وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences

TITRE

Les équations stochastiques contrôlées gouvernées par un G-mouvement brownien

Option
Probabilités et Statistique
Par
REDJIL Amel

DIRECTEUR DE THÈSE : BOUTABIA Hacène Prof. U.B.M. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT :	BENCHETTAH Azzedine	Prof.	U.B.M. Annaba
Examinateurs :	MEZERDI Brahim	Prof.	U.Med Kheider Biskra
	KANDOUCI Abdeldjabbar	Prof.	U.Moulay Taher Saida
	GUENDOUZI Toufik	Prof.	U.Moulay Taher Saida
	HADJI Med Lakhdar	M.C.A	U.B.M. Annaba

Année 2018

Table des matières

ملخص

في هذه الأطروحة، نهتم بدراسة مسائل المراقبة التصادفية. نبرهن وجودمراقب أمثل مدد، من اجل معادلة تفاضلية تصادفية مقادة ب **G**-حركة براونية. نبرهن شروط النظامية المحققة من طرف هذاالمراقب.

كلمات مفتاحية:

G- حركة براونية – دالة الكلفة – مراقب أمثل ممدد

Abstract

In this thesis, we are interested by the stochastic control problems, we establish existence of an optimal stochastic relaxed control for stochastic differential equation driven by a $G-$Brownian motion.

We prove the regularity conditions realized by this control.

Key words :
$G-$brownian motion, coast function, relaxed optimal control.

Résumé

Dans cette thèse on s'intéresse aux problèmes de contrôle stochastique, on établit l'existence d'un contrôle optimal relaxé pour une équation différentielle stochastique gouvernée par un $G-$mouvement brownien. On démontre les conditions de régularité vérifiées par ce contrôle.

Mots clés
$G-$mouvement brownien, fonction coût, contrôle optimal relaxé.

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse le Professeur ***Hacène Boutabia*** *pour l'honneur qu'il me fait en m'encadrant et la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de diriger ce travail. L'orientation du sujet vers la théorie de contrôle était son idée, je le remercie pour ses conseils et pour tout le temps qu'il a consacré à cette thèse. J'aimerai également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et sa rigueur J'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension.*

J'exprime mes plus sincères remerciements au Professeur ***Azzedine Benchettah****, Professeur à l'université Badji Mokhtar de Annaba, et je lui assure ma profonde reconaissance pour avoir accepté de présider mon jury.*

Je souhaite exprimer ma gratitude et ma haute considération au Professeur ***Brahim Mezerdi****, Professeur à l'université Mohamed Khider de Biskra, de m'avoir honoré par sa présence dans ce jury .Je le remercie de m'avoir rendue attachée à ce domaine de recherche depuis son encadrement de mon travail en magister. Mes premiers pas en calcul stochastique étaient sous sa direction et lors de toutes mes visites à Biskra il m'a écouté , il m'a donné de son temps.malgré ses responsabilités, mon invitation à l' école d'hiver de probabilités qu'il a organisée à Biskra en janvier 2017 m'a fait un grand plaisir.et m'a aidé à améliorer mes connaissances .*

Je suis très reconnaissante aux Professeurs ***KANDOUCI Abdeldjabbar*** *et* ***GUENDOUZI Toufik****, Professeurs à l'université de Moulay Tahar de Saida d'avoir accepté d'être examinateurs de ma thèse. Je les remercie pour les efforts qu'ils ont fait pour faire partie de mon jury malgré la distance.*

Je remercie vivement le Docteur ***HADJI Mohamed Lakhdar****, de l'université de Annaba pour avoir accepté d'être examinateur de cette thèse et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, j''apprécie son attachement remarquable à la recherche.*

Au Professeur ***Boualem Djehiche****, de l'institut royal de technologie de Stockholm, Suède, dont je ne pourrai jamais le remercier assez pour tout son support pour réaliser ce travail, son écoute, sa disponibilité malgré ses tâches lourdes et ses explications valeureuses ; m'ont ouvert la porte pour atteindre mon objectif.*

*Grand merci à **Salah Eddine Choutri**, ça m'a fait plaisir qu'on partage ces résultats.*

*Ma chère amie Dr. **Goual Hafida**, je te remercie pour ton soutien, en particulier ta précieuse aide à la rédaction de ce manuscrit.*

*Ma grande amie Dr. **Talhi Hamida**, je trouve pas les mots pour te remercier. Ta présence à mes cotés et ton support durant toutes les phases de notre amitié sont inestimables...*

*Ma chère amie Dr. **Khodja Nawel**, merci de tout coeur pour ton soutien illimité..*

Mes vifs remerciements vont à toute ma famille pour tout ce qu'elle m'a donnée.

Je remercie vivement tous mes amis(es) pour l'aide, le soutien et les encouragements.

Je remercie également tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réussite de ce travail.

Dédicaces

... Grâce à tes inestimables conseils, ta présence en chaque moment décisif de ma vie et tes encouragements je te rend hommage par ce modeste travail, à ta mémoire mon cher et regretté Papa je dédie cette réussite.

... Toi, la lumière de ma vie, tu es toujours là pour nous, tes nombreux sacrifices ont fait de moi ce que je suis, pour toi ma chère maman.

... à mon mari Kamel, ta présence à coté de moi m'a éclairé la vie.

... à mon unique soeur Meriam.

... à mes frères Tarek et Mohamed.

... à la mémoire de mon cousin regretté Ammar.

Introduction

L'intérêt des problèmes de contrôle réside dans l'optimisation d'un certain critère de performance appelé fonction coût à l'aide du contrôle optimal et dans l'établissement des conditions nécessaires satisfaites par ce contrôle après avoir assuré son existence. En effet ; il existe de nombreux domaines typiques tels que les conditions météorologiques, le climat et les marchés financiers, où l'information est soumise à l'incertitude. Par exemple dans les problèmes de choix de portefeuille optimal en finance, où les processus de volatilité et de prime de risque sont inconnus et difficiles à estimer à partir de données fiables, nous devons considérer une famille de différents modèles ou scénarios. Historiquement l'étude initiale du problème de contrôle est due à Lagrange qui a fondé le calcul des variations. Par la suite plusieurs auteurs ont mis l'accent sur les problèmes de contrôle optimaux parmi eux : Bismut, Benssoussan, Haussmann et Kushner. En 2006, Bahlali, Mezerdi et Djehiche [1] ont étudié le problème de contrôle optimal relaxé et ont démontré, sous certaines conditions de régularité, que chaque processus de diffusion associé au contrôle relaxé est une limite forte d'une suite de processus de diffusion associés aux contrôles stricts.

Dans les problèmes de contrôle déterministe, la dynamique du système est modélisée par une équation différentielle ordinaire (EDO), par contre dans le cas stochastique l'évolution est décrite par un processus de diffusion solution d'une équation différentielle stochastique (EDS). D'un point de vue mathématique, on constate qu'il y a deux approches dans la résolution du problème de contrôle : la première approche est connue sous le nom de la programmation dynamique ou encore principe de Hamilton-Jacobi-Bellmann et la deuxième est le principe du maximum appelé principe de Pontriagin.

Parallèlement à cela, la théorie d'espérance non linéaire a été développée et elle a eu beaucoup d'attention dans certains domaines d'application tels que la finance, la mesure des risques et le contrôle. Un exemple typique d'espérance non linéaire, appelé $G-$espérance a été introduit par Peng [34, 35]. La notion de la $G-$espérance s'est développée très récemment par Peng [34, 35] et a ouvert la voix à l'introduction de variables aléatoires $G-$normales, du $G-$mouvement Brownien et plus généralement des $G-$intégrales stochastiques de type Itô. Le $G-$mouvement Brownien est un processus stochastique avec des incréments stationnaires et indépendants par rapport au passé et son processus de variation quadratique est, contrairement au cas classique, un processus non déterministe. En 2011, Soner,Touzi et Zhang [40], ont développé la $G-$analyse stochastique en introduisant la notion d'agrégation et la filtration universelle.

Par la suite, Biagini, Oksendal et Paczka [6] ont étudié en 2014 le principe du maximum partant d'une équation différentielle stochastique contrôlée gouvernée par un $G-$mouvement brownien, sous l'hypothèse de l'existence d'un contrôle stochastique optimal strict

L'objectif de cette thèse est d'étudier le problème de contrôle stochastique partant d'une équation différentielle gouvernée par un $G-$mouvement brownien, où l'on montre en particulier l'existence d'un contrôle optimal relaxé vérifiant toutes les conditions de régularité nécessaires pour garantir l'optimalité espérée. On s'intéresse à contrôler les systèmes soumis à l'incertitude ou à l'ambiguïté du modèle en raison d'informations incomplètes ou inexactes, ou de concepts vagues. Cette thèse s'articule autour de quatre chapitres successifs, dont voici la description :

Dans le chapitre1, on rappelle d'une part le cadre de la $G-$espérance en donnant les notions de base sur le $G-$mouvement brownien et d'autre part les notions de distributions et d'indépendance de variables aléatoires dans le cadre du $G-$calcul stochastique.

Dans le deuxième chapitre, on fait un rappel du problème général du contrôle stochastique classique, en étudiant l'existence d'un contrôle optimal strict minimisant un certain critère de performance appelé fonction coût. Dans certains cas le problème de contrôle ne possède pas une solution optimale, en injectant par la mesure de Dirac, l'espace des contrôles stricts dans un espace plus large qui possède de bonnes propriétés topologiques notamment de compacité, on assure l'existence d'un contrôle optimal défini par une mesure de probabilité.

Dans le troisième chapitre, on présente un aperçu général sur le travail de Biagini et al [6], où ils ont vérifié le principe du maximum partant de l'hypothèse de l'existence d'un contrôle optimal strict associé à une $G-$équation différentielle stochastique.

Enfin, on donne dans le quatrième chapitre nos principaux résultats sur l'existence d'un contrôle optimal relaxé. L'outil essentiel de notre contribution est le $G-$Chattering lemme, qui nous a permis de généraliser le célèbre Chattering lemme classique au cas d'un espace d'espérance sous linéaire. On commence par définir l'espace des contrôles stochastiques relaxés à l'aide des outils récents du $G-$Calcul stochastique et on montre, avec détails sur les conditions de régularité, l'existence d'un contrôle optimal relaxé. Comme dans le cas classique, on montre que chaque contrôle relaxé est une limite d'une suite de contrôles stricts bien définie partant d'une $G-$équation différentielle stochastique. En fait on montre, à partir de l'approximation des trajectoires, que chaque processus de diffusion lié au contrôle relaxé est une limite au sens fort d'une suite de processus de diffusion associés aux contrôles stricts.

Le présent travail de recherche a fait l'objet d'une publication internationale intitulée **:**

On Relaxed Stochastic Optimal Control for Stochastic Differential Equations Driven by G-Brownian Motion publiée à : ALEA - Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics[39] .

Par ailleurs, plusieurs communications en théorie de contrôle ont été faites :

Communications internationales

1−Approche variationnelle du principe stochastique de Pontriagin, Colloque International sur les Mathématiques Appliquées (CIMA'10, 7−9 novembre 2010, Guelma, Algérie).

2−Approche variationnelle du principe stochastique de Pontriagin, Ecole CIMPA : Statistical methods and applications in Actuarial Science and Finance (CIMPA, 8 − 20 avril 2013, Marrakesh, Maroc).

3−L'approche variationnelle du principe du maximum stochastique, Atelier international" Approximations dans les modèles stochastiques" (7 mai 2013, Béjaia, Algérie).

4−Remarques sur le problème de contrôle stochastique, International Conference of the Euro-Maghreb Laboratory of Mathematics and their Interactions (LEP21 − 2016, 27 avril-1 mai 2016, Hammamet, Tunisie).

5−The $G-$Stochastic differential equations, Third International Conference on Science, Health and Medicine 2016 (IRCSHM 2016,18 − 19 mai, Dubai 2016).

6−The optimization in stochastic control theory, Third International Conference on Science, Health and Medicine2016 (IRCSHM 2016, 18−19 mai, Dubai 2016).

7−The large deviations principle in $G-$Stochastic Calculus, International conference on stochastic Analysis, Stochastic Control and Application , 24 − 27 octobre, 2017, Hammamet, Tunisie).

Communications nationales

1−Le principe stochastique de Pontriagin, Congrés des mathématiciens algériens (CMA−2012, 7 − 8 mars, Annaba, Algérie).

2−Conditions nécessaires d'optimalité dans le contrôle stochastique, $2^{i\grave{e}mes}$Journées sur les problèmes inverses : Théorie et applications (JIP'13, 28−30 octobre, Annaba, Algérie)

3−L'optimalité dans la théorie de contrôle stochastique, Conférence sur les Problèmes Mathématiques non linéaires (ProMa'2014, $11-13$ mars 2014, Annaba, Algérie).

4−Propriétés d'un contrôle stochastique optimal, Congrès des mathématiciens algériens(CMA-2014, Tlemcen, Algérie).

5−L'approche variationnelle en théorie de contrôle stochastique, Journées Jeunes Chercheurs(JJC, 30 septembre-1 octobre

2014, Annaba, Algérie).

6−The optimality in Relaxed Stochastic Control Problems, Premier Séminaire National de Mathématiques(SNM'01, 13 décembre 2016, Constantine, Algérie).

Chapitre 01
Généralités sur le $G-$calcul stochastique

1 Généralités sur le $G-$calcul stochastique

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions de base qui seront utilisées tout au long de ce travail.

Dans ce chapitre, on introduit quelques notations et préliminaires, notamment sur la théorie d'espérance sous linéaire, le $G-$mouvement Brownien lié à la distribution $G-$normale. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [23, 27, 33, 36, 37].

1.1 Espérance sous linéaire

Soit Ω un ensemble donné et soit $\mathcal{H}$ un espace linéaire de fonctions à valeurs réelles définies sur Ω, tel que $c \in \mathcal{H}$ pour chaque constante c et $|X| \in \mathcal{H}$ si $X \in \mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ est considéré comme l'espace des variables aléatoires.

Définition 1.1 *Une espérance sous linéaire sur H est une fonction $\hat{E} : H \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes : Pour tout $X, Y \in H$, on a*

1 *Monotonicité : $\hat{E}[X] \geq \hat{E}[Y]$ si $X \geq Y$.*

2 *Préservation des constantes : $\hat{E}[c] = c$, pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

3 *Sous–additivité : $\hat{E}[X] - \hat{E}[Y] \leq \hat{E}[X - Y]$.*

4 *Homogénéité positive : $\hat{E}[\lambda X] = \lambda \hat{E}[X]$, pour tout $\lambda \geq 0$.*

le triplet $\left(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E}\right)$ est appelé espace d'espérance sous linéaire.

Si seulement (1) *et* (2) *sont satisfaites, $\hat{E}$ est appelée espérance non linéaire.*

Si l'inégalité (3) *est une égalité, alors $\hat{E}$ est une espérance linéaire classique, i.e., $\hat{E}$ est une fonction linéaire satisfaisant* (1) *et* (2)*.*

Remarque : *En fait* (3) *et* (4) *impliquent la propriété de convexité suivante :*

$$\hat{E}[\alpha X + (1-\alpha) Y] \leq \alpha \hat{E}[X] + (1-\alpha) \hat{E}[Y] \quad \text{pour } \alpha \in [0,1].$$

Notons que la propriété (4) est équivalente à la propriété suivante :

$$\hat{E}[\lambda X] = \lambda^+ \hat{E}[X] + \lambda^- \hat{E}[-X] \quad pour\ \lambda \in \mathbb{R},$$

où $\lambda^+ = \max(\lambda, 0)$ et $\lambda^- = \max(-\lambda, 0)$.

Dans toute la suite on désigne par $C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C\left(1 + |x|^k + |y|^k\right)|x - y| \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ dépendant uniquement de φ.

Théorème 1.2 ([7, 34]) **:** *Soit $\hat{E}$ une espérance sous linéaire définie sur un espace linéaire H, alors il existe une famille de mesures de probabilités $\mathcal{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ telle que*

$$\hat{E}[X] = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} E_{\mathbb{P}}[X] \text{ pour } X \in \mathcal{H},$$

où $B(\Omega)$ désigne la tribu borélienne sur Ω.

Naturellement, on peut définir une capacité de Choquet sur $\mathcal{H}$ par

$$c(A) := \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(A), \ A \in \mathcal{B}(\Omega),$$

Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter $[10, 21, 43]$.

Définition 1.3 *On dira qu'un ensemble $A \in B(\Omega)$ est polaire si et seulement si $c(A) = 0$ et qu'une propriété a lieu quasi-sûrement (q.s. en abrégé) si elle a lieu en dehors d'un ensemble polaire.*

Remarque : *Une propriété est vraie q.s. si elle est vraie presque sûrement pour chaque $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$.*

Grâce à la représentation de la $G-$espérance et à la notion "quasi-sûre" introduite, la théorie des processus stochastiques en temps continu dans le cadre de la $G-$espérance s'est développée, en particulier la formule d'Itô, certaines inégalités stochastiques et les équations différentielles stochastiques gouvernées par un $G-$mouvement Brownien ($G-$EDS en abrégé) peuvent être établies dans le sens "quasi-sûre".

1.2 Distributions et indépendance

Parallèlement aux concepts du cadre classique, Peng [35] a établi les notions de distributions et d'indépendance pour les variables aléatoires dans ce nouveau contexte. Néanmoins, ces notions sont moins probabilistes mais plutôt fonctionnelles, et elles s'expriment à l'aide des familles de fonctions tests de l'espace $C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$.

Définition 1.4 *Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire, où $X_i \in H$, $i = 1, ..., n$. La distribution de X est donnée par la fonctionnelle $F_X[.]$ suivante : pour chaque $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\mathbb{F}_X[\varphi] := \hat{E}[\varphi(X)].$$

Le triplet $(\mathbb{R}^n, C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n), \mathbb{F}_X)$ forme un espace d'espérance non linéaire.

De plus, si X' est un autre vecteur aléatoire $n-$dimensionnel et pour chaque $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$, $F_X[\varphi] = F_{X'}[\varphi]$, X et X' sont dits identiquement distribués.

Remarques :

– *On peut prouver (voir [7, 30]) qu'il existe une famille de mesures de probabilité $\left\{F_X^\theta(.)\right\}_{\theta\in\Theta}$ définie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ telle que*

$$\mathbb{F}_X[\varphi] = \sup_{\theta\in\Theta} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) F_X^\theta(dx), \text{ pour tout } \varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n).$$

– *Ainsi $F_X[\varphi]$ caractérise l'incertitude de la distribution de X.*

Notons que si la distribution $\mathbb{F}_X$ de $X \in \mathcal{H}$ n'est pas une espérance linéaire, alors X a une distribution incertaine. La distribution de X a les quatre paramètres typiques suivants :

$$\overline{\mu} = \hat{E}[X], \ \underline{\mu} = -\hat{E}[-X], \ \overline{\sigma}^2 = \hat{E}\left[X^2\right] \text{ et } \underline{\sigma}^2 = -\hat{E}\left[-X^2\right].$$

Les intervalles $\left[\overline{\mu}, \underline{\mu}\right]$ et $[\overline{\sigma}^2, \underline{\sigma}^2]$ caractérisent la moyenne incertaine et la variance incertaine de X respectivement.

