_{i(h)}^- \mathbf{v}_i^- + A_{i(v)}^- \mathbf{h}_i^-) \exp(-j\mathbf{k}_i^- \cdot \mathbf{r}) + (-A_{i(h)}^+ \mathbf{v}_i^+ + A_{i(v)}^+ \mathbf{h}_i^+) \exp(-j\mathbf{k}_i^+ \cdot \mathbf{r}) \right] d\alpha d\beta \quad (\text{IV.19})$$

avec

$$\mathbf{k}_i^\pm = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \pm \gamma_i \mathbf{z} \quad (\text{IV.20})$$

où

$$\begin{cases} \alpha = k_i \sin \theta \cos \varphi \\ \beta = k_i \sin \theta \sin \varphi \\ \gamma_i = k_i \cos \theta \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

Les vecteurs unités \mathbf{h}_i^\pm et \mathbf{v}_i^\pm sont définis par (II.25) et (II.26) respectivement.

IV.4.1.3 Les expressions du champ diffracté dans le milieu N

Dans le milieu N , il n'y a que les ondes qui se déplacent vers le bas c'est-à-dire dans le sens négatif ($-z$), nous pouvons donc écrire :

$$\mathbf{E}_N = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{N(h)} \mathbf{h}_N^- + A_{N(v)} \mathbf{v}_N^-) \exp(-j\mathbf{k}_N^- \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{IV.22})$$

$$\mathbf{H}_N = \frac{1}{4\pi^2 Z_N} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-A_{N(h)} \mathbf{v}_N^- + A_{N(v)} \mathbf{h}_N^-) \exp(-j\mathbf{k}_N^- \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{IV.23})$$

IV.4.2 Les conditions aux limites

Les inconnus du problème sont les amplitudes de diffraction, notées par $A_{i(h/v)}$, $A_{i(h/v)}^{+/-}$ et $A_{N(h/v)}$. Pour les déterminer, nous utilisons les conditions aux limites sur l'interface i qui sépare les deux milieux i et $i+1$. La continuité des composantes tangentielles à l'interface i définie par $z = s_i(x, y) - u_i$ donne :

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{E}_i]_{z=s_i(x,y)-u_i} &= [\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{E}_{i+1}]_{z=s_i(x,y)-u_i} \\ [\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{H}_i]_{z=s_i(x,y)-u_i} &= [\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{H}_{i+1}]_{z=s_i(x,y)-u_i} \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

où \mathbf{n}_i est le vecteur unitaire normal à la surface i :

$$\mathbf{n}_i = \frac{-s_{ix} \mathbf{x} - s_{iy} \mathbf{y} + \mathbf{z}}{\sqrt{1 + s_{ix}^2 + s_{iy}^2}} \quad (\text{IV.25})$$

avec

$$\begin{cases} s_{ix} = \frac{\partial s_i(x, y)}{\partial x} \\ s_{iy} = \frac{\partial s_i(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

Les produits vectoriels représentés dans les conditions aux limites s'écrivent :

$$\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{h}_{i,i+1}^\pm = \frac{1}{\chi \sqrt{1 + s_{ix}^2 + s_{iy}^2}} [\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha s_{ix} + \beta s_{iy}) \mathbf{z}] \quad (\text{IV.27})$$

$$\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{v}_{i,i+1}^\pm = \frac{1}{k_{i,i+1} \sqrt{1 + s_{ix}^2 + s_{iy}^2}} \left[\left(\frac{\pm \gamma_{i,i+1} \beta}{\chi} - \chi s_{iy} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\mp \gamma_{i,i+1} \alpha}{\chi} + \chi s_{ix} \right) \mathbf{y} + \left(\frac{\mp \gamma_{i,i+1}}{\chi} (\alpha s_{iy} - \beta s_{ix}) \right) \mathbf{z} \right] \quad (\text{IV.28})$$

IV.4.3 Résolution par la méthode de petites perturbations (SPM)

Dans cette section, on va utiliser la méthode de petites perturbations à l'ordre un (SPM1) pour déterminer les amplitudes inconnues. Lorsque les hauteurs quadratiques moyennes des interfaces sont faibles devant la longueur d'onde, nous pouvons représenter les amplitudes de diffraction et les fonctions exponentielles par leurs développements en série entières [3]:

$$A_{i(h/v)}^{\pm}(\alpha, \beta) = \sum_P A_{i(h/v)}^{\pm(P)}(\alpha, \beta) \exp(\pm j\gamma_{i,i+1} s_i(x, y)) = \sum_P \frac{[\pm j\gamma_{i,i+1} s_i(x, y)]^P}{P!} \quad (IV.29)$$

Soit $\Psi_{(a)}(x, y, z)$ le champ total qui représente la somme des champs : incident, réfléchi et champ diffracté à l'ordre 1. Le champ total est défini par :

$$\Psi_{(a)}(x, y, z) = \Psi_{0(a)}(x, y, z) + \Psi_{(a)}^{(0)}(x, y, z) + \Psi_{(a)}^{(1)}(x, y, z) \quad (IV.30)$$

avec $\Psi_{(a)}^{(0)}(x, y, z)$ le champ réfléchi dans la direction spéculaire (ordre zéro) :

$$\Psi_{(a)}^{(0)}(x, y, z) = A_{(a)}^{(0)} \mathbf{h}_{0+} \exp(-j\mathbf{k}_{0+} \cdot \mathbf{r}) \quad (IV.31)$$

avec

$$\mathbf{k}_{0+} = \alpha_0 \mathbf{x} + \beta_0 \mathbf{y} + \gamma_0 \mathbf{z} \quad (IV.32)$$

L'indice (a) indique le type de la polarisation, soit $(a=h)$ pour une polarisation horizontale et $(a=v)$ pour une polarisation verticale. Dans le cas d'une polarisation horizontale $(a=h)$, le champ à l'ordre zéro est égale au champ électrique à l'ordre zéro :

$$\Psi_{(h)}^{(0)}(x, y, z) = \mathbf{E}_{(h)}^{(0)}(x, y, z) \quad (IV.33)$$

Dans le cas d'une polarisation verticale $(a=v)$, le champ à l'ordre zéro est égal au champ magnétique à l'ordre zéro :

$$\Psi_{(v)}^{(0)}(x, y, z) = \mathbf{H}_{(v)}^{(0)}(x, y, z) \quad (IV.34)$$

$\Psi_{(a)}^{(1)}(x, y, z)$ représente le champ diffracté à l'ordre 1. Le champ diffracté est exprimé par la composante directe $\Psi_{(aa)}^{(1)}(x, y, z)$ et croisée $\Psi_{(ba)}^{(1)}(x, y, z)$ (II.81). Dans le milieu 1, les champs $\Psi_{1(aa)}^{(1)}$ et $\Psi_{1(ba)}^{(1)}$ prennent la forme suivante :

$$\Psi_{1(aa)}^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D A_{1(aa)}^{+,1} \mathbf{h}_1^+(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_1^+(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{IV.35})$$

$$\Psi_{1(ba)}^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D A_{1(ba)}^{+,1} \mathbf{v}_1^+(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_1^+(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{IV.36})$$

avec $D = \{\alpha^2 + \beta^2 < k^2\}$. Dans le milieu i , le champ se déplace vers le haut (+ z) et vers le bas (- z).

Cela, nous permet d'écrire :

$$\Psi_{i(aa)}^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \left[A_{i(aa)}^{-,1} \mathbf{h}_i^-(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_i^-(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) + A_{i(aa)}^{+,1} \mathbf{h}_i^+(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_i^+(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) \right] d\alpha d\beta \quad (\text{IV.37})$$

$$\Psi_{i(ba)}^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \left[A_{i(ba)}^{-,1} \mathbf{v}_i^-(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_i^-(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) + A_{i(ba)}^{+,1} \mathbf{v}_i^+(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_i^+(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) \right] d\alpha d\beta \quad (\text{IV.38})$$

Dans le milieu N , le champ se déplace uniquement vers le bas (- z) :

$$\Psi_{N(aa)}^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D A_{N(aa)}^{-,1} \mathbf{h}_N^-(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_N^-(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{IV.39})$$

$$\Psi_{N(ba)}^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D A_{N(ba)}^{-,1} \mathbf{v}_N^-(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_N^-(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{IV.40})$$

Notant que $A_{1,(aa/ab)}^{+,1}$, $A_{i,(aa/ab)}^{\pm,1}$ et $A_{N,(aa/ab)}^{+,1}$ sont les amplitudes à l'ordre un dans les milieux : vide (milieu 1), i et N , respectivement. Sachant que dans le cas d'une polarisation horizontale, le champ à l'ordre un représente le champ électrique à l'ordre un :

$$\Psi_{1,i,N(h)}^{(1)}(x, y, z) = \mathbf{E}_{1,i,N(h)}^{(1)} \quad (\text{IV.41})$$

Et dans le cas d'une polarisation verticale, le champ à l'ordre un égale au champ magnétique à l'ordre un :

$$\Psi_{1,i,N(v)}^{(1)}(x, y, z) = \mathbf{H}_{1,i,N(v)}^{(1)} \quad (\text{IV.42})$$

IV.4.3.1 Résolution à l'ordre zéro

À l'ordre zéro, les interfaces sont parfaitement lisses $s_i(x, y) = 0$. À partir des conditions aux limites (IV.24), on peut trouver l'amplitude de diffraction à l'ordre zéro dans le milieu i . L'application des conditions aux limites à l'interface $z = -u_i$ nous permet d'écrire :

$$A_{i(h)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_i u_i) + A_{i(h)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_i u_i) = A_{i+1(h)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) + A_{i+1(h)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \quad (\text{IV.43})$$

$$\gamma_i A_{i(h)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_i u_i) - \gamma_i A_{i(h)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_i u_i) = \gamma_{i+1} A_{i+1(h)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) - \gamma_{i+1} A_{i+1(h)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \quad (\text{IV.44})$$

$$k_i A_{i(v)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_i u_i) + k_i A_{i(v)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_i u_i) = k_{i+1} A_{i+1(v)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) + k_{i+1} A_{i+1(v)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \quad (\text{IV.45})$$

$$\frac{\gamma_i}{k_i} A_{i(v)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_i u_i) - \frac{\gamma_i}{k_i} A_{i(v)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_i u_i) = \frac{\gamma_{i+1}}{k_{i+1}} A_{i+1(v)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) - \frac{\gamma_{i+1}}{k_{i+1}} A_{i+1(v)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \quad (\text{IV.46})$$

Nous pouvons exprimer le système d'équations (IV43-46) par une matrice :

$$\begin{bmatrix} A_{i(h/v)}^{+(0)}(\alpha_0, \beta_0) \\ A_{i(h/v)}^{-(0)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} = C_{(i,i+1)}^{(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \begin{bmatrix} A_{i+1(h/v)}^{+(0)}(\alpha_0, \beta_0) \\ A_{i+1(h/v)}^{-(0)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.47})$$

Sa représentation matricielle en mode horizontale est de la forme :

$$C_{(i,i+1)}^{(h)}(\alpha_0, \beta_0) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_i + \gamma_{i+1}}{2\gamma_i} \exp[+j(\gamma_{i+1} - \gamma_i)u_i] & \frac{\gamma_i - \gamma_{i+1}}{2\gamma_{i0}} \exp[-j(\gamma_{i+1} + \gamma_i)u_i] \\ \frac{\gamma_i - \gamma_{i+1}}{2\gamma_i} \exp[+j(\gamma_{i+1} + \gamma_i)u_i] & \frac{\gamma_i + \gamma_{i+1}}{2\gamma_i} \exp[-j(\gamma_{i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{IV.48})$$

et en mode verticale:

$$C_{(i,i+1)}^{(v)}(\alpha_0, \beta_0) = \begin{pmatrix} \frac{k_{i+1}^2 \gamma_i + k_i^2 \gamma_{i+1}}{2k_i k_{i+1} \gamma_i} \exp[+j(\gamma_{i+1} - \gamma_i)u_i] & \frac{k_{i+1}^2 \gamma_i - k_i^2 \gamma_{i+1}}{2k_i k_{i+1} \gamma_i} \exp[-j(\gamma_{i+1} + \gamma_i)u_i] \\ \frac{k_{i+1}^2 \gamma_i - k_i^2 \gamma_{i+1}}{2k_i k_{i+1} \gamma_i} \exp[+j(\gamma_{i+1} + \gamma_i)u_i] & \frac{k_{i+1}^2 \gamma_i + k_i^2 \gamma_{i+1}}{2k_i k_{i+1} \gamma_i} \exp[-j(\gamma_{i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{IV.49})$$

Nous pouvons définir la matrice de passage du milieu 1 au milieu N par :

$$\begin{bmatrix} A_{1(h/v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) \\ A_{0(h/v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{N-1} C_{(i,i+1)}^{(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \begin{bmatrix} 0 \\ A_{N(h/v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.50})$$

on pose

$$\mathbf{M}_{1,N}(\alpha_0, \beta_0) = \prod_{i=1}^{N-1} C_{(i,i+1)}^{(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{IV.51})$$

avec

$$\mathbf{M}_{1,N}(\alpha_0, \beta_0) = \begin{bmatrix} M_{i,N}^{11,(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) & M_{i,N}^{12,(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \\ M_{i,N}^{21,(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) & M_{i,N}^{22,(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.52})$$

À la fin, on détermine les amplitudes du champ diffracté à l'ordre zéro qui sont $A_{1(h/v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0)$ en

$y=0$ et $A_{N(h/v)}^{(0)}$ en $y=-u_{N-1}$, on trouve:

$$A_{1(h/v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) = \frac{M_{1,N}^{12,(h/v)}(\alpha_0, \beta_0)}{M_{1,N}^{22,(h/v)}(\alpha_0, \beta_0)} A_{0(h/v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{IV.53})$$

$$A_{N(h/v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) = \frac{1}{M_{1,N}^{22,(h/v)}(\alpha_0, \beta_0)} A_{0(h/v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{IV.54})$$

D'après (IV.47-49), les amplitudes des champs dans le milieu i ($i = \overline{2, N-1}$) sont données par l'expression suivante:

$$\begin{bmatrix} A_{i,(h,v)}^{+(0)}(\alpha_0, \beta_0) \\ A_{i,(h,v)}^{-(0)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{22,(h,v)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} M_{i,N}^{12,(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \\ M_{i,N}^{22,(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} A_{0,(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{IV.55})$$

