



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



**BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-
ANNABA**

**جامعة باجي مختار
- عنابة -**

Faculté des Sciences

Année : 2018

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences

Technique de points fixes et applications aux équations différentielles fonctionnelles non linéaires à retard

Option

Équations aux dérivées partielles et théorie des opérateurs

Par

Ahlème Bouakkaz

DIRECTEUR DE THÈSE : Ahcène Djoudi

Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : Mahiédine Kouche

Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Fateh Ellaggoune

Prof. U. GUELMA

EXAMINATEUR : Ali Bentradi

Prof. U. REIMS

EXAMINATEUR : Smail Kelaiaia

Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Hadia Messaoudene

M.C.A U. TEBESSA

TABLE DES MATIÈRES

Table des figures	iv
Résumé en Anglais	v
Résumé en Français	vi
Résumé en Arabe	vii
Remerciements	viii
Typographie et Acronymes	ix
Notations	xi
Introduction générale	1
1 Notions Préliminaires	6
1.1 Fonctions de Green uni-dimensionnelles	7
1.2 Théorème d'Ascoli-Arzela	9
1.3 Théorèmes de point fixe	11

1.3.1	Théorème de point fixe de Banach	12
1.3.2	Théorème de point fixe de <i>Schauder</i>	13
1.3.3	Théorème de point fixe de <i>Krasnoselskii</i>	13
1.4	Récapitulatif	18
2	Equations différentielles à retard	19
2.1	Contexte historique	20
2.2	Classification	22
2.2.1	Equations différentielles à argument dévié	22
2.2.2	Equations différentielles à retard	23
2.3	Résultats d'existence et d'unicité	27
2.3.1	Cas des équations fonctionnelles à retard	27
2.3.2	Cas des équations fonctionnelles de type neutre	29
2.4	Quelques méthodes de résolution des EDR	30
2.4.1	Méthode des étapes	30
2.4.2	Méthode de Runge Kutta	35
2.4.3	Méthode de Laplace	37
2.5	Modèles d'équations différentielles à retard	43
2.5.1	Equation de <i>Nicholson</i> (mouches-moutons)	43
2.5.2	Problème de deux corps en électrodynamique classique	45
2.5.3	Hématopoïèse	50
2.5.4	Ligne de transmission sans pertes	54
2.5.5	Équation de réaction-diffusion avec argument dévié	57
2.6	Récapitulatif	59
3	Existence et positivité des solutions périodiques d'une classe d'équations différentielles fonctionnelles de type neutre du second ordre	61

Table des matières

3.1	Introduction	62
3.2	Préliminaires	63
3.3	Existence de solutions périodiques positives	72
3.4	Récapitulatif	78
4	Existence et unicité des solutions périodiques d'une classe d'équations différentielles itératives du second ordre	79
4.1	Introduction	80
4.2	Préliminaires	83
4.3	Existence de solutions périodiques	85
4.4	Existence et unicité des solutions périodiques	94
4.5	Récapitulatif	95
	Conclusion générale et Perspectives	96
	Annexe	98
	Bibliographie	101

Table des figures

2.1	Représentation graphique de l'équation $x'(t) = -x(t-1)$ avec $\varphi(t) = 1$ (plein) et $\varphi(t) = -1$ (pointillé)	33
2.2	La lucilie cuivrée	44
2.3	Le cycle de développement de la lucilie cuivrée	45
2.4	Schéma représentant les différentes étapes de l'hématopoïèse...	51
2.5	Le cycle cellulaire	52
2.6	Circuit de la ligne de transmission	55
2.7	Courbe caractéristique courant-tension et ligne de charge de la diode tunnel	56

This work is devoted to the study of the existence, uniqueness, periodicity and positivity of solutions for two classes of delay second order differential equations. The first class is of neutral differential equations with time varying delay while the second one is of iterative differential equations with time and state dependent delays. The method used here is one of the most efficient techniques for studying these types of equations since it combines some useful properties of *Green's* functions together with fixed point theorems to establish sufficient conditions for proving the desired results. The idea of this technique is based on the converting of the considered equation into an integral one whose solutions are recourse to a *Krasnoselskii's* or *Schauder's* fixed point theorem. In addition, by applying the principle of contraction mapping on the integral equation and under certain specified constraints we proved the existence and uniqueness of the periodic solution of the second class of equations.

Keywords : Contracting principle, existence, *Green's* function, iterative differential equation, *Krasnoselskii's* fixed point theorem, neutral differential equation, *Schauder's* fixed point theorem, uniqueness.

Ce travail a été dévoué à l'étude de l'existence, l'unicité, la périodicité et la positivité des solutions de deux classes d'équations différentielles du second ordre à retard variable. La première classe est d'équations différentielles de type neutre avec un retard variant dans le temps tandis que la deuxième est d'équations différentielles itératives avec des retards dépendants du temps et de l'état. La méthode utilisée ici est l'une des techniques les plus efficaces pour étudier ces types d'équations, car elle combine certaines propriétés utiles des fonctions de *Green* avec des théorèmes de point fixe afin d'établir des conditions suffisantes pour prouver les résultats souhaités. L'idée de cette technique est basée sur l'inversion de l'équation considérée en une équation intégrale dont la solution fait recourir au théorème de point fixe de *Krasnoselskii* ou celui de *Schauder*. Aussi, moyennant le principe de l'application contractante de *Banach* et sous certaines contraintes déterminées, on a montré l'existence et l'unicité de la solution de la deuxième classe d'équations.

Mots clés : Principe de contraction, existence, fonction de *Green*, équation différentielle itérative, théorème de point fixe de *Krasnoselskii*, équation différentielle de type neutre, théorème de point fixe de *Schauder*, unicité.

كرس هذا العمل لدراسة وجود، وحدانية، دورية وموجبية حلول فئتين من المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية ذات تأخر متغير. الفئة الأولى عبارة عن معادلات تفاضلية من النوع المحايد بتأخر متغير بالنسبة للزمن بينما الثانية هي معادلات تفاضلية تكرارية بتأخر متغير بالنسبة للحالة. إن الطريقة المستعملة في هذه الأطروحة تعتبر من بين إحدى الطرق الفعالة لدراسة هذا النوع من المعادلات لأنها تمزج بعض الخصائص المجدية لدوال غرين مع نظريات النقطة الثابتة من أجل تحديد الشروط الكافية لإثبات النتائج المرجوة.

تعتمد فكرة هذه التقنية على تحويل المعادلة إلى معادلة تكاملية نواتها دالة غرين قبل استعمال نظرية النقطة الثابتة المناسبة، نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي بالنسبة للمعادلة التفاضلية من النوع المحايد ونظرية النقطة الثابتة لشودر للمعادلة التفاضلية التكرارية. بالإضافة إلى ذلك، عن طريق استعمال مبدأ التطبيق المقلص لبناخ على المعادلة التكاملية وضمن قيود معينة، أثبتنا وحدانية الحل الدوري للفئة الثانية من المعادلات.

Remerciements

Louange à Dieu le tout puissant de m'avoir donné la volonté et la force pour réaliser ce modeste travail.

Ma profonde reconnaissance s'adresse au Professeur *Ahcène. Djoudi* mon directeur de thèse pour le sujet qu'il m'a proposé ainsi pour les conseils précieux et les encouragements. Sa grande érudition, disponibilité et son esprit de recherche ont été déterminants pour la réalisation de cette thèse.

Mes sincères remerciements sont destinés à Monsieur le Professeur *M. Kouche* pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de thèse.

J'adresse aussi mes très sincères remerciements à Monsieur *F. Ellaggoune*, Professeur à l'université de Guelma, Monsieur *A. Bentradi*, Professeur à l'université de Reims, France, Monsieur *S. Kelaiaia*, Professeur à l'université d'Annaba et Madame *H. Messaoudene*, Maître de conférence A à l'université de Tebessa qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury.

Je tiens à remercier aussi Dr. *A. Ardjouni* et Dr *R. Khemis* pour leur soutien et leur aide.

Enfin je remercie mes parents, mes sœurs et frères, mon oncle *Ahmed* et leurs familles pour leur encouragement et leur soutien moral.

Typographie et Acronymes

Typographie

τ désigne le retard dans l'ensemble de cette thèse et est, soit une fonction, soit une constante suivant les modèles et les exemples.

μ désigne l'argument dévié dans l'équation à arguments déviés.

T désigne la période.

Les titres des références, les noms des savants, les termes techniques ou les mots que nous voulons souligner sont indiqués en italique.

Les notations entre guillemets correspondent à l'emploi de termes techniques que nous voulons faire ressortir.

Acronymes

Abréviation	Signification
--------------------	----------------------

CSH	cellule souche hématopoïétique.
-----	---------------------------------

dde23	solveur de Matlab, permet de résoudre les EDR à retard constant.
-------	--

ddensd	solveur de Matlab, permet de résoudre des équations différentielles, de type neutre <i>où le retard est indépendant de l'état.</i>
--------	--

ddesd	solveur de Matlab, permet la résolution des équations différentielles, <i>à retard variable.</i>
-------	--

ddefile	fonction au second membre de l'équation différentielle à <i>retard</i> .
ddefun	fonction au second membre de l'équation différentielle à <i>retard</i> .
DELSOL	solveur de Fortran, permet de résoudre les équations différentielles, à <i>retard</i> .
EDF	équation différentielle fonctionnelle.
EDN	équation différentielle de type neutre.
EDO	équation différentielle ordinaire.
EDP	équations aux dérivées partielles.
EDPR	équations aux dérivées partielles à retard.
EDR	équation différentielle à retard.
DELSOL	solveur de Fortran, permet de résoudre les équations différentielles, à <i>retard</i> .
Fortran	langage de programmation compilé utilisé principalement pour, le calcul scientifique.
history	fonction historique.
lags	vecteur colonne représente les retards.
Maple	langage interprété de programmation utilisé principalement pour, le calcul formel.
Matlab	langage de programmation interprété utilisé principalement pour, le calcul matriciel et numérique interactif
p.p	Presque partout.
tspan	intervalle d'intégration.
RADAR5	solveur de Fortran, permet de résoudre les équations différentielles, à retard.
RETARD	solveur de Fortran, permet de résoudre les équations différentielles, à retard.

Ensembles et nombres

\mathbb{R}	ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}^+	ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
\mathbb{R}^n	espace euclidien de dimension n .
\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels.
\mathbb{N}^*	ensemble des entiers naturels non nuls.
$[a, b]$	intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
$(a, b]$	intervalle semi-ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
(a, b)	intervalle ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
$\mathcal{C} = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$	espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .
$H^1 = H^1([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$	espace de <i>Sobolev</i> d'ordre 1.
$L^1((0, +\infty), \mathbb{R}^+)$	espace de <i>Lebesgue</i> des fonctions sommables, sur $(0, +\infty)$.
P_T	ensemble des fonctions continues et T -périodiques.
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes.
\mathbb{B}	ensemble des fonctions continues et T -périodiques.
\mathbb{D}	ensemble des fonctions continues et T -périodiques, telles qu'il existe $K \geq 0$ et $L > 0 : K \leq \varphi \leq L$.

Notations

$P_T(L, M)$	ensemble des fonctions x de P_T de norme $\ x\ \leq L$, telles que $ x(t_2) - x(t_1) \leq M t_2 - t_1 $, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
\dot{x}	$\dot{x} = \frac{d}{dt}$ est la dérivée de la variable x par rapport au temps et, c'est la dérivée à droite dans les résultats d'existence et d'unicité dans la deuxième section du deuxième chapitre.
$t \in \mathbb{R}$	variable temporelle.
$B'(a, r)$	boule fermée de centre a et de rayon r .
$\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$	espace de toute les suites réelles avec $\lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_i = 0$.
\mathbb{K}	$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Fonctions

$ \cdot $	valeur absolue.
$\ f\ _\infty$	norme de la convergence uniforme et se définit par $\sup f(x) $.
max	fonction maximum.
min	fonction minimum.
sup	fonction supremum.
$\exp x$	fonction exponentielle de x .
$G(t, x)$	fonction de <i>Green</i> .

Introduction générale

Dans la nature, plusieurs phénomènes sont gouvernés par une classe d'équations différentielles à retard. Comme leur nom l'indique, ces équations notées en abrégé EDR modélisent généralement l'évolution des variables dépendant non seulement des valeurs actuelles mais dépendent aussi irrévocablement des valeurs prises dans le passé autrement dit elles tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur c'est pour ça qu'elles sont souvent appelées "*les équations à mémoire*", "*les équations héréditaires*", "*équations à post-effet*", ou encore "*équations à argument dévié*".

Le retard est généralement une constante positive, une variable dépendante continûment du temps ou de l'état ou distribué et se traduit comme un temps nécessaire pour que le système réponde à une certaine évolution, ou parce qu'un certain seuil doit être atteint avant que le système ne soit activé.

Sa signification diffère d'un modèle à un autre, il peut représenter la durée du cycle cellulaire dans la division cellulaire, le temps de gestation ou de développement dans la dynamique des populations, la période d'incubation d'une maladie contagieuse en épidémiologie etc.

L'introduction d'un tel retard a fait cauchemarder plusieurs chercheurs

pendant un siècle car sa présence peut induire des oscillations indésirables ou peut causer l'instabilité du système et rend la théorie difficile et conduit à faire appel à un arsenal mathématique très vaste. Malgré ça, il a fait rêver d'autres aussi comme *Picard* qui a souligné lors de la conférence internationale des mathématiciens à *Rome* en 1908, l'importance de modéliser les systèmes physiques par des équations retardées et il a affirmé :

Les équations différentielles de la mécanique classique sont telles qu'il en résulte que le mouvement est déterminé par la simple connaissance des positions et des vitesses, c'est-à-dire par l'état à un instant donné et à l'instant infiniment voisin.

Les états antérieurs n'y intervenant pas, l'hérédité y est un vain mot. L'application de ces équations où le passé ne se distingue pas de l'avenir, où les mouvements sont de nature réversible, sont donc inapplicables aux êtres vivants.

Nous pouvons rêver d'équations fonctionnelles plus compliquées que les équations classiques parce qu'elles renfermeront en outre des intégrales prises entre un temps passé très éloigné et le temps actuel, qui apporteront la part de l'hérédité¹.

D'autres études ont montré également que l'introduction volontaire du retard peut améliorer la stabilisation des systèmes : amortissement et stabilisation [1], résonateurs retardés [45], rejet de perturbation [46], [89], contrôle de cycle limite non linéaire [4].

La littérature concernant les équations fonctionnelles à retard est abondante, on ne peut pas citer le grand nombre d'ouvrages dédiés à cette thématique mais le lecteur intéressé pourra se référer aux livres de *Hale-Cruz* [40], *Hale* [41], *Hale-Verduyn Lunel* [42], *Kolmanovskii-Myshkis* [48, 49] et *Smith* [81].

¹J.K. Hale, *History of delay equations*, dans [9], 1 – 28.

Plusieurs approches ont été utilisées pour traiter ce type d'équations comme la méthode des étapes, la méthode de *Runge Kutta*, les transformations de *Laplace* et de *Schröder* et la théorie de point fixe qui est un outil précieux pour la résolution des équations différentielles non linéaires en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe.

Le fil rouge de cette thèse est d'appliquer cette dernière technique pour étudier certaines classes d'équations différentielles non linéaires à retard largement rencontrées dans la modélisation de plusieurs phénomènes dans des domaines très variés comme la physique, la chimie, la biologie, l'écologie, etc. Plus précisément, nous nous intéresserons à appliquer une technique qui combine un des théorèmes de point fixe de *Banach*, de *Schauder* ou de *Krasnoselskii* avec quelques propriétés utiles des fonctions de *Green* de certaines équations différentielles linéaires pour arriver aux résultats désirés.

Donc, notre travail de thèse s'intéresse aux problématiques suivantes : l'existence, l'unicité, la périodicité et la positivité des solutions de deux classes d'équations différentielles à retards variables, la première est de type neutre avec des retards variant dans le temps et la deuxième est de type itérative avec des retards dépendants de l'état.

On a structuré ce manuscrit en quatre chapitres et une annexe sur la syntaxe des principaux solveurs de Matlab et Maple qui permettent la résolution numérique des équations différentielles à retard.

Dans le premier chapitre, nous avons jugé utile de rappeler brièvement quelques notions générales et certains résultats fondamentaux indispensables pour le reste de la thèse comme la fonction de *Green* unidimensionnelle et le théorème d'*Ascoli-Arzela* où la partie principale du chapitre est dédiée à la présentation des théorèmes de point fixe, le théorème de point fixe de *Banach*, de *Schauder* et celui de *Krasnodelskii*.

Le deuxième chapitre est un état de l'art sur les équations différentielles à retard. Après un bref historique et une classification de ce type d'équations, nous passons à un rappel de quelques notions de base et certains résultats de la théorie d'existence et d'unicité. Ensuite, nous nous intéresserons plus particulièrement à présenter quelques méthodes de résolution comme la méthode des étapes, la méthode de *Runge-Kutta* et la transformation de *Laplace*. Nous proposerons pour conclure des modèles à retard modélisant cinq phénomènes dans l'écologie, l'électrodynamique classique, la biologie et l'électronique.

Enfin, l'essentiel de cette thèse est présenté dans le troisième et le quatrième chapitres qui correspondent à des articles publiés [15, 16] ; seules les références ont été regroupées dans une bibliographie commune. La méthode utilisée dans ces deux chapitres est très efficace car elle combine certaines propriétés utiles des fonctions de *Green* et la technique du point fixe. Dans le troisième chapitre, on va utiliser le théorème de *Krasnoselskii* pour établir l'existence des solutions périodiques positives de l'équation différentielle non linéaire du second ordre de type neutre suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) + p(t)\frac{d}{dt}x(t) + q(t)x(t) &= \frac{d^2}{dt^2}Q(t, x(t - \tau(t))) \\ &+ f(t, h_1(x(t)), g_1(x(t - \tau(t)))) \end{aligned}$$

où p et q sont des fonctions positives continues. La fonction $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, $h_1, g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues par rapport à leurs arguments.

Le travail exposé dans ce chapitre est réalisé en collaboration avec Pr *Ahcene Djoudi*. et Dr *Abdelouaheb Ardjouni*., et est publié dans le journal *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* [15].

Le quatrième et dernier chapitre est dédié à l'étude de l'équation diffé-

rentielle itérative du second ordre suivante :

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + p(t) \frac{d}{dt}x(t) + q(t) x(t) = \frac{d}{dt}g(t, x(t), x^{[2]}(t), \dots, x^{[n]}(t)) + h(t, x(t), x^{[2]}(t), \dots, x^{[n]}(t)),$$

où $x(t) = t$, $x^{[1]}(t) = x(t)$, $x^{[2]}(t) = x(x(t))$, \dots , $x^{[n]}(t) = x^{[n-1]}(x(t))$. Les résultats exposés dans ce chapitre est une publication dans le journal *Acta Mathematica Universitatis Comenianae* [16].

On termine cette thèse par une conclusion générale sans doute non exhaustive ainsi que les perspectives de nos recherches futures.

CHAPITRE 1

Notions Préliminaires

Sommaire

1.1	Fonctions de Green uni-dimensionnelles	7
1.2	Théorème d'Ascoli-Arzela	9
1.3	Théorèmes de point fixe	11
1.4	Récapitulatif	18

A cause de leur grande importance dans notre étude, ce chapitre introductif vise à présenter quelques notions de base nécessaires pour le développement ultérieur de cette thèse et on insistera en particulier sur les fonctions de *Green* unidimensionnelles, au théorème d'*Ascoli-Arzela* et aux théorèmes de point fixe de *Banach*, de *Schauder* et celui de *Krasnoselskii*.

On suppose que le rang du tableau Δ ci-dessous est n :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^{(1)} & \dots & \beta_1 & \dots & \beta_1^{(n-1)} \\ \alpha_2 & \alpha_2^{(1)} & \dots & \beta_2 & \dots & \beta_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \alpha_n^{(1)} & \dots & \beta_n & \dots & \beta_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Théorème 1.1 [60]

a) Si l'équation homogène de (1.1) avec les conditions frontières (1.2) n'admet que la solution triviale, alors il existe pour ce problème une fonction de Green unique $G(t, s)$ on suppose $a_0(t) \neq 0, \forall t \in [c, d]$.

b) on suppose réalisées les conditions ci-dessus, alors l'équation non homogène (1.1) admet une solution unique vérifiant les conditions frontières (1.2) donnée par :

$$y(t) = \int_c^d G(t, s) g(s) ds. \quad (1.4)$$

Supposons que le problème aux limites (1.3)-(1.2) n'admet que la solution triviale $y(t) = 0$.

Définition 1.1 [52] On appelle "*fonction de Green*" ou "*fonction d'influence*" de l'équation (1.3) avec les conditions frontières (1.2), la fonction $G(t, s)$ construite pour tout point $s \in]c, d[$, et jouissant des quatre propriétés suivantes :

1/ $G(t, s)$ est continue et possède des dérivées continues par rapport à t jusqu'à l'ordre $(n - 2)$ inclus pour $t \in [c, d]$.

2/ Sa $(n - 1)^{\text{ème}}$ dérivée par rapport à t présente au point $t = s$ une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur $\frac{1}{a_0(s)}$, i.e.

$$\frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(s^+, s) - \frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(s^-, s) = \frac{1}{a_0(s)},$$

où

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s^+, s) \text{ et } \frac{\partial G}{\partial t}(s^-, s)$$

désignent respectivement les limites à droite et à gauche lorsque t tend vers s de la fonction qui à t fait correspondre $\frac{\partial G}{\partial t}(t, s)$.

3/ Pour tout s fixé dans $]c, d[$, cette fonction vérifie la condition frontière en c et la condition frontière en d .

4/ Pour tout s fixé dans $]c, d[$, la fonction qui à t fait correspondre $G(t, s)$ est solution de l'équation homogène dans chacun des intervalles $[c, s)$ et $(s, d]$.

1.2 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Ci-dessous on rappelle le théorème d'*Ascoli-Arzelà* qui est un outil classique et puissant pour montrer qu'une partie de l'espace des fonctions continues sur un compact est relativement compacte.

Définition 1.2 Soit M un sous ensemble de $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, M est dit équicontinu si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \delta > 0, \forall y \in [a, b], \\ [\|x - y\| < \delta \implies [\forall f \in M, |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Exemple 1.1

Si k est un nombre réel positif, alors l'ensemble des fonctions lipschitziennes de E dans \mathbb{R} de rapport k est équicontinu. En effet, pour ε fixé, il suffit de prendre

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{M},$$

dans la définition 1.2.

Théorème 1.2 [90] Soit $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $-\infty < a < b < +\infty$, l'espace des fonctions continues définies sur le compact $[a, b]$ et à valeurs réelles muni de la norme

$$\|u\| = \max_{a \leq t \leq b} |u(t)|.$$

Une partie \mathcal{F} de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ si et seulement si elle est uniformément bornée² et équicontinue.

Remarque 1.1 Le théorème d'Ascoli-Arzelà ne permet de caractériser que les ensembles relativement compacts de $\mathcal{C}(E_1, \mathbb{K})$, (avec E_1 compact et métrique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), et non les ensembles relativement compacts de n'importe quel espace de Banach.

Exemple 1.2 Soient k_1 et k_2 deux réels strictement positifs. Le sous-ensemble \mathcal{F} des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ qui vérifient

$$|f(t)| \leq k_1 \text{ et } \sup |f'(t)| \leq k_2,$$

pour tout $t \in [a, b]$, est relativement compact dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

En effet, pour tout $f \in \mathcal{F}$, le théorème des accroissements finis, prouve que pour tout $t_0, t \in [a, b]$ il existe $c \in]t_0, t[$ tel que

$$|f(t) - f(t_0)| = |f'(c)| |t - t_0|.$$

Donc $|f(t) - f(t_0)| \leq k_2 |t - t_0|$. Fixons $t_0 \in [a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta = \frac{\varepsilon}{k_2}$, alors

$$\forall t \in [a, b], |t - t_0| \leq \eta \implies |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon.$$

² \mathcal{F} est dite "uniformément bornée" si et seulement si

$$\forall x \in [a, b], \{f(x), f \in \mathcal{F}\} \text{ est borné.}$$

Ce qui est exactement l'équicontinuité de \mathcal{F} en t_0 . Comme nous pouvons prendre pour t_0 n'importe quel point de $[a, b]$, on en déduit que \mathcal{F} est équicontinu.

