

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Badji Mokhtar
– Annaba –

Badji Mokhtar University
– Annaba –



جامعة باجي مختار
– عنابة –

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Analyse Numérique de la Méthode de Décomposition de Domaine pour un Système d'Inéquations Quasi- Variationnelles à Opérateurs non Coercifs

Présentée par

DJEMAOUNE Linda

Devant le jury

Mme. Samira SAADI
M. Mohamed HAIOUR
M. M. Cherif BOURAS
M. Messaoud MAOUNI
M. Salah BOULAAAS

Président
Directeur de thèse
Examineur
Examineur
Examineur

M.C.A à l'Université d'Annaba
Pr. à l'Université d'Annaba
M.C.A à l'Université d'Annaba
Dr. à l'Université de Skikda
Dr. à Qassim University

Année 2017

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA

**FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Thèse

Présentée et soutenue par

Linda DJEMAOUNE

En vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat (LMD) en Mathématiques

Titre de la thèse :

**Analyse numérique de la méthode de
décomposition de domaine pour un système
d'inéquations quasi-variationnelles à
opérateurs non coercifs**

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens d'abord à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse, Monsieur Mohamed HAIOUR - Professeur de Mathématiques à l'Université Badji Mokhtar d'Annaba - pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant la direction scientifique de mes travaux de recherche comme je lui suis également reconnaissante de m'avoir assurée un encadrement de qualité tout au long de ces années. Monsieur HAIOUR a su diriger mes travaux avec beaucoup de disponibilité, de tact et d'intérêt. Il m'a toujours accordée généreusement le temps nécessaire pour partager avec moi ses connaissances et sa grande expérience. Il m'a faite bénéficier tout au long de ce travail de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, de son dynamisme et de sa remarquable efficacité. Il m'a été, depuis le début de mon M2 et tout au long de ma thèse, un mentor remarquable. Au delà de son indéniable excellence scientifique, c'est par ses qualités humaines qu'il a su rendre ces années agréables et enrichissantes en étant toujours très attentif et disponible malgré une vie professionnelle chargée et mon éloignement qui ont, quelque peu, ralenti le rythme de mon travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie très chaleureusement Madame Samira SAADI - Docteur en Mathématiques à l'Université d'Annaba - de m'avoir faite l'honneur de présider le jury de ma soutenance et de l'intérêt qu'elle a porté à mes travaux de recherche. Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Mohamed Cherif BOURAS - Maître de conférences à l'Université d'Annaba - , Monsieur Messaoud MAOUNI - Docteur en Mathématiques à l'Université 20 Août 1955 Skikda - et Monsieur Salah BOULAA-RAS - Docteur en Mathématiques à Quassim University - qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, de m'honorer en participant au jury ainsi que pour leurs remarques et suggestions constructives qui ont permis de parfaire la qualité du présent mémoire. Pour tout cela, je les en remercie vivement et qu'ils soient assurés de toute ma reconnaissance.

J'adresse toute ma gratitude à tous mes ami(e)s et à toutes les personnes qui m'ont aidée de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Je remercie Messieurs Baillon et Nazaret d'avoir accepté et soutenu le projet de co-tutelle de thèse entre l'Université d'Annaba et l'Université Paris 1 Panthéon Sorbonne. Soyez remerciés pour vos encouragements et votre soutien.

Je remercie également tous mes collègues mathématiciens, les membres du Laboratoire d'Analyse Numérique Optimisation et Statistiques ainsi que tous les professeurs du département de Mathématiques de l'Université de Béjaia et d'Annaba. Que tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont aidée à la réalisation de cette

recherche trouvent ici toute ma gratitude et l'expression de mes remerciements les plus sincères.

J' adresse toute mon affection à mes parents qui m'ont encouragée durant toutes ces années de dur labeur. Malgré mon éloignement, leur assistance, leur confiance et leur amour m'ont permise de mener à terme ce travail. Toujours à mes côtés pour me soutenir, je leurs dédie cette réussite ainsi qu'à l'ensemble de toute ma famille.

Un grand merci à mon cher époux Massinissa d'avoir été toujours à mes côtés et pour son précieux et constant soutien.

J'e ne saurais terminer sans remercier vivement toutes les personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permise d'arriver au bout de l'élaboration de cette thèse.

Résumé

Ce travail consiste en l'analyse numérique de la méthode de décomposition en sous-domaines dite la méthode alternée de Schwarz. Cette méthode est appliquée pour résoudre un problème de gestion de la production de l'énergie électrique régi par un système d'inéquations quasi-variationnelles à opérateurs elliptiques non coercifs relié à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

Basiquement, cette méthode consiste à remplacer la résolution d'un problème aux limites posé sur un domaine Ω potentiellement gros et complexe par une succession de résolutions du même problème sur des sous-domaines de Ω à géométries plus simples.

Nous nous proposons d'étudier la méthode de décomposition en deux sous-domaines avec recouvrement. Nous obtenons des résultats de convergences monotone et géométrique des itérés de l'algorithme de Schwarz et nous prouvons une estimation optimale de l'erreur dans chaque sous-domaine entre la solution continue et la solution discrète.

Mots clés : Méthode de décomposition de domaine, inéquations quasi-variationnelles, équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, convergence géométrique.

Abstract

This work deals with numerical analysis of an overlapping Schwarz method on nonmatching grids for a noncoercive system of quasi-variational inequalities related to the Hamilton-Jacobi-Bellman equation.

The Schwarz alternating method is an iterative method to find the solution of elliptic boundary value problems on a domain which is the union of two or more overlapping subdomains. The solution is approximated by an iterative sequence which results from solving a sequence in each of the subdomains in turn.

We prove that the discrete alternating Schwarz sequences on every subdomain converge monotonically into the unique solution of the discrete problem and geometrically in uniform norm. Optimally L^∞ - error estimates are also obtained.

Keywords : Domain decomposition method, quasi-variational inequalities, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, geometrical convergence.

Table des matières

Introduction	1
1 Approximations par éléments finis des inéquations quasi- variationnelles (IQV) elliptiques non coercives	5
1.1 Inéquation variationnelle continue (IV)	6
1.1.1 Existence, unicité et régularité de la solution continue	7
1.1.2 Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues	10
1.1.3 Propriété de monotonie de la solution continue	11
1.1.4 Propriété de lipschitzianité de la solution continue	14
1.2 Inéquation variationnelle discrète	15
1.2.1 Existence et unicité de la solution discrète	16
1.2.2 Caractérisation de la solution discrète comme enveloppe des sous-solutions discrètes	17
1.2.3 Propriété de monotonie de la solution discrète	17
1.2.4 Propriété de lipschitzianité de la solution discrète	18
1.2.5 Régularité de la solution discrète	18
1.2.6 Estimation de l'erreur en norme L^∞	18
1.3 Inéquation quasi-variationnelle continue non coercive	19
1.3.1 Application continue du point fixe	22
1.3.2 Existence et unicité de la solution continue	23
1.3.2.1 Algorithme continu de Bensoussan-Lions	23
1.3.3 Régularité de la solution continue	27
1.3.4 Monotonie de la solution continue	27
1.3.5 Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues	28
1.3.6 Propriété de lipschitzianité de la solution continue	30
1.4 Inéquation quasi-variationnelle discrète non coercive	31
1.4.1 Application discrète du point fixe	32
1.4.2 Existence et unicité de la solution discrète	32
1.4.2.1 Algorithme discret de Bensoussan-Lions	33
1.4.2.2 Hypothèse du principe du maximum discret ([12])	33
1.4.3 Monotonie de la solution discrète	33
1.4.4 Caractérisation de la solution discrète comme enveloppe des sous-solutions discrètes	34
1.4.5 Propriété de lipschitzianité de la solution discrète	34
1.4.6 Etude de l'approximation	34

1.4.6.1	IQV continue coercive	34
1.4.6.2	IQV discrète coercive	35
1.4.6.3	Estimation de l'erreur des problèmes auxiliaires	35
2	Approximation par éléments finis de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)	39
2.1	Introduction à l'HJB	40
2.2	Passage de l'HJB à un système d'IQV continues non coercives	40
2.2.1	Notations et hypothèses	42
2.2.2	Existence et unicité de la solution continue	43
2.2.2.1	Propriétés de l'application T	44
2.2.2.2	Algorithme continu de Bensoussan-Lions	47
2.2.3	Régularité de la solution continue	53
2.3	Problème discret	53
2.3.1	Équation d'HJB discrète	53
2.3.2	Système d'IQV discrètes non coercives	54
2.3.3	Existence et unicité de la solution discrète	54
2.3.4	Algorithme discret de Bensoussan-Lions	55
2.4	Approximations des HJB	56
2.4.1	Approche contraction	56
2.4.1.1	Contraction associée au système d'IQV continues	59
2.4.1.2	Contraction associée au système d'IQV discrètes	60
2.4.1.3	Système auxiliaire d'IQV coercives	61
2.4.1.4	Estimation de l'erreur en norme L^∞	62
2.4.2	Approche algorithmique	62
2.4.2.1	Problème continu	63
2.4.2.2	Problème discret	63
2.4.2.3	Estimation de l'erreur en norme L^∞	66
2.4.3	Approche sous-solutions et régularité discrète	67
2.4.3.1	Estimation de l'erreur en norme L^∞	69
3	Approximation par la méthode de décomposition de domaine d'un système d'IQV à opérateurs non coercifs	75
3.1	Méthode de décomposition de domaine	75
3.1.1	Historique de la méthode de Schwarz	76
3.1.1.1	Algorithme 1 (Schwarz 1870)	77
3.1.1.2	Convergence originale de Schwarz	77
3.1.2	Méthode de Schwarz avec recouvrement	78
3.1.2.1	Algorithme 2 (méthode alternée ou Schwarz multiplicatif)	79
3.1.2.2	Convergence de l'algorithme	79
3.1.2.3	Algorithme 3 (méthode parallèle ou Schwarz additif)	80
3.1.3	Méthode de Schwarz sans recouvrement	80

3.1.3.1	Algorithme 4	81
3.1.3.2	Convergence de l'algorithme	82
3.2	Méthode de Schwarz pour un système d'IQV non coercives	82
3.2.0.1	Méthode	82
3.2.1	Suites continues de Schwarz	83
3.2.2	Suites discrètes de Schwarz	84
3.2.3	Algorithme de Schwarz	85
3.2.4	Convergence monotone de l'algorithme de Schwarz	85
3.2.5	Analyse de l'erreur en norme L^∞	99
	Conclusion	105
	Travaux et publications	107
	Bibliographie	109

Table des figures

3.1	La fameuse figure de Schwarz	77
3.2	Schwarz avec recouvrement	78
3.3	Décomposition du carré unité	78
3.4	Schwarz sans recouvrement	81

Introduction

La modélisation mathématique consiste en l'analyse d'un phénomène, au développement d'équations le décrivant et à la résolution de celles-ci à un niveau d'approximation donné.

Dans la majorité des cas, une solution exacte à nos modèles sera impossible mais depuis l'avènement de l'informatique, il existe une alternative consistant en l'analyse numérique qui est une branche prédominante des mathématiques appliquées.

Ainsi, plusieurs travaux de recherche se basant sur la création des méthodes de résolution numérique pourront nous permettre d'approximer nos solutions en un temps minimal et avec un degré de précision adéquat.

Avec la popularité grandissante et l'évolution du calcul parallèle, il apparait naturel de chercher des algorithmes qui peuvent s'adapter au parallélisme. C'est dans cette optique qu'il serait pertinent de travailler sur les méthodes de décomposition de domaine qui possèdent une base mathématique très riche et fournissent de bons algorithmes faciles à implémenter.

À ce jour, il existe une panoplie de méthodes de décomposition de domaine utilisées dans différents contextes. Les plus anciennes sont les méthodes de Schwarz introduites par Herman Amandus Schwarz en 1890 qui ont suscité un grand intérêt et subi, depuis leur introduction, un développement intense et accéléré durant ces deux dernières décennies dû principalement à l'essor considérable qu'a connu le monde des ordinateurs et l'évolution des machines parallèles en terme de puissance et de capacité de stockage.

Elles sont désormais couramment utilisées lors de la résolution des systèmes de grande taille provenant de la discrétisation d'équations aux dérivées partielles ayant comme but la réduction de la dimension et la simplification de la forme du problème initial. Elles permettent également de transformer des problèmes aux limites sur des géométries complexes qui, dans leur forme originale, sont coûteux, difficiles à résoudre et ne sont pas particulièrement adaptés au parallélisme (mal conditionnés) à un ensemble de problèmes posés sur des sous-domaines supposément plus simples et réguliers.

Évidemment, cela ne peut se faire tout à fait aisément. Aussi, il s'agit de procéder à des résolutions itératives sur les sous-domaines, choisies de telle sorte que la solution exacte du problème initial soit obtenue par convergence.

L'idée de la méthode de Schwarz est de découper le domaine global en régions avec ou sans recouvrement et les problèmes elliptiques sont résolus alternativement sur chaque sous-domaine avec des conditions de Dirichlet aux bords.

Il est à noter que, depuis 1987, des conférences internationales sont organisées régulièrement pour présenter les nouveaux résultats obtenus et les diverses applications des méthodes de décomposition de domaine.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'approximation par décomposition de domaine de type Schwarz avec recouvrement d'un système d'inéquations quasi-variationnelles (IQV) elliptiques à opérateurs non coercifs issu du problème de la gestion de la production de l'énergie électrique. Il s'agit d'un problème de contrôle optimal jouant un rôle essentiel dans la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). De nombreux travaux ont été réalisés sur cette fameuse équation [9, 10, 17, 5, 4, 3] et différentes approximations par la méthode des éléments finis ont été obtenues pour le cas coercif et non coercif en utilisant diverses approches [7, 8, 10, 6, 29].

En 2008, Zhou [31] a obtenu un premier résultat de convergence monotone en appliquant la méthode de décomposition de domaine à un système d'inéquations quasi-variationnelles à opérateurs elliptiques coercifs.

Pour notre part, nous avons généralisé ce résultat pour un système d'IQV à opérateurs non coercifs relié à l'équation d'HJB. Nous avons décrit l'algorithme de Schwarz discret sous une forme simplifiée pour lequel nous avons établi un résultat de convergence monotone [18]. Nous avons également démontré la convergence géométrique et obtenu une estimation de l'erreur en norme L^∞ , résultats qui ont fait l'objet d'une publication internationale dans la revue de renommée qu'est Springer Link mise en ligne en février 2016 [19].

La première partie de cette thèse est consacrée essentiellement à rappeler quelques généralités sur les inéquations variationnelles (IV) et quasi-variationnelles telles que l'existence et l'unicité de la solution continue ainsi que ses propriétés qualitatives à savoir la régularité, la monotonie et la lischitzianité avec adaptation de la notion de sous-solutions. Par symétrie, nous faisons l'étude du problème discret et donnons des résultats analogues à ceux du problème continu. Nous rappelons également les résultats d'approximation en norme uniforme obtenus par Cortey-Dumont [14] importants pour le développement ultérieur de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman et donnons un bref historique, son intérêt ainsi que quelques applications en sciences de l'ingénieur. Ensuite nous montrons le passage de cette équation à un système d'inéquations quasi-variationnelles à opérateurs non coercifs. A la fin, nous étudions

son approximation par la méthode des éléments finis moyennant différentes approches ; contraction, algorithmique ou encore sous-solutions et régularité discrète.

L'objectif du troisième chapitre est d'étudier la méthode de décomposition de domaine de type Schwarz et ses variantes ainsi que l'application de son algorithme itératif avec recouvrement à un système d'inéquations quasi-variationnelles à opérateurs non coercifs. La technique adoptée repose sur l'introduction des suites de sous et sur-solutions discrètes sur chaque sous-domaine puis la démonstration de la convergence monotone par récurrence des itérés de l'algorithme de Schwarz vers l'unique solution du problème discret en procédant. Finalement, nous démontrons le résultat principal de ce travail ; le théorème de convergence géométrique et l'estimation quasi-optimale de l'erreur d'ordre de convergence $h^2 |\log h|^4$ sur chaque sous-domaine.

CHAPITRE 1

Approximations par éléments finis des inéquations quasi- variationnelles (IQV) elliptiques non coercives

Cette partie rappelle les résultats importants d'approximations de l'inéquation variationnelle et quasi-variationnelle à opérateur non coercif en utilisant la notion de sous-solution. Pour des raisons de complétude, nous détaillons les démonstrations dans le cas continu. L'étude du cas discret s'effectuera par symétrie au problème continu.

Sommaire

1.1 Inéquation variationnelle continue (IV)	6
1.1.1 Existence, unicité et régularité de la solution continue	7
1.1.2 Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues	10
1.1.3 Propriété de monotonie de la solution continue	11
1.1.4 Propriété de lipschitzianité de la solution continue	14
1.2 Inéquation variationnelle discrète	15
1.2.1 Existence et unicité de la solution discrète	16
1.2.2 Caractérisation de la solution discrète comme enveloppe des sous-solutions discrètes	17
1.2.3 Propriété de monotonie de la solution discrète	17
1.2.4 Propriété de lipschitzianité de la solution discrète	18
1.2.5 Régularité de la solution discrète	18
1.2.6 Estimation de l'erreur en norme L^∞	18
1.3 Inéquation quasi-variationnelle continue non coercive	19
1.3.1 Application continue du point fixe	22
1.3.2 Existence et unicité de la solution continue	23
1.3.3 Régularité de la solution continue	27
1.3.4 Monotonie de la solution continue	27
1.3.5 Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues	28

1.3.6	Propriété de lipschitzianité de la solution continue	30
1.4	Inéquation quasi-variationnelle discrète non coercive	31
1.4.1	Application discrète du point fixe	32
1.4.2	Existence et unicité de la solution discrète	32
1.4.3	Monotonie de la solution discrète	33
1.4.4	Caractérisation de la solution discrète comme enveloppe des sous-solutions discrètes	34
1.4.5	Propriété de lipschitzianité de la solution discrète	34
1.4.6	Etude de l'approximation	34

1.1 Inéquation variationnelle continue (IV)

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N de frontière Γ suffisamment régulière. Nous définissons pour tout $u, v \in V$ (ici $V = H_0^1(\Omega)$) :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^N b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} v + a_0(x) uv \right) dx \quad (1.1)$$

$a(.,.)$ est une forme bilinéaire associée à l'opérateur elliptique A défini par :

$$Av = - \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=1}^N b_k(x) \frac{\partial v}{\partial x_k} + a_0(x)v \quad (1.2)$$

Les coefficients $a_{jk}(x)$, $b_k(x)$ et $a_0(x)$ sont supposés être suffisamment réguliers $\forall j, k = 1, \dots, N$ tels que :

$$\sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq \alpha |\xi|^2 ; \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \alpha > 0, x \in \Omega \quad (1.3)$$

Et $a_0(x)$ satisfait :

$$a_0(x) \geq \alpha_0 > 0, \forall x \in \Omega \quad (1.4)$$

Les coefficients $a_{jk}(x)$ sont symétriques :

$$a_{jk}(x) = a_{kj}(x) \quad (1.5)$$

Nous supposons aussi que la forme bilinéaire a est continue et fortement coercive :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1}^2, \alpha > 0, \forall v \in H^1(\Omega) \quad (1.6)$$

Nous considérons un second membre :

$$f \in L^\infty(\Omega), f \geq 0 \quad (1.7)$$

Et un obstacle :

$$\psi \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega) \text{ tel que } \psi > 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.8)$$

Soit K un ensemble convexe fermé non vide de V :

$$K = \{v \in V / 0 \leq v \leq \psi \text{ dans } \Omega\} \quad (1.9)$$

Définition 1.1.1. Le problème d'inéquation variationnelle elliptique (IV) est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ solution de} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in K \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Le problème (1.10) est aussi appelé problème à frontière libre. La fonction u coïncide avec l'obstacle ψ sur une partie de Ω et dans l'autre partie $\psi > u$.

1.1.1 Existence, unicité et régularité de la solution continue

Théorème 1.1.1. *Sous les hypothèses et notations précédentes, il existe une unique solution u du problème (1.10). De plus u satisfait la propriété de régularité :*

$$u \in \mathbb{W}^{2,p}(\Omega) \text{ tel que } 2 \leq p < \infty \quad (1.11)$$

Preuve.

1. Unicité :

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (1.10), alors nous avons :

$$a(u_1, v - u_1) \geq (f, v - u_1), \forall v \in K \quad (*)$$

$$a(u_2, v - u_2) \geq (f, v - u_2), \forall v \in K \quad (**)$$

Posons $v = u_2$ dans l'inéquation (*) et obtenons :

$$\Rightarrow a(u_1, u_2 - u_1) \geq (f, u_2 - u_1)$$

$$\Rightarrow -a(u_1, u_1 - u_2) \geq -(f, u_1 - u_2)$$

$$\Rightarrow a(u_1, u_1 - u_2) \leq (f, u_1 - u_2)$$

Posons $v = u_1$ dans l'inéquation (**) et obtenons :

$$\Rightarrow a(u_2, u_1 - u_2) \geq (f, u_1 - u_2)$$

$$\Rightarrow a(u_2, u_2 - u_1) \leq (f, u_2 - u_1)$$

$$\Rightarrow -a(u_2, u_1 - u_2) \leq -(f, u_1 - u_2)$$

En additionnant les deux inéquations, nous obtenons :

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

En utilisant la coercivité de $a(.,.)$:

$$0 \leq \alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

$$\Rightarrow \|u_1 - u_2\|^2 = 0$$

D'où :

$$u_1 = u_2$$

2. Existence :

L'idée est de transformer le problème (1.10) en un problème de point fixe.
Nous avons :

$$a(u, v - u) = (Au, v - u), \forall v \in K$$

Le problème (1.10) est alors équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ telle que} \\ (Au - f, v - u) \geq 0, \forall v \in K \end{array} \right.$$

Soit $\rho > 0$, alors :

$$\Rightarrow (-\rho(Au - f), v - u) \leq 0, \forall v \in K$$

$$\Rightarrow (u - \rho(Au - f) - u, v - u) \leq 0, \forall v \in K$$

Soit T la projection orthogonale de V sur K .

(1.10) est alors un problème de point fixe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ telle que} \\ u = T(u - \rho(Au - f)), \forall \rho > 0 \end{array} \right.$$

Montrons que T est contractante sur V .

$\forall v, w \in V$, nous avons :

$$\|T(v - \rho(Av - f)) - T(w - \rho(Aw - f))\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|(v - \rho(Av - f)) - (w - \rho(Aw - f))\|^2 \quad \text{car } \|T\| \leq 1 \\
&= \|(v - w) - \rho A(v - w)\|^2 \\
&= \|v - w\|^2 - 2\rho\alpha(v - w, v - w) + \rho^2 \|A(v - w)\|^2 \\
&\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2) \|v - w\|^2 \quad (a \text{ coercive})
\end{aligned}$$

Nous choisissons :

$$\rho < \frac{2\alpha}{M^2}$$

Puisque T est une contraction, il existe donc une solution unique $u \in K$. □

1.1.2 Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues

Définition 1.1.2. Soit X l'ensemble des sous-solutions de l'IV (1.10), c'est à dire l'ensemble des $z \in V$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(z, v) \leq (f, v), \forall v \in V \\ z \leq \psi, v \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Théorème 1.1.2. ([14]) *Sous les hypothèses et notations précédentes, la solution u de l'IV (1.10) est le plus grand élément de X .*

Preuve.

Soit \tilde{v} une solution de l'IV (1.10), nous avons alors :

$$\alpha(u, \tilde{v} - u) \geq (f, \tilde{v} - u)$$

Posons $\tilde{v} = u - v, v \geq 0$:

$$-a(u, v) \geq -(f, v)$$

$$\Rightarrow a(u, v) \leq (f, v)$$

$$\Rightarrow u \in X$$

Nous supposons qu'il existe une sous-solution $z \in X$ telle que $z > u$:

$$a(z, v) \leq (f, v)$$

Nous posons $v = z - u$ et obtenons :

$$a(z, z - u) \leq (f, z - u) \quad (***)$$

u est une solution de (***) donc :

$$a(u, z - u) \geq (f, z - u)$$

Nous avons donc :

$$a(u, z - u) \geq (f, z - u) \geq a(z, z - u)$$

$$\Rightarrow a(u, z - u) \geq a(z, z - u)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \alpha \|z - u\|^2 \leq a(z - u, z - u) \leq 0 \quad (a \text{ coercive})$$

$$\Rightarrow z - u = 0$$

$$\Rightarrow z = u$$

Contradiction avec $z > u$

□

1.1.3 Propriété de monotonie de la solution continue

Notons la solution u du problème (1.10) par $\partial(f, \psi)$.
Soient f et \tilde{f} deux seconds membres, ψ et $\tilde{\psi}$ deux obstacles.

Proposition 1.1.3. *Sous les notations et hypothèses précédentes, la solution du problème (1.10) est croissante par rapport au second membre f et à l'obstacle ψ :*

$$\text{Si } f \leq \tilde{f} \text{ et } \psi \leq \tilde{\psi} \text{ alors } \partial(f, \psi) \leq \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}) \quad (1.13)$$

Preuve.