IV.4.3.2 Résolution à l'ordre un

Le phénomène de diffraction est analysé au premier ordre de perturbation. Compte tenu les relations (IV.13)-(IV.23) et (IV.29), les conditions aux limites (IV.24) sur l'interface i et les amplitudes obtenues à l'ordre zéro, on applique la transformée de Fourier suivant :

$$\begin{aligned} TF \{s_i(x, y) \cdot TF^{-1} [G(\alpha, \beta) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0)]\} \\ = \hat{s}_i(\alpha, \beta) * [G(\alpha, \beta) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0)] \\ = \hat{s}_i(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) G(\alpha_0, \beta_0) \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

avec :

$$\begin{aligned} TF [s_{ix}(x, y)] &= -j\alpha \hat{s}_i(\alpha, \beta) \\ TF [s_{iy}(x, y)] &= -j\beta \hat{s}_i(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (\text{IV.57})$$

où $\hat{s}(\alpha, \beta)$ est la transformée de Fourier bidimensionnelle de la première surface locale. Après l'application de la transformée de Fourier, On obtient le système matriciel suivant [47]:

$$\begin{bmatrix} A_{i(a)}^{+1}(\alpha, \beta) \\ A_{i(a)}^{-1}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = C_{i,i+1}^{1,a}(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} A_{i+1(a)}^{+1}(\alpha, \beta) \\ A_{i+1(a)}^{-1}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} + j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \hat{s}_i(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \begin{bmatrix} \frac{D_i^{aa}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22(a)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} M_{i+1,N}^{12,a}(\alpha_0, \beta_0) \\ M_{i+1,N}^{22,a}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} A_{0(a)}(\alpha_0, \beta_0) \\ + \frac{D_i^{ba}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22(b)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} M_{i+1,N}^{12,b}(\alpha_0, \beta_0) \\ M_{i+1,N}^{22,b}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} A_{0(b)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.58})$$

avec en mode horizontale

$$D_i^{hh} = \frac{\cos(\varphi - \varphi_0)}{2\gamma_i} \begin{pmatrix} \exp[+j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] & \exp[-j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] \\ -\exp[+j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] & -\exp[-j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{IV.59})$$

$$D_i^{hv} = \frac{\gamma_{0i+1} \sin(\varphi - \varphi_0)}{2k_{i+1}\gamma_i} \begin{pmatrix} -\exp[+j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] & \exp[-j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] \\ \exp[+j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] & -\exp[-j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{IV.60})$$

et en mode verticale

$$D_i^{vv} = \frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{2k_{i+1}k_i\gamma_i} \begin{pmatrix} \eta^+ \exp[+j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] & \eta^- \exp[-j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] \\ \eta^- \exp[+j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] & -\eta^+ \exp[-j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{IV.61})$$

$$D_i^{vh} = \frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{2k_i} \begin{pmatrix} \exp[+j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] & \exp[-j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] \\ \exp[+j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] & \exp[-j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{IV.62})$$

où

$$\begin{cases} \eta^+ = \chi\chi_0 + \gamma_i\gamma_{0i+1} \cos(\varphi - \varphi_0) \\ \eta^- = -\chi\chi_0 + \gamma_i\gamma_{0i+1} \cos(\varphi - \varphi_0) \end{cases} \quad (\text{IV.63})$$

D'après l'expression (IV.55), dans le cas d'une polarisation horizontale (h), l'expression (IV.58) devient :

$$\begin{bmatrix} A_{i(h)}^{+1} \\ A_{i(h)}^{-1} \end{bmatrix} = C_{i,i+1}^{1,h} \begin{bmatrix} A_{i+1(h)}^{+1} \\ A_{i+1(h)}^{-1} \end{bmatrix} + j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \hat{s}_i(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \left[\begin{bmatrix} N_{i,hh}^+ \\ N_{i,hh}^- \end{bmatrix} A_{0(h)} + \begin{bmatrix} N_{i,hv}^+ \\ N_{i,hv}^- \end{bmatrix} A_{0(v)} \right] \quad (\text{IV.64})$$

Alors que dans l'autre cas de polarisation (v) elle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A_{i(v)}^{+1} \\ A_{i(v)}^{-1} \end{bmatrix} = C_{i,i+1}^{1,v} \begin{bmatrix} A_{i+1(v)}^{+1} \\ A_{i+1(v)}^{-1} \end{bmatrix} + j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \hat{s}_i(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \left[\begin{bmatrix} N_{i,vh}^+ \\ N_{i,vh}^- \end{bmatrix} A_{0(h)} + \begin{bmatrix} N_{i,vv}^+ \\ N_{i,vv}^- \end{bmatrix} A_{0(v)} \right] \quad (\text{IV.65})$$

avec

$$\begin{bmatrix} N_{i,aa}^+ \\ N_{i,aa}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{22(a)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} D_i^{11,aa} M_{i+1,N}^{12,a}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{12,aa} M_{i+1,N}^{22,a}(\alpha_0, \beta_0) \\ D_i^{21,aa} M_{i+1,N}^{12,a}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{22,aa} M_{i+1,N}^{22,a}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.66})$$

$$\begin{bmatrix} N_{i,ba}^+ \\ N_{i,ba}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{22(b)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} D_i^{11,ba} M_{i+1,N}^{12,b}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{12,ba} M_{i+1,N}^{22,b}(\alpha_0, \beta_0) \\ D_i^{21,ba} M_{i+1,N}^{12,b}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{22,ba} M_{i+1,N}^{22,b}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.67})$$

Utilisant les relations (IV.64), (IV.65), nous obtenons l'équation de passage du milieu 1 au milieu N :

$$\begin{bmatrix} A_{i(h)}^{+1} \\ A_{i(h)}^{-1} \end{bmatrix} = M_{i,N}^{1,h} \begin{bmatrix} 0 \\ A_{N(h)}^{-1} \end{bmatrix} + j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \left[\begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,hh} \\ S_{i,j}^{-,hh} \end{bmatrix} A_{0(h)} + \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,hv} \\ S_{i,j}^{-,hv} \end{bmatrix} A_{0(v)} \right] \quad (\text{IV.68})$$

$$\begin{bmatrix} A_{i(v)}^{+1} \\ A_{i(v)}^{-1} \end{bmatrix} = M_{i,N}^{1,v} \begin{bmatrix} 0 \\ A_{N(v)}^{-1} \end{bmatrix} + j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \left[\begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,vh} \\ S_{i,j}^{-,vh} \end{bmatrix} A_{0(h)} + \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,vv} \\ S_{i,j}^{-,vv} \end{bmatrix} A_{0(v)} \right] \quad (\text{IV.69})$$

avec

$$\begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,aa} \\ S_{i,j}^{-,aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{j,aa}^+ M_{i,j}^{11,a}(\alpha, \beta) + N_{j,aa}^- M_{i,j}^{12,a}(\alpha, \beta) \\ N_{j,aa}^+ M_{i,j}^{21,a}(\alpha, \beta) + N_{j,aa}^- M_{i,j}^{22,a}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.70})$$

$$\begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,ba} \\ S_{i,j}^{-,ba} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{j,ba}^+ M_{i,j}^{11,b}(\alpha, \beta) + N_{j,ba}^- M_{i,j}^{12,b}(\alpha, \beta) \\ N_{j,ba}^+ M_{i,j}^{21,b}(\alpha, \beta) + N_{j,ba}^- M_{i,j}^{22,b}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.71})$$

À partir des expressions (IV.68) et (IV.69), pour $i=1$, on déduit les amplitudes à l'ordre un des champs dans le milieu 1 et le milieu N , on trouve :

En polarisation horizontale (h) :

$$A_{1(h)}^{+1} = \sum_{j=1}^{N-1} \left[K_{1,j}^{(\pm,hh)} A_{0(h)} + K_{1,j}^{(\pm,hv)} A_{0(v)} \right] \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \quad (\text{IV.72})$$

où

$$\begin{aligned}
 K_{1,j}^{(\pm, hh)} &= j(k_j^2 - k_{j+1}^2) \left[S_{1,j}^{\pm, hh} - \frac{M_{1,N}^{12,h}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22,h}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-, hh} \right] \\
 K_{1,j}^{(\pm, hv)} &= j(k_j^2 - k_{j+1}^2) \left[S_{1,j}^{\pm, hv} - \frac{M_{1,N}^{12,h}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22,h}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-, hv} \right]
 \end{aligned} \tag{IV.73}$$

et

$$A_{N(h)}^{-1} = \sum_{j=1}^{N-1} \left[K_{N,j}^{(-, hh)} A_{0(h)} + K_{N,j}^{(-, hv)} A_{0(v)} \right] \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \tag{IV.74}$$

où

$$\begin{aligned}
 K_{N,j}^{(-, hh)} &= -j \frac{(k_j^2 - k_{j+1}^2) S_{1,j}^{-, hh}}{M_{1,N}^{22,h}} \\
 K_{N,j}^{(-, hv)} &= -j \frac{(k_j^2 - k_{j+1}^2) S_{1,j}^{-, hv}}{M_{1,N}^{22,h}}
 \end{aligned} \tag{IV.75}$$

En polarisation verticale (v) :

$$A_{N(v)}^{+1} = \sum_{j=1}^{N-1} \left[K_{1,j}^{(\pm, vv)} A_{0(h)} + K_{1,j}^{(\pm, vh)} A_{0(v)} \right] \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \tag{IV.76}$$

où

$$\begin{aligned}
 K_{1,j}^{(\pm, vv)} &= j(k_j^2 - k_{j+1}^2) \left[S_{1,j}^{\pm, vv} - \frac{M_{1,N}^{12,v}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22,v}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-, vv} \right] \\
 K_{1,j}^{(\pm, vh)} &= j(k_j^2 - k_{j+1}^2) \left[S_{1,j}^{\pm, vh} - \frac{M_{1,N}^{12,v}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22,v}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-, vh} \right]
 \end{aligned} \tag{IV.77}$$

et

$$A_{N(v)}^{-1} = \sum_{j=1}^{N-1} \left[K_{N,j}^{(-, vh)} A_{0(h)} + K_{N,j}^{(-, vv)} A_{0(v)} \right] \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \tag{IV.78}$$

où

$$\begin{aligned}
 K_{N,j}^{(-, vh)} &= -j \frac{(k_j^2 - k_{j+1}^2) S_{1,j}^{-, vh}}{M_{1,N}^{22,v}} \\
 K_{N,j}^{(-, vv)} &= -j \frac{(k_j^2 - k_{j+1}^2) S_{1,j}^{-, vv}}{M_{1,N}^{22,v}}
 \end{aligned} \tag{IV.79}$$

À partir les expressions (IV.68-69) et (IV.70)-(V.78), nous pouvons déduire les amplitudes de diffraction dans le milieu i ($i = \overline{2, N-1}$), sachant que les amplitudes à l'ordre un sont la somme des composantes directes (aa) et croisées (ba) (II.81):

$$\begin{bmatrix} A_{i(aa)}^{+(1)} \\ A_{i(aa)}^{-(1)} \end{bmatrix} = j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,aa} \\ S_{i,j}^{-,aa} \end{bmatrix} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \begin{bmatrix} M_{i,N}^{12,a}(\alpha, \beta) \\ M_{i,N}^{22,a}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \frac{S_{1,j}^{-,aa}}{M_{1,N}^{22,a}(\alpha, \beta)} \tag{IV.80}$$

$$\begin{bmatrix} A_{i(ba)}^{+(1)} \\ A_{i(ba)}^{-(1)} \end{bmatrix} = j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,ba} \\ S_{i,j}^{-,ba} \end{bmatrix} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \begin{bmatrix} M_{i,N}^{12,b}(\alpha, \beta) \\ M_{i,N}^{22,b}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \frac{S_{1,j}^{-,ba}}{M_{1,N}^{22,b}(\alpha, \beta)} \tag{IV.81}$$

IV.5 Etude de la stationnarité du champ total

Dans cette étude, on suit les mêmes étapes du troisième chapitre mais pour le cas d'un milieu stratifié formé de N surfaces rugueuses afin de vérifier la stationnarité du champ total. Pour atteindre cet objectif, nous devons déterminer les moments statistiques du champ total.

IV.5.1 La moyenne statistique du champ total diffracté

Afin d'obtenir la moyenne statistique du champ total diffracté dans le milieu 1 $\langle \Psi_{1(a)} \rangle$ pour un milieu stratifié formé de surfaces rugueuses bidimensionnelles, on utilise les équations (IV.10), (IV.31) et (IV.35-40), on aura :

$$\langle \Psi_{1(a)} \rangle = (\psi_{0(a)}(x, y, z) + \psi_{1(a)}^{(0)}(x, y, z)) + \langle \Psi_{1(a)}^{(1)}(x, y, z) \rangle \quad (\text{IV.82})$$

La moyenne statistique du champ à l'ordre un dans le vide est définie par :

$$\langle \Psi_{1(aa/ba)}^{(1)} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} K_{1,j}^{(+,aa/ba)}(\alpha, \beta) \langle \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \rangle \mathbf{h}_1 / \mathbf{v}_1(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_1(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{IV.83})$$

et dans le milieu N :

$$\langle \Psi_{N(aa/ba)}^{(1)} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} K_{N,j}^{(-,aa/ba)}(\alpha, \beta) \langle \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \rangle \mathbf{h}_N / \mathbf{v}_N(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_N(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{IV.84})$$

Alors que dans le milieu i , la moyenne statistique est donnée par :

$$\langle \Psi_{i(aa/ba)}^{(1)} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} K_{i,j}^{(\pm,aa/ba)}(\alpha, \beta) \langle \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \rangle \mathbf{h}_i / \mathbf{v}_i(\alpha, \beta) \exp(-j\mathbf{k}_i(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{IV.85})$$

Les crochets $\langle \rangle$ indiquent la moyenne statistique. D'abord, on détermine la moyenne statistique du champ diffracté au premier ordre $\langle \Psi_{1(a)}^{(1)} \rangle$, si on prend la moyenne statistique de la transformée de Fourier de la surface $\hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)$, on trouve :

$$\langle \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \rangle = \int_{-L/2-L/2}^{+L/2+L/2} \int_{-L/2-L/2}^{+L/2+L/2} \langle s_j(x, y) \rangle e^{j(\alpha - \alpha_0)x} e^{j(\beta - \beta_0)y} dx dy \quad (\text{IV.86})$$

Rappelons que $\langle s_j(x, y) \rangle$ est nulle d'après l'équation (IV.1). Ceci implique que les équations (IV.83-85) sont aussi nulles, donc on conclut que la moyenne statistique du champ total par rapport à la direction Oi est définie par la relation suivante:

$$\langle \Psi_{1(a)} \rangle = \psi_{0(a)}(x, y, z) + \psi_{1(a)}^{(0)}(x, y, z) \quad (\text{IV.87})$$

Nous pouvons voir d'après ce résultat (IV.87) que sous l'incidence oblique ($\theta_0 \neq 0$), la moyenne statistique du champ total $\langle \Psi_{1(a)} \rangle$ dépend du point d'observation $P(x, y, z)$ et de l'altitude z sous l'incidence normale ($\theta_0 = 0$).

