Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université De Badji Mokhtar - Annaba
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en sciences

# Etude De Certaines Equations Intégrales Non Linéaires Sur Le Bord.

## Option :

Mathématiques Appliquées

Par :

**HAMDOUCHE Rahima**

Sous la direction du Professeur : **SAKER, Hacene**

Devant le jury :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Président : | DJELLIT Ali | Prof | U.B.M. Annaba |
| Examinateur : | REBBANI Fozia | Prof | E.S.T.I Annaba |
| Examinateur : | BOUSSETILA Nadjib | Prof | Univ. Guelma |
| Examinateur : | NOUAR Ahmed | M.C.A | Univ. Skikda |
| Examinateur : | HAIOUR Mohamed | Prof | U.B.M. Annaba |

Annaba, 2016/2017

*Je dédie ce travail à mes parents*

*mon mari, mon frère et sa famille,*
*mes soeurs et mes grands parents,*
*mon oncle et sa famille,*
*et pour toute ma grande famille*

# Table des matières

# Remerciements

Tout d'abord je remercie le Dieu pour finir ce travail en bonne santé.

je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon Directeur de thèse Monsieur SAKER Hacene Professeur à l'Université de Badji Mokhtar-Annaba, qui a encadré cette thèse avec beaucoup de patience. Sa compétence, sa disponibilité et ses qualités humaines ont été d'une grande importance pour l'orientation de cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur NOUAR, Ahmed "Maître de Conférence à l'université de 20 Août 55 Skikda" de m'avoir honoré par son présence parmi les membres de jury.

Je remercie aussi les autres enseignants d'avoir acceptés d'être membres de jury.

Tous remerciements vont aussi aux enseignants chercheurs de laboratoire de Mathématiques Appliquées (L.M.A) de l'université d'annaba, mes collègues de travail du département de Pétrochimie et de mathématiques et tout personne administrative de l'université de Skikda.

Que mon mari trouve ici les meilleurs expressions de ma gratitude pour l'encouragement qu'il m'a toujours donné .

J'adresse mes vifs remerciements à ma famille et mes amies et tout le monde qui me connaît.

# ملخص

هذه الأطروحة تدرس معادلة لابلاس و لابلاس المضاعف مع شروط حدية غير خطية في مجال منتظم من الفضاء $\mathbb{R}^2$. نطبق الطريقة المباشرة للمعادلة التكاملية لحل هذه المسائل. الطريقة المعتمدة على الصيغة الثالثة ل «غرين»، تسمح بتحويل هذه المسائل إلى جملة معادلات تكاملية على حافة المجال. بعد تشكيل الجملة المرافقة، ن برهن وجود و وحدانية الحل باستعمال نظرية «مينتي و براودر» [81]، [80] .



**الكلمات المفتاحية:**

مؤثر لابلاس و لابلاس المضاعف، الحل الأساسي، المعادلات التكاملية، المؤثرات التكاملية، نظرية فريدهولم، متراجحة غاردينغ، فضاءات سوبولاف.

# Résumé

Cette thèse étudie deux problèmes le Laplacien et le bi-Laplacien avec des conditions non linéaires au bord sur un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$. On applique la méthode directe d'équation intégrale pour résoudre ces problèmes aux limites. La présente méthode, qui est fondée sur la troisième formule de Green, permet la réduction de ces problèmes en un système d'équations intégrales sur la frontière du domaine qu'on résout. Après construire notre système correspondant, on montre l'existence et l'unicité de la solution à l'aide du "théorème de Minty et Browder" [81], [89].

## Mots clés :

L'opérateur de Laplace et de bi-Laplacien, solution élémentaire, équations intégrales, opérateurs intégraux aux bord, le théorème de Fredholm, l'inégalité de Gårding, les espaces de Sobolev.

# Abstract

This thesis study the Laplace and bi-Laplace problems with nonlinear boundary conditions on a smooth domain in $\mathbb{R}^2$. We apply the direct integral equations method to solve these value problems. The present method, which based on the third Green's formula, allows the reduction of these problems in a system of boundary integral equations on the boundary of the domain which is resolved. After we construct our corresponding system, we prove the existence and uniqueness solution using the "Minty and Browder's theorem" [81], [89].

## Key words :

The Laplace and Bi-Laplacian Operator, fundamental solution, integral equations, boundary integral operators, Fredholm's theorem, Gårding's inequality, Sobolev spaces.

# Introduction générale

L'étude des équations intégrales et de leur résolution numérique est un sujet qui connaît un grand succès. La raison provient du fait que de telles équations peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes aux dérivées partielles (EDP). Dans la nature, les systèmes et phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis entre eux par un grand nombre de paramètres non linéaires (la météorologie, la turbulence des fluides...etc). En fait, seulement un petit nombre de problème aux EDP peut être reformuler en équations intégrales, mais heureusement ce sont les problèmes les plus importants pour les applications : le problème de Laplace, de Helmholtz, de bi-Laplacien.

Ces équations intégrales peuvent être obtenues en utilisant la méthode des équations intégrales qui a débuté avec les travaux de Fredholm, principal fondateur de la théorie des équations intégrales de deuxième espèce, qui porte son nom. On peut distinguer deux formulations pour cette méthode :

– La méthode directe qui consistent à établir une relation directe entre les fonctions inconnues (densitée de simple ou de double couche), c-à-d, les fonctions inconnues sont les variables physiques du problème considéré [21, 32, 85].

– La méthode indirecte qui signifie que les fonctions de densité n'ont pas une signification directe dans le problème aux EDP initial [42].

L'étude des méthodes directes peut être basée sur l'approche de "Costabel" et "Wendland", qui est développée dans [34] et des résultats dans une description complète des propriétés des opérateurs intégraux au bord et de la forte ellipticité des systèmes des équations intégrales du premier espèce correspondant à divers types des conditions de frontière.

Cette approche implique des avantages importants par rapport à la résolution "directe" des

EDP. Un aspect essentiel est que lorsque la fonction inconnue qui intervient dans l'EDP est recherchée sur un domaine $\Omega$ de $\mathbb{R}^N$, la reformulation du problème en équation intégrale fait apparaître une fonction inconnue qui est recherchée sur le bord $\partial\Omega$ du domaine.

On réduit aussi la dimension de l'espace de un, c-à-d, l'équation à résoudre est sur la frontière. De plus, lorsque $\Omega$ est le complémentaire d'un domaine borné $O$, on transforme un problème posé dans un domaine non borné en un problème posé sur la frontière $\partial\Omega$.

Un point fort de ces méthodes est la possibilité de traiter des domaines extérieures, sans avoir tranquer artifficiellement le domaine d'étude, en utilisant les techniques d'équation intégrale et la méthode des éléments de frontière. L'idée derrière ces techniques est d'utiliser les théorèmes de Green pour transformer le problème et l'exprimer sur la frontière du domaine, qui est bornée.

D'autre part ces méthodes utilisent des solutions élémentaires, elles sont donc seulement applicables à des problèmes décrits pour les opérateurs aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. Ceci peut apparaître un inconvénient, mais heureusement que les systèmes physiques, décrits par des opérateurs de ce type, sont très fréquemment rencontrés dans la pratique. Il est aussi possible d'étendre le domaine d'application en couplant les éléments frontières avec des éléments classiques.

Un autre inconvénient dans la plupart des cas, est que la classe des opérateurs intégraux obtenus est plus large que celle des équations de Fredholm de deuxième espèce à noyau faiblement singuliers.

Une autre direction de recherche est née avec les travaux de Wendland qui consiste à interpréter n'importe quel opérateur intégral en tant qu'opérateur pseudo-différentiel, via le calcul symbolique associé à ce dernier, pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité de la solution. Donc on peut appliquer la théorie des opérateurs pseudo-différentiels [75], [91], [92] qui permet de formuler des propriétés commun, telle la forte ellipticité et la coercivité à l'aide de l'inégalité de Gårding, pour une large classe d'espaces de sobolev.

Nous voulons étudier ici un autre inconvénient qu'on peut le rencontrer aussi si les problèmes constituent des conditions non linéaires. Ces problèmes forment une base des modèles mathématiques qui représentent défférents phénomènes et processus dans la mécanique et en physique.

Cette difficulté peut être surmontée si nous transformons ces problèmes en équations intégrales non linéaires sur le bord. Pour étudier la solvabilité de ces équations, nous donnons quelques hypothèses sur la partie non linéaire.

Ce travail de recherche a été organisé en quatre chapitres concernant une contribution appropriée dans le domaine des équations intégrales.

Un résumé de ce travail est décrit comme suit :

➤ On commence par **le premier chapitre** qui contient un résumé des définitions et des résultats mathématiques de base utilisés tout au long de ce travail.

➤ **Le deuxième chapitre** est une introduction à la méthode des équations intégrales. On y expose cette méthode dans le cas linéaire et on étudie plus particulièrement la méthode indirecte (potentiel) pour résoudre l'équation harmonique avec une condition de frontière de Neumann et la méthode directe (Green) pour résoudre l'équation biharmonique avec une condition de frontière de Neumann dans un domaine borné simplement connexe de $\mathbb{R}^2$. La première approche consiste à utiliser les potentiels de simple et de double couche, on obtient deux types d'équations intégrales :

❍ de Fredholm de premiers espèces avec noyau faiblement singulier.

❍ de Fredholm de deuxième espèces avec noyau non intégrable, qui sont interprétés au sens d'une valeur principale.

Et la deuxième approche consiste à appliquer l'identité de Green pour construire un système des équations intégrales linéaires. Le système et les équations obtenues dans ce chapitre sont fortement elliptiques, et la propriété de coercivité est obtenue à l'aide de l'inégalité de Gårding, ceci permet d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité.

➤ Dans **le troisième chapitre**, on a étudié deux problèmes aux limites pour l'équation harmonique avec des conditions intégrales non linéaires au bord. Dans le premier, la condition de frontière est de type d'Hammerstein [24]. Dans le deuxième, la condition non linéaire au bord est oblique qui nécessite un traîtement différent que pour les conditions linéaires. Les deux équations intégrales obtenues sont non linéaires et de type d'Uryson ([50] ; [60]). Pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité on impose des hypothèses sur l'opérateur intégral d'Uryson pour appliquer le théorème de Minty et Browder [81]. Et afin d'étudier la régularité de la solution de l'équation intégrale, on se donne un exemple d'application.

➤ Dans **le quatrième chapitre**, nous étudions la méthode des équations intégrales pour l'équation bi-harmonique avec une condition intégrale non linéaire au bord dans un domaine $\Omega$ régulier de $\mathbb{R}^2$. Nous obtenons un système non linéaire des équations intégrales. Le théorème de Minty et Browder sur les opérateurs monotones, garantie un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Et nous terminons avec un exemple d'application pour vérifier les hypothèses.

➤ Nous terminons ce travail avec une conclusion générale où nous décrivons les perspectives qui feront suite à ce travail.

Chapitre

# 1 Notions Fondamentales

## 1.1 Introduction

Tout problème de la physique mathématique conduit naturellement à la résolution d'une ou de plusieurs équations fonctionnelles que nous écrivons sous la forme simplifiée

$$AU = F \tag{1.1}$$

où $A$ est un operateur d'un espace $X$ dans un espace $Y$, $F$ est donnée dans $Y$, $U$ est recherché dans $X$. Par exemple, les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles et les équations intégrales.

En général, la solution de (1.1) est impossible à déterminer explicitement, où encore si sa forme explicite est compliquée, elle est inutilisable et on s'intérèsse donc à la résolution approchée de l'équation.

Pour passer d'un problème exacte à un problème approché, il faut étudier l'existence et l'unicité de la méthode d'approximation utilisée.

Nous allons utiliser l'outil des opérateurs pseudo-différentiels, pour l'étude des problèmes, comportant une classe d'équations intégrales, plus large que celle des équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce. C'est la raison pour laquelle, on insistera dans le deuxième chapitre sur le concept des opérateurs pseudo-différentiels.

## 1.2 Analyse Fonctionnelle

a) Soit $H$ un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de la norme associée $\|.\|_H$. On désigne par $H'$ l'espace dual de $H$, et $\langle ., . \rangle_{H' \times H}$ est le produit de dualité avec $\|.\|_{H'}$ est la norme associée.

### 1.2.1 Théorème de Projection

Soit $M \subset H$ un sous espace fermé d'un espace de Hilbert $H$ et soit

$$M^{\perp} := \{v \in H | \ (v, u) = 0, \text{ pour tout } u \in M\}.$$

Alors tout $u \in H$ peut être uniquement décomposé en somme directe :

$$u = u_0 + u_0^{\perp}, \text{ avec } u_0 \in M \text{ et } u_0^{\perp} \in M^{\perp}. \tag{1.2}$$

L'opérateur défini par $\pi_M : u \longmapsto u_0 =: \pi_M u$ est une projection orthogonale linéaire continue. Dans ce cas, on écrit $H = M \oplus M^{\perp}$.

### 1.2.2 Théorème de Lax-Milgram

Soit $a : \ H \times H \to R$ une forme bilinéaire continue et coercive, c-à-d, il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ telle que pour tout $u, v \in H$ :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_H . \|v\|_H, \tag{1.3}$$

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2. \tag{1.4}$$

Alors, pour tout fonctionnelle linéaire continue $f : H \to \mathbb{R}$ sur $H$ il existe une solution unique $u \in H$ telle que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{H', H} \quad \forall v \in H, \tag{1.5}$$

De plus, la solution $u$ depend continument sur $f$ :

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H'}. \tag{1.6}$$

### 1.2.3 L'alternative de Fredholm

L'alternative de Fredholm est un théorème qui caractérise l'existence et l'unicité de la solution d'un problème linéaire perturbé et compact. Soit $X$ un espace de Banach, si $T \in \mathscr{L}(X)$ est un opérateur compact, alors

1. $\mathcal{N}(I - T)$ est de dimension finie,
2. $\mathcal{R}(I - T)$ est fermée, c-à-d, $\mathcal{R}(I - T) = \mathcal{N}(I - T^*)^{\perp}$,

3. $\mathcal{N}(I-T) = \{0_X\} \Leftrightarrow \mathcal{R}(I-T) = X$,
4. $\dim \mathcal{N}(I-T) = \dim \mathcal{N}(I-T^*)$.

En résolvant une équation de la forme $u - Tu = f$, l'Alternative de Fredholm est ainsi énoncée comme suit :

Pour tout $f \in X$ l'équation $u - Tu = f$ admet une solution unique $u \in X$ qui dépend continument de $f$ ; ou bien l'équation homogène $u - Tu = 0_X$ admet $n$ solutions linéairement indépendantes $u_1, u_2, \cdots, u_n \in \mathcal{N}(I-T) \subset X$ et, dans ce cas, l'équation non homogène $u - Tu = f$ est soluble (pas nécessairement uniquement) si et seulement si $f$ satisfait $n$ conditions d'orthogonalité, c-à-d, $f \in \mathcal{R}(I-T) = \mathcal{N}(I-T^*)^{\perp}$ , qui est de dimension $n$ finie.

L'importance de l'alternative de Fredholm se situe dans le fait qu'elle transforme le problème d'existence pour la solution de l'équation non homogène $u - Tu = f$ à un problème d'unicité qui enlève les solutions non triviales pour l'équation homogène $u - Tu = 0_X$. En d'autres termes, ce théorème nous indique qu'une perturbation compacte de l'opérateur d'identité est injective si et seulement si elle est surjective. Nous remarquons que l'alternative reste toujours valide quand nous remplaçons $I - T$ par $S - T$, où $S \in \mathscr{L}(X)$ est un opérateur linéaire, continu et inversible son inverse $S^{-1}$ est aussi continu. Ceci provient du fait qu'une équation de la forme $Su - Tu = f$ peut être alors transformée aisément sous forme équivalente $u - S^{-1}Tu = S^{-1}f$, où $S^{-1}T$ est compact puisque $T$ est compact.

Une autre manière d'exprimer l'alternative de Fredholm est par la formulation classique, en considérant les quatre équations :

$$u - Tu = f \quad \text{dans } X \tag{1.7}$$

$$u - Tu = 0_E \quad \text{dans } X \tag{1.8}$$

$$w - T^*w = g \quad \text{dans } X^* \tag{1.9}$$

$$w - T^*w = 0_E^* \quad \text{dans } X^* \tag{1.10}$$

Si $T \in \mathscr{L}(X)$ est un opérateur compact, alors on a l'alternative suivante :

– ou bien les deux équations (1.7) et (1.9) admettent pour tous seconds membres $f \in X, g \in X^*$ une solution unique $u \in X, w \in X^*$.
– ou bien les équations homogènes (1.8) et (1.10) admettent un même nombre fini $n > 0$ de solutions indépendantes, $u_1, \cdots, u_n$ et $w_1, \cdots, w_n$. Dans ce cas pour que l'équation (1.7) admette une solution $u \in X$, il faut et il suffit que $w_1(f) = w_2(f) = \cdots = w_n(f) = 0$, et pour que l'équation (1.9) admette une solution $w \in X^*$, il faut et il suffit que
$g(u_1) = g(u_2) = \cdots = g(u_n) = 0$.

### 1.2.4 Les injections compactes

Soit $E$ et $F$ deux espaces de Banach tels que $E \subseteq F$. Nous disons que $E$ est continument inclus dans $F$, écrit comme $E \overset{c}{\hookrightarrow} F$, si $E$ est un sous-espace vectoriel de $F$ et si l'opérateur d'identité $I : E \longrightarrow F$ défini par $I(v) = v$ pour tous $v \in E$ est continu, c-à-d, s'il existe une constante $C$ tels que

$$\|v\|_F \leq C\|v\|_E \quad \forall v \in E. \tag{1.11}$$

D'autre part, on dit que l'espace $E$ est de manière compacte continument inclus dans $F$, écrit comme $E \overset{comp}{\hookrightarrow} F$, si $E$ est continument inclus dans $F$ et si l'opérateur d'identité $I : E \longrightarrow F$ est compact, c-à-d, si chaque suite borné de $E$ admet une sous-suite convergente dans $F$.

## 1.3 Les espaces de Sobolev

Soit $f$ une fonction réel, ou plus généralement, une fonction à valeur complexe définie sur le domaine $\Omega$, et soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_N^0$, nous écrivons

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{\alpha_N} f, \tag{1.12}$$

pour noter une dérivée partielle mixte de $f$ d'ordre

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N. \tag{1.13}$$

### 1.3.1 Les espaces de Lebesgue

Les $L^p$ ou les espaces de Lebesgue correspondent aux classes des fonctions mesurables de Lebesgue définis sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ils sont définis, pour $1 \leq p \leq \infty$, par

$$L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{C} |\ \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\right\}, \tag{1.14}$$

où la norme de $L^p$ est donnée par

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{dx}\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{supp ess}_{x\in\Omega} \mid f(x) \mid, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.15}$$

Nous disons que deux fonctions sont égales presque partout si elles sont égales sauf sur un ensemble de mesure zéro. Les fonctions qui sont égales presque partout dans le domaine $\Omega$ sont donc identifiées dans $L^p(\Omega)$. Le supp essentiel est de même défini dans ce sens par

$$\text{supp ess}_{x\in\Omega}|f(x)| = \inf\{C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ presque partout dans } \Omega\}. \tag{1.16}$$

Nous rappelons que les espaces $L^p$, muni avec la norme (1.15), sont des espaces de Banach. Un espace vectoriel normé serait séparable s'il contient un sous-ensemble dense optimale.

Pour $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace séparable, réfléxif, et son dual $L^p(\Omega)'$ est identifié avec $L^q(\Omega)$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. L'espace $L^1(\Omega)$ est un espace séparable, mais non réfléxif, et son dual $L^1(\Omega)'$ est identifié avec $L^\infty(\Omega)$. L'espace $L^\infty(\Omega)$ est, ni un espace séparable ni réfléxif, et son dual $L^\infty(\Omega)'$ est contient strictement dans $L^1(\Omega)$. Si

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega)\ (1 \leq i \leq n) \text{ avec } \frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \leq 1,\ 1 \leq p_i \leq \infty, \tag{1.17}$$

alors le produit de ces fonctions $f_i$ est tel que

$$f = f_1 f_2 \ldots f_n \in L^p(\Omega), \tag{1.18}$$

et de plus

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|f\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f\|_{L^{p_n}(\Omega)} \tag{1.19}$$

Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$, et nous avons d'ailleurs l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)},\ \text{où } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q},\ \ (0 < \alpha < 1). \tag{1.20}$$

Dans le cas particulier où $p = 2$, on obtient l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ qu'on munit du produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\mathrm{dx},\ \forall f, g \in L^2(\Omega). \tag{1.21}$$

Son espace dual $L^2(\Omega)'$ est identifié avec l'espace $L^2(\Omega)$ lui-même.

Nous pouvons de même définir les espaces $L^p_{loc}$ par

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} | f \in L^p(K)\ \forall K \subset \Omega, K \text{ compact}\}, \tag{1.22}$$

qui se comportent localement comme des espaces $L^p$, c-à-d, sur chaque sous-ensemble compact $K \subset \Omega$.

### 1.3.2 Les espaces de Sobolev d'ordre entier

Nous définissons maintenant les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ pour $1 \leq p < \infty$ et $m \in \mathbb{N}_0$, par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} | D^\alpha f \in L^p(\Omega) \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N, |\alpha| \leq m\}, \tag{1.23}$$

ou alternativement, par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} |\ \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty\}, \tag{1.24}$$

avec

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha|\leq m} \operatorname{supp\,ess}_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)|, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.25}$$

Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ sont réellement les espaces de Banach, à condition que les dérivées soient données dans le sens des distributions (section (1.4)). Si $m = 0$, alors on a

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty. \tag{1.26}$$

Pour $p = 2$ l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ devient un espace de Hilbert, et il est dénoté en particulier par

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega). \tag{1.27}$$

L'espace $H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha f(x)\overline{D^\alpha g(x)} \text{ dx} \quad \forall f, g \in H^m(\Omega), \tag{1.28}$$

et de la norme

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^2 \text{dx}\right)^{1/2} \quad \forall f \in H^m(\Omega). \tag{1.29}$$

On dit que $H^m(\Omega)$ est un espace de Sobolev d'ordre $m$. Les espaces de Sobolev d'ordre supérieur contiennent des éléments avec un degré plus élevé de régularité. Nous remarquons que si $f \in H^m(\Omega)$ alors $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega)$ pour $1 \leq i \leq N$.

En raison de la densité, nous pouvons définir maintenant l'espace $H_0^m(\Omega)$ comme la ferméture de $C_0^m(\Omega)$ avec la norme de (1.29), c-à-d,

$$H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^m(\Omega)}^{\|.\|_{H^m(\Omega)}}. \tag{1.30}$$

Nous remarquons que si le domaine $\Omega$ est assez régulier, alors l'espace $H^m(\Omega)$ peut être défini alternativement comme accomplissement de $C^\infty(\bar{\Omega})$ associé à la norme $\|\|H^m(\Omega)$, qui signifie que pour tout $f \in H^m(\Omega)$ il existe une suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{H^m(\Omega)} = 0. \tag{1.31}$$

D'autre part, on a les propriétés suivantes

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^m(\Omega) \subset H_0^l(\Omega) \subset L^2 \subset H^{-l}(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \;\; l \geq m, \tag{1.32}$$

D'une même manière comme pour les espaces de Sobolev localement définis, donnés par

$$H_{loc}^m(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}| f \in H^m(K) \; \forall K \subset \Omega, K\text{compact}\}, \tag{1.33}$$

qui sont définis comme les espaces $H^m$ sur chaque sous-ensemble compact $K$ de $\Omega$.