Soit $f \leq \tilde{f}$ et $\psi \leq \tilde{\psi}$

Posons $u = \partial(f, \psi)$ et $\tilde{u} = \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi})$, nous avons alors :

$$a(u, v) \leq (f, v), \forall u \in K, v \geq 0$$

$$a(u, v) \leq (f, v) \leq (\tilde{f}, v), \forall u \in K, v \geq 0$$

$$a(u, v) \leq (\tilde{f}, v), \forall u \in K, v \geq 0$$

Donc u est une sous-solution de l'IV de solution $w = \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi})$.

Comme w est la plus grande des sous-solutions, nous avons :

$$u = \partial(f, \psi) \leq w = \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi})$$

Nous savons que :

$$\partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}) \leq \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi})$$

Alors :

$$u = \partial(f, \psi) \leq \tilde{u} = \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi})$$

D'où :

$$\partial(f, \psi) \leq \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi})$$

□

Considérons maintenant l'application :

$$\partial : L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$$

$$(f, \psi) \rightarrow \partial(f, \psi) = u$$

Où u est la solution de l'IV (1.10).

Proposition 1.1.4. *Soit c une constante positive, alors :*

$$\partial(f + a_0c, \psi + c) = \partial(f, \psi) + c \quad (1.14)$$

Preuve.

Nous posons $\tilde{u} = \partial(f + a_0c, \psi + c)$ et $u = \partial(f, \psi)$

Nous savons que toute solution de (1.10) est une sous-solution donc :

$$\begin{cases} a(u, v) \leq (f, v), \forall v \in V \\ u \leq \psi, v \geq 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} a(u + c, v) \leq (f + a_0c, v), \forall v \in V \\ u + c \leq \psi + c, v \geq 0 \end{cases}$$

$u + c$ est une sous-solution de l'IV (1.10) de second membre $f + a_0c$ et d'obstacle $\psi + c$
Comme la solution est la plus grande des sous-solutions, nous avons :

$$u + c \leq \tilde{u} \Rightarrow \partial(f, \psi) + c \leq \partial(f + a_0c, \psi + c) \quad (1)$$

Toute solution est une sous-solution :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a(\tilde{u}, v) \leq (f + a_0c, v), \forall v \in V \\ \tilde{u} \leq \psi + c, v \geq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} a(\tilde{u}, v) \leq (f, v) + (c, v), \forall v \in V \\ \tilde{u} - c \leq \psi, v \geq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} a(\tilde{u}, v) - a(c, v) \leq (f, v), \forall v \in V \\ \tilde{u} - c \leq \psi, v \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(\tilde{u} - c, v) \leq (f, v), \forall v \in V \\ \tilde{u} - c \leq \psi, v \geq 0 \end{cases}$$

$\tilde{u} - c$ est une sous-solution de l'IV (1.10) de second membre f et d'obstacle ψ .
Vu que la solution est la plus grande des sous-solutions, nous avons :

$$\tilde{u} - c \leq u \Rightarrow \partial(f, \psi) + c \geq \partial(f + a_0 c, \psi + c) \quad (2)$$

De (1) et (2), l'égalité (1.14) est vérifiée. □

1.1.4 Propriété de lipschitzianité de la solution continue

Proposition 1.1.5. *Sous les hypothèses et notations précédentes, nous avons :*

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^\infty(\Omega)} + c a_0 \|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (1.15)$$

Où c est une constante indépendante du second membre et de la condition au bord telle que :

$$c a_0(x) \geq 1$$

Preuve. Posons :

$$\phi = \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^\infty(\Omega)} + c a_0 \|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Alors :

$$\tilde{\psi} \leq \psi + \Phi$$

Et :

$$\tilde{f} \leq f + \Phi$$

D'après la propriété de monotonie de la solution et en utilisant l'égalité (1.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}) &\leq \partial(f, \psi) \\ &\leq \partial(f + a_0 \Phi, \psi + \Phi) \end{aligned}$$

$$= \partial(f, \psi) + \Phi$$

Donc :

$$\partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}) - \partial(f, \psi) \leq \Phi$$

$$|\partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}) - \partial(f, \psi)| \leq \Phi$$

$$\text{Sup} |\partial(\tilde{f}, \tilde{\psi}) - \partial(f, \psi)| \leq \Phi$$

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Phi$$

□

1.2 Inéquation variationnelle discrète

Nous allons maintenant introduire le problème discret et effectuer une étude similaire à celle entreprise précédemment pour le problème continu en donnant les propriétés qualitatives de la solution discrète. Pour insister sur la symétrie de l'étude, nous suivrons exactement la même démarche qu'au cas continu. Les démonstrations qui ne sont pas données dans cette partie sont exactement les mêmes que dans le problème continu.

Considérons un espace d'éléments finis P_1 construit à partir de polynômes de degré 1. Nous établissons sur Ω une triangulation régulière quasi-uniforme et soit τ^h l'ensemble de tous ces éléments composé d'un nombre fini de triangles non dégénérés telle que :

$$\Omega = \cup_{T_h \in \tau^h} T_h$$

$h > 0$ est le pas de discrétisation.

Notons par V_h l'espace d'éléments finis défini par :

$$V_h = \left\{ v_h \in C(\Omega) \cap V / v_h|_T \in P_1, \forall T \in \tau^h \right\} \quad (1.16)$$

Remarque 1.2.1. *La construction d'espaces d'éléments finis à partir de polynômes de degré supérieur à 1 n'a pas été prise en compte en raison de la propriété de régularité de la solution qui ne semble pas être vérifiée.*

Nous supposons que les matrices de discrétisation sont des M-matrices.

Soit M_s , $s = 1, \dots, m(h)$ les sommets de la triangulation τ^h qui n'appartiennent pas à $\partial\Omega$.

Notons par $\{\varphi_s\}$ les fonctions de base usuelles de V_h définies par :

$$\varphi_s(M_l) = \delta_{sl} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = l \\ 0 & \text{si } s \neq l \end{cases}$$

Soit r_h l'opérateur d'interpolation défini par :

$$r_h v(x) = \sum_{s=1}^{m(h)} v(M_s) \varphi_s(x), \quad v \in C(\Omega) \cap V$$

Définition 1.2.1. (M-matrice) Une matrice inversible $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une M-matrice si les $a_{sl} \leq 0$ pour $s \neq l$ et si tous les éléments de son inverse sont positifs ou nuls.

Définition 1.2.2. (Principe du maximum discret) Soit A une M-matrice, si $u, v \in V$ telles que : $Au \geq Av$ dans Ω alors :

$$u \geq v \text{ dans } \overline{\Omega}$$

Considérons maintenant le problème discret associé au problème continu (1.10) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ solution de} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h), \forall v_h \in K_h \\ u_h \in K_h \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Où :

$$K_h = \{v_h \in V_h / v_h \leq r_h \psi\} \quad (1.18)$$

1.2.1 Existence et unicité de la solution discrète

Théorème 1.2.1. *([22, 14]) Sous les notations et hypothèses précédentes, le problème (1.17) admet une solution unique.*

1.2.2 Caractérisation de la solution discrète comme enveloppe des sous-solutions discrètes

Définition 1.2.3. Soit X_h l'ensemble des sous-solutions de l'IV (1.17), c'est-à-dire l'ensemble des $z_h \in V_h$ tel que :

$$\begin{cases} a(z_h, \varphi_s) \leq (f, \varphi_s), \forall s = 1, \dots, m(h) \\ z_h \leq r_h \psi \end{cases} \quad (1.19)$$

Théorème 1.2.2. ([14]) *Sous les notations et hypothèses précédentes, la solution u_h de l'IV (1.17) est le plus grand élément de X_h .*

1.2.3 Propriété de monotonie de la solution discrète

Notons par $u_h = \partial_h(f, r_h \psi)$ la solution du problème discret (1.17).

Proposition 1.2.3. *Sous les notations et hypothèses précédentes, la solution de l'IV (1.17) est croissante par rapport au second membre f et à l'obstacle $r_h \psi$:*

$$\text{Si } f \leq \tilde{f} \text{ et } \psi \leq \tilde{\psi} \text{ alors } \partial_h(f, r_h \psi) \leq \partial_h(\tilde{f}, r_h \tilde{\psi}) \quad (1.20)$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle donnée dans la proposition (1.1.3). \square

Par analogie au cas continu, nous considérons l'application :

$$\begin{aligned} \partial_h : L^\infty(\Omega) &\rightarrow L^\infty(\Omega) \\ (f, r_h \psi) &\rightarrow \partial_h(f, r_h \psi) = u_h \end{aligned}$$

Où u_h est la solution discrète de (1.17).

Proposition 1.2.4. *Soit c une constante positive, alors :*

$$\partial_h(f + a_0 c, r_h(\psi + c)) = \partial_h(f, r_h \psi) + c \quad (1.21)$$

Preuve. La preuve est similaire à celle donnée dans la proposition (1.1.4). \square

1.2.4 Propriété de lipschitzianité de la solution discrète

Proposition 1.2.5. *sous les notations et hypothèses précédentes, nous avons :*

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|r_h \psi - r_h \tilde{\psi}\|_{L^\infty(\Omega)} + ca_0 \|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (1.22)$$

Preuve. La démonstration est analogue à celle donnée dans la proposition (1.1.5). \square

1.2.5 Régularité de la solution discrète

La régularité de la solution discrète se démontre par le théorème suivant :

Théorème 1.2.6. ([13]) *Il existe une constante C indépendante de h telle que :*

$$|a(u_h, \varphi_s)| \leq C \|\varphi_s\|_{L^1(\Omega)}, \forall s = 1, \dots, m(h) \quad (1.23)$$

1.2.6 Estimation de l'erreur en norme L^∞

Théorème 1.2.7. ([14]) *Sous les conditions (1.1) à (1.9) et le principe du maximum discret, il existe une constante C indépendante de h telle que :*

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 |\log h|^2 \quad (1.24)$$

Preuve.

1- Construction d'une fonction discrète α_h proche de u qui vérifie :

$$\alpha_h \leq u \text{ telle que } \|\alpha_h - u\| \leq Ch^2 |\log h|^2$$

2- Construction d'une fonction discrète β_h proche de u_h qui vérifie :

$$u_h \leq \beta_h \text{ telle que : } \|\beta_h - u_h\| \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Et nous obtenons enfin :

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u - \alpha_h\|_{L^\infty(\Omega)} + 2 \|\beta_h - u_h\|_{L^\infty(\Omega)}$$

$$\leq Ch^2 |\log h|^2$$

□

1.3 Inéquation quasi-variationnelle continue non coercive

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude numérique de l'inéquation quasi-variationnelle elliptique dont le second membre et l'obstacle dépendent linéairement de la solution (ici a est non coercive) en utilisant au niveau de l'approximation une méthode qui repose sur une combinaison d'éléments finis et de la notion de sous-solution [16, 11]. Cette méthode caractérise la solution continue (resp. la solution discrète) comme limite supérieure de l'ensemble des sous-solutions continues (resp. l'ensemble des sous-solutions discrètes).

Nous cherchons une fonction u satisfaisant :

$$\begin{cases} Au - f \leq 0, u - Mu \leq 0 \text{ dans } \Omega \\ (Au - f)(u - Mu) = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (1.25)$$

Bien entendu, la structure de (1.25) est analogue à celle du problème de l'obstacle classique où la fonction obstacle est remplacée par une fonction implicite dépendant de la solution du problème.

"A" représente un opérateur différentiel elliptique du second ordre sur un domaine lisse borné de \mathbb{R}^N et M est un opérateur défini par :

$$\begin{aligned} M : L^\infty(\Omega) &\rightarrow L^\infty(\Omega) \\ u &\rightarrow Mu \end{aligned} \quad (1.26)$$

L'application M possède les propriétés suivantes :

* **La concavité**

* **La lipschitziannité :**

$$\|Mu - Mv\| \leq \|u - v\|, \forall u, v \in V \quad (1.27)$$

* **La monotonie :**

$$Mu \leq Mv, \forall u \leq v \quad (1.28)$$

Et :

$$M(u + c) = Mu + c \quad c > 0 \quad (1.29)$$

" Mu " est appelée obstacle du contrôle impulsif ou encore la fonction coût.

Soit $a(.,.)$ la forme bilinéaire non coercive associée à l'opérateur A .

Alors le problème (1.25) est reformulé faiblement comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K(u) \text{ solution de} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \forall v \in K(u) \end{cases} \quad (1.30)$$

Où $K(u)$ est un ensemble convexe fermé non vide de V défini par :

$$K(u) = \{v \in V / 0 \leq v \leq Mu \text{ dans } \Omega\} \quad (1.31)$$

Remarque 1.3.1. Dans le problème (1.30), la condition $u \geq 0$ est évidente car elle provient de la théorie du contrôle impulsif [2].

Dans l'étude des problèmes à opérateurs elliptiques, nous supposons généralement que la forme bilinéaire " a " définie dans (1.1) est fortement coercive, c'est-à-dire vérifiant l'hypothèse (1.6). Pourtant, dans la modélisation des problèmes de contrôle, le caractère déterministe du processus qui est représenté par les coefficients " b_k " peut être prépondérant. Il est alors intéressant d'affaiblir l'hypothèse de coercivité forte et de supposer seulement l'existence d'un $\lambda > 0$ assez grand tel que :

$$b(u, v) = a(u, v) + \lambda(u, v) \quad (1.32)$$

La forme bilinéaire $b(u, v)$ vérifie alors l'hypothèse de coercivité forte :

$$b(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \forall v \in H^1(\Omega); \alpha > 0 \quad (1.33)$$

Rappelons, pour des raisons de complétude, la construction d'un λ qui permet de vérifier (1.33).

Soit :

$$b = \sup_{k,x \in \Omega} |b_k(x)| \quad (1.34)$$

$$b(v, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^N b_k(x) \frac{\partial v}{\partial x_k} v + a_0(x) v^2 + \lambda v^2 \right) dx$$

En utilisant la condition d'ellipticité (1.3), la condition (1.4), l'inégalité de Holder ainsi que (1.34) nous obtenons :

$$\begin{aligned} b(v, v) &\geq \alpha \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 dx - \frac{b\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 dx - \frac{b}{2\varepsilon} \int_{\Omega} v^2 dx + (\alpha_0 + \lambda) \int_{\Omega} v^2 dx \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 dx - b\sqrt{\varepsilon} \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\int_{\Omega} v^2 \right)^{\frac{1}{2}} + (\lambda + \alpha_0) \int_{\Omega} v^2 dx \\ &\geq \left(\alpha - \varepsilon \frac{b}{2} \right) \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 dx + \left(\lambda + \alpha_0 - \frac{b}{2\varepsilon} \right) \int_{\Omega} v^2 dx \end{aligned}$$

Nous choisissons :

$$\varepsilon < \frac{2\alpha}{b} \text{ et } \lambda > \frac{b}{2\varepsilon} - \alpha_0 \quad (b \neq 0)$$

ce qui entraîne la coercivité de $b(.,.)$.

Par une transformation immédiate, u est également solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K(u) \text{ solution de} \\ b(u, v - u) \geq (f + \lambda u, v - u), \forall v \in K(u) \end{cases} \quad (1.35)$$

L'introduction d'une application de point fixe [2] associée au problème (1.30) permet d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution.

1.3.1 Application continue du point fixe

Soit l'application du point fixe :

$$\begin{aligned} J : L_+^\infty(\Omega) &\rightarrow L_+^\infty(\Omega) \\ w &\rightarrow J(w) = \xi \end{aligned} \quad (1.36)$$

Où ξ est la solution de l'inéquation variationnelle coercive suivante :

$$\begin{cases} b(J(w), v - J(w)) \geq (f + \lambda w, v - J(w)), \forall v \in V \\ J(w) \leq Mw, \quad v \leq Mw \end{cases} \quad (1.37)$$

Ou encore :

$$\begin{cases} b(\xi, v - \xi) \geq (f + \lambda w, v - \xi), \forall v \in V \\ \xi \leq Mw, \quad v \leq Mw \end{cases} \quad (1.38)$$

Et :

$$L_+^\infty(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega) / v \geq 0\}$$

Donnons maintenant quelques propriétés de l'application J .

Soit :

$$H = \{w \in L_+^\infty(\Omega) / 0 \leq w \leq \bar{u}_0\}$$

Lemme 1.3.1. ([2]) *L'application J est monotone et concave de H dans lui même.*

Preuve.

* Prouvons la monotonie de l'opérateur J que nous utiliserons ultérieurement.

Nous avons $J(w) = \xi$ et considérons l'inéquation variationnelle (1.38).

Démontrons que :

Si $w_1 \leq w_2$ alors $J(w_1) \leq J(w_2)$

$\xi_1 = J(w_1)$ est une solution de l'IV (1.38) :

$$\begin{cases} b(\xi_1, v - \xi_1) \geq (f + \lambda w_1, v - \xi_1), \forall v \in V \\ \xi_1 \leq Mw_1, \quad v \leq Mw_1 \end{cases}$$

Nous posons $v = \xi_1 - \tilde{v}$, $\tilde{v} \geq 0$ et obtenons :

$$\begin{cases} b(\xi_1, \tilde{v}) \leq (f + \lambda w_1, \tilde{v}) \leq (f + \lambda w_2, \tilde{v}) \\ \xi_1 \leq Mw_2, \quad \tilde{v} \geq 0 \end{cases}$$

ξ_1 est une sous-solution de l'IV de second membre $f + \lambda w_2$ et d'obstacle Mw_2 . Comme la solution est la plus grande des sous-solution alors, nous avons :

$$\xi_1 \leq \xi_2 \Rightarrow J(w_1) \leq J(w_2)$$

□

Proposition 1.3.2. ([2]) *J est contractante dans $L^\infty(\Omega)$ de constante de contraction $\frac{\lambda}{\lambda+\beta}$. Il existe donc un unique point fixe qui coïncide avec la solution u de l'IV (1.30).*

1.3.2 Existence et unicité de la solution continue

Soit $\bar{u}_0 \in V$ la solution de l'équation :

$$a(\bar{u}_0, v) = (f, v), \quad \forall v \in V \tag{1.39}$$

1.3.2.1 Algorithme continu de Bensoussan-Lions

Partant de \bar{u}_0 et $\underline{u}_0 = 0$ et définissons les suites :

* Décroissante : $\bar{u}_n = J(\bar{u}_{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$

* Croissante : $\underline{u}_n = J(\underline{u}_{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Où $\bar{u}_n \in V$ est la solution de l'inéquation variationnelle :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_n, v - \bar{u}_n) \geq (f + \lambda \bar{u}_{n-1}, v - \bar{u}_n), \forall v \in V \\ \bar{u}_n \leq M \bar{u}_{n-1}, \quad v \leq M \bar{u}_{n-1} \end{cases} \quad (1.40)$$

Et $\underline{u}_n \in V$ est la solution de l'inéquation variationnelle :

$$\begin{cases} b(\underline{u}_n, v - \underline{u}_n) \geq (f + \lambda \underline{u}_{n-1}, v - \underline{u}_n), \forall v \in V \\ \underline{u}_n \leq M \underline{u}_{n-1}, \quad v \leq M \underline{u}_{n-1} \end{cases} \quad (1.41)$$

Nous donnons maintenant un théorème de convergence des suites de l'algorithme de Bensoussan-Lions.

Théorème 1.3.3. *Les suites $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\underline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent en décroissant et en croissant vers l'unique solution du problème (1.30).*

Preuve.

Nous procédons par récurrence pour démontrer que :

* La suite $(\underline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante :

Supposons que \underline{u}_1 est une solution de l'IV (1.41) :

$$b(\underline{u}_1, v - \underline{u}_1) \geq (f + \lambda \underline{u}_0, v - \underline{u}_1) \text{ et } \underline{u}_n = 0$$

Nous savons que :

$$f \geq 0 \text{ donc } \underline{u}_1 \geq 0$$

Donc :

$$\underline{u}_1 \geq \underline{u}_0 = 0$$

$$\Rightarrow J(\underline{u}_1) \geq J(\underline{u}_0) \quad (\text{car } J \text{ est monotone})$$

$$\Rightarrow \underline{u}_2 \geq \underline{u}_1$$

Nous supposons qu'elle est vraie pour $n - 1$ et nous la démontrons pour n :

$$\begin{aligned}
& \underline{u}_{n-1} \geq \underline{u}_{n-2} \\
\Rightarrow J(\underline{u}_{n-1}) & \geq J(\underline{u}_{n-2}) \quad (\text{car } J \text{ est monotone}) \\
& \Rightarrow \underline{u}_n \geq \underline{u}_{n-1} \\
& \Rightarrow (\underline{u}_n) \text{ est croissante } \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

* La suite $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante :

\bar{u}_0 est solution de l'équation : $a(\bar{u}_0, v) = (f, v)$

Donc :

$$\begin{aligned}
a(\bar{u}_0, v) + \int_{\Omega} \lambda \bar{u}_0 v \, dx &= (f, v) + \int_{\Omega} \lambda \bar{u}_0 v \, dx \\
\Rightarrow b(\bar{u}_0, v) &= (f + \lambda \bar{u}_0, v)
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Supposons que \bar{u}_1 est une solution de l'IV (1.40) :

$$b(\bar{u}_1, v - \bar{u}_1) \geq (f + \lambda \bar{u}_0, v - \bar{u}_1) \tag{1.43}$$

Nous posons dans (1.43) $v = \bar{u}_1 - (\bar{u}_1 - \bar{u}_0)^+$ et obtenons :

$$\begin{aligned}
b(\bar{u}_1, \bar{u}_1 - (\bar{u}_1 - \bar{u}_0)^+ - \bar{u}_1) &\geq (f + \lambda \bar{u}_0, \bar{u}_1 - (\bar{u}_1 - \bar{u}_0)^+ - \bar{u}_1) \\
\Rightarrow b(\bar{u}_1, -(\bar{u}_1 - \bar{u}_0)^+) &\geq (f + \lambda \bar{u}_0, -(\bar{u}_1 - \bar{u}_0)^+)
\end{aligned}$$

Nous utilisons (1.24) avec $v = (\bar{u}_1 - \bar{u}_0)^+$ et obtenons :

$$\begin{aligned}
b(\bar{u}_1, (\bar{u}_1 - \bar{u}_0)^+) &\leq b(\bar{u}_0, (\bar{u}_1 - \bar{u}_0)^+) \\
\Rightarrow b(\bar{u}_1 - \bar{u}_0, (\bar{u}_1 - \bar{u}_0)^+) &\leq 0, \quad (\bar{u}_1 - \bar{u}_0)^+ > 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 - \bar{u}_0 \leq 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 \leq \bar{u}_0$$

$$\Rightarrow J(\bar{u}_1) \leq J(\bar{u}_0) \quad (\text{car } J \text{ est monotone})$$

$$\Rightarrow \bar{u}_2 \leq \bar{u}_1$$

Nous supposons qu'elle est vraie pour $n - 1$ et nous la démontrons pour n :

$$\bar{u}_{n-1} \leq \bar{u}_{n-2}$$

$$\Rightarrow J(\bar{u}_{n-1}) \leq J(\bar{u}_{n-2}) \quad (\text{car } J \text{ est monotone})$$

$$\Rightarrow \bar{u}_n \leq \bar{u}_{n-1}$$

$$\Rightarrow (\bar{u}_n) \text{ est décroissante } \forall n \in \mathbb{N}$$

* Montrons maintenant que $\underline{u}_n \leq \bar{u}_n$

\bar{u}_0 est solution de l'équation :

$$a(\bar{u}_0, v) = (f, v), \quad f \geq 0$$

Donc :

$$\bar{u}_0 \geq 0 = \underline{u}_0 \Rightarrow \bar{u}_0 \geq \underline{u}_0$$

$$\Rightarrow J(\bar{u}_0) \geq J(\underline{u}_0) \quad (\text{car } J \text{ est monotone})$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 \geq \underline{u}_1$$

Nous supposons qu'elle est vraie pour $n - 1$ et nous la démontrons pour n :

$$\bar{u}_{n-1} \geq \underline{u}_{n-1}$$

$$\Rightarrow J(\bar{u}_{n-1}) \geq J(\underline{u}_{n-1})$$

$$\Rightarrow \bar{u}_n \geq \underline{u}_n$$

* **Conclusion :**

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u}_n \in H^1(\Omega) \Rightarrow \bar{u}_n \in L^2(\Omega) \\ \underline{u}_n \in H^1(\Omega) \Rightarrow \underline{u}_n \in L^2(\Omega) \\ L^2(\Omega) \text{ est complet} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{u}_n \text{ et } \underline{u}_n \text{ convergent vers la meme limite}$$

Le théorème de Lax-Miligram assure l'existence et l'unicité de la solution u , donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{u}_n = u$$

□

1.3.3 Régularité de la solution continue

Théorème 1.3.4. ([2]) *La solution u du problème (1.30) satisfait la propriété de régularité :*

$$u \in W^{2,p}(\Omega), \quad 2 \leq p < +\infty$$

1.3.4 Monotonie de la solution continue

Soit $u = \partial(f)$ (resp. $\tilde{u} = \partial(\tilde{f})$) la solution de (1.30) avec le second membre f (resp. \tilde{f}).