Proposition 1.5 : *Soient $X, Y \in \mathcal{H}$ telles que $\hat{E}[Y] = -\hat{E}[-Y]$ (i.e., Y n'a pas une moyenne incertaine). Alors, on a :*

$$\hat{E}[X + \alpha Y] = \hat{E}[X] + \alpha\hat{E}[Y].$$

En particulier, si $\hat{E}[Y] = -\hat{E}[-Y] = 0$, alors $\hat{E}[X + \alpha Y] = \hat{E}[X]$.

Preuve : On a

$$\hat{E}[\alpha Y] = \alpha^+\hat{E}[Y] + \alpha^-\hat{E}[-Y] = \alpha^+\hat{E}[Y] - \alpha^-\hat{E}[Y] = \alpha\hat{E}[Y]$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\hat{E}[X+\alpha Y] &\leq \hat{E}[X]+\hat{E}[\alpha Y]=\hat{E}[X]+\alpha\hat{E}[Y]=\hat{E}[X]-\hat{E}[-\alpha Y]\\ &\leq \hat{E}[X+\alpha Y].\end{aligned}$$

■

Proposition 1.6 : *Soient $\varphi \in C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^{m+n}\right)$ et $Y \in H^n$ un vecteur aléatoire défini sur un espace d'espérance sous linéaire $\left(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E}\right)$. Alors on a :*

1) *Pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, l'application $\varphi(x,.) \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$.*

2) *L'application $\hat{E}[\varphi(.,Y)] \in C_{l,lip}(\mathbb{R}^m)$.*

Preuve : 1) En effet, pour chaque $(x,y),(u,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}|\varphi(x,y)-\varphi(u,z)| &\leq C\,|(x,y)-(u,z)|\left(1+|(x,y)|^k+|(u,z)|^k\right),\\ &C>0, k\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}|\varphi(x,y)-\varphi(x,z)| &\leq C\,|y-z|\left(1+|(x,y)|^k+|(x,z)|^k\right)\\ &\leq C\,|y-z|\left(1+\left(|x|^2+|y|^2\right)^{\frac{k}{2}}+\left(|x|^2+|z|^2\right)^{\frac{k}{2}}\right)\\ &\leq C\,|y-z|\left(1+2^{\frac{k}{2}}\left(|x|^k+|y|^k\right)+2^{\frac{k}{2}}\left(|x|^k+|z|^k\right)\right)\\ &\leq C'\,|y-z|\left(1+\left(|y|^k+|z|^k\right)\right),\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité $(a+b)^p \leq 2^p\left(a^p+b^p\right)$ pour $a,b \geq 0$ et $C' = C\max\left(2^{\frac{k}{2}}, 1+2^{\frac{k}{2}+1}|x|^k\right)$. Par conséquent, $\varphi(x,.) \in C_{l,lip}(\mathbb{R}^n)$.

2) De même, on a

$$|\varphi(x,Y)-\varphi(u,Y)| \leq C\,|x-u|\left(1+2^{\frac{k}{2}}\left(|x|^k+|Y|^k\right)+2^{\frac{k}{2}}\left(|u|^k+|Y|^k\right)\right),$$

ce qui implique que

$$\left|\hat{E}[\varphi(x,Y)]-\hat{E}[\varphi(u,Y)]\right| \leq \hat{E}\,|\varphi(x,Y)-\varphi(u,Y)|$$

$$\begin{aligned}&\leq C\,|x-u|\left(1+2^{\frac{k}{2}}\left(|x|^k+\hat{E}\left(|Y|^k\right)\right)+2^{\frac{k}{2}}\left(|u|^k+\hat{E}\left(|Y|^k\right)\right)\right)\\ &\leq C''\,|x-u|\left(1+|x|^k+|u|^k\right),\end{aligned}$$

où $C'' = C \max\left(2^{\frac{k}{2}}, 1 + 2^{\frac{k}{2}+1}\widehat{\mathbb{E}}\left(|Y|^k\right)\right)$, ce qui signifie que $\hat{E}[\varphi(., Y)]$ appartient à $C_{l,lip}(\mathbb{R}^m)$.
■

Définition 1.7 *Dans un espace d'espérance sous linéaire* $\left(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E}\right)$, *un vecteur aléatoire* $Y \in H^n$ *est dit indépendant d'un autre vecteur aléatoire* $X \in H^m$ *sous* $\hat{E}$ *si*

$$\hat{E}[\varphi(X,Y)] = \hat{E}\left[\hat{E}[\varphi(x,Y)]\,|_{x=X}\right], \ \forall \varphi \in C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^{m+n}\right).$$

Définition 1.8 *Soient* X_1 *et* X_2 *deux vecteurs aléatoires à* $n-$*dimension définis respectivement sur deux espaces d'espérance sous linéaire* $\left(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \hat{E}_1\right)$ *et* $\left(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \hat{E}_2\right)$. *On dira que* X_1 *et* X_2 *sont identiquement distribués et on notera* $X_1 \overset{d}{=} X_2$, *si*

$$\hat{E}_1[\varphi(X_1)] = \hat{E}_2[\varphi(X_2)] \text{ pour tout } \varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n).$$

Si $\overline{X}$ *est indépendant de* X *et* $\overline{X} \overset{d}{=} X$, *alors on dira que* $\overline{X}$ *est une copie de* X.

Remarque : *Dans un espace d'espérance sous linéaire la condition "Y est indépendant de X" ne signifie pas automatiquement que "X est indépendant de Y* ([43]).

1.3 Distribution $G-$normale et $G-$mouvement Brownien

Après la définition de base ci-dessus on introduit maintenant la notion de la distribution $G-$normale.

Définition 1.9 *Un vecteur aléatoire à $d-$dimension $X = (X_1, ..., X_d)$ dans un espace d'espérance sous linéaire $\left(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E}\right)$ est dit $G-$normalement distribué si pour tout $a, b \geq 0$:*

$$aX + b\overline{X} \overset{d}{=} \sqrt{a^2 + b^2}X,$$

où $\overline{X}$ est une copie indépendante de X, et

$$G\left(A\right) := \frac{1}{2}\hat{E}\left[\langle AX, X\rangle\right] : \mathbb{S}_d \to \mathbb{R},$$

ici S_d désigne l'ensemble des matrices symétriques d'ordre d.

Dans [7, 15, 37], Peng montre que $X = (X_1, ..., X_d)$ est $G-$normalement distribué si et seulement si $u\left(t, x\right) := \hat{E}\left[\varphi\left(x + \sqrt{t}X\right)\right]$, $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, $\varphi \in C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$ est l'unique solution de viscosité de l'équation parabolique aux dérivées partielles, appelée $G-$équation de la chaleur, suivante

$$\begin{cases} \partial_t u\left(t, x\right) = G\left(Du\left(t, x\right)\right), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \\ \qquad u\left(0, x\right) = \varphi\left(x\right) \end{cases}, \tag{1}$$

où $Du\left(t, x\right)$ est la matrice Hessienne de $u\left(t, x\right)$.

$G\left(.\right) : \mathbb{S}_d \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone et sous linéaire sur $\mathbb{S}_d$, à partir de laquelle on peut déduire qu'il existe un sous ensemble $\Sigma \in \mathbb{S}_d^+$ fermé, borné et convexe tel que

$$G\left(A\right) = \frac{1}{2}\sup_{B\in\Sigma} tr\left(AB\right).$$

On écrit $X \sim \mathcal{N}\left(0; \Sigma\right)$.

Remarque : *Le cas réel $(d = 1)$ correspond à $\Sigma = [\underline{\sigma}^2; \overline{\sigma}^2]$ et $G = G_{\overline{\sigma},\underline{\sigma}}$ étant la fonction sous linéaire paramétrée par $\underline{\sigma}$ et $\overline{\sigma}$:*

$$G\left(\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2\alpha^+ - \underline{\sigma}^2\alpha^-\right), \ \alpha \in \mathbb{R},$$

où $\overline{\sigma}^2 = \hat{E}\left[X^2\right]$ et $\underline{\sigma}^2 = -\hat{E}\left[-X^2\right]$. Dans ce cas on écrit $X \sim \mathcal{N}\left(0; [\underline{\sigma}^2; \overline{\sigma}^2]\right)$.

Corollaire 1.10 *Dans le cas où $\underline{\sigma}^2 = \overline{\sigma}^2 > 0$, $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2; \overline{\sigma}^2])$ est juste la distribution normale classique $\mathcal{N}(0; \overline{\sigma}^2)$.*

Preuve : En fait, la solution de l'équation parabolique aux dérivées partielles $\partial_t u = G\left(\partial^2_{xx} u\right), (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$ avec la condition de Cauchy $u(0,x) = \varphi(x)$ devient l'équation de la chaleur classique

$$\partial_t u = \frac{\overline{\sigma}^2}{2}\partial^2_{xx} u, \quad u\left|_{t=0}\right. = \varphi,$$

où la solution est

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2 t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\overline{\sigma}^2 t}\right)dy.$$

Ainsi, pour chaque φ,

$$\hat{E}\left[\varphi(X)\right] = u(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2\overline{\sigma}^2}\right)dy.$$

■

Dans les deux situations suivantes le calcul de $\hat{E}\left[\varphi(X)\right]$ est facile :

•Pour tout φ convexe, on a

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2\overline{\sigma}^2}\right)dy.$$

En effet pour tout $t \geq 0$ fixé, remarquons que la fonction $u(t,x) = \hat{E}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t}X\right)\right]$ est convexe, puisque

$$\begin{aligned}
u(t,\alpha x + (1-\alpha)y) &= \hat{E}\left[\varphi\left(\alpha x + (1-\alpha)y + \sqrt{t}X\right)\right] \\
&\leq \alpha\hat{E}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t}X\right)\right] + (1-\alpha)\hat{E}\left[\varphi\left(y+\sqrt{t}X\right)\right] \\
&= \alpha u(t,x) + (1-\alpha)u(t,y).
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\left(\partial^2_{xx}u\right)^- = 0$ et par conséquent la $G-$équation de la chaleur (1) devient

$$\partial_t u = \frac{\overline{\sigma}^2}{2}\partial^2_{xx} u, \quad u\left|_{t=0}\right. = \varphi.$$

•Pour tout φ concave, on a

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\underline{\sigma}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2\underline{\sigma}^2}\right)dy,$$

en particulier

$$\hat{E}[X] = \hat{E}[-X] = 0, \quad \hat{E}\left[X^2\right] = \overline{\sigma}^2, -\hat{E}\left[-X^2\right] = \underline{\sigma}^2,$$

et

$$\hat{E}\left[X^4\right] = 6\overline{\sigma}^4, \quad -\hat{E}\left[-X^4\right] = 6\underline{\sigma}^4.$$

On donne maintenant la définition du $G-$mouvement Brownien $d-$dimensionnel.

Définition 1.11 *Un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ à $d-$dimension défini sur $\left(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E}\right)$ est dit $G-$mouvement Brownien de dimension d (réel dans le cas où $d = 1$) si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $B_0 = 0$

(ii) pour chaque $t, s \geq 0$, l'accroissement $B_{t+s} - B_t$ est $N(0, s\Sigma)-$distribué et est indépendant de $(B_{t_1}, ..., B_{t_n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \leq t$.

On notera

$$B_t^a := \langle a, B_t \rangle \text{ pour tout } a = (a_1, ..., a_d)^T \in \mathbb{R}^d.$$

Selon la définition ci-dessus, on a la proposition suivante qui est importante dans les développements ultérieurs.

Proposition 1.12 (*voir* [17, 38]) *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $G-$mouvement Brownien à $d-$dimension défini sur un espace d'espérance sous linéaire $\left(\Omega, \mathcal{H}, \hat{E}\right)$. Alors $(B_t^a)_{t\geq 0}$ est un G_a-mouvement Brownien réel de fonction génératrice $G_a(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2_{aa^T}\alpha^+ - \underline{\sigma}^2_{aa^T}\alpha^-\right)$ où $\overline{\sigma}^2_{aa^T} = \hat{E}\left[\langle a, B_1\rangle^2\right]$ et $\underline{\sigma}^2_{aa^T} = -\hat{E}\left[-\langle a, B_1\rangle^2\right]$. En particulier, pour tout $t, s \geq 0, B^a_{t+s} - B^a_t \sim \mathcal{N}\left(0; \left[s\underline{\sigma}^2_{aa^T}; s\overline{\sigma}^2_{aa^T}\right]\right)$.*

Notons que d'après le cas unidimensionnel, on a pour toute fonction convexe φ :

$$\hat{E}\left[\varphi\left(B^a_{t+s} - B^a_t\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s\overline{\sigma}^2_{aa^T}}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2s\overline{\sigma}^2_{aa^T}}\right)dy,$$

et pour toute fonction concave φ et $\underline{\sigma}^2_{aa^T} > 0$, on a

$$\hat{E}\left[\varphi\left(B^a_{t+s} - B^a_t\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s\underline{\sigma}^2_{aa^T}}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2s\underline{\sigma}^2_{aa^T}}\right)dy.$$

En particulier, d'après Peng [34, 36, 38], on a

$$\hat{E}\left[(B^a_t - B^a_s)^2\right] = \overline{\sigma}^2_{aa^T}(t-s), \hat{E}\left[(B^a_t - B^a_s)^4\right] = 3\overline{\sigma}^4_{aa^T}(t-s)^2,$$

$$\hat{E}\left[-(B^a_t - B^a_s)^2\right] = -\underline{\sigma}^2_{aa^T}(t-s), \hat{E}\left[-(B^a_t - B^a_s)^4\right] = -3\underline{\sigma}^4_{aa^T}(t-s)^2.$$

Chapitre 02
Problème de contrôle stochastique

2 Problème de contrôle stochastique

Le problème de contrôle constitue une partie essentielle dans le domaine des mathématiques appliquées, il consiste à optimiser un critère de performance d'un système dynamique. Dans le cas déterministe, la théorie de contrôle modélise les problèmes d'évolution où la dynamique est décrite par une équation différentielle ordinaire, alors que le cas du contrôle stochastique traite la contrôlabilité des systèmes dynamiques évoluant dans des conditions d'incertitude. Dans ce cas l'évolution est modélisée par une équation différentielle stochastique (EDS d'Itô).

2.1 Problème de contrôle déterministe

On considère un système dynamique où l'évolution est guidée par l'équation différentielle ordinaire contrôlée suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_t^u}{dt} = f(t, x_t^u, u_t), \\ x_0^u = x_0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^d$ sont deux fonctions données. On considère aussi $U \subset F(\mathbb{R}^+, A)$,l'ensemble des contrôles admissibles, où $F(\mathbb{R}^+, A)$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^+$vers A et on suppose que pour tout $u \in U$, il existe une solution x^u du système ci dessus. Soit J une fonctionnelle de u définie sur U par $J(u) = \Phi(x_T^u)$, où $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, T étant un temps terminal fixé dans $\mathbb{R}^+$, et on cherche un contrôle $u^* \in U$ réalisant $u^* = \inf_{u\in U} J(u)$, minimisant le coût J.

Exemple : On considère un système dynamique, où l'évolution est modélisée par une équation linéaire :

$$\frac{dx^u}{dt} = a_t x_t + b_t u_t.$$

Le côut est défini par :

$$J(u) = \int_0^T m_s x_s^2 + n_s u_s^2 ds + dx_T^2,$$

avec $m_s > 0, n_s > 0, d > 0$. On pose $X_t^u = (x_t^u, y_t^u)$ avec :

$$y_t^u = \int_0^t (m_s x_s^2 + n_s u_s^2) ds \text{ et } \Phi(X_T^u) = y_T^u + d(x_T^u)^2.$$

Dans ce cas on a $J(u) = \Phi(X_T^u)$ (voir Mazliak[30]).

2.2 Problème de contrôle stochastique

On se place dans un espace probabilisé filtré $(\Omega, F, (F_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, P)$, satisfaisant les conditions habituelles et on se donne $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien $d-$dimensionnel et A un borélien de $\mathbb{R}$. Dans les problèmes de contrôle stochastique, on distingue deux formulations comme suit :

$\mathfrak{i}$)Si l'espace de probabilité filtré et le mouvement brownien sont donnés à l'avance et les contrôles sont adaptés à cette filtration, on a une formulation forte.

$\mathfrak{ii}$)Si l'espace de probabilité filtré et le mouvement brownien sont des parties de contrôle on va obtenir une formulation faible.

Les contrôles admissibles sont l'outil de base dans notre problème de contrôle.

Définition 2.1 *On appelle contrôle admissible tout processus à valeurs dans A, mesurable et* $(F_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$*−adaptè.*

On rappelle qu'un processus $u : \Omega \longrightarrow F([0,T], A)$ est $(F_t)_{t\in\mathbb{R}^+}-$adapté si u_t est une application F_t-mesurable.

Remarque : *Le processus u doit être* $(F_t)-$*adapté pour assurer la connaissance de l'histoire du processus jusqu'á l'instant* t.

2.2.1 Position du problème

Cas où le terme de diffusion est contrôlé

Étant donné un système dynamique où l'état est modélisé par l'EDS gouvernée par un contrôle :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t) + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t \\ X_0 = x, \qquad t \in \left]0, T\right], x \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{2}$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times A \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R})$ sont deux fonctions boréliennes, dérivables et à dérivées continues et bornées, $\mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R})$ étant l'espace des matrices d'ordre $(m \times d)$ á coefficients réels. On suppose en outre que :

-La fonction$b(t, x, \alpha)$ est continue en α et uniformément continue en t et en x.

-Le processus X est contrôlé á chaque instant $t \in [0, T]$ á l'aide de la valeur du paramètre α prise dans le borélien A.

-Les fonctions b et σ sont à croissance linéaire :

$$|b(t, x, \alpha)|^2 + |\sigma(t, x, \alpha)|^2 \leq C(1 + |x|^2) \tag{3}$$

où C est une constante positive indépendante de α et de t.

Notons que b et σ sont dans ce cas lipschitziennes, il existe alors une constante positive K indépendante de t et α telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m : |b(t,x,\alpha) - b(t,y,\alpha)|^2 + |\sigma(t,x,\alpha) - \sigma(t,y,\alpha)|^2 \leq K|x-y|^2 \tag{4}$$

Sous les les hypothèses : (3), (4), l'EDS (2) admet une unique solution X, d'après le théorème d'existence et d'unicité.

Notons que le processus X est progressivement mesurable autrement dit non-anticipatif.

Définition 2.2 *Le problème de contrôle est fondé sur un critère de performance appelé fonction coût définie par la forme suivante :*

$$J(u) = E\Big[\int_0^T l(t, X_t, u_t)dt + g(X_T)\Big] \tag{5}$$

où $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $l : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont des fonctions réelles.*
Il est clair que la variable aléatoire X_T est associée à un contrôle admissible u pour lequel on définit le coût $J(u)$.
L'objectif visé par le problème de contrôle est de déterminer l'infimum pour J et par suite, trouver un contrôle s'il existe, qui le réalise pour obtenir l'optimalité espérée. On doit donc prouver d'abord l'existence d'un contrôle admissible u^* vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{V}(x) := \inf_{u \in U} J^u(x) = J^{u^*}(x)$$

La fonction $\mathcal{V}$ est appelée coût optimal ou bien fonction valeur et le contrôle u^* est dit optimal.