On a $|f(t)| \leq k_1$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ ce qui implique que $\|f\|_\infty \leq k_1$ et partant

$$\forall f \in \mathcal{F}, f \in B'(0, k_1),$$

i.e.,

$$\mathcal{F} \subset B'(0, k_1),$$

d'où la bornitude de \mathcal{F} .

Finalement, Comme \mathcal{F} est borné et équicontinu, alors le théorème d'*Ascoli-Arzela* assure que \mathcal{F} est relativement compact.

1.3 Théorèmes de point fixe

Comme l'attestent les très nombreux travaux paraissant aujourd'hui au niveau international, les théorèmes de point fixe sont des outils précieux et très intéressants en mathématiques, surtout pour la résolution des équations différentielles non linéaires. Pour résoudre un problème par la technique du point fixe, nous avons besoin d'une application appropriée, d'un ensemble convenable apte pour contenir les solutions du problème et d'un théorème de point fixe qui donne certaines conditions sous lesquelles cette application admet au moins un point fixe. On va voir maintenant trois théorèmes de point fixe, le théorème de point fixe de *Banach* qui donne un critère général dans les espaces métriques complets, celui de *Schauder* qui est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet au moins un point fixe et finalement, le théorème hybride de *Krasnoselskii*.

Définition 1.3 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de *Banach*, $T : E \longrightarrow E$ une application. On appelle point fixe de T tout point $x \in E$ tel que $T(x) = x$. Ce qui est équivalent à dire que l'équation $T(x) - x = 0$ possède une solution.

Définition 1.4 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de *Banach* et $T : E \longrightarrow F$ une application. On dit que T est lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ sur E si

$$\|Tx - Ty\|_F \leq k \|x - y\|_E. \quad (1.5)$$

En particulier, si $1 > k \geq 0$, T est dite contraction ou *application contractante* de rapport k .

1.3.1 Théorème de point fixe de Banach

En 1922, le mathématicien polonais *Stefan Banach* a prouvé son célèbre théorème (connu aussi sous le nom de théorème de *l'application contractante* ou théorème de *Banach-Picard*³) qui garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe d'une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même. En outre, il est basé sur un processus itératif assurant que ce point fixe peut être obtenu comme limite d'une suite itérée et qu'il est possible d'estimer la précision avec laquelle cette limite est atteinte.

Théorème 1.3 [78] Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de *Banach* et $T : E \longrightarrow E$ une application contractante de constante $k \in [0, 1[$. Alors il existe un point unique $x \in E$ tel que $T(x) = x$.

Remarque 1.2 Si A est une application lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées A^P est une contraction, alors A a

³ Charles Emile Picard fut le premier à utiliser le théorème de point fixe de *Banach* dans une méthode d'approximations successives.

un seul point fixe.

En effet, soit x l'unique point fixe de A^P on a

$$A^P(A(x)) = A(A^P(x)) = A(x),$$

ce qui convient à dire que $A(x)$ est aussi un point fixe de A^P et grâce à l'unicité $A(x) = x$.

Ce résultat est valable pour tous les types de contractions qui assurent l'unicité du point fixe.

1.3.2 Théorème de point fixe de *Schauder*

Le théorème de point fixe de *Schauder* élaboré en 1930, assure l'existence d'au moins un point fixe pour une application continue sur un convexe compact dans un espace de *Banach*.

Théorème 1.4 [78] *Soit M un sous ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach E et $T : M \longrightarrow E$ une application compacte. Alors T possède un point fixe.*

Remarque 1.3 Si M est compact et convexe, il suffit que T soit continue pour avoir un point fixe pour T .

1.3.3 Théorème de point fixe de *Krasnoselskii*

En 1954, *Krasnoselskii* combina le théorème de point fixe géométrique de *Banach* et le théorème de point fixe topologique de *Schauder* en un théorème hybride qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui s'écrit sous forme d'une somme de deux applications dont l'une est une contraction et l'autre est compacte admet au moins un point fixe.

Principe du théorème de point fixe de *Krasnoselskii* [17]

Selon *Smart* [78], *Krasnoselskii* étudia un article de *Schauder* [74] et formula le principe suivant ;

L'inversion d'un opérateur différentiel perturbé peut engendrer une somme de deux opérateurs, une contraction et un opérateur compact.

Pour mieux comprendre cette observation de *Krasnoselskii*, on considère l'équation différentielle suivante :

$$x'(t) = -a(t)x(t) - g(t, x(t)), \quad (1.6)$$

où $a(t + T) = a(t)$ et $g(t + T, x) = g(t, x)$ pour un certain $T > 0$.

On peut transformer cette équation sous une autre forme en écrivant,

$$x'(t) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right) = -a(t)x(t) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right) - g(t, x(t)) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right). \quad (1.7)$$

Par conséquent,

$$\left(x(t) \exp \int_0^t a(s) ds \right)' = -g(t, x(t)) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right). \quad (1.8)$$

Une intégration de $t - T$ à t donne

$$\int_{t-T}^t \left(x(u) \exp \int_0^u a(s) ds \right)' du = - \int_{t-T}^t g(u, x(u)) \left(\exp \int_0^u a(s) ds \right) du. \quad (1.9)$$

Ainsi,

$$x(t) = x(t - T) \exp \left(- \int_{t-T}^t a(s) ds \right) - \int_{t-T}^t g(u, x(u)) \exp \left(- \int_u^t a(s) ds \right) du. \quad (1.10)$$

Si on suppose que

$$\exp \left(- \int_{t-T}^t a(s) ds \right) = \alpha < 1,$$

et si $(E, \|\cdot\|_E)$ est l'espace de *Banach* des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et T -périodiques, alors l'équation (1.10) peut se mettre sous la forme

$$\varphi(t) = (\mathcal{B}\varphi)(t) + (\mathcal{A}\varphi)(t) \quad (:= \mathcal{P}\varphi(t)), \quad (1.11)$$

où \mathcal{B} est une contraction de constante $\alpha < 1$ et \mathcal{A} est une application compacte. Cet exemple montre bien la naissance de l'application $\mathcal{P}\varphi := \mathcal{B}\varphi + \mathcal{A}\varphi$ qui s'identifie à une somme d'une contraction et une application compacte. La recherche d'une solution pour (1.10) exige donc un théorème adéquat qui s'applique à cet opérateur hybride \mathcal{P} et qui peut conclure l'existence d'un point fixe qui sera à son tour, solution de l'équation initiale (1.6). *Krasnoselskii* trouva la solution en combinant les deux théorèmes de *Banach* et celui de *Schauder* en un seul théorème hybride mais puissant qui porte son nom. Il établit le résultat suivant :

Théorème 1.5 [78] *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et soit M une partie convexe, fermée et non vide de E . On suppose que $\mathcal{A}, \mathcal{B} : M \rightarrow E$ sont deux applications satisfaisant :*

- (i) $\mathcal{A}x + \mathcal{B}y \in M, \forall x, y \in M$;
- (ii) \mathcal{A} est continue et \mathcal{A} est compacte ;
- (iii) \mathcal{B} est une contraction de constante $\alpha < 1$.

Alors, il existe $x^* \in M$ tel que

$$\mathcal{A}x^* + \mathcal{B}x^* = x^*.$$

Preuve. D'une part, la 3^{ème} condition donne

$$\begin{aligned} \|(I - \mathcal{B})(x) - (I - \mathcal{B})(y)\| &= \|(x - y) - (\mathcal{B}x - \mathcal{B}y)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|\mathcal{B}x - \mathcal{B}y\| \\ &\leq \|x - y\| + \alpha \|x - y\| \\ &\leq (1 + \alpha) \|x - y\|, \end{aligned} \quad (1.12)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
 \|(I - \mathcal{B})(x) - (I - \mathcal{B})(y)\| &= \|(x - y) - (\mathcal{B}x - \mathcal{B}y)\| \\
 &\geq \|I(x - y)\| - \|\mathcal{B}x - \mathcal{B}y\| \\
 &\geq \|x - y\| - \alpha \|x - y\| \\
 &\geq (1 - \alpha) \|x - y\|. \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

De (1.12) et (1.13), il résulte que

$$(1 - \alpha) \|x - y\| \leq \|(I - \mathcal{B})(x) - (I - \mathcal{B})(y)\| \leq (1 + \alpha) \|x - y\|. \tag{1.14}$$

Cette double inégalité montre que $(I - \mathcal{B}) : M \longrightarrow (I - \mathcal{B})M$ est continue et bijective. Donc, $(I - \mathcal{B})^{-1}$ existe et elle est continue.

Posons $U := (I - \mathcal{B})^{-1} \mathcal{A}$, il est clair que U est une application compacte, puisque U est une composition d'une application continue et une application compacte.

En vertu du théorème de *Schauder*, U admet un point fixe, i.e.

$$\exists x \in M \text{ tel que } (I - \mathcal{B})^{-1} \mathcal{A}x = x. \tag{1.15}$$

Ceci équivaut à dire

$$\mathcal{A}x + \mathcal{B}x = x, \tag{1.16}$$

et la preuve est achevée. ■

Remarque 1.4 Si $\mathcal{A} = 0$, le théorème se résume au théorème de *Banach* et si $\mathcal{B} = 0$ alors le théorème n'est autre que le théorème de *Schauder*.

Remarque 1.5 [61] Dans une des versions généralisées de ce théorème, la condition (iii) est remplacée par la condition suivante : Il existe une fonction continue à droite

$$\phi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty),$$

telle que $\phi(r) \leq \phi(s)$ pour $0 \leq r \leq s$, $\phi(r) < r$ si $r > 0$, et

$$\|\mathcal{B}x - \mathcal{B}y\| \leq \phi(\|x - y\|) \text{ pour tout } x, y \in M.$$

Remarque 1.6 [61] Dans le cas où $\alpha = 1$ dans la condition (iii), il n'y a pas de point fixe. En effet, voici un contre-exemple.

Soit l'espace de Banach $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ de toutes les suites réelles avec $\lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_i = 0$; i.e.,

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \left\{ \zeta = (\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}^*}, \zeta_i \in \mathbb{R} : \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_i = 0 \right\},$$

muni de la norme

$$\|\zeta\| = \max \{ |\zeta_i| : i = 1, 2, \dots \}, \zeta = (\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}).$$

On considère l'application \mathcal{A} définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : B'(0, 1) &\longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \\ \zeta = (\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}^*} &\longmapsto \mathcal{A}\zeta = \eta = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}^*}, \end{aligned}$$

où $B'(0, 1)$ désigne la boule unité fermée de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et

$$\eta_1 = 2^{-1}(1 + \|\zeta\|), \eta_i = (1 - 2^{-i-1})\zeta_{i-1} \text{ pour } i = 2, 3, \dots$$

Puisque $|\eta_1| \leq 1$ et $|\eta_i| \leq |\zeta_i| \leq 1$, alors, on obtient

$$\mathcal{A} : B'(0, 1) \longrightarrow B'(0, 1).$$

En outre, si $\zeta = (\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et $\zeta' = (\zeta'_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont deux éléments distincts de $B'(0, 1)$, on aura

$$\mathcal{A}\zeta - \mathcal{A}\zeta' = \eta - \eta' = (\eta_i - \eta'_i)_{i \in \mathbb{N}^*},$$

où

$$\eta_1 - \eta'_1 = 2^{-1}(1 + \|\zeta\|) - 2^{-1}(1 + \|\zeta'\|) = 2^{-1}(\|\zeta\| - \|\zeta'\|),$$

et

$$\eta_i - \eta'_i = (1 - 2^{-i-1})\zeta_{i-1} - (1 - 2^{-i-1})\zeta'_{i-1} = (1 - 2^{-i-1}) (\zeta_{i-1} - \zeta'_{i-1}) \text{ pour } i = 2, 3, \dots$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\zeta - \mathcal{A}\zeta'\| &= \max \left| \eta_i - \eta'_i \right| : i = 1, 2, \dots \\ &= \max \left\{ 2^{-1}(\|\zeta\| - \|\zeta'\|), \max \left\{ (1 - 2^{-i-1}) \left| \zeta_{i-1} - \zeta'_{i-1} \right| : i = 2, 3, \dots \right\} \right\} \\ &< \|\zeta - \zeta'\|. \end{aligned}$$

S'il existe $\zeta \in B'(0, 1)$ tel que $\mathcal{A}\zeta = \zeta$ alors, $\zeta_1 = 2^{-1}(1 + \|\zeta\|) > 0$. De plus pour tout $i \geq 2$,

$$\begin{aligned} |\zeta_i| &= |(1 - 2^{-i-1})\zeta_{i-1}| = |(1 - 2^{-i-1})(1 - 2^{-i})\zeta_{i-2}| \\ &= \dots = \left| \prod_{k=0}^{i-2} (1 - 2^{-i-1+k}) \zeta_1 \right| \geq \left[1 - \sum_{k=0}^{i-2} 2^{-i-1+k} \right] |\zeta_1| \\ &= \left[1 - \sum_{j=3}^{i+1} 2^{-j} \right] |\zeta_1| > \frac{3}{4} |\zeta_1|, \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que ζ_i tend vers zéro quand i tend vers l'infini et prouve que \mathcal{A} n'a pas de point fixe.

1.4 Récapitulatif

Dans ce chapitre, nous avons abordé brièvement quelques rappels et notions de base en vue de les utiliser dans les chapitres suivants comme la fonction de *Green* et le théorème *d'Ascoli-Arzela* qui donne les conditions suffisantes pour qu'une partie d'un espace de *Banach* soit relativement compacte sans oublier de présenter les trois théorèmes *captivants* de point fixe, le théorème de *Banach*, de *Schauder* et celui de *Krasnoselskii* qu'ils ont initié de nombreuses études et ont été étendu dans plusieurs directions en modifiant certaines de leurs hypothèses.

CHAPITRE 2

Equations différentielles à retard

Sommaire

2.1	Contexte historique	20
2.2	Classification	22
2.3	Résultats d'existence et d'unicité	27
2.4	Quelques méthodes de résolution des EDR . . .	30
2.5	Modèles d'équations différentielles à retard . . .	43
2.6	Récapitulatif	59

Les objectifs de ce chapitre sont multiples. Après un aperçu historique sur les EDR, la deuxième section sera consacré entièrement à la classification de ces équations retardées selon les retards cités dans la littérature avant de nous intéresser à résoudre quelques EDR par trois méthodes : la méthode des étapes et de *Runge-Kutta* et la transformation de *Laplace*. Enfin, nous avons trouvé judicieux de présenter certains modèles retardées.

2.1 Contexte historique

Les équations fonctionnelles à retard constituent un champ d'étude très important pour modéliser des phénomènes d'hérédité rencontrés en physique, biologie, chimie, économie, écologie, etc. Malgré que dans la plupart des modèles, le retard est estimé non significatif et ignoré pour simplifier l'étude, il a été prouvé que dans de nombreux cas, le retard joue un rôle dominant dans plusieurs domaines et que les modèles avec retard fournissent des résultats plus précis et réalistes que leurs homologues sans retard.

À notre connaissance l'apparition de ces équations remonte au 18^{ème} siècle, elle est due à *J. Bernoulli*, *L. Euler*, *J.L. Lagrange*, *P. Laplace*, *S. Poisson* et d'autres. Par exemple, en 1728 dans ses expériences sur la corde vibrante et en partant d'une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique, *Bernoulli* [14] a trouvé l'équation à retard suivante :

$$y' = y(t - 1),$$

mais malheureusement il décida la tenir pour fausse et il est dit qu'il y a eu plusieurs erreurs à déduire l'équation.

Ce type d'équations a resté terra incognita jusqu'au début du 20 siècle et les travaux pionniers qui établissent le début de la théorie ont été dans la géométrie et la théorie des nombres et les premiers papiers traitant les équations fonctionnelles retardées linéaires sont dus à *Polossuchin* (1910) [67] et *Schmidt* (1911) [75].

Dans l'âge d'or de l'écologie théorique, l'étude de ce type d'équations connut un essor considérable avec les séries de travaux de *V. Volterra* [84, 85] sur les modèles prédateur-proie et les modèles de viscoélasticité. Il a utilisé la méthode d'énergie pour étudier une classe générale d'équations à retard non linéaires et il a écrit dans son œuvre majeure [84] sur le rôle des

effets héréditaires sur les modèles de la dynamique de plusieurs espèces en interaction.

Il y a eu d'intensives recherches sur le sujet depuis 1940 (surtout en l'ex-Union soviétique). La régulation sur base de modèles linéaires et stationnaires avec retard fut abordée en 1941 par *Y. Zypkin*. En 1949, *A. D. Myshkis* a posé les bases de la théorie moderne des EDR. En particulier, il fut le premier à formuler l'énoncé du problème de *Cauchy* pour des équations à retard arbitraire.

Les années cinquante, ont vu une explosion de la théorie qui a été largement développée et les EDR fait partie du vocabulaire des chercheurs travaillant sur la viscoélasticité, les problèmes mécaniques, les réacteurs nucléaires, le flux de chaleur, les réseaux de neurones, la combustion, l'interaction des espèces, les modèles microbiologiques, épidémiologiques ou physiologiques, ainsi que beaucoup d'autres (voir [49]).

La littérature concernant les EDR dans cette période est abondante et de nombreux travaux ont établi des résultats génériques dont on cite les résultats de *Krasovskii* [53, 54], qui a étendu la deuxième méthode de *Liapunov* aux équations retardées, sans oublier aussi les travaux de *Myshkis* [62], *Krasovskii* [53, 54], *Bellman* et *Cooke* [12], *Halanay* [39].

Les années suivantes ont donné naissance à un grand nombre de travaux dans cette direction, et surtout ceux qui concerne l'analyse de la stabilité des équations différentielles, avec un argument retardé comme *El'sgol'ts* et *Norkin* [33], *Hale* [41], *Hale* et *Lunel* [42], *Diekmann*, *Van Gils* *Lunel* et *Walther* [22].

2.2 Classification

Le but de cette section est d'esquisser un tour d'horizon des principaux types d'équations différentielles à retard. Généralement, la pratique de la modélisation prouve que seules les équations retardées ou de type neutre sont utilisées pour représenter des phénomènes réelles mais il existe un nombre considérable de phénomènes modélisés par des équations avancées, par exemple l'interprétation physique de l'équation différentielle avancée suivante :

$$x(t) = x''(t+1),$$

est celle d'une force liée par exemple à l'élongation d'un ressort et qui n'agirait qu'après un certain temps.

On a entamé cette section par la présentation de la classe mère dite des équations différentielles à argument dévié avant d'exposer les différents types d'équations différentielles à retard.

2.2.1 Equations différentielles à argument dévié

Les équations différentielles à argument dévié appartiennent à la classe des équations différentielles fonctionnelles (EDF). Elles décrivent l'évolution des variables dépendent des valeurs prises dans le passé ou le futur. On distingue trois catégories principales, les équations différentielles *avancées*, les équations différentielles *retardées* et les équations différentielles *mixtes*.

Equations différentielles avancées

Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t+\mu)), \mu > 0,$$

où f est donnée. Autrement dit, la valeur de la dérivée à un instant t de la variable liée x , ne dépend pas seulement de la valeur de x à l'instant t , mais aussi du futur.

Equations différentielles à retard

Sous leur forme la plus simple, ces EDR s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \tau > 0,$$

où f est donnée.

Autrement dit, la valeur de la dérivée à un instant t de la variable liée x , ne dépend pas seulement de la valeur de x à l'instant t , mais aussi des valeurs prises avant l'instant t .

Equations différentielles à argument dévié de type mixte (avancées-retardées)

Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t + \mu), x(t - \tau)), \quad \mu, \tau > 0,$$

où f est donnée. Autrement dit, la valeur de la dérivée à un instant t de la variable liée x , dépend à la fois du passé et du futur.

2.2.2 Equations différentielles à retard

Les équations fonctionnelles à retards peuvent être classées comme linéaires ou non linéaires, autonomes ou non autonomes, périodiques ou non ou encore selon les types des retards. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à donner une classification des EDR selon les types de retards cités dans la littérature où on distingue deux classes principales, la première est dite "*d'équations différentielles retardées*" et l'autre "*d'équations différentielles de type neutre*".

Equations différentielles retardées

Dans cette première classe, on trouve les sous catégories suivantes :

Equations différentielles à retard constant Sous leur forme la plus simple, les équations différentielles à retard constant, discret ou ponctuel s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)),$$

où f est donnée et τ est une constante positive. À titre d'exemple, on trouve ce type d'équations dans le modèle des mouches de *Nicholson* [49].

Equations différentielles à retard variable Le retard dans ce cas variant dans la variable temporelle ou bien dépendant de l'état. À titre d'exemples, on trouve les équations différentielles à retard dépend du temps dans les modèles de transport [49] et celle qui dépend de l'état dans le modèle décrivant l'évolution d'une population de poissons dont les larves consomment une nourriture [10] ou le problème de deux corps en électrodynamique classique [25, 28, 30].

Equations à retard variant dans le temps

Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))),$$

où f est donnée.

Equations à retard variable dépendant de l'état

Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(x(t))))),$$

où f est donnée.

Des fois cette classification n'est pas suffisante dans l'étude, ce qui conduit à ajouter des contraintes supplémentaires relatives au retard ou à sa dérivée et qui mène ensuite à définir de nouvelles sous catégories d'équations à retard variable comme :

Equations à retard variable arbitraire : Le retard et sa dérivée ne sont pas limités.

Equations à retard majoré : Cette sous-catégorie suppose la connaissance d'une valeur maximale sur le retard

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_{\max}.$$

Si $\tau(t) = \tau$ est constant, il reste en pratique incertain et la contrainte ci-dessus assure un intervalle borné. Ce type de retard a été très largement abordé dans la littérature.

Equations à retard (bi-borné) : Cette sous-catégorie est moins abordée que le cas précédent dont on suppose que le retard vérifie la contrainte

$$\tau_{\min} \leq \tau(t) \leq \tau_{\max}.$$

Equations à retard variant lentement dans le temps

$\tau(t)$ est une fonction dérivable presque partout telle que

$$\dot{\tau}(t) \leq \lambda < 1,$$

qui indique alors une limitation sur la vitesse de variation du retard et que ce dernier varie lentement dans le temps autrement dit que les informations retardées arrivent dans l'ordre chronologique.

Equations à retard variant modérément dans le temps

$\tau(t)$ est une fonction dérivable presque partout telle que

$$\dot{\tau}(t) \leq \lambda \text{ avec } \lambda \geq 1.$$

Equations à retard variant rapidement dans le temps : Dans cette sous-catégorie, il n'y a aucune contrainte sur le retard et sa dérivée.

Equations différentielles à retard distribué Ce type d'équations a été traité dans la littérature, pour la conception d'observateurs pour des systèmes non linéaires ; pour prouver la stabilité des systèmes linéaires de type neutre ; la stabilisation robuste des systèmes neutres incertains et la commande robuste. Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = -\alpha x(t) - \beta \int x(t-a) d\eta(a),$$

Par exemple, la chauve souris, à la chasse, étant aveugle, elle émet des sons, pour utiliser les parois des grottes, afin de localiser sa proie. L'écho obtenu par le rebondissement de ces cris représente le retard qui dépend de l'état, qui est le prédateur. On trouve ce type d'équations Aussi dans le modèle de sida [63] ou le modèle de dynamique des populations présenté par *Volterra* en 1934 où il a utilisé un terme de retard distribué pour examiner un effet cumulatif sur le taux de mortalité d'une espèce.