Nous avons donc la proposition suivante :

Proposition 1.3.5. *La solution du problème (1.30) est croissante par rapport au second membre f :*

$$\text{Si } \tilde{f} \leq f \text{ alors } \partial(\tilde{f}) \leq \partial(f) \tag{1.44}$$

Preuve.

Nous savons que :

$\bar{u}_0(f)$ est une solution de l'équation :

$$a(\bar{u}_0, v) = (f, v)$$

Et $\tilde{u}_0(\tilde{f})$ est une solution de l'équation :

$$a(\tilde{u}_0, v) = (\tilde{f}, v)$$

Nous avons :

$$f \geq \tilde{f} \Rightarrow \bar{u}_0 \geq \tilde{u}_0$$

Posons $\bar{u}_1 = \partial(f)$ et $\tilde{u}_1 = \partial(\tilde{f})$.

Nous supposons que \tilde{u}_1 est une solution de l'IV (1.40) et comme toute solution est une sous-solution alors nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} b(\tilde{u}_1, v) \leq (\tilde{f} + \lambda \tilde{u}_0, v) \leq (f + \lambda \bar{u}_0, v), \quad \forall v \in V \\ \tilde{u}_1 \leq M\tilde{u}_0 \leq M\bar{u}_0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b(\tilde{u}_1, v) \leq (f + \lambda \bar{u}_0, v), \quad \forall v \in V \\ \tilde{u}_1 \leq M\bar{u}_0 \end{array} \right.$$

\tilde{u}_1 est une sous-solution de l'IV de second membre $f + \lambda \bar{u}_0$ et d'obstacle $M\bar{u}_0$ et comme la solution est la plus grande des sous-solutions alors nous avons :

$$\tilde{u}_1 \leq \bar{u}_1$$

$$\Rightarrow \partial(\tilde{f}) \leq \partial(f)$$

□

1.3.5 Caractérisation de la solution continue comme enveloppe des sous-solutions continues

Définition 1.3.1. Soit X l'ensemble des sous-solutions de l'IQV (1.30), c'est-à-dire l'ensemble des $w \in V$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} b(w, v) \leq (f + \lambda w, v), \quad \forall v \in V \\ w \leq Mw, \quad v \leq Mw \end{array} \right. \quad (1.45)$$

Théorème 1.3.6. *La solution u de l'IQV (1.30) est le plus grand élément de X .*

Preuve.

Montrons que u est le plus grand élément de X .

u est solution de l'IQV :

$$\begin{cases} b(u, v - u) \geq (f + \lambda u, v - u), \quad \forall v \in V \\ u \leq Mu, \quad v \leq Mu, \quad u \geq 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

Nous posons $v = u - \tilde{v}$, $\tilde{v} \geq 0$ et obtenons :

$$\begin{cases} b(u, \tilde{v}) \leq (f + \lambda u, \tilde{v}) \\ u \leq Mu, \quad \tilde{v} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u \in X \quad (u \text{ est une sous-solution})$$

Nous supposons maintenant que $w \in X$ et montrons que u est le plus grand élément de X .

Posons $J(w) = \sigma(f + \lambda w)$

w est une sous-solution de l'IQV vérifiant (1.45).

$\sigma(f + \lambda w)$ est une solution de l'IV (1.46) :

$$b(\sigma(f + \lambda w), v - \sigma(f + \lambda w)) \geq (f + \lambda w, v - \sigma(f + \lambda w)) \quad (1.47)$$

Nous posons dans (1.47) $v = \sigma(f + \lambda w) - \tilde{v}$, $\tilde{v} \geq 0$ et obtenons :

$$b(\sigma(f + \lambda w), \tilde{v}) \leq (f + \lambda w, \tilde{v})$$

w est une sous-solution de l'IV de second membre $f + \lambda w$ et comme la solution est la plus grande des sous-solutions alors :

$$w \leq \sigma(f + \lambda w) = J(w)$$

$$\Rightarrow f + \lambda w \leq f + \lambda J(w)$$

$$\Rightarrow \sigma(f + \lambda w) = J(w) \leq \sigma(f + \lambda J(w)) = J(J(w))$$

Donc :

$$J(w) \leq J^2(w) \leq \dots \leq J^n(w)$$

Nous savons que w est une sous-solution et \bar{u}_0 est une sur-solution donc :

$$w \leq \bar{u}_0$$

$$\Rightarrow J^n(w) \leq J^n(\bar{u}_0) \quad (\text{car } J \text{ est monotone})$$

Nous avons aussi :

$$\bar{u}_n = J(\bar{u}_{n-1}) = J^2(\bar{u}_{n-2}) = \dots = J^n(\bar{u}_0)$$

Donc :

$$J^n(w) \leq J^n(\bar{u}_0) = \bar{u}_n \leq \bar{u}_{n-1} \leq \dots \leq \bar{u}_0 \quad (\text{car la suite est décroissante})$$

Nous déduisons alors que :

$$w \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J^n(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} J^n(\bar{u}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n = u$$

$$\Rightarrow w \leq u$$

D'où u est le plus grand élément de X . □

1.3.6 Propriété de lipschitziannité de la solution continue

Nous gardons les notations de la proposition (1.3.5), c'est-à-dire $u = \partial(f)$ et $\tilde{u} = \partial(\tilde{f})$.

Proposition 1.3.7. *Sous les notations et hypothèses précédentes nous avons :*

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta} \|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (1.48)$$

Preuve.

Soit $\Phi = \frac{1}{\beta} \|f - \tilde{f}\|_\infty$

Nous voyons clairement que :

$$\tilde{f} \leq f + \|f - \tilde{f}\|_\infty \leq f + \frac{a_0(x)}{\beta} \|f - \tilde{f}\|_\infty = f + a_0 \Phi$$

D'après la monotonie nous avons :

$$\partial(\tilde{f}) \leq \partial(f + a_0 \Phi) \leq \partial(f) + \Phi$$

$$\Rightarrow \partial(\tilde{f}) - \partial(f) \leq \Phi$$

Comme les rôles de f et \tilde{f} sont symétriques, nous obtenons également :

$$\partial(f) - \partial(\tilde{f}) \leq \Phi$$

D'où l'inégalité (1.48). □

1.4 Inéquation quasi-variationnelle discrète non coercive

Les démonstrations des propositions et théorèmes sont similaires à celles données dans le cas continu.

Nous gardons la même triangulation introduite dans la partie IV discrète.

Soit :

$$K(u_h) = \left\{ v_h \in V_h / 0 \leq v_h \leq r_h M u_h \text{ dans } \tau^h \right\} \quad (1.49)$$

L'inéquation quasi-variationnelle discrète consiste à résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in K(u_h) \text{ solution de} \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h), \forall v \in K(u_h) \end{array} \right. \quad (1.50)$$

Par une transformation comme dans le cas continu, u_h est également solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in K(u_h) \text{ solution de} \\ b(u_h, v_h - u_h) \geq (f + \lambda u_h, v_h - u_h), \forall v \in K(u_h) \end{array} \right. \quad (1.51)$$

1.4.1 Application discrète du point fixe

Nous pouvons associer au problème (1.50) une application discrète du point fixe définies par :

$$\begin{aligned} J_h : L_+^\infty(\Omega) &\rightarrow V_h \\ w &\rightarrow J_h(w) = \xi_h \end{aligned} \quad (1.52)$$

Où $\xi_h \in V_h$ est la solution discrète de l'IV suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} b(\xi_h, v_h - \xi_h) \geq (f + \lambda w, v_h - \xi_h), \forall v_h \in V_h \\ \xi_h \leq r_h M w, \quad v_h \leq r_h M w \end{array} \right. \quad (1.53)$$

L'application J_h possède des propriétés analogues à celles de l'application J .

Soit :

$$H_h = \{w \in L_+^\infty(\Omega) / 0 \leq w \leq \bar{u}_{0h}\}$$

Lemme 1.4.1. ([2]) *L'application J_h est monotone et concave de H_h dans lui même.*

Proposition 1.4.2. ([2]) *Sous les notations et hypothèses précédentes, l'application J_h est contractante, de constante de contraction $\frac{\lambda}{\lambda+\beta}$. Il existe donc un unique point fixe qui coïncide avec la solution discrète u_h de l'IV (1.50).*

1.4.2 Existence et unicité de la solution discrète

Soit $\bar{u}_{0h} \in V_h$ la solution de l'équation :

$$a(\bar{u}_{0h}, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (1.54)$$

1.4.2.1 Algorithme discret de Bensoussan-Lions

Partant de \bar{u}_{0h} et $\underline{u}_{0h} = 0$ et définissons les suites :

* Décroissante : $\bar{u}_{nh} = J_h(\bar{u}_{n-1h})$, $\forall n \in \mathbb{N}$

* Croissante : $\underline{u}_{nh} = J_h(\underline{u}_{n-1h})$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Où $\bar{u}_{nh} \in V_h$ est la solution de l'inéquation variationnelle :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_{nh}, v_h - \bar{u}_{nh}) \geq (f + \lambda \bar{u}_{n-1h}, v_h - \bar{u}_{nh}), \forall v_h \in V_h \\ \bar{u}_{nh} \leq r_h M \bar{u}_{n-1h}, \quad v_h \leq r_h M \bar{u}_{n-1h} \end{cases} \quad (1.55)$$

Et $\underline{u}_{nh} \in V_h$ est la solution de l'inéquation variationnelle :

$$\begin{cases} b(\underline{u}_{nh}, v_h - \underline{u}_{nh}) \geq (f + \lambda \underline{u}_{n-1h}, v_h - \underline{u}_{nh}), \forall v_h \in V_h \\ \underline{u}_{nh} \leq r_h M \underline{u}_{n-1h}, \quad v_h \leq r_h M \underline{u}_{n-1h} \end{cases} \quad (1.56)$$

1.4.2.2 Hypothèse du principe du maximum discret ([12])

Nous posons B la matrice définie par :

$$B_{sl} = a(\varphi_s, \varphi_l) + \int_{\Omega} \lambda \varphi_s \varphi_l dx \quad (1.57)$$

Nous supposons que B est une M-matrice.

Nous donnons maintenant un théorème de convergence des suites discrètes de l'algorithme de Bensoussan-Lions.

Théorème 1.4.3. ([2]) *Les suites $(\bar{u}_{nh})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\underline{u}_{nh})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent en décroissant et en croissant vers l'unique solution du problème (1.50).*

1.4.3 Monotonie de la solution discrète

Soit $u_h = \partial_h(f)$ (resp. $\tilde{u}_h = \partial_h(\tilde{f})$) la solution de (1.50) avec second membre f (resp. \tilde{f}).

Nous avons donc la proposition suivante :

Proposition 1.4.4. ([2]) *Sous le principe du maximum discret, nous avons :*

$$\text{Si } \tilde{f} \leq f \text{ alors } \partial_h(\tilde{f}) \leq \partial_h(f) \quad (1.58)$$

1.4.4 Caractérisation de la solution discrète comme enveloppe des sous-solutions discrètes

Définition 1.4.1. Soit X_h l'ensemble des sous-solutions discrètes de l'IQV (1.50), c'est-à-dire l'ensemble des $w_h \in V_h$ tel que :

$$\begin{cases} b(w_h, \varphi_s) \leq (f + \lambda w_h, \varphi_s), \quad \forall \varphi_s, s = 1, 2, \dots, m(h) \\ w_h \leq r_h M w_h \end{cases} \quad (1.59)$$

Théorème 1.4.5. *Sous le principe du maximum discret, la solution de l'IQV (1.50) est le plus grand élément de X_h .*

1.4.5 Propriété de lipschitziannité de la solution discrète

En gardant les mêmes notations que dans le cas continu, nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.4.6. ([2])

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta} \|f - \tilde{f}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (1.60)$$

1.4.6 Etude de l'approximation

Cette partie est consacrée à démontrer que la méthode proposée conduit à une approximation optimale dans $L^\infty(\Omega)$. En s'appuyant sur les propriétés des solutions continue et discrète des IQV (1.30) et (1.50), nous introduisons les deux problèmes auxiliaires suivants :

1.4.6.1 IQV continue coercive

Soit $\bar{u}^{(h)} \in V$ la solution du problème continu suivant :

$$\begin{cases} b(\bar{u}^{(h)}, v - \bar{u}^{(h)}) \geq (f + \lambda u_h, v - \bar{u}^{(h)}), \quad \forall v \in V \\ \bar{u}^{(h)} \leq M \bar{u}^{(h)}, \quad v \leq M \bar{u}^{(h)} \end{cases} \quad (1.61)$$

u_h étant la solution de l'IQV discrète (1.50).

1.4.6.2 IQV discrète coercive

Soit $\bar{u}_h \in V_h$ la solution du problème discret suivant :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_h, v - \bar{u}_h) \geq (f + \lambda u, v - \bar{u}_h), \quad \forall v \in V_h \\ \bar{u}_h \leq r_h M \bar{u}_h, \quad v \leq r_h M \bar{u}_h \end{cases} \quad (1.62)$$

u étant la solution de l'IQV continue (1.30).

1.4.6.3 Estimation de l'erreur des problèmes auxiliaires

Lemme 1.4.7. ([15]) *Il existe une constante C indépendante de h telle que :*

$$\|u - \bar{u}_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2 \quad (1.63)$$

$$\left\| u_h - \bar{u}^{(h)} \right\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2 \quad (1.64)$$

Théorème 1.4.8. *Il existe une constante C indépendante de h telle que :*

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2 \quad (1.65)$$

Preuve. La preuve de ce théorème se réalisera en trois étapes.

* **Étape 1 :** Construction d'une fonction discrète α_h proche de u telle que :

$$\alpha_h \leq u_h \quad \text{et} \quad \|u - \alpha_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Posons dans (1.62) $v_h = \bar{u}_h - \varphi_s$ et obtenons :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_h, \varphi_s) \leq (f + \lambda u, \varphi_s) = (f + \lambda u + \lambda \bar{u}_h - \lambda \bar{u}_h, \varphi_s) \quad \forall \varphi_s, \quad s = 1, \dots, m(h) \\ \bar{u}_h \leq r_h M \bar{u}_h \end{cases}$$

Nous avons :

$$(f + \lambda u + \lambda \bar{u}_h - \lambda \bar{u}_h, \varphi_s) \leq (f + \lambda \bar{u}_h + \lambda \|u - \bar{u}_h\|_\infty, \varphi_s)$$

$$\leq (f + \lambda \|u - \bar{u}_h\|_\infty + \lambda \bar{u}_h, \varphi_s)$$

Posons $g = f + \lambda \|u - \bar{u}_h\|_\infty$ et obtenons :

$$\begin{cases} b(\bar{u}_h, \varphi_s) \leq (g + \lambda \bar{u}_h, \varphi_s) \\ \bar{u}_h \leq r_h M \bar{u}_h \end{cases} \quad (1.66)$$

\bar{u}_h est une sous-solution de l'IV de second membre g et d'obstacle $r_h M \bar{u}_h$. D'autre part, d'après la lipschitziannité nous avons :

$$\|\bar{u}_h - u_h\|_\infty \leq \|f + \lambda \|u - \bar{u}_h\|_\infty - f\|_\infty = \|u - \bar{u}_h\|_\infty$$

De (1.63) nous avons :

$$\|u - Ch^2 |\log h|^2 - \bar{u}_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

$$\Rightarrow \|u - \alpha_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Avec $\alpha_h = Ch^2 |\log h|^2 - \bar{u}_h$

* **Etape 2** : Construction d'une fonction continue $\beta^{(h)}$ proche de u_h telle que :

$$\beta^{(h)} \leq u \quad \text{et} \quad \|\beta^{(h)} - u_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Posons dans (1.61) $v_h = \bar{u}^{(h)} - \tilde{v}$, $\tilde{v} \geq 0$ et obtenons :

$$\begin{cases} b(\bar{u}^{(h)}, \tilde{v}) \leq (f + \lambda u_h, \tilde{v}) = (f + \lambda \bar{u}^{(h)} - \lambda \bar{u}^{(h)} + \lambda u_h, \tilde{v}), \quad \tilde{v} \geq 0 \\ \bar{u}^{(h)} \leq M u_h \end{cases}$$

Nous avons :

$$(f + \lambda \bar{u}^{(h)} - \lambda \bar{u}^{(h)} + \lambda u_h, \bar{v}) \leq (f + \lambda \|u_h - \bar{u}^{(h)}\|_\infty + \lambda \bar{u}^{(h)}, \bar{v})$$

Posons $\tilde{g} = f + \lambda \|u_h - \bar{u}^{(h)}\|_\infty$ et obtenons :

$$\begin{cases} b(\bar{u}^{(h)}, \bar{v}) \leq (\tilde{g} + \lambda \bar{u}^{(h)}, \bar{v}) \\ \bar{u}^{(h)} \leq M \bar{u}^{(h)} \end{cases} \quad (1.67)$$

$\bar{u}^{(h)}$ est une sous-solution de l'IV de second membre \tilde{g} et d'obstacle $M \bar{u}^{(h)}$.

D'après la lipschitziannité nous avons :

$$\|\bar{u}^{(h)} - u\|_\infty \leq \|f + \lambda \|u_h - \bar{u}^{(h)}\|_\infty - f\|_\infty = \|u_h - \bar{u}^{(h)}\|_\infty$$

De (1.64) nous avons :

$$\begin{aligned} \|u_h - Ch^2 |\log h|^2 - \bar{u}^{(h)}\|_\infty &\leq Ch^2 |\log h|^2 \\ \Rightarrow \|\beta^{(h)} - u_h\|_\infty &\leq Ch^2 |\log h|^2 \end{aligned}$$

Avec $\beta^{(h)} = Ch^2 |\log h|^2 - \bar{u}^{(h)}$

* **Etape 3** : Appliquons maintenant les résultats des étapes 1 et 2 pour déduire l'estimation de l'erreur de l'IQV (1.50).

Nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} u &\leq \alpha_h + Ch^2 |\log h|^2 \\ &\leq u_h + Ch^2 |\log h|^2 \quad (\text{car } \alpha_h \leq u_h) \\ \Rightarrow u - u_h &\leq Ch^2 |\log h|^2 \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$u_h \leq \beta^{(h)} + Ch^2 |\log h|^2$$

$$\leq u + Ch^2 |\log h|^2 \text{ (car } \beta^{(h)} \leq u \text{)}$$

$$\Rightarrow u_h - u \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Finalemment :

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

□

CHAPITRE 2

Approximation par éléments finis de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

Cette partie est consacrée à l'introduction de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman et sa transformation en un système d'inéquations quasi-variationnelles à opérateurs non coercifs [20]. Nous démontrons l'existence d'une solution faible unique en utilisant l'approche sous et sur- solutions. Une synthèse des résultats d'approximation existants a été faite suivant différents concepts à savoir, l'approche sous-solutions et régularité discrète, l'approche algorithmique ainsi que la contraction. Pour cette dernière, le théorème du point fixe de Banach servira à montrer que l'approximation par éléments finis appliquée au système d'IQV est quasi-optimale dans L^∞ .

Sommaire

2.1 Introduction à l'HJB	40
2.2 Passage de l'HJB à un système d'IQV continues non coercives . . .	40
2.2.1 Notations et hypothèses	42
2.2.2 Existence et unicité de la solution continue	43
2.2.3 Régularité de la solution continue	53
2.3 Problème discret	53
2.3.1 Équation d'HJB discrète	53
2.3.2 Système d'IQV discrètes non coercives	54
2.3.3 Existence et unicité de la solution discrète	54
2.3.4 Algorithme discret de Bensoussan-Lions	55
2.4 Approximations des HJB	56
2.4.1 Approche contraction	56
2.4.2 Approche algorithmique	62
2.4.3 Approche sous-solutions et régularité discrète	67

2.1 Introduction à l'HJB

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman résultante de la méthode de la programmation dynamique initiée par Richard Bellman dans les années cinquante pour résoudre des problèmes d'optimisation, c'est-à-dire des problèmes où nous devons prendre les meilleures décisions possibles à chaque date pour un critère de performance donné. L'équation de la programmation dynamique généralise les travaux antérieurs en mécanique classique de William Hamilton et Carl Gustav Jacobi, et est usuellement appelée équation d'HJB en reconnaissance de la contribution de ces trois grandes personnalités scientifiques.

Historiquement appliquée en ingénierie puis dans d'autres domaines des mathématiques appliquées, l'équation d'HJB est devenue un outil important dans les problèmes de décision intervenant en économie et en finance. Sa première et plus célèbre application financière est le problème d'allocation de portefeuille introduit par Robert Merton en 1973.

L'intérêt de cette équation est son utilisation dans le cadre d'une stratégie pour résoudre des problèmes de contrôle optimal.

2.2 Passage de l'HJB à un système d'IQV continues non coercives

Considérons l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\begin{cases} \max_{1 \leq i \leq M} (A^i u - f^i) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Cette équation est approchée par le système d'IQV suivant :

Trouver $U = (u^1, \dots, u^M) \in (H_0^1(\Omega))^M$ solution de :

$$\begin{cases} a^i(u^i, v - u^i) \geq (f^i, v - u^i), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u^i \leq k + u^{i+1}, \quad v \leq k + u^{i+1} \\ u^{M+1} = u^1, \quad i = \overline{1, M}, \quad k > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Où Ω est un ouvert régulier de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière, les $a^i(u, v)$ sont les M formes bilinéaires continues non coercives associées aux opérateurs

A^i elliptiques uniformes de second ordre, les f^i sont des fonctions régulières et k est un nombre positif.

Les équations d'HJB sont rencontrées dans de nombreuses applications ; par exemple, dans le contrôle stochastique, la solution de (2.1) caractérise la borne inférieure de la fonction coût associée à un processus de commutation (switching) stochastique optimal contrôlé sans coût de commutation [2, 21].

Une grande partie du travail sur l'analyse qualitative du problème (2.1) a été faite dans les années quatre-vingt [20, 27]. Ces études ont été suivies par quelques travaux en relation avec les méthodes numériques comme l'approximation par différences finies. D'autres méthodes itératives de type séquentiel et parallèle ont également été introduites et analysées dans [28] et l'analyse par éléments finis a été étudiée par Cortey-Dumont dans [17].

Dans [27], Lions et Menaldi prouvent que la solution du problème (2.1) est une limite dans $C(\bar{\Omega})$ de la solution du système d'IQV elliptiques (2.2) lorsque le paramètre k tend vers zéro.

La version coercive de l'équation (2.2) a été étudiée à la fois des points de vue analyse mathématique et numérique dans [10].

Ici, nous allons nous intéresser au cas non coercif, c'est-à-dire quand les formes bilinéaires $a^i(u, v)$ ne satisfont pas la condition de coercivité.

Le problème (2.2) est transformé alors en un système d'IQV à opérateurs coercifs suivant :

Trouver $U = (u^1, \dots, u^M) \in (H_0^1(\Omega))^M$ solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(u^i, v - u^i) \geq (f^i + \lambda u^i, v - u^i), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u^i \leq k + u^{i+1}, \quad v \leq k + u^{i+1} \\ u^{M+1} = u^1, \quad i = \overline{1, M} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Où :

$$b^i(u, v) = a^i(u, v) + \lambda(u, v) \quad (2.4)$$

Avec λ assez grand vérifiant :

$$b^i(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad \alpha > 0 ; \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.5)$$

Les opérateurs $b^i(u, v)$ vérifient donc l'hypothèse de coercivité [16] et le nouveau problème s'apparente à un système d'inéquations quasi-variationnelles dans la mesure où les seconds membres dépendent linéairement de la solution.

2.2.1 Notations et hypothèses

Nous définissons pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$a^i(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^N a_{jk}^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^N b_k^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} v + a_0^i(x) uv \right) dx \quad (2.6)$$

$a^i(., .)$ sont les formes bilinéaires associées aux opérateurs elliptiques A^i défini par :

$$A^i = \sum_{j,k=1}^N a_{jk}^i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^N b_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + a_0^i(x) \quad (2.7)$$

Les coefficients $a_{jk}^i(x)$, $b_k^i(x)$ et $a_0^i(x)$ sont supposés être suffisamment réguliers $\forall j, k = 1, \dots, N$ et $\forall i = 1, \dots, M$ tels que :

$$\sum_{j,k=1}^N a_{jk}^i(x) \xi_j \xi_k \geq \alpha |\xi|^2 ; \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \alpha > 0, x \in \overline{\Omega} \quad (2.8)$$

Et les $a_0^i(x)$ satisfont :

$$a_0^i(x) \geq \beta > 0; \quad \forall x \in \overline{\Omega} \quad (2.9)$$

Les coefficients $a_{jk}^i(x)$ sont symétriques :

$$a_{jk}^i(x) = a_{kj}^i(x) \quad (2.10)$$

Nous considérons des seconds membres :

$$f^i \in C^2(\overline{\Omega}), \quad f^i \geq 0; \quad i = 1, \dots, M \quad (2.11)$$

Et pour tout $W = (w^1, \dots, w^M) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega) = (L^\infty(\Omega))^M$, nous introduisons la norme suivante :

$$\|W\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq M} \|w^i\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (2.12)$$

Où $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ représente la norme uniforme.