Cas où le terme de diffusion n'est pas contrôlé

Dans le cas où le terme de diffusion n'est pas contrôlé, l'état de notre système dynamique est décrit par l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, t \in]0,T] \\ \qquad X_0 = x, x \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{6}$$

où b, σ sont deux fonctions boréliennes satisfaisant les conditions décrites auparavant. Notons que dans cette EDS on ne contrôle que le drift. La fonction coût est définie, dans ce cas, de la même manière que dans (5).

Exemple : Dans le problème d'arrêt optimal, l'objectif est de minimiser la fonction coût :

$$J(u,\tau) = E\big[\int_0^\tau l(t, X_t, u_t)dt + g(X_\tau)\big],$$

sur les contrôles admissibles u et les temps d'arrêt τ.
On considère l'exemple de vente d'un actif : une personne désire vendre un actif ou une ressource (maison,action,...), l'évolution du prix de cet actif est modélisée par l'EDS :

$$dX_t = r.X_t dt + \sigma.X_t dB_t.$$

On suppose qu'à la vente de l'actif, il y a un coût de transaction fixe $a > 0$. Si la personne décide de vendre l'actif à la date t, le bénéfice net de vente sera $\exp(-\varphi_t)(X_t - a)$ où $\varphi > 0$ est le facteur d'inflation. Le problème est de trouver un temps d'arrêt qui maximise la valeur espérée du bénéfice net à savoir $\sup\limits_\tau E[\exp -\varphi_\tau](X_\tau - a)$ et de calculer le profit espéré.

Comparaison entre le contrôle déterministe et le contrôle stochastique

Dans le contrôle stochastique, la condition d'adaptation du contrôle est nécessaire pour que l'intégrale stochastique soit bien définie. D'autre part on ne peut pas optimiser le coût J pour tout $\omega \in \Omega$ comme dans le cas déterministe, c'est pour cette raison qu'on minimise un coût moyen.

2.3 Existence d'un contrôle optimal ordinaire

On considère le problème de contrôle déterministe suivant : $A = \{-1, 1\}$ reprèsente l'ensemble des contrôles et U représente l'ensemble des fonctions continues par morceaux, nommées fonctions contrôles, $u : [0,1] \longrightarrow A$. On se donne l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} dx^u(t) & = u(t)dt, t \in [0,1] \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

et on définit la fonction coût par $J(u) = \int_0^1 (x^u(t))^2 dt$.
Remarquons d'abord que $\inf_u J(u) = 0$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_n(t) = (-1)^k, \tfrac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}, 0 \leq k \leq n-1.$$

Il est clair que $|x^{u_n}(t)| \leq \dfrac{1}{n}, \forall t \in [0,1]$,et que $J(u) \leq \frac{1}{n^2}$.
Si on suppose que $x^u(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ on obtient $u_t = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui est impossible. On conclut qu'il n'existe pas un contrôle $u \in U$ réalisant $J(u) = 0$.
La suite (u_n) n'admet donc pas de limite dans l'espace des contrôles U, tenant en compte que cette limite doit être le candidat naturel d'optimalité, on en déduit que notre problème de contrôle n'a pas de solution optimale, c'est pour cette raison qu'on va définir un espace plus large vérifiant certaines conditions de régularité dans lequel cette limite existe.

2.4 Problème de contrôle strict

On considère l'EDS contrôlée (2) sur l'espace $(\Omega, F, (F_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, P)$, avec les mêmes hypothèses précédentes. Le générateur infinitésimal L associé à l'EDS (2) appliqué sur les fonctions :$f \in C_b^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ est défini par :

$$L_f(t,x,u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\Big(\big(\sigma\sigma^T\big)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t,x,u)\Big) + \sum_i \big(b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x,u)\big),$$

où σ^Tdésigne la transposée de σ.

Définition 2.3 *On appelle contrôle strict la donnée du septuplet $\alpha = (\Omega, F, F_t, P, u_t, x_t, x)$, où (u_t) est un processus à valeurs dans A, progressivement mesurable par rapport à $(F_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et (X_t) représente la solution de l'EDS (2) avec la valeur initiale $x \in R^m$, telle que le processus :*

$$f(x_t) - f(x) - \int_0^t Lf(s, X_s, u_s)ds,$$

est une $P-$martingale pour toute $f \in C_b^2$ et pour tout $t > 0$.

Remarque : *Si le contrôle u_t est constant, les conditions données sur b et σ assurent que notre problème de martingale admet au moins une solution, ce qui implique une existence faible de la solution de l'EDS* (2). *Dans ce cas les contrôles associés sont dits contrôles faibles car l'espace de probabilité et le mouvement brownien peuvent être modifiés selon u_t.*
L'unicité trajectorielle a été étudiée par El Karoui et al [11], où ils montrent que les problèmes de contrôle fort et faible ont les mêmes fonctions valeurs.

2.5 Optimalité des contrôles adaptés à l'état du système

Le but de cette étude est la minimisation du coût concernant les contrôles adaptés à l'état du système. On associe pour tout $u \in U$, la filtration naturelle $\left(\widetilde{F}_t^u\right)$ du processus X (*i.e.* $\widetilde{F}_t^u = \sigma(X(s), s \in [0, t[))$ et on cherche à montrer que $\widetilde{F}_t^u = F_t$. Par la suite, on utilise ce résultat pour démontrer que l'espace U^* est dense dans U, où U^* est donné par :

$$U^* = \{u \in U : u(t) \text{ est } \widetilde{F}_t^u- \text{ mesurable } p.p.\}.$$

Il résulte alors que $\inf_{u \in U^*} J(u) = \inf_{u \in U} J(u)$.

On a besoin de la définition suivante d'un bruit additif :

Définition 2.4 *On appelle bruit additif tout processus stochastique continu adapté noté $br(t)$, à valeur dans $\mathbb{R}^m$,tel que :*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |br(t)|^2 \leq C.$$

Lemme 2.5 *Soient $u \in U^*$et (F_t) la filtration naturelle de (B_t). On considère l'équation :*

$$\begin{cases} X(t) & = x_0 + \int_0^t b(s, X_s, u_s)ds + br(t) \\ X_0 & = x \end{cases}$$

alors on a $F_t = \widetilde{F}_t^u$ pour tout t.

Preuve : Il est clair que $\widetilde{F}_t^u \subset F_t$ pour tout $u \in U$. Il reste à démontrer que $F_t \subset \widetilde{F}_t^u$. Pour cela, on définit

$$\mu(t) := \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s = X_t - x - \int_0^t b(s, X_s, u_s)ds,$$

Le processus $\mu(t)$ est une $(F_t)-$martingale continue et le processus $\int_0^t \sigma\sigma^T(s, X_s)ds$ est bien défini. Il résulte que l'intégrale stochastique $I(t) = \int_0^t \sigma^{-1}(s, X_s)d\mu(s)$ a un sens.

Le fait que les intégrales stochastiques sont des limites au sens de Riemann, cela nous ramène au résultat suivant :$I(t) = B_t$.

Maintenant on considère $u \in U^*$. D'après la définition de $\mu(t)$, il est clair que $(\mu(t))$ est $\left(\widetilde{F}_t^u\right)$-adapté. En utilisant l'inclusion $\widetilde{F}_t^u \subset F_t$, d'où l'adaptation de $I(t)$ et B_t par rapport à X_u^t; Il résulte que $F_t \subset \widetilde{F}_t^u$, d'où le résultat demandé. ■

lemme 2.6 *Sous les mêmes hypothèses du lemme* précédent, *l'espace U^* est dense dans U.*

Preuve : Soient $u \in U$ et $K = \frac{T}{N}$. On considère le processus à valeurs dans A défini par :

$$u_k(t) = \frac{1}{k} \int_{(n-1)K}^{nK} u(s)ds \text{ si } t \in [nK, (n+1)K[$$

pour $n = 1, ..., N-1$.

D'après les propriétés de A, on déduit que $u_k \in U$. De plus la suite (u_k) converge vers u dans $L^2([0,T])$.
Il reste à déduire que $u_k \in U^*$. Soient X_k la trajectoire correspondante à u_k, $\widetilde{F}_{k,t}$ la tribu engendrée par $X_k(t)$ et

$$\begin{aligned}\mu_k(t) &= \int_0^t \sigma(s, X_k(s))dB_s \\ &= X_k(t) - x_0 - \int_0^t b(s, X_k(s), u_s)ds,\end{aligned}$$

et :

$B(t) = \int_0^t \sigma^{-1}(s, X_{k(s)})d\mu_k(s)$.

D'après la définition de u_k, on déduit que $\mu_k(t)$ est $\widetilde{F}_{k,t}-$mesurable pour $t \in [0,k]$.Puisque $F_t = \widetilde{F}_{k,t}$ pour tout $0 \le t \le k$, alors $u_k(t)$ est $\widetilde{F}_{k,t}-$mesurable pour $t \in [k, 2k]$. D'après la formule ci-dessus et étape par étape, on aura $F^t = \widetilde{F}_t^u$ pour tout t, d'où le résultat désiré. ■
On alors le théorème suivant :

Théorème 2.7 *Sous le hypothèses précédentes on a*

$$\inf_{u \in U} J(u) = \inf_{u \in U^*} J(u).$$

Preuve : Il suffit de démontrer que J est continue au sens de $L_F^2(0,T)$, ce qui revient à montrer que pour toute suite (u_k) convergente vers u dans $L_F^2(0,T)$ on a $\lim_{k \longrightarrow \infty} J(u_k) = J(u)$ dans $\mathbb{R}$.
On considère d'abord le cas d'un bruit additif :

$$\begin{cases} X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s, u_s)ds + br(t) \\ X_0 = x \end{cases}$$

On a :

$$X_k(t) - X(t) = \int_0^t b(s, X_k(s), u_k(s))ds - \int_0^t b(s, X_s, u_s)ds$$

et d'après la condition de Lipschitz de b , on aura

$$\varphi_k(t) \leq K \int_0^t \varphi_k(s)ds + E\left(\int_0^T |u_k(s) - u(s)|^2 ds\right),$$

où l'on a posé

$$\varphi_k(t) = E\left(\sup_{0\leq s\leq T} |X_k(s) - X(s)|^2\right).$$

Par suite on obtient $\varphi_k(T) \longrightarrow 0$.
D'après la condition de croissance linéaire sur J, on a l'inégalité :

$$\begin{aligned}|J(u_k) - J(u)| \leq C\big[E \int_0^T (|X_k(t)| + |u_k(t)| + 1)(|X_k(t) - X(t)| + |u_k(t) - u(t)|)dt \\ +E(|X_k(T)| + |X(T) + 1||X_k(T) - X(T)|)\big],\end{aligned}$$

d'où le résultat.■

Remarque : *Si la fonction coût J atteint son minimum pour le contrôle $u \in U^*$, u est aussi un contrôle optimal dans U donc il doit vérifier les conditions nécessaires d'optimalité dans$U$.*

2.6 Quelques exemples sur le contrôle stochastique

2.6.1 Contrôle de risque sensitifs

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone, on définit le coût par :

$$J(u) = E\Big[\varphi\Big(\int_0^T l(t, X_t, u_t)dt + g(X_T)\Big)\Big].$$

Notons que X_t est la solution de l'EDS modélisant le système dynamique à étudier prise à l'instant t. Ce genre de problème est intéressant dans la théorie économique. D'habitude les fonctions de coût sont de la forme $\varphi^\theta(x) = \theta \exp(\theta x)$

$$\varphi^\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}x^\theta & si : \theta \neq 0 \\ \ln x & si : \theta = 0 \end{cases}$$

2.6.2 Contrôle ergodique

On considère le problème de contrôle stochastique dans lequel l'horizon est infini, le coût est défini par :

$$J(u) = \overline{\lim_{T\longrightarrow\infty}} \frac{1}{T} E\Big[\int_0^T l(t, X_t, u_t)dt\Big].$$

Ce problème est nommé un problème ergodique.

2.6.3 Portefeuille de Merton

On considère le problème du choix de portefeuille de Merton où l'horizon est fini. On se place dans un marché financier à deux actifs, l'actif sans risque représente le compte d'épargne et l'autre représenté par une action est considéré risqué. Le processus de prix de l'actif sans risque évolue selon l'équation $ds_t^0 = rs_t^0.dt$ et celui de l'actif risqué évolue selon l'EDS $ds_t = \mu s_t dt + \sigma s_t.dB_t$, où r, μ et σ sont des constantes avec : $\sigma > 0$.
Soit un agent qui investit dans ces deux actifs avec une proportion de sa richesse. A la date t, cette proportion est notée π_t dans l'actif risqué et $(1 - \pi_t)$ dans l'actif sans risque.
Son processus de richesse évolue selon :

$$\begin{aligned} dX_t &= (1 - \pi_t)\frac{X_t}{s_t^0} ds_t^0 + \pi_t \frac{X_t}{s_t} ds_t \\ &= [\pi_t X_t \mu + (1 - \pi_t) X_t r] dt + \pi_t X_t \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Le contrôle est le processus π sont à valeurs réelles. Le critère économique consiste à maximiser l'espérance de l'utilité de la richesse terminale à un horizon fini T : $\sup_\pi E[u(X_T)]$ où u est une fonction d'utilité, prenons par exemple $u(x) = \frac{x^p}{p}, : p \in]0, 1]$.

2.7 Le problème de contrôle relaxé

D'une façon générale, le problème d'optimisation en théorie de contrôle stochastique, ne possède pas de solution optimale en l'absence d'hypothèses supplémentaires de convexité sur la dérive b et le coefficient de diffusion σ. Pour cette raison on injecte l'espace des contrôles stricts U, dans un espace plus large qui possède de bonnes propriétés de compacité et de convexité et on pose le problème de contrôle optimal relaxé sur cet espace noté $\Re$.
Notons que $\Re$ est muni de la topologie de la convergence stable (topologie faible). L'existence d'un contrôle optimal pour les problèmes modélisés par les EDS dont σ ne dépend pas du contrôle, a été montrée d'une façon explicite par Fleming [16]. Plus tard, ces résultats ont été généralisés dans le cas où σ est contrôlé par El Karoui [11].

Remarque : *L'injection de l'espace U dans $\Re$, est effectuée par l'application :*

$$\psi : U \longrightarrow \Re$$

définie par :

$$\psi(u)(dt, da) = dt\delta_{u_t}(da)$$

où δ_{u_t} représente la mesure de Dirac au point u_t.

Exemple illustratif

Considérons l'exemple du contrôle ordinaire considéré auparavant. On identifie $u_n(t)$ par la mesure de Dirac $\delta_{u_{n(t)}}$sur A .
Rappelons que $u : [0,1] \longrightarrow A$. On considère la mesure $q_n(dt,du) = \delta_{u_n(t)}(du)dt$ sur l'espace $([0,1] \times A])$.

Lemme 2.8 (Voir Mazliak [30])*La suite $q_n$converge faiblement vers* la mesure

$$\tilde{q}(dt,.) = \frac{1}{2}[\delta_{-1} + \delta_1](du)dt.$$

On peut définir alors un nouveau problème de contrôle associé à q, appelé problème de contrôle relaxé. On considère la dynamique

$$x_t^q = x_0 + \int_0^t \int_A u_q(ds,du),$$

où le coût associé est donné par $J(q) = \int_0^1 (x_t^q)^2 dt$. Notons que les mesures sont de la forme $q(dt,du) = \delta_{u_t}(du).dt$. Si de plus $\tilde{q}(dt,du) = \frac{1}{2}[\delta_1(du) + \delta_{-1}(du)]dt$, alors on a $J(\tilde{q}) = 0$ et donc le nouveau problème de contrôle admet $\tilde{q}$ comme une solution optimale.

2.7.1 Position du problème

On se place sur un espace probabilisé filtré : $(\Omega, F, (F_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, P)$.
Soit $[0,T] \subset \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ l'ensemble d'indices et U l'ensemble des contrôles admissibles à valeurs dans l'espace supposé compact A. On considère dans toute la suite le problème de contrôle défini par l'EDS :

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t,X_t,u_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t, : t \in]0,T] \\ X_0 &= x, x \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

et la fonction coût J définie par $J(u) = E[g(X_T)]$ et on garde les mêmes hypothèses sur les coefficients qui définissent l'équation d'état et la fonction coût associée.
On considère $\mathcal{P}([0,T] \times A)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $[0,T] \times A$ tel que la projection sur $[0,T]$ coïncide avec dt, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. l'ensemble $\mathcal{P}([0,T] \times A)$ muni de la topologie de la convergence faible des mesures est un espace métrisable compact.

Définition 2.9 *Toute application mesurable*

$$\begin{aligned} \mu(.,dt,da) \quad &: \quad \Omega \longrightarrow \mathcal{P}([0,T] \times A), \\ &\omega \longmapsto \mu(dt,da) = \mu(\omega,dt,da) \end{aligned}$$

est appelée contrôle relaxé.
L'ensemble des contrôles relaxés est noté par $\Re$.