### 1.3.3 Les espaces de Sobolev d'ordre partiel

Les espaces de Sobolev peuvent être définis aussi pour des valeurs non-entières de $m$, (des ordres partiels notés par $s$). pour ceci nous considérons d'abord le cas particulier quand le domaine $\Omega$ est tout l'espace $\mathbb{R}^N$, dans ce cas les espaces de Sobolev d'ordre partiel sont définis aussi par transformée de Fourier (section 1.5). Pour une valeur réelle $s$ nous utilisons la norme

$$\|f\|_{H^s(R^N)} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s |\tilde{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \right)^{1/2}, \tag{1.34}$$

où $\tilde{f}$ dénote la transformée de Fourier de $f$. la fonction poids $(1+|\xi|^2)^{s/2}$ est connue sous le nom de potentiel de Bessel d'ordre $s$. L'expression (1.34) définit une norme équivalente à (1.29) dans $H^m(\mathbb{R}^N)$ si $s = m$, mais s'obtient aussi pour $s$ non-entier et même négative. Si $s$ est réel et positif, alors les espaces de Sobolev d'ordre partiel sont définis par

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^N) : \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} < \infty\}, \tag{1.35}$$

qui est équivalent à la définition donnée précédemment, quand $s = m$. Si nous permettons des valeurs négatives pour $s$, alors la définition (1.35) doit être prolongée pour admettre aussi des distributions tempérées dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ (section (1.4) et (1.5)). Ainsi en général, si $s \in \mathbb{R}$, alors les espaces de Sobolev d'ordre partiel sont définis par

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} < \infty\}. \tag{1.36}$$

Nous observons que l'espace de Sobolev $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace dual de $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Si nous considérons maintenant un sous-domain approprié $\Omega$ de $\mathbb{R}^N$, alors les espaces de Sobolev d'ordre partiel, pour $s \geq 0$, sont définis par

$$H^s(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} | \exists F \in H^s(\mathbb{R}^N) \text{ tel que } F|_\Omega = f\}. \tag{1.37}$$

et avez la norme

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} = \inf\{\|F\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} : F|_\Omega = f\}. \tag{1.38}$$

Nous remarquons que si $\Omega$ est un domaine non admissible, alors la nouvelle définition (1.37) n'est pas équivalente à la définition pour $s = m$.

Quand $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$, où pour tout $f \in C_0^\infty(\Omega)$ l'extension triviale par zéro $\tilde{f}$ à l'extérieur de $\Omega$ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, nous définissons l'espace $\tilde{H}^s(\Omega)$ pour $s \geq 0$ pour être le complément de $C_0^\infty(\Omega)$ avec la norme

$$\|f\|_{\tilde{H}^s(\Omega)} = \|\tilde{f}\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}, . \tag{1.39}$$

Cette définition implique que

$$\tilde{H}^s(\Omega) = \{f \in H^s(\mathbb{R}^N) : supp\ f \subset \bar{\Omega}\} \tag{1.40}$$

Nous remarquons que l'espace $\tilde{H}^s(\Omega)$ est aussi noté comme $H^s_{00}(\Omega)$, si $\Omega = \mathbb{R}^N$, alors les espaces $H^s$ et $\tilde{H}^s$ coincident, c-à-d,

$$\tilde{H}^s(\mathbb{R}^N) = H^s(\mathbb{R}^N). \tag{1.41}$$

Pour des ordres négatifs nous prenons que $H^{-s}(\Omega)$ est l'espace dual de $\tilde{H}^s(\Omega)$, c-à-d,

$$H^{-s}(\Omega) = \tilde{H}^s(\Omega)', \tag{1.42}$$

où la norme est définie au sens du produit de $L^2(\Omega)$, à savoir

$$\|f\|_{H^{-s}(\Omega)} = \sup_{0\neq\varphi\in\tilde{H}^s(\Omega)} \frac{|(f,\varphi)_{L^2(\Omega)}|}{\|\varphi\|_{\tilde{H}^s(\Omega)}}, \quad s > 0. \tag{1.43}$$

De la même manière, l'espace $\tilde{H}^{-s}(\Omega)$ est l'espace dual de $H^s(\Omega)$, c-à-d,

$$\tilde{H}^{-s}(\Omega) = H^s(\Omega)', \tag{1.44}$$

### 1.3.4 L'espace de trace de Fichera $H^s(\Gamma)$

On commence par le cas simple où $0 < s < 1$. On définit $\mathcal{H}^s(\Gamma)$ pour être la fermeture de

$$C^0_s(\Gamma) := \left\{\varphi \in C^0(\Gamma) |\ \|\varphi\|_{\mathcal{H}^s(\Gamma)} < \infty\right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\Gamma)} := \left\{\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} + \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n-1+2s}}\, \mathrm{d}\gamma_x \mathrm{d}\gamma_y\right\}^{1/2}. \tag{1.45}$$

De plus, $\mathcal{H}^s(\Gamma)$ est un espace de Hilbert équipé du produit

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{H}^s(\Gamma)} := \langle u, v\rangle_{L^2(\Gamma)} + \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{(u(x)-u(y))\overline{(v(x)-v(y))}}{|x-y|^{n-1+2s}}\, \mathrm{d}\gamma_x \mathrm{d}\gamma_y. \tag{1.46}$$

Pour définir $\mathcal{H}^s(\Gamma)$ pour $s \notin \mathbb{N},\ s > 0$, on écrit $s = m + \sigma$ où $-1/2 \leq \sigma < 1/2, m \in \mathbb{N}$, et de la même manière que précédement on remplace le produit scalaire (1.46) par

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{H}^s(\Gamma)} := \langle u, v\rangle_{\mathcal{H}^{[s]}(\Gamma)} + \sum_{|\alpha|=[s]} \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{(D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y))\overline{(D^\alpha v(x)-D^\alpha v(y))}}{|x-y|^{n-1+2(s-[s])}}\, \mathrm{d}\gamma_x \mathrm{d}\gamma_y, \tag{1.47}$$

où $[s] := \max\{l \in \mathbb{Z} |\ l \leq s\}$ représente la parenthèse Gaussienne. On définit le semi-norme associé par

$$|u|_{H^s(\Gamma)} := (\langle u, u\rangle_{H^s(\Gamma)})^{1/2}$$

sur $\tilde{C}^s_*(\bar{\Omega})$ qui est un sous espace de $C^m(\bar{\Omega})$ définie par

$$\tilde{C}^s_*(\bar{\Omega}) = \{u \in C^m(\bar{\Omega}) | |u|_s < \infty\}$$

### 1.3.5 Les injections des espaces de sobolev

C'est principalement les caractéristiques des injections des espaces de Sobolev (section (1.2)) qui rendent ces espaces utilisables dans l'analyse, et particulièrement dans l'étude des opérateurs différentiels et integraux. En connaissant les propriétés de trace d'un tel opérateur en termes d'espaces de Sobolev, par exemple, il peut être déterminé si l'opérateur est continu ou compact.

Dans $\mathbb{R}^N$ nous avons les injections continus

$$H^s(\mathbb{R}^N) \overset{c}{\hookrightarrow} H^t(\mathbb{R}^N) \quad \text{pour} \quad -\infty < t \leq s < \infty. \tag{1.48}$$

si $m \in \mathbb{N}_0$ et $0 \leq \alpha < 1$, alors on obtient que

$$H^s(\mathbb{R}^N) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^N) \;\; \text{pour} \;\; s > m + \alpha + \frac{N}{2}, \tag{1.49}$$

qui satisfaite aussi si $s = m + \alpha + \frac{N}{2}$ et $0 < \alpha < 1$.

Nous considérons maintenant un domaine fortement Lipschitzien $\Omega \in C^{0,1}$. Alors nous avons les injections compacts et continus

$$H^s(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} H^t(\Omega) \qquad \text{pour} \;\; -\infty < t < s < \infty, \tag{1.50}$$

$$\tilde{H}^s(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} \tilde{H}^t(\Omega) \qquad \text{pour} \;\; -\infty < t < s < \infty, \tag{1.51}$$

$$H^s(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \text{pour } s > m + \alpha - \tfrac{N}{2}, 0 \leq \alpha < 1, m \in \mathbb{N}_0. \tag{1.52}$$

Nous avons aussi l'injection continu

$$H^s(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}) \;\; \textit{pour} \;\; s > m + \alpha - \frac{N}{2}, 0 < \alpha < 1, m \in \mathbb{N}_0. \tag{1.53}$$

soit $\Gamma$ une frontière de classe $C^{k,1}, k \in \mathbb{N}_0$, et soit $\mid t \mid, \mid s \mid \leq k + \frac{1}{2}$. Alors nous avons les injections compacts

$$H^s(\Gamma) \overset{comp}{\hookrightarrow} H^t(\Gamma) \qquad \text{pour } t < s, \tag{1.54}$$

$$H^s(\Gamma) \overset{comp}{\hookrightarrow} C^{m,\alpha}(\Gamma) \quad \text{pour } s > m + \alpha + \tfrac{N}{2} - \tfrac{1}{2}, 0 \leq \alpha < 1, m \in \mathbb{N}_0. \tag{1.55}$$

## 1.4 Théorie des distributions

### 1.4.1 Définition d'une distribution

Soit $\Omega$ un domaine dans $\mathbb{R}^N$. On note comme fonctions d'essai dans $\Omega$ les éléments de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\Omega$. Le support d'une fonction est la fermèture de l'ensemble des points où la fonction s'annule pas. L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est aussi noté par $\mathcal{D}(\Omega)$, c-à-d,

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi/\varphi \in C^\infty(\Omega), supp\varphi \Subset \Omega\} = C_0^\infty(\Omega) \tag{1.56}$$

Un exemple classique d'une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est donné par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{(|x|^2-1)}) & si \ \mid x \mid < 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (1.57)$$

La densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ assure que la classe des fonctions test est suffisament large.

On considère d'autre fonctions test, les fonctions à décroissance rapide, plus précésement, soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$q_h(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R} \quad |\alpha|\leq h} (1+ \mid x \mid^2)^h \mid D^\alpha \varphi(x) \mid \tag{1.58}$$

Alors on note par $\mathscr{S}(\Omega)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide qui est donné par

$$\mathscr{S}(\Omega) = \{\varphi/\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \forall h = 1, 2, \cdots \ q_h(\varphi) < \infty\}. \tag{1.59}$$

l'espace dual de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des distributions tempérées qui est noté par $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Nous disons que la suite $\{\varphi_n\}$ des fonctions test est convergente vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe un ensemble compact $K \subset \Omega$ tel que $supp(\varphi_n \varphi) \subset K$ pour tout $n$, et si pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$,

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha \varphi_n(x) = D^\alpha \varphi(x), \text{uniformément sur } \mathbb{K}. \tag{1.60}$$

Nous définissons une fonctionnelle linéaire et continue $T$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ comme une application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$), noté par $\langle T, \varphi\rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, qui vérifiée

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle = \alpha\langle T, \varphi_1\rangle + \beta\langle T, \varphi_2\rangle \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.61}$$

et telle que

$$\varphi_n \to 0 \ \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow \langle T, \varphi_n\rangle \to 0 \ \ dans \ \mathbb{K} \tag{1.62}$$

Cette fonctionnelle linéaire et continue s'appelle une distribution ou une fonction généralisée. L'espace des distributions **(de Schwartz)** est noté par $\mathcal{D}'(\Omega)$ et correspond à l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$. Ainsi, la forme bilinéaire $\langle ., .\rangle : \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ représente le produit de dualité entre les deux espaces. En particulier, quand le corps $\mathbb{K}$ est pris comme $\mathbb{C}$, alors le produit de dualité doit être considéré comme une forme séquilinéaire et les distributions en tant que functionnelles anti-linéaires.

L'espace vectoriel et les opérations de convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, si $T, S, T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, peuvent être caractérisés par

$$\langle \alpha T + \beta S, \varphi\rangle = \alpha\langle T, \varphi\rangle + \beta\langle S, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.63}$$

et

$$T_n \to T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \Longleftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \quad \text{dans } \mathbb{K} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.64}$$

Les distributions peuvent être aussi multipliées par des fonctions indéfiniment différentiables pour former des nouvelles distributions. si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\eta \in C^\infty(\Omega)$, alors le produit $\eta T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est défini par

$$\langle \eta T, \varphi \rangle = \langle T, \eta \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.65}$$

On remarque, cependant, que le produit de deux distributions n'est pas bien défini en général.

Chaque fonction localement intégrable $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ définit une distribution

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x) \; \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.66}$$

La distribution $f$ serait produite par la fonction $f$. Une distribution qui est produite par une fonction localement intégrable s'appelle une distribution régulière. Toutes autres distributions s'appellent singulières. Ceci propose la notation

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega T(x)\varphi(x) \; \mathrm{dx} \tag{1.67}$$

pour une fonctionnelle linéaire continue $T$ même lorsqu'elle n'est pas une fonction de $L^1_{loc}$.

### 1.4.2 La fonction de Dirac

La fonction de Dirac $\delta$, qui n'est pas à proprement dit une fonction, était présentée par le physicien théorique britannique **Paul Adrien Maurice Dirac (1902 à 1984)**. Elle s'annule partout sauf à l'origine, où sa valeur est infinie, et de sorte que son intégrale est l'unité. Elle est donc définie par

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \tag{1.68}$$

Et à la propriété

$$\int_\Omega \delta(x) \; \mathrm{d}x = 1 \quad si \;\; 0 \in \Omega. \tag{1.69}$$

Il existe aucune fonction avec ces propriétés. Cependant, la fonction de Dirac est bien définie comme distribution, dans ce cas elle associe à chaque fonction d'essai $\varphi$ sa valeur à l'origine. Supposant que $0 \in \Omega$, la fonction de Dirac est définie comme distribution $\delta$ qui satisfait

$$\int_\Omega \delta(x)\varphi(x) \; \mathrm{dx} = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.70}$$

La fonctionnelle linéaire $\delta$ est définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \tag{1.71}$$

### 1.4.3 La convolution

Nous définissons la convolution $f * g$ de deux fonctions $f$ et $g$ de $\mathbb{R}^N$ à $\mathbb{K}$, s'il existe, comme

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\ \mathrm{dy} = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\ \mathrm{dy}. \tag{1.72}$$

La convolution a la propriété de régulariser une fonction en faisant la moyenne, et est une opération commutative, c-à-d,

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x). \tag{1.73}$$

La convolution est bien définie si $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Elle peut être encore prouvée que la convolution $L^p(\mathbb{R}^N) \times L^q(\mathbb{R}^N)$ est bien définie pour $p, q, r \geq 1$ et telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$. Dans ce cas, si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ , alors $f * g$ est dans $L^r(\mathbb{R}^N)$. D'ailleurs, la notion de la convolution peut être prolongée au cadre des distributions, dans ce cas les convolutions $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) * \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) * \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \mathcal{E}(\mathbb{R}^N) * \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et même $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) * \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) * \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ soyent bien définis. Par $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ nous notons le sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ de ces distributions qui ont un support compact, qui est le dual de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N) = C^\infty(\mathbb{R}^N)$. On peut montrer que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ est aussi un sous-espace linéaire de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Les inclusions sont telles que

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{E}', \mathcal{S} \subset \mathcal{S}', \mathcal{E} \subset \mathcal{D}', \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}, et\ \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'. \tag{1.74}$$

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors la convolution $T * \varphi$ est définie par

$$T(x) * \varphi(x) = \langle T(y), \varphi(x-y)\rangle = \langle T(x-y), \varphi(y)\rangle. \tag{1.75}$$

si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\psi_T(y) = \langle T(x), \varphi(x+y)\rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{1.76}$$

$$\psi_S(y) = \langle S(x), \varphi(x+y)\rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \tag{1.77}$$

et pour cette raison la convolution $T * S$ est définie par

$$\langle S(x) * T(x), \varphi(x)\rangle = \langle S(y), \langle T(x), \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle T(y), \langle S(x), \varphi(x+y)\rangle\rangle \tag{1.78}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ une distribution. Alors la fonction de Dirac $\delta$ agit comme un élément neutre pour la convolution, c-à-d

$$\delta * T = T * \delta = T. \tag{1.79}$$

La fonction $\delta$ permet aussi de décaler des arguments au sense de

$$\delta_a(x) * T(x) = T(x) * \delta_a(x) = T(x-a). \tag{1.80}$$

La convolution a la propriété de distribuer les dérivés parmi ses membres. Ainsi, si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\{S * T\} = \frac{\partial S}{\partial x_j} * T = S * \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad j \in \{1, 2, \cdots, N\}, \tag{1.81}$$

et, plus généralement,

$$D^\alpha\{S * T\} = D^\alpha S * T = S * D^\alpha T, \quad \alpha \in \mathbb{N}^{N_0}. \tag{1.82}$$

## 1.5 Transformation de Fourier

### 1.5.1 Définition de transformée de Fourier

Nous définissons la transformée de Fourier directe $\widehat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ d'une fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ comme

$$\widehat{f}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \exp^{-ix\tau} \; \mathrm{dx}, \quad \tau \in \mathbb{R}^N, \tag{1.83}$$

et son transformée de Fourier inverse $f = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\tau) \exp^{ix\tau} \; \mathrm{d}\tau, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.84}$$

Les transformées de Fourier (1.83) et (1.84) peuvent être utilisées aussi pour une classe plus générale des fonctions $f$, comme pour des fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ ou même pour des distributions tempérées dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, le dual de l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)/x^\beta D^\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N\}, \tag{1.85}$$

ou $x^\beta = (x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_N^{\beta_N})$ pour un multi-indice $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a la propriété importante d'être invariable sous la transformée de Fourier, c-à-d, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nous avons en particulier l'inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$, et ainsi $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. La convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est la même que pour les distributions (section 1.4), mais en ce qui concerne des fonctions test dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. En effet, si $T_n, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, alors

$$T_n \to T \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \Longleftrightarrow \langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \text{ dans } \mathbb{K} \; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \tag{1.86}$$

### 1.5.2 Quelques propriétés des transformées de Fourier

Dans ce qui suit, on considère les distributions arbitraires $S, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et les constantes arbitraires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , $a, b \in \mathbb{R}^N$. On écrit $T(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{T}(\tau)$ pour noté que $\widehat{T}(\tau)$ est la transformé de Fourier de $T(x)$, c-à-d, $\widehat{T} = \mathcal{F}\{T\}$. Alors

$$\alpha S(x) + \beta T(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha\widehat{S}(\tau) + \beta\widehat{T}(\tau). \tag{1.87}$$

$$\widehat{T}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} T(-\tau). \tag{1.88}$$

$$T(x-b) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp^{-ib.\tau}\widehat{T}(\tau), \tag{1.89}$$

$$\exp^{ib.x} T(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{T}(\tau - b), \tag{1.90}$$

$$T(x) * S(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^{N/2}\widehat{T}(\xi)\widehat{S}(\xi), \tag{1.91}$$

$$(2\pi)^{N/2} T(x)S(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{T}(\xi) * \widehat{S}(\xi). \tag{1.92}$$

et aussi

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{T\}\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{T\}\} = T \\ \mathcal{F}\{D^a u\} = (i\tau)^a \mathcal{F}\{u\}, & u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \forall a \in \mathbb{R}^N, \\ D^a\mathcal{F}\{u\} = \mathcal{F}\{(-ix)^a u\}, & u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \forall a \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.93}$$

### 1.5.3 Quellques transformées de Fourier paires

Nous considérons maintenant quelques transformées de Fourier paires, définies sur $\mathbb{R}^N$, qui utilisent les définitions (1.83) et (1.84). Pour la fonction de Dirac $\delta$ on obtient que

$$\delta(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}, \tag{1.94}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\xi). \tag{1.95}$$

La fonction exponentielle complexe, pour $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbf{N}}$, satisfaites

$$e^{ia.x} \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^{N/2}\delta(\xi - a), \tag{1.96}$$

$$(2\pi)^{N/2}\delta(x+a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{ia.\xi}. \tag{1.97}$$

Pour la fonction cosinus nous avons que

$$\cos(a.x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{(2\pi)^{N/2}}{2}(\delta(\xi - a) + \delta(\xi + a)), \tag{1.98}$$

$$\frac{(2\pi)^{N/2}}{2}(\delta(\xi - a) + \delta(\xi + a)) \xrightarrow{\mathcal{F}} \cos(a.\xi), \tag{1.99}$$

et pour la fonction de sinus nous avons que

$$\sin(a.x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{(2\pi)^{N/2}}{2i}(\delta(\xi - a) - \delta(\xi + a)), \tag{1.100}$$

$$\frac{(2\pi)^{N/2}}{2i}(\delta(\xi + a) - \delta(\xi - a)) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sin(a.\xi). \tag{1.101}$$

En obtenant, pour $n \in \mathbb{N}_0$ et $j \in \{1, 2, \cdots, N\}$,

$$x_j^n \xrightarrow{\mathcal{F}} i^n (2\pi)^{N/2}\frac{\partial^n \delta}{\partial \xi_j^n}(\xi), \tag{1.102}$$

$$(-i)^n (2\pi)^{N/2}\frac{\partial^n \delta}{\partial \xi_j^n}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \xi_j^n, \tag{1.103}$$

et, pour le cas général quand $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ est un multi-indice, on a

$$x^\alpha \xrightarrow{\mathcal{F}} i^{|\alpha|}(2\pi)^{N/2}D^\alpha\delta(\xi), \tag{1.104}$$
$$(-i)^{|\alpha|}(2\pi)^{N/2}D^\alpha\delta(\xi) \xrightarrow{\mathcal{F}} \xi^\alpha. \tag{1.105}$$

# 1.6 Fonction de Green et solution élémentaire

## 1.6.1 La solution élémentaire

Techniquement, une solution élémentaire pour un opérateur différentiel $\mathcal{L}$, linéaire, avec des coefficients constants, et défini sur l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, est une distribution $E$ qui satisfait

$$\mathcal{L}E = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \tag{1.106}$$

où $\delta$ est la fonction de Dirac, centrée à l'origine. L'intérét principal d'une telle solution élémentaire a situé dans le fait que si la convolution a un sens, alors la solution de

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \tag{1.107}$$

pour une fonction donnée $f$, est donnée par

$$u = E * f. \tag{1.108}$$

En fait, en raison de linéarité de $\mathcal{L}$, puisque $E$ est une solution élémentaire, et puisque $\delta$ est l'élément neutre de la convolution, nous avons

$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}\{E * f\} = \mathcal{L}E * f = \delta * f = f. \tag{1.109}$$

Nous remarquons que de $E$ d'autres solutions peuvent être construites, dans le sens des distributions, quand les dérivées de $\delta$ apparaissent dans le second membre de l'équation. Par exemple, la solution de

$$\mathcal{L}F = \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \tag{1.110}$$

est donné par

$$F = E * \frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \frac{\partial E}{\partial x_i} * \delta = \frac{\partial E}{\partial x_i}. \tag{1.111}$$

## 1.6.2 La fonction de Green

Une fonction de Green d'un opérateur différentiel partiel linéaire $\mathcal{L}_y$ avec des conditions de frontière homogènes, des coefficients constants par rapport à $y$, et défini sur l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, est une distribution $G$ tel que

$$\mathcal{L}_y\{G(x,y)\} = \delta_x(y) \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \tag{1.112}$$

où $\delta_x(y) = \delta(y-x)$. Ainsi elle vérifie $G(x,y) = \mathcal{L}_y^{-1}\{\delta_x(y)\}$.
La solution du problème aux limites non homogène

$$\mathcal{L}_x\{u(x)\} = f(x) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \tag{1.113}$$

si la convolution a un sens, est donnée par

$$u(x) = G(x,y) * f(y), \tag{1.114}$$

où $G$ est symétrique , c-à-d,

$$G(x,y) = G(y,x). \tag{1.115}$$

Comme dans la solution élémentaire, nous prenons

$$\mathcal{L}_x\{u(x)\} = \mathcal{L}_x\{G(x,y) * f(y)\} = \delta_x(y) * f(y) = f(x). \tag{1.116}$$

Nous observons que la fonction de Green de l'espace libre ou de tout l'espace, c-à-d, sans conditions de frontière, est liée à la solution élémentaire par la relation

$$G(x,y) = E(x-y) = E(y-x). \tag{1.117}$$

### 1.6.3 Quellques fonctions de Green dans des espaces libres

Nous considérons maintenant quelques exemples de fonction de Green dans des espaces libres.