(\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire standard dans $L^2(\Omega)$.

Soient K^i des ensembles convexes fermés non vides définis comme suit :

$$K^i = \left\{ v \in H^1(\Omega) / v \leq k + u^{i+1}, v \geq 0 \right\} \quad (2.13)$$

2.2.2 Existence et unicité de la solution continue

Remarque 2.2.1. Dans le système (2.3), le second membre et l'obstacle dépendent linéairement de la solution.

Remarque 2.2.2. L'existence et l'unicité de la solution du problème d'inéquation variationnelle introduit dans le chapitre 1 ont été démontrées ainsi que la monotonie de la solution qui amène à introduire une application de point fixe.

Posons $\mathbb{L}^\infty(\Omega) = (L_+^\infty(\Omega))^M$

Soit l'application suivante :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{L}^\infty(\Omega) &\rightarrow \mathbb{L}^\infty(\Omega) \\ W &\rightarrow TW = (\xi^1, \dots, \xi^M) = \xi \end{aligned} \quad (2.14)$$

Où $\xi^i = \sigma(f^i + \lambda w^i; k + w^{i+1})$ est la solution du système d'inéquations variationnelles suivant :

$$\begin{cases} b^i(\xi^i, v - \xi^i) \geq (f^i + \lambda w^i, v - \xi^i) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \xi^i \leq k + w^{i+1}, \quad v \leq k + w^{i+1} \end{cases} \quad (2.15)$$

Remarque 2.2.3. Le problème (2.15) est un système d'inéquations variationnelles coercives admettant une unique solution [1].

2.2.2.1 Propriétés de l'application T

Introduisons le vecteur $\hat{U}^0 = (\hat{u}^{1,0}, \dots, \hat{u}^{M,0})$, $\forall i = 1, \dots, M$ où $\hat{u}^{i,0}$ est la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} b^i(\hat{u}^{i,0}, v) = (f^i + \lambda \hat{u}^{i,0}, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \forall i = \overline{1, M} \end{cases} \quad (2.16)$$

Proposition 2.2.1. ([2]) *Pour $f^i \geq 0$, il existe une unique solution positive du problème (2.16). De plus, $\hat{u}^{i,0} \in W^{2,p}(\Omega)$, $p \leq \infty$.*

Proposition 2.2.2. *Sous les notations et hypothèses précédentes, l'application T est monotone, concave et satisfait :*

$$TW \leq \hat{U}^0, \quad \forall W \in \mathbb{L}^\infty(\Omega) \text{ tel que } W \leq \hat{U}^0$$

Preuve.

1. Montrons que T est croissante, c'est-à-dire :

$$\text{Si } V \leq W \text{ alors } TV \leq TW$$

Soit $V = (v^1, \dots, v^M)$, $W = (w^1, \dots, w^M)$ dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ tels que : $v^i \leq w^i \quad \forall i = 1, \dots, M$

Alors en utilisant la monotonie de σ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma(f^i + \lambda v^i; k + v^{i+1}) &\leq \sigma(f^i + \lambda w^i; k + w^{i+1}) \\ &\Rightarrow TV \leq TW \end{aligned}$$

2. Montrons que $TW \leq \hat{U}^0 \quad \forall W \leq \hat{U}^0$

Rappelons que $u^+ = \sup(u, 0)$, $u^- = \sup(-u, 0)$ et $\xi^i, \hat{u}^{i,0} \in H_0^1(\Omega)$ donc :

$$\xi^i - (\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+ \in H_0^1(\Omega)$$

Comme $(\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+ \geq 0$, il en découle que :

$$\xi^i - (\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+ \leq \xi^i \leq k + w^{i+1}$$

Nous choisissons dans (2.15) $v = \xi^i - (\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+$ et obtenons :

$$b^i(\xi^i, -(\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+) \geq (f^i + \lambda w^i, -(\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+)$$

Nous choisissons dans le système d'équations (2.16) $v = (\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+$ et obtenons :

$$b^i(\hat{u}^{i,0}, (\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+) = (f^i + \lambda \hat{u}^{i,0}, (\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+)$$

Comme $W \leq \hat{U}^0$ et par addition, nous obtenons :

$$-b^i((\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+, (\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+) \geq 0$$

$$\Rightarrow (\xi^i - \hat{u}^{i,0})^+ = 0$$

Donc :

$$\xi^i \leq \hat{u}^{i,0} \quad \forall i = 1, 2, \dots, M$$

$$\Rightarrow TW \leq \hat{U}^0$$

3. Montrons que T est concave :

Pour simplifier, nous adoptons les notations suivantes :

$$w_\theta^i = \theta w^i + (1 - \theta) \tilde{w}^i; \quad w_{\theta,k}^i = \theta(k + w^i) + (1 - \theta)(k + \tilde{w}^i); \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Alors, nous avons :

$$T(\theta W + (1 - \theta) \tilde{W}) = [\sigma(f^1 + \lambda w_\theta^1; k + w_\theta^2), \dots, \sigma(f^i + \lambda w_\theta^i; k + w_\theta^{i+1}), \dots, \sigma(f^M + \lambda w_\theta^M; k + w_\theta^1)]$$

$$= [\sigma(f^1 + \lambda w_\theta^1; w_{\theta,k}^2), \dots, \sigma(f^i + \lambda w_\theta^i; w_{\theta,k}^{i+1}), \dots, \sigma(f^M + \lambda w_\theta^M; w_{\theta,k}^1)]$$

Posons :

$$\xi^i = \sigma(f^i + \lambda w^i; k + w^{i+1})$$

$$\tilde{\xi}^i = \sigma(f^i + \lambda \tilde{w}^i; k + \tilde{w}^{i+1})$$

$$\xi_\theta^i = \theta \xi^i + (1 - \theta) \tilde{\xi}^i$$

$$U_\theta^i = \sigma(f^i + \lambda w_\theta^i; w_{\theta,k}^{i+1})$$

Il est clair que ξ_θ^i est admissible pour le problème qui admet U_θ^i pour solution. Alors : $U_\theta^i + (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-$ est aussi admissible pour le même problème.

Donc :

$$b^i(U_\theta^i, (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-) \geq (f + \lambda w_\theta^i, (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-) \quad (2.17)$$

Aussi, nous pouvons prendre $\xi^i - (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-$ comme fonction test dans le problème où ξ^i est une solution. $\tilde{\xi}^i - (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-$ peut également être choisie dans le problème qui admet $\tilde{\xi}^i$ pour solution.

Nous en déduisons que :

$$-b^i(\xi^i, (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-) \geq -(f + \lambda w^i, (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-) \quad (2.18)$$

Et :

$$-b^i(\tilde{\xi}^i, (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-) \geq -(f + \lambda \tilde{w}^i, (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-) \quad (2.19)$$

En multipliant (2.18) par θ et (2.19) par $(1 - \theta)$, l'addition donne :

$$-b^i(\xi_\theta^i, (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-) \geq -(f + \lambda w_\theta^i, (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-) \quad (2.20)$$

Finalement, (2.17) + (2.20) donne :

$$b^i(U_\theta^i - \xi_\theta^i, (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^-) \geq 0$$

$$\Rightarrow (U_\theta^i - \xi_\theta^i)^- = 0$$

D'où :

$$T(\theta W + (1 - \theta)\tilde{W}) \geq \theta TW + (1 - \theta)T\tilde{W}$$

□

2.2.2.2 Algorithme continu de Bensoussan-Lions

Partant de \hat{U}^0 solution du système d'équations (2.16) et $\check{U}^0 = 0 = (0, \dots, 0)$.

Nous définissons les itérations suivantes :

$$\hat{U}^{n+1} = T\hat{U}^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.21)$$

Et

$$\check{U}^{n+1} = T\check{U}^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.22)$$

L'étude de la convergence des itérations de cet algorithme nécessite le résultat suivant :

Lemme 2.2.3. Soit $f^i \geq f^0 > 0$; $1 \leq i \leq M$, où f^0 est une constante positive et :

$$0 < \mu < \inf \left\{ \frac{k}{\|\hat{U}^0\|_\infty}; \frac{f^0}{\lambda \|\hat{U}^0\|_\infty + f^0} \right\}$$

Alors, nous avons :

$$T(0) \geq \mu \hat{U}^0 \quad (2.23)$$

Preuve.

En effet, dans l'itération (2.22), nous avons $T(0) = \check{U}^1 = (\check{u}^{1,1}, \dots, \check{u}^{1,M})$ où $\check{u}^{i,1}$ est une solution du systèmes d'IV suivant :

$$\begin{cases} b^i(\check{u}^{i,1}, v - \check{u}^{i,1}) \geq (f^i + \lambda \check{u}^{i,0}, v - \check{u}^{i,1}) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \check{u}^{i,1} \leq k, \quad v \leq k \end{cases} \quad (2.24)$$

Par le choix de μ , nous pouvons choisir de prendre dans (2.24) $v = (\check{u}^{i,1} - \mu \hat{u}^{i,0})^- + \check{u}^{i,1}$, dans le système d'équations (2.16) $v = -(\check{u}^{i,1} - \mu \hat{u}^{i,0})^-$ et en utilisant le fait que $f^i \geq f^0$ et $\check{u}^{i,0} = 0$, nous obtenons par addition :

$$\begin{aligned} b^i(\check{u}^{i,1} - \mu \hat{u}^{i,0}, (\check{u}^{i,1} - \mu \hat{u}^{i,0})^-) &\geq ((f^i - \mu f^i - \mu \lambda \hat{u}^{i,0}), (\check{u}^{i,1} - \mu \hat{u}^{i,0})^-) \\ &\geq ((f^0(1 - \mu) - \mu \lambda \hat{u}^{i,0}), (\check{u}^{i,1} - \mu \hat{u}^{i,0})^-) \end{aligned}$$

Mais nous avons également, grâce au choix de μ , ceci :

$$f^0(1 - \mu) - \mu \lambda \hat{u}^{i,0} \geq f^0(1 - \mu) - \mu \lambda \|\hat{U}^0\|_\infty \geq 0$$

Grâce à la coercivité de b^i (voir (2.5)), nous avons :

$$(\check{u}^{i,1} - \mu \hat{u}^{i,0})^- = 0 \Rightarrow \check{u}^{i,1} \geq \mu \hat{u}^{i,0}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, M$$

□

Proposition 2.2.4. Soit $0 < \gamma \leq 1$ et $W, \tilde{W} \in \mathbb{C}$ défini par :

$$\mathbb{C} = \{W \in \mathbb{L}^\infty(\Omega) \text{ tel que } 0 \leq W \leq \hat{U}^0\}$$

Tel que :

$$W - \tilde{W} \leq \gamma W \quad (2.25)$$

Alors, nous avons :

$$TW - T\tilde{W} \leq \gamma(1 - \mu)TW \quad (2.26)$$

Preuve.

Par (2.25), nous avons :

$$(1 - \gamma)W \leq \tilde{W}$$

En utilisant le fait que T est monotone et concave, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)TW + \gamma T(0) &\leq T[(1 - \gamma)W + \gamma \cdot 0] \\ &\leq T\tilde{W} \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le lemme (2.2.3), nous obtenons l'inégalité (2.26). \square

Théorème 2.2.5. *Sous les conditions des propositions (2.2.2) et (2.2.4), les suites $(\hat{U}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\check{U}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et bien définies dans \mathbb{C} . De plus, elles convergent respectivement en décroissant et en croissant vers l'unique solution U du système (2.2).*

Preuve. La preuve du théorème se réalisera en cinq étapes :

Étape 1 : Les suites (\hat{U}^n) sont décroissantes.

De (2.21), il est facile de voir que $\hat{u}^{i,n}$ est une solution du système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(\hat{u}^{i,n}, v - \hat{u}^{i,n}) \geq (f^i + \lambda \hat{u}^{i,n-1}, v - \hat{u}^{i,n}) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \hat{u}^{i,n} \leq k + \hat{u}^{i+1,n-1}, \quad v \leq k + \hat{u}^{i+1,n-1} \\ \hat{u}^{M+1,n} = \hat{u}^{1,n} \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Puisque $f^i \geq 0$ et $\hat{u}^{i,n} \geq 0$, une simple induction combinée aux résultats de comparaison standard dans les IV conduit à $\hat{u}^{i,n} \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\hat{U}^n \geq 0 \quad \forall n \geq 0 \quad (2.28)$$

De plus, par la proposition (2.2.2) et l'itération (2.21), nous avons :

$$\hat{U}^1 = T\hat{U}^0 \leq \hat{U}^0$$

Ainsi :

$$0 \leq \hat{U}^{n+1} = T\hat{U}^n \leq \hat{U}^n \leq \dots \leq \hat{U}^0 \quad (2.29)$$

Etape 2 : Les suites (\hat{U}^n) convergent vers la solution du système (2.2).

De (2.28) et (2.29), il est clair que $\forall i = 1, 2, \dots, M$, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{u}^{i,n}(x) = \bar{u}^i(x), \quad x \in \Omega \quad \text{et} \quad (\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^M) \in \mathbb{C} \quad (2.30)$$

De plus, de (2.28), nous avons :

$$k + \hat{u}^{i+1,n-1} \geq 0$$

Alors, nous pouvons prendre $v = 0$ dans (2.27) et obtenons :

$$\gamma \left\| \hat{u}^{i,n} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq b^i(\hat{u}^{i,n}, \hat{u}^{i,n}) \leq \left\| f^i + \lambda \hat{u}^{i,n-1} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \hat{u}^{i,n} \right\|_{H^1(\Omega)}$$

Ou tout simplement :

$$\left\| \hat{u}^{i,n} \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C$$

Où C est une constante indépendante de n .

Par conséquent, $\hat{u}^{i,n}$ reste bornée dans $H^1(\Omega)$ et cela permet de compléter (2.30) ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{u}^{i,n} = \bar{u}^i \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega) \quad (2.31)$$

Etape 3 : $\bar{U} = (\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^M)$ coïncide avec la solution du systèmes d'IQV (2.2).

En effet, puisque nous avons $\hat{u}^{i,n}(x) \leq k + \hat{u}^{i+1,n-1}(x)$, (2.30) implique que :

$$\bar{u}^i(x) \leq k + \bar{u}^{i+1}(x)$$

Maintenant, soit :

$$v \leq k + \bar{u}^{i+1} \Rightarrow v \leq k + \hat{u}^{i+1,n-1}, \quad \forall n \geq 0$$

Nous pouvons prendre v comme fonction test dans le système d'IV (2.27). Par conséquent, la combinaison de (2.30) et (2.31) avec la faible semi-continuité inférieure (the weak lower semi continuity) de $b^i(v, v)$ et, en passant à la limite dans le problème (2.27), nous obtenons clairement :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(\bar{u}^i, v - \bar{u}^i) \geq (f^i + \lambda \bar{u}^i, v - \bar{u}^i) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ v \leq k + \bar{u}^{i+1} \end{array} \right.$$

Etape 4 (Unicité) :

Soient U, \tilde{U} deux solutions du système (2.2). Ce sont des points fixes de T .

Du moment que $U - \tilde{U} \leq U$, en prenant $W = U$ et $\tilde{W} = \tilde{U}$ dans (2.25) avec $\gamma = 1 - \mu$, nous obtenons :

$$U - \tilde{U} \leq (1 - \mu)U$$

En répétant cela avec $\gamma = 1 - \mu$, nous obtenons :

$$U - \tilde{U} \leq (1 - \mu)^2 U$$

Et donc :

$$U - \tilde{U} \leq (1 - \mu)^n U \leq (1 - \mu)^n \|\hat{U}^0\|_\infty$$

Ainsi, en faisant tendre n vers ∞ , nous obtenons :

$$U \leq \tilde{U}$$

Finalement, en changeant les rôles de U et \tilde{U} , nous obtenons :

$$U = \tilde{U}$$

Etape 5 :

La propriété de monotonie de la suite (\check{U}^n) peut être démontrée d'une manière similaire à celle de la suite (\hat{U}^n) .

Prouvons, maintenant, leurs convergences vers la solution du système (2.2).

En effet, appliquons les inégalités (2.25) et (2.26) avec :

$$W = \hat{U}^0 ; \quad \check{W} = \check{U}^0 ; \quad \gamma = 1$$

Alors, nous avons :

$$T\hat{U}^0 - T\check{U}^0 \leq (1 - \mu)T\hat{U}^0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \hat{U}^1 - \check{U}^1 \leq (1 - \mu)\hat{U}^1$$

L'application à nouveau de (2.26) donne :

$$0 \leq \hat{U}^2 - \check{U}^2 \leq (1 - \mu)^2\hat{U}^2$$

Et d'une manière générale :

$$0 \leq \hat{U}^n - \check{U}^n \leq (1 - \mu)^n\hat{U}^n \leq (1 - \mu)^n\hat{U}^0 \leq (1 - \mu)^n \|\hat{U}^0\|_\infty$$

Donc :

$$\hat{U}^n - \check{U}^n \rightarrow 0$$

D'où il résulte que :

$$\check{U}^n \rightarrow \underline{U} = U$$

l'unique solution du système d'IQV (2.2).

□

2.2.3 Régularité de la solution continue

Théorème 2.2.6. ([20]) *Sous les notations et hypothèses précédentes, la solution U du système d'IQV (2.2) satisfait la propriété de régularité :*

$$U \in C(\bar{\Omega}) \cap W^{2,p}(\Omega), \quad 2 \leq p < +\infty \quad (2.32)$$

2.3 Problème discret

Les démonstrations sont similaires à celles données dans le cas continu et nous gardons exactement la même triangulation introduite dans le chapitre 1 (IV discrète). Dans tout ce qui suit, nous devons utiliser le **principe du maximum discret**. En d'autres termes, nous assumons que les matrices d'éléments finis \mathbb{A}^i et \mathbb{B}^i définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{A}^i)_{sl} = a^i(\varphi_s, \varphi_l) \\ (\mathbb{B}^i)_{sl} = b^i(\varphi_s, \varphi_l) \\ \forall 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq s, l \leq m(h) \end{array} \right. \quad (2.33)$$

sont des M-matrices [12] où :

$$b^i(\varphi_s, \varphi_l) = a^i(\varphi_s, \varphi_l) + \lambda(\varphi_s, \varphi_l)$$

2.3.1 Équation d'HJB discrète

Le résultat important trouvé dans [27] fournit un outil puissant permettant l'analyse par éléments finis de l'équation d'HJB (2.1) avec un transfert facile vers le problème discret et satisfaisant le principe du maximum [10, 17].

En effet, la version discrète de l'HJB consiste à chercher $u_h \in V_h$ telle que :

$$\max_{1 \leq i \leq M} (\mathbb{A}^i u_h - F^i) = 0 \quad \text{avec} \quad F^i = (f^i, \varphi_s) \quad (*)$$

Par analogie, dans [17], Cortey-Dumont prouvent que la solution de (*) est une limite dans $C(\bar{\Omega})$ de la solution du système d'IQV discrètes associé au système (2.2) lorsque le paramètre k tend vers zéro.

2.3.2 Système d'IQV discrètes non coercives

Soit $\mathbb{V}_h = (V_h)^M$

Nous définissons le système d'IQV discrètes non coercives comme suit :

Trouver $U_h = (u_h^1, \dots, u_h^M) \in \mathbb{V}_h$ solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^i(u_h^i, v_h - u_h^i) \geq (f^i, v_h - u_h^i) \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h^i \leq k + u_h^{i+1}, \quad v_h \leq k + u_h^{i+1} \\ u_h^{M+1} = u_h^1, \quad i = \overline{1, M} \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Par analogie au problème continu, nous résolvons (2.34) via le système coercif implicite suivant :

Trouver $U_h = (u_h^1, \dots, u_h^M) \in \mathbb{V}_h$ solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(u_h^i, v_h - u_h^i) \geq (f^i + \lambda u_h^i, v_h - u_h^i) \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h^i \leq k + u_h^{i+1}, \quad v_h \leq k + u_h^{i+1} \\ u_h^{M+1} = u_h^1, \quad i = \overline{1, M} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Remarque 2.3.1. *Toutes les propriétés établies dans le cas continu restent conservées dans cette partie à condition que le **principe du maximum discret** soit satisfait. Leurs preuves ne seront pas données car elles sont identiques à celles du cas continu.*

2.3.3 Existence et unicité de la solution discrète

Comme dans le cas continu, nous introduisons le vecteur $\hat{U}_h^0 = (\hat{u}_h^{1,0}, \dots, \hat{u}_h^{M,0})$, une approximation linéaire de \hat{U}^0 et solution du système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a^i(\hat{u}_h^{i,0}, v_h) = (f^i, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ \forall i = \overline{1, M} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Soit maintenant l'application suivante :

$$T_h : \mathbb{L}^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_h$$

$$W \rightarrow T_h W = (\xi_h^1, \dots, \xi_h^M) = \xi_h \quad (2.37)$$

Où $\xi_h^i = \sigma_h(f^i + \lambda w^i; k + w^{i+1})$ est une solution du système d'IV suivant :

$$\begin{cases} b^i(\xi_h^i, v_h - \xi_h^i) \geq (f^i + \lambda w^i, v_h - \xi_h^i) \quad \forall v_h \in V_h \\ \xi_h^i \leq r_h(k + w^{i+1}), \quad v_h \leq r_h(k + w^{i+1}) \end{cases} \quad (2.38)$$

Proposition 2.3.1. *Sous le principe du maximum discret, l'application T_h est monotone, concave et satisfait la condition :*

$$T_h W \leq \hat{U}_h^0 \quad \forall W \in \mathbb{L}^\infty(\Omega) \text{ tel que } W \leq \hat{U}_h^0$$

2.3.4 Algorithme discret de Bensoussan-Lions

Nous associons à l'application T_h le schéma itératif discret suivant :

Partant de \hat{U}_h^0 solution du système d'équations (2.36), $\check{U}_h^0 = 0 = (0, \dots, 0)$ et définissons les itérations discrètes suivantes :

$$\hat{U}_h^{n+1} = T_h \hat{U}_h^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.39)$$

Et

$$\check{U}_h^{n+1} = T_h \check{U}_h^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.40)$$

La convergence de l'algorithme discret ci-dessus repose respectivement sur les versions discrètes du lemme (2.2.3) et de la proposition (2.2.4).

Lemme 2.3.2. *Soit $f^i \geq f^0 > 0$; $1 \leq i \leq M$, où f^0 est une constante positive et :*

$$0 < \mu < \inf \left\{ \frac{k}{\|\hat{U}_h^0\|_\infty}; \frac{f^0}{\lambda \|\hat{U}_h^0\|_\infty + f^0} \right\}$$

Nous avons alors :

$$T_h(0) \geq \mu \hat{U}_h^0 \quad (2.41)$$

Proposition 2.3.3. Soit $0 < \gamma \leq 1$ et $W, \tilde{W} \in \mathbb{C}_h$ défini par :

$$\mathbb{C}_h = \{W \in \mathbb{L}^\infty(\Omega) \text{ tel que } 0 \leq W \leq \hat{U}_h^0\}$$

Tel que :

$$W - \tilde{W} \leq \gamma W \tag{2.42}$$

Nous avons alors :

$$T_h W - T_h \tilde{W} \leq \gamma(1 - \mu)T_h W \tag{2.43}$$

Théorème 2.3.4. Sous les conditions des propositions (2.3.1) et (2.3.3), les suites $(\hat{U}_h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\check{U}_h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et bien définies dans \mathbb{C}_h . De plus, elles convergent respectivement en décroissant et en croissant vers l'unique solution U_h du système (2.34).

2.4 Approximations des HJB

Cette partie traite de l'approximation linéaire de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman à opérateurs non coercifs. Nous établissons une estimation de l'erreur en norme uniforme en utilisant différentes approches.

2.4.1 Approche contraction

Pour l'approche contraction, nous prouvons que l'approximation par la méthode des éléments finis appliquée au système (2.2) est quasi-optimale en norme uniforme. Ce concept consiste à caractériser à la fois la solution du système (2.2) et (2.34) comme points fixes uniques des contractions appropriées dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$. Pour ce faire, nous devons d'abord introduire un système d'IQV coercives et prouver que sa solution est monotone par rapport au second membre.

Soit $F = (F^1, \dots, F^M) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$.

Notons par $Z = (z^1, \dots, z^M)$ la solution du système d'IQV coercif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(z^i, v - z^i) \geq (F^i, v - z^i) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ z^i \leq k + z^{i+1}, \quad v \leq k + z^{i+1} \\ z^{M+1} = z^1 \end{array} \right. \tag{2.44}$$

Notons par $z^i = \sigma(F^i, k + z^{i+1})$.