IV.5.2 Le moment statistique d'ordre deux

On s'intéresse au champ dans le milieu 1. Pour déterminer le moment statistique d'ordre deux (variance statistique) de la composante $\Psi_{1(a),i}$ dans la direction oi ($i = x, y, z$) du champ total $\Psi_{1(a)}$, on utilise les équations (IV.35-40) et (IV.87), on obtient :

$$\langle \Psi_{1(a),i}^2 \rangle = (\Psi_{0(a),i} + \Psi_{1(a),i}^{(0)})^2 + \langle \Psi_{1(a),i}^{(1)2} \rangle \quad (\text{IV.88})$$

Dans le vide, la variance statistique pour des interfaces non corrélées ($\langle \hat{S}_i(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}_j(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = 0$ pour $i \neq j$) est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{1(a),i}^{(1)2} \rangle = & \frac{1}{16\pi^4} \iint_{D'} \iint_{D'} \sum_{j=1}^{N-1} F_{j(a),i}(\alpha, \beta) F_{j(a),i}(\alpha', \beta') \langle \hat{S}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}_j(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle \\ & \times e^{-j(\alpha+\alpha')x} e^{-j(\beta+\beta')y} e^{-j[\gamma(\alpha,\beta)+\gamma(\alpha',\beta')]z} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \end{aligned} \quad (\text{IV.89})$$

où :

$$F_{j(a),i}(\alpha, \beta) = K_{1,j}^{(\pm,aa)}(\alpha, \beta) h_i(\alpha, \beta) + K_{1,j}^{(\pm,ba)}(\alpha, \beta) v_i(\alpha, \beta) \quad (\text{IV.90})$$

et $D' = \{\alpha^2 + \beta^2 < k^2\}$. En utilisant le même calcul décrit dans les expressions (III.8- III.17), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{1(a),i}^2 \rangle = & (\Psi_{0(a),i} + \Psi_{1(a),i}^{(0)})^2 + \frac{e^{-j2\alpha_0 x} e^{-j2\beta_0 y}}{4\pi^2} \iint_{D \cap D_0} \sum_{j=1}^{N-1} F_{j(a),i}(\alpha, \beta) F_{j(a),i}(2\alpha_0 - \alpha, 2\beta_0 - \beta) \\ & \times \hat{R}_{jj}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) e^{-j[\gamma(\alpha,\beta)+\gamma(2\alpha_0-\alpha, 2\beta_0-\beta)]z} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{IV.91})$$

où $D_0 = D(\alpha - 2\alpha_0, \beta - 2\beta_0)$ et $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}$. À partir du résultat (IV.91), nous pouvons constater que sous l'incidence oblique ($\theta_0 \neq 0$), la variance statistique du champ total $\langle \Psi_{1(a)}^2 \rangle$ dépend du point d'observation $P(x, y, z)$, alors que sous l'incidence normale ($\theta_0 = 0$), elle dépend seulement de l'altitude z . Lorsque z tend vers l'infini, la variance du champ au premier ordre devient nulle, ce qui implique que :

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \langle \Psi_{1(a),i}^2 \rangle = (\Psi_{0(a),i} + \Psi_{1(a),i}^{(0)})^2 \quad (\text{IV.92})$$

IV.5.3 La moyenne statistique du module du champ total

En utilisant l'expression (IV.30), nous pouvons obtenir l'expression générale de la moyenne statistique de $|\Psi_{1(a),i}|^2$ de la composante $\Psi_{1(a),i}$ du champ total $\Psi_{1(a)}$:

$$\langle |\Psi_{1(a),i}|^2 \rangle = |\Psi_{0(a),i} + \Psi_{1(a),i}^{(0)}|^2 + \langle |\Psi_{1(a),i}^{(1)}|^2 \rangle \quad (IV.93)$$

Dans le vide, et pour des interfaces non corrélées, l'expression $\langle |\Psi_{1(a),i}^{(1)}|^2 \rangle$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle |\Psi_{1(a),i}^{(1)}|^2 \rangle = & \frac{1}{16\pi^4} \iint_D \iint_{D'} \sum_{j=1}^{N-1} F_{j(a),i}(\alpha, \beta) F_{j(a),i}^*(\alpha', \beta') \langle \hat{S}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}_j^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle \\ & \times e^{-j(\alpha - \alpha')x} e^{-j(\beta - \beta')y} e^{-j[\gamma(\alpha, \beta) - \gamma(\alpha', \beta')]z} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \end{aligned} \quad (IV.94)$$

En utilisant le même calcul décrit dans les expressions (III.21- III.26), on obtient:

$$\langle |\Psi_{1(a),i}|^2 \rangle = |\Psi_{0(a),i} + \Psi_{1(a),i}^{(0)}|^2 + \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} |F_{j(a),i}(\alpha, \beta)|^2 \hat{R}_{jj}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) d\alpha d\beta \quad (IV.95)$$

Cette expression affirme que sous l'incidence oblique, le moment statistique de deuxième ordre du module du champ dépend du point d'observation $P(x, y, z)$ et sous l'incidence normale, il dépend seulement de l'altitude z .

IV.5.4 Les moments statistiques d'ordre 2 des parties réelle et imaginaire du champ total

D'après (IV.91) et (IV.95), pour une extension infinie de la longueur de déformation ($L \rightarrow \infty$), les variances σ_R^2 et σ_I^2 de la partie réelle $\Psi_{1(a)R,i}$ et la partie imaginaire $\Psi_{1(a)I,i}$ de la composante $\Psi_{1(a),i}$ ainsi que leur covariance Γ_{RI} s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 &= \frac{1}{2} [\langle |\Psi_{1(a),i}|^2 \rangle + \text{Re} \langle (\Psi_{1(a),i})^2 \rangle] - \text{Re}^2 \langle \Psi_{1(a),i} \rangle \\ \sigma_I^2 &= \frac{1}{2} [\langle |\Psi_{1(a),i}|^2 \rangle - \text{Re} \langle (\Psi_{1(a),i})^2 \rangle] - \text{Im}^2 \langle \Psi_{1(a),i} \rangle \\ \Gamma_{RI} &= \frac{1}{2} \text{Im} \langle (\Psi_{1(a),i})^2 \rangle - \text{Re} \langle \Psi_{1(a),i} \rangle \text{Im} \langle \Psi_{1(a),i} \rangle \end{aligned} \quad (IV.96)$$

Selon l'expression (IV.88), les parties réelle et imaginaire des composantes du champ total sont non centrées avec des moyennes différentes $\langle \Psi_{1(a)R,i} \rangle \neq \langle \Psi_{1(a)I,i} \rangle$. Les expressions (IV.91), (IV.95) et (IV.96) montrent que ces variables aléatoires $\Psi_{1(a)R,i}$ et $\Psi_{1(a)I,i}$ sont corrélées ($\Gamma_{RI} \neq 0$), avec des variances différentes $\sigma_R^2 \neq \sigma_I^2$.

À partir de ces résultats, nous pouvons constater que dans le cas d'incidence oblique, les moments statistiques de premier et de deuxième ordre dépendent du point d'observation $P(x, y, z)$, ce qui implique le champ total n'est pas stationnaire au sens large. Alors que sous l'incidence normale, ces moments ne dépendent que de l'altitude z , ce qui signifie que pour une altitude donnée, le champ total représente un processus stationnaire au sens large.

IV.5.5 Lois de probabilité du champ total

Puisque les parties réelle et imaginaire du champ total représentent des processus Gaussiens, la densité de probabilité conjointe de ces variables aléatoires s'exprime par [3]-[41]:

$$p_{RI}(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_R\sigma_I(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(u - \langle \Psi_{1(a)R,i} \rangle)^2}{\sigma_R^2} - 2\rho \frac{(u - \langle \Psi_{1(a)R,i} \rangle)(v - \langle \Psi_{1(a)I,i} \rangle)}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{(v - \langle \Psi_{1(a)I,i} \rangle)^2}{\sigma_I^2} \right]\right\} \quad (\text{IV.97})$$

Sachant que ρ représente le coefficient de corrélation :

$$\rho = \frac{\Gamma_{RI}}{\sigma_R\sigma_I} \quad (\text{IV.98})$$

En utilisant le même calcul décrit dans la partie III.2, l'expression de la loi de probabilité du module de la composante $\Psi_{1(a),i}$ dans la direction oi ($i = x, y, z$) du champ total $\Psi_{1(a)}$ est donnée par :

$$p_M(m) = \frac{g_1(m)}{\sigma_R\sigma_I(1-\rho^2)^{1/2}} \left\{ I_0[g_2(m)]I_0[g_3(m)] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n[g_2(m)]I_{2n}[g_3(m)] \cos[n(2\vartheta - \zeta)] \right\} \quad (\text{IV.99})$$

avec, $I_n(g)$ est le $n^{\text{ième}}$ ordre de la fonction Bessel de première espèce modifiée [43], et :

$$g_1(m) = m \exp\left[-\frac{m^2(\sigma_R^2 + \sigma_I^2)}{4\sigma_R^2\sigma_I^2(1-\rho^2)}\right] \exp\left[-\frac{\sigma_I^2\langle \Psi_{1(a)R,i} \rangle^2 + \sigma_R^2\langle \Psi_{1(a)I,i} \rangle^2}{2\sigma_R^2\sigma_I^2(1-\rho^2)}\right] \exp\left[\frac{\rho\langle \Psi_{1(a)R,i} \rangle\langle \Psi_{1(a)I,i} \rangle}{\sigma_R\sigma_I(1-\rho^2)}\right] \quad (\text{IV.100})$$

$$g_2(m) = -\frac{m^2[(\sigma_R^2 - \sigma_I^2)^2 + 4\sigma_R^2\sigma_I^2\rho^2]^{1/2}}{4\sigma_R^2\sigma_I^2(1-\rho^2)} \quad (\text{IV.101})$$

$$g_3(m) = \frac{m}{\sigma_R^2\sigma_I^2(1-\rho^2)} \left[\sigma_R^2(\sigma_R\langle \Psi_{1(a)I,i} \rangle - \sigma_I\rho\langle \Psi_{1(a)R,i} \rangle)^2 + \sigma_I^2(\sigma_I\langle \Psi_{1(a)R,i} \rangle - \sigma_R\rho\langle \Psi_{1(a)I,i} \rangle)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{IV.102})$$

$$\zeta = \arctg\left[\frac{2\rho\sigma_R\sigma_I}{\sigma_R^2 - \sigma_I^2}\right] \quad (\text{IV.103})$$

De même l'expression de la loi de probabilité de la phase de la composante $\Psi_{1(a),i}$ du champ total $\Psi_{1(a)}$ est donnée par :

$$P_{\Phi}(\phi) = \frac{\sigma_R \sigma_I (1 - \rho^2)^{1/2} \exp\left[-\frac{\sigma_I^2 \langle \Psi_{1(a)R,i} \rangle^2 + \sigma_R^2 \langle \Psi_{1(a)L,i} \rangle^2 - 2\sigma_R \sigma_I \rho \langle \Psi_{1(a)R,i} \rangle \langle \Psi_{1(a)L,i} \rangle}{2\sigma_R^2 \sigma_I^2 (1 - \rho^2)}\right]}{2\pi(\sigma_I^2 \cos^2 \phi - 2\sigma_R \sigma_I \rho \cos \phi \sin \phi + \sigma_R^2 \sin^2 \phi)} \quad (\text{IV.104})$$

$$\times \left\{1 + \xi(\phi) \sqrt{\pi} \exp(+\xi^2(\phi)) [1 + \text{erf}(\xi(\phi))]\right\}$$

avec, $\text{erf}(\xi)$ représente la fonction erreur [33]:

Les équations (IV.99) et (IV.104) montrent que sous une incidence oblique, les densités de probabilité du module M et la phase Φ dépendent du point d'observation $P(x, y, z)$. Par contre, sous l'incidence normale, pour une altitude donnée z , les densités de probabilité ne dépendent du point d'observation $P(x, y, z)$.

IV.5.6 Cas particuliers

D'après les expressions (IV.99) et (IV.104), il existe des cas particuliers où la distribution du module M et de la phase Φ suit certaines lois, ces cas sont les mêmes représentés dans le tableau III.1.

D'après les résultats obtenus, quelque soit le nombre de couches, on constate que dans le cas d'incidence oblique les moments statistiques de premier et de deuxième ordre dépendent du point d'observation $P(x, y, z)$. Donc, le champ total n'est pas stationnaire au sens large. Alors que dans le cas d'incidence normale, pour une altitude donnée z , les moments statistiques de premier et de deuxième ordre ainsi que les densités de probabilité (PDF) ne dépendent pas de coordonnées de l'espace. Ceci affirme que le champ total représente un processus stochastique stationnaire au sens strict.

IV.6 Etude de l'ergodicité du champ total

Dans cette section, on suit les mêmes étapes du troisième chapitre afin de vérifier l'ergodicité du champ total pour un milieu stratifié.