1. La fonction de Green pour l'équation de Laplace qui satisfait, dans le sense des distributions,
$$\Delta_y G(x,y) = \delta_x(y) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$
est donnée par
$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \mid y-x \mid \quad \text{pour } N=2, \tag{1.118}$$

2. La fonction de Green pour l'équation du Bi-Laplacien qui satisfait, dans le sense des distributions,
$$\Delta_y^2 G(x,y) = \delta_x(y) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$
est donnée par
$$G(x,y) = \frac{1}{8\pi} |y-x|^2 \ln \mid y-x \mid, \text{ pour } N=2, \tag{1.119}$$

## 1.7 Equation aux dérivées partielles

**Définition 1.1.** (E.D.P)
Une équation aux dérivées partielles (E.D.P) du $1^{er}$ ordre est une relation entre une variable indépendante $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, la fonction inconnue $u = u(x)$ et leurs dérivées partielles, c'est à dire de la forme

$$F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{1.120}$$

**Définition 1.2.** (E.D.P Linéaire)
Une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre $m$ dans $\mathbb{R}^N$ est une équation de la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f, \tag{1.121}$$

où les fonctions $a_\alpha$ sont des coéfficients ne dépend que de $x$.

**Définition 1.3.** (Opérateur aux dérivées partielles linéaire)
On appelle opérateur aux dérivées partielles linéaire tout opérateur $A$ de la forme,

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{1.122}$$

L'équation caractéristique, quand à elle, est donnée par

$$A_m(x, \tau) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \tau^\alpha \neq 0. \tag{1.123}$$

Maintenant, $A(x, D)$ est elliptique dans $\Omega$, si pour tout $x_0 \in \Omega$, on a

$$\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \tau^\alpha \geq 0, \text{ pour tout } \tau \neq 0. \tag{1.124}$$

Il est fortement elliptique, s'il existe une constante $C$ telle que

$$| \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \tau^\alpha | \geq C |\tau|^{2k} \text{ , pour tout } x_0 \in \Omega \ k > 0. \tag{1.125}$$

## 1.8 Les opérateurs intégraux

### 1.8.1 Définitions

**Définition 1.4.** (Opérateur)
On appelle opérateur $T$ sur $\Omega$ toute application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

D'après le théorème des noyaux de **schwartz** [27], étant donné un opérateur $T$ sur $\Omega$, il existe une distribution unique $\mathcal{K} \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ telle que

$$\langle Tu, v \rangle = \langle \mathcal{K}, v \otimes u \rangle, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.126}$$

on dit que $\mathcal{K}$ est le noyau distributionnel de $T$, ou bien, $T$ est l'opérateur de noyau $\mathcal{K}$.

**Définition 1.5.** (Opérateur intégral)
Un opérateur $T$ sur $\Omega$ est dit intégral si son noyau $\mathcal{K}$ est la distribution associée à une fonction $K \in L^1_{loc}(\Omega)$.

La théorie des opérateurs intégraux s'identifie à celle de l'intégrale. Etant donné $K \in L^1_{loc}(\Omega \times \Omega)$, on peut définir, par application du théorème de **Fubini** [100], la fonction $Tu \in L^1_{loc}(\Omega \times \Omega)$ par

$$Tu(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)\ \mathrm{d}y. \tag{1.127}$$

**Définition 1.6.** (Opérateur de Fredholm)

- Soient $E, F$ deux espaces de Banach. Un opérateur $T$ linéaire, continu de $E$ dans $F$, est appelé opérateur de **Fredholm** si la dimension de son noyau et la codimension de son image sont finies.
- Le nombre $\mathrm{Ind}T = \dim\ker T - \mathrm{Codim}\ \ker\ T$ est appelé l'indice de $T$.

**Théorème 1.7.** *Soit $T$ un opérateur linéaire, continu de $E$ dans $F$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *$T$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.*
2. *il y a un opérateur linéaire $K$, continu de $E$ dans $F$, compact tel que $T+K$ est inversible.*

***Preuve.*** Voir [91]. ■

**Définition 1.8.** (Opérateur de Nemytskii)
Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction de Carathédory si l'application $(x, u(x)) \longrightarrow f(x, u(x))$ est continue en $u$ pour tout $x \in \Omega$ et mesurable en $x$ pour tout $u \in \mathbb{R}^m$.

L'opérateur $N_f u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$(N_f u)(x) = f(x, u(x))$$

est appelé opérateur de Nemytskii.

**Théorème 1.9.** *(Bornitude de l'opérateur de Nemytskii)*
*Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $p \in ]1, +\infty[$, et soit $g \in L^q(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Supposons que $f$ est une fonction de Carathéodory et que, pour quelques constantes $C$ et pour tout $x$ et $u$,*

$$|f(x,u)| \leq C|u|^{p-1} + g(x).$$

*Alors l'opérateur de Nemytskii $N_f$ est borné et continu de $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ dans $L^q(\Omega, \mathbb{R})$.*

**Définition 1.10.** (Opérateur d'Hammerstein)
Etant donnée une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant la condition de Carathéodory.

L'opérateur défini par

$$Au(x) = \int_\Omega K(x,y)f(y,u(y))\mathrm{d}y, \tag{1.128}$$

est appelé opérateur intégral non linéaire de type Hammerstein. Cet opérateur $A$ est une composition de l'opérateur intégral de Fredholm à noyau $K$ et de l'opérateur de Nemytskii $N_f$ associé à $f$, c-à-d,

$$A = TN_f.$$

### 1.8.2 Noyaux intégraux

Le caractère d'une équation intégrale est déterminé par les propriétés de son noyau qui est de différents types. En effet,

- Si le noyau $K(x,t)$ est continu dans $\Omega$ ou, au moins, si les discontinuités du noyau sont telles que

  $$\int_\Omega \int_\Omega \mid K^2(x,t) \mid \ \mathrm{dx}\ \mathrm{dt} < \infty,$$

  alors les équations données par

  $$Tu(x) = \int_\Omega k(x,t)u(y)\ \mathrm{dy} = f(x), \tag{1.129}$$

  où $u$ est l'inconnue et $f(x), k(x,y)$ des fonctions données, sont dites équations de type de Fredholm de première espèce. Ainsi l'équation de Fredholm de deuxième espèce est définie par

  $$u(x) - Tu(x) = u(x) - \int_\Omega k(x,t)u(y)\ \mathrm{dy} = f(x). \tag{1.130}$$

- Si le noyau $k(x,y) = \frac{H(x,y)}{|x-y|^\alpha}$ où $H(x,y)$ est borné et $0 < \alpha < 1$ , alors (1.129) et (1.130) sont des équations intégrales avec une singularité faible.

- Si le noyau $k(x,y) = \frac{A(x,y)}{|x-y|}$ où $A(x,y)$ est une fonction différentiable en $x$ et $y$, alors

  $$\int_\Omega k(x,y)\ \mathrm{d}y$$

  diverge.

**Définition 1.11.** (noyau faiblement singulier)
On appelle noyau faiblement singulier la fonction $K$ continue sur $\Omega\times\Omega \ \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que,

$$\forall x,\ y\in\Omega,\ x\neq y, \exists M>0, |k(x,y)| < \frac{M}{|x-y|^{n-\alpha}},\ 0<\alpha\leq n. \tag{1.131}$$

**Proposition 1.12.** *[64]*
*Tout opérateur intégral $T$ de $C(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

La théorie de Fredholm est valable uniquement pour les équations de type de Fredholm. Elle s'applique pas pour les équations singulières et pour d'autres équations de noyau non intégrable [67], [100].

## 1.9 Les opérateurs pseudo-différentiels

### 1.9.1 Opérateur différentiel

Un opérateur différentiel linéaire d'ordre $m$ s'écrit comme

$$\mathscr{D} = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1.132}$$

où les $a_\alpha(x)$ appelées *coéfficients* de l'opérateur $\mathscr{D}$, sont des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

### 1.9.2 Opérateur pseudo-différentiel

les opérateurs pseudo-différentiels peuvent être considérés comme une généralisation des opérateurs différentiels. En effet, soit l'opérateur différentiel (1.132) exprimons le, en fonction de la transformée de Fourier et son inverse, comme

$$\begin{aligned} A(x,D)u(x) &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\tau^\alpha \mathcal{F}\{u\} \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\tau} a(x,\tau)\mathcal{F}\{u\}(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{1.133}$$

avec $a(x,\tau) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\tau^\alpha, \tau \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$, est un élément de la classe des symboles $S^m(\Omega\times \mathbb{R}^N)$.

### 1.9.3 Classe des symboles d'ordre $m$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, et $a(x,\tau)$ une fonction de $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^N)$. Soit $K\subset\Omega$ un copmact et $m$ un nombre réel quelconque. La classe $S^m(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ des symboles d'ordre $m$ est définie par

$$S^m(\Omega\times\mathbb{R}^N) = \left\{a(x,\tau)/ \mid \partial_\tau^\alpha \partial_x^\beta a(x,\tau) \mid\leq C_{\alpha,\beta,K}(1+|\tau|)^{m-|\alpha|}\right\}, \tag{1.134}$$

pour tout $x\in K, \tau\in\mathbb{R}^N$, et pour tout multi-indice $\alpha,\beta$. les $C_{\alpha,\beta,K}$ sont des constantes, qui peuvent dépendre de $\alpha,\beta$ et $K$.

L'espace $S^m(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ est un espace de Fréchet muni des semi-normes

$$p^{(m)}_{\alpha,\beta,K}(a) = \sup_{x\in K t\in\mathbb{R}^N} (1+|\tau|)^{|\alpha|-m} \mid \partial_\tau^\alpha \partial_x^\beta a(x,\tau) \mid, \tag{1.135}$$

ces éléments sont appelés les fonctions apmlitudes d'ordre $m$.

### 1.9.4 Dévelopement asymptotique des éléments de la classe des symboles

Le dévelopement asymptotique des éléments de $S^m$ revient à donner un sens à une serie formelle d'éléments $a_j \in S^{m_j}$ tendant vers $-\infty$. On pose $S^{\infty} = \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m$ et $S^{-\infty} = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m$.

On a le résultat suivant

**Théorème 1.13.** *Soit $a_j \in S^{m_j}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, pour $j = 0, 1, 2, \cdots$ et $m_j \longrightarrow -\infty$ pour $j \longrightarrow \infty$. Alors*

1. *Il exist un élément $a \in S^m(\Omega \times \mathbb{R}^N), m = \max\{m_j : j \geq 0\}$ tel que*

$$\text{ordre}(a - \sum_{j=0}^{k} a_j) \longrightarrow -\infty, k \to \infty. \tag{1.136}$$

2. *$a$ est uniquement déterminé modulo $S^{-\infty}(\Omega)$ par la famille dénombrable $(a_j)_{j\geq 0}$.*

***Preuve.***

1. Soit $\rho_j$ , $j = 1, 2, \cdots$, une suite de nombres positifs, qui tend vers l'infini, quand $j \longrightarrow \infty$. Soit $\mathcal{X}$ une fonction vérifie

$$\mathcal{X}(\tau) = 0, \quad \text{pour} \quad |\tau| \leq \frac{1}{2}, \tag{1.137}$$
$$\mathcal{X}(\tau) = 1, \quad \text{pour} \quad |\tau| \geq 1. \tag{1.138}$$

et

$$a(x, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{X}(\frac{\tau}{\rho_j}) a_j(x, \tau). \tag{1.139}$$

Notons tout d'abord, que $\mathcal{X}(\frac{\tau}{\rho_j}) \in S_0(\Omega)$ uniformément pour $\rho \geq 1$. En effet, on a

$$D_\tau^\alpha \mathcal{X}(\frac{\tau}{\rho}) = (D_\tau^\alpha \mathcal{X})(\frac{\tau}{\rho})\rho^{-|\alpha|}, \tag{1.140}$$

et comme $|\tau| \leq \rho \leq 2|\tau|$ pour $\tau \in \text{supp } D_\tau^\alpha \mathcal{X}$ $(\alpha \neq 0)$, alors

$$| D_\tau^\alpha \mathcal{X}(\frac{\tau}{\rho}) | \leq C_\alpha (1 + |\tau|)^{-|\alpha|}, \tag{1.141}$$

avec $C_\alpha = C^{te}$.

Soit maintenant $k_h$, $h = 0, 1, 2, \cdots$, une suite exhaustive de copmacts de $\Omega$, avec $\bar{k}_h \subset k_{h+1}$ pour tout $h$ et $\bigcup_{h=0}^{\infty} k_h = \Omega$. Alors pour certain $C_j > 0$, on a

$$| D_x^\alpha D_\tau^\beta \mathcal{X}(\frac{\tau}{\rho}) a_j(x, \tau)) | \leq C_j (1 + |\tau|)^{m_j - |\alpha|}, \tag{1.142}$$

pour tout $x \in \bar{k}_i$ et $|\alpha|+|\beta|+i \leq j, \rho \geq 1$. Dautre part, en supposant que $m_{j+1} < m_j$ pour tout $j$, on peut écrire

$$\begin{aligned} C_j(1+|\tau|)^{m_j} &= C_j(1+|\tau|)^{m_j-1} C_j(1+|\tau|)^{m_j-m_{j-1}} \\ &< 2^{-j} C_j(1+|\tau|)^{m_{j-1}}, \end{aligned} \tag{1.143}$$

pour $|\tau|$ suffisament large. Or,

$$D_x^\beta D_\tau^\alpha \mathcal{X}(\frac{\tau}{\rho}) a_j(x,\tau) = 0, \tag{1.144}$$

pour $|\tau| \leq \frac{\rho}{2}$ . Et Pour $\rho = \rho_j$ est suffisament large, on obtient que

$$| D_x^\beta D_\tau^\alpha \mathcal{X}(\frac{\tau}{\rho}) a_j(x,\tau) | \leq 2^{-j}(1+|\tau|)^{m_{j-1}-|\alpha|}. \tag{1.145}$$

D'où la convergence de (1.139).

De la même manière, pour ses dérivées, on obtient que

$$| D_x^\beta D_\tau^\alpha \left( \sum_{j=r+1}^{\infty} \mathcal{X}(\frac{\tau}{\rho_j}) a_j(x,\tau) \right) | \leq 2^{-r}(1+|\tau|)^{m_r-|\alpha|}. \tag{1.146}$$

Alors

$$a - \sum_{j=0}^{r} a_j \in S^{m_r},$$

d'où le résultat. ■

2. L'unicité est une conséquence immédiate de la définition des sommes asymptotiques.

La somme formelle $\sum_j a_j$ est appellée dévelopement asymptotique de $a$. On note

$$a \approx \sum_{j=0}^{\infty} a_j. \tag{1.147}$$

**Définition 1.14.** On note par $S^m_{loc}(\Omega)$, l'espace des fonctions $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ telle que $a - \sum_j a_j$, où les $a_j(x,\tau)$ sont homogènes en $\tau$, d'ordre $m-j$ pour $|\tau| = C^{te}$, $m = \max_{j\in\mathbb{N}}\{m-j\}$.

**Définition 1.15.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $\Gamma \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ . Une fonction $\phi \in C^\infty(\Gamma)$ est appelée fonction phase si elle possède les propriées suivantes

- i) $\phi(x,t\tau) = t\phi(x,\tau)$, pour tout $t>0$, $(x,\tau)\in\Gamma$.
- ii) $\sum_{i=1}^N | \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x,\tau) |^2 + \sum_{j=1}^N | \frac{\partial\phi}{\partial \tau_j}(x,\tau) |^2 \neq 0$, pour tout $(x,\tau)\in\Gamma$.

Maintenant, en explicitant la transformée de Fourier dans (1.122) on obtient une intégrale oscillante dépendant du paramètre $x \in \Omega$ [27].

On veut que ces intégrales oscillantes possèdent les propriétés de stabilité des opérateurs différentiels pour les opérateurs d'addition, transformation, de coposition, etc...

Ainsi les opérateurs pseudo-différentiels forment une classe d'opérateurs plus générale que (1.133), où le polynome $a(x,\tau)$, sera remplacé par une amplitude quelconque appartenant à $S(\Omega\times\Omega)$. D'où la

**Définition 1.16.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. On appel opérateur pseudo-différentiel $(O.\psi.D)$ de degré $m$ dans $\Omega$, un opérateur intégrale $P$ associé à la phase

$$\phi(x,y,\tau) = (x-y)\tau \ , \quad (x,y,\tau) \in \Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^N, \tag{1.148}$$

et à une amplitude $P(x,y,\tau) \in S^m(\Omega\times\Omega)$.

On note par $L^m(\Omega)$, l'espace des $(O.\psi.D)$ de degré $m$ dans $\Omega$ et on écrit

$$Pu(x) = \int\!\!\int e^{i(x-y)\tau} p(x,y,\tau) \ \mathrm{d}y\mathrm{d}\tau, \ \ u \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.149}$$

Soient $L(\Omega) = \bigcup L^m(\Omega)$ et $L^{-\infty}(\Omega) = \bigcap L^m(\Omega)$ . Les élément de $L(\Omega)$ sont les opérateurs pseudo-différentiels standards dans $\Omega$. Tout opérateur pseudo-différentiel $P$ est continu de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$ et peut se prolonger en un opérateur continu de $\mathcal{E}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ [27]. Dautre part on a la

**Proposition 1.17.** *Chaque opérateur pseudo-différentiel $P$, dans $L^{-\infty}(\Omega)$, est un opérateur régularisant.*

***Preuve.***
Voir [27]. ■

**Définition 1.18.** Un opérateur $P \in L^m(\Omega)$ est dit classique, si $p(x,\tau) \in S^m_{loc}(\Omega)$. On note dans ce cas $P \in L^m_{loc}(\Omega)$.

**Définition 1.19.** Soit $S^m_0(\Omega)$ l'espace quotient $S^m(\Omega)/S^\infty(\Omega)$. Alors les éléments de $S^m_0(\Omega)$ sont appelés les symboles complets de degré $m$ dans $\Omega$.

### 1.9.5 Symbole principale

Chaque élément de l'espace $S^m(\Omega)/S^{m-1}(\Omega)$ est appelé le symbole principale, qui représente la partie d'ordre le plus èlvée dans le dévelopement asymptotique du symbole complet.

**Théorème 1.20.** *Soit $P$ un opérateur propre de $L^m(\Omega)$. Alors, il exist $p \in S^m(\Omega)$ unique tel que*

$$Pu(x) = \int e^{ix\tau} p(x,\tau)\mathcal{F}\{u\}(\tau) \ \mathrm{d}\tau. \tag{1.150}$$

*de plus, si $a(x,y,\tau)$ est une amplitude pour $P$, on a alors*

$$p(x,\tau) \approx \sum_\alpha \frac{1}{a!} D^\alpha_\tau D^\alpha_y a(x,y,\tau) \mid_{y=x} \tag{1.151}$$

***Preuve.*** Voir [80]. ■

**Théorème 1.21.** *Soit $P$ un opérateur linéaire, continu de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$. Alors $P \in L^m(\Omega)$ si et seulement si pour tout $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a*

$$e^{-ix.\tau}p(f.e^{ix.\tau}) \in S^m(\Omega). \tag{1.152}$$

***Preuve.*** Soit $(\rho_j)$ une partition de l'unité sur $\Omega$ avec des fonctions $\rho_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ et soit $\beta_j$ des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$, avec $\beta_j = 1$ sur *supp* $\rho_j$. On a donc

$$(\rho_j u)(x) = \int e^{ix\tau}\mathcal{F}\{\rho_j u\}(\tau)\mathrm{d}\tau = \int \beta_j(x)e^{ix\tau}\mathcal{F}\{\rho_j u\}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.153}$$

et comme $P$ est continu alors

$$\begin{aligned} P(\rho_j u)(x) &= \int e^{ix\tau}p_j(x,\tau)\mathcal{F}\{\rho_j u\}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int\int e^{i(x-y)\tau}p_j(x,\tau)\rho_j(y)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{1.154}$$

où

$$\rho_j(x,\tau) = e^{-ix\tau}p(\beta_j(x)e^{ix\tau}) \in S^m(\Omega). \tag{1.155}$$

et puisque $u = \sum_j \rho_j u$, on obtien que

$$Pu(x) = \int\int e^{i(x-y)\tau}p(x,y,\tau)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau, \tag{1.156}$$

où l'amplitude $p(x,y,\tau) \in S^m(\Omega\times\Omega)$ car

$$p(x,y,\tau) = \sum_j p_j(x,\tau)\rho_j(y), \tag{1.157}$$

est localement finie en $y$. ■

Le résultat suivant conduit à la caractérisation du symbole principale :

**Théorème 1.22.** *Soit $P \in L^m_{loc}(\Omega)$ . Alors pour $(x_0,\tau_0)$ appartenant à $T^*\Omega\backslash 0$, ona*

$$\sigma_P(x_0,\tau_0) = \lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-m}\left(e^{-i\lambda\phi(x)}P\left(f(x)e^{i\lambda\phi(x)}\right)\right)_{x=x_0} \tag{1.158}$$

*où $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et égale à 1 au voisinage de $x_0$ , $\phi \in C^\infty(\Omega)$, $\mathrm{d}\phi(\mathrm{x}) = \tau_0 \neq 0$ sur supp $f$ et $T^*\Omega\backslash 0$ est le complément de la section nulle dans le filtré cotangent $T^*\Omega$.*

***Preuve.***

Voir [27]. ■

Un résultat fondamental, qui est un outil adéquat utilisé dans la démonstration de l'ellipticité forte pour les problèmes aux limites, à savoir *l'inégalité de Gårding.*

**Théorème 1.23.** *(Inégalité de Gårding) [91],[34]*
*Soit $P \in L^m(\Omega)$. Supposons que $\Re e\ p(x,\tau) \geq c|\tau|^m$ pour $\tau$ large et $c > 0$. Alors pour chaque $s$ réel, et pour chaque compact fixé $K$ et pour tout $u \in \mathcal{D}(K)$ on a*

$$\Re e\langle Pu,u\rangle \geq c_1\|u\|^2_{H^{m/2}} - c_2\|u\|^2_{H^s}, \tag{1.159}$$

*avec $c_1, c_2$ indépendants de $u$.*

Chapitre

# 2 Méthode des équations intégrales

## 2.1 Introduction

La résolution des problèmes aux limites pour le Laplacien ou Bi-laplacien peut être remplacée par la recherche de la solution des équations intégrales dans des espaces de fonctions définies au bord d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$ en utilisant la méthode indirecte (théorie de potentiel) ou la méthode directe (théorie de Green).

Dans la première méthode, les équations intégrales correspondantes au problème aux limites considérés sont interprétés différemment en utilisant la théorie des opérateurs pseudo-différentiels qui nous permet de formuler des propriétés communes. Par contre, dans la deuxième méthode en appliquant la troixième formule de Green ce qui donne des équations intégrales de type Fredholm où la théorie de Fredholm s'applique.

## 2.2 Problème du Laplacien avec une condition de Neumman au bord

On présente ici **la méthode indirecte** pour l'opérateur de Laplace dans un domaine borné simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, appliquée au problème de Neumann qui modélise, par exemple, le mouvement d'un corps solide dans un fluide incompréssible parfait en hydrodynamique.