Introduisons maintenant les suites $\bar{Z}^n = (\bar{z}^{1,n}, \dots, \bar{z}^{M,n})$ et $\underline{Z}^n = (\underline{z}^{1,n}, \dots, \underline{z}^{M,n})$ définies par :

$$\bar{z}^{i,n+1} = \sigma(F^i, k + \bar{z}^{i+1,n})$$

Et

$$\underline{z}^{i,n+1} = \sigma(F^i, k + \underline{z}^{i+1,n})$$

Où $\underline{z}^{i,0} = 0$ et $\bar{z}^{i,0}$ est l'unique solution du système d'équations :

$$b^i(\bar{z}^{i,0}, v) = (F^i, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Théorème 2.4.1. ([10]) *Les suites $(\bar{Z}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\underline{Z}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement en décroissant et en croissant vers l'unique solution du système (2.44). De plus :*

$$z^i \in W^{2,p}(\Omega) ; i = \overline{1, M} ; 1 \leq p < \infty$$

Proposition 2.4.2. *Soit (F^1, \dots, F^M) , $(\tilde{F}^1, \dots, \tilde{F}^M)$ deux familles de seconds membres et $Z = (z^1, \dots, z^M)$, $\tilde{Z} = (\tilde{z}^1, \dots, \tilde{z}^M)$ sont les solutions respectives du système (2.44). Alors, nous avons :*

$$\text{Si } \tilde{F} \leq F \Rightarrow \tilde{Z} \leq Z \tag{2.45}$$

Preuve.

Soit $\bar{Z}^0 = (\bar{z}^{1,0}, \dots, \bar{z}^{M,0})$ et $\tilde{\bar{Z}}^0 = (\tilde{\bar{z}}^{1,0}, \dots, \tilde{\bar{z}}^{M,0})$ tels que $\bar{z}^{i,0}$ et $\tilde{\bar{z}}^{i,0}$ sont les solutions respectives du système d'équations :

$$b^i(\bar{z}^{i,0}, v) = (F^i, v) \quad \text{et} \quad b^i(\tilde{\bar{z}}^{i,0}, v) = (\tilde{F}^i, v)$$

Les suites décroissantes associées sont :

$$\bar{Z}^n = (\bar{z}^{1,n}, \dots, \bar{z}^{M,n}) \quad \text{et} \quad \tilde{\bar{Z}}^n = (\tilde{\bar{z}}^{1,n}, \dots, \tilde{\bar{z}}^{M,n})$$

Elles satisfont la condition suivante :

$$\text{Si } \tilde{F}^i \leq F^i \text{ alors } \tilde{z}^{1,n} \leq \bar{z}^{1,n} \quad \forall i = 1, \dots, M$$

Puisque :

$$\bar{z}^{i,n+1} = \sigma(F^i, k + \bar{z}^{i+1,n}) \quad \text{et} \quad \tilde{z}^{i,n+1} = \sigma(\tilde{F}^i, k + \tilde{z}^{i+1,n})$$

Et :

$$\tilde{F}^i \leq F^i \Rightarrow \tilde{z}^{i,0} \leq \bar{z}^{i,0} \quad \forall i = 1, \dots, M$$

Alors :

$$\tilde{z}^{i+1,0} \leq k + \bar{z}^{i+1,0}$$

De la comparaison standard des résultats d'IV coercives, il en résulte que :

$$\tilde{z}^{i,1} \leq k + \bar{z}^{i,1}$$

Supposons maintenant qu'elle est vraie pour $n - 1$ et démontrons la pour n

Comme $\tilde{F}^i \leq F^i$ et, en appliquant le même argument de comparaison vu ci-dessus, nous obtenons :

$$\tilde{z}^{i,n} \leq k + \bar{z}^{i,n}$$

Finalement, par le théorème (2.4.1) et en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, nous obtenons :

$$\tilde{Z} \leq Z$$

□

Remarque 2.4.1. *La proposition (2.4.2) reste vraie dans le cas discret à condition que le principe du maximum discret soit satisfait.*

2.4.1.1 Contraction associée au système d'IQV continues

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{S} : L^\infty(\Omega) &\rightarrow L^\infty(\Omega) \\ W \rightarrow \mathbb{S}W = Z &= (z^1, \dots, z^M) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Où z^i est une solution du système d'IQV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(z^i, v - z^i) \geq (f^i + \lambda w^i, v - z^i) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ z^i \leq k + z^{i+1}, \quad v \leq k + z^{i+1} \\ z^{M+1} = z^1 \end{array} \right. \quad (2.47)$$

En vertu du théorème (2.4.1), le problème (2.47) admet une et une seule solution.

Proposition 2.4.3. *L'application \mathbb{S} est une contraction dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$, c'est-à-dire :*

$$\|\mathbb{S}W - \mathbb{S}\tilde{W}\|_\infty \leq \frac{\lambda}{\lambda + \beta} \|W - \tilde{W}\|_\infty \quad (2.48)$$

Alors, il existe un unique point fixe qui coïncide avec la solution U du système d'IQV (2.2).

Preuve.

Soit W, \tilde{W} dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ et considérons $Z = \mathbb{S}W = (z^1, \dots, z^M)$, $\tilde{Z} = \mathbb{S}\tilde{W} = (\tilde{z}^1, \dots, \tilde{z}^M)$ deux solutions du système d'IQV (2.47) avec respectivement deux seconds membres $F = (F^1, \dots, F^M)$ et $\tilde{F} = (\tilde{F}^1, \dots, \tilde{F}^M)$, où $F^i = f^i + \lambda w^i$ et $\tilde{F}^i = f^i + \lambda \tilde{w}^i$.

Posons :

$$\Phi = \frac{1}{\lambda + \beta} \|F - \tilde{F}\|_\infty ; \quad \Phi^i = \frac{1}{\lambda + \beta} \|F^i - \tilde{F}^i\|_\infty$$

Il en résulte que :

$$F^i \leq \tilde{F}^i + \|F^i - \tilde{F}^i\|_\infty$$

Et

$$\tilde{F}^+ \frac{a_0^i(x) + \lambda}{\lambda + \beta} \left\| F - \tilde{F}^i \right\|_{\infty} \leq \tilde{F}^i + (a_0^i(x) + \lambda \Phi) \quad (\text{car } a_0^i(x) \geq \beta > 0)$$

Donc, par la proposition (2.4.2), nous obtenons :

$$z^i \leq \tilde{z}^i + \Phi^i$$

En changeant les rôles de W et \tilde{W} , nous obtenons semblablement ceci :

$$\tilde{z}^i \leq z^i + \Phi^i$$

Et enfin :

$$\left\| z^i - \tilde{z}^i \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Phi^i$$

□

Par analogie au cas continu, nous pouvons également caractériser la solution discrète du système d'IQV (2.34) comme unique point fixe de la contraction.

2.4.1.2 Contraction associée au système d'IQV discrètes

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_h : L^\infty(\Omega) &\rightarrow \mathbb{V}_h \\ W &\rightarrow \mathbb{S}_h W = Z_h = (z_h^1, \dots, z_h^M) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Où z_h^i est une solution du système d'IQV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(z_h^i, v_h - z_h^i) \geq (f^i + \lambda w^i, v_h - z_h^i) \quad \forall v_h \in V_h \\ z_h^i \leq k + z_h^{i+1}, \quad v_h \leq k + z_h^{i+1} \\ z_h^{M+1} = z_h^1 \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Le problème (2.50) admet une et une seule solution [10, 17].

En utilisant la proposition (2.4.2) et la remarque (2.4.1), nous obtenons la propriété de contraction de \mathbb{S}_h .

Proposition 2.4.4. *L'application \mathbb{S}_h est une contraction dans \mathbb{V}_h , c'est-à-dire :*

$$\|\mathbb{S}_h W - \mathbb{S}_h \tilde{W}\|_\infty \leq \frac{\lambda}{\lambda + \beta} \|W - \tilde{W}\|_\infty \quad (2.51)$$

Alors, il existe un unique point fixe qui coïncide avec la solution U_h du système d'IQV (2.34).

Maintenant, guidés par la proposition (2.4.3) et (2.4.4), nous sommes en mesure d'établir l'estimation de l'erreur en norme uniforme du système d'IQV non coercif (2.2). À cette fin, nous devons introduire un système auxiliaire d'IQV discrètes coercives.

2.4.1.3 Système auxiliaire d'IQV coercives

Considérons le système d'IQV coercives suivant :

Trouver $\bar{Z}_h = (\bar{z}_h^1, \dots, \bar{z}_h^M)$ solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(\bar{z}_h^i, v_h - \bar{z}_h^i) \geq (f + \lambda u^i, v_h - \bar{z}_h^i) \quad \forall v_h \in V_h \\ \bar{z}_h^i \leq k + \bar{z}_h^{i+1}, \quad v_h \leq k + \bar{z}_h^{i+1} \\ \bar{z}_h^{M+1} = k + \bar{z}_h^1 \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Il est clair que le second membre du système (2.52) dépend de $U = (u^1, \dots, u^M)$, la solution continue du système (2.2). Ainsi, compte tenue de \mathbb{S}_h , nous avons :

$$\bar{Z}_h = \mathbb{S}_h U \quad (2.53)$$

Par conséquent, en utilisant le résultat de [10], nous avons l'estimation de l'erreur suivante :

Théorème 2.4.5. ([10])

$$\|\bar{Z}_h - U\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^3 \quad (2.54)$$

2.4.1.4 Estimation de l'erreur en norme L^∞

Soit U, U_h les solutions respectives des systèmes (2.2) et (2.34). Nous énonçons donc le théorème suivant :

Théorème 2.4.6.

$$\|U - U_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^3 \quad (2.55)$$

Preuve.

Compte tenue de l'estimation (2.54), des propositions (2.4.3) et (2.4.4), nous avons clairement :

$$U = \mathbb{S}U; \quad U_h = \mathbb{S}_h U_h; \quad \bar{Z}_h = \mathbb{S}_h U$$

En utilisant maintenant l'estimation (2.54), nous obtenons :

$$\|\mathbb{S}_h U - \mathbb{S}U\|_\infty = \|\bar{Z}_h - U\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^3$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|U_h - U\|_\infty &\leq \|U_h - \mathbb{S}_h U\|_\infty + \|\mathbb{S}_h U - \mathbb{S}U\|_\infty \\ &\leq \|\mathbb{S}_h U_h - \mathbb{S}_h U\|_\infty + \|\mathbb{S}_h U - \mathbb{S}U\|_\infty \\ &\leq \frac{\lambda}{\lambda + \beta} \|U - U_h\|_\infty + Ch^2 |\log h|^3 \end{aligned}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned} \|U - U_h\|_\infty &\leq \frac{Ch^2 |\log h|^3}{1 - \frac{\lambda}{\lambda + \beta}} \\ \Rightarrow \|U - U_h\|_\infty &\leq Ch^2 |\log h|^3 \end{aligned}$$

□

2.4.2 Approche algorithmique

Boulbrachene et Chentouf [8] ont étendu le résultat d'approximation obtenu dans [10] pour le cas d'une HJB non coercive. Pour ce faire, ils ont développé une approche basée principalement sur la propriété de la L^∞ -stabilité discrète par rapport aux données de la solution de l'HJB coercive.

2.4.2.1 Problème continu

Afin d'étudier le problème non coercif, le problème (2.1) a été reformulé comme suit :
Trouver $u \in V$ telle que :

$$\begin{cases} \max_{1 \leq i \leq M} (\mathcal{B}^i u - \mathcal{F}^i(u)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.56)$$

Où $\mathcal{F}^i(u) = f^i + \lambda u$, et $\lambda > 0$ assez grand tel que l'opérateur $\mathcal{B}^i = \mathcal{A}^i + \lambda I$ soit fortement coercif sur V .

Théorème 2.4.7. ([20, 27]) *Sous les notations et hypothèses précédentes, le problème (2.56) admet une unique solution appartenant à $W^{2,\infty}(\Omega)$.*

2.4.2.2 Problème discret

A partir de maintenant, nous assumons que les matrices \mathbb{B}^i sont des M-matrices. En tenant compte des définitions, notations et hypothèses qui précèdent, nous sommes en mesure de définir l'équation d'HJB discrète comme suit :

Trouver $u_h \in V_h$ telle que :

$$\max_{1 \leq i \leq M} (\mathbb{A}^i u_h - F^i) = 0 \quad (2.57)$$

Ou encore :

$$\max_{1 \leq i \leq M} (\mathbb{B}^i u_h - F^i(u_h)) = 0 \quad (2.58)$$

Avec :

$$F_s^i(u_h) = (f^i + \lambda u_h, \varphi_s); \quad s = 1, \dots, m(h)$$

Théorème 2.4.8. ([17]) *Sous le principe du maximum discret, (2.57) ou (2.58) a une unique solution.*

Maintenant, nous allons développer la propriété de la L^∞ -stabilité pour la solution de l'HJB coercive. Comme nous le verrons, cet argument jouera un rôle crucial pour prouver l'estimation de l'erreur.

Propriété de la L^∞ -stabilité discrète

Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^M) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$

Notons par $\zeta_h = \partial_h(\mathcal{F})$ la solution de l'équation d'HJB discrète suivante :

Trouver ζ_h solution de :

$$\max_{1 \leq i \leq M} (\mathbb{B}^i \zeta_h - F^i) = 0 \quad (2.59)$$

Où $F_s^i = (\mathcal{F}_s^i, \varphi_s)$; $s = 1, \dots, m(h)$

Grâce à [17], le problème (2.59) a une unique solution. De plus, cette solution est une limite dans $C(\overline{\Omega})$ de la solution du système d'IQV suivant :

Trouver $(\zeta_h^1, \dots, \zeta_h^M) \in \mathbb{V}_h$ solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(\zeta_h^i, v_h - \zeta_h^i) \geq (\mathcal{F}^i, v_h - \zeta_h^i) \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h^i \leq k + \zeta_h^{i+1}, \quad v_h \leq k + \zeta_h^{i+1} \\ \zeta_h^{M+1} = \zeta_h^1, \quad i = \overline{1, M} \end{array} \right. \quad (2.60)$$

dans le sens où $\forall i = 1, \dots, M, \zeta_h^i \rightarrow \zeta_h$ sur $C(\overline{\Omega})$ lorsque k tend vers zéro [17].

Notations

Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^M), \tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}^1, \dots, \tilde{\mathcal{F}}^M)$ dans $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ et $\zeta_h = \partial_h(\mathcal{F}), \tilde{\zeta}_h = \partial_h(\tilde{\mathcal{F}})$ les solutions correspondantes à l'équation d'HJB (2.59).

Proposition 2.4.9. ([17]) *Sous le principe du maximum discret, nous avons :*

$$\text{Si } \mathcal{F} \geq \tilde{\mathcal{F}} \text{ alors } \partial_h(\mathcal{F}) \geq \partial_h(\tilde{\mathcal{F}})$$

Théorème 2.4.10. *Sous les conditions de la proposition (2.4.9), la propriété de la L^∞ -stabilité discrète est vérifiée :*

$$\|\partial_h(\mathcal{F}) - \partial_h(\tilde{\mathcal{F}})\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda + \beta} \|\mathcal{F} - \tilde{\mathcal{F}}\|_\infty$$

Preuve.

Soient $\zeta_h^i = \sigma_h(\mathcal{F}^i, k + \zeta_h^{i+1})$, $\tilde{\zeta}_h^i = \sigma_h(\tilde{\mathcal{F}}^i, k + \tilde{\zeta}_h^{i+1})$ les i èmes composantes des solutions du système (2.60) avec respectivement les données \mathcal{F} et $\tilde{\mathcal{F}}$. Alors, de (2.9), il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^i &\leq \tilde{\mathcal{F}}^i + \left\| \mathcal{F}^i - \tilde{\mathcal{F}}^i \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{\mathcal{F}}^i + \frac{a_0^i + \lambda}{\lambda + \beta} \left\| \mathcal{F}^i - \tilde{\mathcal{F}}^i \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \tilde{\mathcal{F}}^i + (a_0^i(x) + \lambda) \Phi_i \end{aligned}$$

Où

$$\Phi = \frac{1}{\lambda + \beta} \left\| \mathcal{F}^i - \tilde{\mathcal{F}}^i \right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Par conséquent, faisant usage de la proposition (2.4.9), il en résulte que :

$$\begin{aligned} \sigma_h(\mathcal{F}^i, k + \zeta_h^{i+1}) &\leq \sigma_h(\tilde{\mathcal{F}}^i + (a_0^i(x) \Phi_i, k + \Phi_i + \tilde{\zeta}_h^{i+1})) \\ &\leq \sigma_h(\tilde{\mathcal{F}}^i, k + \tilde{\zeta}_h^{i+1}) + \Phi_i \end{aligned}$$

Similairement, en changeant les rôles de \mathcal{F}^i et $\tilde{\mathcal{F}}^i$, nous obtenons également :

$$\sigma_h(\tilde{\mathcal{F}}^i, k + \tilde{\zeta}_h^{i+1}) \leq \sigma_h(\mathcal{F}^i, k + \zeta_h^{i+1}) + \Phi_i$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\left\| \zeta_h^i - \tilde{\zeta}_h^i \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Phi_j \quad \forall i = 1, \dots, M$$

Finalement, en passant à la limite quand k tend vers zéro, nous obtenons le résultat désiré. \square

Pour démontrer l'estimation de l'erreur, nous allons d'abord introduire une équation auxiliaire d'HJB discrète.

Équation auxiliaire d'HJB

Soit $\bar{\zeta}_h$ une solution de l'équation d'HJB discrète coercive suivante :

$$\max_{1 \leq i \leq M} (\mathbb{B}^i \bar{\zeta}_h - F^i(u)) = 0 \quad (2.61)$$

Où $F_s^i(u) = (f^i + \lambda u, \varphi_s)$; $s = 1, \dots, m(h)$ et u est une solution de l'équation d'HJB (2.1).

Alors, en utilisant la notation précédente, nous avons :

$$\bar{\zeta}_h = \partial_h(F + \lambda U) \quad (2.62)$$

Où $U = (u, \dots, u)$.

Nous pouvons donc facilement constater que $\bar{\zeta}_h$ n'est rien d'autre que l'approximation linéaire de u et la solution de l'équation d'HJB (2.1).

Par conséquent, en utilisant le résultat de [10], nous obtenons l'estimation de l'erreur suivante :

2.4.2.3 Estimation de l'erreur en norme L^∞

Théorème 2.4.11. ([10]) Soit u et $\bar{\zeta}_h$ les solutions respectives des problèmes (2.1) et (2.61). Alors :

$$\|\bar{\zeta}_h - u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 |\log h|^3$$

Théorème 2.4.12. (Estimation de l'erreur) Soit u et u_h les solutions respectives des problèmes (2.1) et (2.57). Alors :

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^3$$

Preuve.

Soit $\mathcal{F} = (f^1, \dots, f^M)$ où les f^i sont les fonctions de l'équation (2.1).

Étant donné que :

$$\bar{\zeta}_h = \partial_h(\mathcal{F} + \lambda U); \quad u = \partial(\mathcal{F} + \lambda U)$$

et

$$u_h = \partial_h(\mathcal{F} + \lambda U_h) \quad \text{avec} \quad U_h = (u_h, \dots, u_h)$$

et en appliquant les théorèmes (2.4.10) et (2.4.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_\infty &\leq \|u - \bar{\zeta}_h\|_\infty + \|\bar{\zeta}_h - u_h\|_\infty \\ &\leq \|u - \bar{\zeta}_h\|_\infty + \|\partial_h(\mathcal{F} + \lambda U) - \partial_h(\mathcal{F} + \lambda U_h)\|_\infty \\ &\leq Ch^2 |\log h|^3 + \frac{\lambda}{\lambda + \beta} \|U - U_h\|_\infty \\ &\leq Ch^2 |\log h|^3 + \frac{\lambda}{\lambda + \beta} \|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

et donc :

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^3$$

□

2.4.3 Approche sous-solutions et régularité discrète

Dans le but d'étudier l'approximation par éléments finis du système d'IQV non coercives, Boulbarchene améliore son travail de [6] où il a utilisé la propriété de la L^∞ -stabilité et sous-solutions pour établir une estimation quasi-optimale de l'erreur en norme uniforme. Pour l'approche étudiée dans cette partie, il établit un ordre de convergence optimal en norme L^∞ en utilisant le concept de sous-solutions et la régularité discrète.

Dans le système d'IQV (2.2), u^i peut être considérée comme la solution de l'IV de second membre f^i et d'obstacle $k + u^{i+1}$. Nous allons donc adopter la notation $u^i = \sigma(f^i, k + u^{i+1})$.

Dans le système d'IQV discrètes (2.34), $u_h^i = \sigma_h(f^i, k + u_h^{i+1})$ est la solution de l'IV discrète de second membre f^i et d'obstacle $k + u_h^{i+1}$.

Les f^i sont des fonctions positives dans $W^{2,p}(\Omega)$.

La version coercive de cette approche a été effectuée dans [9] et une estimation de l'erreur en norme uniforme a été obtenue. En ce qui concerne le problème non coercif, une estimation quasi-optimale de l'erreur a été dérivée de [6], qui est :

$$\max_{1 \leq i \leq M} \|u^i - u_h^i\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^3$$

Le concept de sous-solutions et la régularité discrète permet de se débarrasser d'un facteur supplémentaire $|\log h|$ et d'obtenir l'estimation suivante :

$$\max_{1 \leq i \leq M} \|u^i - u_h^i\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Pour ce faire, nous utilisons la caractérisation de la solution continue (resp. de la solution discrète) comme étant le plus grand élément de l'ensemble des sous-solutions continues (resp. des sous-solutions discrètes). La régularité dite discrète joue un rôle important dans la dérivée de l'ordre optimal car elle permet de remplacer les obstacles non réguliers apparaissant dans le système (2.34) par des fonctions dans $W^{2,p}(\Omega)$.

Nous avons vu précédemment que le système (2.2) ou (2.3) admet une unique solution qui appartient à $(W^{2,p}(\Omega))^M$, $1 \leq p \leq \infty$ [27].

Donnons maintenant quelques propriétés qualitatives dont jouissent les solutions des systèmes (2.2) et (2.3) respectivement. Ces propriétés sont nécessaires dans la preuve de l'estimation de l'erreur ci-dessus.

Notations

Soient k, \tilde{k} deux constantes positives et $(f^1, \dots, f^M), (\tilde{f}^1, \dots, \tilde{f}^M)$ deux familles de seconds membres. Notons par $u^i = \sigma(f^i, k + u^{i+1})$ et $\tilde{u}^i = \sigma(\tilde{f}^i, k + \tilde{u}^{i+1})$ les solutions correspondantes au système (2.2). Pour simplifier, nous allons adopter, comme dans [9], la notation $u^i = \sigma(f^i, k)$ au lieu de $u^i = \sigma(f^i, k + u^{i+1})$.

Théorème 2.4.13. ([9]) (*La dépendance lipschitzienne continue*) Soit C une constante telle que $Ca_0^i(x) \geq 1$. Alors, nous avons :

$$\max_{1 \leq i \leq M} \|u^i - \tilde{u}^i\|_\infty \leq C(|k - \tilde{k}| + \|f^i - \tilde{f}^i\|_\infty)$$

Définition 2.4.1. (Sous-solution continue) $(w^1, \dots, w^M) \in (H_0^1(\Omega))^M$ est une sous-solution continue du système d'IQV (2.2) donc elle vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(w^i, v) \leq (f^i + \lambda w^i, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad v \geq 0 \\ w^i \leq k + w^{i+1}, \quad v \leq k + w^{i+1} \\ w^{M+1} = w^1, \quad i = \overline{1, M} \end{array} \right. \quad (2.63)$$

Théorème 2.4.14. ([6]) Soit X l'ensemble de toutes les sous-solutions continues. Alors, la solution du système d'IQV (2.2) est le plus grand élément de X .

Comme pour le problème continu, nous pouvons aborder le problème discret en considérant le système (2.35). Nous avons vu que sous le principe du maximum discret [12], ce système admet une unique solution [6].

Par analogie au cas continu, nous avons les théorèmes suivants :

Théorème 2.4.15. ([9]) (**La dépendance lipschitzienne discrète**) Soient $u_h^i = \sigma_h(f^i, k)$, $\tilde{u}_h^i = \sigma_h(\tilde{f}^i, \tilde{k})$ et C une constante telle que $Ca_0^i(x) \geq 1$. Alors, sous le principe du maximum discret, nous avons :

$$\max_{1 \leq i \leq M} \|u_h^i - \tilde{u}_h^i\|_\infty \leq C(|k - \tilde{k}| + \|f^i - \tilde{f}^i\|_\infty)$$

Définition 2.4.2. (Sous-solution discrète) $(w_h^1, \dots, w_h^M) \in \mathbb{V}_h$ est une sous-solution discrète du système d'IQV (2.35) donc elle vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(w_h^i, \varphi_s) \leq (f^i + \lambda w_h^i, \varphi_s) \quad \forall \varphi_s; s = 1, \dots, m(h) \\ w_h^i \leq k + w_h^{i+1} \\ w_h^{M+1} = w_h^1 \end{array} \right. \quad (2.64)$$

Théorème 2.4.16. ([6]) Soit X_h l'ensemble de toutes les sous-solutions discrètes. Alors, sous le principe du maximum discret, la solution du système d'IQV (2.35) est le plus grand élément de X_h .

