

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences

Les G-Fonctionnelles Exponentielles et Les G-Equations Différentielles Stochastiques

Option

Probabilités et Statistique

Par

CHALABI El-Hacene

Devant le jury :

PRESIDENT :	HAIOUR Mohamed	Prof	U.B.M. Annaba
DIRECTEUR DE THÈSE :	BOUTABIA Hacène	Prof	U.B.M. Annaba
EXAMINATEUR :	MANSOURI Badreddine	M.C.A	U.M.K. Biskra
EXAMINATEUR :	TAMEUR Lazhar	M.C.A	U.M.K. Biskra
EXAMINATEUR :	MESBAHI Salim	M.C.A	U.F.A. Sétif
EXAMINATEUR :	ZAGHDOUDI Halim	M.C.A	U.B.M. Annaba

Année : 2018

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

العنوان : الجي مؤثرات الأسية و الجي معادلات تفاضلية ستوكاستيكية.

ملخص : في هذه الأطروحة نبرهن وجود ووحداية حل جملة معادلات تفاضلية سطوكاستيكية مقيدة بالحركة جي براونية مستعملين في ذلك البيان التقريبي لكاراثيودوري.

كلمات مفتاحية : جي أمل الرياضياتي، جي حركة براونية، جي معادلة تفاضلية سطوكاستيكية، بيان تقريب كاراثيودوري.

Titre : Les G-Fonctionnelles Exponentielles et Les G-Equations Diffrentielles Stochastiques.

Résumé : Dans cette thèse, nous démontrerons l'existence et l'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles stochastiques gouvernées par un G-mouvement Brownien en utilisant le schéma d'approximation de Caratheodory.

Mots-clés : G-espérance, G-mouvement Brownien, G-équation différentielle stochastique, Shéma d'approximation de Caratheodory.

Title : G-Exponential Functional and G-Stochastic Differential Equations.

Abstract : In this thesis, we present both existence and uniqueness of solution for a system of stochastic differential equations driven by a G-Brownian motion by using the Caratheodory approximation scheme.

Keywords : G-expectation, G-brownian motion, G-stochastic differential equation, Caratheodory approximation scheme.

DÉDICACE

À la mémoire de ma mère.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en tout premier lieu Allah le tout puissant de m'avoir donné la patience, la force et le courage, pour élaborer ce travail.

J'adresse mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse Monsieur Hacène Boutabia, professeur à l'université Badji Mokhtar de Annaba, pour sa confiance, sa patience, sa générosité, ses conseils constructifs et ses suggestions importantes. J'apprécie la pleine confiance et la liberté scientifique qu'il m'a accordées pour la réalisation de cette thèse. Il l'a dirigé avec une grande efficacité. Qu'il trouve ici mon admiration et mes profonds respects.

Mes remerciements s'étendent à Monsieur Mohamed Haiour, professeur à l'université Badji Mokhtar de Annaba, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être président de jury.

Monsieur Badreddine Mansouri; M.C.A à l'université Mohamed Khider de Biskra, Monsieur Lazhar Tameur; M.C.A à l'université Mohamed Khider de Biskra, Monsieur Salim Mesbahi; M.C.A à l'université Ferhat Abbas de Sétif et Monsieur Halim Zaghdoudi; M.C.A à l'université Badji Mokhtar de Annaba, ont accepté d'évaluer cette thèse. Je les

remercie vivement pour leur disponibilité, leur soutien et aussi pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être membres de jury.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents, ma femme et toute ma famille, mes amis et tous mes proches qui m'ont accompagné, aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de cette thèse.

El-Hacene Chalabi

Annaba, le 27 Avril 2018

INTRODUCTION

En 1952, lorsque le paradoxe d'Allais a été mis en évidence, les économistes découvrent que la théorie de «l'utilité espérée» à base d'une espérance mathématique linéaire est contestable. L'intérêt pour une notion d'espérance mathématique non-linéaire se développe alors considérablement. Se pose alors une question: pouvons-nous trouver une nouvelle notion qui peut être une généralisation naturelle de l'espérance linéaire? Notamment en préservant, autant que possible, les propriétés de l'espérance linéaire. Comme réponse à cette question, Peng propose dans [43] une espérance plus dynamique, non-linéaire, dite G -espérance. Récemment, une nouvelle notion d'espérance sous-linéaire a été donnée par Peng [39] à l'aide d'un point de vue d'analyse fonctionnelle.

Parallèlement aux concepts du cadre classique, Peng [37] établit les notions de distribution et d'indépendance dans ce nouveau contexte.

En se rappelant la théorie des équations différentielles stochastiques EDS Tevzadze [47] fournit un résultat d'existence et d'unicité de solutions des EDS par le théorème de point fixe. Dans les travaux [33], [37] et [39], comme le cas classique Peng donne dans un premier temps la définition de la G -intégrale d'Itô par les sommes de Riemann-Stieltjes pour le processus de la forme

$$(0.1) \quad \eta_t = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k 1_{[t_k, t_{k+1})}(t)$$

Dans la suite, l'espace $M_c^0(0, T)$ des processus (0.1) est complété pour la norme $\left(\frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\int_0^T |\cdot|^2 dt \right]\right)^{\frac{1}{2}}$ (voir Peng [33]). Ce complété est noté par $M_G^2(0, T)$. Après avoir obtenu une G -inégalité d'Itô au lieu de l'isométrie d'Itô dans le cas classique, Peng démontre que la G -intégrale d'Itô

$$\mathcal{I}(\eta) = \int \eta dB_t$$

peut être vue comme une fonctionnelle continue et linéaire sur $M_c^0(0, T)$, et qu'elle peut être prolongée de façon unique au complété $M_G^2(0, T)$. Par la suite, Li et Peng [22] donnent une définition de la G -intégrale d'Itô pour un processus de la forme (0.1), où les ξ_k sont remplacées par des variables aléatoires bornées. De façon similaire, ils montrent que la définition de cette nouvelle intégrale peut être étendue au complété $M_G^2(0, T)$.

Une capacité de Choquet (voir Choquet [7]) associée à la G -espérance peut donc être définie

$$\tilde{C}(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega)$$

où \mathcal{P} est une famille de mesures de probabilité sur Ω .

Par rapport à cette capacité, une notion de «quasi-sûr» est établie dans l'article de Denis et *al.* [11]. Grâce à la représentation de la G -espérance et à la notion «quasi-sûr» introduite, la théorie des processus stochastiques en temps continu dans le cadre de la G -espérance s'est développée, en particulier la formule d'Itô, certaines inégalités stochastiques et les équations différentielles stochastiques gouvernées par un G -mouvement brownien peuvent être établies dans le sens «quasi-sûr».

Après avoir défini les intégrales stochastiques dans le cadre de la G -espérance, il est naturel de considérer les $GEDS$. Le premier travail sur les $GEDS$ est réalisé par Peng [39] en utilisant le théorème de point fixe. Dans cet article, une équation de la forme suivante est donnée pour $0 < t < T$

$$(0.2) \quad X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t h(s, X_s) d\langle B \rangle_s + \int_0^t g(s, X_s) dB_s$$

sous l'hypothèse que les coefficients f , h et g sont uniformément Lipschitziens, comme dans le cas classique.

Gao [18] propose de poser (0.2) dans le sens «quasi-sûr». De plus, d'autres chercheurs s'intéressent aux $GEDS$, par exemple les articles de Guo et *al.* [19], Lin [25] et Lin et Bai [2]. Globalement, tous ces travaux sont réalisés sous une hypothèse commune qui assure que les coefficients sont à croissance linéaire. Remarquons que dans ces articles sur les $GEDS$, quelques outils d'analyse stochastique dans le cadre de la G -espérance sont développés. Par exemple, la G -formule d'Itô est introduite dans l'article de Peng [37] et est généralisée par Gao [18], Li et Peng [35] et Zhang et *al.* [50]. Une inégalité de type Burkholder-Davis-Gundy BDG est également prouvée dans ce nouveau cadre.

Enfin, il convient de noter que la théorie de la G -espérance a déjà trouvé des applications dans de nombreux domaines tels que la finance, le contrôle stochastique, etc ... Pour ces dernières, nous pouvons citer les travaux d'Epstein et Ji [12], [13], et de Vorbrink [48]. Même si la recherche sur les applications de cette nouvelle théorie n'en est qu'à ses débuts, ces premiers travaux ont déjà ouvert de vastes perspectives.

Le schéma d'approximation de Caratheodory a été introduit par le mathématicien grec nommé Constantine Caratheodory au début du 20^{ème} siècle pour les équations différentielles ordinaires [8]. Plus tard, Bell et Mohammad l'ont étendu aux équations différentielles stochastiques [3] puis par Mao [29], [30]. Généralement, les solutions des EDS n'ont pas d'expressions explicites sauf les EDS linéaires. Nous avons donc cherché les solutions approximatives au lieu de la solution exacte. Pratiquement, pour calculer X_t^k par l'approximation de Picard, il faut calculer $X_t^0, X_t^1, \dots, X_t^{k-1}$, qui impliquent beaucoup de calculs. Mais, par l'approximation de Caratheodory nous calculons directement X_t^k et n'ont pas besoin des itérations par étapes mentionnées ci-dessus, ce qui est un avantage comparé à l'approximation de Picard [48]. Par l'approximation de Picard, la théorie

d'existence des solutions des *GEDS* était établie par Gao [18], puis par Faizullah et Piao avec la méthode des sur et sous solutions [15], (voir aussi [16], [45]).

Dans ce travail, le schéma d'approximation de Caratheodory pour un système d'équations différentielles stochastiques gouvernées par un G -mouvement Brownien *SGEDS* a été l'outil principal pour montrer que avec certaines conditions, les solutions approximatives de Caratheodory (X_t^k, Y_t^k) , $k \geq 1$ converge vers la solution unique (X_t, Y_t) de *SGEDS* dans le sens

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left(|X_t^k - X_t|^2 + |Y_t^k - Y_t|^2 \right) \right] = 0$$

Dans cette thèse, on commence par donner les principaux résultats sur la G -espérance, le G -mouvement Brownien et le G -calcul stochastique. Puis on va étudier l'existence et l'unicité de la solution de système des G -équations différentielles stochastiques suivant:

$$(0.3) \quad \begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t f_1(s, X_s, Y_s) ds + \int_0^t f_2(s, X_s, Y_s) d\langle B \rangle_s \\ \quad + \int_0^t f_3(s, X_s, Y_s) dB_s, \quad 0 \leq t \leq T \\ Y_t = Y_0 + \int_0^t g_1(s, X_s, Y_s) ds + \int_0^t g_2(s, X_s, Y_s) d\langle B \rangle_s \\ \quad + \int_0^t g_3(s, X_s, Y_s) dB_s, \quad 0 \leq t < T \end{cases}$$

avec variation des constantes de Lipschitz et de croissance linéaire par rapport au temps, en utilisant le schéma d'approximation de Caratheodory. Pour cela, on procéde par étape:

Dans le premier chapitre, on présente brièvement les principaux résultats sur l'espérance sous linéaire dont nous aurons besoin dans les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre, on donne avec un peu de détails quelques définitions et théorèmes sur le G -mouvement Brownien et le G -calcul stochastique.

Dans le dernier chapitre, on explique le schéma de Caratheodory pour le *SGEDS*, puis l'utilisation de ce schéma pour la démonstration du théorème d'existence et d'unicité de la solution de *SGEDS* (0.3).

TABLE DES MATIÈRES

	Page
1 La théorie de la G-espérance	1
1.1 Espérance sous linéaire	1
1.2 Représentation de l'espérance sous linéaire	3
1.3 Distribution et indépendance	4
1.4 Distribution G -normale	8
1.5 Loi des grands nombres, Théorème de la limite centrale	12
1.5.1 Loi des grands nombres	12
1.5.2 Théorème de la limite centrale	13
2 G-mouvement Brownien et G-intégrale stochastique	15
2.1 G -mouvement Brownien	15
2.1.1 G -Mouvement Brownien et sa caractérisation	15
2.1.2 Existence de G -mouvement Brownien et d'espérance conditionnelle	19
2.2 G -Capacité	23
2.2.1 Capacité associée à P	23
2.2.2 G -Capacité	24
2.3 G -calcul stochastique	25

2.3.1	Intégrale d'Itô par rapport au G -mouvement Brownien	25
2.3.2	Variation quadratique de G -mouvement Brownien	29
2.3.3	G -formule d'Itô	35
3	Système gouverné par un G-mouvement Brownien	37
3.1	Schéma d'approximation de Caratheodory	38
3.2	Existence et unicité de la solution de $SGEDS$	39
A	Conclusion générale et Perspectives	49
	Bibliography	52

LA THÉORIE DE LA G -ESPÉRANCE

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement les notions et les théorèmes fondamentaux concernant l'espérance sous linéaire, dont nous aurons besoin pour la suite de notre étude.