Proposition 2.10 *Étant donné un contrôle relaxé μ à valeurs dans A. Alors pour tout $t \in [0,T]$, il existe une mesure de probabilité μ_t sur A, telle qu'on ait la décomposition suivante :*

$$\mu(dt, da) = dt\mu(t, da) = dt\mu_t(da). \tag{7}$$

Preuve : Provient directement du théorème de Fubini.■
Remarque : *La valeur d'un contrôle optimal relaxé est prise d'une facon aléatoire sur l'espace A avec la mesure de probabilité $\mu_t(da)$, par contre dans le cas d'un contrôle optimal ordinaire, on associe la valeur $u_t \in A$ à un instant $t \in [0,T]$.*

Définition 2.11 *Soit $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de contrôles relaxés. On dit qu'elle converge vers $\mu \in \Re$ (faiblement), si pour tout fonction f continue à support compact sur $[0,T] \times A$, on a :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[0,T]\times A} f(t,a)\mu^n(dt,da) =: \int_{[0,T]\times A} f(t,a)\mu(dt,da).$$

On constate que la mesure de Lebesgue est la marginale de tous les éléments de $\Re$ sur $[0,T]$, on obtient une convergence stable en affaiblissant les hypothèses sur f comme suit :

Proposition 2.12 *Soit (μ^n) une suite convergente vers μ dans $\Re$. Alors pour toute fonction mesurable $f : [0,T] \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in [0,T]$, l'application*

$$f(t,.) : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

est continue, on a une convergence stable au sens que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[0,T]\times A} f(t,a)\mu^n(dt,da) = \int_{[0,T]\times A} f(t,a)\mu(dt,da). \tag{8}$$

L'ensemble des contrôles relaxés admet une propriété de compacité très utile :
Proposition 2.13(Voir El Karoui [11]) *Si on suppose que l'espace A est compact, alors $\Re$ l'est aussi.*

2.7.2 Étude d'un problème de contrôle relaxé

Dans le problème de contrôle relaxé, on utilise à l'instant t une mesure de probabilité sur A(l'ensemble des valeurs de contrôle) notée μ_t au lieu de u_t élément de A. Le problème est alors de modéliser par l'équation (9) dans le cas où le terme de diffusion est contrôlé :

$$\begin{cases} dX_t &= \big(\int_A b(t,X_t,a)d\mu_t(a)\big)dt + \big(\int_A \sigma(t,X_t,a)d\mu_t(a)\big)dB_t,\ t\in]0,T] \\ X_0 &= x\,,\ x\in\mathbb{R}^m \end{cases} \tag{9}$$

et par l'équation (10), dans le cas où le terme de diffusion n'est pas contrôlé :

$$\begin{cases} dX_t &= \big(\int_A b(t,X_t,a)d\mu_t(a)\big)dt + \sigma(t,X_t)dB_t,\ t\in]0,T] \\ X_0 &= x\,,\ x\in\mathbb{R}^m \end{cases} \tag{10}$$

Étude de problème de contrôle relaxé : σ non contrôlé

On considère les problèmes de contrôle relaxé (10), où le terme de diffusion σ n'est pas contrôlé. Soient

$$b:\ [0,T]\times\mathbb{R}^m\times A \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

et

$$\sigma:\ [0,T]\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R})$$

deux fonctions boréliennes. Supposons que b est bornée, continue en a et uniformément continue en (t,x) , et que les hypothèses (3) et (4) sont vérifiées.
Sous ces hypothèses, l'équation (10) admet une solution unique forte $X=(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, continue, $(F_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ adaptée qui X vérifie l'inégalité

$$E\big[|\sup_{t\in[0,T]}|X_t|^p|\big] < N,\ \forall p>1,$$

où N est une constante qui dépend de $C,\mathbb{P},T$. En outre la solution X est définie par :

$$X_t = x + \int_0^t \Big(\int_A b(s,X_s,a)\mu_s(da)\Big)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s.$$

On définit la fonction coût par

$$J(\mu) = E\big[g(X_T)\big],$$

où X_T est la valeur terminale de la solution de l'équation (10) et g : $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 (où C^1 représente l'ensemble des

fonctions continûment différentiables) vérifiant les conditions suivantes :
i- Il existe une constante positive c, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^m : \ |g(x)| \leq c(1+|x|) \tag{11}$$

ii- Il existe une constante positive k, telle que :

$$|g_x| \leq k, \tag{12}$$

où g_x désigne la gradient de g.
On cherche à trouver un contrôle $\mu^* \in \Re$ minimisant le coût J, autrement dit :

$$J(\mu^*) \leq J(\mu),\ \forall \mu \in \Re.$$

On note que $J(\mu^*) = \inf_{\mu \in \Re} J(\mu)$.

Remarques :

1− Si on pose :

$$\bar{b}(t,x,\mu_t) = \int_A b(t,x,a)\mu_t(da),$$

l'équation (10) devient :

$$\begin{cases} dX_t = \bar{b}(t,X_t,\mu_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t,\ t \in]0,T] \\ X_0 = x,\ x \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{13}$$

et dans ce cas la fonction $\bar{b}$ satisfait les mêmes conditions que b, et de plus elle est linéaire en μ .
On déduit que par l'introduction du contrôle relaxé, on a remplacé l'espace d'état des contrôles ordinaires A par un espace plus large $\mathcal{P}([0,T] \times A)$ qui est compact et convexe et b par $\bar{b}$ qui est également linéaire en μ.
2− Comme un cas particulier en mettant $\mu_t = \delta_{u_t}$ (mesure de Dirac au point u_t) pour tout $t \in [0,T]$, on obtient :

$$\bar{b}(t,x_t,\mu_t) = \int_A b(t,x_t,a)\sigma_{u_t}(da) = b(t,X_t,u_t)$$

et on aura un problème de contrôle ordinaire.

2.7.3 Approximation des trajectoires

Le problème de contrôle relaxé est réellement une généralisation du problème de contrôle ordinaire par le fait que l'infimum de la fonction coût sur $\Re$, l'espace des contrôles relaxés est le même que son infimum sur U, l'espace des contrôles admissibles.

Lemme 2.14 (Voir Fleming[16]) *Soit* μ *un contrôle relaxé. Alors il existe une suite* $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de contrôle ordinaires admissibles de* U*, telle que la mesure* $dt\mu_t^n(da)$ *converge vers la mesure* $dt\mu_t(da)$,où l'on posé :

$$\mu_t^n(da) = \delta_{u_t^n}(da).$$

En d'autres termes, pour toute fonction

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x, \mu_t) \longmapsto f(t, x, \mu_t),$$

fonction continue sur $[0,T] \times \mathcal{P}(A)$ et linéaire en μ_t, on a :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^t f(s, X_s, \mu_s^n)ds = \int_0^t f(s, X_s, \mu_s)ds, \tag{14}$$

uniformément en $t \in [0,T]$.

Remarque : *Si on note par* X^n *la solution de l'équation* (13) *associée à* μ^n *pour tout* $n \in N$*, alors* X^n *doit satisfaire l'équation :*

$$\begin{cases} dX_t^n = \bar{b}(t, X_t^n, \mu_t^n)dt + \sigma(t, X_t^n)dB_t;\ t \in]0,T] \\ X_0^n = x,\ x \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{15}$$

Lemme 2.15 *Soit* μ *un contrôle relaxé et* X *la solution de l'équation* (13) *associée à* μ*. Alors il existe une suite* $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de contrôles admissibles telle que :*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |X_t - X_t^n|^2\Big] = 0, \tag{16}$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} J(\mu^n) = J(\mu), \tag{17}$$

où (μ^n) *est une suite de contrôles relaxés, telle que :*

$$\mu^n(dt, da) = dt\delta_{u_t^n}(da),$$

et X^n *est la solution de* (13) *associée à* μ^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : La démonstration se fait en 2 étapes.
1− On montre d'abord que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |X_t - X_t^n|^2\Big] = 0.$$

Soient X solution de (13) et X^n solution de l'équation (15) associée respectivement à μ et à μ^n. On obtient par différence

$$X_t - X_t^n = \int_0^t (\bar{b}(s, X_s, \mu_s)ds - \bar{b}(s, X_s^n, \mu_s^n))ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n))dB_s.$$

En ajoutant et en retranchant le terme $\int_0^t \bar{b}(s, X_s, \mu_s^n)ds$, on aura :

$$\begin{aligned} X_t - X_t^n = & \int_0^t \Big(\bar{b}(s, X_s, \mu_s) - \bar{b}(s, X_s, \mu_s^n)\Big)ds \\ & + \int_0^t \Big(\bar{b}(s, X_s, \mu_s^n) - \bar{b}(s, X_s^n, \mu_s^n)\Big)ds \\ & + \int_0^t \Big(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n)\Big)dB_s. \end{aligned}$$

et en posant

$$\alpha_n(t) = \int_0^t \Big(\bar{b}(s, X_s, \mu_s) - \bar{b}(s, X_s, \mu_s^n)\Big)ds,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} X_t - X_t^n = & \alpha_n(t) + \int_0^t \Big(\bar{b}(s, X_s, \mu_s^n) - \bar{b}(s, X_s^n, \mu_s^n)\Big)ds \\ & + \int_0^t \Big(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n)\Big)dB_s. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité :

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \text{ pout tout } a, b, c \geq 0,$$

on aura

$$\begin{aligned} |X_t - X_t^n|^2 \leq & 3|\alpha_n(t)|^2 + 3\Big[\int_0^t \Big(\bar{b}(s, X_s, \mu_s^n) - \bar{b}(s, X_s^n, \mu_s^n)\Big)ds\Big]^2 \\ & + 3\Big[\int_0^t \Big(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n)\Big)dB_s\Big]^2. \end{aligned}$$

Il résulte alors de l'inégalité de Cauchy-Schwartz que

$$\begin{aligned} |X_t - X_t^n|^2 \leq & 3|\alpha_n(t)|^2 + 3T\int_0^t |\bar{b}(s, X_s, \mu_s^n) - \bar{b}(s, X_s^n, \mu_s^n)|^2 ds \\ & + 3\Big[\int_0^t \Big(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n)\Big)dB_s\Big]^2. \end{aligned}$$

et en passant au sup sur $[0,T]$ et en appliquant l'espérance, on conclut,d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, qu'il existe une constante positive C, telle que :

$$\begin{aligned} E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_t^n|^2\Big] \leq 3E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|\alpha_n(t)|^2\Big] \\ +3TE\Big[\int_0^t |\bar{b}(s,X_s,\mu_s^n) - \bar{b}(s,X_s^n,\mu_s^n)|^2 ds\Big] \\ +3CE\Big[\int_0^t |\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X_s^n)|^2 ds\Big]. \end{aligned}$$

Puisque $\bar{b}(t,x,u)$ et $\sigma(t,x)$ sont lipschitziennes en x, alors :

$$E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_t^n|^2\Big] \leq 3E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|\alpha_n(t)|^2\Big] + 3TKE\Big[\int_0^t |X_s - X_s^n|^2 ds\Big] + 3CKE\Big[\int_0^t |X_s - X_s^n|^2 ds\Big].$$

On pose $D = 6K\sup(T,C)$, d'où

$$\begin{aligned} E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_t^n|^2\Big] \leq 3E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|\alpha_n(t)|^2\Big] \\ +DE\Big[\int_0^t |X_s - X_s^n|^2 ds\Big] \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme de Gronwall, on obtient :

$$E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_t^n|^2\Big] \leq 3E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|\alpha_n(t)|^2\Big]\exp(DT). \qquad (18)$$

D'après (4) et puisque $\bar{b}(t,x,\mu)$ est continue sur $[0,T]\times\mathcal{P}(A)$ et linéaire en μ, alors d'après (14), on a :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\alpha_n(t) = 0$$

uniformément en $t\in[0,T]$. Comme $\bar{b}$ est bornée, alors d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on conclut que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E\big[|\alpha_n(t)|^2\big] = 0,$$

et donc

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|\alpha_n(t)|^2\Big] = 0.$$

Il résulte de (18) que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} E\Big[\sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_t^n|^2\Big] = 0.$$

2− On va prouver maintenant que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} J(\mu^n) = J(\mu).$$

Soient les fonctions coût associées respectivement à μ et à μ^n, $n \in \mathbb{N}$, suivantes :

$$J(\mu) = E\big[g(X_T)\big]$$

et

$$J(\mu^n) = E\big[g(X_T^n)\big],$$

où X_T et X_T^n sont les valeurs des solutions respectives des équations (13) et (15), prises au temps terminal T.
On a

$$|J(\mu) - J(\mu^n)|^2 = |E[g(X_T)] - E[g(X_T^n)]|^2 = |E[g(X_T) - g(X_T^n)]|^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on aura :

$$|J(\mu) - J(\mu^n)|^2 \leq |E[g(X_T) - g(X_T^n)]|^2.$$

Comme g est dérivable et à dérivés bornés, alors elle vérifie la condition Lipschitz avec la constante k, d'où d'après (12)

$$\begin{aligned} |J(\mu) - J(\mu^n)|^2 &\leq |E[g(X_T) - g(X_T^n)]|^2 \leq kE\big[|X_T - X_T^n|^2\big] \\ &\leq kE\Big[\sup_{t\in[0,T]} |X_t - X_t^n|^2\Big]. \end{aligned}$$

et donc

$$0 \leq |J(\mu) - J(\mu^n)|^2 \leq kE\Big[\sup_{t\in[0,T]} |X_t - X_t^n|^2\Big].$$

D'après (16) et par passage à la limite lorsque $n \longrightarrow \infty$, on déduit que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} J(\mu^n) = J(\mu),$$

d'où le résultat désiré.■

2.7.4 Existence d'un contrôle optimal relaxé

On s'intéresse à prouver l'existence d'un contrôle optimal relaxé. Dans le cas où le coefficient de diffusion n'est pas contrôlé, on va appliquer le théorème de Skorokhod, où l'approche est dû à Fleming. D'autre part, on va s'intéresser à l'idée des problèmes de martingale dû à El Karoui, pour démontrer l'existence du contrôle optimal dans le cas où le coefficient de diffusion est contrôlé.

a- Existence d'un contrôle optimal dans le cas où le terme de diffusion n'est pas contrôlé

On constate qu'il existe toujours un contrôle relaxé optimal qui minimise le coût $J(u)$ sur l'espace $\Re$, on se base sur le théorème de Skorokhod.

Théorème 2.16 (Théorème de Skorokhod) **:** *Soit* $(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}^m$ *telle que* $P_{\tilde{X}_n}$ *la loi de* X_n *converge étroitement vers* μ. *Alors il existe un espace probabilisé* $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$ *et une suite de variables aléatoires* $(\tilde{X}_n)_n$ *et une variable aléatoire* $\tilde{X}$ *définies sur cet espace, telle que :*
i $-$ $P_{\tilde{X}} = \mu$.
ii $-$ $P_{\tilde{X}_n} = P_{X_n}$ *pour* $n = 1, 2, ...$
iii $-$ $\widetilde{X}_n$ *converge en probabilité vers* $\widetilde{X}$ *par rapport à* $\tilde{\mathbb{P}}$.

Preuve : voir[24] ■

Remarque : *Puisque* $\widetilde{X}_n$ *converge en probabilité vers* $\widetilde{X}$, *alors on peut extraire une sous suite* $(\widetilde{X}_{n_k})_k$ *telle que :*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \widetilde{X}_{n_k} = \widetilde{X} \qquad \widetilde{\mathcal{P}} \ \ p.s.$$

Le lemme de Kolmogorov suivant sert à affirmer l'existence d'une version continue des processus.

Lemme 2.17 (Lemme de Kolmogorov) **:** *Soit* $(X^n)_n$ *une suite de processus stochastique continus, définis sur un espace probabilisé* (Ω, F, P) *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^m$, *telle que :*
i$-$ *il existe deux constantes positives* M *et* γ *telles que :*

$$E[|X_0^n|^\gamma] \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

ii$-$ *il existe des constantes* α, β *et* M_k *(pour* $k = 1, 2, ...$*), telles que :*

$$E[|X_t^n - X_s^n|^\alpha] \leq M_k |t-s|^{1+\beta} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } t, s \in [0, k].$$

Alors, il existe un espace probabilisé $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{P}}\right)$, *une sous-suite de processus stochastiques* $\left(\widetilde{X}_{n_k}\right)_k$ *et un processus* $\widetilde{X}$, *qui sont tous continus et définis sur cet espace, tels que :*
i$-$ Les lois de $\widetilde{X}^{n_k}$ *et* X^{n_k} *coïncident.*
ii$-$ $\widetilde{X}_t^{n_k}$ *converge vers* $\widetilde{X}_t$ *uniformément sur* $[0, T]$ $\widetilde{\mathbb{P}}$ *p.s.*

En utilisant le théorème de Skorokhod et le lemme de Kolmogorov, on énonce un résultat principal concernant l'existence d'un contrôle optimal relaxé, qui est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.18 *Il existe un contrôle relaxé $\mu^* \in \Re$ tel que :*

$$J(\mu^*) = \inf_{\mu \in \Re} J(\mu) = \inf_{u \in U} J(u)$$

Preuve : Montrons d'abord que $J(\mu^*) = \inf_{\mu \in \Re} J(\mu)$. On pose

$$l = \inf_{\mu \in \Re} J(\mu). \tag{19}$$

Et soit (μ^n, X^n, B^n) pour $n = 1, 2, ...$ une famille telle que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} J(\mu^n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} E[g(X_T^n)] = l,$$

où X^n est la solution de l'équation (15). La famille (μ^n, X^n, B^n) est tendue dans $\mathcal{P}(A) \times C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m) \times C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, d'où d'après le lemme de Kolmogorov il existe un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$ et une suite $(\tilde{\mu}^n, \tilde{X}^n, \tilde{B}^n)$ et $(\tilde{\mu}, \tilde{X}, \tilde{B})$ définis sur cet espace tel que :
$\mathfrak{i}-$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les lois de (μ^n, X^n, B^n) et de $(\tilde{\mu}^n, \tilde{X}^n, \tilde{B}^n)$ coïncident.
$\mathfrak{ii}-$ Il existe une sous suite $(\tilde{\mu}^{n_k}, \tilde{X}^{n_k}, \tilde{B}^{n_k})$, telle que :

$$\lim_{n_k \longrightarrow \infty} (\tilde{\mu}^{n_k}, \tilde{X}^{n_k}, \tilde{B}^{n_k}) = (\tilde{\mu}, \tilde{X}, \tilde{B}) \ \widetilde{\mathbb{P}} \ p.s. \tag{20}$$

dans l'espace $\mathcal{P}(A) \times C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m) \times C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

A partir de $(\mathfrak{i})$, on déduit que :

$$\tilde{E}\big[g\big(\tilde{X}_T^{n_k}\big)\big] = E\big[g\big(X_T^{n_k}\big)\big].$$

où $\tilde{E}$ représente l'espérance par rapport à la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$.
Et par le fait que $\lim_{n_k \longrightarrow \infty} E\big[g\big(X_T^{n_k}\big)\big] = l$, on aura alors

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \tilde{E}\big[g\big(\tilde{X}_T^{n_k}\big)\big] = l.$$

D'autre part, d'après $(\mathfrak{ii})$ et la continuité de g on a :

$$\lim_{n_k \longrightarrow \infty} E\big[g\big(X_T^{n_k}\big)\big] = \tilde{E}\big[g\big(\tilde{X}_T\big)\big],$$

d'où d'après l'unicité de la limite, $\tilde{E}\big[g\big(\tilde{X}_T\big)\big] = l$.
D'après (19), on a :

$$J(\tilde{\mu}) = \inf_{\mu \in \Re} J(\mu) \tag{21}$$

$\tilde{\mu}$ est un contrôle optimal et il suffit de prendre $\tilde{\mu} = \mu^*$.
Il reste à prouver que $\tilde{X}$ est la solution de l'équation (13).
En effet :

$$\widetilde{X}_t^{n_k} = Z + \int_0^t \int_A \bar{b}(s, \widetilde{X}_s^{n_k}, a)\tilde{\mu}_s^{n_k}(da)ds + \int_0^t \int_A \sigma(s, \widetilde{X}_s^{n_k})d\widetilde{B}_s^{n_k}.$$

$\bar{b}$ et σ étant des fonctions continues, alors d'après (20) on a :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_0^t \int_A \bar{b}\big(s, \widetilde{X}_s^{n_k}, a\big)\widetilde{\mu}_s^{n_k}(da)ds = \int_0^t \bar{b}\big(s, \widetilde{X}_s, \tilde{u_s}\big)ds \;\; \widetilde{\mathbb{P}} \; p.s.$$

et :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_0^t \sigma\big(s, \widetilde{X}_s^{n_k}\big)d\widetilde{B}_s^{n_k} = \lim_{n_k\longrightarrow\infty} \int_0^t \sigma\big(s, \widetilde{X}_s\big)d\widetilde{B}_s \;\; \widetilde{\mathbb{P}} \; p.s.$$

par conséquent, on aura :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \widetilde{X}_t^{n_k} = Z + \int_0^t \int_A \bar{b}(s, \widetilde{X}_s, a)\widetilde{\mu}_s(da)ds + \int_0^t \sigma\big(s, \widetilde{X}_s\big)d\widetilde{B}_s \;\; \widetilde{\mathbb{P}} \; p.s.$$

Comme $\lim_{k\longrightarrow\infty} \widetilde{X}^{n_k} = \widetilde{X} \quad \widetilde{\mathbb{P}} \; p.s.$, alors :

$$\widetilde{X}_t = Z + \int_0^t \bar{b}\big(s, \widetilde{X}_s, \tilde{u}_s\big)ds + \int_0^t \sigma\big(s, \widetilde{X}_s\big)d\widetilde{B}_s,$$

qui est la forme intégrale de l'équation (13), par rapport au mouvement brownien $\widetilde{B}$.
L'égalité :

$$\inf_{\mu\in\Re} J(\mu) = \inf_{u\in U} J(u)$$

est une une conséquence directe du lemme (égalités$16, 17$).

b- Existence d'un contrôle optimal dans le cas où le terme de diffusion est contrôlé

Lorsqu'on étudie un problème de contrôle, on a besoin d'estimer le coût $J(u)$, qui est une fonction des processus (u_t) et (X_t). C'est pour cette raison que la distribution du processus (u_t, X_t) est importante , d'où la notion de solution faible d'une EDS.