2.4.3.1 Estimation de l'erreur en norme L^∞

Théorème 2.4.17. Il existe une constante C indépendante à la fois de h et de k telle que :

$$\max_{1 \leq i \leq M} \|u^i - u_h^i\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

L'ordre optimal de convergence nécessite la condition de régularité discrète des obstacles $k + u_h^{i+1}$.

Lemme 2.4.18. (Régularité discrète) *Il existe une famille de seconds membres $\{g^{1(h)}, \dots, g^{M(h)}\}_{h>0}$ et une constante C indépendante de h telle que :*

$$\|g^{i(h)}\|_{\infty} \leq C$$

et

$$b^i(u_h^i, v) = (g^{i(h)}, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}_h \quad (2.65)$$

Preuve. La démonstration est une adaptation de [17]. □

Soit $u^{i,(h)}$ la solution continue associée. Alors,

$$\|u^{i,(h)}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \quad (2.66)$$

Par conséquent, grâce à [30], nous avons :

$$\|u^{i,(h)} - u_h^i\|_{\infty} \leq Ch^2 |\log h| \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (2.67)$$

Introduisons maintenant le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(\bar{u}^i, v - \bar{u}^i) \geq (f^i + \lambda u^{i,(h)}, v - \bar{u}^i), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \bar{u}^i \leq k + u^{i+1,(h)}, \quad v \leq k + u^{i+1,(h)} \\ u^{M+1,(h)} = u^{1,(h)}, \quad i = \overline{1, M}, \quad k > 0 \end{array} \right. \quad (2.68)$$

Notons par $\bar{u}^i = \sigma(f^i + \lambda u^{i,(h)}, k + u^{i+1,(h)})$ la solution du système d'IV (2.68) de second membre $f^i + \lambda u^{i,(h)}$ et d'obstacle $k + u^{i+1,(h)}$.

Lemme 2.4.19.

$$\|\bar{u}^i - u_h^i\|_{\infty} \leq Ch^2 |\log h|^2 \quad (2.69)$$

Preuve.

Notons par $\bar{\omega}_{ih} = \sigma_h(f^i + \lambda u^{i,(h)}, k + u^{i+1,(h)})$ l'approximation de $\bar{u}^i = \sigma(f^i + \lambda u^{i,(h)}, k + u^{i+1,(h)})$.

Puisque $u^{i+1,(h)} \in W^{2,p}(\Omega)$ et en utilisant le résultat de l'estimation de l'erreur en norme L^∞ du système d'IV elliptiques de [15], nous obtenons :

$$\left\| \bar{u}^i - \bar{\omega}_{ih} \right\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

□

D'un autre côté, $u_h^i = \sigma_h(f^i + \lambda u_h^i, k + u_h^{i+1})$. En combinant la dépendance lipschitzienne à la fois par rapport au second membre et à l'obstacle pour le système d'IV elliptiques ainsi que l'estimation (2.67), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\omega}_{ih} - u_h^i \right\|_\infty &\leq C \left(\left\| (f^i + \lambda u^{i,(h)}) - (f^i + \lambda u_h^i) \right\|_\infty + \left\| (k + u^{i+1,(h)}) - (k + u_h^{i+1}) \right\|_\infty \right) \\ &\leq C \lambda \left(\left\| u^{i,(h)} - u_h^i \right\|_\infty + \left\| u^{i+1,(h)} - u_h^{i+1} \right\|_\infty \right) \leq Ch^2 |\log h|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left\| \bar{u}^i - u_h^i \right\|_\infty \leq \left\| \bar{u}^i - \bar{\omega}_{ih} \right\|_\infty + \left\| \bar{\omega}_{ih} - u_h^i \right\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Lemme 2.4.20.

$$\left\| u^{i,(h)} - \bar{u}^i \right\|_\infty \leq Ch^2 |\log h|^2 \quad (2.70)$$

Preuve.

Car :

$$\left\| u^{i,(h)} - \bar{u}^i \right\|_\infty \leq \left\| u^{i,(h)} - u_h^i \right\|_\infty + \left\| u_h^i - \bar{u}^i \right\|_\infty$$

En utilisant (2.67) et (2.69), nous obtenons :

$$\left\| u^{i,(h)} - \bar{u}^i \right\|_{\infty} \leq Ch^2 |\log h|^2$$

□

Théorème 2.4.21. *Il existe $(\beta^{1,(h)}, \dots, \beta^{M,(h)})$ tel que :*

$$\beta^{i,(h)} \leq u^i \quad \text{et} \quad \left\| \beta^{i,(h)} - u^i \right\|_{\infty} \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Preuve.

Effectivement, \bar{u}^i étant une solution du système d'IV (2.68), elle est aussi une sous-solution vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(\bar{u}^i, v) \leq (f^i + \lambda u^{i,(h)}, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad v \geq 0 \\ \bar{u}^i \leq k + u^{i+1,(h)}, \quad v \leq k + u^{i+1,(h)} \\ u^{M+1,(h)} = u^{1,(h)}, \quad i = \overline{1, M} \end{array} \right.$$

Alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(\bar{u}^i, v) \leq (f^i + \lambda \left\| u^{i,(h)} - \bar{u}^i \right\|_{\infty} + \lambda \bar{u}^i, v) \\ \bar{u}^i \leq k + \left\| u^{i+1,(h)} - \bar{u}^{i+1} \right\|_{\infty} + \bar{u}^{i+1} \\ \bar{u}^{M+1,(h)} = \bar{u}^{1,(h)}, \quad i = \overline{1, M} \end{array} \right.$$

Ainsi, en utilisant (2.70), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(\bar{u}^i, v) \leq (f^i + \lambda Ch^2 |\log h|^2 + \lambda \bar{u}^i, v) \\ \bar{u}^i \leq k + Ch^2 |\log h|^2 + \bar{u}^{i+1} \\ \bar{u}^{M+1,(h)} = \bar{u}^{1,(h)}, \quad i = \overline{1, M} \end{array} \right.$$

Donc, $(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^M)$ est une sous solution du système d'IQV (2.2) de second membre $(f^1 + \lambda Ch^2 |\log h|^2, \dots, f^M + \lambda Ch^2 |\log h|^2)$ et de paramètre $\tilde{k} = k + Ch^2 |\log h|^2$.

Nous allons noter par $\bar{U}^i = \sigma(f^i + \lambda Ch^2 |\log h|^2, k + Ch^2 |\log h|^2)$ la solution d'un tel système. Donc, comme $u^i = \sigma(f^i, k)$ est une solution du système (2.2) et en utilisant le théorème (2.4.13), nous obtenons :

$$\left\| u^i - \bar{U}^i \right\|_{\infty} \leq C(|k - (k + \lambda Ch^2 |\log h|^2)| + \left\| f^i - (f^i + \lambda Ch^2 |\log h|^2) \right\|_{\infty}) \leq Ch^2 |\log h|^2$$

Par conséquent, en utilisant le théorème (2.4.14), nous obtenons :

$$\bar{u}^i \leq \bar{U}^i \leq u^i + Ch^2 |\log h|$$

et en prenant

$$\beta^{i,(h)} = \bar{u}^i - Ch^2 |\log h|^2$$

Nous obtenons clairement

$$\beta^{i,(h)} \leq u^i$$

Finalement, en utilisant (2.69), nous obtenons :

$$\left\| \beta^{i,(h)} - u_h^i \right\|_{\infty} \leq \left\| \bar{u}^i - Ch^2 |\log h|^2 - u_h^i \right\|_{\infty} \leq Ch^2 |\log h|^2$$

□

Théorème 2.4.22. *Il existe $(\alpha_h^1, \dots, \alpha_h^M)$ tel que :*

$$\alpha_h^i \leq u_h^i \quad \text{et} \quad \left\| \alpha_h^i - u^i \right\|_{\infty} \leq Ch^2 |\log h|^2 \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (2.71)$$

Preuve.

Considérons le système d'IV suivant :

$$\begin{cases} b^i(\bar{u}_h^i, v_h - \bar{u}_h^i) \leq (f^i + \lambda u^i, v_h - \bar{u}_h^i), & \forall v_h \in V_h \\ \bar{u}_h^i \leq r_h(k + u^{i+1}), & v_h \leq r_h(k + u^{i+1}) \\ u^{M+1} = u^1, & i = \overline{1, M} \end{cases} \quad (2.72)$$

Nous combinons avec l'estimation :

$$\left\| u^i - \bar{u}_h^i \right\|_{\infty} \leq Ch^2 |\log h|^2 \quad (2.73)$$

et nous utilisons les théorèmes (2.4.15) et (2.4.16) pour obtenir la sous-solution discrète :

$$\alpha_h^i = \bar{u}_h^i - Ch^2 |\log h|^2$$

qui satisfait (2.71).

□

Preuve. (Estimation de l'erreur)

En effet, en faisant appel à la fois aux théorèmes (2.4.21) et (2.4.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_h^i &\leq \beta^{i,(h)} + Ch^2 |\log h|^2 \\ &\leq u^i + Ch^2 |\log h|^2 \\ &\leq \alpha_h^i + Ch^2 |\log h|^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left\| u^i - u_h^i \right\|_{\infty} \leq Ch^2 |\log h|^2 \quad \forall i = 1, \dots, M$$

□

CHAPITRE 3

Approximation par la méthode de décomposition de domaine d'un système d'IQV à opérateurs non coercifs

Avant d'entamer le travail original de cette thèse, nous exposons ici les généralités relatives à la méthode de décomposition de domaine de type Schwarz avec recouvrement (et ses variantes alternée et parallèle) et sans recouvrement d'une manière générale. Nous effectuons également une comparaison des deux méthodes en terme de convergence.

Sommaire

3.1 Méthode de décomposition de domaine	75
3.1.1 Historique de la méthode de Schwarz	76
3.1.2 Méthode de Schwarz avec recouvrement	78
3.1.3 Méthode de Schwarz sans recouvrement	80
3.2 Méthode de Schwarz pour un système d'IQV non coercives	82
3.2.1 Suites continues de Schwarz	83
3.2.2 Suites discrètes de Schwarz	84
3.2.3 Algorithme de Schwarz	85
3.2.4 Convergence monotone de l'algorithme de Schwarz	85
3.2.5 Analyse de l'erreur en norme L^∞	99

3.1 Méthode de décomposition de domaine

De nombreuses applications en sciences de l'ingénierie nécessitent la résolution de systèmes linéaires de grande taille. La recherche d'une méthode de résolution à la fois efficace, robuste et adaptée aux architectures modernes d'ordinateurs constitue donc

une quête fondamentale. L'efficacité en temps de calcul est liée directement au nombre d'opérations nécessaires permettant l'obtention de la solution du problème donné.

Les simulations numériques induisent un large volume de données rendant les méthodes de résolution directes pénalisantes au niveau de l'emplacement mémoire nécessaire.

Les systèmes linéaires proviennent d'une discrétisation d'un problème continu et la résolution de ces derniers à une précision plus élevée que l'erreur de discrétisation s'avère donc inutile. Ces deux principales raisons conduisent à l'emploi de méthodes de résolution itératives qui, en cas de mauvais conditionnement, peinent à converger, stagnent ou éventuellement divergent. C'est pour cette raison qu'il est nécessaire d'employer un préconditionnement, c'est-à-dire un opérateur qui transforme le système linéaire initial en un autre possédant la même solution mais offrant un meilleur conditionnement et donc plus propice à l'utilisation de méthodes itératives.

Une classe de préconditionnement, bien adaptée au calcul parallèle, est issue de l'idée de décomposition de domaine. Ces méthodes sont basées généralement sur un découpage de l'équation aux dérivées partielles, ou de son approximation, en des sous-domaines définis sur des domaines de taille réduite formant une partition du domaine global. L'efficacité de ces méthodes est telle que même sur une architecture série, le gain de temps est considérable.

Historiquement, ces méthodes ont été introduites pour démontrer d'un point de vue théorique l'existence de solution au problème de Dirichlet sur des domaines plus complexes que ceux pour lesquels un calcul explicite est possible (disque, carré,...). Aujourd'hui, ces méthodes sont plutôt utilisées à des fins numériques afin d'accélérer la résolution des problèmes, ou même de permettre un calcul parallèle des solutions.

3.1.1 Historique de la méthode de Schwarz

La première méthode de décomposition de domaine a été développée à la fin du 19^{ème} siècle par le mathématicien H. A. Schwarz [14] dans le but d'étudier l'opérateur de Laplace. Son idée était de traiter le problème dans le cas où Ω est la réunion avec recouvrement de deux domaines simples : l'union d'un rectangle et d'un disque représenté dans la Figure 3.1.

Dans cette courte présentation des méthodes de Schwarz, nous nous basons sur le problème elliptique avec conditions de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous allons nous limiter au cas d'un partitionnement du domaine global Ω en deux sous-domaines tels que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ et } \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$$

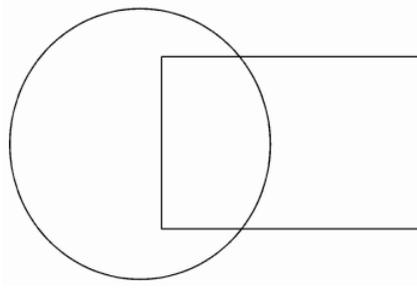


FIGURE 3.1 – La fameuse figure de Schwarz

3.1.1.1 Algorithme 1 (Schwarz 1870)

Sur Ω_1 :

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f_1 \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = g_1 \text{ sur } \Lambda_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Sur Ω_2 :

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f_2 \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = g_2 \text{ sur } \Lambda_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Où : $f = f_j |_{\Omega_j}$, $u = u_j |_{\Omega_j}$ $\forall j = 1, 2$

Et :

$$\Gamma_j = \partial\Omega_j, \Lambda_j = \partial\Omega_j \cap \Omega_s, j \neq s, j = 1, 2$$

3.1.1.2 Convergence originale de Schwarz

H. A. Schwarz a démontré la convergence vers la solution globale de cet algorithme dans un cadre assez général en utilisant le principe du maximum. Par la suite, après la découverte de la formulation variationnelle, P. L. Lions donne une autre interprétation de cet algorithme [24, 25, 26] en précisant que la convergence dépend de la taille du recouvrement des sous-domaines et du pas de discrétisation.

L'inconvénient de ce type de découpage est la difficulté de définir les zones de recouvrement lorsque les géométries sont très complexes et les difficultés dans sa mise en oeuvre

numérique. Il est à noter que plus le recouvrement est important, plus la convergence de la méthode est meilleure.

Synthétiquement, les méthodes de décomposition de domaine peuvent se scinder en deux grandes familles :

- avec recouvrement
- sans recouvrement

3.1.2 Méthode de Schwarz avec recouvrement

Ici, le domaine global Ω est divisé en deux régions avec recouvrement comme dans la Figure 3.2.

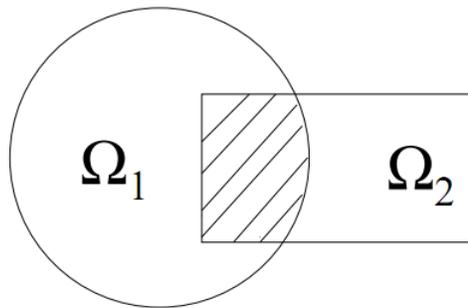


FIGURE 3.2 – Schwarz avec recouvrement

Les problèmes locaux de type Dirichlet sont résolus sur chaque sous-domaine et le couplage entre les solutions des différents sous-domaines est assuré par la région commune dite de recouvrement. Nous pouvons distinguer deux cas : lorsque les interfaces sont disjointes ou croisées (voire Figure 3.3).

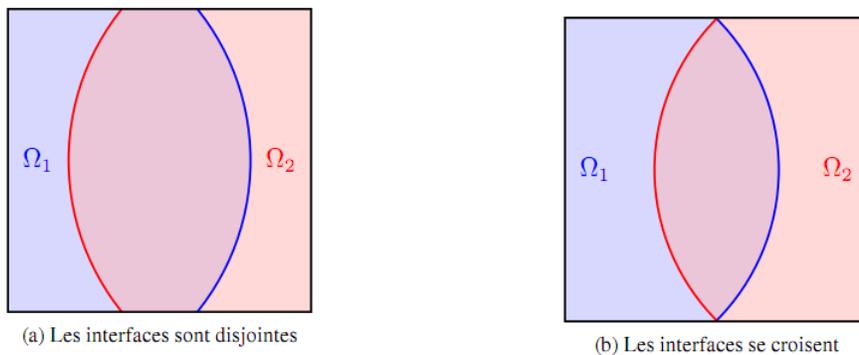


FIGURE 3.3 – Décomposition du carré unité

Nous présentons deux variantes des méthodes de Schwarz avec recouvrement :

- méthode alternée (multiplicative)
- méthode parallèle (additive)

3.1.2.1 Algorithme 2 (méthode alternée ou Schwarz multiplicatif)

L'algorithme alterné de Schwarz consiste à construire des suites $(u_1^n)_n \subset H^1(\Omega_1)$, $(u_2^n)_n \subset H^1(\Omega_2)$ et choisir des initialisations u_1^0, u_2^0 telles que pour tout $n \geq 0$, effectuer de façon successive le calcul de :

$u_1^{n+1} \in H^1(\Omega_1)$ est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f_1 \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = g_1 \text{ sur } \Lambda_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.4)$$

$u_2^{n+1} \in H^1(\Omega_2)$ est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f_2 \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = g_2 \text{ sur } \Lambda_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^{n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans cette méthode, les conditions de Dirichlet sont les dernières valeurs d'interfaces calculées par le sous-domaine voisin. C'est-à-dire que le sous-domaine Ω_2 doit attendre que le calcul soit fait sur son voisin Ω_1 avant d'entamer son propre calcul.

3.1.2.2 Convergence de l'algorithme

La convergence a eu lieu quand u_1^n et u_2^n sont suffisamment proches sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Son étude peut toujours se ramener au cas $f = 0$ et $g = 0$ en soustrayant la solution limite recherchée u de toutes les valeurs de u_1^n et u_2^n . Le problème revient donc à savoir si, en partant de données initiales non nulles u_1^0 et u_2^0 , l'algorithme précédent (avec $f = 0$ et $g = 0$) fournit bien deux suites qui convergent vers 0.

3.1.2.3 Algorithme 3 (méthode parallèle ou Schwarz additif)

Plusieurs décennies plus tard, P. L. Lions s'est intéressé aux méthodes élaborées par Schwarz. Il fut le premier à proposer une extension moderne de cette méthode en donnant une version parallèle qui consiste à résoudre les sous problèmes en démarrant des initialisations u_1^0, u_2^0 et en calculant simultanément les solutions sur chaque sous-domaine. Cette modification affecte évidemment la convergence de la méthode. Dans cette méthode, les conditions de Dirichlet sont les valeurs d'interfaces calculées par le sous-domaine voisin à l'itération précédente. Donc, nous résolvons les deux sous problèmes en parallèle :

Sur Ω_1 :

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f_1 \text{ dans } \Omega_1 \\ u_1^{n+1} = g_1 \text{ sur } \Lambda_1 \\ u_1^{n+1} = u_2^n \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Sur Ω_2 :

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f_2 \text{ dans } \Omega_2 \\ u_2^{n+1} = g_2 \text{ sur } \Lambda_2 \\ u_2^{n+1} = u_1^n \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

Remarque 3.1.1. *La méthode de Schwarz additive converge plus lentement que dans sa version multiplicative. Il faut souligner que la vitesse de convergence de ces méthodes est fortement influencée par la taille du recouvrement.*

Remarque 3.1.2. *Des travaux anciens ont démontré que la méthode avec recouvrement est équivalente à une méthode sans recouvrement munie d'un préconditionnement spécifique à l'interface.*

3.1.3 Méthode de Schwarz sans recouvrement

La méthode de Schwarz sans recouvrement est une méthode de décomposition de domaine qui fonctionne lorsque l'intersection entre les deux sous-domaines se limite aux interfaces (voir Figure 3.4).

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \text{ et } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \Gamma_{1,2}$$

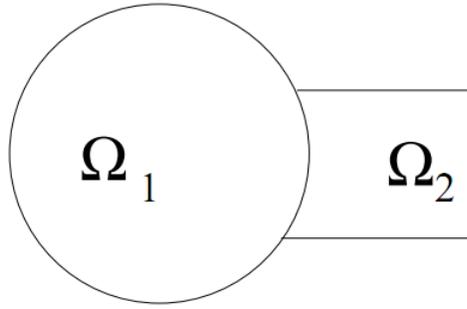


FIGURE 3.4 – Schwarz sans recouvrement

$\Gamma_{1,2}$ est la frontière entre Ω_1 et Ω_2 .

3.1.3.1 Algorithme 4

Soit $(u_j^0)_{j=1,2}$ l'approximation initiale de la solution u sur chaque sous-domaine et $(u_j^n)_{j=1,2}$ sa valeur à l'itération n .

L'algorithme sur Ω_1 s'écrit donc :

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f_1 \text{ dans } \Omega_1 \\ P_1 u_1^{n+1} = P_1 u_2^n \text{ sur } \Gamma_{1,2} \end{cases} \quad (3.8)$$

Sur Ω_2 :

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f_2 \text{ dans } \Omega_2 \\ P_2 u_2^{n+1} = P_2 u_1^n \text{ sur } \Gamma_{1,2} \end{cases} \quad (3.9)$$

Où P_1 et P_2 sont des opérateurs d'interfaces.

Dans cet algorithme, la résolution des deux sous problèmes se déroule en parallèle ; c'est-à-dire qu'à l'itération courante, chaque sous domaine a besoin d'information à l'itération précédente de son voisin avec lequel il a des frontières non vides.

Nous nous convainquons aisément qu'une méthode à base de conditions aux limites de Dirichlet (ou de Neumann) n'a aucune chance de fonctionner. C'est pourquoi, P. L. Lions [26] a proposé une version de ces méthodes basées sur des conditions de transmission de type Fourier. Plus exactement, en connaissant les approximations u^n sur tous les sous-domaines, nous pouvons calculer les nouvelles approximations u^{n+1} .

3.1.3.2 Convergence de l'algorithme

Théorème 3.1.1. ([24, 25, 26]) Les suites $(u_i^n)_n$ obtenues par la méthode de Schwarz sans recouvrement vérifient dans $H^1(\Omega_i)$ pour tout i :

$$u_i^n \rightarrow u|_{\Omega_i} \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

3.2 Méthode de Schwarz pour un système d'IQV non coercives

Dans cette partie, nous allons développer le travail original de cette thèse consistant en l'approximation par la méthode de décomposition de domaine de type Schwarz du système d'IQV à opérateurs non coercifs (2.2) présenté dans le chapitre 2. L'existence et l'unicité de la solution de l'équation d'HJB ont été démontrées ainsi que l'approximation par éléments finis en s'appuyant sur l'approche algorithmique de Bensoussan Lions. Pour notre part, nous allons démontrer des résultats de convergence monotone et géométrique des itérés de l'algorithme de Schwarz et établir une approximation de l'erreur en norme uniforme.

La décomposition se fait en découpant le domaine global Ω en deux sous-domaines et le problème se résout alternativement sur chacun d'eux.

Nous allons donc nous intéresser au système suivant :

Trouver $U = (u^1, \dots, u^M) \in (H_0^1(\Omega))^M$ solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} b^i(u^i, v - u^i) \geq (f^i + \lambda u^i, v - u^i), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u^i \leq k + u^{i+1}, \quad v \leq k + u^{i+1} \\ u^{M+1} = u^1, \quad i = \overline{1, M} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Pour ce faire, nous allons définir la méthode de décomposition, l'algorithme de Schwarz ainsi que les suites continues et discrètes générées par cet algorithme.

3.2.0.1 Méthode

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et régulier.

Nous décomposons Ω en deux sous-domaines Ω_1, Ω_2 tels que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (3.11)$$

u satisfait la condition de régularité locale :

$$u|_{\Omega_j} \in W^{2,p}(\Omega_j), \quad 2 \leq p \leq \infty, \quad j = 1, 2 \quad (3.12)$$

Notons par :

$$\Gamma_j = \partial\Omega_j, \quad \Lambda_j = \partial\Omega_j \cap \Omega_s, \quad s \neq j, \quad s, j = 1, 2 \quad (3.13)$$

Avec :

$$\bar{\Lambda}_j \cap \bar{\Lambda}_s = \emptyset \quad (3.14)$$

3.2.1 Suites continues de Schwarz

Nous considérons le problème initial (2.2) et nous définissons les suites alternatives de Schwarz :

(u_1^{in+1}) sur Ω_1 telle que $u_1^{in+1} \in K_1^{in+1}$ résout le système :

$$\begin{cases} b_1^i(u_1^{in+1}, v - u_1^{in+1}) \geq (f_1^i + \lambda u_1^{in}, v - u_1^{in+1}), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_1^{in+1} \leq k + u_1^{i+1n+1}, \quad v \leq k + u_1^{i+1n+1}, \quad i = \overline{1, M} \\ u_1^{in+1} = u_2^{in} \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad v = u_2^{in} \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Où :

$$K_1^{in+1} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega), \quad v \leq k + u_1^{i+1n+1}, \quad v = u_2^{in} \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad \forall i = 1, \dots, M \right\} \quad (3.16)$$

Et

(u_2^{in+1}) sur Ω_2 telle que $u_2^{in+1} \in K_2^{in+1}$ résout le système :

$$\begin{cases} b_2^i(u_2^{in+1}, v - u_2^{in+1}) \geq (f_2^i + \lambda u_2^{in}, v - u_2^{in+1}), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_2^{in+1} \leq k + u_2^{i+1n+1}, \quad v \leq k + u_2^{i+1n+1}, \quad i = \overline{1, M} \\ u_2^{in+1} = u_1^{in+1} \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad v = u_1^{in+1} \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Où :

$$K_2^{i\ n+1} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega), v \leq k + u_2^{i+1\ n+1}, v = u_1^{i\ n+1} \text{ sur } \Gamma_2 \quad \forall i = 1, \dots, M \right\} \quad (3.18)$$

Nous avons :

$$f_j^i + \lambda u_j^{i\ n} = (f + \lambda u^{i\ n}) | \Omega_j \text{ et } u_j^i = u^i | \Omega_j, j = 1, 2 \quad (3.19)$$

Théorème 3.2.1. ([10]) *Il existe une constante C indépendante de h telle que :*

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^2 |\log h|^3$$

Ordre de convergence de la méthode des éléments finis standard de l'équation d'HJB (2.1) démontrée dans le chapitre 2.