**Interprétation physique :** L'équation de Laplace $\Delta u = 0$ intervient très fréquemment dans des problèmes de la physique. $u$ représente typiquement la densité d'une quantité en équilibre.

L'application du problème de Laplace peut être trouvée pour l'éléctrostatiques [51], la conductivité dans l'imagerie biomédicale [10], et pour le potentiel dans un plan incompressible [90].

### 2.2.1 Formulation de problème

Présentons ici le problème de Neumann intérieur pour l'opérateur de Laplace.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine ouvert borné simplement connexe, dont la frontière $\Gamma$ est régulière ($\Gamma \in C^\infty$).

On cherche à déterminer une fonction $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\Delta u$ est l'opérateur de Laplace, et $g$ est une fonction donnée sur la frontière $\Gamma$ telle que $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)$ représente la dérivée suivant la normale qui est dirigée vers l'extérieur du domaine $\Omega$.

### 2.2.2 Etude variationnelle

L'étude est faite dans le cas où $\Omega$ est un domaine intérieur. L'espace dans lequel on cherche la solution du problème (2.1) est $H^1(\Omega, \Delta)$ tel que

$$H^1(\Omega, \Delta) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)\}$$

Soit maintenant $v \in H^1(\Omega)$. La formule de Green permet d'avoir

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \; \mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma g.v \; \mathrm{d}\Gamma \tag{2.2}$$

si on pose

$$a_1(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \; \mathrm{d}\Omega \tag{2.3}$$

et

$$L(v) = \int_\Gamma g \; v \; \mathrm{d}\Gamma \;,\; v \in H^1(\Omega), \tag{2.4}$$

le problème (2.1), se réduit alors au problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) & \text{tel que} \\ a_1(u, v) = L(v) & \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.5}$$

**Théorème 2.1.** *1. $L(.)$ est une forme linéaire continue*

*2. $a_1(.,.)$ est une forme bilinéaire continue.*

3. $a_1(.,.)$ *n'est pas* $H^1-coercive$*, mais elle est* $H^1/\mathbb{P}_0-coercive$ *c'est a dire qu'il existe* $\alpha>0$ *tel que*

$$a_1(u,u) \ \geq \ \alpha\|u\|^2_{H^1/\mathbb{P}_0}, \tag{2.6}$$

*avec* $\mathbb{P}_0$ *est l'espace des polynômes d'ordre zéro muni.*

***Preuve.*** 1. est évident.

2. Pour la continuité de $a_1$, on va montrer, pour tout $u,v \in H^1(\Omega)$, que

$$|a_1(u,v)| \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
|a_1(u,v)| &= |\int_\Omega \nabla u \nabla v \ d\Omega| \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

d'ou la continuité de $a_1$.

3. On va montrer d'abord, par un contre exemple, que (2.3) n'est pas $H^1-coercive$. Pour cela, supposons le contraire et soit la fonction caractéristique $u=\mathcal{X}_\Omega$ alors,

$$\mathcal{X}_\Omega \in H^1(\Omega) \ \text{ et } \ \|\mathcal{X}_\Omega\|_{H^1} = mes(\Omega) \neq 0.$$

Or

$$a_1(\mathcal{X}_\Omega, \mathcal{X}_\Omega) = a_1(1,1) = 0 \geq \alpha\|\mathcal{X}_\Omega\|^2_{H^1}.$$

Ce qui implique que $0 \ \geq \alpha$ et ceci est une contradiction.

Pour montrer maintenant (2.6), considérons l'espace $\mathbb{P}_0$ des polynômes d'ordre zéro suivant

$$\mathbb{P}_0 = \left\{p_0 \ \in \ H^1(\Omega), \ p_0 = c^{te} \text{ dans } \Omega\right\}. \tag{2.8}$$

et soit $Q$ un sous espace de $H^1(\Omega)$ définit par

$$Q := \left\{v \ \in \ H^1(\Omega), (v,p_0) = 0 \text{ dans } L^2(\Omega)\right\}. \tag{2.9}$$

où $Q$ est le complément orthogonal de $\mathbb{P}_0$ dans $H^1(\Omega)$, c'est à dire, d'après le théorème de projection (1.2) on a pour tout élément $u \in H^1(\Omega)$, [79]

$$u = v + p_0, v \in Q \text{ et } p_0 \ \in \ \mathbb{P}_0. \tag{2.10}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (2.5) est donnée par $v+p_0$ où $v$ est solution unique dans $\Omega$.

La norme dans l'espace $H^1(\Omega)/\mathbb{P}_0$ est définie par

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{P}_0} &:= \inf_{u\in\dot{u}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \\
&\backsimeq \inf_c \|u+c\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Maintenant, l'inégalité de Poincaré, à savoir

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \;\leq\; \beta\left\{\int_\Omega |\nabla v|^2 \;\mathrm{d}x + \left(\int_\Omega v \;\mathrm{d}x\right)^2\right\}, \tag{2.12}$$

implique que

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \;\mathrm{d}x \geq \;\frac{1}{\beta}\|v\|^2_{H^1}, \tag{2.13}$$

car $(v,1) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} a_1(v,v) \;\; &= \textstyle\int_\Omega |\nabla v|^2 \;\mathrm{d}x \;\; \geq \frac{1}{\beta}\|v\|^2_{H^1} \\ &\qquad\qquad\qquad\;\; \geq \;\frac{1}{\beta}\|v\|^2_{H^1/\mathbb{P}_0} \end{aligned} \tag{2.14}$$

d'après (2.11) et (2.13). Si on prend $\alpha = \frac{1}{\beta}$ on obtient $H^1/\mathbb{P}_0$-coercivité de $a_1$. ■

**Théorème 2.2.** *Le problème (2.5) possède une seule solution faible dans $H^1(\Omega)/\mathbb{P}_0$ avec la condition de compatibilité*

$$\int_\Gamma g \;\mathrm{d}\Gamma = 0. \tag{2.15}$$

***Preuve.*** Voir [79]. ■

Pour interpréter le problème (2.5), nous considérons l'équation

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \;\mathrm{d}x = \int_\Gamma g.v \;\mathrm{d}\Gamma \tag{2.16}$$

D'après la formule de Green on trouve la première équation du problème (2.1), à savoir

$$\Delta u = 0 \;\text{ dans } \Omega. \tag{2.17}$$

En multipliant (2.17) par $v$ et par intégration on obtient

$$\int_\Omega \Delta u \; v \;\mathrm{d}x = 0, \;\forall v \in V. \tag{2.18}$$

La formule de Green, appliquée à cette équation, donne

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \;\mathrm{d}x = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \; v \;\mathrm{d}\Gamma \;, \;\forall \; v \in V. \tag{2.19}$$

Maintenant, d'après (2.16), on obtient

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) v \;\mathrm{d}\Gamma = 0 \;, \;\forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.20}$$

d'où $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur $\Gamma$, d'après la densité des traces de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. En conséquence, le problème (2.1) est équivalent au problème variationnel (2.5).

### 2.2.3 Formule de représentation et équations intégrales

D'une manière générale, tout problème du Laplacien peut être réduit en équation intégrale, grâce à l'existence de la solution élémentaire associée, en particulier le problème de Neumann. Si on suppose que la solution de ce problème est représentée par un potentiel de simple couche, on obtient une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce. Ainsi les théorièmes de Fredholm peuvent être appliqués. [57] ,[67]

Par contre, la démarche qui consiste à représenter cette solution par un potentiel de double couche, conduit à d'autre types d'équations intégrales où la théorie de Fredholm n'est pas applicable [75].

#### Formules de représentations

La solution élémentaire du Laplacien donnée par [94]

$$E(x,y) := \frac{1}{2\pi}\log \mid x-y \mid, \tag{2.21}$$

et les propriétés des potentiels de simple et de double couche, nous permet de construire les équations intégrales pour les problèmes aux limites du laplacien.

**Définition 2.3.** Pour $\mu,\nu \in\ C^\infty(\Omega)$, on définit les opérateurs

$$\mathcal{S}_\Omega\mu(x) := E(x) * \mu\delta_\Gamma = \int_\Gamma \mu(y)E(x-y)\,\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{y}},\ x\in\Omega, \tag{2.22}$$

$$\mathcal{D}_\Omega\nu(x) := E(x) * (-\partial_n(\nu\delta_\Gamma)) = \int_\Gamma \mu(y)\frac{\partial E}{\partial n_y}(x-y)\,\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{y}},\ x\in\Omega, \tag{2.23}$$

tel que $\mathcal{S}_\Omega$ est le potentiel de simple couche (P.S.C) et $\mathcal{D}_\Omega$ le potentiel de double couche (P.D.C), où $\delta_\Gamma$ représente la masse de Dirac sur la frontière $\Gamma$.

**Lemme 2.4.** *Soit $\Gamma\in C^\infty$ et $\mu\in C(\Gamma)$. Les relations du saut pour (P.S.C) et (D.S.C) quand $x\to\Gamma$ sont :*

$$\frac{\partial}{\partial n}\mathcal{S}_\Omega\mu(x)\mid_\Gamma = +\frac{1}{2}\mu(x) + \int_\Gamma \mu(y)\frac{\partial E}{\partial n_y}(x-y)\,\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{y}},\ x,y\ \in\ \Gamma. \tag{2.24}$$

$$\mathcal{D}_\Omega\nu(x)\mid_\Gamma = -\frac{1}{2}\nu(x) + \int_\Gamma \nu(y)\frac{\partial E}{\partial n_y}(x-y)\,\mathrm{d}\gamma_{\mathrm{y}},\ x,y\ \in\ \Gamma. \tag{2.25}$$

***Preuve.*** On remarque que pour toutes fonctions $\mu,\nu\ :\ \ \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ assez régulières les potentiels de simple et de double couche satisfont l'équation de Laplace, à savoir

$$\Delta\mathcal{S}_\Omega\mu = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.26}$$

$$\Delta\mathcal{D}_\Omega\nu = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.27}$$

Pour calculer l'expression du gradient de $\mathcal{S}_\Omega$ en $x \in \Gamma$, On Calcule d'abord

$$\nabla_x E(x) = \frac{x-y}{2\pi \mid x-y \mid^2}, \tag{2.28}$$

alors, on a

$$\nabla_x \mathcal{S}_\Omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{x-y}{\mid x-y \mid^2} \mu(y) \, \mathrm{d}\Gamma_\mathrm{y} \tag{2.29}$$

Comme la fonction $\frac{1}{|x-y|}$ n'est pas intégrable pour $x$ sur $\Gamma$, l'intégrale dans (2.29) diverge. On peut donc exprimer la valeur de $\frac{\partial \mathcal{S}_\Omega}{\partial n}$ pour un sens faible par une fonction test $\varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Et d'après la formule de Green on a

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial \mathcal{S}_\Omega}{\partial n}, \varphi \rangle &= \int_\Gamma \tfrac{\partial \mathcal{S}_\Omega}{\partial n}(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}\Gamma_\mathrm{x} &&= -\int_\Omega \nabla \mathcal{S}_\Omega(z) \nabla \varphi(z) \, \mathrm{d}\Omega \\ & && = -\frac{1}{2\pi} \int_\Omega \int_\Gamma \mu(y) \frac{(y-z)\nabla\varphi(z))}{|y-z|^2} \mathrm{d}\Gamma_\mathrm{y} \mathrm{d}\Omega, \end{aligned}$$

Cette expression est intégrable sur le produit $\Gamma \times \Omega$, on peut donc permuter les deux intégrations d'après le théorème de Fubini. D'où

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{\partial \mathcal{S}_\Omega}{\partial n}(x)\varphi(x) \mathrm{d}\Gamma_\mathrm{x} &= -\int_\Omega \nabla \mathcal{S}_\Omega(z) \nabla \varphi(z) \mathrm{d}\Omega \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \mu(y) \left( \int_\Omega \frac{(y-z)\nabla\varphi(z)}{|y-z|^2} \, \mathrm{d}\Omega \right) \mathrm{d}\Gamma_y. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Maintenant pour $r > 0$, on note par $\Omega_r = \Omega \cap B_r$, la partie de $\Omega$ contenue à l'intérieur de la boule $B_r$ du rayon $r$ et de centre $y$, alors

$$\int_\Omega \frac{(y-z).\nabla\varphi(z)}{|y-z|^2} \mathrm{d}\Omega = \lim_{r \longmapsto 0} \int_{\Omega-\Omega_r} \frac{(y-z).\nabla\varphi(z)}{|y-z|^2} \mathrm{d}\Omega \tag{2.31}$$

Par application de la formule de Green à nouveau on obtient

$$\int_{\Omega-\Omega_r} \frac{(y-z).\nabla\varphi(z)}{|y-z|^2} \, \mathrm{d}\Omega \;=\; -\int_{\Gamma-\Gamma_r} \frac{(x-y).n_x}{|x-y|^2} \, \varphi(x) \, \mathrm{d}\Gamma_x \;+\; \int_{\Omega_r} \frac{\varphi(x)}{|x-y|} \, \mathrm{d}\Gamma_x. \tag{2.32}$$

Par passage à la limite quand $r \longrightarrow 0$, on a

$$\int_\Omega \frac{(y-z).\nabla\varphi(z)}{|y-z|^2} \, \mathrm{d}\Omega = -\pi\varphi(y) + \int_\Gamma \frac{(y-x).n_x}{|x-y|^2} \varphi(x) \mathrm{d}\Gamma_x. \tag{2.33}$$

En retranche cette expression dans (2.30), on obtient

$$\int_\Gamma \frac{\partial \mathcal{S}_\Omega}{\partial n} \varphi(x) \mathrm{d}\Gamma_x = +\frac{1}{2} \int_\Gamma \mu(x)\varphi(x) \mathrm{d}\Gamma_x + \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{(y-x).n_x}{\mid x-y \mid^2} \mu(y)\varphi(x) \mathrm{d}\Gamma_y \mathrm{d}\Gamma_x \tag{2.34}$$

alors

$$\frac{\partial \mathcal{S}_\Omega}{\partial n}(x) = +\frac{1}{2\pi}\mu(x) + \int_\Gamma \frac{(y-x).n_x}{|x-y|^2} \mu(y) \, \mathrm{d}\Gamma_y, \tag{2.35}$$

au sens faible, donc on en déduit (2.24). De la même manière on obtient (2.25) ■

### Equations intégrales

**Théorème 2.5.** *Pour toutes fonctions $\mu$, $\nu : \Gamma \to \mathbb{C}$ assez régulières, les équations intégrales associées au problème (2.1) sont données par*

$$(I - D')\mu = 2g, \tag{2.36}$$

$$T\nu = -2g. \tag{2.37}$$

*où les opérateurs intégraux aux bord $D, D', T$ sont donnés par*

$$D\nu(x) = -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\log|x-y|\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{y}}$$

$$D'\mu(x) = -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\log|x-y|\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{y}},$$

$$T\nu(x) = -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \nu(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}\log|x-y|\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{y}}$$

*avec $x, y \in \Gamma$ et l'opérateur $D'$ désigne l'adjoint de $D$.*

***Preuve.*** On cherchera la solution du problème (2.1) sous forme d'un potentiel de double couche. La première étape consiste à exprimer $u(x)$ sous forme d'un potentiel de simple couche, à savoir

$$u(x) = E(x) * \mu\delta_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y)\log\mid x-y\mid \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{y}},\ x\in \Omega, y\ \in\ \Gamma. \tag{2.38}$$

Par passage à la limite quand $x \to \Gamma$ dans (2.38) et la continuité du potentiel de simple couche, permet d'avoir une équation intégrale de première espèce

$$u(x)\mid_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y)\log\mid x-y\mid\ \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{y}},\ x, y \in \Gamma. \tag{2.39}$$

Si on écrit $u(x)$ sous la forme d'un potentiel de double couche, à savoir

$$u(x) = E(x) * (-\partial_n(\nu\delta_\Gamma)) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\log|x-y|\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{y}}, x, y \in \Gamma. \tag{2.40}$$

En considérant la dérivée normale de (2.38) et après passage à la limite, on obtient une équation intégrale de deuxième espèce pour (2.1), à savoir

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x)\mid_\Gamma = g = +\frac{1}{2}\mu(x) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\log\mid x-y\mid \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{y}},\ x, y \in \Gamma \tag{2.41}$$

Si par contre, on prend la dérivée normale de (2.40), on obtient après passage à la limite une équation définie comme une valeur principale, à savoir

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x)\mid_\Gamma = g = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \nu(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}\log\mid x-y\mid \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{y}},\ x, y \in \Gamma. \tag{2.42}$$

On remarque que le noyau associé à l'opérateur $T$, dans (2.37), est

$$\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}\log\mid x-y\mid = O\left(\frac{1}{\mid x-y\mid^2}\right), \tag{2.43}$$

ce noyau est donc non intégrable, alors cette expression doit être éxprimer à l'aide des distributions qui sont des parties finies. ■

### 2.2.4 Existence et unicité

La résolution de l'équation intégrale (2.36) est classique [62], [100]. Tandis que pour l'analogue de l'équation intégrale (2.37), c'est seulement en 1973, et en 1978, qu'un cadre variationnel approprié a été présenté pour discuter l'existence et l'unicité de la solution grâce aux travaux de **Nédélec-Planchard** [73] et **Nédélec-Giroire** [42] respectivement.

Une autre technique, consiste à interpréter l'opérateur intégraux dans (2.36) et (2.37) comme des opéateurs pseudo-différentièls, ce qui permet d'obtenir la coercivité moyennant le calcule symbolique des opérateurs pseudo-différentiels [42, 75].

#### Propriétés des opérateurs intégraux

A présent, comme on l'a mentionnée auparavant, dans cette étude on présente une approche différente, qui consiste à interpréter les opérateurs $(I - D')$ et $T$ comme des opérateurs pseudo-différentiels. A chaque opérateur On associe, via la transformée de Fourier, ce qu'on appelle le symbole complet. Après, on éxige que celui-ci admet une expansion asymptotique pour $r$ très grand avec le symbole principal pour premier terme d'ordre supèrieur en $\tau$ (section (1.9)).

Ainsi, on est en mesure de formuler le

**Théorème 2.6.** *1. Les opérateurs $(I - \acute{D}), T$ sont des opérateurs pseudo-différentiels de symbole principal $1, |\tau|$ et d'ordre $0, 1$ respectivement.*

*2. Ils sont fortement elliptiques, i-e : il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\Re e\ \sigma(x,\tau)\ \geq\ c\ >\ 0 \tag{2.44}$$

*pour tout $|\tau| = 1$ et $x \in \Gamma$ avec $c$ indépendant de $x, \tau$ et $\sigma$ est le symbole principal.*

***Preuve.***

1. **a)** On commence par l'opérateur $(I - D')$ :

   La partie principale dans cet opérateur est donnée par l'opérateur $I$

$$I\mu(x) = \frac{1}{2\pi}\int \exp^{ix\tau}\ \ F[\mu(\tau)]\ \mathrm{d}\tau \tag{2.45}$$

   Ceci implique que $\sigma_I(x,\tau) = 1 = |\tau|^0$.

   **b)** Pour l'opérateur $T$, on sait que

$$\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}\log|\ x-y\ |= O\left(\frac{1}{|\ x-y\ |^2}\right) = O(|\ \bar{t}\ |^{-2}). \tag{2.46}$$

Considérons maintenant une fonction de troncature $\bar{\mathcal{X}}(\mid t \mid) = 1$ dans un voisinage fixe de zéro. Alors l'opérateur $T$ s'écrit

$$\begin{aligned} T\nu(t) &= -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mathcal{X}(\mid t \mid)\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}\log \mid x-y \mid \nu(t') \; \mathrm{d}\acute{t} \\ & -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma (1-\mathcal{X}(\mid t \mid))\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}\log \mid x-y \mid \nu(t') \; \mathrm{d}t' \end{aligned} \tag{2.47}$$

Remplaçons (2.46) dans (2.47), on obtient

$$T\nu(t) = B_1\nu(t) + B_2\nu(t), \tag{2.48}$$

avec

$$\begin{aligned} B_1\nu(t) &= -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mathcal{X}(\mid \bar{t} \mid)(- \mid \bar{t}^{-2} \mid)\nu(t')\mathrm{d}t' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it\bar{t})\mathcal{F}\{\nu(\bar{t})\}P_T(t,\bar{t}) \; \mathrm{d}\bar{t}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

et $B_2$ un opérateur régularisant, i.e, de noyau $C^\infty$ et $P_T(t,\bar{t})$ donné par

$$P_T(t,\bar{t}) = -\frac{1}{\pi}\int \exp(it\bar{t})\mathcal{X}(|\bar{t}|)\bar{t}^{-2}\mathrm{d}\bar{t}, \tag{2.50}$$

représente le symbole complet de $T$. Sachant que

$$\mathcal{X}(\mid \bar{t} \mid) = \mathcal{X}(0) + \bar{t}.\mathcal{X}'(0) + ..., \tag{2.51}$$

alors le symbole principal sera donné par

$$\sigma_T(t,\tau) = -\frac{1}{\pi}\; \mathcal{F}\{X(0)\bar{t}^{-2}\} =\mid \tau \mid, \tag{2.52}$$

et on déduit l'ordre de $T$, qui est égale à 1.

2. évident d'après la définition .

■

**Lemme 2.7.** *Les opérateurs*

$$D' : H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \tag{2.53}$$

$$T : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \tag{2.54}$$

*Sont continus .*

***Preuve.***
Pour l'opérateur $T$, On a

$$\sigma_T(x,\tau) =\mid \tau \mid . \tag{2.55}$$

Alors

$$| \sigma_T \mathcal{F}\{\nu(\tau)\} |^2 = | \tau |^2 | \mathcal{F}\{\nu(\tau)\} |^2 \leq (1+ | \tau |^2) | \mathcal{F}\{\nu(\tau)\} |^2 . \tag{2.56}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} \|T\nu\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \int_\Gamma | \tau |^2)^{-\frac{1}{2}} | \tau |^2 | \mathcal{F}\{\nu\} |^2 \, \mathrm{d}\tau \\ &\leq \int_\Gamma | \tau |^2)^{-\frac{1}{2}} .(1+ | \tau |^2) | \mathcal{F}\{\nu\} |^2 \, \mathrm{d}\tau \\ &\leq c \, \|\nu\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \end{aligned} \tag{2.57}$$

d'où la continuité de $T$. la même démonstration pour l'opérateur $D'$. ■

Maintenant, à l'aide de l'inégalité de Gårding (voir théorème 1.23), on obtient la coercivité de l'opérateur $T$.

**Théorème 2.8.** *il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\nu \in H^{1/2}(\Gamma)$ on a*

$$\langle T\nu, \nu\rangle \geq c\|\nu\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} - \langle T_1\nu, \nu\rangle \tag{2.58}$$

*où $T_1 : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ est compact .*

***Preuve.***

Pour montrer (2.58), on considère $\nu \in H^{1/2}(\Gamma)$, on a alors

$$\langle T\nu, \nu\rangle = \int_R T\nu.\nu \, \mathrm{dx} = \int_R \mathcal{F}\{T\nu\}.\mathcal{F}\{\nu\} \, \mathrm{d}\tau = \int_R | \tau | . | \mathcal{F}\{\nu\} |^2 \, \mathrm{d}\tau \tag{2.59}$$

Soit maintenant $T_0$ un opérateur pseudo-différentiel $(O.\psi.D)$ de symbole principal

$$\sigma_{T_0}(x, \tau) = (1+ | \tau |^{\frac{1}{2}})^2. \tag{2.60}$$

On a alors

$$T = T_0 - T_0 + T = T_0 - T_1, \tag{2.61}$$

avec $T_1$ est d'ordre zéro donc il est compact de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. Et $T_0$ est défini positif, c-à-d

$$\langle T_0\nu, \nu\rangle \geq c\|\nu\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}. \tag{2.62}$$

Alors

$$\langle T\nu, \nu\rangle \geq c\|\nu\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} - \langle T_1\nu, \nu\rangle. \tag{2.63}$$

On remarque que, pour l'opérateur $(I - D')$, c'est $D'$ qui constitu la perturbation compacte.