1.1 Espérance sous linéaire

Peng ([39], [43]) propose une nouvelle notion d'espérance sous-linéaire à l'aide d'un point de vue d'analyse fonctionnelle.

Soit Ω un ensemble non vide et soit \mathcal{H} l'espace linéaire des fonctions numériques définies sur Ω , tel que toute constante $c \in \mathcal{H}$ et si $X \in \mathcal{H}$ alors $|X| \in \mathcal{H}$.

On désigne par $C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de fonctions localement Lipschitziennes φ sur \mathbb{R}^n satisfaisant

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C(1 + |x|^m + |y|^m)|x - y|$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, où C est une constante positive et $m \in \mathbb{N}^*$.

On suppose en outre que pour tout $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{H}$, alors $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathcal{H}$.

Naturellement on introduit une norme $\|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < \infty$.

Définition 1.1. On appelle espérance sous-linéaire toute fonctionnelle $\mathbb{E} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tout X, Y de \mathcal{H} , $c \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geq 0$ les propriétés suivantes:

(i) Monotonie:

$$(1.1) \quad \text{si } X \leq Y \text{ alors } \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$$

(ii) Préservation des constantes:

$$(1.2) \quad \mathbb{E}[c] = c$$

(iii) Sous-additivité:

$$(1.3) \quad \mathbb{E}[X + Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

(iv) Homogénéité positive:

$$(1.4) \quad \mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ est appelé espace d'espérance sous linéaire.

Si seulement les deux premières propriétés (i) et (ii) sont satisfaites, \mathbb{E} est dite l'espérance non linéaire et le triplet $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ est appelé l'espace d'espérance non linéaire.

Remarque 1.1. Si l'inégalité (iii) est une égalité \mathbb{E} est l'espérance linéaire classique.

Remarque 1.2 (Convexité). Les propriétés (iii) et (iv) impliquent

$$(1.5) \quad \text{Pour } \alpha \in [0, 1], \mathbb{E}[\alpha X + (1 - \alpha)Y] \leq \alpha \mathbb{E}[X] + (1 - \alpha) \mathbb{E}[Y]$$

Remarque 1.3. La propriété (iv) est équivalente à

$$(1.6) \quad \mathbb{E}[\lambda X] = \lambda^+ \mathbb{E}[X] + \lambda^- \mathbb{E}[-X]$$

pour tout réel λ .

Définition 1.2. Soient $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ deux espérances sous linéaires définies dans le même espace (Ω, \mathcal{H}) . \mathbb{E}_1 est dite dominée par \mathbb{E}_2 si pour tous X, Y de \mathcal{H} on a

$$(1.7) \quad \mathbb{E}_1[X + Y] \leq \mathbb{E}_2[X] + \mathbb{E}_2[Y]$$

Remarque 1.4. Si $X, Y \in \mathcal{H}$ alors $|X|, X^n \in \mathcal{H}$. Plus généralement $\varphi(X)\psi(Y) \in \mathcal{H}$ pour tous $X, Y \in \mathcal{H}$ et pour toutes $\varphi, \psi \in C_{l.Lip}$. En particulier, si $X \in \mathcal{H}$ alors $\mathbb{E}[X^n] < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En général, $C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ peut être remplacé par l'un des espaces de fonctions définies sur \mathbb{R}^n suivants:

$L^\infty(\mathbb{R}^n)$: l'espace de fonctions bornées Borel-mesurables,

$C_{unif}(\mathbb{R}^n)$: l'espace de fonctions bornées et uniformément continues,

$C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$: l'espace de fonctions continues, Lipschitziennes et bornées,

$Lip(\mathbb{R}^n)$: l'espace de fonctions Lipschitziennes sur \mathbb{R}^n .

1.2 Représentation de l'espérance sous linéaire

On peut exprimer l'espérance sous linéaire comme un supremum des espérances linéaires classiques. Elle est appliquée à des situations où les modèles de probabilité sont incertains.

Théorème 1.1. (voir [37]) Soit \mathbb{E} une fonctionnelle définie sur un espace d'espérance sous linéaire \mathcal{H} vérifiant la sous additivité et l'homogénéité positive. Alors il existe une famille de fonctions linéaires $\{E_\theta; \theta \in \Theta\}$ définie sur \mathcal{H} telle que

$$(1.8) \quad \mathbb{E}[X] = \sup_{\theta \in \Theta} E_\theta[X], \text{ pour } X \in \mathcal{H}$$

et pour tout $X \in \mathcal{H}$, il existe $\theta_X \in \Theta$ telle que $\mathbb{E}[X] = E_{\theta_X}[X]$.

En outre, si \mathbb{E} est une espérance sous linéaire, alors E_θ est une espérance linéaire.

Remarque 1.5. *On observe que l'espérance linéaire E_θ définie ci-dessus est seulement supposée additive. Mais on peut appliquer le théorème de Daniell-Stone pour prouver l'existence d'une unique mesure de probabilité σ -additive P_θ sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{H}))$ telle que*

$$(1.9) \quad E_\theta[X] = \int_{\Omega} X dP_\theta, \quad \forall X \in \mathcal{H}$$

L'incertitude du modèle de probabilités correspondante est décrite par le sous ensemble $\{P_\theta; \theta \in \Theta\}$, et l'incertitude correspondante de distributions d'un vecteur aléatoire X de dimension n dans \mathcal{H} est décrite par

$$\{F_X(\theta, A) = P_\theta(X \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$$

1.3 Distribution et indépendance

Peng dans [37] établit les notions de distribution et d'indépendance pour les variables aléatoires dans ce nouveau contexte. Ces notions s'expriment à l'aide des familles de fonctions $C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.3. *Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire, où $X_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, \dots, n$. La distribution de X sous l'espérance sous linéaire \mathbb{E} est donnée par la fonctionnelle $\mathbb{F}_X[\cdot]$ suivante:*

pour toute $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$

$$(1.10) \quad \mathbb{F}_X[\varphi] = \mathbb{E}[\varphi(X)]$$

Le triplet $(\mathbb{R}^n, C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n), \mathbb{F}_X)$ forme un espace d'espérance sous linéaire.

Il a été prouvé dans [33] l'existence d'une famille de mesures de probabilité $\{F_X(\cdot)\}_{\theta \in \Theta}$ définie sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ telle que

$$(1.11) \quad \mathbb{F}_X[\varphi] = \sup_{\theta \in \Theta} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) F_X^\theta(dx), \quad \forall \varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$$

Ainsi $F_X[\varphi]$ caractérise l'incertitude de la distribution de X . (voir [37], [38]).

Définition 1.4. On dit que la distribution de X est plus forte que Y , si nous avons

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \mathbb{E}[\varphi(Y)], \quad \forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$$

Définition 1.5. Soient X, Y deux vecteurs de variables aléatoires n -dimensionnels définis respectivement sur les espaces d'espérances sous linéaires $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \mathbb{E}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \mathbb{E}_2)$ sont dits identiquement distribués et on notera par $X \sim Y$ ou $X \stackrel{d}{=} Y$ si pour toute $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\mathbb{E}_2[\varphi(Y)] = \mathbb{E}_1[\varphi(X)]$$

Il est clair que $X \sim Y$ si et seulement si X et Y ont la même distribution.

Remarque 1.6. *La distribution de X est plus forte que Y signifie que l'incertitude de X est plus grande que celle de Y .*

$X \sim Y$ signifie qu'ils ont le même degré d'incertitude.

Remarque 1.7. *Soit $X \in \mathcal{H}$, si F_X n'est pas une espérance linéaire, alors X a une distribution incertaine.*

Définition 1.6. La distribution de X a les quatre paramètres suivants :

$$\bar{\mu} = \mathbb{E}[X], \quad \underline{\mu} = -\mathbb{E}[-X], \quad \bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}[X^2] \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}^2 = -\mathbb{E}[-X^2]$$

Les intervalles $[\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ et $[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]$ caractérisent, respectivement, la moyenne incertaine et la variance incertaine de X .

Remarque 1.8. *$X \stackrel{d}{=} Y$ implique que X et Y ont le même sous-ensemble d'incertitude de distributions, i.e.*

$$\{F_X(\theta_1, \cdot), \theta_1 \in \Theta_1\} = \{F_Y(\theta_2, \cdot), \theta_2 \in \Theta_2\}$$

La proposition suivante est très utile dans la théorie d'espérance sous linéaire.

Proposition 1.1. Soient $X, Y \in \mathcal{H}$ telle que $\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{E}[-Y]$. Alors, pour $\forall \alpha$, on a

$$\mathbb{E}[X + \alpha Y] = \mathbb{E}[X] + \alpha \mathbb{E}[Y]$$

En particulier, si $\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{E}[-Y] = 0$, on a

$$\mathbb{E}[X + \alpha Y] = \mathbb{E}[X]$$

Démonstration.

$$\mathbb{E}[\alpha Y] = \alpha^+ \mathbb{E}[Y] + \alpha^- \mathbb{E}[-Y] = \alpha^+ \mathbb{E}[Y] - \alpha^- \mathbb{E}[Y] = \alpha \mathbb{E}[Y]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X + \alpha Y] &\leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[\alpha Y] \\ &= \mathbb{E}[X] + \alpha \mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[-\alpha Y] \\ &\leq \mathbb{E}[X + \alpha Y] \end{aligned}$$

■

La nouvelle indépendance suivante joue un rôle très important dans la théorie d'espérance sous linéaire.

Définition 1.7. Dans un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$, le vecteur aléatoire $Y \in \mathcal{H}^n$ est dit indépendant d'un autre vecteur aléatoire $X \in \mathcal{H}^m$ sous \mathbb{E}

Si pour toute $\varphi \in C_{l:LiP}(\mathbb{R}^{n+m})$ on a

$$(1.12) \quad \mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x, Y)]_{x=X}]$$

où $\mathbb{E}[\varphi(x, Y)]_{x=X}$ signifie $\psi(X)$ avec $\psi(x) = \mathbb{E}[\varphi(x, Y)]$.

\tilde{X} est dite une copy indépendante de X si $X \sim \tilde{X}$ et \tilde{X} est indépendante de X .

Nous remarquons que ces nouvelles définitions sont compatibles avec celles du cadre classique si l'espérance est linéaire.

Remarque 1.9. *Signalons cependant que dans une espérance sous linéaire cette relation d'indépendance n'est pas symétrique.*

Exemple 1.1. *On considère que $X, Y \in \mathcal{H}$ sont identiquement distribuées et que*

$$\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{E}[-Y] = 0$$

mais

$$\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}[X^2] > \underline{\sigma}^2 = -\mathbb{E}[-X^2]$$

On suppose également que

$$\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[X^+ + X^-] > 0$$

ainsi

$$\mathbb{E}[X^+] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[|X| + X] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[|X|] > 0$$

Dans le cas où Y est indépendante de X , on a

$$\mathbb{E}[XY^2] = \mathbb{E}[X^+\bar{\sigma}^2 + X^-\underline{\sigma}^2] = (\bar{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^2)\mathbb{E}[X^+] > 0$$

Mais si X est indépendante de Y , on a

$$\mathbb{E}[XY^2] = 0$$

La propriété d'indépendance de deux vecteurs aléatoires X et Y ne concerne que la distribution conjointe de (X, Y) .