Equations différentielles à retard inconnu Dans ce cas, aucune hypothèse sur le retard n'est considérée qu'il soit constant, variable ou distribué.

Equations différentielles à retard de type neutre

Ces équations notées en abrégé EDN différencient des EDR par le fait que la dérivée de l'état au temps actuel dépend non seulement des valeurs de l'état passé mais aussi de la dérivée d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation du temps passé.

Sous leur forme la plus simple, ces équations s'écrivent comme suit :

$$\frac{d}{dt} [Dx(t - \tau(t))] = f(t, x(t), x(t - \tau(t))),$$

où f est donnée et D est un opérateur. Par exemple, on trouve ce type d'équations dans le modèle de réseaux distribués [49].

2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section, on présente quelques résultats classiques sur l'existence et l'unicité.

2.3.1 Cas des équations fonctionnelles à retard

Etant donné un nombre $\tau \geq 0$, $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$, l'espace de *Banach* des fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n muni de la norme de la convergence uniforme. Si $[a, b] = [-\tau, 0]$, on pose $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ et on désigne la norme d'un élément $\varphi \in \mathcal{C}$ par

$$\|\varphi\| = \sup_{-\tau \leq t \leq 0} |\varphi(t)|.$$

Si $t_0 \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ et $x \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, alors pour $t \in [t_0, t_0 + A]$, on définit $x_t \in \mathcal{C}$ par

$$x_t(s) = x(t + s),$$

pour tout $s \in [-\tau, 0]$.

Définition 2.1 [41] Si \mathcal{D} est un sous ensemble de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée et " \cdot " représente ici la dérivée à droite, l'équation

$$\dot{x}(t) := f(t, x_t), \tag{2.1}$$

où

$$x_t(s) := x(t + s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad (2.2)$$

est une équation différentielle fonctionnelle à retard sur \mathfrak{D} notée en abrégé EDR et le nombre τ est appelé le retard.

Il est clair que le cas $\tau = 0$ correspond au cas des équations différentielles ordinaires. Il est évident qu'une condition initiale appropriée au temps $t = t_0$ exige la détermination de la fonction x sur tout l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$, i.e.

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (2.3)$$

où $\psi : [t_0 - \tau, t_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée supposée continue appelée la condition initiale de l'équation à retard (2.1). Ainsi, l'équation (2.1) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} x'(t) := f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x(t) = \psi(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (2.4)$$

où ψ est une fonction donnée continue sur l'intervalle $[t_0 - \tau, t_0]$.

Définition 2.2 [41] Etant donné $\psi \in \mathcal{C}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, une solution de l'équation (2.1) est une fonction notée $x(t)$ telle que $x(t) = \psi(t)$ si $t \in [t_0 - \tau; t_0]$ et satisfaisant (2.1) si $t \in [t_0, t_0 + A]$ avec $A > 0$. Une telle fonction $x(t)$ est dite solution de (2.1) à travers (t_0, ψ) et elle est notée souvent par

$$x(t) = x(t_0, \psi, f). \quad (2.5)$$

Lemme 2.1 [41] *Etant données une fonction $\psi \in \mathcal{C}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $f(t, \psi)$ une fonction continue. La recherche d'une solution de l'équation (2.1) à travers (t_0, ψ) est équivalente à la résolution de l'équation intégrale*

$$\begin{cases} x_{t_0} = \psi, \\ x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(u, x_u) du, \quad t \geq t_0. \end{cases}$$

Théorème 2.1 (Existence) [41] *Pour l'équation (2.1), supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ une application continue sur Ω . Si $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution de l'équation (2.1) passant par (t_0, ψ) .*

Définition 2.3 [41] On dit que la fonction $f(t, \varphi)$ est lipschitzienne par rapport à φ sur un compact K de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ s'il existe une constante $k > 0$ telle que, pour tout $(t, \psi_i) \in K$, $i = 1, 2$, on a

$$|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)| \leq k |\psi_1 - \psi_2|. \quad (2.6)$$

Théorème 2.2 (Unicité) [41] *Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et $f(t, \psi)$ est lipschitzienne par rapport à ψ sur tout sous ensemble compact de Ω . Si $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution unique de l'équation (2.1) passant par (t_0, ψ) .*

2.3.2 Cas des équations fonctionnelles de type neutre

Définition 2.4 [42] *Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ d'éléments (t, ψ) . Une fonction $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$ est dite atomique au point β de Ω si D est continue ainsi que sa première et seconde dérivée au sens de Fréchet par rapport à ψ et D_ψ , sa dérivée par rapport à ψ , est atomique en β de Ω .*

¹ D n'est pas nécessairement linéaire.

Définition 2.5 [42] Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$, $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions données continues avec D atomique en zéro. La relation

$$\frac{d}{dt}D(t, x_t) = f(t, x_t), \quad (2.7)$$

est dite une équation différentielle de type neutre notée en abrégé EDN.

Théorème 2.3 [42] (*Existence*) Si Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution de l'équation (2.7) passant par (t_0, ψ) .

Théorème 2.4 [42] (*Existence et unicité*) Si Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ et $f(t, \psi)$ est lipschitzienne par rapport à ψ sur tout sous-ensemble compact de Ω , alors pour tout $(t_0, \psi) \in \Omega$, il existe une solution unique pour l'équation (2.7) passant par (t_0, ψ) .

2.4 Quelques méthodes de résolution des EDR

2.4.1 Méthode des étapes

La méthode des étapes (dite aussi "*méthode pas à pas*", "*méthode des pas*" ou "*méthode des intégrations successives*") permet de résoudre numériquement les EDR et les EDN et permet par la même occasion d'établir l'existence et l'unicité de la solution. Elle fut présentée en 1965, par *R. Bellman* pour des retards constants. D'autres comme *El'sgol'ts* et *Norkin* (1973) ont montré qu'elle restait aussi valable pour les retards variables, à condition que le retard ne s'annule jamais.

Pour fixer les idées, considérons l'équation fonctionnelle linéaire retardée avec coefficients variables suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = a_1(t)x(t) + a_2(t)x(t - \tau) & \text{pour tout } t \in [0, \tau] \\ x(t) = \varphi(t) & \text{pour tout } t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.8)$$

Dans le cas où a_1 et a_2 sont deux constantes réelles, alors l'équation est dite de type "*Frisch-Holme*" [36]. Maintenant, on va résoudre cette équation par la méthode des étapes. Le principe de cette méthode est de chercher des solutions sur des intervalles de type $[k\tau, (k + 1)\tau]$ où $k \in \mathbb{N}$ en suivant les étapes suivantes :

1^{ère} étape : Dans l'intervalle $[-\tau, 0]$, la fonction $x(t)$ est la fonction donnée $\varphi(t)$, donc l'équation est résolue dans l'intervalle $[-\tau, 0]$ et on désigne par $x_0(t)$ cette solution. Il faut signaler ici que si $t \in [0, \tau]$, alors $t - \tau$ résidera dans $[-\tau, 0]$.

2^{ème} étape : Dans l'intervalle $[0, \tau]$, si $t \in [0, \tau]$, alors $t - \tau$ résidera dans $[-\tau, 0]$, donc $x(t - \tau) = x_0(t - \tau)$ dans l'intervalle $[0, \tau]$ et le système (2.8) devient :

$$\begin{cases} x'(t) = a_1(t)x(t) + a_2(t)x_0(t - \tau) & \text{pour tout } t \in [0, \tau] \\ x(0) = \varphi(0), \end{cases} \quad (2.9)$$

qui est un problème à valeur initiale pour une équation différentielle ordinaire (EDO) où $x_0(t - \tau) = \varphi(t - \tau)$ est connue. Ainsi, on résout cette EDO dans $[0, \tau]$ en utilisant la condition initiale $x(0) = \varphi(0)$ et on désigne par $x_1(t)$ cette solution dans $[0, \tau]$.

3^{ème} étape : Dans l'intervalle $[\tau, 2\tau]$, le système devient :

$$\begin{cases} x'(t) = a_1(t)x(t) + a_2(t)x_1(t - \tau) & \text{pour tout } t \in [\tau, 2\tau] \\ x(\tau) = x_1(\tau). \end{cases} \quad (2.10)$$

Cette EDO avec la condition initiale $x_1(\tau)$ est à son tour peut être résolue pour trouver la solution $x_2(t) \in [\tau, 2\tau]$ et ainsi de suite.

Exemple 2.1 Considérons le cas particulier suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x(t - \tau), & \text{pour } t \in [0, 2\tau] \\ x(t) = \varphi(t) = 1 & -\tau \leq t \leq 0. \end{cases}$$

1^{ère} étape : Dans $[-\tau, 0]$

$$x(t) = 1.$$

2^{ème} étape : Intégration dans $[0, \tau]$

L'intégration des deux membres de L'EDR de 0 à t , donne

$$x(t) = \alpha \int_0^t x(s - \tau) ds + x(0).$$

Comme $0 \leq s < \tau$, alors $-\tau \leq s - \tau < 0$. Sachant que $x(t) = 1$ pour $t \in [-\tau, 0]$, alors

$$x(s - \tau) = 1,$$

pour $s \in [0, \tau]$, ce qui conduit à

$$x(t) = \alpha t + 1,$$

dans l'intervalle $[0, \tau]$.

3^{ème} étape : Intégration dans $[\tau, 2\tau]$

L'intégration des deux membres de τ à t , donne

$$x(t) = \alpha \int_{\tau}^t x(s - \tau) ds + x(\tau).$$

Comme $\tau \leq s < 2\tau$, alors $0 \leq s - \tau < \tau$. Sachant que $x(t) = \alpha t + 1$ pour $t \in [0, \tau]$, alors

$$x(s - \tau) = \alpha(s - \tau) + 1,$$

pour $s \in [\tau, 2\tau]$, ce qui conduit à

$$x(t) = \alpha^2 \frac{t^2}{2} + (\alpha - \alpha^2 \tau) t - \alpha^2 \frac{\tau^2}{2} + \alpha^2 \tau^2 - \alpha \tau,$$

dans l'intervalle $[\tau, 2\tau]$.

Finalement, on a obtenu

t	EDO avec condition initiale
$[0, \tau]$	$\begin{cases} x'(t) = \alpha \\ x(0) = 1 \end{cases}$
$[\tau, 2\tau]$	$\begin{cases} x'(t) = \alpha^2(t - \tau) + \alpha \\ x(\tau) = \alpha\tau + 1, \end{cases}$

et la solution est donnée par

$$x(t) = \begin{cases} \alpha t + 1 & 0 \leq t \leq \tau \\ \alpha^2 \frac{t^2}{2} + (\alpha - \alpha^2 \tau) t - \alpha^2 \frac{\tau^2}{2} + \alpha^2 \tau^2 - \alpha \tau & \tau \leq t \leq 2\tau. \end{cases}$$

Si on prend $\alpha = -1$, $\tau = 1$ avec la même condition initiale $\varphi(t) = 1$, on aura

$$x(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2} & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

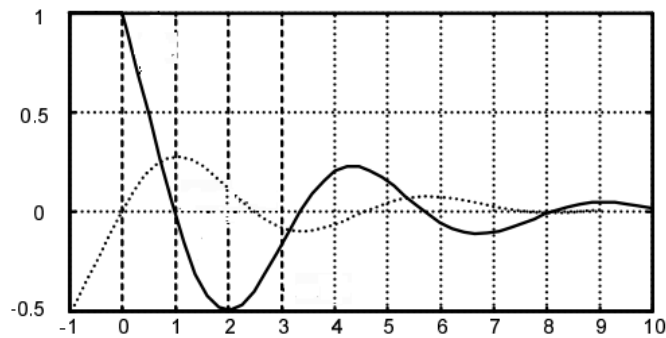


FIG. 2.1 – Représentation graphique de l'équation $x'(t) = -x(t - 1)$ avec $\varphi(t) = 1$ (plein) et $\varphi(t) = -1$ (pointillé) [69].

Exemple 2.2 On considère le système suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + M\dot{x}(t - \tau), \text{ p.p. } t \geq 0, \tau \geq 0, \quad (2.11)$$

avec la condition initiale

$$x_0(\theta) = \phi(\theta), \phi \in H^1 = H^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \quad -\tau \leq \theta \leq 0. \quad (2.12)$$

1^{er} cas : Si $A = 0$, B et M sont des matrices constantes de dimension $n \times n$, la solution de (2.11) est

$$x(t) = x(0) + \int_0^t [Bx(s - \tau) + M\dot{x}(s - \tau)] ds, \quad t \geq 0, \quad (2.13)$$

mais dans l'intervalle $t \in [0, \tau]$

$$x(\cdot - \tau) = \phi(\cdot).$$

Le changement de variable $\theta = s - \tau$ et la condition (2.12) sur l'intégrale (2.13), nous donnent

$$x(t) = x(0) + \int_{-\tau}^{t-\tau} [B\phi(\theta) + M\dot{\phi}(\theta)] d\theta. \quad (2.14)$$

Alors, l'utilisation de (2.13) de nouveau, on peut calculer $x(t)$ dans l'intervalle $t \in [\tau, 2\tau]$ et ainsi de suite.

2^{ème} cas : Si $A \neq 0$ dans (2.11), la solution est plus facile à calculer si on réécrit (2.11) sous la forme

$$\frac{d}{dt}[x(t) - Mx(t - \tau)] = Ax(t) + Bx(t - \tau), \quad t \geq 0, \tau > 0, \quad (2.15)$$

avec $x_t \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ et la condition initiale $x_0(\theta) = \phi(\theta)$, $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$. Alors il existe une solution unique x continue dans $(-\tau, \infty)$ donnée par

$$x(t) = Mx(t - \tau) + e^{At}[\phi(0) - C\phi(-\tau)] + \int_0^t e^{A(t-s)}(AM + B)x(s - \tau) ds. \quad (2.16)$$

On note aussi que la solution générale de (2.11)–(2.12) est pour $t > 0$

$$x(t) = e^{At}\phi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}[Bx(s - \tau) + M\dot{x}(s - \tau)]ds. \quad (2.17)$$

Ceci peut être vérifié par dérivation directe de (2.16) et (2.17).

2.4.2 Méthode de Runge Kutta

Les méthodes de *Runge Kutta* font partie des méthodes d'analyse numérique à un pas utilisée pour la résolution des équations différentielles ordinaires.

Une méthode de *Runge Kutta* de rang q est une méthode à un pas avec

$$\begin{aligned} \Phi(t_i, h, x_i) &= \sum_{j=1}^q w_j k_j \\ k_j &= k_j(t_i) = f\left(t_i + c_j h, x_i + h \sum_{i=1}^q a_{ji} k_i\right) \quad 1 \leq j \leq q \end{aligned} \quad (2.18)$$

où w_j, c_j, a_{ji} sont des constantes.

Elle est

explicite	si $a_{ji} = 0, \forall i \geq j$
semi-explicite	si $a_{ji} = 0, \forall i > j$
implicite	dans les autres cas.

Puis on a la relation suivante, entre le rang q et l'ordre p de la méthode

$$\begin{aligned} q &\leq 4 & q &= p \\ q &> 4 & p &\leq q. \end{aligned}$$

Par exemple

$q = 1$ on a la méthode d'*Euler*,

$q = 2$ on a la méthode d'*Euler* améliorée par exemple,

$q = 4$ on a la méthode " classique " de *Runge Kutta*,

$q = 5$ on a la méthode de *Runge Kutta-Merson* par exemple.

La méthode que l'on a choisie est la méthode " classique " de *Runge Kutta* de

rang 4 et d'ordre 4 :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.19)$$

avec

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_i + h, x_i + hk_3). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Adaptation au problème avec retard La méthode "classique" de *Runge Kutta* est extensible au cas des équations différentielles héréditaires [68]. En effet, considérons l'EDR avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) & t \leq 0, \\ x(t) = \theta(t) & -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Prenons h tel que $\tau = mh$, $m \in \mathbb{N}^*$. On a alors (2.19) avec

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i, x_{i-m}), \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1, x_{i-m+\frac{1}{2}}\right), \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_2, x_{i-m+\frac{1}{2}}\right), \\ k_4 &= f(t_i + h, x_i + hk_3, x_{i-m+1}). \end{aligned}$$

Les valeurs intermédiaires nécessaires sont calculées à l'aide d'une interpolation polynômiale de la solution entre les nœuds $i - m$ et $i - m + 1$.

Remarque 2.1 On peut résoudre numériquement, les équations différentielles à retard en adaptant par exemple les solveurs :

DELSOL, RETARD et RADAR5 basés sur la méthode de *Runge-Kutta* (Fortran), dde23, ddesd et ddensd basés sur la méthode de *Runge-Kutta* (Matlab) et la fonction Lambert W basé sur la méthode des étapes (Maple).

2.4.3 Méthode de Laplace

On va résoudre l'équation de type *Frisch-Holme* suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = c y(t) + b y(t - \tau), & \text{pour } t \geq 0. \\ y(t) = h(t) & \forall t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.22)$$

Estimation exponentielle

On va estimer la solution du problème (2.22) par le théorème suivant :

Théorème 2.5 [23] *Soit $y(t)$ une solution de l'équation (2.22). Alors il existe deux constantes positives α et β telles que*

$$|y(t)| \leq \alpha \|h\| \exp(\beta t), \quad (2.23)$$

où $\|h\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |h(\theta)|$.

Preuve. On intègre l'équation de type *Frisch-Holme* (2.22) de 0 à t et on arrive à

$$\int_0^t y'(s) ds = c \int_0^t y(s) ds + b \int_0^t y(s - \tau) ds,$$

donc

$$y(t) = h(0) + c \int_0^t y(s) ds + b \int_{-\tau}^{t-\tau} y(s) ds,$$

ce qui implique que

$$|y(t)| \leq \|h\| + |c| \int_0^t |y(s)| ds + |b| \int_{-\tau}^t |y(s)| ds,$$

i.e.,

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \|h\| + (|c| + |b|) \int_0^t |y(s)| ds + |b| \int_{-\tau}^0 |h(s)| ds, \\ &\leq (1 + |b| \tau) \|h\| + (|c| + |b|) \int_0^t |y(s)| ds. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de *Gronwall*, on obtient

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq (1 + |b| \tau) \|h\| \exp((|c| + |b|)t), \\ &\leq \alpha \|h\| \exp(\beta t), \end{aligned}$$

avec $\alpha = 1 + |b| \tau$, $\beta = |c| + |b|$. ■

L'équation caractéristique

L'équation caractéristique d'une équation différentielle homogène linéaire à coefficients constants est obtenue à partir des solutions non triviales de la forme $\exp(\lambda t)$. L'équation

$$y'(t) = cy(t) + by(t - \tau),$$

possède une solution non triviale de la forme $\exp(\lambda t)$ si et seulement si

$$\lambda \exp(\lambda t) = c \exp(\lambda t) + b \exp(\lambda(t - \tau)).$$

Ceci implique que

$$\lambda = c + b \exp(-\tau \lambda),$$

ou encore

$$f(\lambda) = \lambda - c - b \exp(-\tau \lambda) = 0. \tag{2.24}$$

$f(\lambda) = 0$ est appelée l'équation caractéristique de (2.22).

La solution fondamentale

Soit $Y(t)$ une solution de l'équation (2.22) ayant pour condition initiale

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

$Y(t)$ est appelée solution fondamentale du problème (2.22).

Théorème 2.6 [23] *La solution fondamentale $Y(t)$ du problème (2.22) est donnée par sa transformée de Laplace*

$$\mathcal{L}(Y(t))(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)}. \quad (2.26)$$

Aussi pour $\gamma > \beta$ ($\beta = |c| + |b|$)

$$Y(t) = \int_{(\gamma)} \frac{\exp(\lambda t)}{f(\lambda)} d\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\exp(\lambda t)}{f(\lambda)} d\lambda. \quad (2.27)$$

Preuve. Puisque $Y(t)$ satisfait l'estimation exponentielle (2.23) alors $\mathcal{L}(Y)$ existe ($\mathcal{L}(Y)$ est la transformée de Laplace de Y). On a

$$\underbrace{\int_0^\infty \exp(-\lambda t) y'(t) dt}_J = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) c y(t) dt + \int_0^\infty \exp(-\lambda t) b y(t-r) dt. \quad (2.28)$$

On intègre J par parties pour avoir

$$J = [\exp(-\lambda t) y(t)]_0^\infty + \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) y(t) dt.$$

On remplace par $Y(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} J &= [\exp(-\lambda t) Y(t)]_0^\infty + \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) Y(t) dt, \\ &= -1 + \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) Y(t) dt. \end{aligned}$$

L'équation (2.22) devient

$$\begin{aligned} -1 + \int_0^{\infty} \lambda \exp(-\lambda t) Y(t) dt &= \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) cY(t) dt + \\ &+ \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) cY(t - \tau) dt. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} -1 + \lambda \mathcal{L}(Y(t))(\lambda) &= c\mathcal{L}(Y(t))(\lambda) + b \int_{-\tau}^{\infty} \exp(-\lambda(t + \tau)) Y(t) dt \\ &= c\mathcal{L}(Y(t))(\lambda) + b \exp(-\lambda\tau) \times \left[\int_{-\tau}^0 \exp(-\lambda t) Y(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) Y(t) dt \right] \\ &= c\mathcal{L}(Y(t))(\lambda) + b \exp(-\lambda\tau) \mathcal{L}(Y(t))(\lambda) + \\ &\quad + b \exp(-\lambda\tau) \int_{-\tau}^0 \exp(-\lambda t) Y(t) dt, \\ &= c\mathcal{L}(Y(t))(\lambda) + b \exp(-\lambda\tau) \mathcal{L}(Y(t))(\lambda). \end{aligned}$$

i.e.,

$$(\lambda - c - b \exp(-\lambda\tau)) \mathcal{L}(Y(t))(\lambda) = 1.$$

On conclut que

$$\mathcal{L}(Y(t))(\lambda) = \frac{1}{\lambda - c - b \exp(-\lambda\tau)} = \frac{1}{f(\lambda)}.$$

La preuve est achevée. ■

Représentation intégrale de la solution

On va représenter la solution $y(t)$ du problème (2.22) ayant pour condition initiale $h(t)$ en fonction de la solution fondamentale $Y(t)$.