■

### 2.2.5 Solvabilité des équations intégrales

**Théorème 2.9.** *Soit $\nu \in H^{1/2}(\Gamma)$ l'unique solution de l'équation homogène,*

$$T\nu(x) = 0 \tag{2.64}$$

*Alors $\nu = c^{te}$.*

***Preuve.*** Si $T\nu(x) = 0$, le problème de Neumann (2.1) devient un problème avec une condition homogène et celui-ci possède une solution avec une constante prés. ■

**Théorème 2.10.** *L'opérateur*

$$T : \; H^{1/2}(\Gamma) \;\longrightarrow\; H^{-1/2}(\Gamma)/\mathbb{P}_0, \tag{2.65}$$

*est bijectif.*

***Preuve.*** D'après le théorème (2.9) l'opérateur $T$ est injectif. Maintenant, d'après le théorème (2.10) l'opérateur $T$ diffère d'un opérateur défini-positif par une perturbation compacte. Ainsi, cet opérateur est un opérateur d'indice zéro. D'où la surjectivité de $T$. Donc $T$ est bijectif. ■

### 2.2.6 Propriétés d'équivalence

On veut montrer que la solution faible $u \in H^1(\Gamma, \Delta)$ pour $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, satisfaite aussi l'équation intégrale de première espèce (2.37). On a alors le

**Théorème 2.11.** *Soit $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ donnée. Alors, le problème (2.1) pour $u \in H^1(\Gamma, \Delta)$, la formulation variationnelle (2.5) et l'équation intégrale de première espèce (2.37) pour $\nu \in H^{1/2}(\Gamma)$, ont chacun une solution unique et sont équivalantes.*

***Preuve.***

La solution de (2.1) donne une équation intégrale de première espèce (2.37). Cette solution est unique et à son tour prouve que la solution de (2.37) définit une solution du problème (2.1).

L'équivalence entre (2.1) et (2.5) pour $u \in H^1(\Gamma, \Delta)$ a été étudiée. ■

## 2.3 Problème du Bi-Laplacien avec une condition de Neumann au bord

Cependant, si l'équation harmonique est liée à la théorie classique des problèmes du potentiel, l'équation bi-harmonique est liée aux problèmes de l'élasticité, qui consiste à déterminer en tout point d'un domaine occupé par un corps élastique le vecteur déplacement lors de la déformation de ce corps, comme celui des flexion des lames. Et d'autres problèmes, comme l'imagerie de radar [11] et les fluides incompressibles [61].

Nous intéressons ici à la méthode directe des équations intégrales qui est basé sur l'approche de "Costabel" et "Wendland", qui a été développé dans [30, 34]. Une grande classe des problèmes aux limites elliptiques extérieurs et intérieurs, en utilisant la solution fondamentale correspondante, peut être réduite en équations intégrales sur la frontière du domaine.

Ces équations apparissent dans diverses applications telles que les problèmes aux limites dans les acoustiques, l'élasticité, l'éléctromagnetiques aussi bien que dans la dynamique liquide [51, 52] et leurs approximations d'élément de frontière sont utilisé dans beaucoup de calculs correspondants de technologie.

### 2.3.1 Formulation de problème

Nous considérons ici le problème potentiel linéaire

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = 0, & x \in \Omega \\ Mu(x) = f_0(x), & x \in \Gamma, \\ Nu(x) = g_0(x), & x \in \Gamma \end{cases} \tag{2.66}$$

où $\Delta^2 u$ représente le bi-Laplacien bidimensionnel. $\Gamma$ dénote une courbe fermée simplement lisse dans $\mathbb{R}^2$ qui est la frontière du domaine ouvert borné $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $f_0$ et $g_0$ sont des fonctions données à valeurs réelles sur $\Gamma$ c'est à dire ;

$$f_0 : \ \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ et } g_0 : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Pour réduire notre problème en équations intégrales sur la frontière $\Gamma$, on applique l'identité de Green pour les fonctions biharmoniques $u$. Pour cette raison, on récrit $\Delta^2 u$ en terme de facteur de Poisson $\rho$ sous la forme

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + 2(1-\rho)\frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right), \tag{2.67}$$

tel que $\rho$ est une constante réelle, et particulièrement dans l'application de la théorie d'élasticité on a $0 \leq \rho < 1$. Pour $u \in H^2(\Omega)$ on obtient que $u\,|_\Gamma \in H^{3/2}(\Gamma)$ et $\frac{\partial u}{\partial n}\,|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$. Pour étudier le problème (2.66), on a bien commencer par l'intégration par partie, on obtient alors la formule de représentation suivante

$$\int_\Omega \Delta^2 u \,.v \,\mathrm{d}x = a(u,v) - \int_\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial n_y} Mu + v\, Nu\right) \mathrm{d}\gamma_y, \quad \forall x \in \Omega \tag{2.68}$$

où la forme bilinéaire $a(u, v)$ est définie par

$$a_2(u,v) = \int_\Omega \rho\Delta u\ \Delta v \mathrm{d}x + \int_\Omega (1-\rho)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\ \mathrm{d}x; \tag{2.69}$$

et $M, N$ sont des opérateurs différentiels définis par

$$\begin{aligned} Mu &:= \rho\Delta u + (1-\rho)((n(z).\nabla_x)^2 u)|_{z=x}, \\ Nu &:= -\left\{\tfrac{\partial}{\partial n}\Delta u + (1-\rho)\tfrac{d}{dr}((n(z).\nabla_x)(t(z).\nabla_x)u(x))\right\}|_{z=x}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

où la dérivée normale et tangentielle sont données par

$$\frac{\partial}{\partial_n} = n_1\frac{\partial}{\partial x_1} + n_2\frac{\partial}{\partial x_2},$$

et

$$\frac{\partial}{\partial_r} = n_2\frac{\partial}{\partial x_1} - n_1\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Physiquement, $Mu$ est le moment de flexion et $Nu$ est la force transversale comprenant la force de cisaillement et tordant le moment [28]. Alors

$$Mu := \rho\Delta u + (1-\rho)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}n_1^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}n_1 n_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}n_2^2\right),$$

$$Nu := -\left\{\frac{\partial}{\partial n}\Delta u + (1-\rho)\frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)n_1 n_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}(n_1^2 - n_2^2)\right\}\right.$$

On note que la forme bilinéaire (2.69) est bien définie pour des fonctions dans $H^2(\Omega)$.

On remarque que si on considère (2.68), le choix de $\triangle u$ et $-\partial_n \triangle u$ comme une condition de Neumann qui correspond au facteur de Poisson $\rho = 1$. Ceci signifie que la condition de compatibilité (2.80) doit être satisfaite pour toute fonction harmonique $v$. Et comme l'espace des fonctions harmoniques dans $\Omega$ est de dimension infini, ceci ne ramène pas à un problème aux limites régulier au sense de Agmon [7] .

### 2.3.2 Formulation Variationnelle

L'espace dans lequel on cherche la solution du problème (2.66) est l'espace

$$H^2(\Omega, \Delta^2) := \{u \in H^2(\Omega), \Delta^2 u = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{H^2(\Omega)}\right)^{1/2}, \tag{2.71}$$

où

$$|u|^2_{H^2(\Omega)} := \sum_{j,k=1}^{2} \|\partial_j u \partial_k u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.72}$$

On suppose que $u \in H^2(\Omega, \Delta^2)$ est la solution du problème (2.66) avec

$$(Mu|_\Gamma = f_0,\ Nu|_\Gamma = g_0) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$$

D'après la formule de Green on obtient la forme bilinéaire définie par (2.69) qui est une forme bilinéaire continue et coercive sur l'espace quotient $H^2(\Omega)/\mathbb{P}_1$ tel que

$$\mathbb{P}_1 = \left\{p \ \in \ H^2(\Omega),\ p = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3, \forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\right\}, \tag{2.73}$$

est l'espace des Polynômes de degré 1 dans $\mathbb{R}^2$.

On sait que

$$\|\dot{u}\|^2_{H^2(\Omega)/\mathbb{P}_1} := |u|^2_{H^2(\Omega)}, \tag{2.74}$$

est une norme sur l'espace $H^2(\Omega)/\mathbb{P}_1$ équivalent à la norme

$$\inf_{p\in\mathbb{P}_1} \|u-p\|_{H^2(\Omega)},$$

En effet, pour la continuité de $a$, on va montrer que

$$|a_2(u,v)| \leq \alpha\|u\|^2_{H^2(\Omega)}\|v\|^2_{H^2(\Omega)}. \tag{2.75}$$

On a,

$$\begin{aligned} |a_2(u,v)| &= |\int_\Omega \rho\Delta u\Delta v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (1-\rho)\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j}\right)\mathrm{d}x| \\ &\leq |\rho|\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)} + |1-\rho||u|^2_{H^2(\Omega)}|v|^2_{H^2(\Omega)} \\ &\leq |\rho|\|u\|^2_{H^2(\Omega)}\|v\|^2_{H^2(\Omega)} + |1-\rho|\|u\|^2_{H^2(\Omega)}\|v\|^2_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C_\rho\|u\|^2_{H^2(\Omega)}\|v\|^2_{H^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.76}$$

tel que $C_\rho$ est une constante positive. D'où la continuité de $a_2$ sur $H^2(\Omega)$.
Pour la coercivité de $a_2$, on va montrer que

$$|a_2(v,v)| \geq \beta\|v\|^2_{H^2(\Omega)/\mathbb{P}_1}. \tag{2.77}$$

On considère $\mathbb{P}_1^\perp$ un sous espace de $H^2(\Omega)$, qui est l'espace orthogonal de $\mathbb{P}_1$, défini par

$$\mathbb{P}_1^\perp := \left\{q \ \in \ H^2(\Omega), \langle q,p\rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \ \forall p\in\mathbb{P}_1\right\} \tag{2.78}$$

donc pour $u\in H^2(\Omega)$, alors $u = q+p$, tel que $q\in\mathbb{P}_1^\perp$ et $p\in \ \mathbb{P}_1$.

D'autre part, pour $v\in H^2(\Omega)/\mathbb{P}_1$ on a,

$$\begin{aligned} a_2(v,v) &= \rho\|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)} + (1-\rho)|v|^2_{H^2(\Omega)} \\ &\geq (1-\rho)|v|^2_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

et d'après (2.74), on obtient

$$a_2(v,v) \geq (1-\rho)\|v\|^2_{H^2(\Omega)/\mathbb{P}_1}. \tag{2.79}$$

Si on prend $\beta = (1-\rho)$, alors la forme bilinéaire $a_2$ est $H^2/\mathbb{P}_1 - \textit{elliptique}$.

**Théorème 2.12.** *Le problème de Neumann (2.66) possède une seule solution faible dans $H^2(\Omega)$ si et seulement si $(Mu, Nu)\in\mathbb{P}_1^\perp$, c-à-d, avec la condition de compatibilité*

$$\int_\Omega \left(Mu.\frac{\partial v}{\partial n} + v.Nu\right)\,\mathrm{d}s = 0, \ \forall v\in\mathbb{P}_1. \tag{2.80}$$

***Preuve.*** La preuve est déduite du théorème de Lax-Milgram (1.2.2).

■

### 2.3.3 Système des équations intégrales

Afin de prouver l'existence d'une solution du problème (2.66) on transforme le problème en un système des équations intégrales de premier espèce.
Maintenant, on commence par $u \in H^2(\Omega, \triangle^2)$ et on choisit $v \in H^2(\Omega)$. Alors, la formule de Green (2.68) est satisfaite et par dualité on a $Mu \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et $Nu \in H^{-3/2}(\Gamma)$.

Si on prend $v = E$, avec $E(x,y)$ la solution élémentaire associée au bi-laplacien donnée par

$$E(x,y) = \frac{1}{8\pi}|x-y|^2 \log|x-y|,$$

qui satifait

$$\Delta_y^2 E(x,y) = \delta(y-x), \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

par application de la première formule de Green, on obtient donc la première formule de représentation

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Gamma \left( \frac{\partial E}{\partial n_y}(y) Mu(y) - E(x,y) Nu(y) \right) \mathrm{d}\gamma_y \\ &- \int_\Gamma \left( M_y E(x,y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - N_y E(x,y) u(y) \right) \mathrm{d}\gamma_y. \end{aligned} \tag{2.81}$$

On définit les potentiels de simple et de double couche respectivement par

$$\mathbb{V}\,(Mu, Nu) = \int_\Gamma \left( \frac{\partial}{\partial n_y} E(x,y) Mu(y) - E(x,y) Nu(y) \right) \,\mathrm{d}\gamma_y. \tag{2.82}$$

$$\mathbb{W}\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = \int_\Gamma \left( M_y E(x,y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - N_y\, E(x,y) u(y) \right) \,\mathrm{d}\gamma_y. \tag{2.83}$$

Alors, la formule de représentation (2.81) peut être écrite comme

$$u(x) = \mathbb{V}\,(Mu(x), Nu(x)) - \mathbb{W}\left(u(x), \frac{\partial u}{\partial n}(x)\right),\ x \in \Omega. \tag{2.84}$$

D'une manière analogue, on obtient la deuxième formule de représentation suivante

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial n}(x) &= \int_\Gamma \left( \frac{\partial^2 E}{\partial n_x \partial n_y}(y) Mu(y) + \frac{\partial E}{\partial n_x}(x,y) Nu(y) \right) \mathrm{d}\gamma_y \\ &- \int_\Gamma \left( \frac{\partial}{\partial n_x} M_y E(x,y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) + \frac{\partial}{\partial n_x} N_y E(x,y) u(y) \right) \mathrm{d}\gamma_y. \end{aligned} \tag{2.85}$$

qui peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \frac{\partial \mathbb{V}}{\partial n}\,(Mu(x), Nu(x)) - \frac{\partial \mathbb{W}}{\partial n}\left(u(x), \frac{\partial u}{\partial n}(x)\right),\ x \in \Omega. \tag{2.86}$$

D'après les opérateurs de simple et de double couche, quand un point de $x \in \Omega$ tend vers un point de la frontière $\Gamma$ dans les formules de représentations (2.81), (2.85), on peut construire les équations intégrales associées au problème (2.66). Tout d'abord on a besoin de la définition ci-dessus

**Définition 2.13.** Soit $u \in C^\infty(\Gamma)$, on définit les opérateurs intégraux suivants, pour $x \in \Gamma$, par

$$\mathcal{K}_{11}u(x) = \int_\Gamma N_y E(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

$$\mathcal{V}_{12}u(x) = -\int_\Gamma M_y E(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

$$\mathcal{V}_{13}u(x) = \int_\Gamma \frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

$$\mathcal{V}_{14}u(x) = \int_\Gamma E(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

1. Par passage à la limite dans la formule de représentation (2.81), quand $x$ tend vers $\Gamma$, on obtient la première êquation intégrale non linéaire suivante

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Gamma \left(\frac{\partial E}{\partial n_y}(y)Mu(y) + E(x,y)Nu(y)\right)\mathrm{d}\gamma_y + \frac{1}{2}u(x) \\ &- \int_\Gamma \left(M_y E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) + N_y E(x,y)u(y)\right)\mathrm{d}\gamma_y \end{aligned} \tag{2.87}$$

qui, en terme des opérateurs intégraux au bord collectés dans la définition (2.13), devient

$$(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{11})u(x) - \mathcal{V}_{12}\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \mathcal{V}_{14}Nu(x) + \mathcal{V}_{13}Mu(x), x \in \Gamma \tag{2.88}$$

qui peut être écrite, d'après la condition de frontière pour $x \in \Gamma$, comme

$$(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{11})u(x) - \mathcal{V}_{12}\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \mathcal{V}_{14}g_0(x) + \mathcal{V}_{13}f_0(x), \tag{2.89}$$

2. Par passage à la limite dans la formule de représentation (2.85), quand $x$ tend vers $\Gamma$, on obtient la deuxième équation intégrale non linéaire suivante qui devient,

$$-\mathcal{D}_{21}u(x) + (\frac{1}{2}I - \mathcal{K}_{22})\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \mathcal{V}_{24}Nu(x) + \mathcal{V}_{23}Mu(x), \tag{2.90}$$

qui peut être écrite, d'après la condition de frontière, comme

$$-\mathcal{D}_{21}u + (x)(\frac{1}{2}I - \mathcal{K}_{22})\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \mathcal{V}_{24}g_0(x) + \mathcal{V}_{23}f_0(x), \tag{2.91}$$

où les opérateurs $\mathcal{D}_{21}, \mathcal{K}_{22}, \mathcal{V}_{23}, \mathcal{V}_{24}$ sont définis par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_{21}u(x) &=& \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_x} N_y E(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y, \\ \mathcal{K}_{22}u(x) &=& -\int_\Gamma N_x E(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y, \\ \mathcal{V}_{23}u(x) &=& \int_\Gamma \frac{\partial^2 E}{\partial n_x \partial n_y}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y, \\ \mathcal{V}_{24}u(x) &=& \int_\Gamma \frac{\partial E}{\partial n_x}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y, \end{array}\right. \tag{2.92}$$

Finalement, on obtient le système des équations intégrales suivant :

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{11})u(x) - \mathcal{V}_{12}\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \mathcal{V}_{14}Nu(x) + \mathcal{V}_{13}Mu(x), \\ -\mathcal{D}_{21}u(x) + (\frac{1}{2}I - \mathcal{K}_{22})\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \mathcal{V}_{24}Nu(x) + \mathcal{V}_{23}Mu(x), \end{cases} \tag{2.93}$$

Si on note par $(v, w, \mu_1, \mu_2)^t = \left(u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma, Mu|_\Gamma, Nu|_\Gamma\right)^t$ les données de Cauchy, on obtient le système sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{11} & -\mathcal{V}_{12} \\ -\mathcal{D}_{21} & \frac{1}{2}I - \mathcal{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \\ \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{14} & \mathcal{V}_{13} \\ \mathcal{V}_{24} & \mathcal{V}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \\ \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \tag{2.94}$$

que l'on peut écrire

$$LU = V\mu, \quad \text{sur } \Gamma$$

tel que

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{11} & -\mathcal{V}_{12} \\ -\mathcal{D}_{21} & \frac{1}{2}I - \mathcal{K}_{22} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{14} & \mathcal{V}_{13} \\ \mathcal{V}_{24} & \mathcal{V}_{23} \end{pmatrix}$$

et

$$U = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, D'après la condition de frontière, le système (2.94) peut être s'écrit comme

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{11})u(x) - \mathcal{V}_{12}\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \mathcal{V}_{14}g_0(x) + \mathcal{V}_{13}f_0(x), \\ -\mathcal{D}_{21}u(x) + (\frac{1}{2}I - \mathcal{K}_{22})\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \mathcal{V}_{24}g_0(x) + \mathcal{V}_{23}f_0(x), \end{cases} \tag{2.95}$$

qui peut être écrite sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{11} & -\mathcal{V}_{12} \\ -\mathcal{D}_{21} & \frac{1}{2}I - \mathcal{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \\ \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{14} & \mathcal{V}_{13} \\ \mathcal{V}_{24} & \mathcal{V}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ \\ \\ f_0 \end{pmatrix} \tag{2.96}$$

que l'on peut écrire comme

$$LU = VF^0, \quad \text{sur } \Gamma \tag{2.97}$$

tel que

$$F^0 = \begin{pmatrix} g_0 \\ f_0 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.4 Existence Et Unicité

**Propriétés des opérateurs intégraux au bord**

**a.** Les opérateurs de simple et de double couches $\mathbb{V}$ et $\mathbb{W}$ sont des opérateurs continus tels que :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}: &\quad H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma) \longrightarrow H^2(\Omega) \\ \mathbb{W}: &\quad H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^2(\Omega) \end{aligned}$$

**b.** Les opérateurs intégraux au bord suivants, tel que

$$1) \quad \begin{array}{ll} \mathcal{K}_{11}: \ H^{3/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma), & \mathcal{V}_{13}: \ H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma) \\ \mathcal{V}_{12}: \ H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma), & \mathcal{V}_{14}: \ H^{-3/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma) \end{array}$$

$$2) \quad \begin{array}{ll} \mathcal{D}_{21}: \ H^{3/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma), & \mathcal{V}_{23}: \ H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \\ \mathcal{K}_{22}: \ H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma), & \mathcal{V}_{24}: \ H^{-3/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma), \end{array}$$

sont continus. De plus, $\mathcal{K}_{ii},\ i = \overline{1,2}$ sont compacts d'après le théorème des injections de Rellich [91].

**Lemme 2.14.** *[22, 45, 59] Les opérateurs définis par*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{K}_{11}: \ H^{s}(\Gamma) \longrightarrow H^{s}(\Gamma), & \mathcal{V}_{13}: \ H^{s}(\Gamma) \longrightarrow H^{s+3}(\Gamma) \\ \mathcal{V}_{12}: \ H^{s}(\Gamma) \longrightarrow H^{s+1}(\Gamma), & \mathcal{V}_{14}: \ H^{s}(\Gamma) \longrightarrow H^{s+3}(\Gamma) \end{array}$$

*et*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{D}_{21}: \ H^{s}(\Gamma) \longrightarrow H^{s-1}(\Gamma), & \mathcal{V}_{23}: \ H^{s}(\Gamma) \longrightarrow H^{s+1}(\Gamma) \\ \mathcal{K}_{22}: \ H^{s}(\Gamma) \longrightarrow H^{s}(\Gamma), & \mathcal{V}_{24}: \ H^{s}(\Gamma) \longrightarrow H^{s+3}(\Gamma) \end{array}$$

*sont continus.*

**Solvabilité du système linéaire des équations intégrales**

On remarque que si $v, w, \mu_1, \mu_2$ satisfont (2.97) alors, après avoir défini $Mu, Nu$ sur $\Gamma$ dans (2.66), le système des formules de représentations (2.81) et (2.85) donne une solution pour le problème (2.66) qui est l'unique solution d'après le théorème (2.12). Pour cette raison on a besoin d'étudier la solvabilité du système des équations intégrales (2.97).

Pour cela, on introduit les opérateurs matriciels

$$L: H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma),$$

$$V: H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma).$$

Alors on a les théorèmes suivants

**Théorème 2.15.** *Les opérateurs*

$$L: \; H^s(\Gamma) \times H^{s-1}(\Gamma) \longrightarrow H^s(\Gamma) \times H^{s-1}(\Gamma), \tag{2.98}$$

$$V: \; H^{s-3}(\Gamma) \times H^{s-2}(\Gamma) \longrightarrow H^s(\Gamma) \times H^{s-1}(\Gamma) \tag{2.99}$$

*sont continus.*

***Preuve.*** Les opérateurs $L$ et $V$ sont continus comme conséquence du lemme (2.14). ■

**Théorème 2.16.** *(Inégalité de Guårding)*

*a) Il existe un opérateur compact* $T_L : H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ *tel que*

$$\langle L\nu, \nu\rangle \geq c\|\nu\|^2_{H^{3/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} - \langle T_L\nu, \nu\rangle, \tag{2.100}$$

$\forall \nu \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

*b) Il existe un opérateur compact* $T_V : H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ *tel que*

$$\langle V\mu, \mu\rangle \geq c\|\mu\|^2_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{-1/2}(\Gamma)} - \langle T_V\mu, \mu\rangle, \tag{2.101}$$

$\forall \mu \in H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$.