Remarque 1.10. *La situation “ Y est indépendante de X ” apparaît souvent lorsque Y survient après X , donc une espérance très robuste devrait prendre l’information de X en compte.*

Définition 1.8. Une suite de vecteurs aléatoires n -dimensionnels $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ définis sur un espace d’espérance non linéaire (Ω, \mathcal{H}, E) est dite convergente en loi (ou convergente en distribution) sous E si pour tout $\varphi \in C_{b:LiP}(\mathbb{R}^n)$, la suite $\{\varphi(z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge.

Proposition 1.2. (voir [41]) *Soit $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge en loi dans le sens ci-dessus. Alors l’application $F[\cdot]: C_{b:LiP}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$F[\varphi] = \lim_{i \rightarrow \infty} E[\varphi(z_i)], \text{ pour } \varphi \in C_{b:LiP}(\mathbb{R}^n)$$

est une espérance non linéaire sur $(\mathbb{R}^n, C_{b:LiP}(\mathbb{R}^n))$.

Si E est sous linéaire (resp. linéaire), alors F est sous linéaire (resp. linéaire).

1.4 Distribution G -normale

Une notion fondamentalement importante dans la théorie d’espérance sous linéaire est que la variable aléatoire X soit $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2; \bar{\sigma}^2])$ -distribuée.

Définition 1.9 (Distribution G -normale). Dans un espace d’espérance sous linéaire (Ω, \mathcal{H}, E) , une variable aléatoire $X \in \mathcal{H}$ avec $\underline{\sigma}^2 = -E[-X^2]$ et $\bar{\sigma}^2 = E[X^2]$ est dite $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ -distribuée, on notera par $X \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$, si pour tout $Y \in \mathcal{H}$ indépendante de X telle que $Y \stackrel{d}{=} X$, on a :

$$(1.13) \quad aX + bY \stackrel{d}{=} \sqrt{a^2 + b^2} X \quad \forall a, b \geq 0$$

Remarque 1.11. *Une variable aléatoire X , $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ -distribuée n’a aucune moyenne incertaine.*

En effet, d’après la définition précédente, on a

$$\sqrt{2}E[X] = E[X + X] = 2E[X]$$

et

$$\sqrt{2}\mathbb{E}[-X] = \mathbb{E}[-X - X] = 2\mathbb{E}[-X]$$

d'où

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[-X] = 0$$

Remarque 1.12. Si X est indépendante de Y et $X \stackrel{d}{=} Y$; tels que (1.13) est satisfaite, alors $-X$ est indépendante de $-Y$ et $-X \stackrel{d}{=} -Y$.

De même $a(-X) + b(-Y) \stackrel{d}{=} \sqrt{a^2 + b^2}(-X)$; $a, b \geq 0$. Ainsi

$$X \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]), \text{ si et seulement si, } -X \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$$

Peng dans [37] montre que la loi G -normale $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ est caractérisée, par l'équation parabolique aux dérivées partielles suivante dite la G -équation de la chaleur de la distribution G -normale définie sur $[0; \infty) \times \mathbb{R}$ par

$$(1.14) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$$

avec la condition de Cauchy $u|_t = 0$ où G est une fonction sous linéaire réelle dite la fonction génératrice de (1.14) qui est paramétrée par $\bar{\sigma}^2$ et $\underline{\sigma}^2$ et

$$G(\alpha) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\alpha X^2] = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^2 \alpha^+ - \underline{\sigma}^2 \alpha^-), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

avec $\alpha^+ = \max(\alpha, 0)$ et $\alpha^- = (-\alpha)^+$.

Proposition 1.3. (voir [33]) Soit X une variable aléatoire $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ -distribuée.

Pour tout $\varphi \in C_{l:lip}(\mathbb{R})$, on définit la fonction u par

$$u(t, x) = \mathbb{E}\left[\varphi\left(x + \sqrt{t}X\right)\right], \quad (t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}$$

Alors on a

(i)

$$(1.15) \quad u(t+s, x) = \mathbb{E} \left[u(t, x + \sqrt{s}X) \right], \quad s \geq 0$$

(ii) pour tout $T > 0$ il existe des constantes $C, k > 0$ telles que, pour tous $t; s \in [0, T]$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(1.16) \quad |u(t, x) - u(t, y)| \leq C \left(1 + |x|^k + |y|^k \right) |x - y|$$

et

$$(1.17) \quad |u(t, x) - u(t+s, x)| \leq C \left(1 + |x|^k \right) |s|^{\frac{1}{2}}$$

et u est l'unique solution de viscosité continue de l'EDP (1.14) avec les conditions (1.16) et (1.17).

Corollaire 1.1. Si X et \tilde{X} sont $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ -distribuées. Alors $X \stackrel{d}{=} \tilde{X}$. En particulier $X \stackrel{d}{=} -X$.

Démonstration. Pour toute $\varphi \in C_{l;Lip}(\mathbb{R})$ on a pour tout $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathbb{E} \left[\varphi \left(x + \sqrt{t}X \right) \right] \\ \tilde{u}(t, x) &= \mathbb{E} \left[\varphi \left(x + \sqrt{t}\tilde{X} \right) \right] \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.3, u et \tilde{u} sont des solutions de viscosité de G -équation de la chaleur (1.14) avec la condition de Cauchy $u|_{t=0} = \tilde{u}|_{t=0} = \varphi$

Et d'après l'unicité de la solution de viscosité on a $u = \tilde{u}$. En particulier

$$\mathbb{E} [\varphi(X)] = \mathbb{E} [\varphi(\tilde{X})]$$

d'où $X \stackrel{d}{=} \tilde{X}$. ■

Corollaire 1.2. Dans le cas où $\underline{\sigma}^2 = \bar{\sigma}^2 > 0$; $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$ est la distribution normale classique $\mathcal{N}(0, \bar{\sigma}^2)$.

Démonstration. Si $\underline{\sigma}^2 = \overline{\sigma}^2$, la G -équation de la chaleur (1.14) devient l'équation de la chaleur classique

$$\partial_t u - \frac{\overline{\sigma}^2}{2} \partial_{xx}^2 u = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi$$

il est bien connu que sa solution est donnée par

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\overline{\sigma}^2 t}\right) dy$$

ainsi, pour toute φ on a

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = u(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) dy$$

■

Dans les deux cas suivants, on peut calculer $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ comme suit

Si $X \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2])$, alors

i) Pour toute φ convexe, on a:

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) dy$$

ii) Pour toute φ concave, on a:

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\underline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\underline{\sigma}^2}\right) dy$$

En particulier

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[-X] = 0, \quad \mathbb{E}[X^2] = \overline{\sigma}^2, \quad -\mathbb{E}[-X^2] = \underline{\sigma}^2$$

et

$$\mathbb{E}[X^4] = 6\overline{\sigma}^4, \quad -\mathbb{E}[-X^4] = 6\underline{\sigma}^4$$

1.5 Loi des grands nombres, Théorème de la limite centrale

Il est bien connu que la loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale sont des résultats fondamentaux dans la théorie classique en probabilités et statistique, qui expliquent de manière convaincante pourquoi la loi normale est couramment utilisée. Remarquons qu'un théorème et une loi similaires à ces derniers sont établis par Peng [38] dans ce nouveau contexte.

1.5.1 Loi des grands nombres

Sous l'espérance sous linéaire, une loi des grands nombres est obtenue, et la loi limite est appelée « loi maximale » et implique une moyenne incertaine.

Théorème 1.2. (voir [38]) (Loi des grands nombres) Soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite définie dans \mathcal{H} telle que

$$(1.18) \quad \mathbb{E}[X_i^2] = \bar{\sigma}^2, \mathbb{E}[X_i X_{i+j}] = \mathbb{E}[-X_i X_{i+j}] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Avec $\bar{\sigma} \in (0; \infty)$ nombre fixé.

Alors la somme

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

satisfait la loi des grands nombres suivante:

$$(1.19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{S_n}{n} \right\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \frac{S_n}{n} \right|^2 \right] = 0$$

Plus précisément, on a

$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{S_n}{n} \right|^2 \right] \leq \frac{\bar{\sigma}^2}{n}$$

Démonstration. Par un simple calcul, nous avons, en utilisant la proposition 1.1

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left| \frac{S_n}{n} \right|^2 \right] &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E} [S_n^2] \\
 &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E} [S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}X_n + X_n^2] \\
 &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E} [S_{n-1}^2 + X_n^2] \\
 &\leq \frac{1}{n^2} [\mathbb{E}(S_{n-1}^2) + \mathbb{E}(X_n^2)] \\
 \dots &\leq \frac{n}{n^2} \mathbb{E}[X_n^2] = \frac{\bar{\sigma}^2}{n}
 \end{aligned}$$

■

Remarque 1.13. La condition (1.18) peut être facilement étendue à la situation

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [(X_i - \mu)^2] &= \bar{\sigma}^2 \\
 \mathbb{E} [(X_i - \mu)(X_{i+j} - \mu)] &= \mathbb{E} [-(X_i - \mu)(X_{i+j} - \mu)] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Dans ce cas on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right|^2 \right] = 0$$

1.5.2 Théorème de la limite centrale

Peng dans [38] démontre le théorème suivant dit théorème de la limite centrale.

Théorème 1.3. Soit $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite de variables aléatoires d -dimensionnelles, toutes les X_i sont identiquement distribuées. On suppose également que, X_{i+1} est indépendante de (X_1, X_2, \dots, X_i) pour $i = 1, 2, \dots$ Nous supposons en outre que

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[-X_1] = 0, \quad \mathbb{E}[X_1^2] = \bar{\sigma}^2, \quad -\mathbb{E}[-X_1^2] = \underline{\sigma}^2$$

avec $0 < \underline{\sigma} \leq \bar{\sigma} < \infty$. Alors la suite $\{\bar{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\bar{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$$

converge en loi vers une variable aléatoire ξ , $\mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2])$ -distribuée.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\varphi \left(\overline{S}_n \right) \right] = \mathbb{E} [\varphi(\xi)], \quad \forall \varphi \in Lip(\mathbb{R})$$

Remarque 1.14. Dans le cas où $\underline{\sigma}^2 = \overline{\sigma}^2$, on obtient le théorème de la limite centrale classique.

Pour plus de détails concernant la G -espérance et ses applications en finance, nous renvoyons le lecteur aux articles de Artzner et Delbaenl. [1], Chen et Epstein [6], Coquet et al. [9], Ma et Yao [27], Peng [42], [43] et Rosazza [46].

G –MOUVEMENT BROWNIEN ET G –INTÉGRALE STOCHASTIQUE

L'objectif principal de ce chapitre est de rappeler certains résultats préliminaires dans le cadre de la G –espérance qui sont nécessaires dans la suite. Pour une description plus détaillée de ces notions, voir Denis *et al.* [11], Gao [18] et Peng [33].

2.1 G –mouvement Brownien

2.1.1 G – Mouvement Brownien et sa caractérisation

On donne dans cette section les définitions de G –mouvement Brownien unidimensionnel et à d –dimensions avec quelques propriétés importantes.

Définition 2.1. Un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ dans un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ est appelé G –mouvement Brownien si les propriétés suivantes sont satisfaites:

(i) $B_0 = 0$

(ii) Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, l'accroissement $B_{t+s} - B_t$ est $\mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2 s, \bar{\sigma}^2 s])$ -distribué et est indépendant de $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$.

Remarque 2.1. La fonction G définie par

$$G(\alpha) = \frac{1}{2} \mathbb{E} [\alpha B_1^2], \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

est la fonction génératrice qui caractérise le processus $(B_t)_{t \geq 0}$.

Remarque 2.2. Comme le cas d'un mouvement Brownien classique, d'après peng [38] on peut démontrer que si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un G -mouvement Brownien, alors pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda^{-\frac{1}{2}} B_{\lambda t})_{t \geq 0}$ est un G -mouvement Brownien et pour tout $t_0 > 0$, $(B_{t+t_0} - B_{t_0})_{t \geq 0}$ est aussi un G -mouvement Brownien.

Le théorème suivant donne une caractérisation de G -mouvement Brownien.

Théorème 2.1. (voir [5]). Soit $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ un processus défini dans un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ tel que:

(i) $\tilde{B}_0 = 0$.

(ii) Pour tout $t, s \geq 0$, $\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_t$ et \tilde{B}_s sont identiquement distribuées et sont indépendantes de $(\tilde{B}_{t_1}, \dots, \tilde{B}_{t_n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$.