Théorème 2.7 [23] *La solution $y(t)$ du problème (2.22) peut être représentée sous la forme*

$$y(t) = Y(t) h(0) + b \int_{-\tau}^0 Y(t - \theta - \tau) h(\theta) d\theta.$$

Preuve. On applique la transformation de *Laplace* à chaque terme du problème (2.22), on obtient

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) y'(t) dt}_I = c \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) y(t) dt + b \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) y(t - \tau) dt. \quad (2.29)$$

On intègre I par parties et on trouve

$$\begin{aligned} I &= [\exp(-\lambda t) y(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \lambda \exp(-\lambda t) y(t) dt, \\ &= -h(0) + \int_0^{\infty} \lambda \exp(-\lambda t) y(t) dt, \\ &= -h(0) + \lambda \mathcal{L}(y)(\lambda). \end{aligned}$$

L'équation (2.29) devient

$$\begin{aligned} -h(0) + \lambda \mathcal{L}(y)(\lambda) &= c \mathcal{L}(y)(\lambda) + b \int_0^{\infty} \exp(-\lambda(t + \tau)) y(t) dt, \\ &= c \mathcal{L}(y)(\lambda) + b \exp(-\lambda \tau) \\ &\quad \times \left[\int_{-\tau}^0 \exp(-\lambda t) y(t) dt + \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) y(t) dt \right], \\ &= c \mathcal{L}(y)(\lambda) + b \exp(-\lambda \tau) \mathcal{L}(y)(\lambda) \\ &\quad + b \exp(-\lambda \tau) \int_{-\tau}^0 \exp(-\lambda t) y(t) dt. \end{aligned}$$

Donc,

$$h(\lambda) \mathcal{L}(y)(\lambda) = h(0) + b \exp(-\lambda \tau) \int_{-\tau}^0 \exp(-\lambda t) h(t) dt,$$

ceci implique que

$$\mathcal{L}(y)(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} \left[h(0) + b \exp(-\lambda \tau) \times \int_{-\tau}^0 \exp(-\lambda \theta) h(\theta) d\theta \right].$$

Donc,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{(\gamma)} \frac{\exp(\lambda t)}{f(\lambda)} \left[h(0) + b \exp(-\lambda \tau) \times \int_{-\tau}^0 \exp(-\lambda \theta) h(\theta) d\theta \right] d\lambda, \\ &= y(t) h(0) + \int_{(\gamma)} b \frac{\exp(\lambda t)}{f(\lambda)} \underbrace{\left[\exp(-\lambda \tau) \times \int_{-\tau}^0 \exp(-\lambda \theta) h(\theta) d\theta \right]}_{I_1} d\lambda. \end{aligned}$$

Pour calculer I_1 . On définit une fonction $\omega : [-\tau; +\infty[\rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\omega(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \geq 0, \\ 1 & \text{si } \theta < 0. \end{cases}$$

$$I_1 = \int_{-\tau}^{+\infty} \exp(-\lambda\tau) \exp(-\lambda\theta) h(\theta) \omega(\theta) d\theta,$$

En posant $s = \tau + \theta$, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} \exp(-\lambda s) h(s - \tau) \omega(s - \tau) ds, \\ &= \mathcal{L}(h(-\tau + \cdot) \omega(-\tau + \cdot))(\lambda). \end{aligned}$$

Maintenant, on va calculer

$$\int_{(\gamma)} b \frac{\exp(\lambda t)}{f(\lambda)} I_1 d\lambda.$$

$$\begin{aligned} \int_{(\gamma)} b \frac{\exp(\lambda t)}{hf(\lambda)} I_1 d\lambda &= b \int_{(\gamma)} \exp(\lambda t) \mathcal{L}(Y)(\lambda) \mathcal{L}(h(-\tau + \cdot) \omega(-\tau + \cdot))(\lambda) d\lambda, \\ &= b \int_{(\gamma)} \exp(\lambda t) \mathcal{L}(Y * [h(-\tau + \cdot) \omega(-\tau + \cdot)])(\lambda) d\lambda, \\ &= b (Y * [h(-\tau + \cdot) \omega(-\tau + \cdot)])(t), \\ &= b \int_0^t Y(t-s) [h(-\tau + s) \omega(-\tau + s)] ds, \\ &= b \int_0^{\tau} Y(t-s) h(-\tau + s) ds, \end{aligned}$$

car $\omega(-\tau + s) = 0$ dans $[\tau, t]$. Finalement ($\theta = s - \tau$)

$$y(t) = Y(t) h(0) + b \int_{-\tau}^0 Y(t - \theta - \tau) h(\theta) d\theta.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

2.5 Modèles d'équations différentielles à retard

2.5.1 Equation de *Nicholson* (mouches-moutons)

En 1950, le célèbre biologiste entomologiste australien *Alexander J. Nicholson* a mené une longue série d'expériences visant à en apprendre davantage sur des populations de mouches dévoreuses de viandes responsables de 90% des myiases² ovines qui menacent les élevages de plusieurs pays comme l'*Australie*, la *Nouvelle Zélande* et l'*Afrique du sud* [65, 64, 66].

Cette mouche diptère ayant un corps rond à ovale de longueur varie de 4.5 à 10 millimètres avec des yeux rougeâtres et un corps verdâtre ou vert bleuté avec des reflets cuivrés fait partie de la famille des "*Calliphoridae*" et elle est connue sous le nom "*lucilie cuivrée australienne*" ou tout simplement "*mouches du mouton australien*" ou en Latin "*Lucilia cuprina*" ou "*Phaenicia cuprina*".

En outre, elle a deux paires d'ailes, la première paire étant des ailes membraneuses et la seconde paire étant des ailes postérieures réduites et modifiées connues sous le nom "*d'haltères*" qui sont utilisées pour la stabilisation du vol.

Le cycle de développement de cette mouche comprend quatre stades de croissance : œuf , larve , pupes et adulte. La lucilie femelle gravide attirée par les plaies ou les replis laineux malodorants et humides des moutons pond en moyenne 250 œufs sur la peau de l'animal et qui vont éclore et se muent en larves carnivores après une période d'incubation ne dépasse pas 24h. Ces asticots se nourrissent des sécrétions des plaies et des tissus sous-jacents du

²Une myiase désigne tout parasitisme d'un être vivant par les larves de diptères parasites.



FIG. 2.2 – La lucilie cuivrée.

mouton pendant trois stades larvaires de durée de 4 à 5 jours.

Après la phase larvaire, les larves complètement développées se laissent tomber et s'enfoncent dans le sol pour se transformer en pupes donnant des nouvelles mouches jeunes.

Motivés par les données expérimentales obtenues par *Nicholson*, *Gurney*, *Blythe* et *Nisbet* [38] ont proposé en 1980, l'équation retardée (2.30) ci-dessous qui décrit l'évolution de la dynamique d'une population au cours du temps

$$\frac{dN(t)}{dt} = \beta N(t - \tau) \exp\left(\frac{-N(t - \tau)}{k}\right) - \delta N(t), \quad (2.30)$$

où

$N(t)$ représente l'effectif de la population à l'instant t (les lucilies cuivrées adultes à l'instant t)

$\frac{dN(t)}{dt}$ représente le taux d'évolution du nombre de la population

β est le maximum de la croissance quotidienne d'œufs par individu

k est le nombre maximal d'individus que le milieu peut supporter³

³La capacité de charge du milieu.

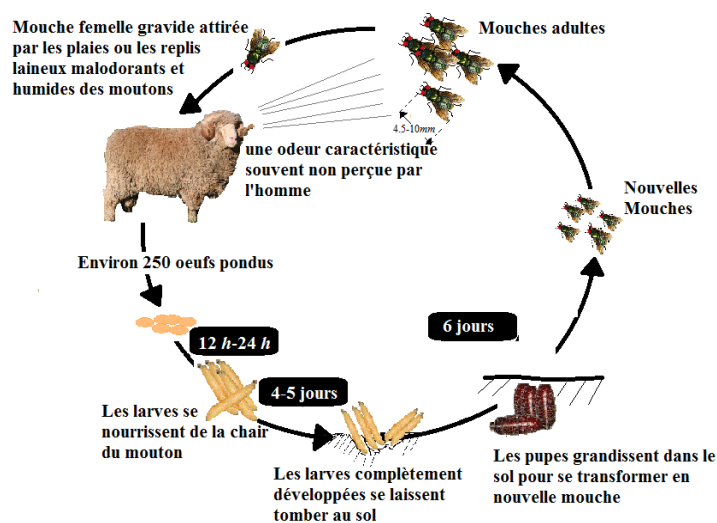


FIG. 2.3 – Cycle de développement de la lucilie cuivrée.

δ est le taux de mortalité par individu (jour^{-1})

τ est la durée de la phase de maturation (le cycle de développement).

Plusieurs généralisations et une recherche très active s'est amorcée récemment sur cette équation, par exemple en 2004, *Liu et Ge* [55], ont étudié l'équation différentielle de type neutre du premier ordre suivante :

$$\frac{d}{dt} [x(t) - cx(t - \tau(t))] = -a(t)x(t) + b(t)x(t - \tau(t)) e^{-\beta(t)x(t - \tau(t))}.$$

En conservant la même dénomination; "équation de Nicholson", de nouvelles modifications du modèle ont été largement considérées dans l'étude des croissances d'autres espèces.

2.5.2 Problème de deux corps en électrodynamique classique

Dans [28] (voir aussi [30, 25, 43]), *Driver* a étudié un problème de deux corps en électrodynamique classique avec une interaction retardée. Il a consi-

déré le mouvement de deux particules chargées se déplaçant le long de l'axe des x et substitué l'expression pour le champ d'une charge mobile, calculée à partir du potentiel de *Liénard-Wiechert*, dans la loi de la force de *Lorentz-Abraham*. La réaction de rayonnement est omise, mais le retard est inclus en raison de la vitesse limitée de la propagation, c , des effets électriques. la modélisation mathématique de ce problème conduit à un système d'équations différentielles à retard. En partant de ce modèle, il a obtenu un système de six équations différentielles décrivant l'évolution des états, des vitesses et des retards temporels.

Pour décrire son modèle, nous désignons par $x_i(t)$ ($i = 1, 2$) les positions des deux charges ponctuelles sur l'axe dans un système inertiel donné à l'instant t . Soit $v_i(t) = x'_i(t)$ ($i = 1, 2$), les vitesses des charges. Comme déjà mentionné, nous omettons la réaction de rayonnement mais nous permettons un champ électrique externe, $E_{ext}(t, x)$, dans la direction x , qui est supposé continu sur un ensemble ouvert D_1 dans le plan (t, x) . Alors, l'équation du mouvement d'une particule chargée i est donnée par :

$$\frac{m_i v'_i(t)}{[1 - v_i^2(t)/c^2]^{3/2}} = q_i E_j(t, x_i(t)) + q_i E_{ext}(t, x_i(t)), \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad j \neq i, \quad (2.31)$$

où m_i est la masse au repos et q_i est la grandeur de la charge i , c est la vitesse de la lumière dans le vide, et $E_j(t, x)$ est le champ électrique à (t, x) dû à une autre charge $j \neq i$. Le champ magnétique de la charge j n'est pas impliqué dans ce cas unidimensionnel.

Le champ à l'instant t et au point x produit par la charge j est supposé calculé à partir des potentiels de *Liénard-Wiechert*. L'expression de ce champ implique un décalage temporel $t - \tau_{ji}$, représentant l'instant où un signal lumineux devrait quitter la charge j pour arriver à $x_i(t)$ à l'instant t . Donc,

le retard doit être une solution de l'équation fonctionnelle

$$\tau_{ji}(t) = |x_i(t) - x_j(t - \tau_{ji}(t))|/c. \quad (2.32)$$

Il est clair que $\tau_{ji}(t)$ ne peut pas être écrit explicitement.

L'introduction des retards dans l'équation (2.31), nécessite de déterminer des trajectoires initiales des deux charges sur un certain intervalle approprié $[\alpha, t_0]$.

Considérons maintenant ces trajectoires initiales et leurs extensions $(x_1(t), x_2(t))$ définies sur un certain intervalle $[\alpha, \beta)$, où $\beta > t_0$, tel que

- (a) chaque $x'_i(t)$ est continue et $|x'_i(t)| < c$ pour tout $t \in [\alpha, \beta)$;
- (b) $x_2(t) > x_1(t)$ et $(t, x_i(t)) \in D$ pour tout $t \in [t_0, \beta)$;
- (c) les deux équations fonctionnelles $\tau_{ji}^0 = |x_i(t_0) - x_j(t_0 - \tau_{ji}^0)|/c$ admet des solutions $\tau_{ji}^0, i \neq j, i, j \in \{1, 2\}$.

Puis *Driver* prouve que $(x_1(t), x_2(t))$ est une solution de (2.31)–(2.32) si et seulement si elle satisfait au système de six équations différentielles à retard suivant pour $t \in (t_0, \beta)$:

$$\begin{cases} x'_i(t) = v_i(t), \\ \tau'_{ji}(t) = \frac{(-1)^i v_i(t) - (-1)^i v_j(t - \tau_{ji}(t))}{c - (-1)^i v_j(t - \tau_{ji}(t))} \\ \frac{v'_i(t)}{[1 - v_i^2(t)/c^2]^{3/2}} = \frac{(-1)^i a_i c}{\tau_{ji}^2(t)} \cdot \frac{c + (-1)^i v_j(t - \tau_{ji}(t))}{c - (-1)^i v_j(t - \tau_{ji}(t))} + q_i E_{ext}(t, x_i(t))/m_i, \end{cases} \quad (2.33)$$

où $\tau_{ji}(t_0) = \tau_{ji}^0, a_i = q_1 q_2 / (4\pi \epsilon_0 m_i c^3)$ est une constante, et en particulier, ϵ_0 est la constante diélectrique de l'espace libre et $(i, j) = (1, 2)$ ou $(2, 1)$.

Driver [28] a montré que si les trajectoires initiales données satisfont à la condition (a) pour $\alpha \leq t \leq t_0$, la condition (b) en t_0 , et la condition (c), et si $E_{ext}(t, x)$ est lipschitzienne par rapport à x dans chaque sous-ensemble compact de D_1 et si la vitesse initiale de chaque particule est lipschitzienne,

alors il existe une solution unique. Cette solution peut être continuée d'exister tant que les charges n'entrent pas en collision ($\lim x_1(t) = \lim x_2(t)$ quand t se rapproche de l'extrémité droite de l'intervalle maximal d'existence) et ni $(t, x_1(t))$ ni $(t, x_2(t))$ ne s'approche de la frontière de D_1 . Il faut signaler ici que dans l'article de *Driver* et *Norris* [31], la condition de *Lipschitz* ci-dessus pour les vitesses initiales est relâchée à l'intégrabilité de la vitesse initiale sur $[\alpha, t_0]$.

Dans *Driver* [24], un cas particulier a été donné où les positions et les vitesses des particules à un instant donné détermineront l'état du système. Plus précisément, dans cet exemple d'équations électrodynamiques du mouvement, les valeurs instantanées des positions et des vitesses des particules détermineront leurs trajectoires, si les solutions sont définies pour tous les temps postérieurs. Cette propriété était fréquemment conjecturée, affirmée, ou implicitement supposée, comme dans la mécanique newtonienne et comme indiqué par la longue liste de références citées dans l'article de *Driver* [24], mais cette propriété ne doit pas être attendu pour les équations électrodynamiques générales. Dans le cas où $E_{ext}(t, x) = 0$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ et $q_1 q_2 > 0$ (les deux charges sont de même signe), $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_2(t) - x_1(t)| = \infty$ et $|v_i(t)| < c$ pour tout $t \geq \alpha$. C'est un résultat très intéressant qui prouve que le retard $\tau_{ji}(t)$ peut devenir non borné, tel qu'on obtient un système d'équations différentielles fonctionnelles avec des retards non bornés dépendants de l'état.

Dans le cas où les mouvements sont considérés tridimensionnels, alors on obtient un système d'équations différentielles fonctionnelles de type neutre avec retards dépendants de l'états, et le taux de changement de v_i au temps actuel dépend aussi de sa valeur historique $v_j'(t - \tau_{ji})$. Plus précisément, si

nous introduisons un vecteur unitaire

$$u_i = \frac{x_i - x_j(t - \tau_{ji})}{c\tau_{ji}},$$

et une quantité scalaire

$$\gamma_{ij} = 1 - \frac{1}{c} v_j(t - \tau_{ji}) \cdot u_i,$$

comme dans [27], le point "." désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 (sans oublier que dans ce cas, x_1, x_2 sont des vecteurs dans \mathbb{R}^3), alors la loi de force de *Lorentz* donne

$$v'_i(t) = \frac{q_i (1 - |v_i|^2/c^2)^{1/2}}{m_i} [E_j + (v_i/c \cdot E_j)(u_i - v_i/c) - (v_i/c \cdot u_i) E_j], \quad (2.34)$$

où E_j est le champ électrique retardé (valeur vectorielle) arrivant à x_i à l'instant t de la particule j . Ce champ, dans \mathbb{R}^3 , peut être trouvé à partir des potentiels de *Liénard-Weichert* tels que

$$E_j = \frac{kq_i}{\tau_{ji}^2 \gamma_{ij}^3} [u_i - v_j(t - \tau_{ji})/c] [1 - |v_j|^2(t - \tau_{ji})] + \frac{kq_i}{\tau_{ji} \gamma_{ij}^3} u_i \times ([u_i - v_j(t - \tau_{ji})/c] \times v'_j(t - \tau_{ji})), \quad (2.35)$$

où $k > 0$ est une constante en fonction des unités, et \times désigne le produit vectoriel croisé dans \mathbb{R}^3 . L'adaptation dynamique de τ_{ji} est donnée par

$$\tau'_{ji}(t) = \frac{u_i \cdot [v_i - v_j(t - \tau_{ji})]}{c\gamma_{ij}}. \quad (2.36)$$

D'après ce qui précède, le mouvement de chaque particule est influencé par les champs électromagnétiques des autres, et en raison de la vitesse finie de la propagation de ces champs, les équations du modèle décrivant le mouvement des particules chargées via une action à une distance impliquera des retards temporels qui dépendent de l'état du système entier.

Driver et *Hoag* [26, 44] ont noté que si l'on considère que les lois de base de la physique sont symétriques par rapport au renversement du temps, donc l'existence de ces retards implique l'existence des termes avancés dans les équations, et donc on est conduit à un système d'équations différentielles fonctionnelles avec des arguments mixtes [44] ou de type neutre [26].

L'héritage des travaux de *Driver* et ses collaborateurs en électrodynamique est extraordinaire. Malgré qu'ils ont été publiés depuis 55 ans, ils marquent la naissance de la théorie des équations différentielles à retard dépendant de l'état et ils ont été couronnés de nombreux succès dans l'inspiration pour le développement théorique et pratique pour de nouveaux résultats.

Cependant en pratique, beaucoup d'EDR peuvent déduites à partir d'équations aux dérivées partielles (EDP) ou d'équations aux dérivées partielles à retard (EDPR). On illustre cela avec trois exemples : l'évolution au cours du temps des populations de cellules souches hématopoïétiques, une ligne de transmission sans pertes et un modèle de réaction-diffusion.

2.5.3 Hématopoïèse

Il ne s'agit pas ici de faire une présentation biologique détaillée de l'hématopoïèse, mais plutôt de donner une idée de ce qu'est l'hématopoïèse, de présenter un modèle mathématique pionnier et de citer quelques travaux dédiés à cette thématique et qui nous paraissent incontournables. L'hématopoïèse est un mot venant du grecque *haimatôpoiein*, d'après *poiein* "faire" et plus précisément, c'est la production et le renouvellement quotidien d'une quantité très importante de cellules sanguines (les globules rouges lors de l'érythropoïèse, les globules blancs lors de la leucopoïèse et les plaquettes lors de la thrombocytopoïèse) dans les organes hématopoïétiques (moelle

osseuse chez l'adulte, foie et rate chez l'embryon).

Cette production des éléments figurés du sang est assurée par les cellules souches hématopoïétiques (CSH) dites primitives et qui ont la capacité d'auto-renouvellement et de différenciation vers l'une ou l'autre des lignées cellulaires. Elles se différencient en quatre sous-populations selon leurs fonctions et leur état de maturation : *cellules souches* (immatures), *progéniteurs*, *précurseurs* (cellules en cours de maturation,) et *cellules matures* (différenciées).

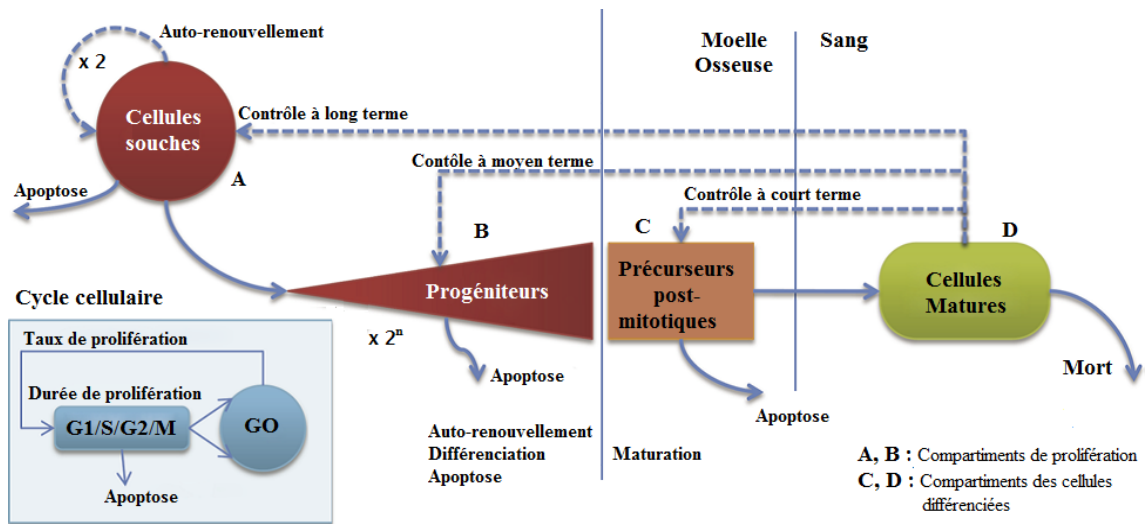


FIG. 2.4 – Schéma représentant les différentes étapes de l'hématopoïèse [3]

Les premiers modèles mathématiques remontent à la fin des années 70 et parmi les travaux pionniers qui forment les bases de l'étude mathématique de l'hématopoïèse, on trouve les études de *M.C. Mackey* en 1978 [59] sur l'hématopoïèse périodique et l'anémie aplasique⁴.

⁴Anémie due à un dysfonctionnement du tissu médullaire, incapable de produire correctement les éléments figurés du sang.

Nous allons maintenant présenter le premier modèle de *Mackey* [59] qui est inspiré par des travaux antérieurs de *Lajtha* en 1959, *Burns* et *Tannock* en 1970 et qui décrit l'évolution au cours du temps de deux populations de cellules souches hématopoïétiques immatures, une proliférante (les cellules sont en phases G_1 , S , G_2 , M) et l'autre quiescente (les cellules sont en phase de repos G_0). En partant d'un système couplé d'EDP hyperboliques du premier ordre et grâce à la méthode des caractéristiques, il trouva un système de deux équations différentielles à retard.

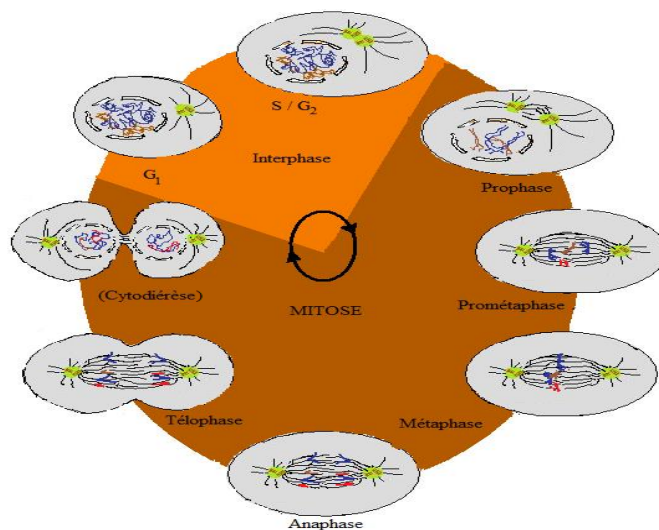


FIG. 2.5 – Le cycle cellulaire [2].

On a les équations de transport suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} n(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} n(t, a) = -(\delta + \beta(N(t))) n(t, a) \quad a > 0, t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} p(t, a) + \frac{\partial}{\partial a} p(t, a) = -\gamma p(t, a) \quad 0 < a < \tau, t > 0 \\ n(t, 0) = 2p(t, \tau) \quad t > 0 \\ p(t, 0) = \int_0^{+\infty} \beta(N(t)) n(t, a) da \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (2.37)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} n(0, a) = n_0(a) \in L^1((0, +\infty), \mathbb{R}^+) \\ p(0, a) = p_0(a) \in L^1((0, \tau), \mathbb{R}^+), \end{cases} \quad (2.38)$$

et la condition naturelle :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} n(t, a) = 0, \quad t \geq 0,$$

où

- a : l'âge qui est le temps passé par une cellule dans une des deux phases, quiescence ou prolifération.
- $n(t, a)$: la densité des CSH en phase de repos à l'instant $t \geq 0$ et d'âge $a \geq 0$.
- $p(t, a)$: la densité des CSH en phase de prolifération à l'instant $t \geq 0$ et d'âge $0 \leq a \leq \tau$.
- $N(t)$: la densité de la population totale des cellules dans la phase de repos où $N(t) = \int_0^{+\infty} n(t, a) da$.
- δ : Le taux de mortalité des cellules au repos (jour^{-1}).
- γ : le taux d'apoptose (mort naturelle, suicide cellulaire, ou mort cellulaire programmée) (jour^{-1}).
- β : le taux de réintroduction (jour^{-1}).
- τ : la durée moyenne de la phase de prolifération, (la durée du cycle cellulaire) (jour).