IV.6.1 Moyenne spatiale du champ total

Soit $\psi_{1(a),i}(x, y, z)$ une composante du champ total $\Psi_{1(a)}(x, y, z)$ dans le milieu 1 pour une réalisation arbitraire des surfaces $s_j(x, y)$, $j = \overline{1, N-1}$ à l'altitude z_0 . La moyenne spatiale $\overline{\psi_{1(a),i}(x, y, z_0)}$ est obtenue par la relation suivante :

$$\overline{\psi_{1(a),i}(z_0)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2-L/2}^{+L/2+L/2} \int \psi_{1(a),i}(x, y, z_0) dx dy \quad (IV.105)$$

En utilisant les expressions (IV.10), (IV.31) et (IV.35-40), nous pouvons aussi exprimer la moyenne spatiale par cette relation :

$$\overline{\psi_{1(a),i}(z_0)} = \overline{\psi_{0(a),i}} + \overline{\psi_{1(a),i}^{(0)}} + \overline{\psi_{1(a),i}^{(1)}} \quad (IV.106)$$

avec

$$\overline{\psi_{1(a),i}^{(1)}}(z_0) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 L^2} \int_{-L/2-L/2}^{+L/2+L/2} \int_D \sum_{j=1}^{N-1} F_{j(a),i}(\alpha, \beta) \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) e^{-j(\alpha x + \beta y + \gamma z_0)} d\alpha d\beta dx dy \quad (IV.107)$$

$F_{j(a),i}(\alpha, \beta)$ est une fonction simplificatrice définie par (IV.90). Dans le cas d'une incidence oblique ($\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$), la moyenne spatiale des composantes du champ incident et le champ réfléchi est nulle.

$$\overline{\psi_{0(a),i} + \psi_{1(a),i}^{(0)}} = 0 \quad (IV.108)$$

Alors que sous l'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$), la moyenne spatiale des composantes du champ incident et le champ réfléchi (ordre zéro) en direction de Oi est donnée par :

$$\overline{\psi_{0(a),i} + \psi_{1(a),i}^{(0)}} = h_{0,i} \exp(+j\gamma_0 z_0) + A_{1(a),i}^{(0)} h_{0,i} \exp(-j\gamma_0 z_0) \quad (IV.109)$$

D'autre part, pour déterminer la moyenne spatiale $\overline{\psi_{1(a),i}^{(1)}}(z_0)$, on intègre par rapport à x et y après avoir changé l'ordre de l'intégration dans l'expression (IV.107), on obtient :

$$\overline{\psi_{1(a),i}^{(1)}}(z_0) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 L^2} \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} F_{j(a),i}(\alpha, \beta) \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) L^2 \sin c\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \sin c\left(\frac{\beta L}{2}\right) e^{-j\gamma z_0} d\alpha d\beta \quad (IV.110)$$

En applique la relation (III.14), nous obtenons

$$\overline{\psi_{1(a),i}^{(1)}} = \sum_{j=1}^{N-1} F_{j(a),i}(0,0) e^{-jkz_0} \overline{s_j(x, y) \exp(-j\alpha_0 x) \exp(-j\beta_0 y)} \quad (IV.111)$$

En se rappelant que la moyenne spatiale de $s_j(x, y)$ est nulle (IV.7), nous pouvons écrire [45] :

$$\overline{s_j(x, y) \exp(-j\alpha_0 x) \exp(-j\beta_0 y)} = 0 \quad (IV.112)$$

Donc, nous constatons que la moyenne spatiale de $\overline{\psi_{1(a),i}^{(1)}}$ est nulle quel que soit l'angle d'incidence.

D'après les expressions (IV.108- 110), l'expression de la moyenne spatiale du champ total quelle que soit la réalisation $s_j(x, y)$ du processus aléatoire $S_j(x, y)$, est donnée par la relation suivante :

$$\overline{\psi_{1(a),i}(z_0)} = \overline{\psi_{0(a),i} + \psi_{1(a),i}^{(0)}} \quad (IV.113)$$

IV.6.2 Variance spatiale du champ total

La variance spatiale du champ total pour une réalisation arbitraire des surfaces $s_j(x, y)$ à l'altitude z_0 , est obtenue par l'équation (IV.30), où :

$$\overline{\psi_{1(a),i}^2(z_0)} = \overline{(\psi_{0(a),i} + \psi_{1(a),i}^{(0)})^2} + 2\overline{\psi_{0(a),i}\psi_{1(a),i}^{(1)}} + 2\overline{\psi_{1(a),i}^{(0)}\psi_{1(a),i}^{(1)}} + \overline{(\psi_{1(a),i}^{(1)})^2} \quad (\text{IV.114})$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{(\psi_{1(a),i}^{(1)})^2} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi^4 L^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \iint_{D'} \sum_{j=1}^{N-1} F_{j(a),i}(\alpha, \beta) F_{j(a),i}(\alpha', \beta') \\ &\times \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}_j(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) e^{-j(\alpha + \alpha')x} e^{-j(\beta + \beta')y} e^{-j[\gamma(\alpha, \beta) + \gamma(\alpha', \beta')]z_0} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' dx dy \end{aligned} \quad (\text{IV.115})$$

où $D' = \{\alpha'^2 + \beta'^2 < k'^2\}$. D'abord, on détermine le terme $\overline{(\psi_{0(a),i} + \psi_{1(a),i}^{(0)})^2}$. En utilisant les expressions (IV.10) et (IV.31), sous l'incidence oblique ($\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$), nous trouvons :

$$\overline{(\psi_{0(a),i} + \psi_{1(a),i}^{(0)})^2} = 0 \quad (\text{IV.116})$$

et sous l'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$), la variance spatiale est donnée par :

$$\overline{(\psi_{0(a),i} + \psi_{1(a),i}^{(0)})^2} = \left[h_{0,i} \exp(+j\gamma_0 z_0) + A_{1(a),i}^{(0)} h_{0,i} \exp(-j\gamma_0 z_0) \right]^2 \quad (\text{IV.117})$$

À partir des expressions (IV.10), (IV.31) et (IV.35-40), nous pouvons déterminer $\overline{\psi_{0(a),i}\psi_{1(a),i}^{(1)}}$ et $\overline{\psi_{1(a),i}^{(0)}\psi_{1(a),i}^{(1)}}$, en tenant compte que les surfaces sont spatialement centrées (IV.7) :

$$\begin{aligned} \overline{\psi_{0(a),i}\psi_{1(a),i}^{(1)}} &= \sum_{j=1}^{N-1} F_{j(a)}(\alpha_0, \beta_0) \overline{s_j(x, y)} = 0 \\ \overline{\psi_{1(a),i}^{(0)}\psi_{1(a),i}^{(1)}} &= \sum_{j=1}^{N-1} F_{j(a),i}(\alpha_0, \beta_0) \exp(-j2\gamma_0 z_0) \overline{s_j(x, y)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.118})$$

D'après ces résultats, nous constatons que les moyennes spatiales $\overline{\psi_{0(a),i}\psi_{1(a),i}^{(1)}}$ et $\overline{\psi_{1(a),i}^{(0)}\psi_{1(a),i}^{(1)}}$ sont nulles quel que soit l'angle d'incidence.

On cherche maintenant à déterminer $\overline{(\psi_{1(a),i}^{(1)})^2}$. En utilisant la fonction delta de Dirac (III.14), la relation (IV.115) devient :

$$\begin{aligned} \overline{(\psi_{1(a),i}^{(1)})^2} &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} F_{j(a),i}(\alpha, \beta) F_{j(a),i}(-\alpha, -\beta) e^{-j2\gamma(\alpha, \beta)z_0} \\ &\times \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}_j(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{IV.119})$$

Dans le cas de l'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$), on applique les mêmes étapes dans l'annexe C, nous trouvons [46] :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}_j(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} = 0 \quad (\text{IV.120})$$

Sous l'incidence oblique ($\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$) (**Annexe C**), on obtient:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}_j(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} = \hat{C}_{jj}(\alpha, \beta) \quad (\text{IV.121})$$

On note que $\hat{C}_{jj}(\alpha, \beta)$ représente la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation spatiale $C_{jj}(x, y)$ de l'interface i qui est définie par (IV.8). D'après les résultats obtenus (IV.112), (IV.116), (IV.117) et (IV.119-121), nous pouvons constater que sous l'incidence oblique ($\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$), la variance spatiale de la composante $\psi_{1(a),i}(x, y, z)$ dans la direction Oi ($i = x, y, z$) du champ total $\psi_{1(a)}(x, y, z)$ dans le milieu 1 milieu devient :

$$\overline{\psi_{1(a),i}^2(z_0)} = 0 \quad (\text{IV.122})$$

Alors que sous l'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$), la variance spatiale dans chaque milieu est donnée par :

$$\begin{aligned} \overline{\psi_{1(a),i}^2(z_0)} = & \left(\mathbf{h}_{0,i} \exp(+j\gamma_0 z_0) + A_{1(a),i}^{(0)} \mathbf{h}_{0,i} \exp(-j\gamma_0 z_0) \right)^2 \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} F_{j(a),i}(\alpha, \beta) F_{j(a),i}(-\alpha, -\beta) \hat{R}_{jj}(\alpha, \beta) e^{-j2\gamma(\alpha, \beta)z_0} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{IV.123})$$

On note que $\hat{C}_{jj}(\alpha, \beta) = \hat{R}_{jj}(\alpha, \beta)$. Nous pouvons remarquer à partir (IV.123) que la variance du champ total dépend seulement de l'altitude z_0 et aussi elle est indépendante de la réalisation.

IV.6.3 Moment spatial à l'ordre deux du module du champ total

L'expression (IV.30) permet d'obtenir le moment d'ordre deux du module du champ total pour une réalisation arbitraire des surfaces à altitude z_0 :

$$\overline{|\psi_{1(a),i}|^2}(z_0) = \overline{|\psi_{0(a),i} + \psi_{1(a),i}^{(0)}|^2} + 2\text{Re} \left[\overline{(\psi_{0(a),i})^* \psi_{1(a),i}^{(1)}} \right] + 2\text{Re} \left[\overline{(\psi_{1(a),i}^{(0)})^* \psi_{1(a),i}^{(1)}} \right] + \overline{|\psi_{1(a),i}^{(1)}|^2} \quad (\text{IV.124})$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{|\psi_{1(a),i}^{(1)}|^2}(z_0) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi^4 L^2} \int_{-L/2-L/2}^{+L/2+L/2} \iint_D \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} [F_{j(a),i}(\alpha, \beta) F_{j(a),i}^*(\alpha', \beta') \\ &\quad \times \hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}_j^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0)] e^{-j(\alpha - \alpha')x} e^{-j(\beta - \beta')y} e^{-j[\gamma(\alpha, \beta) - \gamma(\alpha' + \beta')]z_0} d\alpha d\alpha' d\beta d\beta' dx dy \end{aligned} \quad (IV.125)$$

où le symbole * désigne le conjugué complexe. On commence par déterminer $\overline{|\psi_{0(a),i} + \psi_{1(a),i}^{(0)}|^2}$ en utilisant (IV.10) et (IV.30). Sous l'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$), on obtient :

$$\overline{|\psi_{0(a),i} + \psi_{1(a),i}^{(0)}|^2} = |h_{0,i}|^2 \left| \exp(+j\gamma_0 z_0) + A_{1(a),i}^{(0)} \exp(-j\gamma_0 z_0) \right|^2 \quad (IV.126)$$

et sous l'incidence oblique ($\alpha_0 \neq 0, \beta_0 \neq 0$)

$$\overline{|\psi_{0(a),i} + \psi_{1(a),i}^{(0)}|^2} = |h_{0,i}|^2 (1 + |A_{1(a),i}^{(0)}|^2) \quad (IV.127)$$

Pour déterminer $\overline{(\psi_{0(a),i}^* \psi_{1(a),i}^{(1)})}$ et $\overline{(\psi_{1(a),i}^{(0)*} \psi_{1(a),i}^{(1)})}$, on utilise les équations (IV.10), (IV.30) et (IV.35-40). Sachant que $\overline{s_j(x, y)} = 0$, on a alors :

$$\overline{(\psi_{0(a),i}^* \psi_{1(a),i}^{(1)})} = \overline{(\psi_{1(a),i}^{(0)*} \psi_{1(a),i}^{(1)})} = 0 \quad (IV.128)$$

Pour calculer $\overline{|\psi_{1(a),i}^{(1)}|^2}$, nous utilisons la fonction delta de Dirac (III.14) et on intègre par rapport à x et y , l'équation (IV.125) devient :

$$\overline{|\psi_{1(a),i}^{(1)}|^2}(z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} \left[|F_{j(a),i}(\alpha, \beta)|^2 \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|\hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)|^2}{L^2} \right] d\alpha d\beta \quad (IV.129)$$

En utilisant (IV.120) et (IV.121), on trouve que [46]:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{|\hat{s}_j(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)|^2}{L^2} = \hat{C}_{jj}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \quad (IV.130)$$

alors

$$\overline{|\psi_{1(a),i}^{(1)}|^2}(z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} \left[|F_{j(a),i}(\alpha, \beta)|^2 \hat{C}_{jj}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \right] d\alpha d\beta \quad (IV.131)$$

Utilisant les expressions (IV.126-129), on peut écrire l'expression finale (IV.124), dans le cas d'incidence normale, comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{|\psi_{1(a),i}|^2}(z_0) &= |\mathbf{h}_{0,i}|^2 \left| \exp(+j\gamma_0 z_0) + A_{(a)}^{(0)} \exp(-j\gamma_0 z_0) \right|^2 \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} |F_{(a),i}(\alpha, \beta)|^2 \hat{C}_{jj}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{IV.132})$$

et sous l'incidence oblique,

$$\overline{|\psi_{1(a),i}|^2}(z_0) = |\mathbf{h}_{0,i}|^2 (1 + |A_{1(a)}^{(0)}|^2) + \frac{1}{4\pi^2} \iint_D \sum_{j=1}^{N-1} \left[|F_{(a),i}(\alpha, \beta)|^2 \hat{R}_{jj}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \right] d\alpha d\beta \quad (\text{IV.133})$$

Notant que $\hat{C}_{jj}(\alpha, \beta) = \hat{R}_{jj}(\alpha, \beta)$. D'après les résultats obtenus qui sont représentés par (IV.132-133), on conclut que le moment spatial d'ordre deux du module du champ ne dépend pas de l'altitude z_0 et il ne change pas d'une réalisation à une autre.

IV.6.4 Les moments spatiaux d'ordre deux des parties réelle et imaginaire du champ total

D'après les relations (IV.113), (IV.122-123) et (IV.132-133), les variances $\bar{\sigma}_R^2$ et $\bar{\sigma}_I^2$ et la covariance $\bar{\Gamma}_{RI}$ de la fonction aléatoire qui est représentée par la composante du champ total $\psi_{1(a),i}(x, y)$ associées aux parties réelle et imaginaire qui sont respectivement $\psi_{1(a)R,i}(x, y)$ et $\psi_{1(a)I,i}(x, y)$, sont données par :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_R^2 &= \frac{1}{2} \left(\overline{|\psi_{1(a),i}|^2} + \overline{\text{Re}(\psi_{1(a),i}^2)} \right) - \overline{\psi_{1(a)R,i}}^2 \\ \bar{\sigma}_I^2 &= \frac{1}{2} \left(\overline{|\psi_{1(a),i}|^2} - \overline{\text{Re}(\psi_{1(a),i}^2)} \right) - \overline{\psi_{1(a)I,i}}^2 \\ \bar{\Gamma}_{RI} &= \frac{1}{2} \overline{\text{Im}(\psi_{1(a),i}^2)} - \overline{\psi_{1(a)R,i} \psi_{1(a)I,i}} \end{aligned} \quad (\text{IV.134})$$

Nous démontrons que sous l'incidence oblique, les parties réelle et imaginaire du champ total représentent des processus non corrélés ($\bar{\Gamma}_{RI} = 0$) et centrés spatialement c'est-à-dire $\overline{\psi_{1(a)R,i}} = \overline{\psi_{1(a)I,i}} = 0$. De plus, leurs variances sont identiques $\bar{\sigma}_R^2 = \bar{\sigma}_I^2$. Alors, que sous l'incidence normale, dans le cas où les composantes du champ incident et réfléchi sont différentes de zéro, les moyennes spatiales des parties réelle et imaginaire sont différentes et elles ne sont pas nulles $\overline{\psi_{1(a)R,i}} \neq \overline{\psi_{1(a)I,i}} \neq 0$, les variances sont aussi différentes $\bar{\sigma}_R^2 \neq \bar{\sigma}_I^2$, alors que la covariance n'est pas nulle ce qui implique que les parties réelle et imaginaire sont bien corrélées.