(iii) $\mathbb{E} [\tilde{B}_t] = \mathbb{E} [-\tilde{B}_t] = 0$ et $\lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E} [|\tilde{B}_t|^3] t^{-1} = 0$.

Alors $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ est un $G_{[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]}$ -mouvement Brownien, avec $\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E} [\tilde{B}_1^2]$ et $\underline{\sigma}^2 = -\mathbb{E} [-\tilde{B}_1^2]$.

Définition 2.2. Soit $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ un espace d'espérance sous linéaire. Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit d -dimensionnel, si pour tout $t \geq 0$, X_t est une d -dimensionnelle variable aléatoire.

On donne maintenant la définition de G -mouvement Brownien d -dimensionnel.

Soit $\mathbb{S}(d)$, (resp $\mathbb{S}_+(d)$) l'ensemble des matrices (resp. définies positives) carrées symétriques d'ordre d et soit $G(\cdot) : \mathbb{S}(d) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone et sous linéaire, tel que pour toute $A \in \mathbb{S}(d)$

$$G(A) = \frac{1}{2} \mathbb{E}[(AX, X)]$$

Alors d'après le théorème 1.1, il existe un sous-ensemble $\Gamma \subset \mathbb{S}_+(d)$ fermé, borné et convexe tel que

$$G(A) = \frac{1}{2} \sup_{\delta \in \Gamma} \text{tr}[\delta A]$$

On pose $\Sigma = \{AA^* : A \in \Gamma\}$, où A^* est la matrice transposée de A .

pour plus de détails (voir [33]).

Définition 2.3. Dans un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$, un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ est dit G -normalement distribué, noté $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ si pour toute $\varphi \in C_{b.Lip}(\mathbb{R}^d)$ la fonction u définie par

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[\varphi \left(x + \sqrt{t} X \right) \right], \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$$

est l'unique solution de viscosité de la G -équation de la chaleur suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - G(D^2 u) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

où $D^2 = \partial u^2$ est la matrice Hessienne de u .

Définition 2.4. Un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ à d dimensions défini sur un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ est dit G -mouvement brownien de dimension d si les propriétés suivantes sont satisfaites:

(i) $B_0 = 0$.

(ii) Pour tout $t, s \geq 0$ l'accroissement $B_{t+s} - B_t$ est $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ -distribué et est indépendant de $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t$.

Nous désignerons dans le reste de cette thèse

$$B_t^a = \langle a, B_t \rangle \text{ pour tout } a = (a_1, a_2, \dots, a_d)^T \in \mathbb{R}^d$$

On a alors la proposition suivante:

Proposition 2.1. (voir [33]) Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un G -mouvement Brownien d -dimensionnel sur un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. Alors $(B_t^a)_{t \geq 0}$ est un G_a -mouvement Brownien unidimensionnel, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, avec

$$G_a(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\bar{\sigma}_{aa^T}^2 \alpha^+ - \underline{\sigma}_{aa^T}^2 \alpha^- \right)$$

où

$$\bar{\sigma}_{aa^T}^2 = 2G(aa^T) = \mathbb{E}[\langle a, B_1 \rangle^2]$$

et

$$\underline{\sigma}_{aa^T}^2 = -2G(-aa^T) = -\mathbb{E}[-\langle a, B_1 \rangle^2]$$

En particulier

$$B_{t+s}^a - B_t^a \sim \mathcal{N}(0; [s\underline{\sigma}_{aa^T}^2, s\bar{\sigma}_{aa^T}^2])$$

Proposition 2.2. (voir [33])

(i) Pour toute fonction convexe φ on a

$$\mathbb{E}[\varphi(B_{t+s}^a - B_t^a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \bar{\sigma}_{aa^T}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2s\bar{\sigma}_{aa^T}^2}\right)$$

(ii) Pour tout fonction concave φ et $\underline{\sigma}_{aa^T}^2 > 0$ on a

$$\mathbb{E}[\varphi(B_{t+s}^a - B_t^a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \underline{\sigma}_{aa^T}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2s\underline{\sigma}_{aa^T}^2}\right)$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(B_t^a - B_s^a)^2\right] &= \bar{\sigma}_{aa^T}^2 (t-s) \\ \mathbb{E}\left[(B_t^a - B_s^a)^4\right] &= 3\bar{\sigma}_{aa^T}^4 (t-s)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[- (B_t^a - B_s^a)^2 \right] &= -\underline{\sigma}_{aa}^2 (t-s) \\ \mathbb{E} \left[- (B_t^a - B_s^a)^4 \right] &= -3\underline{\sigma}_{aa}^4 (t-s)^2\end{aligned}$$

2.1.2 Existence de G -mouvement Brownien et d'espérance conditionnelle

On désigne par $C_0^d(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $\omega : \mathbb{R}^d \longleftarrow \mathbb{R}^+$ continues, avec $\omega_0 = 0$, muni de la distance

$$\rho(\omega^1, \omega^2) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \max_{t \in [0, i]} [|\omega_t^1 - \omega_t^2| \wedge 1]$$

Pour tout $T > 0$ fixé, on note

$$\Omega_T = \{\omega_{\wedge T} : \omega \in \Omega\}$$

et on considère le processus canonique $B_t(\omega) = \omega_t$, pour $t \in [0, \infty)$ et $\omega \in \Omega$,

Soit l'espace des variables aléatoires suivant:

$$Lip(\Omega_T) = \left\{ \varphi(B_{t_1 \wedge T}, \dots, B_{t_n \wedge T}) : n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in [0, \infty), \varphi \in C_{l.Lip} \left((\mathbb{R}^d)^n \right) \right\}$$

Il est clair que pour $t \leq T$, $Lip(\Omega_t) \subset Lip(\Omega_T)$.

On pose

$$Lip(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Lip(\Omega_n)$$

Il est clair aussi que $C_{l.Lip} \left((\mathbb{R}^d)^n \right)$, $Lip(\Omega_T)$ et $Lip(\Omega)$ sont des espaces vectoriels.

En outre, notons que si $\varphi, \psi \in C_{l.Lip} \left((\mathbb{R}^d)^n \right)$ alors $\varphi \cdot \psi \in C_{l.Lip} \left((\mathbb{R}^d)^n \right)$, d'où, $X, Y \in Lip(\Omega_T)$ implique $X \cdot Y \in Lip(\Omega_T)$. En particulier, pour tout $t \in [0, \infty)$, $B_t \in Lip(\Omega)$.

Peng [39] a construit une espérance sous linéaire sur $(\Omega, Lip(\Omega))$ telle que le processus canonique $(B_t)_{t \geq 0}$ soit un G -mouvement Brownien de la manière suivante :

soit $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ une suite de vecteurs aléatoires à d dimensions sur un espace d'espérance sous linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ telle que ξ_i est G -normalement distribuée et ξ_{i+1} est indépendante de $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i)$ pour tout $i = 1, 2, \dots$

En suite il a introduit une espérance sous linéaire $\widehat{\mathbb{E}}$ définie sur $Lip(\Omega)$ par la procédure suivante :

Pour tout $X \in Lip(\Omega)$, avec

$$X = \varphi(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$$

pour $\varphi \in C_{l.Lip}(\left(\mathbb{R}^d\right)^n)$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$. On pose

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})] = \mathbb{E}\left[\varphi\left(\sqrt{t_1 - t_0}\xi_1, \dots, \sqrt{t_n - t_{n-1}}\xi_n\right)\right]$$

L'espérance conditionnelle associée à $X = \varphi(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ sous Ω_{t_j} est définie par

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_{t_j}] &= \mathbb{E}[\varphi(B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) | \Omega_{t_j}] \\ &= \psi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \end{aligned}$$

avec

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_j) = \mathbb{E}\left[\varphi\left(x_1, \dots, x_j, \sqrt{t_{j+1} - t_j}\xi_{j+1}, \dots, \sqrt{t_n - t_{n-1}}\xi_n\right)\right]$$

Il est facile de vérifier que $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot]$ définit systématiquement une espérance sous linéaire sur $Lip(\Omega)$ et $(B_t)_{t \geq 0}$ est un G -mouvement brownien. Comme $Lip(\Omega_T) \subset Lip(\Omega)$, $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot]$ est aussi une espérance sous linéaire sur $Lip(\Omega_T)$

On considère ce G -mouvement Brownien canonique $(B_t)_{t \geq 0}$ défini sur $(\Omega, Lip(\Omega), \widehat{\mathbb{E}})$,

Dans la suite, quand nous parlons de G -mouvement Brownien, nous voulons dire que le processus canonique est sous la G -espérance.

Proposition 2.3. (voir [39]). Soit $X, Y \in Lip(\Omega)$, alors les propriétés suivantes sont satisfaites:

(i) Si $X \geq Y$, alors $\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] \geq \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t]$.

(ii) $\widehat{\mathbb{E}}[\eta | \Omega_t] = \eta$, pour tout $t \in [0; \infty)$ et $\eta \in Lip(\Omega_t)$.

(iii) $\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X - Y | \Omega_t]$.

(iv) $\widehat{\mathbb{E}}[\eta X | \Omega_t] = \eta^+ \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] + \eta^- \widehat{\mathbb{E}}[-X | \Omega_t]$, pour tout $\eta \in Lip(\Omega_t)$.

(v) $\widehat{\mathbb{E}}[\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] | \Omega_s] = \widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_{t \wedge s}]$, en particulier $\widehat{\mathbb{E}}[\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t]] = \widehat{\mathbb{E}}[X]$. Pour tout $X \in Lip(\Omega^t)$, $\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] = \widehat{\mathbb{E}}[X]$, avec $Lip(\Omega^t)$ est l'espace linéaire de variables aléatoires de la forme

$$\varphi(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_{n+1}} - B_{t_n})$$

$n = 1, 2, \dots$, $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^d)^n$ et $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1} \in [t, \infty)$.

Remarque 2.3. (ii) et (iii) impliquent

$$\mathbb{E}[X + \eta | \Omega_t] = \mathbb{E}[X | \Omega_t] + \eta, \text{ pour tout } \eta \in Lip(\Omega_t)$$

Notons par $L_G^p(\Omega)$, $p \geq 1$, la complétion de $Lip(\Omega)$ sous la norme $\|X\|_p = (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$.

De même nous pouvons définir les complétions $L_G^p(\Omega_T)$, $L_G^p(\Omega_T^t)$, et $L_G^p(\Omega^t)$ de $Lip(\Omega_T)$, $Lip(\Omega_T^t)$ et $Lip(\Omega^t)$ respectivement.

Il est clair que $L_G^p(\Omega_t) \subset L_G^p(\Omega_T) \subset L_G^p(\Omega)$.

D'après Peng [33], on peut étendre $\widehat{\mathbb{E}}$ à une espérance sous linéaire sur $(\Omega, L_G^1(\Omega))$ qu'on notera encore par $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot]$. Considérons maintenant l'extension de l'espérance conditionnelle. Pour tout $t \leq T$ fixé, l'espérance conditionnelle $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot | \Omega_t] : L_G^p(\Omega_T) \rightarrow L_G^p(\Omega_t)$ est une application continue sous $\|\cdot\|_p$.

En effet, nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t] \leq \widehat{\mathbb{E}}[X - Y | \Omega_t]$$

D'où

$$|\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t]| \leq \widehat{\mathbb{E}}[|X - Y| | \Omega_t]$$

Nous obtenons ainsi

$$\|\widehat{\mathbb{E}}[X | \Omega_t] - \widehat{\mathbb{E}}[Y | \Omega_t]\|_p \leq \|X - Y\|_p$$

Nous donnons la définition suivante similaire à la définition classique:

Définition 2.5. Un vecteur aléatoire n -dimensionnel $Y \in (L_G^1(\Omega))^n$ est dit indépendant de Ω_t pour un certain t donné, si pour tout $\varphi \in C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$ nous avons

$$\mathbb{E}[\varphi(Y) | \Omega_t] = \mathbb{E}[\varphi(Y)]$$

Remarque 2.4. Tout comme dans le cas classique, les accroissements $(B_{t+s} - B_t)_{s \geq 0}$ de G -mouvement Brownien sont indépendants de Ω_t .