Dans le système (2.37), la première condition frontière signifie que toutes les cellules proliférantes entrent immédiatement après leur division dans la phase G_0 . La deuxième condition frontière décrit le flux des cellules quiescentes qui entrent dans la phase de prolifération.

En vertu de la méthode des caractéristiques, on arrive à

$$p(t, \tau) = \begin{cases} e^{-\gamma t} p(0, \tau - t) & 0 \leq t \leq \tau \\ e^{-\gamma \tau} p(t - \tau, 0) & t > 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

En posant

$$P(t) = \int_0^\tau p(t, a) da, \quad (2.40)$$

la densité des cellules dans la phase de prolifération à l'instant $t \geq 0$ et en tenant compte des conditions frontières et de (2.39), l'intégration du système (2.37) par rapport à l'âge donne le système couplé de deux équations différentielles à retard temporel discret suivant :

$$\begin{cases} N'(t) = -(\delta + \beta(N(t)))N(t) + 2e^{-\gamma\tau}\beta(N(t-\tau))N(t-\tau) & t > \tau \\ P'(t) = -\gamma P(t) + \beta(N(t))N(t) - e^{-\gamma\tau}\beta(N(t-\tau))N(t-\tau) & t > \tau, \end{cases} \quad (2.41)$$

avec des conditions initiales pour $t \in [0, \tau]$.

Dans la première équation, la perte de la non prolifération des cellules à la phase de prolifération et à la différenciation est représentée par le premier terme de droite tandis que le deuxième terme représente la phase de production des cellules dans la phase de repos G_0 à partir de la prolifération des cellules souches. Le facteur 2 compte pour l'amplification des effets de la division cellulaire tandis que $e^{-\gamma\tau}$ compte pour l'atténuation dans la phase de prolifération en raison de l'apoptose. Ce modèle a été modifié de nombreuses fois.

2.5.4 Ligne de transmission sans pertes

Maintenant, en vertu de la transformation de *d'Alembert*, on va voir comment peut on réécrire une EDP hyperbolique en tant que système à retard de type neutre [70] similaire à [49].

Cet exemple traite une ligne de transmission sans pertes, à une extrémité ($x = 0$), il y a une source de tension constante E et à l'autre extrémité

($x = l$), une capacité est branchée en parallèle avec une diode tunnel⁵.

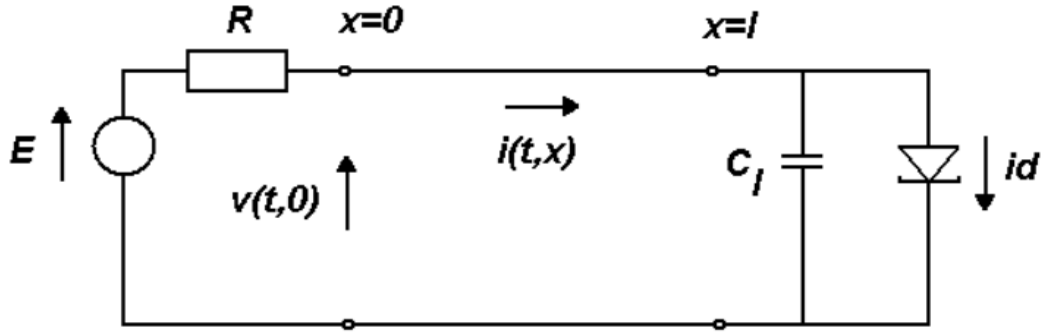


FIG. 2.6 – Circuit de la ligne de transmission [70]

Le courant $i(.,.)$ et la tension $v(.,.)$ sont des fonctions de t et x qui satisfont l'équation du télégraphe, donc on obtient les deux équations aux dérivées partielles du premier ordre de type hyperbolique suivantes :

$$L \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ et } C \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.42)$$

avec les conditions aux limites

$$E = Ri(t, 0) + v(t, 0) \text{ et } i(t, l) = C_l \frac{\partial v}{\partial t}(t, l) + i_d(v(t, l)), \quad (2.43)$$

où l est la longueur de la ligne, L et C sont l'inductance et la capacité du conducteur par unité de longueur, R est la résistance à l'entrée, C_l est la capacité en parallèle avec la diode tunnel, $i_d(v)$ est la courbe caractéristique courant-tension de la diode (une fonction polynômiale non linéaire) donnée. Les points d'équilibre (v_0, i_0) satisfont une équation linéaire donnée par

$$E = v_0 + Ri_0, \quad i_0 = i_d(v_0).$$

⁵Ce genre de diodes est utilisé dans les amplificateurs haute fréquence de circuits oscillants électroniques par exemple.

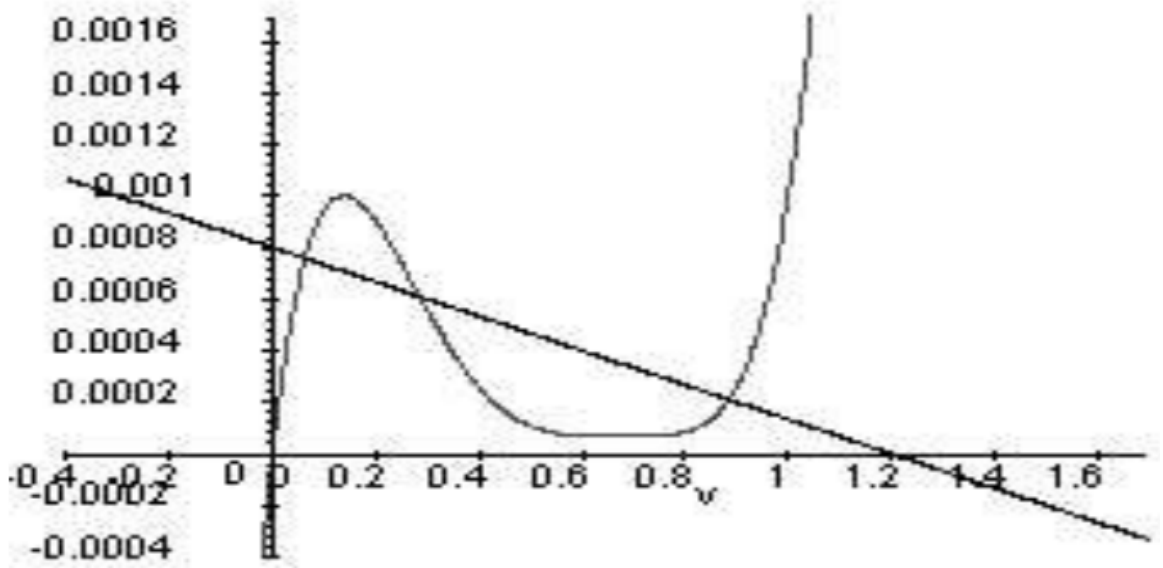


FIG. 2.7 – Courbe caractéristique courant-tension et ligne de charge de la diode tunnel. [70]

On suppose que le point de fonctionnement est donné par l'approximation du premier ordre

$$i(v_d) \approx i(v_0) + m(v_d - v_0),$$

où m est une constante positive. La formule de *D'Alembert* et les conditions aux limites (2.43) nous permettent d'obtenir l'équation différentielle linéaire de type neutre suivante :

$$\frac{d\Psi}{d\xi}(\xi) - C \frac{d\Psi}{d\xi}(\xi - \tau) = A\Psi(\xi) + B\Psi(\xi - \tau), \quad (2.44)$$

$$\text{avec } A = \frac{m - \sqrt{\frac{L}{C}}}{C_l}, \quad B = -\frac{\left(\sqrt{\frac{L}{C}} - R_0\right) \left(m + \sqrt{\frac{L}{C}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{L}{C}} + R_0\right) C_l}, \quad C = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}} - R_0}{\sqrt{\frac{L}{C}} + R_0},$$

$$\tau = 2\sqrt{LCl} \text{ et } \xi =: t - bl.$$

Ce qui prouve une transformation⁶ du système de deux EDP de type hyperbolique (2.43) en une équation à retard de type neutre.

2.5.5 Équation de réaction-diffusion avec argument dévié

L. Sergeeva [76], *A.M. Samoïlink* et collab [72, 73] ont établi les conditions dans lesquelles il est possible de construire des solutions globales d'une EDP avec argument dévié dans la variable temporel. Ils ont montré l'existence et l'unicité de ces solutions en vertu du théorème de point fixe de *Banach* et ils ont donné la structure de ces solutions et l'algorithme utilisée pour leur construction par l'utilisation de la méthode de séparation des variables et la méthode des suites récurrentes.

Considérons le problème aux dérivées partielles linéaire non homogène avec argument dévié suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) = p(t) u_{xx}(x, t + \mu) + q(x, t), & (x, t) \in Q, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.45)$$

avec des conditions aux limites de *Dirichlet* homogènes

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

où $Q = \{(x, t) : 0 < x < l, t \in \mathbb{R}\}$ et $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Remarque 2.2 Dans le cas où $t \geq 0$ (la solution n'existe en général que dans le futur), l'EDP avec argument dévié (2.45) est de type parabolique et dite "*équation de réaction-diffusion avec argument dévié*" ou "*équation de la chaleur non homogène avec argument dévié*"⁷ où $u(x, t)$ est une fonction

⁶La transformation n'est pas unique.

⁷Le premier exemple a été étudié par *Fourier* en 1822 dans son œuvre révolutionnaire "*Théorie analytique de la chaleur*".

définie pour la position x et le temps t et représente les individus qui peuvent être différents d'un problème à l'autre ; ils peuvent représenter des concentrations, des densités, des charges électriques, des températures, etc. La première dérivée par rapport au temps traduit la vitesse de formation, $q(x, t)$ est une fonction appelée "la réaction", "le terme réactif" ou "la source" et elle découle de toute interaction entre les individus, $p(t)$ est le coefficient de diffusion et $p(t) u_{xx}(x, t + \mu)$ est le terme de diffusion qui peut représenter la diffusion moléculaire ou un certain mouvement aléatoire d'individus dans une population et μ est l'argument dévié. Les conditions aux limites homogènes de *Dirichlet* signifient qu'il n'y a pas d'individus sur la frontière.

Pour simplifier l'EDP avec argument dévié (2.45), *Samoilenko et all* [73, 72, 76], ont utilisé la méthode de séparation des variables sur le problème homogène qui a comme fonctions propres,

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l},$$

associées aux valeurs propres

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, k = 1, \dots, n \text{ pour certain } n \geq 1.$$

Il ont construit une solution globale $u(x, t)$ du problème (2.45) sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, (x, t) \in Q. \quad (2.46)$$

L. Sergeeva [76] a supposé aussi que le terme source $q(x, t)$ peut être représenté comme une somme des n premiers termes de la série de *Fourier* impaire

$$q(x, t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (2.47)$$

où

$$q_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^1 q_k(\xi, t) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi. \quad (2.48)$$

Donc, la substitution de (2.47) et (2.48) dans (2.45) donne l'équation à argument dévié suivante :

$$T'_k(t) + \lambda_k p(t) T_k(t + \mu) - q_k(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.49)$$

2.6 Récapitulatif

Revenons un instant sur les principaux points abordés dans ce chapitre. Premièrement, on a présenté un bref historique sur les équations fonctionnelles à retard suivi par une classification des différents types de ces équations cités dans la littérature. Ensuite, on a proposé un rapide survol sur la théorie d'existence et d'unicité des EDR et des EDN et quelques méthodes de résolution comme la méthode des étapes, celle de *Runge-Kuta* et la transformation de *Laplace*. Finalement, on a exposé cinq modèles d'équations avec retard, les deux premiers modèles (le modèle de *Nicholson* et le modèle de deux corps en électrodynamique classique) peuvent être modélisés mathématiquement par des équations différentielles à retard discret ou variable ou bien par équations différentielles de type neutre tandis que le troisième et le quatrième phénomènes sont modélisés par des EDP sans retard mais leur étude mathématique conduit à obtenir des EDR ou des EDN. En effet, dans le modèle décrivant l'évolution au cours du temps des populations de cellules souches hématopoïétiques, la méthode des caractéristiques conduit à obtenir un système couplé de deux équations différentielles à retard temporel discret et dans le modèle d'une ligne de transmission sans pertes, la transformation de *d'Alembert* nous permet de réécrire l'EDP hyperbolique en tant qu'une équation différentielle à retard de type neutre.

Enfin, on a présenté un modèle d'une équation aux dérivées partielles linéaire non homogène à argument dévié où la méthode de séparation des

variables sur le problème homogène conduit à une équation différentielle à argument dévié.

Pour plus de détails nous référons aux livres de *Hale* [41], *Hale et Lunel* [42] et le lecteur pourra consulter aussi le livre de *Kolmanovskii et Nosov* [50] pour des exemples de modèles comportant des termes à retard.

CHAPITRE 3

Existence et positivité des solutions périodiques d'une classe d'équations différentielles fonctionnelles de type neutre du second ordre

Sommaire

3.1	Introduction	62
3.2	Préliminaires	63
3.3	Existence de solutions périodiques positives	72
3.4	Récapitulatif	78

Ce chapitre est consacré à prouver l'existence de solutions périodiques positives d'une classe d'équations différentielles du second ordre non linéaires de type neutre. L'étude est faite en vertu d'une approche basée sur l'application du théorème de *Krasnoselskii* combiné avec quelques propriétés de la fonction de *Green* d'une EDO linéaire du second ordre.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous sommes essentiellement intéressés par l'étude de l'existence de solutions périodiques positives d'une classe d'équations différentielles non linéaires du second ordre de type neutre qui apparaissent dans la modélisation de nombreux phénomènes rencontrés en physique, biologie, mécanique, économie, etc.

On peut considérer que l'étude des équations fonctionnelles de type neutre commence avec les trois articles¹ (presque) oubliés de *I.P. Kabakov* (1946), *Sokov* (1946), *I.P. Kabakov* et *A.A. Sokov* (1946) sur les phénomènes de propagation. À partir des années 60, ces équations ont été l'objet de plusieurs travaux. Notamment, on trouve les travaux de *A. Bolinia* et *Myshkis* (1960), *Brayton* et *Mille-Luxriante* (1964), *Cooke* et *Krumme* (1968), *Cooke* (1970), *Halanay* et *Rasvan* (1970) et *Filimonor* (1981), etc.

Durant ces deux dernières décennies, de nombreux travaux ont établi plusieurs résultats sur l'étude des solutions périodiques. Certains mathématiciens ont utilisé des transformations pour se ramener à une équation plus simple ou à un système d'équations. D'autres chercheurs ont donné la solution sous forme de série convergente vers la solution exacte et certains d'entre eux ont traité les équations fonctionnelles du second ordre de type neutre par des méthodes numériques telles que la méthode de *Ritz*, la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des splines cubiques et la méthode des multi-dérivées.

Dans ce chapitre, ces méthodes habituelles peuvent sembler inefficaces pour traiter l'équation différentielle non linéaire du second ordre de type neutre

¹Les trois articles ont été écrits probablement plusieurs années plus tôt mais publiés en 1946 .

suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) + p(t)\frac{d}{dt}x(t) + q(t)x(t) &= \frac{d^2}{dt^2}Q(t, x(t - \tau(t))) \\ &+ f(t, h_1(x(t)), g_1(x(t - \tau(t)))) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où p et q sont des fonctions positives continues. La fonction $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, $h_1, g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues par rapport à leurs arguments.

On va utiliser le théorème de point fixe de *Krasnoselskii* combiné avec quelques propriétés d'une fonctions de *Green* pour établir les résultats désirés. L'idée de l'approche est de convertir l'équation considérée en une équation intégrale qui s'adapte à l'application du théorème de point fixe de *Krasnoselskii* pour prouver l'existence de solutions périodiques positives.

3.2 Préliminaires

Dans ce paragraphe on donne quelques définitions et certains résultats essentiels qui représentent un outil important pour le reste de ce chapitre.

Soit

$$P_T = \{x(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : x(t+T) = x(t), T > 0\},$$

muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| = \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|.$$

Alors $(P_T, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de *Banach*.

Puisque nous sommes intéressés par l'existence des solutions périodiques de l'équation (3.1), il est naturel de supposer que

$$p(t+T) = p(t), Q(t+T) = q(t) \text{ et } \tau(t+T) = \tau(t), \quad (3.2)$$

où τ est une fonction continue, et $\tau(t) \geq \tau^* > 0$. En outre, nous supposons que

$$\int_0^T p(s) ds > 0, \quad \int_0^T q(s) ds > 0. \quad (3.3)$$

Nous supposons aussi que les fonctions $Q(t, x)$ et $f(t, x, y)$ sont T -périodiques en t , ce qui est équivalent à

$$Q(t + T, x) = Q(t, x) \text{ et } f(t + T, x, y) = f(t, x, y). \quad (3.4)$$

D'abord, on considère l'équation suivante :

$$x'(t) + a(t)x(t) = \lambda M(x(t)) + m(t), \quad (3.5)$$

où a est une fonction continue T -périodique et non négative avec

$$\int_0^T a(s) ds > 0,$$

m est une fonction continue T -périodique, $\lambda > 0$ est un paramètre et $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue.

Lemme 3.1 [55] *Supposons que*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M(x)}{x} = N \in (0, +\infty]. \quad (3.6)$$

Alors, (3.5) admet au moins une solution T -périodique positive si $\xi_1 < \xi_2$ et $\lambda \in (\xi_1, \xi_2]$, où ξ_1 et ξ_2 sont définies comme suit :

$$\xi_1 = \frac{2 \left[\exp \left(\int_0^T a(u) du \right) - 1 \right]}{N\sigma T}, \quad \xi_2 = \frac{R_0 \left[\exp \left(\int_0^T a(u) du \right) - 1 \right]}{Q_1 T},$$

avec

$$\begin{aligned} R_0 &= \|R(t)\|, & \sigma &= \exp \left(- \int_0^T L_1(u) du \right), \\ Q_1 &= \max_{x \in [0, R_0(\sigma+1/\sigma)]} V(x), & V(x) &= \begin{cases} M(x) & \text{si } x \in [0, +\infty) \\ M(0) & \text{si } x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \\ R(t) &= \int_t^{t+T} G_1(t, s) m(s) ds > 0, & G_1(t, s) &= \frac{\exp \left(\int_t^s a(u) du \right)}{\exp \left(\int_0^T a(u) du \right) - 1}. \end{aligned}$$

Lemme 3.2 [55] *Supposons que (3.2) et (3.3) sont vérifiées et*

$$\frac{R_1 \left[\exp \left(\int_0^T p(u) du \right) - 1 \right]}{Q_1 T} \geq 1, \quad (3.7)$$

où

$$R_1 = \max_{t \in [0, T]} \left| \int_t^{t+T} \frac{\exp \left(\int_t^s p(u) du \right)}{\exp \left(\int_0^T p(u) du \right) - 1} q(s) ds \right|,$$

et

$$Q_1 = \left(1 + \exp \left(\int_0^T p(u) du \right) \right)^2 R_1^2.$$

Alors, il existe des fonctions continues T -périodiques a et b telles que $b(t) > 0$, $\int_0^T a(u) du > 0$ et

$$a(t) + b(t) = p(t), \quad \frac{d}{dt} b(t) + a(t)b(t) = q(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Preuve. De (3.8), on obtient

$$b'(t) + p(t)b(t) = b^2(t) + q(t). \quad (3.9)$$

Soit $M(x) = x^2$, $m(t) = q(t)$ et $\lambda = 1$. Alors

$$N = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M(x)}{x} = +\infty.$$

Par le Lemme 3.1, si

$$0 < \lambda = 1 \leq \frac{R_0 \left[\exp \left(\int_0^T p(u) du \right) - 1 \right]}{Q_1 T},$$

alors, (3.9) admet au moins une solution positive T -périodique continue $b(t)$.

Maintenant, comme

$$\int_0^T q(s) ds > 0,$$

et

$$\frac{b'(t)}{b(t)} + a(t) = \frac{q(t)}{b(t)},$$

il vient

$$\int_0^T a(u) du = \int_0^T \frac{q(u)}{b(u)} du > 0.$$

D'où le résultat désiré. ■

Lemme 3.3 [86] *Supposons que les conditions du Lemme 3.2 sont vérifiées et $\Phi \in P_T$, alors l'équation*

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + p(t)\frac{d}{dt}x(t) + q(t)x(t) = \Phi(t), \quad (3.10)$$

admet une solution T -périodique. En outre, toute solution de (3.10) s'écrit sous la forme :

$$x(t) = \int_t^{t+T} G(t, s)\Phi(s)ds, \quad (3.11)$$

où

$$G(t, s) = \frac{\int_t^s \exp \left[\int_t^u b(v)dv + \int_u^s a(v)dv \right] du + \int_s^{t+T} \exp \left[\int_t^u b(v)dv + \int_u^{s+T} a(v)dv \right] du}{\left[\exp \left(\int_0^T a(u)du \right) - 1 \right] \left[\exp \left(\int_0^T b(u)du \right) - 1 \right]} du. \quad (3.12)$$

Preuve. Définissons E_a et E_b comme suit :

$$E_a = \exp \left(\int_0^T a(u) du \right) - 1, \quad E_b = \exp \left(\int_0^T b(u) du \right) - 1.$$

Par un calcul direct, nous pouvons voir que (3.11) est une solution T -périodique de (3.10).

Maintenant, on suppose que $x(t)$ est une solution T -périodique de (3.10), en vertu du Lemme 3.2, nous avons

$$\frac{d^2}{dt}x(t) + a(t)\frac{d}{dt}x(t) + \frac{d}{dt}b(t)x(t) + b(t)\frac{d}{dt}x(t) + a(t)b(t)x(t) = \Phi(t),$$

ce qui conduit à

$$\frac{d}{dt}x(t) + b(t)x(t) = \int_t^{t+T} \frac{\exp\left(\int_t^s a(u)du\right)}{\exp\left(\int_0^T a(u)du\right) - 1} \Phi(s)ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_t^{t+T} \frac{\exp\left(\int_t^s b(u)du\right)}{\exp\left(\int_0^T b(u)du\right) - 1} \left[\int_s^{s+T} \frac{\exp\left(\int_s^v a(u)du\right)}{\exp\left(\int_0^T a(u)du\right) - 1} \Phi(v)dv \right] ds \\ &= \frac{1}{E_a E_b} \int_t^{t+T} \exp\left(\int_t^s b(u)du\right) \int_s^{s+T} \exp\left(\int_s^v a(u)du\right) \Phi(v)dv ds \\ &= \frac{1}{E_a E_b} \int_t^{t+T} dv \int_t^s \exp\left(\int_t^s b(u)du\right) \exp\left(\int_s^v a(u)du\right) \Phi(v)ds \\ &\quad + \frac{1}{E_a E_b} \int_{t+T}^{t+2T} dv \int_{v-T}^{t+T} \exp\left(\int_t^s b(u)du\right) \exp\left(\int_s^v a(u)du\right) \Phi(v)ds \\ &= \frac{1}{E_a E_b} \int_t^{t+T} \Phi(s)ds \int_t^s \exp\left(\int_t^u b(v)dv + \int_u^s a(v)dv\right) du \\ &\quad + \frac{1}{E_a E_b} \int_t^{t+T} \Phi(s)ds \int_t^{t+T} \exp\left(\int_t^u b(v)dv + \int_u^{s+T} a(v)dv\right) du \\ &= \int_t^{t+T} G(t, s)\Phi(s)ds. \end{aligned}$$

Ce qui établit le résultat désiré. ■

Corollaire 3.1 [86] *La fonction de Green G définie par (3.12) satisfait les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} G(t, t+T) &= G(t, t), \quad G(t+T, s+T) = G(t, s), \\ \frac{\partial}{\partial s} G(t, s) &= a(s)G(t, s) - \frac{\exp\left(\int_t^s b(v)dv\right)}{\exp\left(\int_0^T b(v)dv\right) - 1}, \\ \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) &= -b(t)G(t, s) + \frac{\exp\left(\int_t^s a(v)dv\right)}{\exp\left(\int_0^T a(v)dv\right) - 1}. \end{aligned}$$

Remarque 3.1 Par un calcul simple, on obtient que la dérivée seconde par rapport à s de la fonction de Green $G(t, s)$ est comme suit :

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} G(t, s) = \left(a^2(s) + a'(s) \right) G(t, s) - p(s) \frac{\exp\left(\int_t^s b(v) dv\right)}{\exp\left(\int_0^T b(v) dv\right) - 1}.$$

Le Lemme suivant est important pour établir l'existence.