Ce théorème affirme que les opérateurs matriciels de simple et de double couche $V$ et $L$ sont fortement elliptiques ce qui implique que l'alternative de Fredholm s'applique, donc l'unicité implique l'existence d'une solution.

**Théorème 2.17.** *[47] Soit* $U^0 = (v^0, w^0)^t \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ *l'unique solution du système homogène*

$$LU^0 = 0. \tag{2.102}$$

*Alors* $U^0 = 0$.

**Théorème 2.18.** *[31] L'opérateur matriciel du potentiel de double couche*

$$L: \; H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \tag{2.103}$$

*est bijectif.*

***Preuve.*** le résultat est déduite d'après les théorèmes (2.16) et (2.17). ■

**Lemme 2.19.** *Le système des équations intégrales (2.97) associé au problème de Neumman (2.66) a une solution unique* $U \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

***Preuve.*** la preuve découle directement du théorème (2.18). ■

Chapitre

3

# Problème du Laplacien avec une condition intégrale non linéaire au bord

## 3.1 Introduction

Pour le problème de Laplace, la condition la plus simple qu'on peut imposer est la condition de frontière de Dirichlet. Le problème de Dirichlet pour l'équation de la Laplace peut être résolu facilement en utilisant l'équation integrale de frontière [45].

Si la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ est indiquée en tout point de la frontière (c-à-d, la condition de Neumann) avec la condition de compatibilité $\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s = 0$, alors donner la valeur de $u$ en un point sur $\Gamma$ permet d'obtenir une solution unique [45].

Ici, on impose des conditions de frontière plus générales, à savoir l'équation intégrale non linéaire de type Urysohn ([50] ; [60]) pour le premier problème et une condition intégrale non linéaire oblique pour le deuxième problème.

Beaucoup d'attention a été prêtée à la résolution des problèmes aux limite pour les opérateurs aux dérivées partielles avec des conditions de frontière non linéaires par la méthode d'équations intégrales, dans différentes directions (voir par example, K. E. Atkinson [12], [13] , Ruotssalainen et Wendland [81]).

Les problèmes impliquant des non linéarités forment une base des modèles mathématiques de divers phénomènes et processus équilibrés en mécanique et en physique. En particulier, le transfert de la chaleur équilibré. En outre quelques problèmes électromagnétiques contiennent des non-linéarités dans les conditions de frontière, par exemple les problèmes, où la conductivité électrique de la frontière est variable [17]. D'autres applications surgissent dans le rayonnement thermique et le transfert de la chaleur [22], [17].

## 3.2 Problème du Laplacien avec une condition intégrale non linéaire au bord.

### 3.2.1 Formulation de problème

Ici, on cherche la solution de l'équation de Laplace avec des conditions non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \int_\Gamma \mathcal{K}(x, y, u(y)) \mathrm{d}\gamma_y = f(x), \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

On rappelle que l'opérateur intégral non linéaire de frontière défini par

$$\mathcal{A}(x, u(x)) = \int_\Gamma \mathcal{K}(x, y, u(y)) \mathrm{d}\gamma_y, \; x \in \Gamma \tag{3.2}$$

est l'opérateur intégral non linéaire de type Urysohn.

Dans le problème (3.1), on suppose que $\Omega$ est une region ouverte bornée dans $\mathbb{R}^2$ avec une frontière lisse $\partial\Omega = \Gamma$, et

$$f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \; \mathcal{K} : \Gamma \times \Gamma \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont des fonctions à valeurs réels.

### 3.2.2 Formule représentative et équation intégrale

Tout d'abord, on considère quelques opérateurs intégraux standard de frontière. Pour $x \in \Omega$, le poteniel de simple couche est defini par

$$\mathcal{S}_\Omega u(x) := -\int_\Gamma E(x, y) u(y) \, \mathrm{d}\gamma_y,$$

et le poteniel de double couche comme

$$\mathcal{D}_\Omega u(x) := \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n} E(x, y) u(y) \, \mathrm{d}\gamma_y.$$

#### Formule représentative

En utilisant l'identité de Green pour les fonctions harmoniques

$$u(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} E(x,y) u(y) \, \mathrm{d}\gamma_y - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) E(x,y) \, \mathrm{d}\gamma_y, \quad x \in \Omega. \tag{3.3}$$

La formule de représentation (3.3) peut être maintenant écrite, en termes des potentiels de simple et de double couche, comme

$$u(x) = \mathcal{D}_\Omega u(x) + \mathcal{S}_\Omega \frac{\partial u}{\partial n}(x), \text{ for } x \in \Omega. \tag{3.4}$$

#### Equation intégrale

Soit $x$ tendant vers un point sur la frontière $\Gamma$ et avec la continuité du potentiel de simple couche $\mathcal{S}_\Omega$ et les relations de saut du potentiel de double couche $\mathcal{D}_\Omega$, on peut écrire l'équation intégrale sur la frontière $\Gamma$ comme

$$u(x) - Du(x) = S\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)(x), \; x \in \Gamma \tag{3.5}$$

où, pour $x \in \Gamma$,

$$S\mu(x) = -2\int_\Gamma E(x,y)\mu(y) \, \mathrm{d}\gamma_y,$$

et

$$D\nu(x) = 2\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n} E(x,y)\nu(y) \, \mathrm{d}\gamma_y.$$

Clairement, si $u \in H^1(\Omega)$ est la solution de (3.1), alors les données de Cauchy $u|\Gamma$ et $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma$ satisfont l'équation intégrale (3.5). D'après la condition de frontière

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = -\mathcal{A}(x, u(x)) + f(x), \tag{3.6}$$

on obtient l'équation intégrale

$$(I - D)(x) + S\mathcal{A}(x, u(x)) = Sf(x), \; x \in \Gamma. \tag{3.7}$$

Réciproquement, si $u|_\Gamma$ résout (3.7), alors la solution de (3.1) peut être donnée par la formule de représentation (3.3) et satisfait (3.6) d'après (3.7).

### 3.2.3 Existence et unicité

#### Solvabilité de l'équation intégrale non linéaire

Pour étudier la solvabilitée de l'équation intégrale non linéaire (3.7), on introduit quelques hypothèses.

($\mathscr{H}_1$) diam($\Omega$) $< 1$.

($\mathscr{H}_2$) Le noyau $\mathcal{K}(.,.,.)$ de l'opérateur d'Urysohn est une fonction de Carathéodory [60].

($\mathscr{H}_3$) $\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{K}(x,y,u)$ est measurable et satisfait

$$0 < a \leq \frac{\partial}{\partial u}\mathcal{K}(x,y,u) \leq b < \infty,$$

pour quelques constantes $a, b$.

**Remarque 3.1.** *a) L'opérateur $S$ peut avoir des fonctions propres [45], alors ($\mathscr{H}_1$) assure que l'opérateur intégrale*

$$S : H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s+1}(\Gamma)$$

*est un isomorphisme pour tout $s \in \mathbb{R}$ et*

$$\langle S\mu, \mu\rangle \geq c\|\mu\|^2_{H^{-1/2}},$$

*pour tout $\mu \in H^{-1/2}$ avec $c > 0$, [45].*

*b) Le noyau $K(.,.,.)$ est une fonction de Carathéodory , c-à-d,. $K(.,.,u)$ est measurable pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $K(x,y,.)$ est continue pour tout $x, y \in \Gamma$.*

*c) L'hypothèse ($\mathscr{H}_3$) implique que l'opérateur de Nemytskii*

$$\mathcal{A} : L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma)$$

*est Lipschitz continu et fortement monotone tel que*

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle \geq a\, mes(\Gamma)\|u - v\|_0^2, \tag{3.8}$$

*pour tout $u, v \in L^2(\Gamma)$.*

**Théorème 3.2.** *Supposons que les hypothèses ($\mathscr{H}_1$), ($\mathscr{H}_2$) et ($\mathscr{H}_3$) satisfont. Alors, pour tout $f \in H^{-1/2}$ l'équation intégrale non linéaire de frontière (3.7) a une solution unique dans $H^{1/2}(\Gamma)$.*

***Preuve.*** La preuve est garantié par le théorème de Browder et Minty sur les opérateurs monotones [81], [89].
Quand l'opérateur du potentiel de simple couche sur $\Gamma$

$$S : H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

est un isomorphisme il suffit de considérer l'unique solvabilité de l'équation

$$\mathcal{B}u(x) := S^{-1}(I - D)u(x) + \mathcal{A}(x, u(x)) = f(x),\ x \in \Gamma. \tag{3.9}$$

On doit prouver que l'opérateur

$$\mathcal{B} : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \tag{3.10}$$

est continu et fortement monotone.

**i)** Premièrement, on va montrer que l'opérateur $\mathcal{B}$ est continu :

Il est clair de la propriété de continuité des opérateurs de simple et de double couche, que

$$S^{-1}(I-D) : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

est continu. Et d'aprés $(\mathscr{H}_3)$

$$\mathcal{A} : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

est continu. Par conséquence, l'opérateur intégral (3.10) est continu.

**ii)** Deuxièmement, on va montrer que l'opérateur $\mathcal{B}$ est fortement monotone.

La fonction $\mu \in H^{-1/2}(\Gamma)$ définie par

$$\mu(x) := S^{-1}(I-D)u(x)$$

pour tout $u(x) \in H^{1/2}(\Gamma)$, est la dérivée normale de la fonction harmonique

$$\nu(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} E(x,y)u(y) \, \mathrm{d}\gamma_y - \int_\Gamma \mu(y)E(x,y) \, \mathrm{d}\gamma_y,$$

pour $x \in \Omega$. Ceci signifie que $\nu$ satisfait le problème

$$\begin{cases} \Delta\nu(x) = 0, & x \in \Omega \\ \nu(x) = u(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{3.11}$$

Alors le théorème de Green implique

$$\langle S^{-1}(I-D)u, u\rangle = \int_\Gamma \mu u \; ds = \int_\Gamma \frac{\partial \nu}{\partial n} u \; ds = \int_\Gamma \frac{\partial \nu}{\partial n} \nu \; ds = \int_\Omega (\nabla\nu)^2 \; dx.$$

par conséquence, pour tout $u, v \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\langle S^{-1}(I-D)(u-v), u-v\rangle = \int_\Omega (\nabla(\nu_1-\nu_2))^2 \; dx = |\nu_1-\nu_2|^2_{H^1(\Omega)} \tag{3.12}$$

où $(\nu_1 - \nu_2)$ dénote la fonction harmonique correspondante aux données de Cauchy $u-v$ et $S^{-1}(I-D)(u-v)$.

D'autre part, on note qu'il existe $(\eta_1 - \eta_2) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, tel que

$$S(\eta_1 - \eta_2) = u - v,$$

sur $\Gamma$, [67]. En conséquence pour tout $x \in \Omega$, on a

$$\mathcal{S}_\Omega(\eta_1 - \eta_2) = \nu_1 - \nu_2$$

le potentiel de simple couche

$$\mathcal{S}_\Omega : H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s+3/2}(\Omega)$$

est continu, pour tout $s \in \mathbb{R}$ [67]. Pour $s = -\frac{3}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|\nu_1 - \nu_2\|_{L^2(\Omega)} &\leq c_1 \|\eta_1 - \eta_2\|_{H^{-3/2}(\Gamma)} \\
&\leq c_2 \|u - v\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\
&\leq c_3 \|u - v\|_0,
\end{aligned}$$

avec $c_1, c_2$ et $c_3$ des constantes positives.
Par conséquence on a

$$\|u - v\|_0 \geq \frac{1}{c_3} \|\nu_1 - \nu_2\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.13}$$

Alors avec (3.9) and (3.10) on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{B}u - \mathcal{B}v, u - v \rangle &= \langle S^{-1}(I - D)(u - v), u - v \rangle + \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v \rangle \\
&= |\nu_1 - \nu_2|^2_{H^1(\Omega)} + \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v \rangle
\end{aligned}$$

et avec (3.8) on obtient l'inégalité

$$\langle \mathcal{B}u - \mathcal{B}v, u - v \rangle \geq |\nu_1 - \nu_2|^2_{H^1(\Omega)} + a\, mes(\Gamma) \|u - v\|_0^2$$

et d'après (3.12) on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{B}u - \mathcal{B}v, u - v \rangle &\geq |\nu_1 - \nu_2|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{a\, mes(\Gamma)}{c_3^2} \|\nu_1 - \nu_2\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \min\left\{1, \frac{a\, mes(\Gamma)}{c_3^2}\right\} \left(|\nu_1 - \nu_2|^2_{H^1(\Omega)} + \|\nu_1 - \nu_2\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\geq \min\left\{1, \frac{a\, mes(\Gamma)}{c_3^2}\right\} \|\nu_1 - \nu_2\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\geq c_4 \|u - v\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)},
\end{aligned}$$

d'après le théorème de trace [5], [67]. Ce qui complète la preuve. ■

### Régularité de la solution

Maintenant, on prouve la régularité de la solution de l'équation intégrale non linéaire (3.7).

**Théorème 3.3.** *Pour tout $Sf \in H^s(\Gamma), \frac{1}{2} \leq s \leq 2$, l'unique solution de l'équation intégrale non linéaire (3.7) est dans l'espace $H^s(\Gamma)$.*

Dans la preuve de ce théorème on a besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.4.** *Pour tout $u \in H^s(\Gamma), 0 \leq s \leq 1$, on a $\mathcal{A}(u) \in H^s(\Gamma)$ et l'opérateur $\mathcal{A} : H^s(\Gamma) \longrightarrow H^s(\Gamma)$ est borné.*

***Preuve.*** Pour $s = 0, u \in H^0(\Gamma) := L^2(\Gamma)$, a été déjà prouvé.
pour $s = 1, u \in H^1(\Gamma), u$ est une fonction absolument continue. D'après l'hypothèse $(H_3)$ la fonction $\mathcal{A}u(x)$ est Lipschitz continue. Par conséquence $\mathcal{A}u(x)$ est aussi une fonction absolument continue.
Il reste de prouver le cas où $0 < s < 1$, Par l'hypothèse $(H_3)$ et D'après la définition de l'espace de Sobolev, on a

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|\mathcal{A}(u)(x) - \mathcal{A}(u)(y)|^2}{|x-y|^{1+2t}} \mathrm{d}\gamma_x \, \mathrm{d}\gamma_y \leq b^2 (mes(\Gamma))^2 \|u\|^2_{H^s(\Gamma)}. \tag{3.14}$$

Ce qui complète la preuve du lemme (3.4). ■

***Preuve.*** du théorème (3.3)
Soit $Sf \in H^s(\Gamma), \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{2}$, donné. Par le Théorème (3.2), il existe unique solution $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ de l'équation intégrale non linéaire

$$(I - D)u + S\mathcal{A}u = Sf.$$

Le lemme (3.4) assure que

$$Sf - S\mathcal{A}u \in H^s(\Gamma)$$

donc

$$(I - D)u \in H^s(\Gamma).$$

Ceci implique, avec les propriétés de Fredholm de l'opérateur du potentiel de double couche, que $u \in H^s(\Gamma), \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{2}$. ■

**Exemple 3.5.** *Ici on va donner un exemple pour illustrer les résultats théoriques. On considère le problème harmonique*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \text{ Dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \int_\Gamma (2u(y) + \sin u(y)) \, \mathrm{d}\gamma_y = f(x), \; x \in \Gamma. \end{cases} \tag{3.15}$$

*où l'équation intégrale non linéaire de type Urysohn est définie par*

$$\mathcal{A}u(x) = \int_\Gamma (2u(y) + \sin u(y)) \, \mathrm{d}\gamma_y, \; x \in \Gamma$$

*et le domaine est*

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \, ; x_1^2 + x_2^2 < r^2 < 1/4\}$$

*Clairement, la non linéairité satisfait les hypothèses $(\mathscr{H}_1), (\mathscr{H}_2)$ et $(\mathscr{H}_3)$ tel que*

$$diam(\Omega) = 2r < 1$$

.

*Le noyau $(2u(y) + \sin u(y))$ de l'équation intégrale non linéaire d'Urysohn est une fonction Carathéodory. Et*

$$\frac{\partial \mathcal{K}(x, y, u)}{\partial u} = 2 + \cos u(y)$$

*est measurable satisfaisant*

$$1 \leq \frac{\partial((2u(y) + \sin u(y)))}{\partial u} \leq 3 < \infty.$$

*qui implique que l'opérateur de Nemytskii*

$$\mathcal{A} : L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma)$$

*est Lipschitz continu et fortement monotone tel que*

$$2\pi r\|u - v\|_0^2 \leq \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle \leq 6\pi r\|u - v\|_0^2$$

*por tout* $u, v \in L^2(\Gamma)$.

## 3.3 Problème du Laplacien avec une condition oblique non linéaire au bord.

### 3.3.1 Formulation de problème

Ici, nous cherchons la solution de l'équation harmonique avec des conditions non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \frac{\partial u}{\partial r}(x) + \int_\Gamma \mathcal{K}(x, y, u(y))\mathrm{d}\gamma_y = g(x), \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \tag{3.16}$$

Dans le problème (3.16), on suppose que $\Omega$ est une région ouverte bornée dans $\mathbb{R}^2$ avec une frontière $\partial\Omega = \Gamma$, et

$$g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \ \mathcal{K} : \Gamma \times \Gamma \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont des fonctions données à valeurs réels.

### 3.3.2 Formules représentatives et équations intégrales

#### Formules représentatives

En appliquant la même procédure comme dans la section (3.2.2), on obtient les formules de représentations

$$u(x) = \int_\Gamma \frac{\partial E}{\partial n_y}(x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}\gamma_y - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n_y}(y)\, E(x, y)\, \mathrm{d}\gamma_y, \tag{3.17}$$

pour $x \in \Omega$. Cette formule peut être maintenant écrite, en termes de potentiel de simple et de double couche, comme

$$u(x) = \mathcal{D}_\Omega u(x) + \mathcal{S}_\Omega \frac{\partial u}{\partial n}(x), \text{ pour } x \in \Omega \tag{3.18}$$

### Equation intégrale

Soit $x$ tendant vers un point sur la frontière $\Gamma$. Avec la continuité du potentiel de simple couche $\mathcal{S}_\Omega$ et les relations de saut du potentiel de double couche $\mathcal{D}_\Omega$, nous obtenons l'équations intégrale

$$u(x) - Du(x) = S\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)(x), \quad \text{sur } \Gamma \tag{3.19}$$

en termes des opérateurs intégraux au bord $S,\ D$.

Clairement, si $u \in H^1(\Omega)$ est la solution de (3.16), alors les données de Cauchy $(\mu_1, \mu_2) = (u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma)$ satisfont l'équation intégrale (3.19). D'après la condition de frontière,

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \frac{\partial u}{\partial r}(x) - \mathcal{A}(x, u(x)) + g(x), \quad \text{sur } \Gamma, \tag{3.20}$$

on obtient l'équation intégrale

$$u(x) - Du(x) = -S\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)(x) - S(\mathcal{A}(x, u(x))) + Sg(x), \quad x \in \Gamma, \tag{3.21}$$

qui peut être écrite comme

$$(I - D)u(x) + S(\frac{\partial u}{\partial r})(x) + S(\mathcal{A}(x, u(x))) = Sg(x), \quad x \in \Gamma \tag{3.22}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par (3.2).

D'autre part, nous avons que

$$S\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)(x) := -2\int_\Gamma E(x,y)\frac{\partial u}{\partial r}(y)\, \mathrm{d}\gamma_y \tag{3.23}$$

et comme,

$$\begin{aligned} 0 &= -2\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial r}\{u(y)E(x,y)\}\, \mathrm{d}\gamma_y \\ &= -2\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial r}(y)E(x,y)\, \mathrm{d}\gamma_y - 2\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial r}E(x,y)u(y)\, \mathrm{d}\gamma_y, \end{aligned} \tag{3.24}$$

alors nous avons que

$$S\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)(x) = D'u(x) := 2\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial r}E(x,y)u(y)\, \mathrm{d}\gamma_y \tag{3.25}$$

donc l'équation (3.22) peut être écrite comme

$$(I - D + D')u(x) + S\mathcal{A}(x, u(x)) = Sg(x), \quad \text{sur } \Gamma. \tag{3.26}$$

### 3.3.3 Existence et unicité

#### Solvabilité de l'équation intégrale non linéaire

Pour étudier la solvabilité de l'équation intégrale non linéaire (3.22), on impose les mêmes hypothèses comme pour le problème précédent, c'est à dire $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ et $\mathscr{H}_3$.

**Théorème 3.6.** *Supposons que les hypothèses* $(\mathscr{H}_1), (\mathscr{H}_2)$ *et* $(\mathscr{H}_3)$ *satisfont. Alors, pour tout* $g \in H^{-1/2}$ *l'équation intégrale non linéaire de frontière (3.22) a une solution unique dans* $H^{1/2}(\Gamma)$.

***Preuve.*** Pour la preuve, nous avons suivis la même procédure comme dans la preuve du théorème (3.3). L'opérateur du potentiel de simple couche sur $\Gamma$

$$S : H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$$

est un isomorphisme pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $\mu \in H^{-1/2}(\Gamma)$ on a

$$(S\mu, \mu) \geq c\|\mu\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

avec $c > 0$. Donc il suffit de considérer l'unique solvabilité de l'équation

$$\mathcal{G}u(x) := S^{-1}(I - D + D')u(x) + \mathcal{A}(x, u(x)) = g(x),\ x \in \Gamma. \tag{3.27}$$

Nous devons prouver que l'opérateur

$$\mathcal{G} : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \tag{3.28}$$

est continu et fortement monotone.

**i)** Premièrement, on va montrer que l'opérateur $\mathcal{G}$ est continu :

Il est clair, en vue les propriétés de continuité des opérateurs de simple et de double couche, que

$$S^{-1}(I - D + D') : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

est continu. Et d'après l'hypothèse $(\mathscr{H}_3)$ on obtient que

$$\mathcal{A} : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

est continu. Par conséquence, l'opérateur intégral (3.28) est continu.

**ii)** Deuxièmement, on va montrer que l'opérateur $\mathcal{G}$ est fortement monotone.

Soit $\mu \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$ définé par

$$\mu(x) := S^{-1}(I - D + D')u(x)$$

La fonction $u(x) \in H^{1/2}(\Gamma)$, est la dérivée normale du fonction harmonique

$$\nu(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y)u(y)\, \mathrm{d}\gamma_y - \int_\Gamma \mu(y)E(x, y)\, \mathrm{d}\gamma_y$$

pour $x \in \Omega$, ceci signifie que $\nu$ satisfait le problème

$$\begin{cases} \Delta\nu(x) = 0, & x \in \Omega \\ \nu(x) = u(x), & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{3.29}$$

Alors le théorème de Green implique

$$\langle S^{-1}(I - D + D')u, u\rangle = \int_\Gamma \mu u \, ds = \int_\Gamma \frac{\partial \nu}{\partial n} u \, ds = \int_\Gamma \frac{\partial \nu}{\partial n} \nu \, ds = \int_\Omega (\nabla \nu)^2 \, dx.$$

par conséquence, pour tout $u, v \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\langle S^{-1}(I - D + D')(u - v), u - v\rangle = \int_\Omega (\nabla(\nu_1 - \nu_2))^2 \, dx = |\nu_1 - \nu_2|^2_{H^1(\Omega)} \tag{3.30}$$

où $(\nu_1 - \nu_2)$ dénote la fonction harmonique correspondante aux données de Cauchy $u - v$ et $S^{-1}(I - D + D')(u - v)$.