Solution faible d'une EDS et problème de martingale

Considérons une EDS contrôlée de la forme (2), comme suit :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t) + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t;\; t \in]0, T] \\ X_0 = x,\; x \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{22}$$

où

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times A \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

et

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times A \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R})$$

sont deux fonctions mesurables continues en x et en a.

L'objectif du problème est de trouver un contrôle qui minimise une fonction coût donnée, comme suit :

$$J(u) = E\Big[\int_0^T l(s, X_s, u_s)ds + g(X_T^u)\Big], \tag{23}$$

où $l : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables. On remarque que ce cas contient le cas déterministe ($\sigma \equiv 0$). Un problème similaire vu précédemment qui n'a pas nécessairement de solution, raison pour laquelle on introduit les contrôles relaxés qui sont des contrôles à valeurs mesures et l'équation d'état (22) sera de la forme :

$$X_t = x + \int_0^t \Big(\int_A b(s, a, X_s)\mu_s(da)\Big)ds + \int_0^t \Big(\int_A \sigma(s, a, X_s)\mu_s(da)\Big)dB_s \tag{24}$$

Le problème se pose avec le second terme du deuxième membre de l'équation (24) car il est une intégrale stochastique. Supposons alors que $\mu^n(dt, da)$ converge vers $\mu(dt, da)$, on aura l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}(\alpha) \; : &= E\Big[\Big(\int_0^T \int_A \sigma(t, a, X_s)\mu_t(da)dB_t - \int_0^T \int_A \sigma(s, a, X_t)\mu_t^n(da)dB_t\Big)^2\Big] \\ &= E\Big(\Big[\int_0^T \Big(\int_A \sigma(t, a, X_t)(\mu_t(da) - \mu_t^n(da))\Big)dB_t\Big]^2\Big).\end{aligned}$$

En appliquant l'isométrie d'Itô, on obtient :

$$(\alpha) = E\Big(\int_0^T \Big[\int_A \sigma(t, a, X_t)(\mu_t(da) - \mu_t^n(da))\Big]^2 dt\Big). \tag{25}$$

La formule (25) n'est pas satisfaisante.
Il est intéressant de reformuler le problème sans aucune utilisation de l'intègrale stochastique, et ceci va être le rôle principal du problème de martingale.

Solution faible d'une EDS

Rappelons que la solution faible d'une EDS est définie comme suit :

Définition 2.19 *Une solution faible de l'EDS*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad t \in]0, T] \\ \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{26}$$

est une collection d'éléments $(\Omega, F, (F_t), P, (B_t))$, *où :*
i $-$ $(\Omega, F, (F_t), P)$ *est une espace probabilisé filtré.*
ii $-$ $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un* $(F_t)-$*mouvement brownien sur* Ω.
iii $-$ $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une solution forte de l'équation :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, t \in]0, T] \\ X_0 = x \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{27}$$

Remarque : *L'espace de probabilité et le mouvement brownien ne sont pas décrits dans le cas d'une solution faible, la solution est cependant tout élément* $(\Omega, F, (F_t), P, (B_t), (X_t))$. *Dans la formulation précédente, on ne sait pas comment trouver l'espace* Ω *et le mouvement brownien* $(B_t)_{t\geq 0}$ *défini sur* Ω. *Ainsi, il vaut mieux définir une formulation qui nous permet d'expliciter convenablement cette distribution, et ceci sera fait par les problèmes de martingales.*
Introduisons le générateur associé aux coefficients b et σ, qui est défini comme suit :

$$Lf(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + b(t, x)\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma(t, x)\sigma^t(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x), \tag{28}$$

pour toute fonction f de classe $C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^m)$.
Il est facile de vérifier par la formule d'Itô que si $(\Omega, F, (F_t), P, (B_t), (X_t))$ est une solution faible de (26), alors pour toute fonction $f \in C_b^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^m)$, alors le processus

$$f(t, X_t) - \int_0^t Lf(s, X_s)ds, \tag{29}$$

est une $(F_t)-$martingale.

Définition 2.20 *L'espace canonique* C *est l'ensemble des fonctions continues de* $[0, T]$ *vers* $\mathbb{R}^m$.
Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *défini sur* C *par :*

$$X_t(f) = f(t),$$

est appelé le processus canonique.
La filtration canonique est définie par $C_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.
La distribution de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une mesure de probabilité sur C.

Si $(\Omega, F, (F_t), P, (B_t), (X_t))$ est une solution faible de (26), alors la distribution P_X de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est telle que pour toute fonction $f \in C_b^{1,2}([0,T]\times \mathbb{R}^m)$, le processus défini sur C par $f(t, X_t) - \int_0^t Lf(s, X_s)ds$ est une (C_t) −martingale sous la probabilité P_X. On a juste écrit la propriété de martingale autrement (29).

Définition 2.21 *Une mesure de probabilité Q sur C est dite solution du problème de martingale associé au générateur L si pour toute fonction $f \in C_b^{1,2}([0,T]\times R^m)$, le processus défini par*

$$f(t, X_t) - \int_0^t Lf(s, X_s)ds,$$

est une $(C_t)-$martingale sous la mesure Q.
On a vu qu'à chaque solution d'un problème de martingale est associé à une solution faible de (26). Le théorème suivant affirme que l'inverse est aussi aussi vrai et qu'il existe une bijection entre les solutions faibles et les solutions d'un problème de martingale.

Théorème 2.22 (Voir lkeda Watanabe[24]) **:** *On suppose que Q est une solution du problème de martingale. Alors il existe une solution faible $(\Omega, F, (F_t), P, (B_t), (X_t))$ de (26) telle que (X_t) admet Q comme distribution.*

Remarque : *La formulation de problème de martingale est intéressante car elle nous permet d'obtenir aisément des résultats limites.*

Proposition 2.23 *Supposons que b et σ sont des fonctions bornées et continues en x. Alors l'ensemble des solutions du problème de martingale associé, est un ensemble fermé.*

Preuve : Soit $(Q_n)_n$ une suite de solutions du problème de martingale convergente vers Q montre que sous Q, pour tout $f \in C_b^{1,2}([0,T]\times \mathbb{R}^m)$ le processus défini par

$$f(t, X_t) - \int_0^t Lf(s, X_s)ds$$

est une $(C_t)-$martingale.

Soit $r < t$ et soit h une fonction continue bornée et C_r-mesurable sur C. Alors, on a pour tout entier n :

$$Q_n\Big[\Big(f(t, X_t) - \int_0^t Lf(s, X_s)ds\Big)h\Big] = Q_n\Big[\Big(f(r, X_r) - \int_0^r Lf(s, X_s)ds\Big)h\Big]. \tag{30}$$

Comme la fonction $\Big(f(r, X_r) - \int_0^r Lf(s, X_s)ds\Big)h$, est bornée sur C et continue en r sur $[0,T]$, alors on a d'après la définition de la convergence faible de (Q_n) vers, Q lorsque $n \longrightarrow \infty$ et l'égalité (30) tend à :

$$Q\Big[\Big(f(t,X_t)-\int_0^t Lf(s,X_s)ds\Big)h\Big]=Q\Big[\Big(f(r,X_r)-\int_0^r Lf(s,X_s)ds\Big)h\Big],$$

ce qui achève la démonstration.■

Remarque : *On peut utiliser la compactification dans les problèmes de contrôle stochastique relaxé pour assurer l'existence d'un contrôle optimal dans le cas où le terme de diffusion est contrôlé.*

Chapitre 03
G-contrôle stochastique optimal strict

3 G-contrôle stochastique optimal strict

3.1 Motivation

On considère une équation différentielle stochastique contrôlée, gouvernée par un $G-$mouvement brownien. Le problème de contrôle optimal strict a été étudié, en 2014, par Biagini et al [6] ,où ils ont considéré le problème de contrôle stochastique sous la condition de volatilité incertaine selon l'approche de l'espérance sous linéaire et celle de l'analyse quasi-sûre. En appliquant le principe du maximum, leur objectif était de trouver les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité vérifiées par le contrôle optimal strict en supposant qu'il existe. Sous des conditions de convexité des coefficients, ils ont maximisé l'hamiltonien, ce qui revient à optimiser le critère de performance J.

3.2 Le principe du maximum classique

Le principe du maximum représente un outil fondamental dans la théorie du contrôle, il sert à trouver la commande optimale permettant d'amener un système dynamique d'un état à un autre, en présence de contraintes portant sur l'état ou les commandes d'entrée. Le principe examine la minimisation d'un hamiltonien sur U, l'espace des contrôles admissibles. Historiquement le travail initial dans ce domaine est dû à Pontryagin, il était centré sur la maximisation d'une fonctionnelle de bénéfice, dans le cas déterministe, plutôt que la minimisation d'une fonctionnelle de coût.

L'objectif du principe de Pontryagin dans le cas classique est d'établir les conditions nécessaires d'optimalité alors que les équations de Hamilton-Jacobi-Bellmann, notées HJB permettent d'énoncer les conditions suffisantes d'optimalité.

On considère l'EDS contrôlée :

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, t \in]0, T] \\ X_0 &= x \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

On cherche à déterminer les conditions nécessaires d'optimalité vérifiées par une solution forte d'une G-équation contrôlée.

En tenant compte de l'existence d'un contrôle minimisant le critère de performance J :

$$J(u) = E\Big[\int_0^T l(t, X_t, u_t)dt + g(X_T)\Big],$$

il reste à déterminer certaines conditions satisfaites par le contrôle optimal dites nécessaires. Partant de la condition d'optimalité d'une fonction réelle différentiable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $x^* \in \mathbb{R}$ est un minimum de f, alors $f_d(x^*) \geqslant 0$, où f_d représente la dérivée de f. On déduit que x^* est aussi solution du problème de maximisation de $H(y)$ donnée par :

$$H(y) = -f_d(x^*)f(y), \forall y \geqslant x.$$

Généralisons cette condition au problème de contrôle, on établit la différentielle de la fonction coût J. On suppose alors que J atteint son minimum pour un certain contrôle $\hat{u} \in U$, alors $\hat{u}$ doit satisfaire les conditions nécessaires d'optimalité nommées principe du maximum stochastique.

Notons que l'utilisation de ce principe est difficile dans le cas stochastique car le processus adjoint qu'on va définir dans la suite est représenté par une moyenne conditionnelle. La méthode utilisée dans cette partie (dûe à Kushner) est basée sur le fait que la dérive et le coefficient de diffusion sont différentiables par rapport à x pour tout $(t, \alpha) \in [0, T] \times \mathcal{A}$. Supposons que $\hat{u}$ est un contrôle optimal, alors il existe un processus $(p_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, tel que pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $u \in \mathcal{U}$ on a la condition nécessaire suivante :

$$H(p_t, X_t^{\hat{u}}, \hat{u}) \leqslant H(p_t, X_t^{\hat{u}}, u),$$

$X^{\hat{u}}$ étant la solution de l'EDS contrôlée associée au contrôle optimal $\hat{u}$, H est le Hamiltonien du système et $(p_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est le processus adjoint.

3.3 Le principe du maximum pour une $G-$EDS

On se place dans les conditions du premier chapitre, où l'on considère un $G-$mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ défini sur un espace d'espérance non linéaire $\left(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{E}\right)$.

3.3.1 Position du problème

On considère le problème de contrôle défini par la fonctionnelle

$$J(u) := \widehat{E}[\int_0^T f(t, X^u(t), u(t))dt + g(X^u(T))] = \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} J^{\mathbb{P}}(u) \tag{31}$$

où l'on a posé

$$J^{\mathbb{P}}(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\int_0^T f(t, X^u(t), u(t))dt + g(X^u(T))].$$

L'objectif est de trouver un contrôle optimal réalisant

$$J(\hat{u}) = \sup_{u \in U} J(u)$$

On considère les contrôles u à valeurs dans un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$. Soit $X(t) = X^u(t)$ un processus contrôlé défini par :

$$\begin{gathered} dX(t) = b(t, X(t), u(t))dt + \mu(t, X(t), u(t))d\langle B\rangle_t + \sigma(t, X(t), u(t))dB(t) \\ X(0) = x \in \mathbb{R} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T \end{gathered} \tag{32}$$

On suppose que les coefficients σ, b, μ sont lipschitziens et continus uniformément en (t, u). De plus si ces coefficients ne sont pas déterministes, ils doivent appartenir à $M_G^2(0, T)$ pour tout $(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$.

Soient $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fonctions mesurables telles que f est continue par rapport à x et g est bornée, différentiable vérifiant la condition suivante : il existe une constante $C > 0$ et $\epsilon > 0$

vérifiant l'inégalité

$$|g'(x)| < C(1 + |x|)^{\frac{1}{1+\epsilon/2}}$$

On note par U l'ensemble des contrôles admissibles et on suppose que pour tout $u \in U$, la condition d'intégrabilité suivante est satisfaite

$$\widehat{E}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt\right] < \infty.$$

La fonctionnelle de performance correspondante à une mesure de probabilité $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ est définie par

$$J^{\mathbb{P}}(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T f(t, X(t), u(t))dt + g(X(T))\right] \tag{33}$$

Pour étudier le problème de contrôle stochastique optimal, on s'intéresse à trouver un contrôle $\hat{u}$ qui vérifie :

$$\sup_{u \in U} J^{\mathbb{P}}(u) = J^{\mathbb{P}}(\hat{u}) \ \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P} \tag{34}$$

On définit l'hamiltonien par la formule suivante :

$$H(t, x, u, p, q) = f(t, x, u) + \left[b(t, x, u) + \mu(t, x, u)\frac{d\langle B\rangle_t}{dt}\right]p + \sigma(t, x, u)\frac{d\langle B\rangle_t}{dt}q$$

et la $G-$équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) associée aux processus adjoints $p(t)$, $q(t)$, $K(t)$ par

$$\begin{aligned} dp(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t)dt + q(t)dB(t) + dK(t); 0 \leq t \leq T \\ p(T) &= g'(X(T)) \end{aligned} \tag{35}$$

Rappelons que la solution de cette $G-$EDSR existe vu les hypothèses sur f et g et par la définition des contrôles admissibles.

Théorème 3.1 (Biagini et al [8]) **:** *Soit $\hat{u} \in U$ avec la solution correspondante $\widehat{X}(t)$, $\widehat{p}(t)$, $\widehat{q}(t)$, $\widehat{K}(t)$ relative à l'équation* (32). *On suppose que $\widehat{K} \equiv 0$ dans l'équation*(35)*, les fonctions $(x, u) \to H(t, x, u, \widehat{p}(t), \widehat{q}(t))$ et $x \to g(x)$ sont concaves pour tout t, presque sûrement et*

$$\widehat{E}\left[\pm\frac{\partial}{\partial u}H(t, \widehat{X}(t), u, \widehat{p}(t), \widehat{q}(t))\,\big|_{u=\hat{u}(t)}\big|\,\mathcal{F}_{(t-\delta)^+}\right] = 0 \quad q.s.$$

pour tout t. Alors $u = \hat{u}$ est un contrôle optimal pour le problème (34).

3.3.2 Principe du maximum pour le cas d'information complète

Les conditions de concavité ne sont pas satisfaites dans la majorité des applications, le principe du maximum ne nécessite pas cette condition. De plus la notion du fait que $\widehat{K}$ soit une $G-$martingale disparait de l'équation adjointe. Biagini et al [6] ont prouvé un résultat qui ne dépend pas de la concavité de l'hamiltonien. On donne dans ce chapitre leurs principaux résultats sans démonstrations. On suppose dans ce qui suit, que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

A1. Pour tout $u, \beta \in U$, β bornée, il existe $\delta > 0$ tels que $u+\alpha\beta \in U$, pour tout $\alpha \in (-\delta, \delta)$.

A2. Pour tout t, h avec $0 \leq t \leq t + h \leq T$ et pour toute variable aléatoire $\alpha \in L^1_G(\Omega_t)$, le contrôle $\beta(s) := \alpha\mathbf{1}_{[t,t+h]}(s)$ appartient à U.

A3. Pour tout $u, \beta \in U$ tels que soit β borné, le processus dérivé $Y(t)$ défini par

$$\begin{cases} Y(t) := \dfrac{d}{d\alpha}X^{u+\alpha\beta}(t) \\ Y(0) = 0 \end{cases},$$

existe, où Y est solution de la $G-$EDS suivante :

$$
\begin{aligned}
dY(t) = &\left\{\frac{\partial b}{\partial x}(t)Y(t) + \frac{\partial b}{\partial u}(t)\beta(t)\right\} dt + \left\{\frac{\partial \mu}{\partial x}(t)Y(t) + \frac{\partial \mu}{\partial u}(t)\beta(t)\right\} d\langle B\rangle_t \\
&+ \left\{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t)Y(t) + \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t)\beta(t)\right\} dB(t).
\end{aligned}
$$

Lemme 3.2 (Voir Biagini et al [6]) **:** *Soit $\hat{u}$ un contrôle optimal associé à la fonctionnelle $J^{\mathbb{P}}$ pour une mesure de probabilité $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ et soit l'équation adjointe définie par l'EDSR sous $\mathbb{P}$:*

$$
\begin{aligned}
dp^{\mathbb{P}}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, X(t), p^{\mathbb{P}}(t), q^{\mathbb{P}}(t))dt + q^{\mathbb{P}}(t)dB(t); 0 \leq t \leq T \\
p^{\mathbb{P}}(T) &= g'(X(T)) \ \mathbb{P}-a.s
\end{aligned}
$$

Alors on a :$\dfrac{\partial \widehat{H}^{\mathbb{P}}}{\partial u}(t)_{|u=\hat{u}(t)} = 0$, où l'on posé

$$\widehat{H}^{\mathbb{P}}(t) := H(t, \widehat{X}, u, \widehat{p}^{\mathbb{P}}(t), \widehat{q}^{\mathbb{P}}(t))$$

Théorème 3.3 (Biagini et al [6]) **:** *Soit $\hat{u}$ un contrôle optimal associé à la fonctionnelle $J^{\mathbb{P}}$pour toute* mesure de probabilité $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$. *Alors l'équation adjointe est donnée par la $G-$EDSR suivante :*

$$
\begin{aligned}
d\widehat{p}^G(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, X(t), \widehat{p}^G(t), \widehat{q}^G(t))dt + \widehat{q}^G(t)dB(t) + d\widehat{K}(t); 0 \leq t \leq T \quad (36) \\
\widehat{p}^G(T) &= g'(X(T)) \ \ q.s.
\end{aligned}
$$

Théorème 3.4 *(Biagini et al* [6]*).On suppose que :*

1) $b \equiv 0$, $\mu(t, x, u) = xum(t)$ *et* $\sigma(t, x, u) = xus(t)$, *où les processus m et s sont bornées* pour $t \in [0, T]$, *quasi-continus. De plus la capacité de l'ensemble* $\{s(\ t) = 0\}$ *est nulle* pour tout $t \in [0, T]$,

2) $f \equiv 0$.