Nous pouvons voir que les moments spatiaux ne changent pas d'une réalisation à une autre, cela montre que le champ total représente un processus érgodique au deuxième ordre.

IV.6.5 Distribution spatiale du champ total

On en déduit les distributions spatiales en utilisant (IV.99) et (IV.104) avec des moments spatiaux au lieu des moments statistiques. Sous un éclairage oblique, les parties réelle et imaginaire de la composante $\psi_{1(a),i}(x, y)$ associée à une réalisation arbitraire des surfaces $s_j(x, y)$, $j = \overline{1, N-1}$ à l'altitude z_0 , sont deux fonctions spatialement centrées et décorrélatées avec le même écart type. Par conséquent, le module de $\psi_{1(a),i}(x, y)$ obéit à une loi de Rayleigh et la phase est uniformément répartie. Dans ce cas, nous pouvons dire que les distributions spatiales et statistiques ne sont pas interchangeables. Sous incidence normale, dans le cas général, les deux fonctions $\psi_{1(a)R,i}(x, y)$ et $\psi_{1(a)L,i}(x, y)$ ne sont pas spatialement centrées. Elles sont corrélées avec des écarts types spatiaux différents. En conséquence, les distributions spatiales de $\psi_{1(a),i}(x, y)$ en module et en phase sont données en (IV.99) et (IV.104). Sous un éclairage normal, les distributions spatiales et statistiques sont interchangeables.

IV.7 Résultats Numériques

Pour étudier l'impact du nombre de couches sur les propriétés statistiques du champ diffracté et en particulier les variances, covariance et densité de probabilité du module et de la phase, nous avons fait une comparaison entre des structures à deux, trois et quatre couches. Toutes les simulations sont effectuées à la fréquence de 1 GHz (bande UHF), c'est-à-dire pour une longueur d'onde $\lambda = 30$ cm. La première structure à deux couches est constituée air/rock. La deuxième structure air/sol argileux/rock et la troisième structure air/neige/sol argileux/rock. Chaque milieu est caractérisé par sa permittivité relative ε_i résumée dans (Tableau IV.1). La hauteur de la couche de neige et du sol argileux est $d_1 = 0.35\lambda$ et $d_2 = 0.5\lambda$ respectivement. Les interfaces sont caractérisées par des fonctions d'autocorrélation Gaussiennes de hauteur quadratique moyenne $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \lambda / 20$ et de longueur de corrélation $l_1 = l_2 = l_3 = 0.5\lambda$. L'onde incidente est en polarisation horizontale avec l'angle de azimut $\varphi_0 = 0^\circ$. Ces données sont retirées de la référence [47].

	Milieu considéré	Permittivité relative
Milieu 1	air	$\varepsilon_1 = 1$
Milieu 2	neige	$\varepsilon_2 = 3$
Milieu 3	sol argileux	$\varepsilon_3 = 9.5 - i0.00055$
Milieu 4	rock	$\varepsilon_4 = 20.5 - i2.55$

Tableau IV.1. Permittivités relatives des différents milieux.

La figure IV. 2 représente les variances et covariance statistiques des parties réelle et imaginaire de la composante E_y du champ total et leur covariance selon l'axe Oz ($x = y = 0$). La surface est éclairée sous une incidence oblique avec $\theta_0 = 40^\circ$. Les variances et la covariance sont obtenues à partir des relations (IV.96) et dépendent de la coordonnée z .

Nous pouvons voir très nettement que les amplitudes d'oscillation augmentent avec le nombre de couches. Dès que le nombre de couches augmente, la hauteur à partir de laquelle la valeur asymptotique est atteinte augmente.

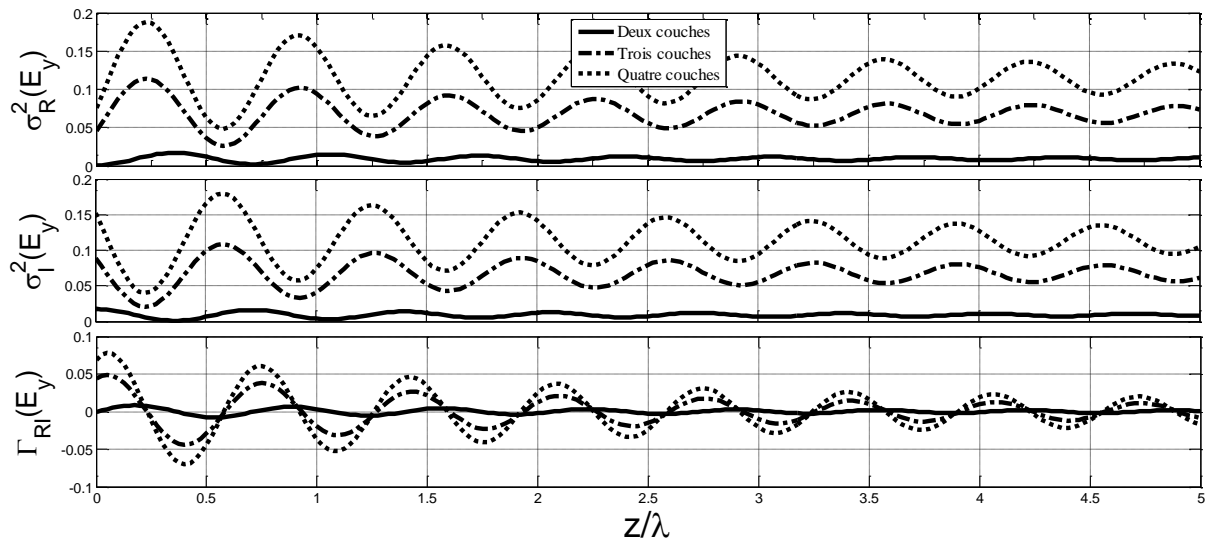


Figure IV. 2. Variances statistiques des parties réelle et imaginaire de la composante E_y champ total et leur coefficient de corrélation.

La figure IV.3 montre les densités de probabilité (PDF) du module et de la phase de la composante E_y du champ total pour $z = 2.4\lambda$. La surface est éclairée sous l'incidence $\theta_0 = 40^\circ$. Vu que pour $z = 2.4\lambda$ les variances et covariance statistiques des parties réelle et imaginaire pour les trois structures sont différentes, les densités de probabilité du module et de la phase changent d'une structure à une autre.

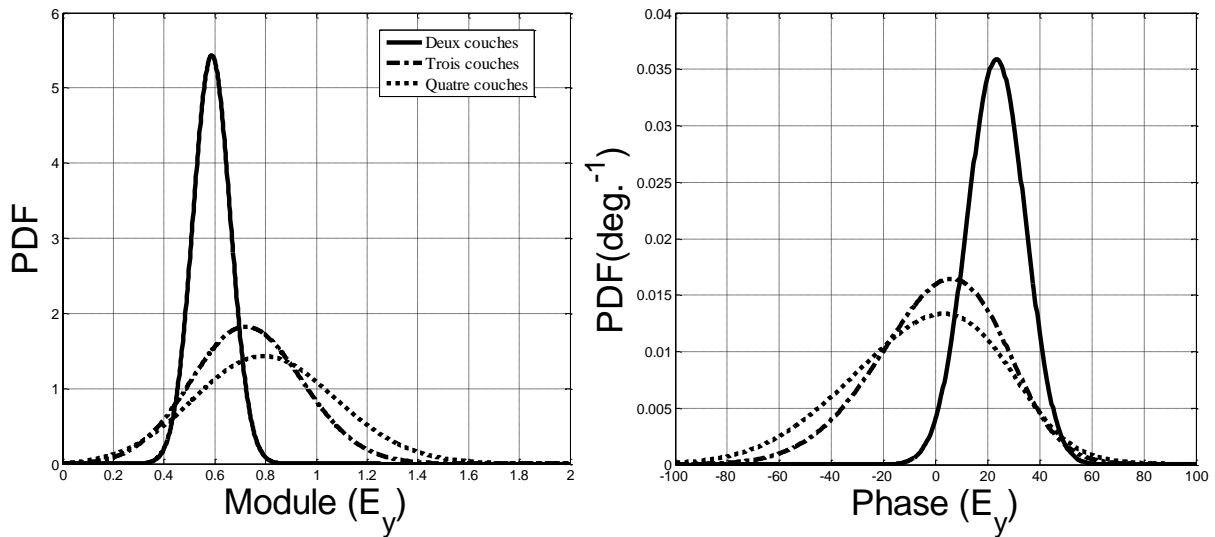


Figure IV.3. Les densités de probabilités du module et de la phase de la composante E_y du champ total.

IV.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi les expressions analytiques du champ total diffracté par un milieu stratifié formé de N surfaces rugueuses aléatoires. Ce qui nous a permis de déterminer les amplitudes de diffraction à l'ordre un. Cette étape était nécessaire pour étudier la stationnarité et l'ergodicité du champ total pour cette structure. Afin d'atteindre ces deux objectifs, nous avons déterminé dans un premier temps les moments statistiques jusqu'à l'ordre deux du champ total ainsi que les distributions statistiques du module et de la phase. D'après les résultats obtenus, on a trouvé que sous l'incidence oblique, le champ total n'est pas un processus stationnaire au sens large. Par contre, sous l'incidence normale, pour une valeur donnée de l'altitude, le champ total représente un processus stochastique stationnaire au sens strict. D'après les simulations numériques, nous avons remarqué que les amplitudes d'oscillation augmentent avec le nombre de couches. Dès que le nombre de couches augmente, la hauteur à partir de laquelle la valeur asymptotique est atteinte augmente.

Dans un deuxième temps, nous avons vérifié l'ergodicité du champ total, nous avons pu prouver que les moments spatiaux jusqu'à l'ordre deux ne changent pas d'une réalisation à l'autre quel que soit l'angle d'incidence, ce qui implique que le champ total représente un processus stochastique ergodique au second ordre.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, nous avons traité le problème de l'interaction d'une onde électromagnétique avec un milieu stratifié formé d'une structure multicouche à plusieurs surfaces rugueuses aléatoires bidimensionnelles (2D). Ces surfaces qui séparent des milieux de permittivités différentes sont des surfaces naturelles. Elles sont issues d'un processus gaussien et caractérisées par des distributions des hauteurs gaussiennes et des fonctions d'autocorrelations qui sont aussi gaussiennes. L'onde incidente qui éclaire la structure depuis l'air est une onde plane monochromatique de polarisation horizontale ou verticale.

L'objectif global de cette thèse est l'étude des propriétés statistiques (stationnarité et l'ergodicité) du champ proche total afin de modéliser ce dernier. Pour atteindre cet objectif, nous avons effectué une étude détaillée traduite par les quatre chapitres de ce manuscrit.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit les notions de base en électromagnétisme et les différents concepts fondamentaux dans les théories de la diffraction par des surfaces rugueuses pour l'appréhension du problème. D'abord, on a présenté les équations de Maxwell sous forme classique. Ces équations permettent de décrire le champ électrique et magnétique dans les différents milieux. Nous avons également rappelé les conditions aux limites sur lesquelles on assure le passage des ondes entre deux milieux différents. Une notion également importante qui a été évoquée est le concept d'onde plane qui représente l'onde incidente qui éclaire la surface rugueuse. De plus, nous avons décrit les phénomènes résultant de l'interaction entre le champ électromagnétique et une surface.

Dans le deuxième chapitre, nous nous sommes focalisés sur la résolution du problème de diffraction par une surface rugueuse aléatoire bidimensionnelle (2D) dans le but d'étendre cette étude au cas d'une structure multicouche. Un panorama des méthodes existantes a été présenté. Parmi ces méthodes, nous avons choisi la méthode des petites perturbations (SPM) à l'ordre deux qui est appliquée lorsque la hauteur quadratique moyenne est faible devant la longueur d'onde. En appliquant cette méthode, nous avons déterminé les amplitudes des champs diffractés pour les deux cas de la polarisation. Les résultats obtenus sont utilisés dans les chapitres suivants.

Dans le troisième chapitre de la thèse, nous avons étudié la stationnarité et l'ergodicité du champ total qui représente la somme des composantes des champs incident, réfléchi et diffracté au premier ordre de la méthode SPM. La surface rugueuse étudiée est définie par un processus aléatoire

gaussien et stationnaire à l'ordre deux avec une moyenne statistique nulle. On se basant sur ces propriétés, on a déterminé les moments statistiques et spatiaux jusqu'à l'ordre deux ainsi que les densités de probabilité du module et de la phase. Nous avons trouvé que les parties réelle et imaginaire du champ total sont corrélées et non centrées. De plus, la fonction de densité de probabilité du module est exprimée par une somme infinie de fonctions Bessel et la phase est exprimée par la fonction d'erreur. À partir des résultats obtenus, on a montré que sous l'incidence oblique, les moments statistiques jusqu'à l'ordre deux dépendent des coordonnées de l'espace, ce qui signifie que le champ total représente un processus non stationnaire. Par contre sous l'incidence normale, pour une altitude donnée, ces moments statistiques et les densités de probabilités du module et de la phase ne dépendent pas de coordonnées de l'espace ce qui implique que le champ total dans ce cas représente un processus stochastique stationnaire au sens strict.

Les moments spatiaux et les distributions du module et de la phase ont été déterminés pour une seule réalisation. Sous l'incidence normale, nous avons trouvé que les parties réelle et imaginaire sont spatialement corrélées et non centrées lorsque les composantes des champs incident et réfléchi sont différentes de zéro. De plus, les variances spatiales sont différentes et les distributions spatiales du module et de la phase suivent les lois générales. Dans le cas de l'incidence oblique, les parties réelle et imaginaire du champ total sont centrées spatialement et non corrélées avec des variances spatiales identiques. Dans ce cas, la distribution du module suit la loi de Rayleigh et la phase a une distribution uniforme. Nous avons démontré à partir des résultats obtenus que le champ total représente un processus stochastique ergodique au second ordre, quel que soit l'angle d'incidence.