D'autre part, d'après (3.27) et (3.8) nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}u - \mathcal{G}v, u - v\rangle &= \langle S^{-1}(I - D + D')(u - v), u - v\rangle + \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle \\ &= |\nu_1 - \nu_2|^2_{H^1(\Omega)} + \langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle \end{aligned}$$

et avec (3.25) on obtient l'inégualité

$$\langle \mathcal{G}u - \mathcal{G}v, u - v\rangle \geq |\nu_1 - \nu_2|^2_{H^1(\Omega)} + a \, mes(\Gamma) \|u - v\|_0^2$$

et d'après (3.27) on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}u - \mathcal{G}v, u - v\rangle &\geq |\nu_1 - \nu_2|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{a \, mes(\Gamma)}{c_3^2} \|\nu_1 - \nu_2\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \min\left\{1, \frac{a \, mes(\Gamma)}{c_3^2}\right\} \left(|\nu_1 - \nu_2|^2_{H^1(\Omega)} + \|\nu_1 - \nu_2\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\geq \min\left\{1, \frac{a \, mes(\Gamma)}{c_3^2}\right\} \|\nu_1 - \nu_2\|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\geq c_4 \|u - v\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \end{aligned}$$

d'après le théorème de trace [5], [45]. Ce qui complète la preuve. ■

Chapitre

# 4

# Problème du Bi-Laplacien avec une condition intégrale non linéaire au bord

## 4.1 Introduction

Les problèmes concernant des non linéairités forment une base des modèles mathématiques de défférents phénomènes et processus dans la méchanique et la physique appliquées.

Dans les travaux [84] et [81], des conditions non linéaires au bord pour l'équation de Laplace sont considérées. Utilisant la méthode des équations intégrales de frontière le problème est traduit en une équation intégrale non linéaire pour les données inconnues du frontière. Pour étudier la solvabilité de l'équation non linéaire les auteurs donnent quelques hypothèses sur la partie non linéaire.

Le but de ce chapitre est de voir la possibilité de prolonger l'approche dans [84] et [81] pour l'équation harmonique à l'équation biharmonique.

Les équations bi-harmoniques forment une classe importante des équations dans la physique et science de l'ingénieur. Beaucoup de problèmes dans l'élasticité peuvent être aussi formulés en terme d'équation bi-harmonique où les quantités fondamentales physiques telles que les équations de déplacement et de trace, toutes satisfont l'équation bi-harmonique. Elles ont des activités extensives de recherche sur le bi-harmonique dans la théorie et la pratique (voir, par exemple, [47], [26]).

## 4.2 Formulation de problème

Dans ce travail, nous nous intéréssons à la solution de l'équation Bi-harmonique avec une condition intégrale non linéaire. Nous considérons ici le problème potentiel non linéaire

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) & = 0, \ x \in \ \Omega, \\ \Delta u(x) & = -\int_\Gamma \mathcal{K}_1\left(x, u(y), \frac{\partial u}{\partial n}(y)\right) \, \mathrm{d}s_y + f(x), \text{ sur } \Gamma, \\ -\partial_n \Delta u(x) & = -\int_\Gamma \mathcal{K}_2\left(x, u(y), \frac{\partial u}{\partial n}(y)\right) \, \mathrm{d}s_y + g(x), \ x \in \ \Gamma. \end{cases} \tag{4.1}$$

Les fonctions $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et $g \in H^{-3/2}(\Gamma)$ sont données et définies sur la frontière $\Gamma$. L'opérateur $\Delta^2$ est défini ici par (2.67) pour $\rho = 1$ c'est à dire ;

$$\Delta^2 u(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) \tag{4.2}$$

Physiquement, $\Delta u$ est le moment de flexion et $-\partial_n \Delta u$ est la force transversale constituée de la force de cisaillement et la force de torsion. Pour $u \in H^2(\Omega)$ nous avons que $u|_\Gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et $\partial u|_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Dans (4.1) nous supposons que $\Omega$ est un domaine ouvert borné dans $\mathbb{R}^2$ avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$, et

$$f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ \mathcal{K}_1 : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ \mathcal{K}_2 : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

sont des fonctions données à valeurs réelles avec certains hypothèses précises sur $\mathcal{K}_i, i = 1, 2$ que nous allons indiquer dans la suite. On note par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial n}(x)\right) &= \int_\Gamma \mathcal{K}_1\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial n}(x)\right) \mathrm{d}\gamma_y, \ x \in \Gamma, \\ \mathcal{A}_2\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial n}(x)\right) &= \int_\Gamma \mathcal{K}_2\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial n}(x)\right) \mathrm{d}\gamma_y, \ x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{4.3}$$

les opérateurs intégraux non linéaires d'Uryson.

Maintenant, l'intégration par partie conduit à la première formule de Green sous forme

$$\int_\Omega \Delta^2 u \,.v \,\mathrm{d}x = a(u, v) - \int_\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial n_y} \Delta u - v \,\partial_n \Delta u\right) \mathrm{d}\gamma_y. \tag{4.4}$$

où la forme bilinéaire $a(u, v)$ est définie par

$$a(u, v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v \mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

Nous notons que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est bien définie pour des fonctions dans $H^2(\Omega)$. Maintenant soit $u \in H^2(\Omega, \Delta^2)$ où

$$H^2(\Omega, \Delta^2) = \{u \in H^2(\Omega); \Delta^2 u \in \widetilde{H}^{-2}(\Omega)\}$$

avec $\widetilde{H}^{-2}(\Omega)$ denote l'espace dual de l'espace $H^2(\Omega)$ et on choisit $v \in H^2(\Omega)$. Alors la formule de Green (4.5) est satisfaite et par l'argument de dualité on trouve que $\Delta u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $-\partial_n \Delta u \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$.

Par la méthode des équations intégrales, nous formulons un système des équations intégrales non linéaires sur la frontière $\Gamma$ du domaine $\Omega$. Sous quelques hypothèses sur les noyaux $\mathcal{K}_i(x, u, \partial_n u)$ des équations intégrales non linéaires nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution.

## 4.3 Méthode des équations intégrales de frontière

Pour reformuler le problème (4.1) en un système des équations intégrales non linéaires, nous commençons avec la représentation de Green de la solution faible dans $H^2(\Omega)$

$$u(x) = \mathbb{V}\left(\Delta u(x), -\partial_n \Delta u(x)\right) - \mathbb{W}\left(u(x), \frac{\partial u}{\partial n}(x)\right), \ x \in \Omega, \tag{4.6}$$

en termes de potentiel de simple et de double couche [21], et [47]. Ici

$$\mathbb{V}: \ H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma) \longrightarrow H^2(\Omega), \ \text{ et } \ \mathbb{W}: \ H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^2(\Omega)$$

sont des opérateurs continus et définis par

$$\mathbb{V}\left(\Delta u, -\partial_n \Delta u\right)(x) = \int_\Gamma \left(E(x,y)\partial_n \Delta u(y) + \frac{\partial}{\partial n_y} E(x,y)\Delta u(y)\right) \mathrm{d}\gamma_y. \tag{4.7}$$

$$\mathbb{W}\left(u, \partial_n u\right)(x) = \int_\Gamma \left(\Delta_y E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial}{\partial n_y} E(x,y)\Delta u(y)\right) \mathrm{d}\gamma_y. \tag{4.8}$$

où

$$E(x,y) = \frac{1}{8\pi}|x-y|^2 \log|x-y|,$$

est la solution fondamentale de l'équation biharmonique.

Pour $x \in \Gamma$ la procedure standard dans la théorie de potentiel implique les relations de saut ; nous obtenons donc les équations intégrales suivantes sur $\Gamma$, (voir [21], et [47])

$$\begin{aligned} u(x) \ &= \ \int_\Gamma \left(E(x,y)\left(-\frac{\partial u}{\partial n}(y)\right) + \frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)\Delta u(y)\right) \mathrm{d}\gamma_y + \frac{1}{2}u(x) \\ &- \ \int_\Gamma \left(\Delta_y E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) + (-\partial_{n_y}\Delta E(x,y) u(y)\right) \mathrm{d}\gamma_y. \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial u}{\partial n}(x) \quad &= \int_\Gamma \left( \frac{\partial E}{\partial n_x}(x,y)(-\partial_n \Delta u(y) + \frac{\partial^2 E}{\partial n_x \partial n_y}(x,y)\Delta u(y) \right) \mathrm{d}\gamma_y \\ &- \int_\Gamma \left( \frac{\partial}{\partial n_x}\Delta_y E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) + \frac{\partial}{\partial n_x}(-\partial_{n_y}\Delta)E(x,y)u(y) \right) \mathrm{d}\gamma_y. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dans ce cas, pour construire les équations intégrales, nous avons besoin de définir les opérateurs sur la frontière.

**Définition 4.1.** Soit $u \in C^\infty(\Gamma)$, on définit les opérateurs intégraux suivants, pour $x \in \Gamma$, par

$$\mathcal{K}_{11}u(x) = \int_\Gamma \partial_y \Delta E(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

$$\mathcal{V}_{12}\frac{\partial u}{\partial n}(x) = -\int_\Gamma \Delta_y E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

$$\mathcal{V}_{13}\Delta u(x) = \int_\Gamma \frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

$$\mathcal{V}_{14}(-\Delta_y)u(x) = \int_\Gamma E(x,y)(-\Delta_y)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

$$\mathcal{D}_{21}u(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_x}(-\partial_n\Delta_y)E(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

$$\mathcal{K}_{22}\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \partial_n \mathcal{V}_{12}\frac{\partial u}{\partial n}(y) = -\int_\Gamma (-\partial_{n_x}\Delta)E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

$$\mathcal{V}_{23}u(x) = \partial_n \mathcal{V}_{13}\Delta u(x) = \int_\Gamma \frac{\partial^2 E}{\partial n_x \partial n_y}(x,y)\Delta u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

$$\mathcal{V}_{24}u(x) = \partial_n \mathcal{V}_{14}(-\partial_n\Delta)u(x) = \int_\Gamma \frac{\partial E}{\partial n_x}(x,y)(-\partial_n\Delta)u(y)\,\mathrm{d}\gamma_y,$$

Les propriétés des opérateurs intégraux dans la définition (4.1) sont collectés dans le lemme suivant.

**Lemme 4.2.** *(Voir [14], [21], [47] et [91]) Les opérateurs définis par :*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{K}_{11}: \ H^s(\Gamma) \longrightarrow H^s(\Gamma), & \mathcal{D}_{21}: \ H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s-1}(\Gamma) \\ \mathcal{V}_{12}: \ H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s+1}(\Gamma), & \mathcal{V}_{13}: \ H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s+3}(\Gamma) \\ & \\ \mathcal{V}_{14}: \ H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s+3}(\Gamma), & \mathcal{V}_{23}: \ H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s+1}(\Gamma) \\ \mathcal{V}_{24}: \ H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s+3}(\Gamma), & \mathcal{V}_{22}: \ H^s(\Gamma) \longrightarrow H^s(\Gamma) \end{array}$$

*sont continus.*

Pour réduire le problème (4.1) en équation intégrale sur la frontière $\Gamma$, nous considérons $u \in H^2(\Omega, \Delta)$ satisfaisant la condition de frontière du problème (4.1).

Si on introduit dans le système (4.9), (4.10) les fonctions données et les fonctions inconnues sur $\Gamma$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{lll} u(x) & = v(x) & \text{(fonction inconnue)} \\ \partial_n u(x) & = w(x) & \text{(fonction inconnue)} \end{array} \right. , x \in \Gamma, \tag{4.11}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u(x) & = \mathcal{A}_1(x, u(x), \partial_n u(x)) + f(x) \\ \partial_n \Delta u(x) & = \mathcal{A}_2(x, u(x), \partial_n u(x)) + g(x) \end{array} \right. , x \in \Gamma, \tag{4.12}$$

les équations (4.9) et (4.10) peuvent être s'écrites comme

$$\begin{aligned} (I + \mathcal{K}_{11})v - \mathcal{V}_{12}w + \mathcal{V}_{14}\mathcal{A}_2\,(x, v, w) + \mathcal{V}_{13}\mathcal{A}_1\,(x, v, w) &= \mathcal{V}_{14}g + \mathcal{V}_{13}f, \\ -\mathcal{D}_{21}v + (\frac{1}{2}I - \mathcal{K}_{22})w + \mathcal{V}_{24}\mathcal{A}_2\,(x, v, w) + \mathcal{V}_{23}\mathcal{A}_1\,(x, v, w) &= \mathcal{V}_{24}g + \mathcal{V}_{23}f, \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ce système des équations intégrales peut être écrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{11} & -\mathcal{V}_{12} \\ -\mathcal{D}_{21} & \frac{1}{2}I - \mathcal{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(x) \\ \\ \\ w(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{14} & \mathcal{V}_{13} \\ \mathcal{V}_{24} & \mathcal{V}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2(x, v, w) \\ \\ \\ \mathcal{A}_1(x, v, w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{14} & \mathcal{V}_{13} \\ \mathcal{V}_{24} & \mathcal{V}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x) \\ \\ \\ f(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.14}$$

que l'on peut s'écrire comme

$$L(U) + V(\mathcal{A}U) = V(F), \quad \text{sur } \Gamma \tag{4.15}$$

où

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + \mathcal{K}_{11} & -\mathcal{V}_{12} \\ -\mathcal{D}_{21} & \frac{1}{2}I - \mathcal{K}_{22} \end{pmatrix}, \ V = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{14} & \mathcal{V}_{13} \\ \mathcal{V}_{24} & \mathcal{V}_{23} \end{pmatrix}, \ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2(x, v, w) \\ \mathcal{A}_1(x, v, w) \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}.$$

## 4.4 Solvabilité du système non linéaire des équations intégrales

Pour étudier la solvabilité de l'équation non linéaire (4.15), nous donnons quelques hypothèses ici.

**Hypothèses**

$\mathcal{H}_1$) Les noyaux des opérateurs d'Urysohn $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ c'est à dire $\mathcal{K}_1(.,.,.)$ et $\mathcal{K}_2(.,.,.)$, sont des fonctions de carathéodory.

$\mathcal{H}_2$) Nous supposons que pour $x \in \Gamma$,

$$\mathcal{K}_1(x,.,.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ \mathcal{K}_2(x,.,.) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont différentiables et les dérivées sont bornées, vérifient

$$0 < a \leq \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial v} \leq l_1 < +\infty, \ \left| \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial w} \right| \leq b$$
$$0 < a \leq \frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial w} \leq l_2 < +\infty, \ \left| \frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial v} \right| \leq b.$$

avec $a, b$ et $l_i, \ i = 1, 2$ des constantes telles que $a > b$.

**Remarque 4.3. a.** *Les fonctions $\mathcal{K}_1(.,.,.)$ et $\mathcal{K}_2(.,.,.)$ sont des fonctions de Carathéodory, c-à-d., $\mathcal{K}_1(.,v,w)$ et $\mathcal{K}_2(.,v,w)$ sont measurables pour tout $v, w \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{K}_1(x,.,.)$ et $\mathcal{K}_2(x,.,.)$ sont continues pour tout $x \ \in \Gamma$.*

**b.** *L'hypothèse $\mathcal{H}_2$ implique que l'opérateur matriciel de Nemytskii*

$$\mathcal{A} : L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$$

*est Lipschitz continu et fortement monotone.*

– D'après le théorème de la valeur moyenne de Lagrange, il existe $\zeta_1, \zeta_2$ tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(v,w) - \mathcal{K}_1(v',w') &= \mathcal{K}_1(v,w) - \mathcal{K}_1(v',w) + \mathcal{K}_1(v',w) - \mathcal{K}_1(v',w') \\ &= \frac{\partial \mathcal{K}_1 \left(\zeta_1, w\right)}{\partial v}(v - v') + \frac{\partial \mathcal{K}_1 \left(v', \zeta_2\right)}{\partial w}(w - w'). \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{K}_1(v,w) - \mathcal{K}_1(v',w')\right)(v - v') &= \frac{\partial \mathcal{K}_1(\zeta_1, w)}{\partial v}(v - v')^2 + \frac{\partial \mathcal{K}_1(v', \zeta_2)}{\partial w}(v - v')(w - w') \\ &\geq a|v - v'|^2 - b|v - v'|.|w - w'| \\ &\geq a|v - v'|^2 - \frac{1}{2}b|v - v'|^2 - \frac{1}{2}b|w - w'|^2 \\ &\geq \left(a - \frac{1}{2}b\right)|v - v'|^2 - \frac{1}{2}b|w - w'|^2. \end{aligned} \tag{4.16}$$

donc

$$\langle (v - v'), \mathcal{A}_1(v,w) - \mathcal{A}_1(v',w') \rangle \geq mes(\Gamma) \left( \left(a - \frac{b}{2}\right)|v - v'|^2 - \frac{b}{2}|w - w'|^2 \right). \tag{4.17}$$

De la même manière, nous pouvons conclure que

$$\langle (w - w'), \mathcal{A}_2(v,w) - \mathcal{A}_2(v',w') \rangle \geq mes(\Gamma) \left( \left(a - \frac{b}{2}\right)|w - w'|^2 - \frac{b}{2}|v - v'|^2 \right). \tag{4.18}$$

Finalement, les deux inégalités (4.17) et (4.18), donnent

$$\begin{aligned}
\langle U-U', \mathcal{A}(U)-\mathcal{A}(U')\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} v-v' \\ w-w' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{A}_2(v,w)-\mathcal{A}_2(v',w') \\ \mathcal{A}_1(v,w))-\mathcal{A}_1(v',w') \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \langle (v-v'), \mathcal{A}_1(v,w)-\mathcal{A}_1(v',w')\rangle \\
&+\langle (w-w'), \mathcal{A}_2(v,w)-\mathcal{A}_2(v',w')\rangle \\
&\geq mes(\Gamma)\,(a-b)\,(\|v-v'\|^2+\|w-w'\|^2) \\
&\geq mes(\Gamma)\,(a-b)\,\|U-U'\|_0^2 \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

avec $U=(v,w), U'=(v',w') \in L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$. En conséquence, l'opérateur $\mathcal{A}(U)$ est fortement monotone.

- Pour la continuité de l'opérateur matriciel de Nemytskii $\mathcal{A}$ on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}_1(v,w)-\mathcal{K}_1(v'-w')| &= |\mathcal{K}_1(v,w)-\mathcal{K}_1(v',w)+\mathcal{K}_1(v',w)-\mathcal{K}_1(v'-w')| \\
&= \left| \frac{\partial \mathcal{K}_1(\zeta_1,w)}{\partial v}(v-v') + \frac{\partial \mathcal{K}_1(v',\zeta_2)}{\partial w}(w-w') \right| \\
&\leq l_1\,|v-v'| + b|w-w'| \\
&\leq \max\{l_1,b\}(|v-v'|+|w-w'|) \\
&\leq l_1(|v-v'|+|w-w'|) \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

alors nous avons que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_1(U)-\mathcal{A}_1(U')| &\leq mes(\Gamma) l_1 |U-U'| \\
|\mathcal{A}_1(U)-\mathcal{A}_1(U')|^2 &\leq mes^2(\Gamma) l_1^2 |U-U'|^2,
\end{aligned}$$

on intègre, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |\mathcal{A}_1(U)-\mathcal{A}_1(U')|^2\,\mathrm{d}s &\leq mes^2(\Gamma) l_1^2 \int_\Gamma |U-U'|^2 \mathrm{d}s \\
\left(\int_\Gamma |\mathcal{A}_1(U)-\mathcal{A}_1(U')|^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2} &\leq mes(\Gamma) l_1 \left(\int_\Gamma |U-U'|^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2} \\
\|\mathcal{A}_1(U)-\mathcal{A}_1(U')\| &\leq mes(\Gamma) l_1 \|U-U'\|_0. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

De la même manière , on peut obtenir que

$$\|\mathcal{A}_2(U)-\mathcal{A}_2(U')\| \leq mes(\Gamma) l_2 \|U-U'\|_0$$

alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}U-\mathcal{A}U'\|_0 &\leq mes(\Gamma)(l_1+l_2)\|U-U'\|_0, \\
&\leq mes(\Gamma) C_2 \|U-U'\|_0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que l'opérateur $\mathcal{A}$ est Lipschitz continu pour tout $U, U' \in L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$.

Se basant sur ces propriétés nous pouvons considérer la solvabilité du système (4.15).

**Théorème 4.4.** *On suppose que les hypothèses précédentes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont satisfaites, alors pour tout $F = (g, f) \in H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ le système (4.15) admet une solution unique $U = (v, w)$ dans $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.*

***Preuve.*** La preuve est donnée par le théorème de Browder et Minty sur les opérateurs monotones [23], [66].
L'opérateur de simple couche $V$ sur $\Gamma$

$$V : H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$$

est un isomorphisme. Il suffit de considérer l'unique solvabilité de l'équation

$$\mathcal{T}U := V^{-1}LU + \mathcal{A}U = F, \text{ sur } \Gamma. \tag{4.22}$$

On doit prouver que l'opérateur

$$\mathcal{T} : H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma) \tag{4.23}$$

est continu et fortement monotone.

**i).** Tout d'abord, on va montrer que $\mathcal{T}$ est continu :

Il est clair que les opérateurs $V$ et $L$ sont continus d'après le lemme (4.2), ce qui implique que l'opérateur défini par

$$V^{-1}L : H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma),$$

est continu. Et d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, l'opérateur

$$\mathcal{A} : H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$$

est continu. Alors on obtient que l'opérateur intégral (4.23) est continu.