3.2.2 Suites discrètes de Schwarz

Nous définissons maintenant les suites discrètes de Schwarz (u_h^{in+1}) associées aux suites continues.

Sur Ω_1 , $u_{1h}^{in+1} \in K_{1h}^{in+1}$ est une solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^i(u_{1h}^{in+1}, v_h - u_{1h}^{in+1}) \geq (f_1^i + \lambda u_{1h}^{in}, v_h - u_{1h}^{in+1}), \quad \forall v_h \in V_h \\ u_{1h}^{in+1} \leq k + u_{1h}^{i+1\ n+1}, \quad v_h \leq k + u_{1h}^{i+1\ n+1}, \quad i = \overline{1, M} \\ u_{1h}^{in+1} = u_{2h}^{in} \text{ sur } \Gamma_1, \quad v_h = u_{2h}^{in} \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Où :

$$K_{1h}^{in+1} = \left\{ v_h \in V_h, v_h \leq k + u_{1h}^{i+1\ n+1}, v_h = u_{2h}^{in} \text{ sur } \Gamma_1 \quad \forall i = 1, \dots, M \right\} \quad (3.21)$$

Sur Ω_2 , $u_{2h}^{in+1} \in K_{2h}^{in+1}$ est une solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2^i(u_{2h}^{in+1}, v_h - u_{2h}^{in+1}) \geq (f_2^i + \lambda u_{2h}^{in}, v_h - u_{2h}^{in+1}), \quad \forall v_h \in V_h \\ u_{2h}^{in+1} \leq k + u_{2h}^{i+1\ n+1}, \quad v_h \leq k + u_{2h}^{i+1\ n+1}, \quad i = \overline{1, M} \\ u_{2h}^{in+1} = u_{1h}^{in+1} \text{ sur } \Gamma_2, \quad v_h = u_{1h}^{in+1} \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Où :

$$K_{2h}^{in+1} = \left\{ v_h \in V_h, v_h \leq k + u_{2h}^{i+1\ n+1}, v_h = u_{1h}^{in+1} \text{ sur } \Gamma_2 \quad \forall i = 1, \dots, M \right\} \quad (3.23)$$

3.2.3 Algorithme de Schwarz

Nous utilisons la notion de sous et sur-solutions pour démontrer la convergence monotone des itérés de l'algorithme de Schwarz.

Notons par \bar{u}_h la sur-solution et par \underline{u}_h la sous-solution.

Commençons par :

$$\underline{u}_{1h}^{i0} = 0 \text{ sur } \Omega_1 \text{ and } \underline{u}_{2h}^{i0} = 0 \text{ sur } \Omega_2 \quad (3.24)$$

Sur Ω_1 , \bar{u}_{1h}^{i0} est une solution du système d'équations suivant :

$$b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i0}, v_h) = (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i0}, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.25)$$

Sur Ω_2 , \bar{u}_{2h}^{i0} est une solution du système d'équations suivant :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i0}, v_h) = (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i0}, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.26)$$

Remarque 3.2.1. Les suites $(u_{jh}^{in+1})_{i=1,\dots,M}, \forall n \geq 0, j = 1, 2$ sont considérées, à la fois, sous et sur-solutions.

3.2.4 Convergence monotone de l'algorithme de Schwarz

Théorème 3.2.2. Les suites $(u_{jh}^{in+1})_{j=1,2}, i = 1, \dots, M, n \in \mathbb{N}$ générées par l'algorithme de Schwarz convergent par monotonie vers l'unique solution du problème discret.

Preuve.

Nous procédons par récurrence pour démontrer que la suite des sur-solutions est décroissante, la suite des sous-solutions est croissante et enfin :

$$\underline{u}_h \leq \bar{u}_h \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrons que les suites (\bar{u}_{jh}^{in+1}) sont décroissantes sur chaque sous-domaine $\forall i = \overline{1, M}$ et $\forall n \geq 0$.

* Sur Ω_1 pour $n = 0$, nous avons :

\bar{u}_{1h}^{i1} est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i1}, v_h - \bar{u}_{1h}^{i1}) \geq (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i0}, v_h - \bar{u}_{1h}^{i1}), \forall v_h \in V_h \\ \bar{u}_{1h}^{i1} \leq k + \bar{u}_{1h}^{i+11} \quad , \quad v_h \leq k + \bar{u}_{1h}^{i+11} \\ \bar{u}_{1h}^{i1} = \bar{u}_{2h}^{i0}, \quad v_h = \bar{u}_{2h}^{i0} \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Pour toute $\phi \in H_0^1(\Omega)$, nous posons $\phi^+ = \max(\phi, 0)$

Nous choisissons $v_h = \bar{u}_{1h}^{i1} - (\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+$, remplaçons dans (3.27) et obtenons :

$$\begin{aligned} b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i1}, -(\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+) &\geq (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i0}, -(\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+) \\ \Rightarrow b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i1}, (\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+) &\leq (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i0}, (\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+) \end{aligned} \quad (3.28)$$

\bar{u}_{1h}^{i0} est une solution du système d'équations :

$$b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i0}, v_h) = (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i0}, v_h) \quad \forall v \in V_h$$

$v_h = (\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+$ est aussi une solution. Nous avons donc :

$$b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i0}, (\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+) = (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i0}, (\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+) \quad (3.29)$$

Nous remplaçons (3.29) dans (3.28) et obtenons :

$$\begin{aligned} b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i1}, (\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+) &\leq b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i0}, (\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+) \\ \Rightarrow b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0}, (\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+) &\leq 0 \quad , \quad (\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0})^+ \geq 0 \\ \Rightarrow \bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0} &\leq 0 \\ \Rightarrow \bar{u}_{1h}^{i1} \leq \bar{u}_{1h}^{i0}; \bar{u}_{1h}^{i1} = \bar{u}_{2h}^{i0} \text{ sur } \Gamma_1; \bar{u}_{1h}^{i1} \geq 0 &\Rightarrow \bar{u}_{2h}^{i0} \geq 0 \end{aligned}$$

* Sur Ω_2 pour $n = 0$, nous avons :

\bar{u}_{2h}^{i1} est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i1}, v_h - \bar{u}_{2h}^{i1}) \geq (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i0}, v_h - \bar{u}_{2h}^{i1}), \forall v_h \in V_h \\ \bar{u}_{2h}^{i1} \leq k + \bar{u}_{2h}^{i+11} \quad , \quad v_h \leq k + \bar{u}_{2h}^{i+11} \\ \bar{u}_{2h}^{i1} = \bar{u}_{1h}^{i1}, \quad v_h = \bar{u}_{1h}^{i1} \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Nous posons $v_h = \bar{u}_{2h}^{i1} - (\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+$ dans (3.30) et obtenons :

$$\begin{aligned} b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i1}, -(\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+) &\geq (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i0}, -(\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+) \\ \Rightarrow b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i1}, (\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+) &\leq (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i0}, (\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+) \end{aligned} \quad (3.31)$$

\bar{u}_{2h}^{i0} est une solution du système d'équations :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i0}, v_h) = (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i0}, v_h) \quad \forall v \in V_h$$

$v_h = (\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+$ est aussi une solution. Donc, nous avons :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i0}, (\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+) = (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i0}, (\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+) \quad (3.32)$$

Nous remplaçons (3.32) dans (3.31) et obtenons :

$$\begin{aligned} b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i1}, (\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+) &\leq b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i0}, (\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+) \\ \Rightarrow b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0}, (\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+) &\leq 0 \quad , \quad (\bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0})^+ \geq 0 \\ &\Rightarrow \bar{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i0} \leq 0 \\ \Rightarrow \bar{u}_{2h}^{i1} &\leq \bar{u}_{2h}^{i0}, \quad \bar{u}_{2h}^{i1} = \bar{u}_{1h}^{i1} \text{ sur } \Gamma_2; \quad \bar{u}_{2h}^{i1} \geq 0 \Rightarrow \bar{u}_{1h}^{i1} \geq 0 \end{aligned}$$

* Sur Ω_1 pour $n = 1$, nous avons :

\bar{u}_{1h}^{i2} est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i2}, v_h - \bar{u}_{1h}^{i2}) \geq (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i1}, v_h - \bar{u}_{1h}^{i2}), \forall v_h \in V_h \\ \bar{u}_{1h}^{i2} \leq k + \bar{u}_{1h}^{i+12} \quad , \quad v_h \leq k + \bar{u}_{1h}^{i+12} \\ \bar{u}_{1h}^{i2} = \bar{u}_{2h}^{i1}, \quad v_h = \bar{u}_{2h}^{i1} \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Nous posons $v_h = \bar{u}_{1h}^{i2} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ dans (3.33) et obtenons :

$$b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i2}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i1}, \tilde{v}_h) \quad (3.34)$$

Dans le système (3.27), nous posons $v_h = \bar{u}_{1h}^{i1} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i0}, \tilde{v}_h) \quad (3.35)$$

En soustrayant (3.35) de (3.34), nous obtenons :

$$b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i2} - \bar{u}_{1h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\bar{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i0}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car nous avons :

$$\bar{u}_{1h}^{i1} \leq \bar{u}_{1h}^{i0}, \quad \tilde{v}_h \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

Donc :

$$b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i2} - \bar{u}_{1h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq 0, \quad \tilde{v}_h \geq 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{1h}^{i2} - \bar{u}_{1h}^{i1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{1h}^{i2} \leq \bar{u}_{1h}^{i1} \quad ; \quad \bar{u}_{1h}^{i2} = \bar{u}_{2h}^{i1} \text{ sur } \Gamma_1; \quad \bar{u}_{1h}^{i2} \geq 0 \Rightarrow \bar{u}_{2h}^{i1} \geq 0$$

* Sur Ω_2 pour $n = 1$, nous avons :

\bar{u}_{2h}^{i2} est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i2}, v_h - \bar{u}_{2h}^{i2}) \geq (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i1}, v_h - \bar{u}_{2h}^{i2}), \forall v_h \in V_h \\ \bar{u}_{2h}^{i2} \leq k + \bar{u}_{2h}^{i+12} \quad , \quad v_h \leq k + \bar{u}_{2h}^{i+12} \\ \bar{u}_{2h}^{i2} = \bar{u}_{1h}^{i2}, \quad v_h = \bar{u}_{1h}^{i2} \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Nous posons $v_h = \bar{u}_{2h}^{i,2} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ dans (3.36) et obtenons :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i,2}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i,1}, \tilde{v}_h) \quad (3.37)$$

Dans le système (3.30), nous posons $v_h = \bar{u}_{2h}^{i,1} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i,1}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i,0}, \tilde{v}_h) \quad (3.38)$$

En soustrayant (3.38) de (3.37), nous obtenons :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i,2} - \bar{u}_{2h}^{i,1}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\bar{u}_{2h}^{i,1} - \bar{u}_{2h}^{i,0}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car nous avons :

$$\bar{u}_{2h}^{i,1} \leq \bar{u}_{2h}^{i,0}, \quad \tilde{v}_h \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

Donc :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i,2} - \bar{u}_{2h}^{i,1}, \tilde{v}_h) \leq 0, \quad \tilde{v}_h \geq 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{2h}^{i,2} - \bar{u}_{2h}^{i,1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{2h}^{i,2} \leq \bar{u}_{2h}^{i,1}; \quad \bar{u}_{2h}^{i,2} = \bar{u}_{1h}^{i,2} \text{ sur } \Gamma_2; \quad \bar{u}_{2h}^{i,2} \geq 0 \Rightarrow \bar{u}_{1h}^{i,2} \geq 0$$

* Sur Ω_1 :

Nous supposons que la démonstration est vraie pour n c'est-à-dire : $\bar{u}_{1h}^{i,n} \leq \bar{u}_{1h}^{i,n-1}$; $\bar{u}_{1h}^{i,n} = \bar{u}_{2h}^{i,n-1}$ sur Γ_1 et nous la démontrons pour $n+1$

$\bar{u}_{1h}^{i,n}$ est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i,n}, v_h - \bar{u}_{1h}^{i,n}) \geq (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i,n-1}, v_h - \bar{u}_{1h}^{i,n}), \forall v_h \in V_h \\ \bar{u}_{1h}^{i,n} \leq k + \bar{u}_{1h}^{i+1,n}, \quad v_h \leq k + \bar{u}_{1h}^{i+1,n} \\ \bar{u}_{1h}^{i,n} = \bar{u}_{2h}^{i,n-1}, \quad v_h = \bar{u}_{2h}^{i,n-1} \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Dans le système (3.20), nous posons $v_h = \bar{u}_{1h}^{i n+1} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i n}, \tilde{v}_h) \quad (3.40)$$

Dans le système (3.39), nous posons $v_h = \bar{u}_{1h}^{i n} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i n}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{i n-1}, \tilde{v}_h) \quad (3.41)$$

En soustrayant (3.41) de (3.40), nous obtenons :

$$b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i n+1} - \bar{u}_{1h}^{i n}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\bar{u}_{1h}^{i n} - \bar{u}_{1h}^{i n-1}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car nous avons :

$$\bar{u}_{1h}^{i n} \leq \bar{u}_{1h}^{i n-1}, \quad \tilde{v}_h \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow b_1^i(\bar{u}_{1h}^{i n+1} - \bar{u}_{1h}^{i n}, \tilde{v}_h) \leq 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{1h}^{i n+1} - \bar{u}_{1h}^{i n} \leq 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{1h}^{i n+1} \leq \bar{u}_{1h}^{i n}; \quad u_{1h}^{i n+1} = u_{2h}^{i n} \text{ sur } \Gamma_1; \quad u_{1h}^{i n+1} \geq 0 \Rightarrow u_{2h}^{i n} \geq 0$$

* Sur Ω_2 :

Nous supposons qu'elle est vraie pour n c'est-à-dire : $\bar{u}_{2h}^{i n} \leq \bar{u}_{2h}^{i n-1}$; $\bar{u}_{2h}^{i n} = \bar{u}_{1h}^{i n}$ sur Γ_2 et nous la démontrons pour $n+1$.

$\bar{u}_{2h}^{i n}$ est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i n}, v_h - \bar{u}_{2h}^{i n}) \geq (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i n-1}, v_h - \bar{u}_{2h}^{i n}), \forall v_h \in V_h \\ \bar{u}_{2h}^{i n} \leq k + \bar{u}_{2h}^{i+1 n}, \quad v_h \leq k + \bar{u}_{2h}^{i+1 n} \\ \bar{u}_{2h}^{i n} = \bar{u}_{1h}^{i n}, \quad v_h = \bar{u}_{1h}^{i n} \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Dans le système (3.22), nous posons $v_h = \bar{u}_{2h}^{i n+1} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i n}, \tilde{v}_h) \quad (3.43)$$

Dans le système (3.42), nous posons $v_h = \bar{u}_{2h}^{i n} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i n}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i n-1}, \tilde{v}_h) \quad (3.44)$$

En soustrayant (3.44) de (3.43), nous obtenons :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i n+1} - \bar{u}_{2h}^{i n}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\bar{u}_{2h}^{i n} - \bar{u}_{2h}^{i n-1}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car nous avons :

$$\bar{u}_{2h}^{i n} \leq \bar{u}_{2h}^{i n-1}, \quad \tilde{v}_h \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i n+1} - \bar{u}_{2h}^{i n}, \tilde{v}_h) \leq 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{2h}^{i n+1} - \bar{u}_{2h}^{i n} \leq 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{2h}^{i n+1} \leq \bar{u}_{2h}^{i n} \quad ; \quad u_{2h}^{i n+1} = u_{1h}^{i n+1} \text{ sur } \Gamma_2; \quad u_{2h}^{i n+1} \geq 0 \Rightarrow u_{1h}^{i n+1} \geq 0$$

2. Montrons que les suites $(\underline{u}_{jh}^{i n+1})$ sont croissantes sur chaque sous-domaine $\forall i = \overline{1, M}$ et $\forall n \geq 0$

* Sur Ω_1 pour $n = 0$, nous avons $\underline{u}_{1h}^{i 0} = 0$

$\underline{u}_{1h}^{i 1}$ est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i 1}, v_h - \underline{u}_{1h}^{i 1}) \geq (f_1^i + \lambda \underline{u}_{1h}^{i 0}, v_h - \underline{u}_{1h}^{i 1}), \forall v_h \in V_h \\ \underline{u}_{1h}^{i 1} \leq k + \underline{u}_{1h}^{i+1 1}, \quad v_h \leq k + \underline{u}_{1h}^{i+1 1} \\ \underline{u}_{1h}^{i 1} = \underline{u}_{2h}^{i 0}, \quad v_h = \underline{u}_{2h}^{i 0} \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Nous savons que :

$$f_1^i \geq 0 \Rightarrow \underline{u}_{1h}^{i 1} \geq 0 = \underline{u}_{1h}^{i 0}$$

Alors :

$$\underline{u}_{1h}^{i1} \geq \underline{u}_{1h}^{i0}; \underline{u}_{1h}^{i1} \geq 0 \Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i0} \geq 0$$

* Sur Ω_2 pour $n = 0$, nous avons $\underline{u}_{2h}^{i0} = 0$

\underline{u}_{2h}^{i1} est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i1}, v_h - \underline{u}_{2h}^{i1}) \geq (f_2^i + \lambda \underline{u}_{2h}^{i0}, v_h - \underline{u}_{2h}^{i1}), \forall v_h \in V_h \\ \underline{u}_{2h}^{i1} \leq k + \underline{u}_{2h}^{i+11} \quad , \quad v_h \leq k + \underline{u}_{2h}^{i+11} \\ \underline{u}_{2h}^{i1} = \underline{u}_{1h}^{i1}, \quad v_h = \underline{u}_{1h}^{i1} \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.46)$$

Nous savons que :

$$f_2^i \geq 0 \Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i1} \geq 0 = \underline{u}_{2h}^{i0}$$

Alors :

$$\underline{u}_{2h}^{i1} \geq \underline{u}_{2h}^{i0}; \underline{u}_{2h}^{i1} = \underline{u}_{1h}^{i1}$$

* Sur Ω_1 pour $n = 1$:

\underline{u}_{1h}^{i2} est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i2}, v_h - \underline{u}_{1h}^{i2}) \geq (f_1^i + \lambda \underline{u}_{1h}^{i1}, v_h - \underline{u}_{1h}^{i2}), \forall v_h \in V_h \\ \underline{u}_{1h}^{i2} \leq k + \underline{u}_{1h}^{i+12} \quad , \quad v_h \leq k + \underline{u}_{1h}^{i+12} \\ \underline{u}_{1h}^{i2} = \underline{u}_{2h}^{i1} \text{ sur } \Gamma_1 \quad , \quad v_h = \underline{u}_{2h}^{i1} \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.47)$$

Nous choisissons $v_h = \underline{u}_{1h}^{i2} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ dans (3.47) et obtenons :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i2}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \underline{u}_{1h}^{i1}, \tilde{v}_h) \quad (3.48)$$

Dans le système (3.45), nous posons $v_h = \underline{u}_{1h}^{i1} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \underline{u}_{1h}^{i0}, \tilde{v}_h) \quad (3.49)$$

Le calcul (3.49) – (3.48) donne :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i1} - \underline{u}_{1h}^{i2}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\underline{u}_{1h}^{i0} - \underline{u}_{1h}^{i1}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car nous avons :

$$\underline{u}_{1h}^{i0} \leq \underline{u}_{1h}^{i1}, \tilde{v}_h \geq 0, \lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{1h}^{i1} - \underline{u}_{1h}^{i2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{1h}^{i1} \leq \underline{u}_{1h}^{i2}; \underline{u}_{1h}^{i2} = \underline{u}_{2h}^{i1} \text{ sur } \Gamma_1; \underline{u}_{1h}^{i2} \geq 0 \Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i1} \geq 0$$

* Sur Ω_2 pour $n = 1$:

\underline{u}_{2h}^{i2} est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i2}, v_h - \underline{u}_{2h}^{i2}) \geq (f_2^i + \lambda \underline{u}_{2h}^{i1}, v_h - \underline{u}_{2h}^{i2}), \forall v_h \in V_h \\ \underline{u}_{2h}^{i2} \leq k + \underline{u}_{2h}^{i+1 2}, \quad v_h \leq k + \underline{u}_{2h}^{i+1 2} \\ \underline{u}_{2h}^{i2} = \underline{u}_{1h}^{i2} \text{ sur } \Gamma_2, \quad v_h = \underline{u}_{1h}^{i2} \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Nous choisissons $v_h = \underline{u}_{2h}^{i2} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ dans (3.50) et obtenons :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i2}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \underline{u}_{2h}^{i1}, \tilde{v}_h) \quad (3.51)$$

Dans le système (3.46), nous posons $v_h = \underline{u}_{2h}^{i1} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \underline{u}_{2h}^{i0}, \tilde{v}_h) \quad (3.52)$$

Le calcul (3.52) – (3.51) donne :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i1} - \underline{u}_{2h}^{i2}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\underline{u}_{2h}^{i0} - \underline{u}_{2h}^{i1}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car nous avons :

$$\underline{u}_{2h}^{i0} \leq \underline{u}_{2h}^{i1}, \tilde{v}_h \geq 0, \lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i1} - \underline{u}_{2h}^{i2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i1} \leq \underline{u}_{2h}^{i2}; \underline{u}_{2h}^{i2} = \underline{u}_{1h}^{i2} \text{ sur } \Gamma_2; \underline{u}_{2h}^{i2} \geq 0 \Rightarrow \underline{u}_{1h}^{i2} \geq 0$$

* Sur Ω_1 :

Nous supposons qu'elle est vraie pour n , c'est-à-dire : $\underline{u}_{1h}^{i n-1} \leq \underline{u}_{1h}^{i n}$; $\underline{u}_{1h}^{i n} = \underline{u}_{2h}^{i n-1}$ sur Γ_1 et nous la démontrons pour $n + 1$.