Dans le quatrième chapitre de la thèse, l'étude de stationnarité et de l'ergodicité a été étendue au cas de la diffraction par un milieu stratifié formé d'une structure multicouche à plusieurs interfaces rugueuses. Mêmes remarques et même conclusion qu'au chapitre précédent ont été observées. D'après les simulations numériques, nous avons remarqué que les amplitudes d'oscillation augmentent avec le nombre de couches. Dès que le nombre de couches augmente, la hauteur à partir de laquelle la valeur asymptotique est atteinte augmente.

Dans la continuité de ce travail, nous devons reproduire notre étude à différents types de surfaces ayant de propriétés physiques et électriques différentes. Ce qui implique la nécessité de reprendre les calculs analytiques, en changeant les conditions aux limites pour obtenir de nouvelles amplitudes de diffraction pour les différentes polarisations afin d'effectuer une étude statistique du champ diffracté par ces surfaces. Finalement, nous espérons que cette étude a apporté une contribution à l'interprétation des données acquises par un capteur et qu'elle ouvre dans le futur plusieurs perspectives.

Annexe A

Calcul des deux expressions (III. 10) et (III.22)

Cette annexe est dédiée au calcul des deux expressions (III.10) et (III.22) qui permettent le calcul de la variance du champ total. $\hat{S}(\alpha, \beta)$ est la transformée de Fourier de la fonction bidimensionnelle $s(x, y)$ qui décrit l'interface.

A.1 Calcul de l'expression (III.10)

d'après l'expression (III.10), on a:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = & \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} R_{SS}(x - x', y - y') \\ & \times \exp(+j(\alpha - \alpha_0)x) \exp(+j(\beta - \beta_0)y) \exp(j(\alpha' - \alpha_0)x') \exp(j(\beta' - \beta_0)y') dx dx' dy dy' \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$R_{SS}(x, y)$ représente la fonction d'autocorrélation du processus aléatoire S . Avec le changement des variables (III.11),

$$x - x' = u, \quad y - y' = v, \quad x' = t, \quad y' = w \quad (\text{A.2})$$

d'où:

$$x = u + t, \quad x + x' = u + 2t, \quad y = v + w, \quad y + y' = v + 2w \quad (\text{A.3})$$

ce qui permet d'écrire:

$$\begin{aligned} & \exp(+j(\alpha x - \alpha_0(x + x') + \beta y - \beta_0(y + y') + \alpha' x' + \beta' y')) \\ & = \exp(+j((\alpha - \alpha_0)u + (\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)t + (\beta - \beta_0)v + (\beta - 2\beta_0 + \beta')w)) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

L'expression (III.10) devient

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = & \int_{-L}^0 \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L}^0 \int_{-L/2}^{+L/2} R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \exp(j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)t) \exp(j(\beta + \beta' - 2\beta_0)w) dudv dt dw \\ & + \int_{-L}^0 \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{L-v+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \exp(j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)t) \exp(j(\beta + \beta' - 2\beta_0)w) dudv dt dw \\ & + \int_0^{L-u+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{L-v+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \exp(j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)t) \exp(j(\beta + \beta' - 2\beta_0)w) dudv dt dw \\ & + \int_0^{L-u+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L}^0 \int_{-L/2}^{+L/2} R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \exp(j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)t) \exp(j(\beta + \beta' - 2\beta_0)w) dudv dt dw \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

ou encore:

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = \\
& \int_{-L}^0 \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \frac{\exp(j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)L/2) - \exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)(u + L/2))}{j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)} \\
& \quad \times \frac{\exp(j(\beta + \beta' - 2\beta_0)L/2) - \exp(-j(\beta + \beta' - 2\beta_0)(v + L/2))}{j(\beta + \beta' - 2\beta_0)} dudv \\
& + \int_{-L}^0 \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \frac{\exp(j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)L/2) - \exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)(u + L/2))}{j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)} \\
& \quad \times \frac{\exp(-j(\beta + \beta' - 2\beta_0)(v - L/2)) - \exp(-j(\beta + \beta' - 2\beta_0)L/2)}{j(\beta + \beta' - 2\beta_0)} dudv \\
& + \int_0^L \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \frac{\exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)(u - L/2)) - \exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)L/2)}{j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)} \\
& \quad \times \frac{\exp(-j(\beta + \beta' - 2\beta_0)(v - L/2)) - \exp(-j(\beta + \beta' - 2\beta_0)L/2)}{j(\beta + \beta' - 2\beta_0)} dudv \\
& + \int_0^L \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \frac{\exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)(u - L/2)) - \exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)L/2)}{j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)} \\
& \quad \times \frac{\exp(+j(\beta + \beta' - 2\beta_0)L/2) - \exp(-j(\beta + \beta' - 2\beta_0)(v + L/2))}{j(\beta + \beta' - 2\beta_0)} dudv
\end{aligned} \tag{A.6}$$

alors, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = \int_{-L}^0 \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)\frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta_0)\frac{v}{2}) \\
& \quad \times \frac{\exp(j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)L - j\alpha_0u + j(\alpha + \alpha_0)\frac{u}{2}) - \exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)(u + L/2) - j\alpha_0u + j(\alpha + \alpha_0)\frac{u}{2})}{j2(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)} \\
& \quad \times \frac{\exp(j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)L - j\beta_0v + j(\beta + \beta_0)\frac{v}{2}) - \exp(-j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)(2v + L) - j\beta_0v + j(\beta + \beta_0)\frac{v}{2})}{j2(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)} dudv \\
& + \int_{-L}^0 \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)\frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta_0)\frac{v}{2}) \\
& \quad \times \frac{\exp(j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)L/2) - j\alpha_0u + j(\alpha + \alpha_0)\frac{u}{2} - \exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)(u + L/2) - j\alpha_0u + j(\alpha + \alpha_0)\frac{u}{2})}{j2(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)} \\
& \quad \times \frac{\exp(-j(\beta + \beta' - 2\beta_0)(v - L/2) - j\beta_0v + j(\beta + \beta_0)\frac{v}{2}) - \exp(-j(\beta + \beta' - 2\beta_0)L/2 - j\beta_0v + j(\beta + \beta_0)\frac{v}{2})}{j2(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)} dudv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^L \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) \\
& \times \frac{\exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)(u - L/2) - j\alpha_0 u + j(\alpha + \alpha') \frac{u}{2}) - \exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)L/2 - j\alpha_0 u + j(\alpha + \alpha') \frac{u}{2})}{j2(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)} \\
& \times \frac{\exp(-j(\beta + \beta' - 2\beta_0)(v - L/2) - j\beta_0 v + j(\beta + \beta') \frac{v}{2}) - \exp(-j(\beta + \beta' - 2\beta_0)L/2 - j\beta_0 v + j(\beta + \beta') \frac{v}{2})}{j2(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)} dudv \\
& + \int_0^L \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) \\
& \times \frac{\exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)(u - L/2) - j\alpha_0 u + j(\alpha + \alpha') \frac{u}{2}) - \exp(-j(\alpha + \alpha' - 2\alpha_0)L/2 - j\alpha_0 u + j(\alpha + \alpha') \frac{u}{2})}{j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - 2\alpha_0)} \\
& \times \frac{\exp(+j(\beta + \beta' - 2\beta_0)L/2) - j\beta_0 v + j(\beta + \beta') \frac{v}{2}) - \exp(-j(\beta + \beta' - 2\beta_0)(v + L/2) - j\beta_0 v + j(\beta + \beta') \frac{v}{2})}{j2(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)} dudv
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle & = \int_{-L}^0 \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) \\
& \times \frac{\exp(j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)(L + u)) - \exp(-j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)(L + u))}{j2(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)} \times \frac{\exp(j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)(L + v)) - \exp(-j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)(L + v))}{j2(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)} dudv \\
& + \int_{-L}^0 \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) \frac{\exp(j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)(L + u)) - \exp(-j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)(L + u))}{j2(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)} \\
& \times \frac{\exp(+j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)(L - v)) - \exp(-j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)(L - v))}{j2(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)} dudv \\
& + \int_0^L \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) \frac{\exp(+j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)(L - u)) - \exp(-j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)(L - u))}{j2(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)} \\
& \times \frac{\exp(+j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)(L - v)) - \exp(-j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)(L - v))}{j2(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)} dudv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-L}^L \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) \frac{\exp(+j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)(L - u)) - \exp(-j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)(L - u))}{j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - 2\alpha_0)} \\
& \quad \times \frac{\exp(+j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)(L + v)) - \exp(-j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)(L + v))}{j2(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)} dudv
\end{aligned} \tag{A.8}$$

soit :

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = \\
& \int_{-L}^0 \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) (L + u)(L + v) \sin c\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0, (L + u)\right) \sin c\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0, (L + v)\right) dudv \\
& + \int_{-L}^0 \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) (L + u)(L - v) \sin c\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0, (L + u)\right) \sin c\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0, (L - v)\right) dudv \\
& + \int_0^L \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) (L - u)(L - v) \sin c\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0, (L - u)\right) \sin c\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0, (L - v)\right) dudv \\
& + \int_0^L \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) (L - u)(L + v) \sin c\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0, (L - u)\right) \sin c\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0, (L + v)\right) dudv
\end{aligned} \tag{A.9}$$

finalemt :

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{SS}(u, v) (L - |u|)(L - |v|) \sin c\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0, (L - |u|)\right) \\
& \quad \times \sin c\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0, (L - |v|)\right) \exp(+j(\alpha - \alpha') \frac{u}{2}) \exp(+j(\beta - \beta') \frac{v}{2}) dudv
\end{aligned} \tag{A.10}$$

A.2 Calcul de l'expression (III.22)

d'après l'expression (III.22), on a :

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} R_{SS}(x - x', y - y') \\
& \quad \times \exp(+j(\alpha - \alpha_0)x) \exp(+j(\beta - \beta_0)y) \exp(-j(\alpha' - \alpha_0)x') \exp(-j(\beta' - \beta_0)y') dx dx' dy dy'
\end{aligned} \tag{A.11}$$

De même avec le changement de variable (A.2) on a :

$$\begin{aligned}
& \exp(+j(\alpha x - \alpha_0(x - x') + \beta y - \beta_0(y - y') - \alpha' x' - \beta' y')) \\
& = \exp(+j((\alpha - \alpha_0)u + (\alpha - \alpha')t + (\beta - \beta_0)v + (\beta - \beta')w))
\end{aligned} \tag{A.12}$$

L'expression (A.11) devient:

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = \\
& \int_{-L}^0 \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L-v-L/2}^0 \int_{-L/2}^{+L/2} R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \exp(j(\alpha - \alpha')t) \exp(j(\beta - \beta')w) dudvdt dw \\
& + \int_{-L}^0 \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^{L-v+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \exp(j(\alpha - \alpha')t) \exp(j(\beta - \beta')w) dudvdt dw \\
& + \int_0^{L+L/2} \int_{-L/2}^L \int_0^{L-v+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \exp(j(\alpha - \alpha')t) \exp(j(\beta - \beta')w) dudvdt dw \\
& + \int_0^{L+L/2} \int_{-L/2}^L \int_{-L-v-L/2}^{+L/2} R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \exp(j(\alpha - \alpha')t) \exp(j(\beta - \beta')w) dudvdt dw
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Ou encore:

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = \int_{-L}^0 \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \\
& \frac{\exp(j(\alpha - \alpha')L/2) - \exp(-j(\alpha - \alpha')(u + L/2))}{j(\alpha - \alpha')} \frac{\exp(j(\beta - \beta')L/2) - \exp(-j(\beta - \beta')(v + L/2))}{j(\beta - \beta')} dudv \\
& + \int_{-L}^0 \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \\
& \frac{\exp(j(\alpha - \alpha')L/2) - \exp(-j(\alpha - \alpha')(u + L/2))}{j(\alpha - \alpha')} \frac{\exp(-j(\beta - \beta')(v - L/2)) - \exp(-j(\beta - \beta')L/2)}{j(\beta - \beta')} dudv \\
& + \int_0^L \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \\
& \frac{\exp(-j(\alpha - \alpha')(u - L/2)) - \exp(-j(\alpha - \alpha')L/2)}{j(\alpha - \alpha')} \frac{\exp(-j(\beta - \beta')(v - L/2)) - \exp(-j(\beta - \beta')L/2)}{j(\beta - \beta')} dudv \\
& + \int_0^L \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\alpha - \alpha_0)u) \exp(+j(\beta - \beta_0)v) \frac{\exp(-j(\alpha - \alpha')(u - L/2)) - \exp(-j(\alpha - \alpha')L/2)}{j(\alpha - \alpha')} \\
& \times \frac{\exp(+j(\beta - \beta')L/2) - \exp(-j(\beta - \beta')(v + L/2))}{j(\beta - \beta')} dudv
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = \int_{-L}^0 \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)u) \exp(+j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)v) \\
& \times \frac{\exp(j(\alpha - \alpha')L/2 + j\frac{\alpha - \alpha'}{2}u) - \exp(-j(\alpha - \alpha')(u + L/2) + j\frac{\alpha - \alpha'}{2}u)}{j(\alpha - \alpha')} \\
& \times \frac{\exp(j(\beta - \beta')L/2 + j\frac{\beta - \beta'}{2}v) - \exp(-j(\beta - \beta')(v + L/2) + j\frac{\beta - \beta'}{2}v)}{j(\beta - \beta')} dudv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-L}^0 \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)u) \exp(+j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)v) \frac{\exp(j(\alpha - \alpha')L/2 + j\frac{\alpha - \alpha'}{2}u) - \exp(-j(\alpha - \alpha')(u + L/2) + j\frac{\alpha - \alpha'}{2}u)}{j(\alpha - \alpha')} \\
& \quad \times \frac{\exp(-j(\beta - \beta')(v - L/2) + j\frac{\beta - \beta'}{2}v) - \exp(-j(\beta - \beta')L/2 + j\frac{\beta - \beta'}{2}v)}{j(\beta - \beta')} dudv \\
& + \int_0^L \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)u) \exp(+j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)v) \frac{\exp(-j(\alpha - \alpha')(u - L/2) + j\frac{\alpha - \alpha'}{2}u) - \exp(-j(\alpha - \alpha')L/2 + j\frac{\alpha - \alpha'}{2}u)}{j(\alpha - \alpha')} \\
& \quad \times \frac{\exp(-j(\beta - \beta')(v - L/2) + j\frac{\beta - \beta'}{2}v) - \exp(-j(\beta - \beta')L/2 + j\frac{\beta - \beta'}{2}v)}{j(\beta - \beta')} dudv \\
& + \int_0^L \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp(+j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)u) \exp(+j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)v) \frac{\exp(-j(\alpha - \alpha')(u - L/2) + j\frac{\alpha - \alpha'}{2}u) - \exp(-j(\alpha - \alpha')L/2 + j\frac{\alpha - \alpha'}{2}u)}{j(\alpha - \alpha')} \\
& \quad \times \frac{\exp(+j(\beta - \beta')L/2 + j\frac{\beta - \beta'}{2}v) - \exp(-j(\beta - \beta')(v + L/2) + j\frac{\beta - \beta'}{2}v)}{j(\beta - \beta')} dudv
\end{aligned} \tag{A.15}$$