Soit $\hat{u}$ un contrôle optimal pour la fonctionnelle $J^{\mathbb{P}}$ pour toute mesure de probabilité $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$. Alors on a :

$$\frac{\partial \widehat{H}^G}{\partial u}(t) := \frac{\partial}{\partial u} H(t, \widehat{X}(t), u, \widehat{p}^G(t), \widehat{q}^G(t)) = 0 \ \ q.s. \qquad (37)$$

Chapitre 04
G-contrôle stochastique optimal relaxé

4 $G-$contrôle stochastique optimal relaxé

Le but de ce chapitre, qui est l'essentiel de cette thèse, est d'étudier le contrôle optimal des systèmes soumis à l'incertitude ou à l'ambiguïté du modèle en raison d'informations incomplètes ou inexactes, ou de concepts vagues. Le climat ou les conditions météorologiques et les marchés financiers sont des domaines typiques où l'information est soumise à l'incertitude. Par exemple dans les problèmes de choix de portefeuille optimal en finance où les processus de volatilité et de prime de risque sont inconnus et difficiles à estimer à partir de données fiables, nous devons considérer une famille de différents scénarios. Pour ce faire, on doit effectuer une optimisation de portefeuille robuste qui survit à tous les scénarios donnés. Les aspects d'ambiguïté telle que la volatilité incertaine ont été étudiés par Peng [33, 34, 35] , qui a introduit un espace d'espérance sous linéaire à l'aide du $G-$mouvement brownien. Par la suite, Denis et Martini [9] ont proposé une structure basée sur l'analyse quasi sûre à partir de la théorie de potentiel pour construire une structure similaire en utilisant une famille étroite de mesures de probabilités mutuellement singulières. Ces deux approches sont différentes, Denis et al [10] donnent une représentation duale pour l'espérance sous linéaire avec le $G-$mouvement brownien comme le suprémum des espérances ordinaires sur $\mathcal{P}$.

Dans ce chapitre, on considère une équation différentielle stochastique contrôlée et on montre l'existence d'un contrôle $\widehat{u} \in \mathcal{U}$ à valeurs dans un ensemble d'actions U tel que :

$$J(\widehat{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(u).$$

Ce problème a été étudié par M. Hu et al [21], Biagini et al [6] et A. Matoussi et al [29], où les auteurs ont proposé les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, en d'autres termes le principe de Pontryagin et la programmation dynamique respectivement.

En l'absence d'hypothèses de convexité, le problème de contrôle optimal peut ne pas avoir une solution parce que $\mathcal{U}$ est trop petit pour contenir un minimisant. On cherche à trouver un espace $\mathcal{R}$ qui contient $\mathcal{U}$ l'ensemble des contrôles stricts. Pour obtenir ce résultat principal on construit, comme dans le cas classique, l'ensemble $\mathcal{R}$ des contrôles relaxés comme étant un sous ensemble de l'espace des mesures de probabilités sur l'espace d'actions U et on montre que

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u) = \inf_{\mu \in \mathcal{R}} J(\mu) = J(\widehat{\mu}),$$

où

$$\widehat{\mu} = arg \min_{\mu \in \mathcal{R}} J(\mu).$$

Pour cela, on montrera l'existence d'un contrôle optimal relaxé pour une $G-$EDS.

4.1 $G-$espérance et $G-$mouvement brownien canonique

Soient $\Omega := \{\omega \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) : \omega(0) = 0\}$, équipé de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts, $\mathcal{B}(\Omega)$ la $\sigma-$algèbre de Borel associée, $\Omega_t := \{w_{.\wedge t} : w \in \Omega\}$ et B le processus canonique. Rappelons que B est un $G-$mouvement brownien. Soit $\mathbb{F} := \mathbb{F}^B = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par B, qui est seulement continue à gauche et soit la filtration limite à droite $\mathbb{F}^+ := \{\mathcal{F}_t^+, t \geq 0\}$, définie par $\mathcal{F}_t^+ := \mathcal{F}_{t+} := \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$.

Pour toute mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, on note par $\mathcal{F}_t^{\mathbb{P}} := \mathcal{F}_t^+ \vee \mathcal{N}^{\mathbb{P}}(\mathcal{F}_t^+)$ (resp. $\widehat{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}} := \mathcal{F}_t^+ \vee \mathcal{N}^{\mathbb{P}}(\mathcal{F}_\infty)$) la filtration continue à droite $\mathbb{P}-$complétée de $\mathcal{F}_t^+$(resp. $\mathcal{F}_\infty$), où $\mathcal{N}^{\mathbb{P}}(\mathcal{F}_t^+)$ (resp. $\mathcal{N}^{\mathbb{P}}(\mathcal{F}_\infty)$) est l'ensemble des événements $\mathbb{P}$-négligeables de la σ-algèbre $\mathcal{F}_t^+$ (resp. $\mathcal{F}_\infty$). Les filtrations respectives seront notées $\mathbb{F}^{\mathbb{P}}$ et $\widehat{\mathbb{F}}^{\mathbb{P}}$.

Lemme 4.1 (Soner et al[42]) : *Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité arbitraire sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$. Alors on a :*

1)*Pour toute variable aléatoire $\widehat{\xi}$, $\widehat{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}}-$mesurable, il existe une $\mathbb{P}$ p.s. unique variable aléatoire ξ, $\mathcal{F}_t-$mesurable telle que $\xi = \widehat{\xi}$, $\mathbb{P}$ p.s..*

2)*Pour tout processus $\widehat{X}$, $\widehat{\mathbb{F}}^{\mathbb{P}}-$progressivement mesurable, il existe un processus unique X, $\mathbb{F}-$progressivement mesurable tel que $X = \widehat{X}$, $dt \times \mathbb{P}$ p.p..De plus, si $\widehat{X}$ est $\mathbb{P}$ p.s.continu, alors X peut être choisi $\mathbb{P}$ p.s. continu.*

Rappelons que la $G-$espérance, qui a été largement discutée dans le premier chapitre, a été définie par Peng [33, 34, 35] à partir de l'équation de la chaleur non linéaire. Peng [33, 34] construit, à partir d'une $G-$espérance E, une $G-$espérance $\widehat{E}$ définie sur $\mathcal{H} := Lip(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}^d$, consistante de la manière suivante :

Soit $Lip(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires de la forme

$$\xi = \varphi(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$$

pour une fonction continue bornée lipschitzienne φ sur $\left(\mathbb{R}^d\right)^n$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq T$. Le processus des cordonnées $(B_t,\ t \geq 0)$ est un $G-$mouvement brownien et la variable aléatoire B_1 est $G-$normalement distribuée sous $\widehat{E}$ et pour tout $s, t \geq 0$ et $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, t]$ on a :

$$\widehat{E}[\varphi(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}, B_{t+s} - B_t)] = E[\psi(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})],$$

où $\psi(x_1,\ldots,x_n) = E[\varphi(x_1,\ldots,x_n,\sqrt{s}B_1)]$. Cette propriété entraine en particulier que les accroissements du $G-$mouvement brownien sont indépendants et que $B_{t+s}-B_t$ et B_s sont identiquement $N(0,s\Sigma)-$distribués.

Pour tout $p \in [0,+\infty)$, on note par $L_G^p(\Omega)$ la fermeture de $Lip(\Omega)$ sous la norme

$$\|X\|_{L_G^p(\Omega)} := \left(\widehat{E}[|X|^p]\right)^{\frac{1}{P}}.$$

$L_G^p(\Omega)$ ainsi défini est un espace de Banach. Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$Lip(\Omega_t) := Lip(\Omega) \cap L^0(\Omega_t), \quad L_G^p(\Omega_t) := L_G^p(\Omega) \cap L^0(\Omega_t),$$

où $L^0(\Omega_t)$ est l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}_t-$mesurables.

4.2 $G-$intégrales stochastiques

Pour tout $p \in [0,+\infty)$, on note $M_G^{0,p}(0,T)$ l'espace des processus élémentaires $\mathbb{F}-$progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de la forme

$$\eta(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \, \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t),$$

avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T,\ n \geq 1$ est une subdivision de $\mathbb{R}_+$ et $\eta_i \in Lip(\Omega_{t_i})$. Soit $M_G^p(0,T)$ la fermeture de $M_G^{0,p}(0,T)$ sous la norme

$$\|\eta\|^p_{M_G^p(0,T)} := \hat{\mathbb{E}}[\int_0^T |\eta(t)|^p ds].$$

Pour tout $\eta \in M_G^{0,2}(0,T)$, l'intégrale $G-$stochastique est définie ponctuellement par

$$I_t(\eta) = \int_0^t \eta_s d_G B_s := \sum_{j=0}^{N-1} \eta_j (B_{t\wedge t_{j+1}} - B_{t\wedge t_j}),$$

avec $I(\eta) := I_T(\eta)$, la fonction $I:\ M_G^{0,2}(0,T) \to L_G^2(\Omega_T)$ est continue et peut être prolongée par continuité à $M_G^2(0,T)$.

Le processus de variation quadratique du $G-$mouvement brownien peut être formulé dans $L_G^2(\Omega_t)$ comme étant un processus matrice symétrique $d \times d$, continu défini par

$$\langle B \rangle_t^G := B_t \otimes B_t - 2\int_0^t B_s \otimes d_G B_s \tag{38}$$

Notons que la diagonale est constituée de processus non décroissants. Ici $a \otimes b$ désigne la matrice symétrique $d \times d$, pour $a, b \in \mathbb{R}^d$, définie par $(a \otimes b)x = \langle a, x\rangle\, b$ pour $x \in \mathbb{R}^d$.

On définit l'application $\mathcal{J} : M_G^{0,1}(0,T) \longrightarrow \mathbb{L}_G^1(\Omega_T)$:

$$\mathcal{J} = \int_0^T \eta_t d\langle B\rangle_t^G := \sum_{j=0}^{N-1} \eta_j(\langle B\rangle_{t_{j+1}}^G - \langle B\rangle_{t_j}^G).$$

On notera par$\mathcal{Q}$ l'unique prolongement de $\mathcal{J}$ à $M_G^1(0,T)$:

$$\mathcal{Q}\,(\eta) := \int_0^T \eta_t d\langle B\rangle_t^G, \quad \eta \in M_G^1(0,T).$$

On a l'isométrie suivante (formulée pour le cas $d = 1$ pour simplifier) :

Lemme 4.2 (voir [34]) : *On suppose $d = 1$ et on considère $\eta \in M_G^2(0,T)$. Alors on a*

$$\widehat{E}\left[\left(\int_0^T \eta(s) d_G B_s\right)^2\right] = \widehat{E}\left[\int_0^T \eta^2(s) d\langle B\rangle_s^G\right].$$

4.3 La représentation duale de la G-espérance

Denis et Martini [9] et Denis et al. [10] montrent la représentation duale suivante de la $G-$espérance en termes d'une famille étroite, faiblement compacte $\mathcal{P}$ de mesures de probabilité mutuellement singulières sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Cette dualité exprime la $G-$espérance par une espérance robuste par rapport à $\mathcal{P}$. On se base sur les travaux cités dans [9] et [10] pour la construction explicite de $\mathcal{P}$. Soner et al. [41, 42] introduisent une analyse pour une telle construction et ses conséquences sur la $G-$analyse stochastique et en particulier le problème d'agrégation des processus.

Proposition 4.3 (*voir.*[9, 10]) *Il existe une famille des mesures de probabilité faiblement compacte $\mathcal{P}$ sur $(\Omega, B(\Omega))$ telle que pour tout $\xi \in L_G^1(\Omega)$, on a* $\widehat{E}[\xi] = \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} E^{\mathbb{P}}[\xi]$.

On considère la *capacité de Choquet régulière définie dans le premier chapitre*

$$c(A) := \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{P}(A), \ \ A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

On note par $\mathcal{N}_{\mathcal{P}} := \bigcap_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} \mathcal{N}^{\mathbb{P}}(\mathcal{F}_\infty)$ les $\mathcal{P}$-ensembles polaires.

Définition 4.4 *Une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, B(\Omega))$ est dite absolument continue par rapport à $\mathcal{P}$ si $\mathbb{Q}(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}$.*

On considère la célèbre filtration universelle $\mathbb{F}^{\mathcal{P}}$ définie à l'aide des mesures de probabilité mutuellement singulières $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ (voir. Soner et al [42]) :

$$\mathbb{F}^{\mathcal{P}} := \{\widehat{\mathcal{F}}_t^{\mathcal{P}}\}_{t\geq 0} \ \text{ avec } \ \widehat{\mathcal{F}}_t^{\mathcal{P}} := \bigcap_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} (\mathcal{F}_t^{\mathbb{P}} \vee \mathcal{N}_{\mathcal{P}}) \ \text{ pour } \ t \geq 0 \qquad (39)$$

La formulation duale de la $G-$espérance propose l'aspect d'agrégation suivant :

Lemme 4.5 [Proposition, *Soner et al* [41]]
Soit $\eta \in M_G^2(0,T)$. Alors, η est Itô-intégrable pour tout $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$. De plus, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\int_0^t \eta(s) d_G B_s = \int_0^t \eta(s) dB_s \ \ \mathbb{P} \ p.s. \ pour \ tout \ \mathbb{P} \in \mathcal{P},$$

où l'intégrale du second membre de cette égalité est définie au sens d'Itô usuel. Par conséquence, le processus de variation quadratique $\langle B \rangle^G$ défini par (38) *coïncide avec le processus de variation quadratique usuel q.s..*

Dans la suite, on omettra le symbole G de la $G-$intégrale stochastique et de la $G-$variation quadratique.

Parmi les résultats de stabilité étudiés, voici un lemme qui joue un rôle important dans notre analyse.

Lemme 4.6 *Si $\{\mathbb{P}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ converge faiblement vers $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$. Alors pour tout $\xi \in L_G^1(\Omega_T)$, $E^{\mathbb{P}_n}[\xi]$ converge vers $E^{\mathbb{P}}[\xi]$.*

A partir des propriétés du processus de variation quadratique $\langle B \rangle$ et de la formulation duale de la $G-$espérance, on a les estimations de type Burkholder-Davis-Gundy, formulées en une dimension pour la simplification de la manière suivante :

Lemme 4.7 (voir [17]) *On suppose que $d = 1$. Alors pour tout $p \geq 2$ et pour tout $\eta \in M_G^p(0,T)$, il existe une constante C_p* qui dépend uniquement de p et T tel que

$$\begin{aligned}\widehat{E}\left[\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u \eta_r dB_r \right|^p \right] &\leq C_p \widehat{E}\left[\left(\int_s^t |\eta_r|^2 dr\right)^{p/2}\right] \\ &\leq C_p |t-s|^{\frac{p}{2}-1} \int_s^t \widehat{E}[|\eta_r|^p|] dr.\end{aligned}$$

Si $\bar{\sigma}$ est une constante positive telle que $\frac{d\langle B \rangle_t}{dt} \leq \bar{\sigma}$ q.s., alors on a pour tout $p \geq 1$ et pour tout $\eta \in M_G^p(0,T)$,

$$\widehat{E}\left[\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u \eta_r d\langle B \rangle_r \right|^p \right] \leq \bar{\sigma}^p |t-s|^{p-1} \int_s^t \hat{\mathbb{E}}[|\eta_r|^p] dr.$$

4.4 L'espace des $G-$contrôles relaxés

Soit (U,d) un espace métrique séparable et $\mathcal{P}(U)$ l'espace de mesures de probabilité sur U muni de sa σ-algèbre de Borel $\mathcal{B}(U)$. La classe

$M([0,T]\times U)$ des $G-$contrôles relaxés considérée dans ce travail est un sous ensemble de $\mathbb{M}([0,T]\times U)$, l'ensemble des mesures de Radon $\nu(dt,da)$ sur $[0,T]\times U$ ayant pour projection sur $[0,T]$ la mesure de Lebesgue dt et pour projection sur U une mesure de probabilité $\mu_t(da)\in\mathcal{P}(U)$ (i.e. $\nu(da,dt):=\mu_t(da)dt$). On muni cet espace de la topologie de la convergence stable des mesures. La topologie de la convergence stable des mesures est la topologie la plus fine qui rend l'application

$$q\mapsto\int_0^T\int_U\varphi(t,a)q(dt,da)$$

continue, pour toute fonction mesurable bornée $\varphi(t,a)$ continue en a, pour tout t fixé.

Muni de cette topologie, $M:=M([0,T]\times U)$ est un espace métrisable séparable. De plus, M est compact si U l'est. On notera que la topologie de la convergence stable des mesures entraine la topologie de la convergence faible (Voir N. El karoui[12, 13] pour plus de details).

On introduit la classe des $G-$contrôles stochastiques relaxés sur l'espace $(\Omega_T, Lip(\Omega_T),\widehat{E})$.

Définition 4.8 *Un $G-$contrôle stochastique relaxé sur $(\Omega_T, Lip(\Omega_T),\widehat{E})$ est une mesure aléatoire $q(\omega,dt,da)=\mu_t(\omega,da)dt$ telle que pour tout $A\in B(U)$, le processus $(\mu_t(A))_{t\in[0,T]}$ est $\mathbb{F}^{\mathcal{P}}-$progressivement mesurable.*

On notera que dans ce cas, l'application $[0,t]\times\Omega\to[0,1]$ définie par $(s,\omega)\mapsto\mu_s(\omega,A)$ est $\mathcal{B}([0,t])\otimes\widehat{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}}-$mesurable pour tout $t\in[0,T]$. En particulier, le processus $(\mu_t(A))_{t\in[0,T]}$ est adapté à la filtration universelle $\mathbb{F}^{\mathcal{P}}$ donnée par (39).

Dans toute la suite, on désigne également par $\mathcal{R}$ la classe des $G-$contrôles stochastiques relaxés. Comme dans le cas classique, l'ensemble $\mathcal{U}([0,T])$ des $G-$contrôles stricts constitué des processus u, $\mathbb{F}^{\mathcal{P}}-$adaptés à valeurs dans l'ensemble U, s'injecte naturellement dans $\mathcal{R}$ via l'application $\Phi:\mathcal{U}([0,T])\longrightarrow\mathcal{R}$ définie comme suit :

$$\Phi(u)(dt,da)=\delta_{u(t)}(da)dt.\in\mathcal{R} \tag{40}$$

Le lemme suivant est une extension du célèbre Chattering Lemme. En fait, ce lemme annonce que chaque $G-$contrôle relaxé peut être approché par une suite de $G-$contrôles stricts.