La propriété suivante est très utile dans le G -calcul stochastique.

Proposition 2.4. Soit $X, Y \in L_G^1(\Omega)$, tel que $E[Y | \Omega_t] = -E[-Y | \Omega_t]$, pour tout $t \in [0, T]$. Alors nous avons

$$\mathbb{E}[|X + Y| | \Omega_t] = \mathbb{E}[X | \Omega_t] + \mathbb{E}[Y | \Omega_t]$$

En particulier, si $E[Y | \Omega_t] = E[-Y | \Omega_t] = 0$, alors $E[|X + Y| | \Omega_t] = \mathbb{E}[X | \Omega_t]$.

Démonstration. Cela résulte des deux inégalités suivantes:

$$\mathbb{E}[|X + Y| | \Omega_t] \leq \mathbb{E}[X | \Omega_t] + \mathbb{E}[Y | \Omega_t]$$

$$\mathbb{E}[|X + Y| | \Omega_t] \geq \mathbb{E}[X | \Omega_t] - \mathbb{E}[Y | \Omega_t] = \mathbb{E}[X | \Omega_t] + \mathbb{E}[Y | \Omega_t]$$

■

Définition 2.6. Un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est dit G -martingale (respectivement G -sur-martingale, G -sous-martingale). si pour tout $s \in [0, t]$, nous avons $\mathbb{E}[M_t | \Omega_s] = M_s$, (respectivement $\leq M_s$, $\geq M_s$).

Exemple 2.1. • $(B_t)_{t \geq 0}$ et $(-B_t)_{t \geq 0}$ sont des G -martingales.

- $(B_t^2)_{t \geq 0}$ est une G -sous martingale.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t^2 | \Omega_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 + B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) | \Omega_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] + B_s^2 = t - s + B_s^2 \geq B_s^2 \end{aligned}$$

2.2 G -Capacité

2.2.1 Capacité associée à P

Soit Ω un espace métrique séparable complet muni d'une distance d , $\mathcal{B}(\Omega)$ la tribu de Borel de Ω et \mathcal{M} la famille de toutes les mesures de probabilité sur (Ω, \mathcal{B}) .

- $L^0(\Omega)$: l'espace de fonctions réelles $\mathcal{B}(\Omega)$ - mesurables;
- $\mathcal{B}_b(\Omega)$: l'espace de fonctions bornées dans $L^0(\Omega)$;
- $C_b(\Omega)$: l'espace de fonctions continues et bornées dans $\mathcal{B}_b(\Omega)$.

Nous considérons un sous ensemble donné $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$.

On note

$$c(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega)$$

On peut vérifier le théorème suivant:

Théorème 2.2. (Voir [7], [10]) L'ensemble de fonctions $c(\cdot)$ est une capacité de Choquet, i.é.

(i) $0 \leq c(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$.

(ii) Si $A \subset B$, alors $c(A) \leq c(B)$.

(iii) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite dans $B(\Omega)$, alors $c\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n)$.

(iv) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante dans $B(\Omega)$: $A_n \uparrow A = \cup A_n$, alors $c(\cup A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(A_n)$.

Nous utilisons le vocabulaire standard lié à la capacité dans les définitions suivantes:

Définition 2.7. Un ensemble $A \in B(\Omega)$ est dit polaire si $c(A) = 0$.

En d'autres termes, $A \in B(\Omega)$ est polaire si et seulement si $P(A) = 0$, pour tout $P \in \mathcal{P}$.

Définition 2.8. On dit qu'une propriété est vraie quasi-sûrement ($q.s.$) si elle est vraie en dehors d'un ensemble polaire.

Définition 2.9. Un processus X est dit quasi-continue ($q.c.$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble ouvert $O \subset \Omega$, avec $c(O) < \varepsilon$ tel que X est continue en ω de O^c .

Définition 2.10. On dit qu'un processus X a une version $q.c.$ s'il existe un processus $q.c.$ Y tel que $X = Y, q.s.$

2.2.2 G -Capacité

Les notions concernant la capacité classique restent valables pour la G -capacité.

Dans le cadre de la G -espérance, Denis et al dans [11] ont été prouver que pour tout $p \geq 1$, l'espace de fonctions $L_G^p(\Omega_T)$ a la représentation suivante:

$$L_G^p(\Omega_T) = \left\{ X \in L^0(\Omega_T) : X \text{ a une version } q.c. \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X|^p] \mathbf{1}_{|X| > N} = 0 \right\}$$

Contrairement au cadre classique, le théorème de convergence monotone vers le bas ne vaut que pour une suite de variables aléatoires d'un sous ensemble de $L^0(\Omega_T)$, (voir Théorème 31 dans Denis et al. [11]).

Définition 2.11. La fonctionnelle $\mathbb{E}[\cdot]$ est dite régulière si pour toute $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ dans $C_b(\Omega)$ tel que $X_n \downarrow X$ sur Ω , nous avons $\mathbb{E}[X_n] \downarrow \mathbb{E}[X]$.

Théorème 2.3. (voir [39]). $\mathbb{E}[\cdot]$ est régulière si et seulement si \mathcal{P} est relativement compact.

Théorème 2.4. (voir [33]). Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_G^1(\Omega_T)$, tel que $X_n \downarrow X$, q.s, alors $E[X_n] \downarrow E[X]$.

2.3 G -calcul stochastique

2.3.1 Intégrale d'Itô par rapport au G -mouvement Brownien

Peng défini dans [33] les intégrales d'Itô par rapport au G -mouvement Brownien:

Soit une partition de $[0, T]$, $\pi_{[0, T]}^N = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ telle que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N$,

dont le pas

$$\mu\left(\pi_{[0, T]}^N\right) = \max_{k=0, 1, \dots, N} |t_{k+1} - t_k| \text{ tend vers } 0$$

Pour tout $p \geq 1$, on définit

$$M_G^{p,0}(0, T) = \left\{ \eta_t = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k \mathbf{1}_{[t_{k+1}; t_k]} : \xi_k \in L_G^p(\Omega_{t_k}) \right\}$$

et on dénote par $M_G^p(0, T)$ le complétion de $M_G^{p,0}(0, T)$ sous la norme

$$\|\eta\|_{M_G^p(0, T)} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}[|\eta_t|^p] dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Il est clair que $M_G^p(0, T) \supset M_G^q(0, T)$ pour $1 \leq p \leq q$. On notera également $M_G^p(0, T; \mathbb{R}^n)$ pour tout les processus stochastiques n -dimensionnels,

$$\eta_t = (\eta_t^1, \eta_t^2, \dots, \eta_t^n) \quad t \geq 0 \text{ avec } \eta_t^i \in M_G^p(0; T), \quad i = 1, 2, \dots$$

Définition 2.12. Pour $\eta \in M_G^{p,0}(0, T)$ avec $\eta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(\omega) 1_{[t_k, t_{k+1}]}(t)$, l'intégrale de Bochner est définie par

$$\int_0^T \eta_t(\omega) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(\omega)(t_{k+1} - t_k)$$

Pour $\eta \in M_G^p(0; T)$, On pose

$$\tilde{\mathbb{E}}_T[|\eta|] = \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta_t dt \right] = \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(\omega)(t_{k+1} - t_k) \right]$$

On peut vérifier que $\tilde{\mathbb{E}}_T : M_G^p(0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une espérance sous linéaire. Nous pouvons introduire une norme naturelle $\|\eta\|_{M_G^p(0, T)}$, sous le quelle, $M_G^{p,0}(0, T)$ peut être étendue à $M_G^p(0, T)$ qui est un espace de Banach.

Remarque 2.5. De la définition précédente, on déduit que si η est un élément de $M_G^p(0, T)$, alors il existe une suite de processus $\{\eta^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $M_G^{p,0}(0, T)$, tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \mathbb{E}[|\eta_t^n - \eta_t|^p] dt \longrightarrow 0$$

On observe que presque pour tout $t \in [0; T]$,

$$\{\eta^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_G^p(\Omega_t) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[|\eta_t^n - \eta_t|^p] \longrightarrow 0$$

donc η_t est un élément de $L_G^p(\Omega_t)$.

On donne maintenant la définition de la G -intégrale d'Itô. Pour la simplicité, on introduit d'abord L'intégrale d'Itô par rapport au G -mouvement Brownien unidimensionnel.

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un G -mouvement Brownien à 1 dimension avec $G(\alpha) = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^2 \alpha^+ - \underline{\sigma}^2 \alpha^-)$, où $0 \leq \underline{\sigma} \leq \bar{\sigma} < \infty$.

Définition 2.13. Pour tout $\eta \in M_G^{2,0}(0, T)$, on définit l'intégrale stochastique par

$$\mathcal{I}(\eta) = \int_0^T \eta_s dB_s = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

Alors L'application

$$\mathcal{I} : M_G^{2,0}(0, T) \longrightarrow L_G^2(\Omega_T)$$

est une application continue et linéaire, se prolongée par continuité de manière unique à

$$\mathcal{I}_{[0, T]} : M_G^2(0, T) \longrightarrow L_G^2(\Omega_T)$$

$$\int_0^T \eta_s dB_s = \mathcal{I}_{[0, T]}(\eta)$$

Lemme 2.1. Pour tout $\eta \in M_G^2(0, T)$, nous avons

$$(2.1) \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta_t dB_t \right] = 0$$

$$(2.2) \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] \leq \bar{\sigma}^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta_t^2 dt \right]$$

Démonstration. D'après Peng, l'exemple 2.10, dans [33] nous avons pour $j = 1, 2, \dots$

$$\mathbb{E} [\xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \Omega_{t_j}] = \mathbb{E} [-\xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) | \Omega_{t_j}] = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta_t dB_t \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t + \xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t + \mathbb{E} [\xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) | \Omega_{t_{N-1}}] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t \right] \end{aligned}$$

En suite, on peut répéter cette procédure pour obtenir (2.1).

On donne maintenant la démonstration de (2.2). D'après l'exemple 2.10 dans [33], nous avons

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t + \xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t \right)^2 + \xi_{N-1}^2 (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})^2 + 2 \left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t \right) \xi_{N-1} (B_{t_N} - B_{t_{N-1}}) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t \right)^2 + \xi_{N-1}^2 (B_{t_N} - B_{t_{N-1}})^2 \right] \\
 &\quad \vdots \\
 &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right]
 \end{aligned}$$

Alors, pour tout $i = 0, 1, \dots, N-1$, on a

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \mid \Omega_{t_i} \right] \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) - \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] = 0
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] \\
 &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - \sum_{i=0}^{N-1} \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \bar{\sigma}^2 \xi_i^2 (t_{i+1} - t_i) \right] = \bar{\sigma}^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta_t^2 dt \right]
 \end{aligned}$$

■

Définition 2.14. Nous définissons, pour $\eta \in M_G^2(0, T)$ fixé, l'intégrale stochastique par rapport au G -mouvement Brownien par:

$$\mathcal{I}(\eta) = \int_0^T \eta_s dB_s$$

On donne quelques propriétés principales de l'intégrale d'Itô par rapport au G -mouvement Brownien

Proposition 2.5. (voir [33]) Soit $\eta, \theta \in M_G^2([0, T])$ et soit $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$. Alors, nous avons:

- (i) $\int_s^t \eta_u dB_u = \int_s^r \eta_u dB_u + \int_r^t \eta_u dB_u$.
- (ii) $\int_s^t (\alpha \eta_u + \theta_u) dB_u = \alpha \int_s^t \eta_u dB_u + \int_s^t \theta_u dB_u$.
- (iii) $\mathbb{E} \left[X + \int_r^T \eta_u dB_u \mid \Omega_s \right] = \mathbb{E}[X \mid \Omega_s]$, pour $X \in L_G^1(\Omega_s)$.