ou encore:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle &= \int_{-L}^0 \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)u) \exp(+j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)v) \\
& \quad \frac{\exp(j\frac{\alpha - \alpha'}{2}(L + u)) - \exp(-j(\frac{\alpha - \alpha'}{2})(L + u))}{j2(\frac{\alpha - \alpha'}{2})} \frac{\exp(j\frac{\beta - \beta'}{2}(L + v)) - \exp(-j(\frac{\beta - \beta'}{2})(L + v))}{j2(\frac{\beta - \beta'}{2})} dudv \\
& + \int_{-L}^0 \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)u) \exp(+j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)v) \frac{\exp(j(\frac{\alpha - \alpha'}{2})(L + u)) - \exp(-j(\frac{\alpha - \alpha'}{2})(L + u))}{j2(\frac{\alpha - \alpha'}{2})} \\
& \quad \times \frac{\exp(+j(\frac{\beta - \beta'}{2})(L - v)) - \exp(-j(\frac{\beta - \beta'}{2})(L - v))}{j2(\frac{\beta - \beta'}{2})} dudv \\
& + \int_0^L \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp(+j(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0)u) \exp(+j(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0)v) \frac{\exp(+j(\frac{\alpha - \alpha'}{2})(L - u)) - \exp(-j(\frac{\alpha - \alpha'}{2})(L - u))}{j2(\frac{\alpha - \alpha'}{2})} \\
& \quad \times \frac{\exp(+j(\frac{\beta - \beta'}{2})(L - v)) - \exp(-j(\frac{\beta - \beta'}{2})(L - v))}{j2(\frac{\beta - \beta'}{2})} dudv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-L}^L \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp\left(+j\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0\right)u\right) \exp\left(+j\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0\right)v\right) \frac{\exp\left(+j\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)(L - u)\right) - \exp\left(-j\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)(L - u)\right)}{j2\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)} \\
& \quad \times \frac{\exp\left(+j\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right)(L + v)\right) - \exp\left(-j\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right)(L + v)\right)}{j2\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right)} dudv
\end{aligned} \tag{A.16}$$

soit:

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = \\
& \int_{-L}^0 \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp\left(+j\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0\right)u\right) \exp\left(+j\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0\right)v\right) (L + u)(L + v) \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)(L + u)\right) \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right)(L + v)\right) dudv \\
& + \int_{-L}^0 \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp\left(+j\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0\right)u\right) \exp\left(+j\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0\right)v\right) (L + u)(L - v) \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)(L + u)\right) \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right)(L - v)\right) dudv \\
& + \int_0^L \int_0^L R_{SS}(u, v) \exp\left(+j\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0\right)u\right) \exp\left(+j\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0\right)v\right) (L - u)(L - v) \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)(L - u)\right) \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right)(L - v)\right) dudv \\
& + \int_0^L \int_{-L}^0 R_{SS}(u, v) \exp\left(+j\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0\right)u\right) \exp\left(+j\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0\right)v\right) (L - u)(L + v) \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)(L - u)\right) \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right)(L + v)\right) dudv
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Finalement:

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{S}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{S}^*(\alpha' - \alpha_0, \beta' - \beta_0) \rangle = \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{SS}(u, v) (L - |u|)(L - |v|) \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right)(L - |u|)\right) \\
& \quad \times \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{\beta - \beta'}{2}\right)(L - |v|)\right) \exp\left(+j\left(\frac{\alpha + \alpha'}{2} - \alpha_0\right)u\right) \exp\left(+j\left(\frac{\beta + \beta'}{2} - \beta_0\right)v\right) dudv
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Annexe B

Calcul des deux expressions (III. 42) et (III.44)

Si on prend en compte l'ordre zéro, les parties réelle et imaginaire sont des variables gaussiennes corrélées, de variances et de moyennes différentes. La densité de probabilité conjointe de la partie réelle et imaginaire s'écrit:

$$p_{RI}(a, b) = \frac{1}{2\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{z}{2(1-\rho^2)}\right] \quad (\text{B.1})$$

Avec :

$$z = \frac{(a-\bar{a})^2}{\sigma_R^2} - 2\rho \frac{(a-\bar{a})(b-\bar{b})}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{(b-\bar{b})^2}{\sigma_I^2} \quad (\text{B.2})$$

nous pouvons écrire encore

$$z = \frac{a^2}{\sigma_R^2} - 2\rho \frac{ab}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{b^2}{\sigma_I^2} - \frac{2a\bar{a}}{\sigma_R^2} - \frac{2b\bar{b}}{\sigma_I^2} + 2\rho \frac{\bar{a}b + a\bar{b}}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{\bar{a}^2}{\sigma_R^2} + \frac{\bar{b}^2}{\sigma_I^2} - 2\rho \frac{\bar{a}\bar{b}}{\sigma_R\sigma_I} \quad (\text{B.3})$$

En passant en coordonnées polaires

$$a = m \cos \phi; b = m \sin \phi \quad (\text{B.4})$$

On trouve :

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{a^2}{\sigma_R^2} - 2\rho \frac{ab}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{b^2}{\sigma_I^2} &= m^2 \left[\frac{\cos^2 \phi}{\sigma_R^2} - 2\rho \frac{\cos \phi \sin \phi}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{\sin^2 \phi}{\sigma_I^2} \right] \\ &= \frac{m^2}{2} \left[\left(\frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_I^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2} \right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}} \cos(2\phi - \psi) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

avec

$$\sin \psi = -\frac{2\rho}{\sigma_R\sigma_I} / \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2} \right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}} \quad (\text{B.6})$$

et

$$\cos \psi = \left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2} \right) / \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2} \right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_R^2\sigma_I^2}} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} 2) \quad -\frac{2a\bar{a}}{\sigma_R^2} - \frac{2b\bar{b}}{\sigma_I^2} + 2\rho \frac{\bar{a}b + a\bar{b}}{\sigma_R\sigma_I} &= 2m \left[\rho \frac{\bar{a} \sin \phi + \bar{b} \cos \phi}{\sigma_R\sigma_I} - \frac{\cos \phi \bar{a}}{\sigma_R^2} - \frac{\sin \phi \bar{b}}{\sigma_I^2} \right] \\ &= -2m\sqrt{\Delta} \cos(\phi - \nu) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Avec

$$\begin{aligned} \sin \nu &= \left(\frac{\bar{b}}{\sigma_I^2} - \frac{\rho \bar{a}}{\sigma_R \sigma_I} \right) / \sqrt{\Delta} \\ \cos \nu &= \left(\frac{\bar{a}}{\sigma_R^2} - \frac{\rho \bar{b}}{\sigma_R \sigma_I} \right) / \sqrt{\Delta} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

où

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{\bar{b}}{\sigma_I^2} - \frac{\rho \bar{a}}{\sigma_R \sigma_I} \right)^2 + \left(\frac{\bar{a}}{\sigma_R^2} - \frac{\rho \bar{b}}{\sigma_R \sigma_I} \right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{\rho}{\sigma_R \sigma_I} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_R^2} \right)^2 \right] \bar{a}^2 + \left[\left(\frac{\rho}{\sigma_R \sigma_I} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_I^2} \right)^2 \right] \bar{b}^2 - 2 \frac{\rho \bar{a} \bar{b}}{\sigma_R \sigma_I} \left(\frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_I^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

D'où :

$$z = \frac{m^2}{2} [A + B \cos(2\phi - \psi)] - 2m\Delta^{1/2} \cos(\phi - \vartheta) + C \quad (\text{B.11})$$

Avec :

$$A = \left(\frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_I^2} \right), \quad B = \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2} \right)^2 + \frac{4\rho^2}{\sigma_R^2 \sigma_I^2}}, \quad C = \left(\frac{\bar{a}^2}{\sigma_R^2} + \frac{\bar{b}^2}{\sigma_I^2} - 2\rho \frac{\bar{a} \bar{b}}{\sigma_R \sigma_I} \right) \quad (\text{B.12})$$

La densité conjointe du module et de la phase s'écrit sous forme :

$$p_{M\phi}(m, \phi) = m p_{R_I}(m \cos \phi, m \sin \phi) \quad (\text{B.13})$$

D'où :

$$p_{M\phi}(m, \phi) = \frac{m}{2\pi \sigma_R \sigma_I \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{m^2}{2} [A + B \cos(2\phi - \psi)] - 2m\Delta^{1/2} \cos(\phi - \vartheta) + C \right] \right\} \quad (\text{B.14})$$

B.1 Calcul de l'expression (III.42)

pour obtenir la densité de probabilité du module, on intègre l'expression (B.14) par rapport à ϕ :

$$p_M(m) = \frac{m \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{m^2}{2} A + C \right) \right]}{2\pi \sigma_R \sigma_I \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{m^2}{2} B \cos(2\phi - \psi) - 2m\Delta^{1/2} \cos(\phi - \vartheta) \right] \right\} d\phi \quad (\text{B.15})$$

D'où :

$$p_M(m) = \frac{g_1}{\sigma_R \sigma_I} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp[g_2 \cos(2\phi - \psi)] \exp[g_3 \cos(\phi - \vartheta)] d\phi \quad (\text{B.16})$$

avec

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{m}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{m^2}{2} A + C\right)\right] \\ g_2 &= -\frac{m^2}{4(1-\rho^2)} B \\ g_3 &= \frac{m\Delta^{1/2}}{(1-\rho^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

On a :

$$\begin{aligned} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \\ e^{\frac{iz}{2}\left(-it-\frac{1}{-it}\right)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z) t^n \\ I_n(z) &= i^{-n} J_n(iz) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$J_n(z)$ représente la fonction de Bessel de première espèce et $I_n(z)$ représente la fonction de Bessel de première espèce modifiée.

$$\begin{aligned} \exp[g_2 \cos(2\phi - \psi)] &= \exp\left[\frac{ig_2}{2} \left(-ie^{i(2\phi - \psi)} - \frac{1}{-ie^{i(2\phi - \psi)}}\right)\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(g_2) e^{in(2\phi - \psi)} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

d'où

$$p_M(m) = \frac{g_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(g_2)}{\sigma_R \sigma_I} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in(2\phi - \psi)} \exp[g_3 \cos(\phi - \vartheta)] d\phi \quad (\text{B.20})$$

on pose $\phi - \vartheta = \phi_1$

nous obtenons

$$p_M(m) = \frac{g_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(g_2) e^{-jn(\psi - 2\vartheta)}}{\sigma_R \sigma_I} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j2n\phi_1} \exp(g_3 \cos \phi_1) d\phi_1 \quad (\text{B.21})$$

On a :

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\phi_1} \exp(+iz \cos \phi_1) d\phi_1 \\ I_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\phi_1} \exp(z \cos \phi_1) d\phi_1 \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

D'où finalement :

$$p_M(m) = \frac{g_1}{\sigma_R \sigma_I} \left\{ I_0(g_2)I_0(g_3) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(g_2)I_{2n}(g_3) \cos[n(2\vartheta - \psi)] \right\} \quad (\text{B.23})$$

B.2 Calcul de l'expression (III.44)

La densité de la phase s'obtient en intégrant (B.14) par rapport au module m :

$$p_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{+\infty} m \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \frac{m^2}{2} [A+B\cos(2\phi-\psi)] - 2m\Delta^{1/2} \cos(\phi-\vartheta) + C \right\}\right) dm \quad (\text{B.24})$$

nous pouvons écrire

$$p_\Phi(\phi) = \frac{\exp\left[-\frac{C}{2(1-\rho^2)}\right]}{2\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{+\infty} m \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left\{ \frac{m^2}{2} [A+B\cos(2\phi-\psi)] - 2m\Delta^{1/2} \cos(\phi-\vartheta) \right\}\right) dm \quad (\text{B.25})$$

On a :

$$\left\{ \frac{m^2}{4(1-\rho^2)} [A+B\cos(2\phi-\psi)] - 2m\Delta^{1/2} \cos(\phi-\vartheta) \right\} = \left[\frac{m\sqrt{A+B\cos(2\phi-\psi)}}{2\sqrt{1-\rho^2}} - \xi \right]^2 - \xi^2 \quad (\text{B.26})$$

Avec :

$$\xi = \frac{\Delta^{1/2} \cos(\phi-\vartheta)}{\sqrt{1-\rho^2} \sqrt{A+B\cos(2\phi-\psi)}} \quad (\text{B.27})$$

d'où

$$p_\Phi(\phi) = \frac{\exp\left(-\frac{C}{2(1-\rho^2)} + \xi^2\right)}{2\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{+\infty} m \exp\left(-\left[\frac{m\sqrt{A+B\cos(2\phi-\psi)}}{2\sqrt{1-\rho^2}} - \xi \right]^2\right) dm \quad (\text{B.28})$$

On pose :

$$\frac{m\sqrt{A+B\cos(2\phi-\psi)}}{2\sqrt{1-\rho^2}} - \xi = m' \quad (\text{B.29})$$

L'expression devient

$$p_{\Phi}(\phi) = \frac{2\sqrt{1-\rho^2}}{\pi\sigma_R\sigma_I [A+B\cos(2\phi-\psi)]} \exp\left(-\frac{C}{2(1-\rho^2)} + \xi^2\right) \int_{-\xi}^{+\infty} (m'+\xi)\exp(-m'^2) dm' \quad (\text{B.30})$$

On a :

$$\int_{-\xi}^{+\infty} (m'+\xi)\exp(-m'^2) dm' = \frac{1}{2}\exp(-\xi^2) + \xi \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 + \text{erf}(\xi)] \quad (\text{B.31})$$

D'où finalement:

$$p_{\Phi}(\phi) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi\sigma_R\sigma_I [A+B\cos(2\phi-\psi)]} \exp\left(-\frac{C}{2(1-\rho^2)}\right) \left(1 + \xi\sqrt{\pi} \exp(+\xi^2) [1 + \text{erf}(\xi)]\right) \quad (\text{B.32})$$

Annexe C

Calcul des deux expressions (III.65) et (III.66)