Lemme 4.9[G−Chattering Lemme] *Soient (U,d) un espace métrique compact séparable et $(\mu_t)_{t\geq0}$ un processus $\mathbb{F}^{\mathcal{P}}-$progressivement mesurable à valeurs dans $\mathcal{P}(U)$. Alors il existe une suite $(u_n(t))_{n\geq0}$ de processus $\mathbb{F}^{\mathcal{P}}-$progressivement mesurables à valeurs dans U telle que la* *suite des mesures aléatoires $\delta_{u_n(t)}(da)dt$ converge au sens de la convergence stable (donc faiblement) vers $\mu_t(da)dt$ quasi-surement.*

Preuve : On se donne $(\mu_t)_{t\geq 0}$ un $G-$contrôle relaxé $\mathbb{F}^{\mathcal{P}}-$progressivement mesurable. La construction trajectorielle détaillée de la suite approximée $(\delta_{u_n(t)}(da)dt)_{n\geq 0}$ de $\mu_t(da)dt$ dans N. El karoui[12] s'étend de sorte que les $G-$contrôles stricts soient $\mathbb{F}^{\mathcal{P}}-$progressivement mesurables. Le développement de la démonstration est le suivant :

On considère l'espace $(\Omega, H, (\widehat{\mathcal{F}}_t^{\mathbb{P}} \vee N_{\mathcal{P}})_{t\geq 0}, \widehat{E})$, pour chaque probabilité $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ et on démontre le lemme pour $\mathbb{P}$ quelconque.

Dans le cas où $\widehat{\mathcal{F}}_t^{\mathcal{P}} = \cap_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}}(\widehat{\mathcal{F}}_t{}^{\mathbb{P}} \vee N_{\mathcal{P}})_{t\geq 0}$,l'ensemble où le lemme n'est pas réalisé est négligeable par rapport à toute probabilité $\mathbb{P}$ donc il est polaire. Il résulte alors que le lemme est vérifié quasi sûrement.

Soit V_T l'ensemble des mesures sur $[0,T]\times U$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue. Alors V_T est métrisable compact. La densité des mesures de Dirac au points (u_t^n) (contrôles stricts) est utilisée dans la démonstration selon la construction suivante :

$$\delta_{u_t^n}(da) \to (\mu_t)(da) \iff dt.\delta_{u_t^n}(da) \to dt.\mu_t(da),$$

Comme l'espace U des valeurs du contrôle est supposé compact métrique, alors on peut choisir une partition $(B_k^{(n)}), k=1,2,...k(n)$ de U constitués de boréliens dont le diamètre inférieur à $\frac{1}{n}$,la partition est dans l'espace U. Soit $a_k^{(n)}$ un point arbitraire de $B_k^{(n)}$. On divise l'intervalle $[0,n]$ en sous intervalles de longueur 2^{-n} avec des bornes $(T_j^{(n)}, T_{j+1}^{(n)})$, on écrit (T_j, T_{j+1}). Soit $\delta > 0$ et soit le processus à valeurs dans V_T :

$$\mu_k(t) := \mu_k^{\delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t} \mu(s, B_k)ds \quad \text{si} \quad t > \delta \\ \frac{1}{\delta}\int\limits_{0}^{t} \mu(s, B_k)ds \quad \text{si} \quad t \leq \delta \end{cases},$$

Le processus $\gamma_{j,k}(t,\, \mu) = \mu_k(t_j)\mathbf{1}_{t_j\leq t\leq, t_{j+1}}$ est $\widehat{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}-$adapté et satisfait la relation :

$$\forall j : \sum_k \gamma_{j,k}(t,\mu) = 1 \text{ si } t \in [t_j, t_{j+1}] \text{ et } t_j \geq \delta.$$

On divise l'intervalle $T_j = [t_j, t_{j+1}[$ en $k(n)$ intervalles $T_{j,k}(\mu)$ de longueur $(t_{j+1}-t_j)$ avec t un point quelconque dans T_j. Pour tout n, il existe un indice j_n tel que :

$$\delta \leq t_{j_n} \leq \delta + 2^{-n}$$

Soit $\beta(n,\delta)$ un point arbitraire dans A. On pose :

$$\alpha(t)=\begin{cases} a_k \quad \text{si} \;\; t\in \cup_{j\geq j_n}T_{j,k}(\mu), k=1,2,..,k(n) \\ \qquad\qquad \beta(n,\delta) \text{ si } t\notin \,]\varepsilon,n[\end{cases}$$

et $\delta_u^{(n,\delta)}(\mu)=\mathbf{1}_{]\varepsilon,n[}(t)dt\delta_{\alpha(t)}+\mathbf{1}_{[0,\varepsilon]}(t)dt\delta_{\beta(n,\delta)}$, où δ est la mesure de Dirac associée au contrôle. Notons que δ est $\widehat{\mathcal{F}}^{\mathbb{P}}-$adapté. On montre maintenant que $\delta^{(n,\delta)}(\mu)$ converge vers μ. On se base sur la convergence des fonctions f,g avec f continue à support dans $[0,T]$ et g est continue sur U, leurs modules de continuité sont notés par w_f et w_g.

Pour une fonction $f(t,a)$ continue à support compact sur $[0,T]\times U$, on utilise la notation $f(t)g(a)$ au lieu de $f(t,a)$. Dans le Chattering lemme classique on a la convergence $\delta_{u_t^n}(da)dt\rightarrow\mu_t(da)dt$

Si T est majoré par n, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,T]\times U} f(t)g(a)dt\mu(t,da)-\int_{[0,T]\times U} f(t)g(a)dt\delta^{(n,\delta)}(\mu)(da)\\
&=\int_{[0,T]\times U} f(t)g(a)dt\mu(t,da)-(\int_{[0,\varepsilon]} f(t)g(\beta(n,\delta))dt+\int_{]\varepsilon,T]} f(t)g(\alpha(t))dt)\\
&=\int_{[0,T]\times U} f(t)g(a)dt\mu(t,da)-\int_{[0,\varepsilon]} f(t)g(\beta(n,\delta))dt-\int_{]\varepsilon,T]} f(t)g(\alpha(t))dt \qquad (A1)
\end{aligned}$$

Le module de cette quantité est majoré par :

$$\begin{aligned}
&2\varepsilon\left\|f\right\|_\infty\left\|g\right\|_\infty+\int_{[0,T]} f(t)(\sum_k\int_{B_k} g(a)\mu(t,da)-g(a_k)\mu(t,B_k))dt\\
&+\left|\sum_k g(a_k)\left(\int_{]\varepsilon,T]} f(t)\mu(t,B_k)dt-\int_{\cup_j T_{j,k}} f(t)dt\right)\right| \qquad (A2)
\end{aligned}$$

Le deuxième terme de l'expression précédente est borné par $\frac{1}{n}w_g\left\|f\right\|_1$ et le troisième terme est égale à :

$$\begin{aligned}
&\sum_k g(a_k)(\int_{]\varepsilon,T]} f(t)\left\{\mu(t,B_k)-\mu_k(t)\right\}dt+\sum_j\int_{T_j} f(t)\mu_k(t)dt-\int_{T_{j,k}} f(t)dt)\\
&=\sum_k g(a_k)(\int_{]\varepsilon,T]} f(t)\left\{\mu(t,B_k)-\mu_k(t)\right\}dt+\sum_k g(a_k)\sum_j f(t_j)\int_{T_j}\left\{\mu_k(t)-\gamma_{j,k}(t)\right\}dt\\
&-\sum_k g(a_k)\sum_j\int_{T_{j,k}}\left\{f(t)-f(t_j)\right\}dt+\sum_k g(a_k)\sum_j\int_{T_j}\left\{f(t)-f(t_j)\right\}\mu_k(t)dt \qquad (A3)
\end{aligned}$$

$$= -\sum_k g(a_k) \sum_j \int_{T_{j,k}} \{f(t) - f(t_j)\} dt + \sum_k g(a_k) \sum_j \int_{T_j} \{f(t) - f(t_j)\} \mu_k(t) dt$$

La valeur absolue des deux derniers termes est majorée par $2 \|g\|_\infty T w_f(\frac{1}{2^n})$.
En fait, le premier terme de (A_3) vaut :

$$\int_\varepsilon^T f(t) \left(\mu(t, B_k) - \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t \mu(s, B_s) ds \right) dt = \int_\varepsilon^T \left(f(t)\mu(t, B_k) - \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t f(s)\mu(s, B_k) ds \right) dt$$
$$+ \int_\varepsilon^T \frac{1}{\delta} dt \int_{t-\delta}^t \mu(s, B_k)(f(s) - f(t)) ds \quad (A4)$$

On note par C_1^K le premier terme de (A_4) et C_2^K le deuxième terme de (A_4). D'après le théorème de Fubini, on a

$$\left|C_2^K\right| \le \delta w_f \int_0^T \mu(s, B_k) ds \text{ et } \left|\sum_k g(a_k).C_2^K\right| \le T\delta \|g\|_\infty w_f$$

On peut écrire C_1^K de la manière suivante :

$$\int_{T-\delta}^T f(s)\mu(s, B_k)(1 - \frac{T-s}{\delta}) ds + \int_{\varepsilon-\delta}^\varepsilon f(s)\mu(s, B_k) \frac{s + \delta - \varepsilon}{\delta} ds$$

on a aussi $\sum_k g(a_k) C_1^K \le 2\delta \|g\|_\infty \|f\|_\infty$.
Ainsi, le premier terme de (A_3) est majorée par :

$$\delta \|g\|_\infty (2 \|f\|_\infty + T w_f)$$

Le deuxième terme de (A_3) vaut.

$$\begin{aligned}
\sum_k g(a_k) \sum_j f(t_j) \int_{T_j} (\mu_k(t) - \gamma_{j,k}(t)) dt &= \sum_k g(a_k) \sum_j f(t_j) \int_{T_j} (\mu_k(t) - \mu_k(t_j)) dt \\
&= \sum_k g(a_k) \sum_j f(t_j) \frac{1}{\delta} \int_{T_j} dt \int_{t_j}^t (\mu(s, B_k) - \mu(s - \delta, B_k)) ds \\
&= C_3
\end{aligned}$$

Par une intégration par parties on obtient :

$$C_3 = \sum_k g(a_k) \sum_j f(t_j) \int\limits_{T_j} \frac{1}{\delta}(t_{j+1} - t)(\mu(t, B_k) - \mu(t - \delta, B_k))dt$$
$$= \sum_j f(t_j)) \int\limits_{T_j} \frac{1}{\delta}(t_{j+1} - t)(\sum_k g(a_k))(\mu(t, B_k) - \mu(t - \delta, B_k))dt$$

Il résulte que

$$|C_3| < \ n2^{-2^n+n} \|g\|_\infty \|f\|_\infty /\delta \qquad (A_5)$$

En sommant les différents résultats : $(A_1) - (A_5)$, on obtient :

$$\left|\mu(fg) - \delta^{(n,\delta)}(\mu)(fg)\right| \leq \|g\|_\infty \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} Tw_f + 2\left(\varepsilon + \delta + \frac{n2^{-n}}{\delta}\right) \|f\|_\infty + Tw_f(\delta) \right\}$$
$$+ \frac{1}{n} \|f\|_1 wg$$

En prenant $\delta = \frac{1}{n}, \delta_n = \delta^{n,\frac{1}{n}}$, on a la convergence vers 0, pour tout $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, d'où $dt\delta_{u_n}(t)(da)$ converge vers $dt\mu_t(da)$ presque sûrement par rapport à $\mathbb{P}$. On conclut que $dt\delta_{u_n}(t)(da)$ converge vers $dt\mu_t(da)$ quasi quasi-sûrement d'où le résultat espéré.■

4.5 Le $G-$contrôle stochastique optimal relaxé

L'objectif de ce paragraphe est d'établir l'existence d'un infimum de la fonctionnelle de performance relaxée suivante :

$$J(\mu) = \widehat{E}\left[\int_0^T \int_U f(t, x^\mu(t), a)\mu_t(da)\, dt + h(x^\mu(T))\right] \qquad (41)$$

sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des $G-$contrôles relaxés pour la $G-$EDS relaxée suivante :

$$dx^\mu(t) = \sigma(t, x^\mu(t))dB_t + \int_U b(t, x^\mu(t), a)\mu_t(da)dt + \int_U \gamma(t, x^\mu(t), a)\mu_t(da)d\langle B\rangle_t \qquad (42)$$

avec la condition initiale $x^\mu(0) = x$, où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d,$$
$$\sigma, \gamma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^{d\times d}$$
$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}$$

et

$$h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

sont des fonctions déterministes.

On notera que lorsque $\mu = \delta_u$, $u \in \mathcal{U}([0,T])$, le processus $x^{\delta_u} := x^u$ résout la $G-$EDS suivante :

$$\begin{cases} dx^u(t) = \sigma(t, x^u(t))dB_t + b(t, x^u(t), u(t))dt + \gamma(t, x^u(t), u(t))d\langle B\rangle_t, \\ x^u(0) = x \end{cases} \tag{43}$$

De plus, selon l'injection décrite précédemment, on peut écrire $J(u) = J(\delta_u)$. Pour cela, on fait les hypothèses suivantes :

(H1) Les fonctions b, γ et σ sont continues, bornées et Lipschitziennes continues uniformément en (t, u).

(H2) Les fonctions f et h sont continues et bornées.

Il résulte que sous l'hypothèse $(H1)$, la $G-$EDS admet une unique solution $x^\mu \in M_G^2(0,T)$, pour tout $\mu \in \mathcal{R}$, qui satisfait

$$\widehat{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |x^\mu(t)|^2] < \infty \tag{44}$$

De plus,

$$\chi^\mu := \int_0^T \int_U f(t, x^\mu(t), a)\mu_t(da)\, dt + h(x^\mu(T)) \in \mathbb{L}_G^1(\Omega_T) \tag{45}$$

Remarque : *Les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$ sont fortes et peuvent être affaiblies. On les suppose pour une présentation simple du résultat principal.*

On est maintenant en mesure d'énoncer et de montrer le théorème suivant, qui constitue le résultat essentiel de notre travail :

Théorème 4.10 *On a*

$$\inf_{u\in\mathcal{U}[0,T]} J(u) = \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu) \tag{46}$$

qui se réalisent en $\widehat{\mu} \in \mathcal{R}$.

Rappelons que

$$J(\mu) = \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} J^{\mathbb{P}}(\mu) \tag{47}$$

et que la fonctionnelle de performance relaxée associée à $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ est donnée par

$$J^{\mathbb{P}}(\mu) = E^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \int_U f(t, x^\mu(t), a)\mu_t(da)\, dt + h(x^\mu(T))\right] \tag{48}$$

Preuve : Pour montrer ce théorème, on utilise le $G-$Chattering Lemme et les résultats de stabilité pour la $G-$EDS (42). Selon le $G-$Chattering

Lemme, pour tout $G-$contrôle relaxé $\mu \in \mathcal{R}$, il existe une suite $(u^n) \in \mathcal{U}([0,T])$ de $G-$contrôles stricts telle que $\delta_{u^n(t)}(da)dt$ converge faiblement vers $\mu_t(da)dt$ quasi-surement.

On note par x^n la solution de la $G-$EDS associée avec u^n (ou $\delta_{u^n(t)}(da)$) définie par

$$dx^n(t) = \sigma(t, x^n(t))dB_t + b(t, x^n(t), u^n(t))dt + \gamma(t, x^n(t), u^n(t))d\langle B\rangle_t,$$
$$x^n(0) = x \qquad (49)$$

On a les résultats suivants de stabilité pour la $G-$EDS (42) et la performance $J^{\mathbb{P}}$, pour tout $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$.

Lemme 4.11 *Pour tout* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, *on a*
1)

$$\lim_{n\to\infty} E^{\mathbb{P}}\left[\sup_{0\le t\le T} |x^n(t) - x^\mu(t)|^2\right] = 0, \qquad (50)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} J^{\mathbb{P}}(u^n) = J^{\mathbb{P}}(\mu) \qquad (51)$$

2)*De plus,*

$$\inf_{u\in\mathcal{U}[0,T]} J^{\mathbb{P}}(u) = \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J^{\mathbb{P}}(\mu), \qquad (52)$$

et il existe un $G-$contrôle relaxé $\hat{\mu}_{\mathbb{P}} \in \mathcal{R}$ tel que

$$J^{\mathbb{P}}(\hat{\mu}_{\mathbb{P}}) = \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J^{\mathbb{P}}(\mu). \qquad (53)$$

Preuve :
1)Remarquons que vu la propriété d'agrégation du Lemme 4.5, les $G-$EDS (42) et (43) deviennent des EDS gouvernées par une martingale continue B, sous tout $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$. La preuve de ce résultat se déduit de [1] ou [3]. On en donne seulement une esquisse.

En utilisant les faits que sous $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, B est une martingale de processus de variation quadratique $\langle B\rangle$ telle que $c_t := \frac{d\langle B\rangle_t}{dt}$ est bornée par une matrice $\bar{\sigma}$ déterministe, symétrique $d \times d$ définie positive et que x^μ et x^n satisfont les EDS :

$$dx^\mu(t) = \sigma(t, x^\mu(t))dB_t + \int_U (b(t, x^\mu(t), a) + c_t\gamma(t, x^\mu(t), a))m_t(da)dt, \; x^\mu(0) = x,$$

et

$$dx^n(t) = \sigma(t, x^n(t))dB_t + (b(t, x^n(t), u^n(t) + c_t\gamma(t, x^n(t), u^n(t)))dt, \; x^n(0) = x.$$

En vertu de l'hypothèse $(H1)$ sur σ, b et γ, la preuve de(50) repose sur les inégalités standards de Gronwall et Burkholder-Davis-Gundy, le théorème de convergence dominée et la convergence stable de $\delta_{u_n(t)}(da)dt$ vers $\mu_t(da)dt$. De plus, (51) résulte de la convergence stable $\delta_{u_n(t)}(da)dt$ vers $\mu_t(da)dt$, qui est garantie par la continuité et les hypothèses $(H2)$ sur f et h.