Lemme 3.4 *Supposons que les conditions (3.2)-(3.4) et (3.7) sont satisfaites. Si $x \in P_T$, alors x est une solution de l'équation (3.1) si et seulement si*

$$\begin{aligned} x(t) = & Q(t, x(t - \tau(t))) - \int_t^{t+T} p(s) E(t, s) Q(s, x((s - \tau(s)))) ds \\ & + \int_t^{t+T} G(t, s) [f(s, h_1(x(s)), g_1(x(s - \tau(s)))) \\ & + \left(a'(s) + a^2(s) \right) Q(s, x((s - \tau(s))))] ds, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où

$$E(t, s) = \frac{\exp\left(\int_t^s b(v) dv\right)}{\exp\left(\int_0^T b(v) dv\right) - 1}. \quad (3.14)$$

Preuve.

Ligne directrice : Par l'utilisation du Lemme 3.3 et certaines propriétés de la fonction de Green citées dans le Corollaire 3.1, on peut convertir l'équation (3.1) en l'équation intégrale (3.13).

Soit $x \in P_T$ une solution de l'équation (3.1). D'après le Lemme 3.3, on a

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_t^{t+T} G(t, s) \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} Q(s, x((s - \tau(s)))) \right. \\ & \left. + f(s, h_1(x(s)), g_1(x(s - \tau(s)))) \right] ds. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+T} G(t, s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} Q(s, x((s - \tau(s)))) ds \\ &= \left[G(t, s) \frac{\partial}{\partial s} Q(s, x((s - \tau(s)))) \right]_t^{t+T} \\ & \quad - \int_t^{t+T} \frac{\partial}{\partial s} G(t, s) \frac{\partial}{\partial s} Q(s, x((s - \tau(s)))) ds. \end{aligned}$$

Comme,

$$\left[G(t, s) \frac{\partial}{\partial s} Q(s, x((s - \tau(s)))) \right]_t^{t+T} = 0,$$

alors,

$$\int_t^{t+T} G(t, s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} Q(s, x((s - \tau(s)))) ds = - \int_t^{t+T} \frac{\partial}{\partial s} G(t, s) \frac{\partial}{\partial s} Q(s, x((s - \tau(s)))) ds.$$

Par une deuxième intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+T} G(t, s) \frac{d^2}{ds^2} Q(s, x((s - \tau(s)))) ds \\ &= - \left[Q(s, x((s - \tau(s)))) \frac{\partial}{\partial s} G(t, s) \right]_t^{t+T} \\ & \quad + \int_t^{t+T} Q(s, x((s - \tau(s)))) \frac{\partial^2}{\partial s^2} G(t, s) ds. \end{aligned}$$

Posons

$$I = - \left[Q(s, x((s - \tau(s)))) \frac{\partial}{\partial s} G(t, s) \right]_t^{t+T}.$$

Par le Corollaire 3.1,

$$I = - \left[Q(s, x((s - \tau(s)))) \left(a(s)G(t, s) - \frac{\exp(\int_t^s b(v) dv)}{\exp(\int_0^T b(v) dv) - 1} \right) \right]_t^{t+T},$$

donc

$$\begin{aligned}
 I &= -Q(t+T, x((t+T - \tau(t+T))) \\
 &\quad \times \left(a(t+T)G(t, t+T) - \frac{\exp(\int_t^{t+T} b(v) dv)}{\exp(\int_0^T b(v) dv) - 1} \right) \\
 &\quad + Q(t, x((t - \tau(t))) \left(a(t)G(t, t) - \frac{\exp(\int_t^t b(v) dv)}{\exp(\int_0^T b(v) dv) - 1} \right),
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
 I &= -Q(t, x((t - \tau(t))) \left(a(t)G(t, t) - \frac{\exp(\int_t^T b(v) dv)}{\exp(\int_0^T b(v) dv) - 1} \right) \\
 &\quad + Q(t, x((t - \tau(t))) \left(a(t)G(t, t) - \frac{1}{\exp(\int_0^T b(v) dv) - 1} \right) \\
 &= Q(t, x((t - \tau(t))).
 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
 &\int_t^{t+T} \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} G(t, s) \right) Q(s, x((s - \tau(s))) ds \\
 &= \int_t^{t+T} \{ (a'(s) + a^2(s)) Q(s, x((s - \tau(s))) G(t, s) - p(s) E(t, s) Q(s, x((s - \tau(s))) \} ds.
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 &\int_t^{t+T} \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} G(t, s) \right) Q(s, x((s - \tau(s))) ds \\
 &= Q(t, x((t - \tau(t))) \\
 &\quad + \int_t^{t+T} \{ (a'(s) + a^2(s)) Q(s, x((s - \tau(s))) G(t, s) - p(s) E(t, s) Q(s, x((s - \tau(s))) \} ds,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

où E est donnée par (3.14). Enfin la substitution de (3.16) dans (3.15), achève la preuve. ■

Lemme 3.5 [86] *Soit*

$$A = \int_0^T p(u) du, \quad B = T^2 \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(q(u)) du\right).$$

Si

$$A^2 \geq 4B, \tag{3.17}$$

alors, on a

$$\begin{aligned} \min \left\{ \int_0^T a(u) du, \int_0^T b(u) du \right\} &\geq \frac{1}{2} \left(A - \sqrt{A^2 - 4B} \right) := l, \\ \max \left\{ \int_0^T a(u) du, \int_0^T b(u) du \right\} &\leq \frac{1}{2} \left(A + \sqrt{A^2 - 4B} \right) := m. \end{aligned}$$

Preuve. Comme $a(t) + b(t) = p(t)$, $b'(t) + a(t)b(t) = q(t)$, on a

$$\int_0^T a(u) du + \int_0^T b(u) du = \int_0^T p(u) du \quad \text{et} \quad \int_0^T a(u) du = \int_0^T \frac{q(u)}{b(u)} du.$$

Grâce à l'inégalité

$$\frac{\int_a^b p(x) f(x) dx}{\int_a^b p(x) dx} \geq \exp\left(\frac{\int_0^T p(x) \ln f(x) dx}{\int_0^T p(x) dx}\right),$$

où $p(x) \geq 0$, $\int_a^b p(x) dx > 0$, $\inf f(x) > 0$, nous arrivons à

$$\frac{1}{T} \int_0^T b(u) du \geq \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln b(u) du\right), \quad \frac{1}{T} \int_0^T \frac{q(u)}{b(u)} du \geq \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln \frac{q(u)}{b(u)} du\right).$$

Donc, nous obtenons aisément

$$\begin{aligned} \int_0^T a(u) du \int_0^T b(u) du &= \int_0^T b(u) du \int_0^T \frac{q(u)}{b(u)} du \\ &\geq T^2 \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln q(u) du\right). \end{aligned}$$

Sachant que $\int_0^T a(u) du + \int_0^T b(u) du = \int_0^T p(u) du$, la conclusion découle immédiatement de ce qui précède. ■

Corollaire 3.2 [86] *Les fonctions G et E vérifient*

$$\begin{aligned} \frac{T}{(e^m - 1)^2} &\leq G(t, s) \leq \frac{T \exp\left(\int_0^T p(u) du\right)}{(e^l - 1)^2}, \\ |E(t, s)| &\leq \frac{e^m}{e^l - 1}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.3 Existence de solutions périodiques positives

Pour appliquer le théorème de point fixe de *Krasnoselskii*, nous avons besoin de définir un espace de *Banach* $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, un sous ensemble convexe fermé \mathbb{D} de \mathbb{B} et de construire deux applications, l'une est une contraction et l'autre est continue et compacte.

Soit $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_\infty) = (P_T, \|\cdot\|_\infty)$ et $\mathbb{D} = \{\varphi \in \mathbb{B} : K \leq \varphi \leq L\}$, où K est une constante non négative et L est une constante positive. Nous exprimons l'équation (3.13) comme suit

$$\varphi(t) = (\mathfrak{B}\varphi)(t) + (\mathcal{A}\varphi)(t) := (\mathcal{H}\varphi)(t),$$

où $\mathcal{A}, \mathfrak{B} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$ sont deux applications définies par

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\varphi)(t) &= \int_t^{t+T} G(t, s) [f(s, h_1(\varphi(s)), g_1(\varphi(s - \tau(s)))) \\ &\quad + (a'(s) + a^2(s)) Q(s, \varphi((s - \tau(s))))] ds, \end{aligned} \quad (3.19)$$

et

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}\varphi)(t) &= Q(t, \varphi(t - \tau(t))) \\ &\quad - \int_t^{t+T} p(s) E(t, s) Q(s, \varphi((s - \tau(s)))) ds. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pour simplifier les notations, on introduit les constantes suivantes :

$$\alpha = \frac{T \exp\left(\int_0^T p(u) du\right)}{(e^T - 1)^2}, \quad \beta = \frac{e^m}{e^T - 1}, \quad \gamma = \frac{T}{(e^m - 1)^2}, \quad (3.21)$$

$$\theta = \max_{t \in [0, T]} |b(t)|, \quad \mu = \min_{t \in [0, T]} |p(t)|, \quad \lambda = \max_{t \in [0, T]} |p(t)|.$$

On suppose que la fonction $Q(t, x)$ est localement lipschitzienne et continue par rapport à la variable x , donc il existe une constante strictement positive k telle que :

$$|Q(t, x) - Q(t, y)| \leq k \|x - y\|, \quad \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{D}. \quad (3.22)$$

Pour établir l'existence des solutions périodiques positives de (3.1), on distingue deux cas $Q(t, x) \geq 0$ et $Q(t, x) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{D}$.

Commençons d'abord par le premier cas où $Q(t, x) \geq 0$.

On suppose qu'il existe une constante non négative k_1 et deux constantes positives k_2 et σ telles que :

$$E(t, s) > \sigma, \quad \forall (t, s) \in [0, T] \times [0, T], \quad (3.23)$$

$$k_1 x \leq Q(t, x) \leq k_2 x, \quad \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{D}, \quad (3.24)$$

et

$$k_2 < 1, \quad (3.25)$$

ainsi, pour tout $s \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - k_1) K + \lambda \beta k_2 T L}{\gamma T} \\ & \leq f(s, h_1(x), g_1(y)) + \left(a'(s) + a^2(s)\right) Q(s, y) \\ & \leq \frac{(1 - k_2) L + \mu \sigma k_1 T K}{\alpha T}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Lemme 3.6 *Supposons que les conditions (3.2)-(3.4), (3.7), (3.17) et (3.23)-(3.26) sont satisfaites, alors l'opérateur \mathcal{A} défini par (3.19) est compact.*

Preuve.

Ligne directrice : *En suivant les mêmes démarches que celles utilisées dans l'exemple 1.6 et en vertu du théorème d'Ascoli – Arzila, on peut montrer la compacité de l'opérateur \mathcal{A} .*

Soit \mathcal{A} l'opérateur donné par (3.19). Il est clair que \mathcal{A} est continu, ainsi on peut montrer aisément que $(\mathcal{A}\varphi)(t+T) = (\mathcal{A}\varphi)(t)$.

Pour $t \in [0, T]$ et $\varphi, \psi \in \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned}
 |(\mathcal{A}\varphi)(t)| &\leq \left| \int_t^{t+T} G(t, s) [f(s, h_1(\varphi(s)), g_1(\varphi(s - \tau(s)))) \right. \\
 &\quad \left. + (a'(s) + a^2(s)) Q(s, \varphi((s - \tau(s))))] ds \right| \\
 &\leq \alpha T \frac{(1 - k_2)L + \mu\sigma k_1 TK}{\alpha T} \\
 &= (1 - k_2)L + \mu\sigma k_1 TK.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\|\mathcal{A}\varphi\|_\infty \leq (1 - k_2)L + \mu\sigma k_1 TK,$$

et par conséquent, l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est uniformément borné.

Montrons maintenant que $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est équicontinu. Pour cela, soit $\varphi_n \in \mathbb{D}$, avec n un entier naturel. On va calculer $\frac{d}{dt}(\mathcal{A}\varphi_n)(t)$, puis on va montrer que cette dérivée est uniformément bornée. À l'aide de (3.2), (3.3) et (3.4), si on prend la dérivée par rapport à t dans (3.19), on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\mathcal{A}\varphi_n)(t) &= \left[-b(t)G(t, s) + \frac{\exp(\int_t^s a(v) dv)}{\exp(\int_0^T a(v) dv) - 1} \right] \\
 &\quad \times [f(s, h_1(\varphi_n(s)), g_1(\varphi_n(s - \tau(s)))) \\
 &\quad - a(s) Q(s, \varphi_n((s - \tau(s))))].
 \end{aligned}$$

En utilisant (3.21) et (3.26), on arrive à

$$\left| \frac{d}{dt}(\mathcal{A}\varphi_n)(t) \right| \leq T(\theta\alpha + \beta) \frac{(1 - k_2)L + \mu\sigma k_1 TK}{\alpha T} \leq D,$$

pour certaine constante positive D . Alors la suite $(\mathcal{A}\varphi_n)$ est équicontinue. Le théorème d'*Ascoli-Arzela* assure l'existence d'une sous suite $(\mathcal{A}\varphi_{n_k})$ de $(\mathcal{A}\varphi_n)$ qui converge vers une fonction T -périodique et continue. Par conséquent \mathcal{A} est continu et $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ est contenu dans un sous-ensemble compact de \mathbb{B} . ■

Lemme 3.7 *Supposons que la condition (3.22) est satisfaite. Si*

$$(1 + \lambda\beta T)k < 1, \quad (3.27)$$

alors l'opérateur \mathcal{B} défini par (3.20) est une contraction.

Preuve. Soit \mathcal{B} l'opérateur donné par (3.20). Il est clair que $\mathcal{B}\varphi$ est continu et il est aisé de voir que

$$(\mathcal{B}\varphi)(t + T) = (\mathcal{B}\varphi)(t).$$

En outre, pour tout $t \in [0, T]$ et $\varphi, \psi \in \mathbb{D}$, on a

$$\begin{aligned} & |(\mathcal{B}\varphi)(t) - (\mathcal{B}\psi)(t)| \\ & \leq |Q(t, \varphi(t - \tau(t))) - Q(t, \psi(t - \tau(t)))| \\ & \quad + \int_t^{t+T} p(s) E(t, s) |Q(s, \varphi(s - \tau(s))) - Q(s, \psi(s - \tau(s)))| ds \\ & \leq (1 + \lambda\beta T)k \|\varphi - \psi\|_\infty, \end{aligned}$$

il s'ensuit alors que

$$\|\mathcal{B}\varphi - \mathcal{B}\psi\|_\infty \leq (1 + \lambda\beta T)k \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Nous concluons par la condition (3.27) que \mathcal{B} est une contraction. ■

L'équation intégrale obtenue (3.13) est une somme de deux applications ; une contraction et une application compacte et continue, donc dans ce cas on va appliquer le théorème de point fixe de *Krasnoselskii*.

Théorème 3.1 *Supposons que les conditions (3.2)-(3.3), (3.7), 3.17 et (3.22)-(3.27) sont satisfaites, alors l'équation (3.1) admet au moins une solution positive T -périodique dans l'ensemble \mathbb{D} .*

Preuve.

Ligne directrice : La compacité de \mathcal{A} et la contractivité de \mathcal{B} sont assurées par les Lemmes 3.6 et 3.7, donc pour appliquer le théorème de Krasnoselskii, il nous reste qu'à vérifier sa première condition.

D'après le Lemme 3.6, $\mathcal{A} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{B}$ est compact et continu et d'après le Lemme 3.7, $\mathcal{B} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{B}$ est une contraction. De plus, si $\varphi, \psi \in \mathbb{D}$, nous pouvons voir que

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{A}\varphi)(t) + (\mathcal{B}\psi)(t) \\
 = & Q(t, \psi(t - \tau(t))) - \int_t^{t+T} p(s) E(t, s) Q(s, \psi(s - \tau(s))) ds \\
 & + \int_t^{t+T} G(t, s) [f(s, h_1(\varphi(s)), g_1(\varphi(s - \tau(s)))) \\
 & + (a'(s) + a^2(s)) Q(s, \varphi((s - \tau(s))))] ds \\
 \leq & k_2 L - \mu\sigma \int_t^{t+T} Q(s, \varphi((s - \tau(s)))) ds \\
 & + \alpha \int_t^{t+T} [f(s, h_1(\varphi(s)), g_1(\varphi(s - \tau(s)))) \\
 & + (a'(s) + a^2(s)) Q(s, \varphi((s - \tau(s))))] ds \\
 \leq & k_2 L - \mu\sigma k_1 T K + \alpha \frac{(1 - k_2) L + \mu\sigma k_1 T K}{\alpha T} = L,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{A}\varphi)(t) + (\mathcal{B}\psi)(t) \\
 \geq & k_1 K - \lambda\beta \int_t^{t+T} Q(s, \varphi((s - \tau(s)))) ds \\
 & + \gamma \int_t^{t+T} [f(s, h_1(\varphi(s)), g_1(\varphi(s - \tau(s)))) - a(s)Q(s, \varphi((s - \tau(s))))] ds,
 \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\varphi)(t) + (\mathcal{B}\psi)(t) &\geq k_1 K - \lambda\beta k_2 T L + \gamma \frac{(1 - k_1) K + \lambda\beta k_2 T L}{\gamma T} \\ &\geq K. \end{aligned}$$

Maintenant, toutes les hypothèses du Théorème de *Krasnoselskii* 1.5 sont satisfaites, alors il existe un point fixe $x \in \mathbb{D}$ de l'opérateur

$$\mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

i.e.,

$$x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x.$$

Enfin, le Lemme 3.4 assure que ce point fixe est une solution de (3.1). ■

Dans le cas où $Q(t, x) \leq 0$, on suppose qu'il existe une constante négative k_3 et deux constantes non-positives k_4 et σ telles que :

$$k_3 x \leq Q(t, x) \leq k_4 x, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in \mathbb{D}, \quad (3.28)$$

$$-k_3 \lambda \beta T < 1, \quad (3.29)$$

ainsi, pour tout $s \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} &\frac{K(1 + k_4 \mu \sigma T) - k_3 L}{\gamma T} \\ &\leq f(s, h_1(x), g_1(y)) + \left(a'(s) + a^2(s) \right) Q(s, y) \quad (3.30) \\ &\leq \frac{(1 + k_3 \lambda \beta T) L - k_4 K}{\alpha T}. \end{aligned}$$

Théorème 3.2 *Supposons que les conditions (3.2)-(3.3), (3.7), 3.17, (3.22) et (3.27)-(3.30) sont vérifiées, alors l'équation (3.1) admet au moins une solution positive T -périodique dans l'ensemble \mathbb{D} .*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du Théorème 3.1. ■

3.4 Récapitulatif

Dans ce chapitre, nous avons abordé la question de l'existence des solutions périodiques positives d'une classe d'équations différentielles non linéaires de type neutre et nous avons obtenu des résultats d'existence pouvant s'étendre aux EDN d'ordre supérieur à deux. Avant d'appliquer le théorème de point fixe de *Krasnoselskii* pour prouver l'existence des solutions, nous avons converti l'équation différentielle de type neutre en une équation intégrale s'écrivant comme somme de deux applications ; la première est une contraction et l'autre est continue et est prouvée compacte moyennant le théorème d'*Ascoli-Arzelà*.

CHAPITRE 4

Existence et unicité des solutions périodiques d'une classe d'équations différentielles itératives du second ordre

Sommaire

4.1	Introduction	80
4.2	Préliminaires	83
4.3	Existence de solutions périodiques	85
4.4	Existence et unicité des solutions périodiques	94
4.5	Récapitulatif	95

Dans le but de prouver l'existence de solutions périodiques d'une classe d'équations différentielles du second ordre avec des termes itératifs, on a utilisé le théorème de point fixe de *Schauder*. Et via celui de *Banach* et sous certaines conditions appropriées, on a établi l'existence et l'unicité.

4.1 Introduction

Les équations différentielles à retard dépendant de l'état sont utilisées pour modéliser mathématiquement plusieurs phénomènes dans différentes disciplines scientifiques comme l'électrodynamique, l'automatique, la biologie, l'épidémiologie et l'économie, etc. L'étude de ces équations a commencé un peu avant avec le problème proéminent de deux corps en électrodynamique et qui a resté dans les limbes jusqu'à l'apparition des travaux de *Driver* [25, 28, 29, 30] dans les années 60 du siècle dernier.

L'équation différentielle fonctionnelle à retard itérative qui est une relation entre une fonction, ses dérivées et ses itérations, est un type particulier des équations différentielles à retard dépendant de l'état.

Il semble que les travaux sur les équations avec termes itératifs ont débuté par un exemple simple mais très important traité par *Babbage* [11] en 1815 où il est intéressé à trouver une fonction telle que sa $n^{\text{ième}}$ itération égale à la fonction elle-même.

Dans le siècle suivant, ce type d'équations a attiré l'attention de plusieurs chercheurs de l'époque et une très vaste littérature existe concernant l'étude de ce type d'équations par des techniques différentes. À titre d'exemples, on peut citer

En 1968, *P. Andrzej* [5] a utilisé la méthode des approximations successives de *Picard*, pour étudier l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t), x(x(t))),$$

où 0 est un point de domaine extrême à gauche.

En 1984, Par le principe de l'application contractante, *Eder* [32] a obtenu quelques résultats d'existence d'une solution monotone unique de l'équation

$$x'(t) = x(x(t)),$$

avec $x(t_0) = t_0$ ($t_0 \in [-1, 1]$).

L'équation

$$x'(t) = f(x(x(t))),$$

avec $x(a) = a$, où a est un point de domaine extrême d'un intervalle bien défini, a été étudiée en 1990 par *Wang* [87] et par *M. Fečkan* [35] en 1993, où $x(0) = 0$.