**ii).** Maintenant, on doit montrer que l'opérateur $\mathcal{T}$ est fortement monotone.

La fonction $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in H^{-3/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ défini par

$$\mu(x) := V^{-1}LU(x), \text{ pourtout } U(x) = (v, w) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma),$$

est la donnée de Neumann (c'est à dire : $(\Delta\varphi, -\partial_n\Delta\varphi)$) de la fonction bi-harmonique :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \mathbb{V}(\Delta\varphi, -\partial_n\Delta\varphi) - \mathbb{W}\left(\varphi(x), \frac{\partial\varphi}{\partial n}(x)\right) \\ &= \mathbb{V}\mu(x) - \mathbb{W}U(x), \end{aligned} \tag{4.24}$$

pour $x \in \Omega$. Ceci implique que la fonction $\varphi$ satisfait le problème

$$\begin{cases} \Delta^2\varphi(x) = 0, & x \in \Omega \\ \varphi(x) = v(x), & x \in \Gamma \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = w(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

D'après le théorème de Green et la formule (4.4), on obtient que

$$\begin{aligned}\langle V^{-1}LU, U\rangle &= \int_\Gamma \mu_1 v \, \mathrm{d}s + \int_\Gamma \mu_2 w \, \mathrm{d}s \\ &= \int_\Gamma \Delta\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, \mathrm{d}s - \int_\Gamma \partial_n \Delta\varphi . \varphi \, \mathrm{d}s \\ &= a(\varphi, \varphi) \end{aligned} \tag{4.25}$$

La linéarité de $V^{-1}L$ implique que, pour tout $U, U' \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$,

$$\begin{aligned}\langle V^{-1}L(U-U'), U-U'\rangle &= a(\varphi-\varphi', \varphi-\varphi') \\ &= \textstyle\int_\Omega (\Delta(\varphi-\varphi'))^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.26}$$

D'autre part, on a

$$\|\varphi-\varphi'\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|U-U'\|_{H^{-3/2}(\Gamma)\times H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c\|U-U'\|_0.$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{T}U - \mathcal{T}U', U-U'\rangle &= \langle \mathcal{A}U - \mathcal{A}U', U-U'\rangle + \langle V^{-1}L(U-U'), (U-U')\rangle \\ &\geq mes(\Gamma)\,(a-b)\,\|U-U'\|_0^2 + a(\varphi-\varphi', \varphi-\varphi') \\ &\geq mes(\Gamma)\,(a-b)\,\|U-U'\|_0^2 \\ &\geq \frac{mes(\Gamma)}{c^2}\,(a-b)\,\|\varphi-\varphi'\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{mes(\Gamma)}{c^2}\,(a-b)\,\|U-U'\|_{H^{3/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}^2, \end{aligned} \tag{4.27}$$

d'après le théorème de trace (voir [21, 47]. Ce qui complète la preuve. ■

**Exemple 4.5.** *Ici on va donner un exemple pour illustrer les résultats théoriques. On considère le problème bi-harmonique*

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = 0, \text{ Dans } \Omega \\ \Delta u(x)(x) + \int_\Gamma (2u(y) + \sin u(y)) \, \mathrm{d}\gamma_y = f(x), \; x \in \Gamma \\ -\partial_n \Delta u(x)(x) + \int_\Gamma (2u(y) + \cos u(y)) \, \mathrm{d}\gamma_y = g(x), \; x \in \Gamma. \end{cases} \tag{4.28}$$

*où l'équation intégrale non linéaire de type Urysohn est définie par*

$$\mathcal{A}_1 u(x) = \int_\Gamma (2u(y) + \sin u(y)) \, \mathrm{d}\gamma_y = f(x), \; x \in \Gamma$$

$$\mathcal{A}_2 u(x) = \int_\Gamma (2u(y) + \cos u(y)) \, \mathrm{d}\gamma_y = g(x), \; x \in \Gamma$$

*et on prend le domaine :*

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \,; x_1^2 + x_2^2 < r^2 < 1/4\}$$

*Clairement, la non linéairité satisfait les hypothèses* $(\mathcal{H}_1), (\mathcal{H}_2)$.
*Les noyaux* $\mathcal{K}_1(y, u(y), \partial_n u(y)) = (2u(y) + \sin u(y))$, $\mathcal{K}_2(y, u(y), \partial_n u(y)) = (2u(y) +$

$\cos u(y))$ *des opérateurs intégraux* $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2$ *repectivements sont des fonctions de Carathéodory. Et*

$$\frac{\partial \mathcal{K}_1(y,u,\partial_n u)}{\partial u} = 2+\cos u(y)$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}_2(y,u,\partial_n u)}{\partial u} = 2-\sin u(y)$$

*sont measurables et satisfont*

$$1 \leq \frac{\partial((2u(y)+\sin u(y)))}{\partial u} \leq 3 < \infty.$$

$$1 \leq \frac{\partial((2u(y)+\cos u(y)))}{\partial u} \leq 3 < \infty.$$

*qui implique que les opérateurs de Nemytskii*

$$\mathcal{A}_1 : L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$$

$$\mathcal{A}_2 : L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$$

*sont Lipschitziens continus et fortement monotones tels que*

$$2\pi r\|u-v\|_0^2 \leq \langle \mathcal{A}_1 u - \mathcal{A}_1 v, u-v\rangle \leq 6\pi r\|u-v\|_0^2$$

$$2\pi r\|u-v\|_0^2 \leq \langle \mathcal{A}_2 u - \mathcal{A}_2 v, u-v\rangle \leq 6\pi r\|u-v\|_0^2$$

*pour tout* $u, v \in L^2(\Gamma)$.

# Conclusion et Perspectives

Les équations intégrales linéaires et non linéaires de différents types jouent un rôle important dans plusieurs branches de l'analyse fonctionnelle et leurs applications dans la théorie d'élasticité, physique mathématique et les problèmes de contact (voir [1], [2] , [3], [47], [100] et [52]).

En utilisant les potentiels de simple et de double couche et les opérateurs intégraux au bord, il est facile de transformer un problème aux limites pour le Bi-Laplacien en équations intégrales sur la frontière. Par exemple, le problème de Dirichlet et Neumann ramène immédiatement à des équations intégrales d'après les représentations intégrales [47]. Cependant, l'analyse de ces méthodes pour d'autre type des conditions au bord semble d'être plus compliquée.

Ici nous nous intéressons à la méthode des équations intégrales pour une fonction harmonique et bi-harmonique avec des conditions non linéaires au bord. Cette étude nous a permis d'étendre l'approche dans [84, 81] pour une fonction harmonique à une fonction bi-harmonique, pour résoudre le problème au limite du bi-Laplacien avec une condition intégrale non linéaire sur le bord.

Bien que nous avons seulement considérer le problème modèle du bi-Laplacien avec une condition intégrale non linéaire sur le bord d'un domaine de $\mathbb{R}^2$, l'application à d'autres opérateurs elliptiques (par exemple Helmhotz, p-Laplacien, ...) et avec des conditions aux limites plus générales, peut être réalisée.

# Bibliographie


[1] ABDOU, M. A., *On the solution of linear and nonlinear integral equation,* Applied Mathematics and computation, 146 (2003), 857-871.

[2] ABDOU, M. A and EL-SAYED, W. G and DEEBS, E.I. , *A solution of a nonlinear integral equation,* Applied Mathematics and computation, 160 (2005), 1-14.

[3] ABDOU, M.A. and Badr, A.A., *On a method for solving an integral equation in the displacement contact problem,* J. Appl. Math. Comp 127 (2002), 65Ű78.

[4] ABDURAKHMANOV, S and KARACHIK, V.V and TURMETOV, B.Kh. , *On solvability of some boundary value problems for Poisson equation.* Bulletin of South Ural State University, series "Mathematical Modelling, Programmind Computer Software", 4, 24-33 (2009).

[5] ADAMS, R. A. , *Sobolev Spaces.* New York : Academic Press (1975).

[6] AGARWAL, R. P and MEEHAN, M and OÍREGAN, D. , *Fixed point theory and applications,* Cambridge tracts in mathematics, (2001).

[7] AGMON, S. , *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems.* D.van Nostrand, Princeton, NJ. (1965).

[8] AGMON, S. , *Remarks on self-adjoint and semi-bounded elliptic boundary value problems.* inProc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960), pp. 1-13. Jerusalem Academic Press, Jerusalem, (1960).

[9] ALI, A. H. A and RASLAN, V. , *Variational iteration method for solving biharmonic equations,* Physics Letters A, 370 No. 5/6, 441-448 (2007).

[10] AMMARI, H., *An Introduction to Mathematics of Emerging Biomedical Imaging,* Springer, Berlin, (2008).

[11] ANDERSSON,L. E and ELFVING, T and GOLUB,G. H. , *Solution of biharmonic equations with application to radar imaging,* Journal of Computational and Applied Mathematics. 94 No. 2, 153-180 (1998).

[12] ATKINSON, K and CHANDLER, G. , *Boundary integral equation methods for solving Laplace's equation with nonlinear boundary conditions.* "Mathematics of computation, vol. 55, no. 192, pp. 451-472, (1990).

[13] ATKINSON, K. , *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind.* Published by Combridge University Press, 1997.

[14] AZIZ, A.K and BABUSKA, I. , *Mathematical foundation of the finite element method with applications to partial differential equations.* Academic Press, New York (1972).

[15] BARBU, V. , *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces.* Leiden : Noordhoff International Publishing (1976).

[16] BEGEHR, H. , *Dirichlet problems for the biharmonic equation,* General Math., 13 (2005), pp. 65-72.

[17] BIALECKI, R and NOWAK, A. G. , *Boundary value problems in heat conduction with nonlinear boundary conditions.* Applied Mathematical Modelling, vol. 5, pp. 417-421, (1981).

[18] BOURLARD, M and NICAISE, S. , *Abstract Green formula and applications to boundary integral equations.* Numer. Funct. Anal. Optim. , 18, 667-689 (1997).

[19] BREZIS, H. , *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications,* Dunod, Paris, (1999).

[20] BREZIS, H and BROWDER, F. E. , *Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type.* Advances in Math. 18, 115-147 (1975).

[21] BREBBIA, C. A and TELLES, J. C. F and WROBEL, L. C. , *Boundary Element Techniques.* Springer verlag, berlin edition, (1984).

[22] BREBBIA, C. A and TELLES, J. C. F and WROBEL, L. C. , *Nonlinear elliptic boundary value problems* I. Bull. Am. Math. Soc. 69, 862-875 (1963).

[23] BROWDER, F. E. , *Nonlinear elliptic boundary value problems* I. Bull. Am. Math. Soc. 69, 862-875 (1963)

[24] BROWDER, F. E. , *Nonlinear functional analysis and nonlinear integral equations of Hammerstein and Urysohn type, in 'Contributions to Nonlinear Functional Analysis'.* Academic Press, New York, 425-500 (1971).

[25] CALDERÓN, A. P. , *Boundary value problems for the Laplace equation in Lipschitzian domains, in Recent Progress in Fourier Analysis* (El Escorial, 1983), pp. 33-48. North-Holland Math. Stud., 111. North-Holland, Amsterdam, (1985).

[26] CAKONI, F and HSIAO, G. C and WENDLAND, W., *On the boundary integral equation method for a mixed boundary value problem of the biharmonic equation,* Complex Variables, v. 50, (2005), pp. 681-696.

[27] CHAZARIN, J and PIRIOU, A. *Introduction à la théorie des équatons aux dérivées partielles linéaires.* Gauthier-Villars, Paris (1981).

[28] CHEN, G and ZHOU, J. , *Boundary Element Methods.* Academic Press (1992).

[29] CIARLET, P. G., *Mathematical Elasticity.* Vol. I. Studies Math. Appl., 20. North-Holland, Amsterdam, (1988).

[30] COSTABEL, M. , *Boundary integral operators on Lipschitz domains : elementary results.* TH Darmstadt Preprint No. 898, (1985) (to appear in SIAM J. Math. Anal.)

[31] COSTABEL, M and DAUGE, M. , *Inversibility Of The Biharmonic Single Layer Potential Operator,* Institut De Recherche Mathéatique De Rennes, Prépublication 95-13, Rennes (1995).

[32] COSTABEL, M and STEPHAN, E. , *A direct integral equation method for transmission problems ,* J. Math. Anal. Appl. 106 (1985), 367-413.

[33] COSTABEL, M and STEPHAN, E and WENDLAND, W.L. , *On boundary integral equations of the first kind for the bi-Laplacian in a polygonal plane domain,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 10, 197-241 (1986).

[34] COSTABEL, M and WENDLAND, W.L. , *Strong ellipticity of boundary integral operators.* J. Reine Angew. Math. 372, 39-63, (1986).

[35] DAHLBERG, B. E. J and KENIG, C. E and PIPHER, J and VERCHOTA, G. C. , *Area integral estimates for higher order elliptic equations and systems.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 47, 1425-1461 (1997).

[36] DAHLBERG, B. E. J and KENIG, C. E and Verchota, G. C. , *The Dirichlet problem for the biharmonic equation in a Lipschitz domain.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 363, 109-135 (1986).

[37] DANG, Q. A. , *Iterative method for solving the Neumann boundary problem for biharmonic type equation,* Journal of Computational and Applied Mathematics. 196 No. 2 (2006) 634-643.

[38] DENG, Y and LI, Y. , *Regularity of the solutions for nonlinear biharmonic equations in $R^N$,* Acta Mathematica Scientia. 29B No. 5 (2009) 1469-1480.

[39] FABES, E. B and JODEIT, M. Jr and RIVIÈRE, N. M. , *Potential techniques for boundary value problems on $C_1$-domains.* Acta Math., 141, 165-186 (1978).

[40] GAO, W. J. , *Layer potentials and boundary value problems for elliptic systems in Lipschitz domains.* J. Funct. Anal., 95, 377-399 (1991).

[41] GIROIRE, J and NÉDÉLEC, J.C. , *A new system of boundary integral equations for plates with free edges* Math. Methods Appl. Sci., 18, 755-772 (1995).

[42] GIROIRE, J and NÉDÉLEC, J.C. , *Numerical solution of exterior neumann problem using a double layer potentiel.* Math.Comp., V(32) :62-73, (1968).

[43] GUNTHER, S. , *Boundary Integral Operators For Plate Bending In Domains With Corners.* Weierstrass Institute For Applied Analysis And Stochastics, Monhrenster. 39, D-10117 Berlin, Germany.

[44] HE, W. J. , *An equivalent boundary integral formulation for bending problems of thin plates,* Comput. Struct., 74, 319-322 (2000).

[45] HSIAO, G. C and WENDLAND, W. L. , *A finite element method for some integral equations of the first kind.* J. Math. Anal. Appl. 58, 449-481 (1977).

[46] HSIAO, G. C and WENDLAND, W. L. , *Boundary element methods.* foundation and error analysis in Encyclopedia of Computational Machanics. E. Stein, R. deBrost and T. J. R. Hughes, John Wiley Sons (2004).

[47] HSIAO, G. C and W.L. WENDLAND, *Boundary integral equations,* App. Math. Sciences, Springer 164 (2008).

[48] HSIAO, G. C and WENDLAND, W. L. , *Boundary integral equations : Variational Methods,* Springer-Verlag : Heidelberg.

[49] HAMDOUCHE, R and SAKER, H. , *On the biharmonic equation with nonlinear boundary integral conditions* The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications (AJMAA), V(12=, Issue 1, Article 15, pp. 1-9, (2015).

[50] JAFARIAN, A and Esmailzadeh, Z and KHOSHBAKHTI, L. , *A numerical methode for solving nonlinear integral equation in the Urysohn form.* "App. Math. Sciences, vol.7, no 28, pp. 1375-1385, (2013).

[51] JACKSON, J. D., *Classical Electrodynamics,* $3^{rd}$ edn., JohnWiley Sons, New York, (1999).

[52] JASWON, M. A. and SYMM, G. T. , *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics.* Academic Press, London-New York, (1977).

[53] JERISON, D. S. and KENIG, C. E. , *The Neumann problem on Lipschitz domains.* Bull. Amer. Math. Soc., 4, 203-207 (1981).

[54] KARACHIK, V.V. , *Application of the Almansi formula for constructing polynomial solutions to the Dirichlet problem for a second-order equation.* Russian Mathematics, 56, No. 6, 20-29 (2012).

[55] KARACHIK, V. V, *Solvability Conditions for the Neumann Problem for the Homogeneous Poly-harmonic Equation,* Differential Equations. 50 No. 11 (2014) 1449-1456.

[56] KARACHIK, V. V and TURMETOV, B. Kh and TOREBEK, B. T , *On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications,* Matematicheskiye trudy 14 No. 1 (2011), 99-125 (transl.) Siberian Advances in Mathematics 22 No. 2 (2012), 115-134.

[57] KELLOG, O.D. , *foundation of Potential theory.* Springer-Verlag, Berlin, (1967).

[58] KILBAS, A. A and SRIVASTAVA, H. M and TRUJILLO, J. J. , *Theory and Applications of Fractional Differential Equations,* Elsevier. North-Holland. Mathematics Studies. (2006) 539 pp.

[59] KOHN. J and NIRENBERG, L. , *On the algebra of pseudo differential operators* Comm.Pure Appl.Math.18 (1968).

[60] KRASNOSEL'SKII, M. , *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations.* Mac Millan, New York, (1964).

[61] LAI, M. C and LIU, H. C. , *Fast direct solver for the biharmonic equation on a disk and its application to incompressible flows,* Applied Mathematics and Computation. 164 No. 2 , 679-695 (2005).

[62] MIKHLIN, S. G. , *Integral Equations,* Pergamon Press, Oxford (1957).

[63] MAYBORODA, S and MAZ'YA, V. G. , *Boundedness of the Hessian of a biharmonic function in a convex domain.* Comm. Partial Differential Equations 33, no. 7-9, 1439-1454 (2008).

[64] NADIR, Mostapha. , *Cours d'analyse fonctionnelle,* Université de M'sila (2004).

[65] MINTY, G. , *On a "monotonicity" method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces.* Proc. Natl. Acad. Sci. 50, 1041-1083 (1964).

[66] MINTY, G. , *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert spaces.* Duke Math. J. 29, 341-346 (1962).

[67] MIRANDA, C. , *Partial differential equations of elliptic type.* Springer-Verlag, New York, (1970).

[68] MITREA, I and MITREA, M. , *On the Dirichlet and regularity problems for the bi-Laplacian in Lipschitz domains.* Integral methods in science and engineering.Vol. 1, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, pp. 245-254 (2010).

[69] MU, L and WANG, V and WANG, Y and YE, X. , *A Weak Galerkin Mixed Finite Element Method for Biharmonic Equations. Numerical Solution of Partial Differential Equations : Theory, Algorithms, and Their Applications,* Springer Proceedings in Mathematics Statistics, Volume 45, pp 247-277 (2013).

[70] NATANSON, I. P. , *Theorie der Funktionen einer reellen Verfinderlichen.* Berlin : Akademie-Vertag (1969).

[71] NEDELEC, J. C. , *Acoustic and Electromagnetic Equations : Integral Representations for Harmonic Problems.* Springer, Berlin (2001).

[72] NEDELEC, J. C. , *Aproximation des équations integrales en mécanique et physique.* Palaiseau (1977).

[73] NEDELEC, J. C. , PLANCHARD, J. P. , *Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème de potentiel extérieur dans* $\mathbb{R}^3$, Integral Représentations, France (1973).

[74] PASCALI, D and SBURLAN, S. , *Nonlinear Mappings of Monotone Type.* Bucarest : Siijthoff and Noordhoff (1978).

[75] PETERSEN, B. E. , *Introduction to the Fourier transforme and pseudo-differential operators.* Pitman, Boston, (1983).

[76] PIPHER, J and VERCHOTA, G. C. , *Area integral estimates for the biharmonic operator in Lipschitz domains.* Trans. Amer. Math. Soc. 327, no. 2, 903-917 (1991).

[77] PIPHER, J and VERCHOTA, G. C. , *Maximum principles for the polyharmonic equation on Lipschitz domains.* Potential Anal. 4, no. 6, 615-636 (1995).

[78] PIPHER, J and VERCHOTA, G. C. , *The Dirichlet problem in Lp for the biharmonic equation on Lipschitz domains.* Amer. J. Math. 114, no. 5, 923-972 (1992).

[79] REKTORYS, K. , *Variational methods in mathematics, Science and engineering.* D.Reidel Publishing Company, (1980).

[80] REMPEL, S et SCHULZE, B. W, *Index theory of el liptic boundary problems,* II Abteilung Mathematische Monographien, Band 55, Akademia-Verlag, Berlin (1982).

[81] RUOTSALAINEN, K and WENDLAND, W. , *the boundary element method for some nonlinear boundary value problems,* Numerische. Mathematik, vol. 53, pp. 299-314, (1988).

[82] SAKER, H. , *L'analyse des éléments de frontière pour le Laplacien dans le plan.* Institut de Mathématiques, Université de Badji Mokhtar, Annaba.

[83] SAKER, H. , *Méthode de décomposition de domaine pour les éléments de frontière pour le bi-harmonique,* Institut de Mathématiques, Université de Badji Mokhtar, Annaba.

[84] SAKER, H. , *On the Harmonic problem with boundary integral conditions,* International Journal of Analysis.(2014), ID 976520.

[85] SARANEN, J. , *The boundary element method.* In Proceeding of summer school in numerical analysis at Jyvaskila, (1985).

[86] SHEN,Z. , *A relationship between the Dirichlet and regularity problems for elliptic equations.* Math. Res. Lett. 14, no. 2, 205-213 (2007).

[87] SHEN,Z. , *On estimates of biharmonic functions on Lipschitz and convex domains.* J. Geom. Anal. 16, no. 4, 721-734 (2006).

[88] SHI, Z and CAO, Y. Y and CHEN, Q. J. , *Solving 2D and 3D Poisson equations and biharmonic equations by the Haar wavelet method,* Applied Mathematical Modelling. 36 No. 11, 5143-5161 (2012) .

[89] SMART, D. R. , *Fixed point theorems,* Cambridge University Press, Cambridge, (1980).

[90] SPURK, J. H. , *Fluid Mechanics,* Springer, Berlin, (1997).

[91] TREVE, J. , *Introduction to pseudodifferential and fourier integral operators.* Plenom press. New York. London (1964).

[92] TAYLOR, M. , Pseudo differential operators, Lecture notes in math. N0 416, Springer Verlag, (1974).

[93] UMAROV, S. R. and LUCHKO, Yu. F and GOREN, R. , o ; *On boundary value problems for elliptic equations with boundary operators of fractional order,* Fractional Calculus and Applied Analysis 2 No. 4 (2000), 454-468.

[94] VLADIMIROV, V.S. , *Equation of mathematical physics.* Mir publishers, (1982).

[95] WANG, Y ; *Boundary Value Problems for Complex Partial Differential Equations in Fan-Shaped Domains,* Dissertation des Fachbereichs Mathematik und Informatik der Freien University at Berlin zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften. Free University Berlin, (2010) 131.

[96] Wendlend, W. L. , *Asymptotic convergence of boundary element methods,* Lecture notes, (1981).

[97] Wendlend, W. L. , *Boundary element methods and their asymptotic convergence.* Fachber. Math. TH. Darmtadt, Preprint, (690), (1982).

[98] Wendlend, W. L. , *On some mathematical aspects of boundary element methods for elliptic problems.* Fachber. Math. TH. Darmastard, Preprint, (857), (1984).

[99] Wendlend, W. L. , *On the numerical analysis of boundary element,* numerical methods and applications. Sofia, (1985).

[100] ZABREKO, P.P. , *Integral equations.* Noordhoff international Publishing, (1975).

## ملخص:

هذه الأطروحة تدرس معادلة لابلاس و لابلاس المضاعف مع شروط حدية غير خطية في مجال منتظم من الفضاء $\mathbb{R}^2$. نطبق الطريقة المباشرة للمعادلة التكاملية لحل هذه المسائل . الطريقة المعتمدة على الصيغة الثالثة ل «غرين»، تسمح بتحويل هذه المسائل إلى جملة معادلات تكاملية على حافة المجال. بعد تشكيل الجملة المرافقة، ن برهن أنها تقبل حل وحيد باستعمال نظرية «مينتي و براودر» [81]، [80] .

### الكلمات المفتاحية:

مؤثر لابلاس و لابلاس المضاعف، الحل الأساسي، المعادلات التكاملية، المؤثرات التكاملية، نظرية فريدهولم، متراجحة غاردينغ، فضاءات سوبولاف.



## Résumé :

Cette thèse étudie deux problèmes le Laplacien et le bi-Laplacien avec des conditions non linéaires au bord sur un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$. On applique la méthode directe d’équation intégrale pour résoudre ces problèmes aux limites. La présente méthode, qui est fondée sur la troisième formule de Green, permet la réduction de ces problèmes en un système d’équations intégrales sur la frontière du domaine qu’on résout. Après construire notre système correspondant, on montre l’existence et l’unicité de la solution à l’aide du "théorème de Minty et Browder" [81], [89].

### Mots clés :

L’opérateur de Laplace et de bi-Laplacien, solution élémentaire, équations intégrales, opérateurs intégraux au bord, le théorème de Fredholm, l’inégalité de Gårding, les espaces de Sobolev.



## Abstract :

This thesis study the Laplace and bi-Laplace problems with nonlinear boundary conditions on a smooth domain in $\mathbb{R}^2$. We apply the direct integral equations method to solve these value problems. The present method, which based on the third Green's formula, allows the reduction of these problems in a system of boundary integral equations on the boundary of the domain which is resolved. After we construct our corresponding system, we prove the existence and uniqueness solution using the "Minty and Browder's theorem" [81], [89].

### Key words:

The Laplace and bi-Laplacian Operator, fundamental solution, integral equations, boundary integral operators, Fredholm's theorem, Gårding‘s inequality, Sobolev spaces.