La preuve de (52)se conduit comme suit. D'après (40), on a $J^{\mathbb{P}}(u) = J^{\mathbb{P}}(\delta_u)$, d'où $\inf_{u\in\mathcal{U}[0,T]} J^{\mathbb{P}}(u) \geq \inf_{\mu\in R} J^{\mathbb{P}}(\mu)$. Soit $\mu \in \mathcal{R}$ arbitraire. D'après le $G-$Chattering Lemme, il existe une suite des $G-$contrôles stricts $(u_n) \subset \mathcal{U}[0,T]$ telle que $\delta_{u_n(t)}(da)dt$ converge faiblement vers $\mu_t(da)dt$. Il résulte de (51) que

$$J^{\mathbb{P}}(\mu) = \lim_{n\to\infty} J^{\mathbb{P}}(u^n) \geq \inf_{u\in\mathcal{U}[0,T]} J^{\mathbb{P}}(u),$$

et comme μ est arbitraire, on en déduit que

$$\inf_{\mu\in R} J^{\mathbb{P}}(\mu) \geq \inf_{u\in\mathcal{U}[0,T]} J^{\mathbb{P}}(u).$$

2)La preuve de l'existence d'un $G-$contrôle optimal relaxé (53), repose sur les faits suivants : Soit $(\mu^n)_{n\geq 0}$ une suite minimisante de $\inf_{\mu\in\mathcal{R}} J^{\mathbb{P}}(\mu)$ tel que $\inf_{\mu\in\mathcal{R}} J^{\mathbb{P}}(\mu) = \lim\limits_{n\to\infty} J^{\mathbb{P}}(\mu^n)$. Les contrôles μ^n sont des variables aléatoires dans l'ensemble compact M, d'où d'après le théorème de Prohorov, la famille de distributions associée est relativement compacte dans M. L'hypothèse $(H1)$ entraine que la suite des processus $(\mu^n, x^{\mu^n})_{n\geq 0}$ est étroite dans l'espace $M \times \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$. Il existe alors une sous suite $(\mu^{n_k}, x^{\mu^{n_k}})_{k\geq 0}$ de $(\mu^n, x^{\mu^n})_{n\geq 0}$ qui converge faiblement vers $(\hat{\mu}, x^{\hat{\mu}})$, d'où (44). En utilisant le théorème d'injection de Skorokhod, les hypothèses de continuité $(H2)$ et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient finalement :

$$\inf_{\mu\in\mathcal{R}} J^{\mathbb{P}}(\mu) = \lim_{k\to\infty} J^{\mathbb{P}}(\mu^{n_k}) = J^{\mathbb{P}}(\hat{\mu}),$$

ce qui achève la démonstration.■

L'idée de la proposition suivante est de rendre la limite donnée par la formule (50) valide sous l'espérance sous linéaire $\widehat{E}$.

Proposition 4.12 *Supposons que l'hypothèse* $(H1)$ *est satisfaite. Soient* x^μ *et* x^n *les solutions associées à* μ et u_n *respectivement. Alors on a*

$$\lim_{n\to\infty} \hat{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |x^n(t) - x^\mu(t)|^2\right] = 0. \tag{54}$$

Preuve : Posons $\xi_n := \sup_{0\leq t\leq T} |x^n(t) - x^\mu(t)|^2$. Il est clair que $\xi_n \in \mathbb{L}^1_G(\Omega_T)$ pour tout $n \geq 1$. S'il existe un $\delta > 0$ tel que $\hat{E}[\xi_n] \geq$

δ, $n = 1, 2, \ldots$, alors on peut trouver une probabilité $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}$ tel que $E^{\mathbb{P}_n}[\xi_n] \geq \delta - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Le fait que $\mathcal{P}$ soit faiblement compact nous permet d'affirmer qu'on peut extraire une sous suite $\{\mathbb{P}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge faiblement vers $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$, d'où

$$\lim_{j\to\infty} E^{\mathbb{P}}[\xi_{n_j}] = \lim_{j\to\infty}\lim_{k\to\infty} E^{\mathbb{P}_{n_k}}[\xi_{n_j}] \geq \liminf_{k\to\infty} E^{\mathbb{P}_{n_k}}[\xi_{n_k}] \geq \delta,$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $\lim\limits_{j\to\infty} E^{\mathbb{P}}[\xi_{n_j}] = 0$ d'après le lemme 4.11.■

Remarque *la méthode de la démonstration de* (50) *ne peut pas s'étendre à notre cas pour montrer* (54), *car sous l'espérance sous linéaire le théorème de convergence dominée et le lemme de Fatou ne sont pas valides, par contre les inégalités de Gronwall et Burkholder-Davis-Gundy (voir Lemme* 4.7*) restent valables pour les* $G-$*EDS et les* $G-$*intégrales stochastiques browniennes.*

Corollaire 4.13 *Supposons que l'hypothèse* $(H2)$ *est satisfaite. Soient* $J(u^n)$ *et* $J(\mu)$ *les fonctionnelles de performance correspondantes respectivement à* u^n *et* μ *avec* $dt\delta_{u^n(t)}(da)$ *convergente faiblement vers* $dt\mu_t(da)$ *quasi-sûrement. Alors, il existe une sous suite* (u^{n_k}) *de* (u^n) *telle que*

$$\lim_{k\to\infty} J(u^{n_k}) = J(\mu).$$

Preuve : D'après Denis et al[10] , on obtient l'existence d'une sous suite $(x^{n_k}(t))_k$ qui converge vers $x^{\mu}(t)$ quasi-surement, uniformément en t. On a, d'après le Lemme 4.11, pour tout $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$,

$$\lim_{k\to\infty} J^{\mathbb{P}}(u^{n_k}) = J^{\mathbb{P}}(\mu). \tag{55}$$

En fait d'après l'égalité $J(\widehat{\mu}) = \min_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu)$, on note que $J(u^{n_k}) = \widehat{E}[\chi^{u^{n_k}}]$ et $J(\mu) = \widehat{E}[\chi^{\mu}]$, où les variables aléatoires $\chi^{u^{n_k}}$ et χ^{μ} appartiennent à $\mathbb{L}^1_G(\Omega_T)$. S'il existe $\delta > 0$ tel que $\widehat{E}[\chi^{u^{n_k}}] \geq \widehat{E}[\chi^{\mu}] + \delta$, $n_k \geq \ell, \ell+1, \ldots$, on peut alors trouver une mesure de probabilité $\mathbb{P}_m \in \mathcal{P}$ tel que

$$E^{\mathbb{P}_m}[\chi^{u^{n_k}}] \geq \widehat{E}[\chi^{\mu}] + \delta - \frac{1}{m}.$$

Du fait que $\mathcal{P}$ soit faiblement compact, on peut extraire une sous suite $\{\mathbb{P}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ qui converge vers $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$. On a alors

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}[\chi^{\mu}] &= \lim_{k\to\infty} E^{\mathbb{P}_{m_k}}[\chi^{\mu}] = \lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty} E^{\mathbb{P}_{m_k}}[\chi^{u_{n_j}}] \\ &\geq \lim_{j\to\infty} inf, E^{\mathbb{P}_{m_j}}[\chi^{u_{n_j}}] \geq \liminf_{j\to\infty}\left(\widehat{E}[\chi^{\mu}] + \delta - \frac{1}{m_j}\right) = \widehat{E}[\chi^{\mu}] + \delta. \end{aligned}$$

Par suite, $E^{\mathbb{P}}[\chi^\mu] \geq \widehat{E}[\chi^\mu]+\delta$, qui est contradictoire avec la définition de l'espérance sous linéaire. Par suite

$$\lim_{k\to\infty} J(u^{n_k}) \leq J(\mu).$$

D'autre part, en utilisant (55) on a pour tout $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$

$$\lim_{k\to\infty} J(u^{n_k}) \geq \lim_{k\to\infty} J^{\mathbb{P}}(u^{n_k}) = J^{\mathbb{P}}(\mu),$$

par suite $\lim\limits_{k\to\infty} J(u^{n_k}) \geq J(\mu)$, ce qui achève la démonstration.■

Preuve de Théorème 4.10 On a d'après la définition d'un contrôle relaxé et le Corollaire ci dessus :

$$\inf_{u\in U[0,T]} J(u) \leq \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu).$$

D'autre part, on a pour tout $u \in \mathcal{U}[0,T]$, $\delta_u \in \mathcal{R}$. De plus,

$$J(u) = J(\delta_u) \geq \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu),$$

Il résulte que

$$\inf_{u\in\mathcal{U}[0,T]} J(u) \geq \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu),$$

d'où le résultat (46).

On revient maintenant à la démonstration de l'existence d'un $G-$contrôle optimal relaxé. Le fait que f et h sont continues et bornées pour tout $\nu \in \mathcal{R}$

$$\chi^\nu := \int_0^T \int_U f(t, x^\nu(t), a)\nu_t(da)\, dt + h(x^\nu(T)) \in \mathbb{L}^1_G(\Omega_T).$$

Par le lemme 4.6, on obtient alors pour tout $\nu \in \mathcal{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} J^{\mathbb{P}_n}(\nu) = J^Q(\nu), \tag{56}$$

On en déduit que la suite $\{\mathbb{P}_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{P}$ converge faiblement vers $Q \in \mathcal{P}$. On suppose qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\nu \in \mathcal{R}$,

$$J(\nu) \geq \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu) + \varepsilon.$$

D'aprés le lemme 4.11, il existe un $G-$contrôle relaxé $\hat{\mu} \in \mathcal{R}$ tel que $\hat{\mu}_{\mathbb{P}} = \arg\min_{\mu\in\mathcal{R}} J^{\mathbb{P}}(\mu)$ pour tout $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ et on obtient

$$J(\nu) \geq \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J^{\mathbb{P}}(\mu) + \varepsilon = \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} J^{\mathbb{P}}(\hat{\mu}_{\mathbb{P}}) + \varepsilon.$$

D'autre part, pour tout $n \geq 1$, il existe $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}$ tel que

$$J^{\mathbb{P}_n}(\nu) \geq J(\nu) + \frac{1}{n}.$$

La suite $\{\mathbb{P}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{P}$ devient faiblement compact, on peut extraire une sous suite $\{\mathbb{P}_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ qui converge faiblement vers $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$. Il résulte de (56) que, pour tout $\nu \in \mathcal{R}$,

$$J^Q(\nu) = \lim_{j\to\infty} J^{\mathbb{P}_{n_j}}(\nu) \geq \sup_{\mathbb{P}\in P} J^{\mathbb{P}}(\hat{\mu}_{\mathbb{P}}) + \varepsilon.$$

En particulier, pour un $\nu^Q \in \mathcal{R}$ donné, on obtient

$$J^Q(\nu^Q) \geq J^Q(\nu^Q) + \varepsilon,$$

ce qui contredit le fait que $\varepsilon > 0$.■

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a prouvé l'existence d'un $G-$contrôle optimal relaxé dans le cadre de l'espérance non linéaire, satisfaisant les conditions de régularité nécessaires, en s'appuyant sur les résultats de S. Bahlali, B. Mezerdi et B. Djehiche sur le problème de contrôle stochastique classique réalisés en 2006. Partant d'une équation différentielle stochastique gouvernée par un $G-$mouvement brownien ; ces résultats ont été difficiles à obtenir à cause de la non-linéarité de la $G-$espérance et de la difficulté de définir un espace adéquat avec la nature du $G-$contrôle relaxé. Pour cette raison, on a considéré la filtration universelle proposée par Soner et al en 2012. Ajouté à cela, notre principale difficulté réside dans le fait que le théorème de skorokhod n'est pas généralisé dans le cadre du $G-$calcul stochastique, d'où l'utilisation des méthodes de compactification traitées par N. El karoui et al en 1987. On a prouvé cette existence en se basant sur le $G-$Chattering lemme, qui est une généralisation du célèbre Chattering lemme classique, obtenu dans le cadre de la $G-$espérance qui a été la clé de nos résultats.

On a également prouvé, en utilisant l'approximation des trajectoires, que d'une part chaque $G-$contrôle relaxé est une limite d'une suite de contrôles stricts bien définis et d'autre part, que chaque processus de diffusion lié au $G-$contrôle relaxé est une limite au sens fort d'une suite de processus de diffusion associés aux $G-$contrôles stricts.

Ce travail de recherche a été couronné par la démonstration d'un théorème essentiel qui montre que l'infimum du coût sur l'espace des contrôles stricts est le même sur l'espace des contrôles relaxés, comme dans le cas classique.

Comme perspectives, nous envisageons de traiter des applications en finance dans le cas où la volatilité est incertaine, ce qui est assuré par l'existence d'un $G-$contrôle optimal relaxé et éventuellement considérer d'autres problèmes en particulier, les $G-$équations stochastiques rétrogrades contrôlées ainsi que le problème de contrôle mean-field.

References

[1] S. Bahlali, B. Mezerdi and B. Djehiche, *Approximation and optimality necessary conditions in relaxed stochastic control problems*, International Journal of Stochastic Analysis, $(2006), 1-23$

[2] X. P. Bai, Y. Q. Lin, *On the existence and uniqueness of solutions to stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion with integral-Lipschitz coeficients*, Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.30$(2014), 589-610$.

[3] K. Bahlali, M. Mezerdi and B. Mezerdi, *Existence of optimal controls for systems governed by mean-field stochastic differential equations*, Afrika Statistika 9,no.1, (2014), $627-645$.

[4] A. Benssoussan, *Stochastic control by functional analysis methods*, North Holland, 1981.

[5] J. M. Bismut, *An introductory approach to duality in optimal stochastic control*, Siam Rev, volume20, janvier 1978

[6] F. Biagini,T. Meyer-Brandis, B. Oksendal and K.Paczka, *Optimal control with delayed information flow of systems driven by $G-$Brownian motion*, arXiv preprint arXiv :1402.3139v3 [math.OC], 2014.

[7] H. Boutabia and I. Grabsia, *Chaotic expansion in the $G-$expectation space*, Opuscula Math. 33, $(2013), 647-666$.

[8] B. Djehiche, *Stochastic calculus, An introduction with application*, 2001.

[9] L. Denis and C. Martini, *A theoretical framework for the pricing of contingent claims in the presence of model uncertainty,* Ann. Appl. Probab. 16(2), $(2006), 827-852$.

[10] L. Denis, M. Hu, and S. Peng, *Function spaces and capacity related to a sublinear expectation : application to $G-$Brownian motion paths*, Potential Anal. 34,no.2, $(2011), 139-161$.

[11] N. El.Karoui, S.Peng and M. C. Quenz, *Backward stochastic differential equations in finance*, mathematical finance7,(1997), $1-71$.

[12] N. El Karoui, D. H. Nguyen and M. Jeanblanc-Picqué, *Existence of an optimal Markovian filter for the control under partial observations*, SIAM journal on control and optimization 26,no.5, $(1988), 1025-1061$.

[13] N. El Karoui, D. H. Nguyen, and M.Jeanblanc-Picqué, *Compactification methods in the control of degenerate diffusions : existence of an optimal control*, Stochastics,20,no.3, $(1987), 169-219$.

[14] W. H. Fleming and M. Nisio, *On stochastic relaxed control for partially observed diffusions*, Nagoya Math. J. 93, $(1984), 71-108$.

[15] W. H. Fleming and R. Rishel, *Optimal deterministic and stochastic control*, Springer verlag, Berlin, 1975.

[16] W. H. Fleming, *Generalized solutions in optimal stochastic control, Differential games and control theory*2, Lectures Notes in Pure and Appl.Math.30, Dekker, 1978.

[17] F.Gao, *Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion*, Stochastic Processes and their Applications, 119,no.10(2009), $3356-3382$.

[18] U. G. Haussmann, *General necessary conditions for optimal control of stochastic systems*, math. programming studies 6, North Holland Amsterdam (1976), $30-48$.

[19] U. G. Haussmann, J.P Lepeltier, *The existence of optimal controls*, Siam Journ. Cont. optim. 28,(1990), $851-902$.

[20] U. G. Haussmann, *Some examples of optimal stochastic control or : The stochastic maximum principle at work*. SIAM Review, v.23, no.3, 1983.

[21] M. Hu, S. Ji, and S. Yand, *A stochastic recursive optimal control problem under the $G-$expectation framework,* arxiv preprint arxiv :$1306-1312$,[math.OC], 2013.

[22] Y. Hu, N. Lerner, *On the existence and uniqueness of solutions to stochastic equations in infnite dimension with integral-Lipschitz coeffcients*, J. Math. Kyoto Univ. 42(2002), $579-598$.

[23] M. Katori, H. Tanemura, *Complex Brownian motion representation of the Dyson model*, Electron. Commun. Probab. 18(2013), $1-16$.

[24] N. Ikeda, and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Kodansha North Holland, 2nd Edition, 1989.

[25] H. J. Kushner, *Necessery conditions for continuous parameter stochastic optimization problems*, Siam J.control.optimal, $v10, (1973), 550 - 565$.

[26] D. Lamberton et B. Laeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Edition marketing S.A, 1997.

[27] X. Li, S. Peng, *Stopping times and related Itô's calculus with G−Brownian motion*, Stochastic Process. Appl. $121(2011), 1492 - 1508$.

[28] P.Luo, and F. Wang, *Stochastic differential equations driven by G−Brownian motion and ordinary differential equations*, Stochastic Processes and their Applications,124,no.11, $(2014), 3869 - 3885$.

[29] A. Matoussi, D. Possamai and C. Zhou, Robust utility maximization in non-dominated models with 2BSDE : the incertain volatility model. Math. Finance 25, no.2$(2015), 258 - 287$.

[30] L. Mazliak*, An introduction to probabilistic methods in stochastic control*, Lectures at Pescara University, 1996

[31] B. Oksendal, *Stochastic differential Equations, An introduction with applications*, 5thEdition, Springer verlag, 1998.

[32] S. Peng, *Filtration consistent nonlinear expectations and evaluations of contingent claims*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series 20, no.2, $(2004), 1 - 24$.

[33] S. Peng,Multi-Dimensional $G-$Brownian Motion and Related Stochastic Calculus under $G-$Expectation, Stochastic Processes and their Applications 118,no.12, $(2008), 2223 - 2253$.

[34] S. Peng, *G−expectation, G−Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type*, Stochastic analysis and applications, The Abel Symposium 2005, Abel Symposia 2, Edit. Benth et al, $(2007), 541 - 567$.

[35] S. Peng, *Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty*, arXiv preprint arXiv :1002.4546, 2010.

[36] S. Peng, *Survey on normal distributions, central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sub-*

linear expectations, Science in China Series A : Mathematics 52,no.7, $(2009), 1391-1411$.

[37] S. Peng, *$G-$Brownian Motion and Dynamic Risk Measure under Volatility Uncertainty*, arXiv : 0711 : 2834v1 [math.PR], 2007

[38] S. Peng, *Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty with Robust Central Limit Theorem and $G-$Brownian Motion*, arXiv : 1002 : 4546v1 [math.PR] 2010.

[39] A. Redjil and S. E. Choutri, *On Relaxed Stochastic Optimal Control for Stochastic Differential Equations Driven by $G-$Brownian Motion,* ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 15$(2018), 201-212$.

[40] H. M. Soner, N. Touzi, and J. Zhang, *Wellposedness of second order backward SDEs*, probability Theory and Related Fields 153,no.$1-2, (2012), 149-190$.

[41] H. M. Soner, N. Touzi, and J. Zhang, *Quasi-sure stochastic analysis through aggregation*, Electron. J. Probab 16,no.2, $(2011), 1844-1879$.

[42] H. M. Soner, N. Touzi, and J. Zhang, *Martingale representation theorem for the $G-$expectation*, Stochastic Processes and their Applications 121, no.2, $(2011), 265-287$.

[43] Z. Zheng, X. Bi, S. Zhang, *Stochastic optimization theory of backward stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion*, Abstr. Appl. Anal. $(2013), 1-11$.

[44] D. Zhang, Z. Chen, *Stability theorem for stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion*, An. St. Ovidus Constanta 19(2011), $205-221$.