$\underline{u}_{1h}^{i n}$ est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i n}, v_h - \underline{u}_{1h}^{i n}) \geq (f_1^i + \lambda \underline{u}_{1h}^{i n-1}, v_h - \underline{u}_{1h}^{i n}), \forall v_h \in V_h \\ \underline{u}_{1h}^{i n} \leq k + \underline{u}_{1h}^{i+1 n} \quad , \quad v_h \leq k + \underline{u}_{1h}^{i+1 n} \\ \underline{u}_{1h}^{i n} = \underline{u}_{2h}^{i n-1} \text{ sur } \Gamma_1 \quad , \quad v_h = \underline{u}_{2h}^{i n-1} \text{ sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (3.53)$$

Dans le système (3.20), nous posons $v_h = \underline{u}_{1h}^{i n+1} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \underline{u}_{1h}^{i n}, \tilde{v}_h) \quad (3.54)$$

Dans le système (3.53), nous posons $v_h = \underline{u}_{1h}^{i n} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i n}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \underline{u}_{1h}^{i n-1}, \tilde{v}_h) \quad (3.55)$$

Le calcul (3.55) – (3.54) donne :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i n} - \underline{u}_{1h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\underline{u}_{1h}^{i n-1} - \underline{u}_{1h}^{i n}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car nous avons :

$$\underline{u}_{1h}^{i n-1} \leq \underline{u}_{1h}^{i n} \quad , \quad \tilde{v}_h \geq 0 \quad , \quad \lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i n} - \underline{u}_{1h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{1h}^{i n} - \underline{u}_{1h}^{i n+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{1h}^{i n} \leq \underline{u}_{1h}^{i n+1}; \underline{u}_{1h}^{i n+1} = \underline{u}_{2h}^{i n} \text{ sur } \Gamma_1; \underline{u}_{1h}^{i n+1} \geq 0 \Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i n} \geq 0$$

* Sur Ω_2 :

Nous supposons qu'elle est vraie pour n , c'est-à-dire : $\underline{u}_{2h}^{i n-1} \leq \underline{u}_{2h}^{i n}$, $\underline{u}_{2h}^{i n} = \underline{u}_{1h}^{i n}$ sur Γ_2 et nous la démontrons pour $n+1$

$\underline{u}_{2h}^{i n}$ est une solution pour le système d'IV suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i n}, v_h - \underline{u}_{2h}^{i n}) \geq (f_2^i + \lambda \underline{u}_{2h}^{i n-1}, v_h - \underline{u}_{2h}^{i n}), \forall v_h \in V_h \\ \underline{u}_{2h}^{i n} \leq k + \underline{u}_{2h}^{i+1 n} \quad , \quad v_h \leq k + \underline{u}_{2h}^{i+1 n} \\ \underline{u}_{2h}^{i n} = \underline{u}_{1h}^{i n} \text{ sur } \Gamma_2 \quad , \quad v_h = \underline{u}_{1h}^{i n} \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.56)$$

Dans le système (3.22), nous posons $v_h = \underline{u}_{2h}^{i n+1} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \underline{u}_{2h}^{i n}, \tilde{v}_h) \quad (3.57)$$

Dans le système (3.56), nous posons $v_h = \underline{u}_{2h}^{i n} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i n}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \underline{u}_{2h}^{i n-1}, \tilde{v}_h) \quad (3.58)$$

Le calcul (3.58) – (3.57) donne :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i n} - \underline{u}_{2h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\underline{u}_{2h}^{i n-1} - \underline{u}_{2h}^{i n}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car nous avons :

$$\underline{u}_{2h}^{i n-1} \leq \underline{u}_{2h}^{i n} \quad , \quad \tilde{v}_h \geq 0 \quad , \quad \lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow b_1^i(\underline{u}_{2h}^{i n} - \underline{u}_{2h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i n} - \underline{u}_{2h}^{i n+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i n} \leq \underline{u}_{2h}^{i n+1}; \underline{u}_{2h}^{i n+1} = \underline{u}_{1h}^{i n+1} \text{ sur } \Gamma_2; \underline{u}_{2h}^{i n+1} \geq 0 \Rightarrow \underline{u}_{1h}^{i n+1} \geq 0$$

3. Enfin, montrons que les suites $(\underline{u}_{jh}^{i\ n+1}), (\overline{u}_{jh}^{i\ n+1})$ sont adjacentes sur chaque sous-domaine. C'est-à-dire :

$$\underline{u}_{jh}^{i\ n+1} \leq \overline{u}_{jh}^{i\ n+1}, \forall i = \overline{1, M} \text{ et } n \geq 0$$

* Sur Ω_1 pour $n = 0$, nous avons $\underline{u}_{1h}^{i\ 0} = 0$

$\overline{u}_{1h}^{i\ 0}$ est une solution du système d'équations :

$$b_1^i(\overline{u}_{1h}^{i\ 0}, v_h) = (f_1^i + \lambda \overline{u}_{1h}^{i\ 0}, v_h)$$

$$f_1^i \geq 0 \Rightarrow \overline{u}_{1h}^{i\ 0} \geq 0 = \underline{u}_{1h}^{i\ 0}$$

$$\Rightarrow \overline{u}_{1h}^{i\ 0} \geq \underline{u}_{1h}^{i\ 0}$$

* Sur Ω_2 pour $n = 0$, nous avons $\underline{u}_{2h}^{i\ 0} = 0$

$\overline{u}_{2h}^{i\ 0}$ est une solution du système d'équations :

$$b_2^i(\overline{u}_{2h}^{i\ 0}, v_h) = (f_2^i + \lambda \overline{u}_{2h}^{i\ 0}, v_h)$$

$$f_2^i \geq 0 \Rightarrow \overline{u}_{2h}^{i\ 0} \geq 0 = \underline{u}_{2h}^{i\ 0}$$

$$\Rightarrow \overline{u}_{2h}^{i\ 0} \geq \underline{u}_{2h}^{i\ 0}$$

* Sur Ω_1 :

Dans le système (3.27), nous posons $v_h = \overline{u}_{1h}^{i\ 1} - \tilde{v}_h, \tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_1^i(\overline{u}_{1h}^{i\ 1}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \overline{u}_{1h}^{i\ 0}, \tilde{v}_h), \tilde{v}_h \geq 0 \tag{3.59}$$

D'autre part, nous avons :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \underline{u}_{1h}^{i0}, \tilde{v}_h) \quad (3.60)$$

Le calcul (3.60) – (3.59) donne :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\underline{u}_{1h}^{i0} - \bar{u}_{1h}^{i0}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car :

$$\underline{u}_{1h}^{i0} \leq \bar{u}_{1h}^{i0}, \tilde{v}_h \geq 0, \lambda \geq 0$$

Donc :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{1h}^{i1} - \bar{u}_{1h}^{i1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{1h}^{i1} \leq \bar{u}_{1h}^{i1}$$

* Sur Ω_2 :

Dans le système (3.30), nous posons $v_h = \bar{u}_{2h}^{i1} - \tilde{v}_h, \tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i0}, \tilde{v}_h), \tilde{v}_h \geq 0 \quad (3.61)$$

D'autre part, nous avons :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \underline{u}_{2h}^{i0}, \tilde{v}_h) \quad (3.62)$$

Le calcul (3.62) – (3.61) donne :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\underline{u}_{2h}^{i0} - \bar{u}_{2h}^{i0}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car :

$$\underline{u}_{2h}^{i0} \leq \bar{u}_{2h}^{i0}, \tilde{v}_h \geq 0, \lambda \geq 0$$

Donc :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i1}, \tilde{v}_h) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i1} - \bar{u}_{2h}^{i1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i1} \leq \bar{u}_{2h}^{i1}$$

Sur Ω_1 :

Nous supposons qu'elle est vraie pour n , c'est-à-dire : $\underline{u}_{1h}^{in} \leq \bar{u}_{1h}^{in}$ et nous la démontrons pour $n + 1$.

Dans le système (3.20), nous posons $v_h = \bar{u}_{1h}^{in+1} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_1^i(\bar{u}_{1h}^{in+1}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \bar{u}_{1h}^{in}, \tilde{v}_h), \tilde{v}_h \geq 0 \quad (3.63)$$

D'autre part, nous avons :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{in+1}, \tilde{v}_h) \leq (f_1^i + \lambda \underline{u}_{1h}^{in}, \tilde{v}_h) \quad (3.64)$$

Le calcul (3.64) – (3.63) donne :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{in+1} - \bar{u}_{1h}^{in+1}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\underline{u}_{1h}^{in} - \bar{u}_{1h}^{in}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car :

$$\underline{u}_{1h}^{in} \leq \bar{u}_{1h}^{in}, \tilde{v}_h \geq 0, \lambda \geq 0$$

Donc :

$$b_1^i(\underline{u}_{1h}^{in+1} - \bar{u}_{1h}^{in+1}, \tilde{v}_h) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{1h}^{in+1} - \bar{u}_{1h}^{in+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{1h}^{in+1} \leq \bar{u}_{1h}^{in+1}$$

* Sur Ω_2 :

Nous supposons qu'elle est vraie pour n , c'est-à-dire : $\underline{u}_{2h}^{in} \leq \bar{u}_{2h}^{in}$ et nous la démontrons pour $n + 1$

Dans le système (3.22) nous posons $v_h = \bar{u}_{2h}^{i n+1} - \tilde{v}_h$, $\tilde{v}_h \geq 0$ et obtenons :

$$b_2^i(\bar{u}_{2h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \bar{u}_{2h}^{i n}, \tilde{v}_h), \tilde{v}_h \geq 0 \quad (3.65)$$

D'autre part, nous avons :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq (f_2^i + \lambda \underline{u}_{2h}^{i n}, \tilde{v}_h) \quad (3.66)$$

Le calcul (3.66) – (3.65) donne :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i n+1} - \bar{u}_{2h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq (\lambda(\underline{u}_{2h}^{i n} - \bar{u}_{2h}^{i n}), \tilde{v}_h) \leq 0$$

Car :

$$\underline{u}_{2h}^{i n} \leq \bar{u}_{2h}^{i n}, \tilde{v}_h \geq 0, \lambda \geq 0$$

Donc :

$$b_2^i(\underline{u}_{2h}^{i n+1} - \bar{u}_{2h}^{i n+1}, \tilde{v}_h) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i n+1} - \bar{u}_{2h}^{i n+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{2h}^{i n+1} \leq \bar{u}_{2h}^{i n+1}$$

En passant à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_j^{i n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{u}_j^{i n} = u^i, \forall i \in \{1, 2, \dots, M\}$$

l'unique solution du problème discret. □

3.2.5 Analyse de l'erreur en norme L^∞

Notations

Dans tout ce qui suit, nous adoptons les notations suivantes :

$$|\cdot|_j = \|\cdot\|_{L^\infty(\Lambda_j)} \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_j = \|\cdot\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_j)}, j = 1, 2 \quad (4.67)$$

Lemme 3.2.3. *Si $B = (b_{sl})_{i,j=1,\dots,N}$ est une M -matrice, il existe alors deux constantes k_1, k_2 définies par :*

$$k_1 = \sup \{w_h(x), x \in \Lambda_1\} \in (0, 1) \text{ et } k_2 = \sup \{w_h(x), x \in \Lambda_2\} \in (0, 1)$$

Telles que :

$$\sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^{n+1}|_1 \leq k_1 \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^n|_1 \quad (3.68)$$

Et :

$$\sup_{\Lambda_2} |u_{2h} - u_{2h}^{n+1}|_2 \leq k_2 \sup_{\Lambda_2} |u_{2h} - u_{2h}^n|_2 \quad (3.69)$$

Preuve.

Posons $R_1 = \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^{n+1}|_1$ et $R = \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^n|_1$
 Nous devons supposer que $R_1 \neq 0$ et montrer que $R_1 \leq R$.

Si (3.68) n'est pas vérifiée, il existe alors $x_{s_0} \in \Lambda_1$ tel que :

$$|u_{1h}(x_{s_0}) - u_{1h}^{n+1}(x_{s_0})|_1 = R_1 \geq R$$

Par conséquent, nous avons :

$$0 \geq \sum_{s=1}^N b_{ss_0} (u_{1h} - u_{1h}^{n+1}) \geq \sum_{s=1}^N b_{ss_0} \geq 0 \quad (\text{car } B \text{ est une } M\text{-matrice})$$

Nous savons par l'approximation (1.65) que $u_{1h}^{n+1} \geq u_{1h}$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \sum_{s \neq s_0} b_{ss_0} |u_{1h} - u_{1h}^{n+1}| - R_1 &= 0 \\ \Rightarrow |u_{1h} - u_{1h}^{n+1}| &= R_1, \text{ si } b_{ss_0} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Puisque la matrice B est irréductible, il existe alors $x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_v} \in \Lambda_1$ tels que :

$$b_{s_0 s_1}, b_{s_1 s_2}, \dots, b_{s_v l_w} \neq 0$$

De (3.70), nous avons :

$$|u_{1h}(x_{s_1}) - u_{1h}^{n+1}(x_{s_1})| = R_1$$

De la même manière, nous avons :

$$|u_{1h}(x_{s_2}) - u_{1h}^{n+1}(x_{s_2})| = \dots = |u_{1h}(x_{s_v}) - u_{1h}^{n+1}(x_{s_v})| = |u_{1h}(x_{l_w}) - u_{1h}^{n+1}(x_{l_w})| = R_1$$

Par conséquent :

$$0 \geq \sum_{s=1}^N b_{l_s} |u_{1h} - u_{1h}^{n+1}| \geq \sum_{s=1}^N b_{l_s} R_1 > 0$$

Une contradiction avec (3.70).

La démonstration de (3.69) est similaire. □

Remarque 3.2.2. *la démonstration du lemme ci-dessus est une adaptation de [23] donnée pour le problème de l'inéquation variationnelle. Ce lemme reste vrai pour le problème introduit dans cette thèse.*

Le résultat de la convergence géométrique est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.2.4. *Les suites (u_{1h}^{n+1}) , (u_{2h}^{n+1}) , $n \geq 0$ produites par la méthode alternée de Schwarz convergent géométriquement vers u , la solution du système d'IQV (2.2). Plus précisément, il existe $k_1, k_2 \in (0, 1)$ qui dépendent respectivement de (Ω_1, Λ_1) et de (Ω_2, Λ_2) telles que $\forall n \geq 0$, nous avons :*

$$\sup_{\bar{\Omega}_1} |u_{1h} - u_{1h}^{n+1}|_1 \leq k_1^{n+1} k_2^{n+1} \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^0|_1 \quad (3.71)$$

Et :

$$\sup_{\bar{\Omega}_2} |u_{2h} - u_{2h}^{n+1}|_2 \leq k_1^{n+1} k_2^n \sup_{\Lambda_2} |u_{2h} - u_{2h}^0|_2 \quad (3.72)$$

Preuve.

Sous le lemme précédent, nous avons :

$$|u_{1h} - u_{1h}^{n+1}|_1 \leq w_h(x) \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^n|_1$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^{n+1}|_1 &\leq k_1 \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^n|_1 \\ \Rightarrow \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^{n+1}|_1 &\leq k_1^{n+2} k_2^{n+1} \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^0|_1 \end{aligned}$$

Nous avons aussi pour (3.72) :

$$|u_{2h} - u_{2h}^{n+1}|_2 \leq w_h(x) \sup_{\Lambda_2} |u_{2h} - u_{2h}^n|_2$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sup_{\Lambda_2} |u_{2h} - u_{2h}^{n+1}|_2 &\leq k_2 \sup_{\Lambda_2} |u_{2h} - u_{2h}^n|_2 \\ \Rightarrow \sup_{\Lambda_2} |u_{2h} - u_{2h}^{n+1}|_2 &\leq k_1^{n+1} k_2^{n+1} \sup_{\Lambda_2} |u_{2h} - u_{2h}^0|_2 \end{aligned}$$

Sous le principe du maximum, nous avons :

$$\sup_{\bar{\Omega}_1} |u_{1h} - u_{1h}^{n+1}|_1 = \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^{n+1}|_1 = \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^n|_1, \quad \forall n \geq 0$$

Et :

$$\sup_{\bar{\Omega}_2} |u_{2h} - u_{2h}^{n+1}|_2 = \sup_{\Lambda_2} |u_{2h} - u_{2h}^{n+1}|_2 = \sup_{\Lambda_2} |u_{2h} - u_{2h}^n|_2, \quad \forall n \geq 0$$

Par conséquent :

$$\sup_{\overline{\Omega}_1} |u_{1h} - u_{1h}^{n+1}|_1 \leq k_1^{n+1} k_2^{n+1} \sup_{\Lambda_1} |u_{1h} - u_{1h}^0|_1$$

Et :

$$\sup_{\overline{\Omega}_2} |u_{2h} - u_{2h}^{n+1}|_2 \leq k_1^{n+1} k_2^n \sup_{\Lambda_2} |u_{2h} - u_{2h}^0|_2$$

□

Théorème 3.2.5. *Soit u la solution du problème (2.2). Il existe alors une constante C indépendante de h et de n telle que :*

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq Ch^2 |\log h|^4 \quad (3.73)$$

$$\|u_2 - u_{2h}^{n+1}\|_2 \leq Ch^2 |\log h|^4 \quad (3.74)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_1 &\leq \|u_1 - u_{1h}\|_1 + \|u_{1h} - u_{1h}^{n+1}\|_1 \\ &\leq Ch^2 |\log h|^3 + k_1^{n+1} \|u_{1h} - u_{1h}^0\|_1 \\ &\leq Ch^2 |\log h|^3 + k_1^{n+1} [\|u_1 - u_{1h}\|_1 + \|u_1 - u_{1h}^0\|_1] \\ &\leq Ch^2 |\log h|^3 + k_1^{n+1} \|u_1 - u_{1h}\|_1 + k_1^{n+1} \|u_1 - u_{1h}^0\|_1 \\ &\leq Ch^2 |\log h|^3 + (k_1^{n+1})Ch^2 |\log h|^3 \end{aligned}$$

En posant $k_1^{n+1} \leq |\log h|$, nous obtenons :

$$\|u_1 - u_{1h}^{n+1}\|_1 \leq Ch^2 |\log h|^4$$

□

Remarque 3.2.3. *La preuve de (3.74) est similaire.*

Conclusion

L'originalité de ce travail réside dans l'application de la méthode de décomposition en deux sous-domaines de type Schwarz pour un système d'inéquations quasi-variationnelles à opérateurs non coercifs relié à l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman.

Dans un premier temps, nous avons démontré la convergence monotone des itérés définis par l'algorithme de Schwarz, chose qui nous permet de localiser la frontière libre du problème.

Ensuite nous avons démontré le théorème de convergence géométrique et avons obtenu une approximation quasi-optimale de l'erreur d'ordre de convergence $h^2 |\log h|^4$ sur chaque sous-domaine.

Nous suggérons cependant quelques problèmes ouverts :

- La simulation numérique de la méthode de décomposition de domaine pour un système d'IQV à opérateurs non coercifs et comparaison avec le résultat d'approximation théorique trouvé dans ce travail.
- Estimation de l'erreur en norme uniforme du même problème dans le cas d'une décomposition en plusieurs sous-domaines.
- Application de la méthode de décomposition de domaine au problème de la gestion des stocks.
- Cas des méthodes multigrilles.

Travaux et publications

Publications dans les revues internationales

- Linda Djemaoune, Mohamed Haiour. Overlapping domain decomposition method for a noncoercive system of quasi-variational inequalities related to the Hamilton-Jacobi-Bellman equation. Computational Mathematics and Modeling, Vol. 27, No. 2, April, 2016 (**Springer**).

Conférences nationales et internationales

- Linda Djemaoune, Mohamed Haiour. Domain decomposition method for a system of quasi-variational inequalities with noncoercive operators. Communication orale à TAMTAM 2011, Sousse (Tunisie).
- Linda Djemaoune, Mohamed Haiour. Monotone convergence of Schwarz method for a system of quasi-variational inequalities. Communication orale à JMK2 en 2010, Kairouan (Tunisie).
- Participation au colloque Contrôle, Imagerie et Probabilités En Méditerranée en 2011, Nice (France).
- Participation aux Deuxièmes Ateliers Maghrébins de Simulation Numérique en 2009 à l'Université de Tizi Ouzou (Algérie).

Posters

- Linda Djemaoune, Mohamed Haiour. Convergence monotone de la méthode de Schwarz pour un système d'inéquations quasi-variationnelles à opérateurs non coercifs. Atelier état d'avancement des travaux de thèse de doctorat première année en juin 2011 à l'Université Badji Mokhtar d'Annaba (Algérie).

Bibliographie

- [1] A. Bensoussan and J. L. Lions. *Application des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*. 1978. (Cité en page 43.)
- [2] A. Bensoussan and J. L. Lions. *Impulse control and quasi-variational inequalities*. 1984. (Cité en pages 20, 21, 22, 23, 27, 32, 33, 34, 41 et 44.)
- [3] S. Boulaaras and M. Haiour. *The Theta time scheme combined with a finite element spacial approximation in the evolutionary Hamilton-Jacobi-Bellman equation with linear source terms*. *Computational Mathematics and modeling*, 25(3), 2014. (Cité en page 2.)
- [4] S. Boulaaras and M. Haiour. *A general case of the maximum norm analysis of an overlapping Schwarz methods of evolutionary HJB equation with nonlinear source terms with the mixed boundary conditions*. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 9(3) :1247–1257, 2015. (Cité en page 2.)
- [5] S. Boulaaras and M. Haiour. *A new proof for the existence and uniqueness of the discrete evolutionary HJB equations*. *Applied Mathematics and Computation*, 262 :42–55, 2015. (Cité en page 2.)
- [6] M. Boulbrachene. *L^∞ -error estimates for a system of elliptic quasi-variational inequalities with noncoercive operators*. *Computers and Mathematics with Applications*, 45 :983–989, 2003. (Cité en pages 2, 67 et 69.)
- [7] M. Boulbrachene. *Optimal L^∞ -error estimate for a system of elliptic quasi-variational inequalities with noncoercive operators*. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 87 :89–96, 2014. (Cité en page 2.)
- [8] M. Boulbrachene and B. Chentouf. *The finite element approximation of Hamilton-Jacobi-Bellman equations : the noncoercive case*. *Applied Mathematics and Computation*, 158 :585–592, 2004. (Cité en pages 2 et 62.)
- [9] M. Boulbrachene and P. Cortey-Dumont. *Optimal L^∞ -error estimate of a finite element method for Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 30(5) :421–435, 2009. (Cité en pages 2, 67, 68 et 69.)
- [10] M. Boulbrachene and M. Haiour. *The finite element approximation of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. *Computers and Mathematics with Applications*, 41 :993–1007, 2001. (Cité en pages 2, 41, 53, 57, 60, 61, 62, 66 et 84.)
- [11] M. Boulbrachene and H. Sissaoui. *On the finite element approximation of variational inequalities related to ergodic control problems*. *Int. J. Comp. Math. Appl.*, 31 :137–141, 1996. (Cité en page 19.)
- [12] P. Ciarlet and P. Raviart. *Maximum principle and uniform convergence for the finite element method*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2(1) :17–31, 1973. (Cité en pages v, 33, 53 et 69.)

- [13] P. Cortey-Dumont. *Contribution à l'analyse numérique des inéquations variationnelles sans Principe du Maximum Discret*. *C. R. Acad. Sciences*, 1983. (Cité en page 18.)
- [14] P. Cortey-Dumont. *On finite element approximation in the L^∞ -norm of variational inequalities*. *Numerische Mathematik*, 47(1) :45–57, 1985. (Cité en pages 2, 10, 16, 17, 18 et 76.)
- [15] P. Cortey-Dumont. *On the finite element approximation in the L^∞ -norm of variational inequalities with nonlinear operators*. *Numer. Math.*, 47 :45–57, 1985. (Cité en pages 35 et 71.)
- [16] P. Cortey-Dumont. *Sur les inéquations variationnelles à opérateur non coercif*. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 19(2) :195–212, 1985. (Cité en pages 19 et 42.)
- [17] P. Cortey-Dumont. *Sur l'analyse numérique des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 9(1) :198–209, 1987. (Cité en pages 2, 41, 53, 60, 63, 64 et 70.)
- [18] L. Djemaoune and M. Haiour. *Méthode de décomposition de domaine pour un système d'inéquations quasi-variationnelles à opérateurs non coercifs*. In *Proceedings du 5ème Colloque sur les Tendances des Applications Mathématiques en Tunisie, Algérie, Maroc*, pages 383–389, Sousse, Tunisie, 23-26 avril 2011. (Cité en page 2.)
- [19] L. Djemaoune and M. Haiour. *Overlapping domain decomposition method for a noncoercive system of quasi-variational inequalities related to the Hamilton-Jacobi-Bellman equation*. *Computational Mathematics and Modeling*, 27(2) :217–227, 2016. (Cité en page 2.)
- [20] L.C. Evans and A. Friedman. *Optimal stochastic switching and the Dirichlet problem for the Bellman equation*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 253(2) :365–389, 1979. (Cité en pages 39, 41, 53 et 63.)
- [21] W. H. Fleming and R. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer, 1975. (Cité en page 41.)
- [22] R. Glowinsky. *Numerical Method for Nonlinear Variational Problems*. 2008. (Cité en page 16.)
- [23] M. Haiour and S. Boulaaras. *Overlapping domain decomposition methods for elliptic quasi-variational inequalities related to impulse control problem with mixed boundary conditions*. *Proceedings - Mathematical Sciences*, 121(4) :481–493, 2011. (Cité en page 101.)
- [24] P. L. Lions. *On the Schwarz alternating method I, First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, pages 1–42, 1988. (Cité en pages 77 et 82.)

- [25] P. L. Lions. *On the Schwarz alternating method II, Stochastic Interpretation and Order Properties, Domain decomposition methods*. SIAM, Philadelphia, pages 47–70, 1989. (Cité en pages 77 et 82.)
- [26] P. L. Lions. *On the Schwarz alternating method III, A Variant for Nonoverlapping Subdomains, Proc. 3rd Conference on Domain Decomposition Methods*. SIAM, Philadelphia, pages 202–223, 1990. (Cité en pages 77, 81 et 82.)
- [27] P. L. Lions and J. L. Menaldi. *Optimal control of stochastic integrals and Hamilton Jacobi Bellman equations I*. *SIAM J. Control Optim.*, 20(1) :58–81, 1979. (Cité en pages 41, 53, 63 et 68.)
- [28] P. L. Lions and B. Mercier. *Approximation numérique des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman*. *Anal. Num.*, 14 :369–393, 1980. (Cité en page 41.)
- [29] M. Haiour M. Boulbrachene and B. Chentouf. *On a noncoercive system of quasivariational inequalities related to stochastic control problems*. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 30, 2002. (Cité en page 2.)
- [30] J. Nitsche. *L^∞ -convergence of finite element approximations*. *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, 606, 1977. (Cité en page 70.)
- [31] S. Z. Zhou, Zhan, and G. H. Chen. *Domain decomposition methods for a system of quasi-variational inequalities*. *National Natural Science Foundation of China*, 2008. (Cité en page 2.)