2.3.2 Variation quadratique de G -mouvement Brownien

On considère d'abord le processus de variation quadratique du G -mouvement Brownien unidimensionnel $(B_t)_{t \geq 0}$ avec $B_t \sim \mathcal{N}(0; [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$. Soit $\pi_t^N, N = 1, 2, \dots$ la suite de partition de $[0, t]$, dont le pas tend vers 0. Alors on a

$$\begin{aligned} B_t^2 &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(B_{t_{j+1}^N}^2 - B_{t_j^N}^2 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} 2B_{t_j^N} (B_{t_{j+1}^N} - B_{t_j^N}) + \sum_{j=0}^{N-1} (B_{t_{j+1}^N} - B_{t_j^N})^2 \end{aligned}$$

Comme $\mu(\pi_t^N) \rightarrow 0$, le premier terme du côté droit converge vers $2 \int_0^t B_s dB_s$ dans $L_G^p(\Omega)$.

Le second terme doit être convergent. On dénote sa limite par $\langle B \rangle_t$, i.e :

$$(2.3) \quad \langle B \rangle_t = \lim_{\mu(\pi_{[0,t]}^N) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} (B_{t_{j+1}^N} - B_{t_j^N})^2 = B_t^2 - 2 \int_0^t B_s dB_s$$

Par la construction ci-dessus, $(\langle B \rangle_t)_{t \geq 0}$ est un processus croissant avec $\langle B \rangle_0 = 0$. Ce processus est appelé processus de variation quadratique de G -mouvement Brownien B .

Il caractérise la partie de l'incertitude statistique de G -mouvement Brownien.

Contrairement à la théorie classique, le processus de variation quadratique de G -mouvement Brownien $\langle B \rangle_t$ n'est pas toujours un processus déterministe, *sauf si* $\bar{\sigma} = \underline{\sigma}$, c'est-à-dire, lorsque $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien classique. En fait, on donne le lemme suivant.

Lemme 2.2. *Pour tout $0 \leq s \leq t < \infty$, nous avons:*

$$(2.4) \quad \mathbb{E}[\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s \mid \Omega_s] = \bar{\sigma}^2(t-s)$$

$$(2.5) \quad \mathbb{E}[-(\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s) \mid \Omega_s] = -\underline{\sigma}^2(t-s)$$

Démonstration. D'après la définition de $\langle B \rangle$ et (iii) de la proposition 2.5, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s \mid \Omega_s] &= \mathbb{E}\left[B_t^2 - B_s^2 - 2 \int_s^t B_u dB_u \mid \Omega_s\right] \\ &= \mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 \mid \Omega_s] = \bar{\sigma}^2(t-s) \end{aligned}$$

La dernière égalité découle de l'exemple 2.11 dans [33] nous avons alors (2.4).

L'égalité (2.5) peut être prouvée de manière analogue à (2.4). ■

Le lemme suivant exprime la stationnarité des accroissements de processus $(\langle B \rangle_t)_{t \geq 0}$ et l'indépendance par rapport au passé.

Lemme 2.3. *Pour tous $s, t \geq 0$ fixés, la variable aléatoire $\langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s$ est indépendante de Ω_s et est identiquement distribuée que $\langle B \rangle_t$.*

Démonstration. Découle directement de la remarque suivante:

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_{t+s} - \langle B \rangle_s &= B_{t+s}^2 - 2 \int_0^{t+s} B_r dB_r - \left[B_s^2 - 2 \int_0^s B_r dB_r \right] \\ &= (B_{t+s} - B_s)^2 - 2 \int_0^{t+s} (B_r - B_s) d(B_r - B_s) \\ &= \langle B^s \rangle_t \end{aligned}$$

où $\langle B^s \rangle$ est le processus de variation quadratique de G -mouvement Brownien

$$B_t^s = B_{t+s} - B_s, \quad t \geq 0$$

■

Nous définissons maintenant l'intégrale d'un processus $\eta \in M_G^1(0, T)$ par rapport à $\langle B \rangle$. Soit l'application $Q_{[0, T]} : M_G^{1, 0} \rightarrow L_G(\Omega_T)$ définie par:

$$Q_{[0, T]}(\eta) = \int_0^T \eta_t d\langle B \rangle_t = \sum_{j=1}^{N-1} \xi_j \left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right)$$

Lemme 2.4. Pour tout $\eta \in M_G^1(0, T)$, on a

$$(2.6) \quad \mathbb{E} \left[|Q_{[0, T]}(\eta)| \right] \leq \bar{\sigma}^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T |\eta_t| dt \right]$$

Comme $Q_{[0, T]} : M_G^{1, 0}(0, T) \rightarrow L_G^1(\Omega_T)$ est une application continue et linéaire, alors $Q_{[0, T]}$ peut être étendue de manière unique à $M_G^1(0, T)$. que noterons encore par:

$$\int_0^T \eta_t d\langle B \rangle_t = Q_{[0, T]}(\eta), \quad \text{pour } \eta \in M_G^1([0, T])$$

et on a

$$(2.7) \quad \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \eta_t d\langle B \rangle_t \right| \right] \leq \bar{\sigma}^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T |\eta_t| dt \right]$$

Démonstration. Pour tout $j = 1, 2, \dots, N-1$, nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[|\xi_j| \left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) - \bar{\sigma}^2 |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[|\xi_j| \left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) \middle| \Omega_{t_j} - \bar{\sigma}^2 |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[|\xi_j| \bar{\sigma}^2 (t_{j+1} - t_j) - \bar{\sigma}^2 |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] = 0 \end{aligned}$$

Il s'en suit que:

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) \right| \right] \leq \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j| \left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j| \left[\left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) - \bar{\sigma}^2 (t_{j+1} - t_j) \right] \right] + \mathbb{E} \left[\bar{\sigma}^2 \sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] \\
 &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E} \left[|\xi_j| \left[\left(\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j} \right) - \bar{\sigma}^2 (t_{j+1} - t_j) \right] \right] + \mathbb{E} \left[\bar{\sigma}^2 \sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\bar{\sigma}^2 \sum_{j=0}^{N-1} |\xi_j| (t_{j+1} - t_j) \right] \\
 &= \bar{\sigma}^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T |\eta_t| dt \right]
 \end{aligned}$$

■

Proposition 2.6. Soit $0 \leq s \leq t$, $\xi \in L^2(\Omega_s)$, $X \in L^2(\Omega_s)$. Alors on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [X + \xi (B_t^2 - B_s^2)] &= \mathbb{E} [X + \xi (B_t - B_s)^2] \\
 &= \mathbb{E} [X + \xi (\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)]
 \end{aligned}$$

Démonstration. D'après (2,3) et (iii) de la proposition 2.5, nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [X + \xi (B_t^2 - B_s^2)] &= \mathbb{E} \left[X + \xi (\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s) - 2 \int_s^t B_u dB_u \right] \\
 &= \mathbb{E} [X + \xi (\langle B \rangle_t - \langle B \rangle_s)]
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [X + \xi (B_t^2 - B_s^2)] &= \mathbb{E} [X + \xi (B_t - B_s)^2 + 2(B_t - B_s)B_s] \\
 &= \mathbb{E} [X + \xi (B_t - B_s)^2]
 \end{aligned}$$

■

Nous avons l'isométrie suivante:

Proposition 2.7. Soit $\eta \in M_G^2(0, T)$. Alors

$$(2.8) \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta_t^2 d\langle B \rangle_t \right]$$

Démonstration. Nous considérons d'abord $\eta \in M_G^{2,0}(0, T)$ tel que

$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

et alors

$$\int_0^T \eta_t dB_t = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

De la proposition 2.5, on obtient

$$\mathbb{E}[X + 2\xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = \mathbb{E}[X] \quad \text{pour } X \in L_G^1(\Omega), \quad i \neq j$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j^2 (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

et en utilisant la proposition 2.6, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j^2 (\langle B \rangle_{t_{j+1}} - \langle B \rangle_{t_j}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta_t^2 d \langle B \rangle_t \right] \end{aligned}$$

d'où (2.8) pour $\eta \in M_G^{2,0}(0, T)$, et par passage à la limite on obtient (2.8) pour $\eta \in M_G^2(0, T)$. ■

On considère maintenant le cas multidimensionnel. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un G -Mouvement Brownien d -dimensionnel. Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ fixé, $(B_t^a)_{t \geq 0}$, on a

$$\langle B^a \rangle_t = (B_t^a)^2 - 2 \int_0^t B_s^a dB_s^a$$

Les résultats précédents restent valables pour $\langle B^a \rangle$. En particulier,

$$(2.9) \quad \mathbb{E} \left[\left| \int_0^T \eta_t d \langle B^a \rangle_t \right| \right] \leq \bar{\sigma}_{aa^T} \mathbb{E} \left[\int_0^T |\eta_t| dt \right], \quad \text{pour } \eta \in M_G^1(0, T)$$

et

$$(2.10) \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t^a \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T \eta_t^2 d \langle B^a \rangle_t \right], \text{ pour } \eta \in M_G^2(0, T)$$

Pour $a, \bar{a} \in \mathbb{R}^d$, on définit le processus de variation mutuelle par

$$\begin{aligned} \langle B^a, B^{\bar{a}} \rangle_t &= \frac{1}{4} \left[\langle B^a + B^{\bar{a}} \rangle_t - \langle B^a - B^{\bar{a}} \rangle_t \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\langle B^{a+\bar{a}} \rangle_t - \langle B^{a-\bar{a}} \rangle_t \right] \end{aligned}$$

Comme $\langle B^{a-\bar{a}} \rangle = \langle B^{\bar{a}-a} \rangle = \langle -B^{a-\bar{a}} \rangle$, alors on a $\langle B^a, B^{\bar{a}} \rangle_t = \langle B^{\bar{a}}, B^a \rangle_t$. En particulier, nous avons $\langle B^a, B^a \rangle = \langle B^a \rangle$. Soit (π_t^N) une suite de subdivision de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0. Observons que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(B_{t_{k+1}^N}^a - B_{t_k^N}^a \right) \left(B_{t_{k+1}^N}^{\bar{a}} - B_{t_k^N}^{\bar{a}} \right) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\left(B_{t_{k+1}^N}^{a+\bar{a}} - B_{t_k^N}^{a+\bar{a}} \right)^2 - \left(B_{t_{k+1}^N}^{a-\bar{a}} - B_{t_k^N}^{a-\bar{a}} \right)^2 \right]$$

Ainsi, comme $\mu(\pi_t^N) \rightarrow 0$, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \left(B_{t_{k+1}^N}^a - B_{t_k^N}^a \right) \left(B_{t_{k+1}^N}^{\bar{a}} - B_{t_k^N}^{\bar{a}} \right) = \langle B^a, B^{\bar{a}} \rangle_t$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \langle B^a, B^{\bar{a}} \rangle_t &= \frac{1}{4} \left[\langle B^{a+\bar{a}} \rangle_t - \langle B^{a-\bar{a}} \rangle_t \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(B^{a+\bar{a}} \right)^2 - 2 \int_0^t B_s^{a+\bar{a}} dB_s^{a+\bar{a}} - \left(B^{a-\bar{a}} \right)^2 + 2 \int_0^t B_s^{a-\bar{a}} dB_s^{a-\bar{a}} \right] \\ &= B_t^a B_t^{\bar{a}} - \int_0^t B_s^a dB_s^{\bar{a}} - \int_0^t B_s^{\bar{a}} dB_s^a \end{aligned}$$

Maintenant pour tout $\eta \in M_G^1(0, T)$, nous pouvons définir

$$\int_0^T \eta_t d \langle B^a, B^{\bar{a}} \rangle_t = \frac{1}{4} \int_0^T \eta_t d \langle B^{a+\bar{a}} \rangle_t - \frac{1}{4} \int_0^T \eta_t d \langle B^{a-\bar{a}} \rangle_t$$

Lemme 2.5. (voir [33]) Soit $\eta_t^N \in M_G^{2,0}(0, T)$, $N = 1, 2, \dots$, tel que

$$\eta_t^N(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k^N(\omega) \mathbf{1}_{[t_k^N, t_{k+1}^N]}(t)$$

avec $\mu(\pi_T^N) \rightarrow 0$ et $\eta_t^N \rightarrow \eta_t$ dans $M_G^2(0, T)$, quand $N \rightarrow \infty$. Alors, nous avons la convergence suivante dans $L_G^2(\Omega)$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \xi_k^N \left(B_{t_{k+1}^N}^a - B_{t_k^N}^a \right) \left(B_{t_{k+1}^N}^{\bar{a}} - B_{t_k^N}^{\bar{a}} \right) \rightarrow \int_0^T \eta_t d \langle B^a, B^{\bar{a}} \rangle_t$$

Proposition 2.8. (voir [33]) Pour tout $\eta \in M_G^2(0, T)$, nous avons

$$(2.11) \quad \underline{\sigma}^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T |\eta_t| dt \right] \leq \mathbb{E} \left[\int_0^T |\eta_t| d \langle B \rangle_t \right] \leq \bar{\sigma}^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T |\eta_t| dt \right]$$

avec $\bar{\sigma}^2 = \mathbb{E}[B_1^2]$ et $\underline{\sigma}^2 = -\mathbb{E}[-B_1^2]$.

Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy *BDG* jouent un rôle très important dans l'étude des équations différentielles G -stochastiques, (voir [18]).

Lemme 2.6. Soient $p \geq 1$, $\eta \in M_G^p(0, T)$ et $0 \leq s \leq t \leq T$. Alors nous avons

$$(2.12) \quad \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u \eta_r d \langle B \rangle_r \right|^p \right] \leq C_1 (t-s)^{p-1} \int_s^t \mathbb{E} [|\eta_u|^p] du$$

où C_1 est une constante indépendante de η .

Lemme 2.7. Soient $p \geq 1$, $\eta \in M_G^p(0, T)$ et $0 \leq s \leq t \leq T$. Alors nous avons

$$(2.13) \quad \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u \eta_r dB_r \right|^p \right] \leq C_2 |t-s|^{\frac{p}{2}-1} \int_s^t \mathbb{E} [|\eta_u|^p] du$$

où C_2 est une constante indépendante de η .

2.3.3 G -formule d'Itô

Dans cette partie, on donne la G -formule d'Itô pour un " G -processus d'Itô" X . Pour plus de simplicité, nous considérons le cas où la fonction Φ est suffisamment régulière.

Définition 2.15. On appelle G -processus d'Itô unidimensionnel tout processus de la forme.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \eta_s d \langle B \rangle_s + \int_0^t \beta_s dB_s, \quad t \in [0, T]$$

où $X_0 \in L_G^2(\Omega_T)$ et α, β et η sont des processus bornés dans $M_G^2(0, T)$.

Théorème 2.5. (voir [38]) (G -formule d'Itô) Soient $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ avec $\partial_{x^\nu} \Phi$, $\partial_{x^\mu x^\nu}^2 \Phi \in C_{b.Lip}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$. $s \in [0, T]$ fixé et soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ un processus de dimension n sur $[0, T]$ de la forme

$$X_t^\nu = X_0^\nu + \int_0^t \alpha_s^\nu ds + \int_0^t \eta_s^\nu d\langle B \rangle_s + \int_0^t \beta_s^\nu dB_s, \quad t \in [0, T], \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

avec $\nu = 1, 2, \dots, n$ et $i, j = 1, 2, \dots, d$, $\alpha^\nu, \eta^\nu, \beta^\nu$ sont des éléments bornés de $M_G^2(0, T)$.

Alors on a

$$(2.14) \quad \Phi(X_t) = \Phi(X_s) + \sum_{\nu=1}^n \left(\int_s^t \partial_{x^\nu} \Phi(X_u) \beta^\nu dB_u + \int_s^t \partial_{x^\nu} \Phi(X_u) \alpha^\nu du \right)$$

Si \mathbb{E} est une espérance linéaire, alors on retrouve la formule d'Itô classique.

**SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
STOCHASTIQUES GOUVERNÉES PAR UN G -MOUVEMENT
BROWNIEN**

Les résultats de ce chapitre constituent l'essentiel de notre travail. On s'intéresse dans ce chapitre, à l'existence et à l'unicité de la solution de système d'équations différentielles stochastiques gouvernées par un G -mouvement Brownien suivant:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_t = X_0 + \int_0^t f_1(s, X_s, Y_s) ds + \\ \quad + \int_0^t f_2(s, X_s, Y_s) d\langle B \rangle_s + \int_0^t f_3(s, X_s, Y_s) dB_s \\ Y_t = Y_0 + \int_0^t g_1(s, X_s, Y_s) ds + \\ \quad + \int_0^t g_2(s, X_s, Y_s) d\langle B \rangle_s + \int_0^t g_3(s, X_s, Y_s) dB_s \end{array} \right.$$

où $(X_0, Y_0) \in M_G^2(0, T) \times M_G^2(0, T)$ est une condition initiale donnée, $(\langle B_t \rangle)_{t \geq 0}$ est le processus de variation quadratique de G -mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$, Les coefficients $f_i(t, x, y)$, $g_i(t, x, y) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, 3$. satisfont les conditions de Lip-

schitz et de croissance linéaire en (x, y) , dans le cas où les constantes dépendent du temps.

3.1 Schéma d'approximation de Caratheodory

Le schéma d'approximation de Caratheodory de (3.1) est donné comme suit:

Pour tout entier $k \geq 1$; nous définissons

$$X_t^k = X_0, \quad Y_t^k = Y_0, \quad \text{pour } t \in (-1, 0]$$

et pour $t \in [0, T]$

$$(3.2) \quad \begin{cases} X_t^k = X_0 + \int_0^t f_1\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) ds + \\ \quad + \int_0^t f_2\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) d\langle B \rangle_s + \int_0^t f_3\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) dB_s \\ Y_t^k = Y_0 + \int_0^t g_1\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) ds + \\ \quad + \int_0^t g_2\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) d\langle B \rangle_s + \int_0^t g_3\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) dB_s \end{cases}$$

Notons que (X_t^k, Y_t^k) peut être calculer étape par étape sur les domaines $[0, \frac{1}{k})$, $[\frac{1}{k}, \frac{2}{k})$, ...

Avec la procédure indiquée ci-dessous. Nous avons, pour $t \in [0, \frac{1}{k})$

$$\begin{cases} X_t^k = X_0 + \int_0^t f_1(s, X_0, Y_0) ds + \int_0^t f_2(s, X_0, Y_0) d\langle B \rangle_s + \int_0^t f_3(s, X_0, Y_0) dB_s \\ Y_t^k = Y_0 + \int_0^t g_1(s, X_0, Y_0) ds + \int_0^t g_2(s, Y_0, Y_0) d\langle B \rangle_s + \int_0^t g_3(s, X_0, Y_0) dB_s \end{cases}$$

alors pour $t \in [\frac{1}{k}, \frac{2}{k})$,

$$\begin{cases} X_t^k = X_{\frac{1}{k}}^k + \int_{\frac{1}{k}}^t f_1\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) ds \\ \quad + \int_{\frac{1}{k}}^t f_2\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) d\langle B \rangle_s + \int_{\frac{1}{k}}^t f_3\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) dB_s \\ Y_t^k = Y_{\frac{1}{k}}^k + \int_{\frac{1}{k}}^t g_1\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) ds \\ \quad + \int_{\frac{1}{k}}^t g_2\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) d\langle B \rangle_s + \int_{\frac{1}{k}}^t g_3\left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k\right) dB_s \end{cases}$$

... etc.

Dans toute la suite nous faisons les hypothèses suivantes:

Pour $h = f_i, g_i$, respectivement, $i = 1, 2, 3$,

$$(H_1) \quad |h(t, x, y)|^2 \leq \varphi(t)(1 + |x|^2 + |y|^2)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [0, T]$, où φ est une fonction positive et continue sur $[0, T]$.

$$(H_2) \quad |h(t, x_2, y_2) - h(t, x_1, y_1)|^2 \leq \psi(t)(|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2)$$

pour tous $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [0, T]$, où ψ est une fonction positive et continue sur $[0, T]$.

D'après les définitions de X_t^k , et Y_t^k , les inégalités de *BDG* (2.12), (2.13) et les hypothèses ci-dessus, il est facile de voir que pour tout entier $k \geq 1$, la suite (X_t^k, Y_t^k) est bien définie en $M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d)$.

Dans ce qui suit, on considère l'espace de processus à valeurs dans $M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ muni de la norme

$$\|(X, Y)\| = \mathbb{E}^{\frac{1}{2}} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} (|X_t|^2 + |Y_t|^2) \right]$$

Notons que cet espace est un espace de Banach.

3.2 Existence et unicité de la solution de *SGEDS*

Les deux lemmes suivants sont très importants, il seront utilisés dans les résultats à suivre.

Lemme 3.1. *Pour tout entier $k \geq 1$ et $0 \leq s \leq t \leq T$, on a*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| X_t^k \right|^2 + \left| Y_t^k \right|^2 \right] \leq K \exp \left(C \int_0^T \varphi(t) dt \right)$$

où

$$K = 1 + 4 (\mathbb{E} [|X_0|^2 + |Y_0|^2])$$

et C est une constante qui ne dépend que de C_1 , C_2 et T , où C_1 et C_2 sont les constantes qui apparaissent dans les inégalités de BDG.

Démonstration. En utilisant la formule (3.2) et le fait que $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$ pour toutes constantes positives a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, on a pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \left| X_t^k \right|^2 &\leq 4|X_0|^2 + 4 \left| \int_0^t f_1 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) ds \right|^2 \\ &\quad + 4 \left| \int_0^t f_2 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) d\langle B \rangle_s \right|^2 + 4 \left| \int_0^t f_3 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) dB_s \right|^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left| Y_t^k \right|^2 &\leq 4|Y_0|^2 + 4 \left| \int_0^t g_1 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) ds \right|^2 \\ &\quad + 4 \left| \int_0^t g_2 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) d\langle B \rangle_s \right|^2 + 4 \left| \int_0^t g_3 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) dB_s \right|^2 \end{aligned}$$

d'où, en utilisant les inégalités de BDG (2.12), (2.13) et la G -inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| X_t^k \right|^2 \right] &\leq 4\mathbb{E} [|X_0|^2] + 4T \int_0^t \mathbb{E} \left| f_1 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) \right|^2 ds \\ &\quad + 4C_1 T \int_0^t \mathbb{E} \left| f_2 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) \right|^2 ds \\ &\quad + 4C_2 \int_0^t \mathbb{E} \left| f_3 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) \right|^2 ds \end{aligned}$$

Il résulte de la condition de croissance linéaire H_1 que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| X_t^k \right|^2 \right] &\leq 4\mathbb{E} [|X_0|^2] + 4(T + C_1 T + C_2) \times \\ &\quad \int_0^t \varphi(s) \left(1 + \mathbb{E} \left[\left| X_{s-\frac{1}{k}}^k \right|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left| Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right|^2 \right] \right) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| X_t^k \right|^2 \right] &\leq 4\mathbb{E} \left[|X_0|^2 \right] \\ &\quad + C_3 \int_0^t \varphi(v) \left(1 + \sup_{0 \leq v \leq s} \mathbb{E} \left[\left| X_v^k \right|^2 \right] + \sup_{0 \leq v \leq s} \mathbb{E} \left[\left| Y_v^k \right|^2 \right] \right) dv \end{aligned}$$

avec $C_3 = 4(T + C_1T + C_2)$.