Quatre ans plus tard, la même équation a été étudiée par *W. Ge* et *Y. Mo* [37] sous l'hypothèse $x(t_0) = x_0$ dans un intervalle compact donné, où les points extrêmes de l'intervalle sont deux points adjacents non nuls de f . Ce problème a attiré par la suite l'attention de *Berinde* [13] qui a appliqué la méthode des opérateurs non expansives dans son travail publié en 2010. En 1995, *Staněk* [83] a étudié les propriétés globales des solutions de l'équation différentielle itérative suivante :

$$x'(t) = x(t) + x(x(t))$$

et il a obtenu des résultats sur l'existence de solutions strictement monotones. En 1997, *Si, Li* et *Cheng* [79] ont considéré l'équation :

$$x'(t) = x^{[m]}(t),$$

et ils ont établi des conditions suffisantes pour assurer l'existence de solutions analytiques. Après une année, *Si* et *Wang* [80] ont prouvé l'existence des solutions régulières de l'équation :

$$x'(t) = \lambda_1 x(t) + \lambda_2 x^{[2]}(t) + \dots + \lambda_n x^{[n]}(t) + f(t).$$

Plusieurs chercheurs se sont penchés ces dernières années sur l'étude de ce type d'équations en utilisant la technique du point fixe. Dans [92], *H. Y. Zhao* et *J. Liu* ont appliqué les théorèmes de point fixe de *Banach* et de

Chapitre 4. Existence et unicité des solutions périodiques d'une classe d'équations différentielles itératives du second ordre

Krasnoselskii pour établir l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions périodiques de l'équation différentielle itérative du premier ordre suivante :

$$\frac{d}{dt}x(t) = c_1(t)x^{[1]}(t) + c_2(t)x^{[2]}(t) + \dots + c_n(t)x^{[n]}(t) + F(t).$$

Dans [91], *H. Y. Zhaoa* et *M. Fečkan* ont utilisé le théorème de point fixe de *Schauder* pour montrer l'existence et la stabilité de solutions de l'équation suivante :

$$x'(t) = \sum_{m=1}^k \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{\ell,m} (x^{[m]}(t))^{\ell} + G(t).$$

Il faut signaler ici que la même dernière équation a été étudié par *Liu* et *Si* [56] en 2007 par la transformation de *Schröder*.

Les travaux réalisés par la plupart des chercheurs jusqu'à maintenant restent concentrés sur les équations du premier ordre, par contre on ne trouve que très peu de travaux consacrés à l'étude des équations du second ordre. Dans ce chapitre et via les théorèmes de point fixe de *Schauder* et de *Banach*, notre but majeur est d'établir des conditions suffisantes pour prouver l'existence et l'unicité des solutions périodiques de l'équation différentielle itérative du second ordre suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) + p(t) \frac{d}{dt}x(t) + q(t)x(t) &= \frac{d}{dt}g(t, x(t), x^{[2]}(t), \dots, x^{[n]}(t)) \\ &+ h(t, x(t), x^{[2]}(t), \dots, x^{[n]}(t)), \end{aligned} \quad (4.1)$$

où p et q sont des fonctions positives continues, $x^{[0]} = t$, $x^{[1]}(t) = x(t)$, $x^{[2]}(t) = x(x(t))$, \dots , $x^{[n]}(t) = x^{[n-1]}(x(t))$ et $h, g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues par rapport à leurs arguments.

4.2 Préliminaires

Pour tout $T > 0$ et $L, M \geq 0$,

$$P_T(L, M) = \{x \in P_T, \|x\| \leq L, |x(t_2) - x(t_1)| \leq M |t_2 - t_1|, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}\},$$

est un sous ensemble fermé, borné et convexe de P_T . Les fonctions $h(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $g(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont supposées T -périodiques en t et globalement lip-schitziennes en x_1, \dots, x_n i.e,

$$h(t + T, x_1, \dots, x_n) = h(t, x_1, \dots, x_n), \quad g(t + T, x_1, \dots, x_n) = g(t, x_1, \dots, x_n), \quad (4.2)$$

et qu'il existe n constantes positives k_1, k_2, \dots, k_n et n constantes positives c_1, c_2, \dots, c_n telles que

$$|h(t, x_1, \dots, x_n) - h(t, y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{i=1}^n k_i \|x_i - y_i\|, \quad (4.3)$$

et

$$|g(t, x_1, \dots, x_n) - g(t, y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{i=1}^n c_i \|x_i - y_i\|. \quad (4.4)$$

Lemme 4.1 [92] Pour tout $\varphi, \psi \in P_T(L, M)$,

$$\|\varphi^{[n]} - \psi^{[n]}\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} M^j \|\varphi - \psi\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Lemme 4.2 Supposons que les hypothèses (3.2), (3.3), (4.2) et (3.7) soient vérifiées. Si $x \in P_T(L, M)$, alors x est une solution de (4.1) si et seulement si

$$x(t) = \int_t^{t+T} [E(t, s) - a(s)G(t, s)] g(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s)) ds \quad (4.5) \\ + \int_t^{t+T} G(t, s) h(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s)) ds,$$

où

$$E(t, s) = \frac{\exp(\int_t^s b(v) dv)}{\exp(\int_0^T b(v) dv) - 1}. \quad (4.6)$$

Preuve.

Ligne directrice : *En utilisant le Lemme 3.3 et certaines propriétés utiles de la fonction de Green citées dans le corollaire 3.1, on peut convertir l'équation (4.1) en une équation intégrale.*

Supposons que $x \in P_T(L, M)$ est une solution de (4.1). Du Lemme 3.3 dans le chapitre précédent, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_t^{t+T} G(t, s) \left[\frac{d}{dt} g(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s)) + h(t, x(t), x^{[2]}(t), \dots, x^{[n]}(t)) \right] ds \\ &= \int_t^{t+T} G(t, s) \left[\frac{d}{dt} g(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s)) \right] ds \\ &\quad + \int_t^{t+T} G(t, s) [h(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s))] ds. \end{aligned}$$

Une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+T} G(t, s) \left[\frac{d}{dt} g(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s)) \right] ds \\ &= [G(t, s)g(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s))]_t^{t+T} \\ &\quad - \int_t^{t+T} \left(\frac{d}{dt} G(t, s) \right) h(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s)) ds. \end{aligned}$$

Comme

$$[G(t, s)g(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s))]_t^{t+T} = 0,$$

Il découle du Corollaire 3.1 que

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+T} G(t, s) \left[\frac{d}{dt} g(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s)) \right] ds \\ &= \int_t^{t+T} g(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s)) [E(t, s) - a(s)G(t, s)] ds. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_t^{t+T} [E(t, s) - a(s)G(t, s)] g(s, x(s), x^{[2]}(s), \dots, x^{[n]}(s)) ds \\ &\quad + \int_t^{t+T} G(t, s) h(t, x(t), x^{[2]}(t), \dots, x^{[n]}(t)) ds. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du Lemme. ■

4.3 Existence de solutions périodiques

Dans cette section, on va utiliser le théorème de point fixe de *Schauder* pour prouver l'existence de solutions périodiques de l'équation (4.1). Du Lemme 4.2, on définit un opérateur $S : P_T(L, M) \longrightarrow P_T$ par :

$$(S\varphi)(t) = \int_t^{t+T} [E(t, s) - a(s)G(t, s)] g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds + \int_t^{t+T} G(t, s)h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds, \quad (4.7)$$

et on va montrer qu'il est continu et compact et que $S\varphi \in P_T(L, M)$ pour tout $\varphi \in P_T(L, M)$. Nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{T \exp(\int_0^T p(u) du)}{(e^l - 1)^2}, \quad \beta = \frac{e^m}{e^l - 1}, \quad \nu = \exp\left(-\int_0^T b(v) dv\right), \\ \varsigma &= \frac{1}{\left[\exp(\int_0^T a(u) du) - 1\right] \left[\exp(\int_0^T b(u) du) - 1\right]}, \quad \lambda_1 = \max_{t \in [0, T]} |a(t)| \\ \lambda_2 &= \max_{t \in [0, T]} |b(t)|, \quad \rho_1 = \max_{t \in [0, t]} |h(t, 0, 0, \dots, 0)|, \quad \rho_2 = \max_{t \in [0, t]} |g(t, 0, 0, \dots, 0)| \\ \zeta_1 &= \rho_1 + L \sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=0}^{j=i-1} M^j, \quad \zeta_2 = \rho_2 + L \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=0}^{j=i-1} M^j. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Lemme 4.3 *Supposons que les conditions (3.2), (3.3), (3.7), (3.17) et (4.2)–(4.4) sont satisfaites. Alors l'opérateur $S : P_T(L, M) \longrightarrow P_T$ donné par (4.7) est continu et compact.*

Preuve.

Ligne directrice : La preuve est basée sur l'utilisation du théorème d'Ascoli – Arzila afin de montrer la compacité de $P_T(L, M)$ et partant la compacité de S découle immédiatement de sa continuité.

Comme $P_T(L, M)$ est un sous ensemble uniformément borné et équicontinu de l'espace des fonctions continues sur le compact $[0, T]$, alors le théorème d'Ascoli–Arzila assure que $P_T(L, M)$ est un sous ensemble compact de cet espace. En outre, puisque tout opérateur continu envoie tout ensemble compact en un ensemble compact, il nous suffit de montrer que S est continu.

Pour tout $\varphi, \theta \in P_T(L, M)$, on a

$$\begin{aligned} & |(S\varphi)(t) - (S\theta)(t)| \\ & \leq \int_t^{t+T} |E(t, s)| \left| g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) - g(s, \theta(s), \theta^{[2]}(s), \dots, \theta^{[n]}(s)) \right| ds \\ & + \int_t^{t+T} |a(s)| |G(t, s)| \left| g(s, \theta(s), \theta^{[2]}(s), \dots, \theta^{[n]}(s)) - g(s, \theta(s), \theta^{[2]}(s), \dots, \theta^{[n]}(s)) \right| ds \\ & + \int_t^{t+T} |G(t, s)| \left| h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) - h(t, \theta(s), \theta^{[2]}(s), \dots, \theta^{[n]}(s)) \right| ds. \end{aligned}$$

Sous les conditions (4.3), (4.4) et d'après le Corollaire 3.2, il vient

$$|(S\varphi)(t) - (S\theta)(t)| \leq (\beta + \alpha\lambda_1) T \sum_{i=1}^n c_i \left\| \varphi^{[i]} - \theta^{[i]} \right\| + \alpha T \sum_{i=1}^n k_i \left\| \varphi^{[i]} - \theta^{[i]} \right\|.$$

En vertu du Lemme 4.1, il s'ensuit que

$$|(S\varphi)(t) - (S\theta)(t)| \leq T \sum_{i=1}^n ((\beta + \alpha\lambda_1) c_i + \alpha k_i) \sum_{j=0}^{j=i-1} M^j \|\varphi - \theta\|,$$

ce qui prouve que l'opérateur S est continu. Donc, S est compact. ■

Lemme 4.4 Pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} |G(t_2, s) - G(t_1, s)| ds \leq |t_2 - t_1| T e^{2m} \varsigma [T\lambda_2\nu (2e^{2m} + 1) + e^m + 1].$$

Preuve. Soit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} & |G(t_2, s) - G(t_1, s)| \\ & \leq \frac{\left| \int_{t_2}^s \exp \left[\int_{t_2}^u b(v) dv + \int_u^s a(v) dv \right] du - \int_{t_1}^s \exp \left[\int_{t_1}^u b(v) dv + \int_u^s a(v) dv \right] du \right|}{\left[\exp \left(\int_0^T a(u) du \right) - 1 \right] \left[\exp \left(\int_0^T b(u) du \right) - 1 \right]} \\ & + \frac{\left| \int_s^{t_2+T} \exp \left[\int_{t_2}^u b(v) dv + \int_u^{s+T} a(v) dv \right] du - \int_s^{t_1+T} \exp \left[\int_{t_1}^u b(v) dv + \int_u^{s+T} a(v) dv \right] du \right|}{\left[\exp \left(\int_0^T a(u) du \right) - 1 \right] \left[\exp \left(\int_0^T b(u) du \right) - 1 \right]}. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_2}^s \exp \left[\int_{t_2}^u b(v) dv + \int_u^s a(v) dv \right] du - \int_{t_1}^s \exp \left[\int_{t_1}^u b(v) dv + \int_u^s a(v) dv \right] du \right| \\ & = \left| \int_{t_2}^s \left(e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} \times e^{\int_u^s a(v) dv} \right) du - \int_{t_2}^s \left(e^{\int_{t_1}^u b(v) dv} \times e^{\int_u^s a(v) dv} \right) du \right. \\ & \quad \left. - \int_{t_1}^{t_2} \left(e^{\int_{t_1}^u b(v) dv} \times e^{\int_u^s a(v) dv} \right) du \right| \\ & = \left| \int_{t_2}^s e^{\int_u^s a(v) dv} \left(e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^u b(v) dv} \right) du - \int_{t_1}^{t_2} \left(e^{\int_{t_1}^u b(v) dv} \times e^{\int_u^s a(v) dv} \right) du \right| \\ & = \left| \int_{t_2}^s e^{\int_u^s a(v) dv} e^{\int_u^s b(v) dv} \left(e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^u b(v) dv} \right) du - \int_{t_1}^{t_2} \left(e^{\int_{t_1}^u b(v) dv} \times e^{\int_u^s a(v) dv} \right) du \right| \\ & \leq \left| e^{\int_{t_2}^s b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^s b(v) dv} \right| \left| \int_{t_2}^s e^{\int_u^s a(v) dv} \times e^{\int_u^s b(v) dv} du \right| + \left| \int_{t_1}^{t_2} e^{\int_{t_1}^u b(v) dv} \times e^{\int_u^s a(v) dv} du \right| \\ & \leq \left| e^{\int_{t_2}^s b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^s b(v) dv} \right| \int_0^T \left| e^{\int_0^T a(v) dv} \times e^{\int_0^T b(v) dv} \right| du + \int_{t_1}^{t_2} \left| e^{\int_0^T b(v) dv} \times e^{\int_0^T a(v) dv} \right| du \\ & \leq \left| e^{\int_{t_2}^s b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^s b(v) dv} \right| \int_0^T e^{2m} du + \int_{t_1}^{t_2} e^{2m} du \\ & \leq T e^{2m} \left| e^{\int_{t_2}^s b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^s b(v) dv} \right| + e^{2m} |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T} \left| e^{\int_{t_2}^s b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^s b(v) dv} \right| ds & = \int_{t_1}^{t_1+T} e^{\int_{t_2}^s b(v) dv} \left| 1 - e^{\int_{t_1}^{t_2} b(v) dv} \right| ds \\ & \leq T \|b\| \exp \left(- \int_0^T b(v) dv \right) |t_2 - t_1|, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_1+T} \left| \int_{t_2}^s \exp \left[\int_{t_2}^u b(v) dv + \int_u^s a(v) dv \right] du - \int_{t_1}^s \exp \left[\int_{t_1}^u b(v) dv + \int_u^s a(v) dv \right] du \right| ds \\
 & \leq T^2 e^{2m} \|b\| \exp \left(- \int_0^T b(v) dv \right) |t_2 - t_1| + T e^{2m} |t_2 - t_1| \\
 & = |t_2 - t_1| T e^{2m} \left(T \|b\| \exp \left(- \int_0^T b(v) dv \right) + 1 \right). \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

D'une manière similaire, on aura

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_s^{t_2+T} e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du - \int_s^{t_1+T} e^{\int_{t_1}^u b(v) dv} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du \right| \\
 & = \left| \int_s^{t_1+T} e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du - \int_s^{t_1+T} e^{\int_{t_1}^u b(v) dv} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du \right. \\
 & \quad \left. + \int_{t_1+T}^{t_2+T} e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du \right| \\
 & \leq \left| \int_s^{t_1+T} e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du - \int_s^{t_1+T} e^{\int_{t_1}^u b(v) dv} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du \right| \\
 & \quad + \left| \int_{t_1+T}^{t_1+T} e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du \right| \\
 & = \left| \int_s^{t_1+T} \left(e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^u b(v) dv} \right) e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du \right| + \left| \int_{t_1+T}^{t_1+T} e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du \right| \\
 & = \left| \int_s^{t_1+T} \left(e^{\int_{t_2}^s b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^s b(v) dv} \right) e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} e^{\int_s^u b(v) dv} du \right| + \left| \int_{t_1+T}^{t_2+T} e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du \right| \\
 & = \left| e^{\int_{t_2}^s b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^s b(v) dv} \right| \left| \int_s^{t_1+T} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} e^{\int_s^u b(v) dv} du \right| + \left| \int_{t_1+T}^{t_2+T} e^{\int_{t_2}^u b(v) dv} e^{\int_u^{s+T} a(v) dv} du \right| \\
 & \leq \left| e^{\int_{t_2}^s b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^s b(v) dv} \right| \int_s^{t_1+T} \left| e^{\int_0^{2T} a(v) dv} e^{\int_0^{2T} b(v) dv} \right| du \\
 & \quad + \int_{t_1+T}^{t_2+T} \left| e^{\int_0^T b(v) dv} e^{\int_0^{2T} a(v) dv} \right| du \\
 & \leq \left| e^{\int_{t_2}^s b(v) dv} - e^{\int_{t_1}^s b(v) dv} \right| 2T e^{4m} + e^{3m} |t_2 - t_1|.
 \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_1+T} \left| \int_s^{t_2+T} e^{\int_{t_2}^u b(v)dv} e^{\int_u^{s+T} a(v)dv} du - \int_s^{t_1+T} e^{\int_{t_1}^u b(v)dv} e^{\int_u^{s+T} a(v)dv} du \right| ds \\
 & \leq 2T^2 e^{4m} \|b\| \exp\left(-\int_0^T b(v) dv\right) |t_2 - t_1| + T e^{3m} |t_2 - t_1| \\
 & = |t_2 - t_1| T \left(2T e^{4m} \|b\| \exp\left(-\int_0^T b(v) dv\right) + e^{3m} \right). \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit de (4.9) et (4.10) que

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_1+T} |G(t_2, s) - G(t_1, s)| ds \\
 & \leq |t_2 - t_1| T \frac{2T e^{4m} \|b\| \exp\left(-\int_0^T b(v) dv\right) + T e^{3m} + e^{2m} T \|b\| \exp\left(-\int_0^T b(v) dv\right) + e^{2m}}{\left[\exp\left(\int_0^T a(u) du\right) - 1\right] \left[\exp\left(\int_0^T b(u) du\right) - 1\right]} \\
 & = |t_2 - t_1| T \frac{T \|b\| \exp\left(-\int_0^T b(v) dv\right) (2e^{4m} + e^{2m}) + e^{3m} + e^{2m}}{\left[\exp\left(\int_0^T a(u) du\right) - 1\right] \left[\exp\left(\int_0^T b(u) du\right) - 1\right]} \\
 & \leq |t_2 - t_1| T e^{2m} \zeta \left[T \lambda_2 \nu (2e^{2m} + 1) + e^m + 1 \right].
 \end{aligned}$$

La preuve est achevée. ■

Lemme 4.5 *Supposons que les conditions (4.2)–(4.4) sont vérifiées. Si*

$$T(\beta + \alpha \lambda_1) \zeta_1 + T \alpha \zeta_2 \leq L, \tag{4.11}$$

et

$$\left[(2\alpha + T e^{2m} \zeta (T \lambda_2 \nu (2e^{2m} + 1) + e^m + 1)) (\lambda_1 \zeta_2 + \zeta_1) + (2\beta + T \lambda_2 \nu) \zeta_2 \right] \leq M, \tag{4.12}$$

alors

$$S(P_T(L, M)) \subset P_T(L, M).$$

Preuve.

Ligne directrice : *Pour assurer l'inclusion ci-dessus, il suffit donc de montrer ces trois conditions :*

- $S(\varphi) \in P_T, \forall \varphi \in P_T(L, M)$
- $|(S\varphi)(t_2) - (S\theta)(t_2)| \leq M |t_2 - t_1|, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi, \theta \in P_T(L, M)$
- $\|S(\varphi)\| \leq L, \forall \varphi \in P_T(L, M).$

Il est aisé de voir que $(S\varphi)(t+T) = (S\varphi)(t)$. Grâce au corollaire 3.2, on arrive à

$$\begin{aligned} |(S\varphi)(t)| &\leq (\beta + \alpha\lambda_1) \int_t^{t+T} |g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s))| ds \\ &\quad + \alpha \int_t^{t+T} |h(t, \varphi(t), \varphi^{[2]}(t), \dots, \varphi^{[n]}(t))| ds. \end{aligned}$$

Sous les conditions (4.2)–(4.4) et en vertu du Lemme 4.1, on obtient

$$\begin{aligned} &|h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s))| \\ &= |h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) - h(s, 0, 0, \dots, 0)| \\ &\quad + |h(s, 0, 0, \dots, 0)| \\ &\leq \rho_1 + \sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=0}^{j=i-1} M^j \|\varphi\| \leq \rho_1 + L \sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=0}^{j=i-1} M^j \leq \zeta_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &|g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s))| \\ &= |g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) - g(s, 0, 0, \dots, 0)| \\ &\quad + |g(s, 0, 0, \dots, 0)| \\ &\leq \rho_2 + \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=0}^{j=i-1} M^j \|\varphi\| \leq \rho_2 + L \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=0}^{j=i-1} M^j \leq \zeta_2. \end{aligned}$$

Donc

$$|(S\varphi)(t)| \leq T(\beta + \alpha\lambda_1) \zeta_1 + T\alpha\zeta_2.$$

De (4.11), il vient

$$\|S\varphi\| \leq L.$$

Soit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ avec $t_1 < t_2$, on a

$$\begin{aligned} & |(S\varphi)(t_2) - (S\varphi)(t_1)| \\ & \leq \left| \int_{t_2}^{t_2+T} E(t_2, s) g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_{t_1}^{t_1+T} E(t_1, s) g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right| \\ & \quad + \left| \int_{t_2}^{t_2+T} a(s)G(t_2, s)g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_{t_1}^{t_1+T} a(s)G(t_1, s)g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right| \\ & \quad + \left| \int_{t_2}^{t_2+T} G(t_2, s)h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_{t_1}^{t_1+T} G(t_1, s)h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right|. \end{aligned}$$

D'une part

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_2}^{t_2+T} E(t_2, s) g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_{t_1}^{t_1+T} E(t_1, s) g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right| \\ & \leq \int_{t_2}^{t_1} |E(t_2, s)| |g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s))| ds \\ & \quad + \int_{t_1+T}^{t_2+T} |E(t_2, s)| |g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s))| ds \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_1+T} |E(t_2, s) - E(t_1, s)| |g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s))| ds \\ & \leq 2|t_2 - t_1| \beta \zeta_2 + |t_2 - t_1| T \lambda_2 \nu \zeta_2 \\ & = |t_2 - t_1| (2\beta + T \lambda_2 \nu) \zeta_2, \end{aligned} \tag{4.13}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{t_2}^{t_2+T} a(s)G(t_2, s)g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right. \\
 & \quad \left. - \int_{t_1}^{t_1+T} a(s)G(t_1, s)g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right| \\
 & \leq \left| \int_{t_2}^{t_1} a(s)G(t_2, s)g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right| \\
 & \quad + \left| \int_{t_1+T}^{t_2+T} a(s)G(t_2, s)g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right| \\
 & \quad + \left| \int_{t_1}^{t_1+T} a(s) [G(t_2, s) - G(t_1, s)] g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right|.
 \end{aligned}$$

Du Lemme 4.4 et les conditions (4.3) et (4.4), on aura

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{t_2}^{t_2+T} E(t_2, s)g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right. \\
 & \quad \left. - \int_{t_1}^{t_1+T} E(t_1, s)g(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right| \\
 & \leq 2\alpha\lambda_1 |t_2 - t_1| \zeta_2 + \lambda_1 |t_2 - t_1| \zeta_2 T e^{2m\zeta} (T\lambda_2\nu (2e^{2m} + 1) + e^m + 1) \\
 & = |t_2 - t_1| \lambda_1 \zeta_2 (2\alpha + T e^{2m\zeta} (T\lambda_2\nu (2e^{2m} + 1) + e^m + 1)), \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{t_2}^{t_2+T} G(t_2, s)h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right. \\
 & \quad \left. - \int_{t_1}^{t_1+T} G(t_1, s)h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right| \\
 & \leq \left| \int_{t_2}^{t_1} G(t_2, s)h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right| \\
 & \quad + \left| \int_{t_1+T}^{t_2+T} G(t_2, s)h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right| \\
 & \quad + \left| \int_{t_1}^{t_1+T} (G(t_2, s) - G(t_1, s)) h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right|.
 \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 4.4 et les conditions (4.5)–(4.6), on arrive à

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_2}^{t_2+T} G(t_2, s) h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right. \\ & \left. - \int_{t_1}^{t_1+T} G(t_1, s) h(s, \varphi(s), \varphi^{[2]}(s), \dots, \varphi^{[n]}(s)) ds \right| \\ & \leq |t_2 - t_1| \zeta_1 (2\alpha + T e^{2m} \zeta (T \lambda_2 \nu (2e^{2m} + 1) + e^m + 1)). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ainsi, il s'ensuit de (4.13), (4.14) et (4.15) que

$$\begin{aligned} & |(S\varphi)(t_2) - (S\varphi)(t_1)| \\ & \leq |t_2 - t_1| ((2\alpha + T e^{2m} \zeta (T \lambda_2 \nu (2e^{2m} + 1) + e^m + 1)) (\lambda_1 \zeta_2 + \zeta_1) + (2\beta + T \lambda_2 \nu) \zeta_2). \end{aligned}$$

Moyennant la condition (4.12), on obtient

$$|(S\varphi)(t_2) - (S\varphi)(t_1)| \leq M |t_2 - t_1|.$$

Ce qui achève la preuve. ■

Voici maintenant notre résultat principal :

Théorème 4.1 *Supposons que (3.2), (3.3), (3.7), (3.17), (4.2)–(4.4), (4.11) et (4.12) sont vérifiées, alors l'équation (4.1) admet au moins une solution $x \in P_T(L, M)$.*

Preuve.