Dans cette annexe nous calculons l'expression $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2}$ dans les deux cas de l'incidence afin de déterminer la variance spatiale. Nous avons:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} s(x, y) s(x', y') e^{j(\alpha - \alpha_0)x} e^{j(\beta - \beta_0)y} e^{-j(\alpha + \alpha_0)x'} e^{-j(\beta + \beta_0)y'} dx dy dx' dy' \quad (C.1)$$

On applique le changement des variables suivant :

$$\begin{cases} x - x' = t \\ x' = u \end{cases} \quad \begin{cases} y - y' = v \\ y' = w \end{cases} \quad (C.2)$$

L'expression obtenue est

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} s(u, w) s(t + u, v + w) e^{j(\alpha - \alpha_0)(t+u)} e^{j(\beta - \beta_0)(v+w)} e^{-j(\alpha + \alpha_0)u} e^{-j(\beta + \beta_0)w} dt dv du dw \quad (C.3)$$

ou encore

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} e^{j(\alpha - \alpha_0)t} e^{j(\beta - \beta_0)v} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} s(u, w) s(t + u, v + w) e^{-j2\alpha_0 u} e^{-j2\beta_0 w} dt dv du dw \quad (C.4)$$

et aussi

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} e^{j(\alpha - \alpha_0)t} e^{j(\beta - \beta_0)v} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} s(u, w) s(t + u, v + w) e^{-j2\alpha_0 u} e^{-j2\beta_0 w} dt dv du dw \quad (C.5)$$

- Sous incidence oblique ($\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$)

L'expression (C.5) peut être exprimée par une fonction d'autocorrélation spatiale, notée $C_{AA}(t, v)$.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} e^{j(\alpha - \alpha_0)t} e^{j(\beta - \beta_0)v} C_{ss}(t, v) dt dv \quad (C.6)$$

Cette dernière expression (C.6) représente la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation spatiale

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} = \hat{C}_{ss}(\alpha, \beta) \quad (\text{C.7})$$

- sous l'incidence normale ($\alpha_0 = \beta_0 = 0$)

D'après l'équation (C.6), sous l'incidence normale, la moyenne spatiale devient nulle :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\hat{s}(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) \hat{s}(-\alpha - \alpha_0, -\beta - \beta_0)}{L^2} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Bibliographie

- [1] **M. A. Demir**, “Perturbation theory of electromagnetic scattering from layered media with rough interfaces”, Thèse de doctorat, Université de Ohio State, 2007.
- [2] **G. Berginc**, “The small-slope approximation method : a further study of vector wave scattering from two-dimensional surfaces and comparison with experimental data”. *Progress in Electromagnetics Research*, 2002, 2002.
- [3] **P. Beckmann and A. Spizzichino**, “*The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*”. Oxford: Pergamon, 1963
- [4] **L. Tsang, J. A. Kong, and R. Shin**. “*Theory of Microwave Remote Sensing*,” Wiley-Interscience, New York, (1985).
- [5] **F. T. Ulaby, R. K. Moore, and A. K. Fung** “*Microwave Remote Sensing*,” volume 2. Artech House, Norwood, (1982).
- [6] **A. Ishimaru**, “*Wave Propagation and Scattering in Random Media*,” volume 2. Academic Press, New York, (1978).
- [7] **F. G. Bass and I. M. Fuks**, “*Wave Scattering from Statistically Rough Surfaces*,” Pergamon Press, (1979).
- [8] **J. A. DeSanto and G. S. Brown**, “*Progress in Optics, volume XXIII, chapter Multiple Scattering from Rough Surfaces*,” North Holland, Amsterdam, (1986).
- [9] **J. C. Stover**, “*Optical Scattering: Measurement and Analysis*,” McGraw-Hill, New-York, (1990).
- [10] **M. Nieto-Veperinas**, “*Scattering and Diffraction in Physical Optics*,” Wiley, New-York, (1991).
- [11] **A. K. Fung**, “*Microwave Scattering and Emission Models and Their Applications*,” Artech House, Boston, (1994).
- [12] **Ogilvy J.A.**, “Theory of wave scattering from random rough surfaces”, Institute of Physics Publishing, 1991.
- [13] **T. M. Elfouhaily, C.A. Guérin**, “A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces”, *Waves Random Media*, 14, R1–R40, 2004.
- [14] **Barrick, D. (1968b)**, “Rough surface scattering based on the specular point theory”. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 16(4) :449–454.
- [15] **A. Voronovich**, “Non-local small-slope approximation for wave scattering from rough surfaces”, *Waves in Random Media*, 6:2, 151-167, 1996.
- [16] **M. Kouali**, “La diffusion d’une onde électromagnétique par un objet au-dessus d’une surface rugueuse”, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2012.
- [17] **L. KUZU, V. Demir and A. Z. Elsherbeni**, “Electromagnetic scattering from arbitrarily shaped chiral objects using the finite difference frequency domain method”, *Progress In Electromagnetics Research, PIER* 67, 1–24, 2007.

- [18] **A.Q. WANG, L.X. GUO, Y.W. WEI, and J. MA**, “Higher Order Method Of Moments For Bistatic Scattering From 2D PEC Rough Surface With Geometric Modeling By NURBS Surface”, *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 130, 85-104, 2012
- [19] **R. DUSSÉAUX, R. de OLIVEIRA**, “Scattering of a plane wave by a 1-dimensional rough surface study in a nonorthogonal coordinate system”, *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 34, 63–88, 2001.
- [20] **K. Ait Brahim**, “Diffusion des ondes électromagnétique par des surfaces rugueuses aléatoires naturelles: Méthode exacte en coordonnées curvilignes et Principe du faible couplage”, Thèse de doctorat, Université de Versailles, 2007.
- [21] **Lord Rayleigh**, “On the dynamical theory of gratings”. *Proc. R. Soc. Lon. A*, 79:399-416, 1907.
- [22] **Lord Rayleigh**, “*Theory of sound*”. Dover Publ., 1976. (publication originale:1877).
- [23] **D. Maystre**, “Sur la diffraction et l’absorption par les réseaux utilisés dans l’infrarouge, le visible et l’ultraviolet: Application à la spectroscopie et au filtrage des ondes électromagnétiques” Thèse d’état, Université d’Aix-Marseille III, 1974.
- [24] **D. Maystre**, “Electromagnetic Scattering from Perfectly Conducting Rough Surfaces in Resonance Region ”, *IEEE Trans. Antennas propag.*, Vol. AP.31, No. 6, Nov.1983.
- [25] **M. Born and E. Wolf**, “*Principles of Optics*”. London: Pergamon, 6th ed., 1980.
- [26] **P.-F. Combes**, “*Micro-ondes - Cours et exercices avec solutions. Tome 1 : Lignes, guides et cavités*”. Dunod, 1996.
- [27] **D. Middleton**, “*An Introduction to Statistical Communication Theory*”. New York: McGraw-Hill, 1960.
- [28] **Millar, R.F.**, “The Rayleigh hypothesis and a related least-squares solution to scattering problems for periodic surfaces and other scatterers”, *Radio Sci.*, Vol. 8, 785-796, 1973.
- [29] **Van den Berg, P.M. and J.T. Fokkema**, “The Rayleigh hypothesis in the theory of diffraction by a perturbation in a plane surface”, *Radio Sci.*, Vol. 15, 723-732, 1980.
- [30] **G. Viennot**, “Utilisation de techniques d’imagerie de synthèse pour le calcul de la propagation des champs électromagnétiques”, Thèse de doctorat, Université de LIMOGES, 2012.
- [31] **Brekhovskikh, L.M.**, “The diffraction of waves by a rough surface (in Russian) ”, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, Vol. 23, 275-289, 1952.
- [32] **Y. Brelet and C. Bourlier**, “SPM numerical results from an effective surface impedance for a one-dimensional perfectly-conducting rough sea surface”, *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 81, 413–436, 2008.
- [33] **T. Elfouhaily and C. A. Guerin**, “A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces”. *Waves in Random Media*, 14 :R1–R40, 2004.
- [34] **J. A. Ogilvy**, “*Theory of wave scattering from random rough surfaces*”. Adam Hilger, New York, 1991.
- [35] **A. Voronovich**, “Small-slope approximation for electromagnetic wave scattering at a rough interface of two dielectric half-spaces”, *Waves in Random Media*, 4:3, 337-367, 1994.
- [36] **A. G. Voronovich**. “*Wave scattering from rough surfaces*”. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

-
- [37] **G. Berginc and C. Bourely**, “The small-slope approximation method applied to a three-dimensional slab with rough boundaries”. *Progress in Electromagnetics Research*, 2007,2007.
- [38] **Suzanne T McDaniel**, “An extension of the small-slope approximation for rough surface scattering”. *Waves in Random Media*, 5 :201–214, 1995.
- [39] **Eric I. Thorsos and Shira Lynn Broshat**, “An investigation of the small slope approximation for scattering from rough surfaces, part I theory.” *J. Acoust. Soc. AM.*, 97, 1997.
- [40] **P. Réfrégier**, “*Théorie du bruit et application en physique*”, Hermès, Pasis, 2002.
- [41] **P. Beckmann**, “*Probability in Communication Engineering*”. New York: Harcourt, Brace & World, 1967.
- [42] **G. N. Watson**, “*A Treatise on the Theory of Bessel Function*”, 2nd ed., Cambridge University Press, 1944.
- [43] **S. Afifi and R. Dusséaux**, “On the co-polarized phase difference of rough layered surfaces: Formulas derived from the small perturbation method,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 59, no. 7, pp 2607- 2618, July 2011.
- [44] **R. Dusséaux, S. Afifi, R. de Oliveira**, “On the stationarity of signal scattering by two-dimensional slightly rough random surfaces,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 61, No. 11, pp 5828-5832, Nov. 2013.
- [45] **E. Roubine**, *Introduction à la théorie de la communication, Tome II: Signaux aléatoires*, Paris, Masson, 1970.
- [46] **R. de Oliveira, R. Dusséaux and S. Afifi**, “Analytical derivation of the stationnarity and the ergodicity of the field scattered by a slightly rough random surface,” *Waves in Random and Complex Media*, vol. 20, no. 2, pp. 1-23, Aug. 2010.
- [47] **A. Berrouk**, “Etude statistique de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses naturelles”, Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar de Annaba, 2014.
- [48] **S. Afifi, R. Dusséaux**, “Scattering by Anisotropic Rough Layered 2D Interfaces,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 60, NO. 11, 2012.

ملخص

في هذه الأطروحة، نقدم الدراسة النظرية للخصائص الإحصائية والمكانية لحيود الموجات الكهرومغناطيسية بواسطة السطوح ذات التشوهات الطفيفة والعشوائية ذات بعدين. تخص هذه الدراسة المنطقة الوسطى للحقل حيث يكون الحقل المنتشر عبارة عن موجات متقدمة مستوية. تتم العمليات الحسابية في إطار نظرية الاضطرابات الصغيرة من الدرجة الأولى والثانية، بحيث تقوم على فرضية أن السطح المراد دراسته مستقر ويخضع لنظرية ارقوديك مع توزيع غوس للارتفاع. من أجل أسطح غير منتهية، قمنا باشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية لطويلة وزاوية مركبات الحقل الكلي حيث وجدنا أن دالة الكثافة الاحتمالية للطويلة عبارة عن مجموع غير منته من دوال بيسل المعدلة في حين أن الدالة الخاصة بالزاوية هي بدلالة دالة الخطأ. لقد برهنا أن الحقل الكلي ليس مستقر في حالة الاسقاط المائل، أما في حالة الاسقاط العمودي فالحقل الكلي يمثل تطور عشوائي مستقر بالمعنى الدقيق. من الناحية المكانية و من أجل ارتفاع معين ومهما كان مقدار زاوية الاسقاط ، استطعنا أن نثبت أن الحقل الكلي يخضع لنظرية ارقوديك من الدرجة الثانية. كما أنه في حالة الاسقاط المائل، فإن التوزيع المكاني لطويلة الحقل الكلي عبارة عن قانون رايلي و توزيع الزاوية منتظم. أما في حالة الإسقاط العمودي، فإن عبارة التوزيع المكاني للطويلة تكون بدلالة مجموع غير منته من دوال بيسل المعدلة في حين أن التوزيع المكاني للزاوية غير منتظم.

Abstract

In this thesis, we present a theoretical derivation of the statistical and spatial properties of signal scattering by two-dimensional slightly rough random surfaces. The work concerns the intermediate field-zone where the scattered field is reduced to the contribution of the progressive plane waves. Calculations are carried out within the framework of the first-order small perturbation method. The surface is assumed to be ergodic and stationary with a Gaussian height distribution. For infinite extension surfaces, we derive the probability density functions (PDFs) for the modulus and phase of the total field components. The modulus PDF takes the form of infinite sum of modified Bessel functions while the phase PDF is expressed in terms of the error function. We demonstrate that under oblique incidence, the total field is not wide-sense stationary and under normal incidence, the total field represents a strictly stationary stochastic process. From a spatial point of view, for a given altitude and under all incidences, we show that the total field is ergodic to the second order. Under oblique incidence, the spatial distribution of the total field modulus is a Rayleigh law and the phase is uniform. Under normal incidence, the spatial distribution of the modulus is given by a law in the form of infinite sum of modified Bessel functions and the phase is not uniformly distributed.

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons une étude théorique des propriétés statistiques et spatiales de la diffraction d'une onde électromagnétique par des surfaces légèrement rugueuses aléatoires en deux dimensions. La procédure du travail concerne la zone intermédiaire où le champ diffusé est réduit à la contribution des ondes planes progressives. Les calculs sont effectués dans le cadre de la méthode des petites perturbations du premier ordre et deuxième ordre. Les surfaces sont supposées être ergodique et stationnaire avec une distribution gaussienne de la hauteur. Pour les surfaces d'extension infinies, nous tirons les fonctions de densité de probabilité (PDF) pour le module et la phase de la totalité des composants des champs. Le PDF du module prend la forme de somme infinie de fonctions de Bessel modifiées alors que le PDF de la phase est exprimée en termes de la fonction d'erreur. Nous démontrons que sous incidence oblique, le champ total n'est pas stationnaire au sens large et sous incidence normale, le champ total représente un processus stochastique strictement stationnaire. D'un point de vue spatial, pour une altitude donnée et sous tous les angles d'incidence, nous montrons que le champ total est ergodique au second ordre. Sous incidence oblique, la distribution spatiale du module du champ total est une loi de Rayleigh et la phase est uniforme. Sous incidence normale, la répartition spatiale du module est donnée par une loi sous forme de somme infinie de fonctions de Bessel modifiées et la phase n'est pas uniformément répartie.