Ligne directrice : *Le résultat découle immédiatement des Lemmes 4.3 et 4.5.*

Du lemme 4.2, on voit que l'équation (4.1) admet au moins une solution x dans $P_T(L, M)$ si et seulement si l'opérateur S défini par (4.7) admet au moins un point fixe. Pour conclure, il suffit d'appliquer les Lemmes 4.3 et 4.5 ce qui prouve que les hypothèses du théorème de *Schauder* sont satisfaites. Par conséquent, il existe au moins un point fixe $x \in P_T(L, M)$ de l'opérateur S . D'où l'existence d'au moins une solution de l'équation (4.1). ■

4.4 Existence et unicité des solutions périodiques

Nous donnons pour clore ce chapitre un théorème qui assure l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (4.1).

Théorème 4.2 *Supposons (3.2), (3.3), (3.17), (4.2)–(4.4) sont satisfaites. Si*

$$T \sum_{i=1}^n ((\beta + \alpha \lambda_1) c_i + \alpha k_i) \sum_{j=0}^{j=i-1} M^j < 1, \quad (4.16)$$

alors l'équation (4.1) admet une solution unique $x \in P_T(L, M)$.

Preuve. Soit $\varphi, \theta \in P_T(L, M)$. Par une démonstration analogue à celle du Lemme 4.3, on obtient

$$|(S\varphi)(t) - (S\theta)(t)| \leq \left(T \sum_{i=1}^n ((\beta + \alpha \lambda_1) c_i + \alpha k_i) \sum_{j=0}^{j=i-1} M^j \right) \|\varphi - \theta\|,$$

ce qui entraîne que moyennant l'hypothèse (4.16), S est une contraction.

Sous la condition citée ci dessus, et en vertu du théorème de point fixe de *Banach*, S admet un point fixe unique dans $P_T(L, M)$, ce qui prouve l'existence d'une solution unique de l'équation (4.1). ■

4.5 Récapitulatif

Nous avons abordé dans ce chapitre quelques questions liées à l'existence, l'unicité et la périodicité des solutions d'une classe d'équations différentielles fonctionnelles itératives du second ordre. Les résultats sont obtenus en se basant essentiellement sur une méthode combinant le théorème de point fixe de *Schauder* et les propriétés de la même fonction de *Green* du chapitre précédent.

Nous montrons aussi que, sous certaines conditions et en vertu du théorème de point fixe de *Banach*, la même équation différentielle itérative possède une solution unique.

Conclusion générale et Perspectives

L'intérêt de la théorie de point fixe pour l'étude des équations fonctionnelles non linéaires a attiré mon attention et c'est pour cette raison que je l'ai choisi comme sujet de ma thèse de Doctorat où nous sommes intéressés à établir des conditions suffisantes pour assurer l'existence, l'unicité, la périodicité et la positivité des solutions de deux classes d'équations différentielles à retard variable du second ordre où la première classe, est une classe d'équations de type neutre tandis que la deuxième est d'équations de type itératif.

Au cours de ce travail, nous avons présenté un état de l'art sur les équations fonctionnelles à retard et nous avons également mis en évidence la grande efficacité de la technique qui combine quelques propriétés utiles des fonctions de *Green* de certaines EDO linéaires avec les théorèmes de point fixe.

Cette technique puissante repose sur l'inversion de l'équation considérée en une équation intégrale avant d'appliquer le théorème de point fixe de *Krasnoselskii* ou celui de *Schauder* combiné avec quelques propriétés d'une fonction de *Green* d'une équation différentielle linéaire du second ordre. En outre, nous avons appliqué le principe de l'application contractante de *Banach* sur l'équation intégrale inversée et sous certaines contraintes déterminées, on a

démontré l'existence et l'unicité de la solution périodique de l'équation différentielle de type itératif.

Ce type d'équations est à la mode aujourd'hui et un changement soit dans l'espace de départ ou soit le type du retard ouvre la voie vers plusieurs autres pistes intéressantes ayant trait aux points suivants :

- Il apparaît intéressant de démontrer la stabilité de ces solutions.
- Il serait aussi très utile de pouvoir étendre l'étude aux équations différentielles à retard d'ordre supérieur à deux, équations différentielles à retard distribué ou équations fractionnaires à retard.
- Il semble important d'étudier l'existence de solutions presque périodiques ou anti périodiques.

I. Résolution des EDR par MATLAB

Les principales fonctions de MATLAB qui permettent la résolution des équations différentielles à retards sont `dde23`, `ddesd` et `ddensd`.

1. Résolution d'une équation différentielle à retard constant par `dde23`

Le solveur `dde23` de Matlab, basé sur les méthodes de *Runge-Kutta* explicite est développé par *S. Thompson* et *L. Shampine* pour résoudre les équations différentielles avec des retards constants.

Syntaxe de base

```
sol = dde23 ( ddefile, lags, history, tspan)
sol = dde23 ( ddefile, lags, history, tspan, options),
```

où les arguments d'entrée sont définis par :

`ddefile` : fonction au second membre de l'EDR.

`lags` : vecteur des retards constants positives.

`history` : fonction historique, c'est un vecteur colonne donnant les valeurs initiales des solutions.

`tspan` : intervalle d'intégration (temps où on veut calculer la solution).

2. Résolution d'une équation différentielle à retards variables dépendant continûment du temps ou de l'état par `ddesd`

La fonction `ddesd` permet la résolution des équations différentielles avec des retards variables.

Syntaxe de base

```
sol = ddesd (ddefun, delays, history, tspan)
sol = ddesd (ddefun, delays, history, tspan, options),
```

où les arguments d'entrée sont définis par :

`ddefun` : fonction créée qui évalue le second membre de l'EDR

`delays` : vecteur colonne qui représente les retards qui peuvent dépendre du temps ou de l'état.

`history` : fonction historique, c'est un vecteur colonne donnant les valeurs initiales des solutions.

`tspan` : intervalle d'intégration (temps où on veut calculer la solution).

3. Résolution d'une équation différentielle à retard de type neutre par `ddensd`

La fonction `ddensd` permet la résolution des équations différentielles de type neutre avec des retards indépendants de l'état.

Syntaxe de base

```
sol = ddensd (ddefun, dely, delyp, history, tspan)
sol = ddensd (ddefun, dely, delyp, history, tspan, options).
```

où les arguments d'entrée sont définis par :

`ddefun` : fonction créée qui évalue le second membre de l'EDR

`dely` : vecteur colonne qui représente les retards.

`delyp` : vecteur colonne qui représente les retards dans les dérivées.

history : fonction historique, c'est un vecteur colonne donnant les valeurs initiales des solutions.

tspan : intervalle d'intégration (temps où on veut calculer la solution).

Un tutoriel sur la résolution des équations différentielles à retard via MATLAB par *Shampine* et *Thompson* peut être trouvé sur le site

Webhttp ://www.runet.edu/thompson/webddes/

II. Résolution des EDR par Maple

La première procédure est appelée *fhmpas*, repose sur une résolution exacte des EDO successives. Elle devient lente dès que le nombre d'itérations devient grand et doit être alors remplacée par des procédures de résolution approchée, appelées *fhmpasn* et *fhmpasndp*, utilisant les ressources de l'option *numeric* dans *dsolve*.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Abdallah, P. Dorato, J. Benitez-Read et R. Byrne : *Delayed Positive Feedback Can Stabilize Oscillatory Systems*. Dans ACC93 (American Control Conf.), 3106 – 3107, 1993.
- [2] M. Abdelali, H. Benzine-Challam, A. Madoui-dekar, *Cytologie et physiologie Cellulaire*, O.P.U. Algérie, 2008.
- [3] M. Adimy, S. Bernard, J. Clairambault, F. Crauste, S. Génieys et L. Pujon-Menjouet, *Modélisation de la dynamique de l'hématopoïèse normale et pathologique*, Université Lyon 1, Hématologie, vol. 14, n°5, 339 – 350, 2008.
- [4] W. Aernouts, D. Roose et R. Sepulchre, *Delayed Control of a Moore Greitzer Axial Compressor Model*. Int. J. of Bifurcation and Chaos, 10(2), 2000.
- [5] P. Andrzej ; *On some iterative differential equations I*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellonskiego, Prace Matematyczne. 12, 53 – 56, 1968.
- [6] A. Ardjouni et A. Djoudi, *Existence of positive periodic solutions for a second order nonlinear neutral differential equation with variable delay*, Adv. Nonlinear Anal. 2, 151 – 161, 2013.

Bibliographie

- [7] A. Ardjouni et A. Djoudi, *Existence of positive periodic solutions for two types of second order nonlinear neutral differential equations with variable delay*, *Proyecciones J. Math.* Vol. 32, N° 4, 377 – 391, 2013.
- [8] A. Ardjouni et A. Djoudi, *Periodic solutions for a second-order nonlinear neutral differential equation with variable delay*, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2011, N°. 128, 1 – 7, 2011.
- [9] O. Arino, M.L. Hbid et E. Ait Dads, *Delay Differential Equations and Applications*, Springer, 2006.
- [10] O. Arino, M.L. Hbid, R. Bravo de la Parra , *A mathematic model of growth of population of fish in the larval stage : density-dependence effects*, *Math. Biosci* 150 (1), 1 – 120, 1998.
- [11] C. Babbage, *An essay towards the calculus of functions*, *Philosophical transactions of the royal society of London*, Vol.105, 389 – 432, 1815.
- [12] R. Bellman et Cooke, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, 1963.
- [13] V. Berinde, *Existence and approximation of solutions of some first order iterative differential equations*, *Miskolc Math. Notes*, 11(1), 13–26, 2010.
- [14] J. Bernoulli. *Meditationes. De chordis vibrantibus*, *Comm. Acad. Sci. Imp.Petropolitanae* 3 : 13 – 28, (Ges.Werke III, p.198), 1728.
- [15] A. Bouakkaz, A. Ardjouni et A. Djoudi, *Existence of Positive Periodic Solutions for a Second-Order Nonlinear Neutral Differential Equation by the Krasnoselskii's Fixed Point Theorem*, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 17 (3), 230 – 238, 2017.
- [16] A. Bouakkaz, A. Ardjouni and A. Djoudi, *Periodic Solutions for a Second Order Nonlinear Functional Differential Equation with Iterative*

Bibliographie

- Terms by Schauder's Fixed Point Theorem*, Acta Math. Univ. Comeniana, Vol. *LXXXVII*, 2, 223 – 235, 2018.
- [17] T. A. Burton, *Krasnoselskii's inversion principle and fixed points*, Nonlinear Analysis, 30, 3975 – 3986, 1997.
- [18] T. A. Burton, *Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations*, Dover Publications, New York, 2006.
- [19] I. Cherti, *Contribution à l'étude d'équations aux dérivées partielles, d'équations fonctionnelles à retard. Solutions périodiques et presque périodiques*, Université Mohamed V-Agdal, Rabat, 2007.
- [20] J. Chu, N. Fan et P.J. Torres, *Periodic solutions for second order singular damped differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 388, 665 – 675, 2012.
- [21] F. Crauste, *Equations à Retard et Modèles de Dynamiques de Populations Cellulaires*, Université Claude Bernard Lyon 1, 2014.
- [22] O. Diekmann, S. A. Van Gils, S. M. Verduyn Lunel et H. O. Walther, *Delay Equations : Functional, Complex, and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [23] B. Djoubir, *Sur les équations différentielles fractionnaires linéaires avec retard*, support de cours de Master, université Abou Bekr Belkaid, tlemcen, 2011.
- [24] R.D. Driver, *A "backwards" two-body problem of classical relativistic electrodynamics*. Physical Review 178 (2), 2051 – 2057, 1969.
- [25] R.D. Driver, *A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics*, Proc. Inter Symposium on Nonli Diff Eqs and Nonlinear Mechanics, Academic Press, New York, 474 – 484, 1963.

Bibliographie

- [26] R.D., Driver, *A mixed neutral system*. Nonlinear Analysis TMA 8 , 155–158, 1984.
- [27] R.D. Driver, *A neutral system with state-dependent delay*. J. Differential Eqs. 54 , 73 – 86, 1984.
- [28] R.D. Driver, *A two-body problem of classical electrodynamics : the one dimensional case*. Ann. Phys. 21, 122 – 142, 1963.
- [29] R.D. Driver, *Delay-differential equations with an application to a two-body problem of classical electrodynamics*. Tech. Report, University of Minnesota, Minneapolis, 1960.
- [30] R. D. Driver, *Existence theory for a delay differential system*, Contrib. Differential Eq. 1, 317 – 336, 1963.
- [31] R.D., Driver et M. Norris, *Note on uniqueness for a one-dimensional two-body problem of classical electrodynamics*. Annals of Physics 42 , 347 – 351, 1967.
- [32] E. Eder, *The Functional Differential Equation $x'(t) = x(x(t))$* , Journal of Differential Equations, 54, 390 – 400, 1984.
- [33] L.E. El'sgol'ts et S. B. Norkin, *Introduction to the theory and Application of Differential Equations with deviating Arguments*, Mathematics in science and Engineering, Vol. 105, Academic Press, 1973.
- [34] C.E. Falbo, *Some Elementary Methods for Solving Functional Differential Equations*; Sonoma State University
- [35] M. Fečkan, *On a certain type of functional differential equations*, Math. Slovaca. 43, 39 – 43, 1993.
- [36] R. Frisch et H. Holme, *The Characteristic Solutions of Mixed Difference and Differential Equations*, Econometrica, 1935.

Bibliographie

- [37] W. Ge et Y. Mo, *Existence of solutions to differential-iterative equation*, Journal of Beijing Institute of Technology, 6(3), 192 – 200, 1997.
- [38] W.S.C. Gurney, S.P. Blathe et R.M. Nishbt, *Nicholson's blowflies revisited*. Nature 287, 17 – 21, 1980.
- [39] A. Halanay, *Differential Equations, Stability, Oscillations, Time Lags*. Academic Press, 1966.
- [40] J.K. Hale et M.K. Cruz, *Existence, Uniqueness and Continuous Dependence for Hereditary Systems*. Ann. Mat. Pura. Appl., 85, 1970.
- [41] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [42] J. K. Hale et S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional Differential equations*. Springer-Verlag, New-York, 1993.
- [43] F. Hartung, T. Krisztin, H.O. Walther et J. Wu, *Functional Differential Equations with State-Dependent delays : Theory and Applications*, In : A. Canada, P. Drabek, A. Fonda (Eds), HANDBOOK OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, Ordinary Differential Equations, vol. 3, Elsevier Science B. V., North Holland, Amsterdam, pp. 435 – 545, 2006.
- [44] J.T. Hoag et R.D. Driver, *A delayed-advanced model for the electrody-namics two-body problem*. Nonlinear Analysis TMA 15 , 165 – 184, 1990.
- [45] N. Jalili, et N. Olgac, *Optimum Delayed Feedback Vibra MDOF Mechanical Structures*. Dans 37th IEEE CDC9 and Control), 4734 – 4739, Tampa, FL, Dec., 1998.
- [46] H.S. Jeong et C.W. Lee, *Time Delay Control with State Feedback for Azimuth Motion of the Frictionless Positioning Device*. IEEE-ASME Trans. Mechatronics, 2(3), 1997.

Bibliographie

- [47] I.P. Kabakov, *On steam pressure control* (in Russian), Inzh. shornik, 2, 27 – 60, 1946.
- [48] V. Kolmanovskii et A. Myshkis, *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- [49] V. Kolmanovski, et A. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer Acad. Publ, 1999.
- [50] V. Kolmanovskii et V.R. Nosov, *Stability of functional differential equations*. Academic Press, London, 1986.
- [51] M.A. Krasnoselskii, *some problems of nonlinear analysis* ; Uspehi Mat. Navl (N.S) 9, N° 3 (61) , 57 – 114; 1954 (Russian), in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 10. 345 – 409, 1958.
- [52] M. Krasnov, Z. Kissélev et G. Makarenko, *Equations intégrales. Problèmes et exercices*. Moscou, 1977.
- [53] N. Krasovskii, *Stability of Motion*. Stanford Univ. Press, 1963. Translation with additions of the 1959 (Russian edition).
- [54] N. Krasovskii, *Theory of A.M. Lyapunov's second method for investigating stability*, 1956.
- [55] Y. Liu et W. Ge, *Positive periodic solutions of nonlinear duffing equations with delay and variable coefficients*, Tamsui Oxf. J. Math. Sci. 20, 235 – 255, 2004.
- [56] J. Liu et J.G. Si, *Analytic solutions for a class of differential equation with delays depending on state*, Appl. Math. Comput. 186, 261 – 270, 2007.
- [57] X. Li et Z. Zhang, *Periodic solutions for damped differential equations with a weak repulsive singularity*, Nonlinear Analysis 70, 2395 – 2399, 2009.

Bibliographie

- [58] T. Luzyanina, K. Engelborghs, S. Ehl, P. Klenerman et G. Bocharov, *Low level viral persistence after infection with LCMV : a quantitative insight through numerical bifurcation analysis*, *Mathematical Biosciences* 173, 1 – 23, 2001.
- [59] M.C. Mackey, *Unified Hypothesis for the Origin of Aplastic Anemia and Periodic Hematopoiesis*, *Blood*, Vol. 51, No. 5 (May), 941 – 956, 1978.
- [60] A. Martin, *Equations aux dérivées partielles, exercices résolus*. Dunod, 1991.
- [61] R.H. Martin, *Non linear operators and differential equations in Banach spaces*, John wiley, New York, 1976 .
- [62] A.D. Myshkis, *Lineare Differential gleichungen mit nacheilenden Argumentom*. Deutscher Verlag. Wiss. Berlin, 1955. Traduction du 1951 Russian edition.
- [63] P.W. Nelson et A. S. Perelson, *Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection*, *Mathematical Biosciences* 179, 73 – 94, 2002.
- [64] A.J. Nicholson, *An outline of the dynamics of animal populations*, *Austral. J. Zoo.*2, 9 – 65, 1954.
- [65] A.J. Nicholson, *Compensatory Reactions of Populations to Stresses, and Their Evolutionary Significance*, *Australian Journal of Zoology*, 2, 1 – 8, 1954.
- [66] A.J. Nicholson, *The self adjustment of population to change. Cols. Spring Harb's Syrup. Quant. Bzol.* 22, 153 – 173, 1957.
- [67] O. Polossuchin, *Über eine Besondere Klasse von Differentialen Funktionalgleichungen, Inaugural Dissertation"*, Zürich, German, 1910.

Bibliographie

- [68] F. Randrianandrasana, *Bifurcation de Poincaré d'une classe d'équations Différentielles non Linéaires à argument retardé*, thèse de Doctorat de 3^{ème} cycle en Physique, Université de Paul Sabatier, Toulouse, 1981.
- [69] P. Richard et M. Ksouri, *Systèmes à retard*, Cours Mathématiques pour l'ingénieur, Tunisie, 2010.
- [70] S. A. Rodriguez Paredes, *Stabilité des systèmes à retard de type neutre*, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2003.
- [71] S. Ruan, *Delay Differential Equations and Applications*, Springer, Miami, 2014.
- [72] A. M. Samoilenko, *On the investigation of global solutions of linear one problem of differential equations with deviating argument"*, Ukrainian, Mathematical Journal, Vol, 55, No, 5, 762 – 767, 2006.
- [73] A. M. Samoilenko et L. M. Serheeva, *Construction of global solutions of partial differentials equations with deviating arguments in the time variable"*. Journal of Mathematical Sciences, Vol, 212, No, 4, January, 426 – 440, 2016.
- [74] J. Schauder, *Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit and Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von Elliptischen Typus*, Math. Ann., 661 – 721, 1932.
- [75] E. Schmidt, *Über eine Klasse linearer funktionaler differentialgleichungen"*, Math. Ann. 70, German, 499 – 524, 1911.
- [76] L. Sergeeva, *About global solutions of partial differentials equations with deviating arguments in the time variable*, Yuriy Fedkovch Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine, ROMAI,J,v.11, no. 2,109 – 118, 2015.

Bibliographie

- [77] L.F. Shampine et S. Thompson, *Solving Delay Differential Equations with dde23*, 2000.
- [78] D.S. Smart, *Fixed point theorems*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 66. Cambridge University Press, London-New York, 1974.
- [79] J.G. Si, W.R. Li et S.S. Cheng, *Analytic solutions of an iterative functional differential equation*, *Comput. Math. Appl.* 33, 47 – 51, 1997.
- [80] J.G. Si et X.P. Wang, *Smooth solutions of a nonhomogeneous iterative functional differential equation with variable coefficients*, *J. Math. Anal. Appl.* 226, 377 – 392, 1998.
- [81] H. Smith, *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, Springer, 2011.
- [82] F.E. Smith, *Population dynamics in Daphnia magna*, *Ecologie*, 44 : 651 – 653, 1963.
- [83] S. Staněk, *On global properties of solutions of functional differential equation $x'(t) = x(t) + x(x(t))$* , *Dynam. Systems Appl.* 4, 263 – 278, 1995.
- [84] V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématiques de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [85] V. Volterra, *Sur la théorie mathématiques des phénomènes héréditaires*, *J. de Mathématiques* 7, 249 – 298, 1928.
- [86] Y. Wang, H. Lian et W. Ge, *Periodic solutions for a second order nonlinear functional differential equation*, *Applied Mathematics Letters* 20, 110 – 115, 2007.
- [87] K. Wang; *On the equation $x'(t) = f(x(x(t)))$* , *Funk. Ekv.*, 33(3), 405 – 425, 1990.

Bibliographie

- [88] E. Yankson, *Positive periodic solutions for second-order neutral differential equations with functional delay*, Electron. J. Differential Equations, N° 14, 1 – 6, 2012.
- [89] Youcef-Toumi, K. et O. Ito, *A time delay controller design for systems with unknown dynamics*. ASME J. Dynamic Systems Measurement and Control, 112 :133 – 142, 1990.
- [90] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications, fixed-point theorems*, Springer-Verlage, Berlin, 1993.
- [91] H.Y. Zhao et M. Fečkan, *Periodic solutions for a class of differential equations with delays depending on state*, Mathematical communication Math commun. 22, 1 – 14, 2017.
- [92] H.Y. Zhao et J. Liu, *Periodic solutions of an iterative functional differential equation with variable coefficients*. Math. Meth. Appl. Sci., 40 286 – 292, 2017.