De même, nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| Y_t^k \right|^2 \right] &\leq 4\mathbb{E} \left[|Y_0|^2 \right] \\ &\quad + C_3 \int_0^t \varphi(v) \left(1 + \sup_{0 \leq v \leq s} \mathbb{E} \left[\left| X_v^k \right|^2 \right] + \sup_{0 \leq v \leq s} \mathbb{E} \left[\left| Y_v^k \right|^2 \right] \right) dv \end{aligned}$$

d'où en additionnant ces deux dernières inégalités

$$\begin{aligned} &1 + \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| X_t^k \right|^2 \right] + \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| Y_t^k \right|^2 \right] \\ &\leq K + C \int_0^t \varphi(v) \left(1 + \sup_{0 \leq v \leq s} \mathbb{E} \left[\left| X_v^k \right|^2 \right] + \sup_{0 \leq v \leq s} \mathbb{E} \left[\left| Y_v^k \right|^2 \right] \right) dv \end{aligned}$$

avec $C = 2C_3$. En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$1 + \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| X_t^k \right|^2 \right] + \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| Y_t^k \right|^2 \right] \leq K \exp \left(C \int_0^t \varphi(s) ds \right)$$

et par conséquent

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| X_t^k \right|^2 \right] + \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \left[\left| Y_t^k \right|^2 \right] \leq K \exp \left(C \int_0^t \varphi(s) ds \right)$$

■

Lemme 3.2. Pour tout entier $k \geq 1$ et $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\mathbb{E} \left[\left| X_t^k - X_s^k \right|^2 + \left| Y_t^k - Y_s^k \right|^2 \right] \leq K_1 (\Phi(t) - \Phi(s))$$

où

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds, \quad K_1 = 2C \left(1 + K \exp \left(C \int_0^T \varphi(t) dt \right) \right)$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} X_t^k - X_s^k &= \int_s^t f_1 \left(w, X_{w-\frac{1}{k}}^k, Y_{v-\frac{1}{k}}^k \right) dw \\ &\quad + \int_s^t f_2 \left(w, X_{w-\frac{1}{k}}^k, Y_{w-\frac{1}{k}}^k \right) d\langle B \rangle_w + \int_s^t f_3 \left(v, X_{w-\frac{1}{k}}^k, Y_{w-\frac{1}{k}}^k \right) dB_w \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t} \left| X_t^k - X_s^k \right|^2 \right] \\
 & \leq 3 \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u f_1 \left(w, X_{w-\frac{1}{k}}^k, Y_{w-\frac{1}{k}}^k \right) dw \right|^2 \right] \\
 & \quad + 3 \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u f_2 \left(w, X_{w-\frac{1}{k}}^k, Y_{w-\frac{1}{k}}^k \right) d \langle B \rangle_w \right|^2 \right] \\
 & \quad + 3 \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t} \left| \int_s^u f_3 \left(w, X_{w-\frac{1}{k}}^k, Y_{w-\frac{1}{k}}^k \right) dB_w \right|^2 \right]
 \end{aligned}$$

Il résulte d'inégalités de *BDG* (2.12), (2.13) et la condition H_1 que

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t} \left| X_u^k - X_s^k \right|^2 \right] \leq \\
 & \leq 3T \int_s^t \mathbb{E} \left[\left| f_1 \left(w, X_{w-\frac{1}{k}}^k, Y_{w-\frac{1}{k}}^k \right) \right|^2 \right] dw \\
 & \quad + 3C_1 T \int_s^t \mathbb{E} \left[\left| f_2 \left(w, X_{w-\frac{1}{k}}^k, Y_{w-\frac{1}{k}}^k \right) \right|^2 \right] dw \\
 & \quad + 3C_2 \int_s^t \mathbb{E} \left[\left| f_3 \left(w, X_{w-\frac{1}{k}}^k, Y_{w-\frac{1}{k}}^k \right) \right|^2 \right] dw \\
 & \leq C \int_s^t \varphi(w) \left(1 + \mathbb{E} \left[\left| X_{w-\frac{1}{k}}^k \right|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left| Y_{w-\frac{1}{k}}^k \right|^2 \right] \right) dw \\
 & \leq C (\Phi(t) - \Phi(s)) + C \int_s^t \varphi(w) \left(\mathbb{E} \left[\left| X_{w-\frac{1}{k}}^k \right|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left| Y_{w-\frac{1}{k}}^k \right|^2 \right] \right) dw
 \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.1, nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t} \left| X_u^k - X_s^k \right|^2 \right] & \leq C \left(1 + K \exp \left\{ C \int_0^T \varphi(t) dt \right\} \right) (\Phi(t) - \Phi(s)) \\
 & \leq \frac{K_1}{2} (\Phi(t) - \Phi(s))
 \end{aligned}$$

où

$$K_1 = 2C \left(1 + K \exp \left\{ C \int_0^T \varphi(t) dt \right\} \right)$$

De la même manière, nous avons

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq u \leq t} \left| Y_u^k - Y_s^k \right|^2 \right] \leq \frac{K_1}{2} (\Phi(t) - \Phi(s))$$

Ainsi

$$\mathbb{E} \left[\left| X_t^k - X_s^k \right|^2 + \left| Y_t^k - Y_s^k \right|^2 \right] \leq K_1 (\Phi(t) - \Phi(s))$$

■

Théorème 3.1. *Supposons que les hypothèses H_1 et H_2 soient satisfaites. Supposons également que (X_t, Y_t) est la solution unique de système (3.1). Alors on a*

$$(3.3) \quad \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left(\left| X_t^k - X_t \right|^2 + \left| Y_t^k - Y_t \right|^2 \right) \right] \leq \frac{\tilde{K}}{k} \exp \left[2C \int_0^T \psi(t) dt \right]$$

où

$$\tilde{K} = 2CK_1 T \sup_{0 \leq t \leq T} [\varphi(t)\psi(t)]$$

Démonstration. En appliquant la même procédure et en utilisant les inégalités de BDG (2.12), (2.13), l'hypothèse H_2 et le lemme 3.2, nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq t} \left(\left| X_u^k - X_u \right|^2 + \left| Y_u^k - Y_u \right|^2 \right) \right] \\ & \leq C \int_0^t \psi(v) \mathbb{E} \left[\left| X_{v-\frac{1}{k}}^k - X_v \right|^2 + \left| Y_{v-\frac{1}{k}}^k - Y_v \right|^2 \right] dv \\ & \leq 2C \int_0^t \psi(v) \mathbb{E} \left[\left| X_v^k - X_{v-\frac{1}{k}}^k \right|^2 + \left| Y_v^k - Y_{v-\frac{1}{k}}^k \right|^2 \right] dv \\ & \quad + 2C \int_0^t \psi(v) \mathbb{E} \left[\left| X_v^k - X_v \right|^2 + \left| Y_v^k - Y_v \right|^2 \right] dv \\ & \leq 2CK_1 \int_0^t \psi(v) \left(\Phi(v) - \Phi\left(v - \frac{1}{k}\right) \right) dv \\ & \quad + 2C \int_0^t \psi(v) \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq v} \left| X_v^k - X_u \right|^2 + \left| Y_v^k - Y_u \right|^2 \right] dv \\ & \leq \frac{\tilde{K}}{k} + 2C \int_0^t \psi(v) \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq v} \left| X_v^k - X_u \right|^2 + \left| Y_v^k - Y_u \right|^2 \right] dv \end{aligned}$$

où

$$\tilde{K} = 2CK_1 T \sup_{0 \leq t \leq T} [\varphi(t)\psi(t)]$$

Finalement d'après le lemme de Gronwall on a

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left(\left| X_t^k - X_t \right|^2 + \left| Y_t^k - Y_t \right|^2 \right) \right] \leq \frac{\tilde{K}}{k} \exp \left[2C \int_0^T \psi(t) dt \right]$$



Remarque 3.1. De l'inégalité (3.3), en déduire que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left(|X_t^k - X_t|^2 + |Y_t^k - Y_t|^2 \right) \right] = 0$$

c'est-à-dire que les solutions approximatives de Caratheodory (X_t^k, Y_t^k) convergent vers la solution unique (X_t, Y_t) de $SGEDS$ (3.1).

Nous donnons maintenant un résultat plus général et principal. Dans le théorème précédent, il était supposé que le $SGEDS$ (3.1) a une solution unique. Dans le théorème suivant, sans faire cette supposition, nous utilisons complètement le schéma d'approximation de Caratheodory pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution de $SGEDS$ (3.1)

Théorème 3.2. Sous les hypothèses H_1 et H_2 , le système (3.1) a une solution unique $q.s.$:

$$(X_t, Y_t) \in M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d)$$

Démonstration. Nous allons démontrer le théorème en trois étapes:

Etape 1. Supposons que $(X_{1,t}, Y_{1,t})$ et $(X_{2,t}, Y_{2,t})$ sont deux solutions de (3.1) avec les conditions initiales $(X_{1,0}, Y_{1,0})$ et $(X_{2,0}, Y_{2,0})$ respectivement. On a alors

$$\begin{aligned} & |X_{1,t} - X_{2,t}|^2 \\ \leq & 4|X_{1,0} - X_{2,0}|^2 + 4 \left| \int_0^t f_1(s, X_{1,s}, Y_{1,s}) - f_1(s, X_{2,s}, Y_{2,s}) ds \right|^2 \\ & + 4 \left| \int_0^t f_2(s, X_{1,s}, Y_{1,s}) - f_2(s, X_{2,s}, Y_{2,s}) d\langle B \rangle_s \right|^2 \\ & + 4 \left| \int_0^t f_3(s, X_{1,s}, Y_{1,s}) - f_3(s, X_{2,s}, Y_{2,s}) dB_s \right|^2 \end{aligned}$$

D'après les inégalités de BDG (2.12), (2.13) et l'hypothèse H_2 , nous avons pour $0 \leq r \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^r (f_1(s, X_{1,s}, Y_{1,s}) - f_1(s, X_{2,s}, Y_{2,s})) ds \right|^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 &\leq T \int_0^t \mathbb{E} \left[|f_1(s, X_{1,s}, Y_{1,s}) - f_1(s, X_{2,s}, Y_{2,s})|^2 \right] ds \\
 &\leq T \int_0^t \psi(s) \mathbb{E} \left[|X_{1,s} - X_{2,s}|^2 + |Y_{1,s} - Y_{2,s}|^2 \right] ds \\
 &\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq t} \left| \int_0^r f_2(s, X_{1,s}, Y_{1,s}) - f_2(s, X_{2,s}, Y_{2,s}) d\langle B \rangle_s \right|^2 \right] \\
 &\leq C_1 T \int_0^t \mathbb{E} \left[|f_2(s, X_{1,s}, Y_{1,s}) - f_2(s, X_{2,s}, Y_{2,s})|^2 \right] ds \\
 &\leq C_1 T \int_0^t \psi(s) \mathbb{E} \left[|X_{1,s} - X_{2,s}|^2 + |Y_{1,s} - Y_{2,s}|^2 \right] ds
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq t} \left| \int_0^r f_3(s, X_{1,s}, Y_{1,s}) - f_3(s, X_{2,s}, Y_{2,s}) dB_s \right|^2 \right] \\
 &\leq C_2 \int_0^t \mathbb{E} \left[|f_3(s, X_{1,s}, Y_{1,s}) - f_3(s, X_{2,s}, Y_{2,s})|^2 \right] ds \\
 &\leq C_2 \int_0^t \psi(s) \mathbb{E} \left[|X_{1,s} - X_{2,s}|^2 + |Y_{1,s} - Y_{2,s}|^2 \right] ds
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq t} |X_{1,r} - X_{2,r}|^2 \right] \\
 &\leq 4 |X_{1,0} - X_{2,0}|^2 + 4C \int_0^t \psi(s) \mathbb{E} \left[|X_{1,s} - X_{2,s}|^2 + |Y_{1,s} - Y_{2,s}|^2 \right] ds
 \end{aligned}$$

De la même manière, nous avons

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq t} |Y_{1,r} - Y_{2,r}|^2 \right] \\
 &\leq 4 |Y_{1,0} - Y_{2,0}|^2 + 4C \int_0^t \psi(s) \mathbb{E} \left[|X_{1,s} - X_{2,s}|^2 + |Y_{1,s} - Y_{2,s}|^2 \right] ds
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq t} \left(|X_{1,r} - X_{2,r}|^2 + |Y_{1,r} - Y_{2,r}|^2 \right) \right] \\
 &\leq 4 \left(|X_{1,0} - X_{2,0}|^2 + |Y_{1,0} - Y_{2,0}|^2 \right) \\
 &\quad + C \int_0^t \psi(s) \mathbb{E} \left[|X_{1,s} - X_{2,s}|^2 + |Y_{1,s} - Y_{2,s}|^2 \right] ds
 \end{aligned}$$

D'où d'après le lemme de Gronwall,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq t} \left(|X_{1,r} - X_{2,r}|^2 + |Y_{1,r} - Y_{2,r}|^2 \right) \right] \\ & \leq 4 \left(|X_{1,0} - X_{2,0}|^2 + |Y_{1,0} - Y_{2,0}|^2 \right) \exp \left(C \int_0^t \psi(s) ds \right) \end{aligned}$$

Maintenant, en prenant $(X_{1,0}, Y_{1,0}) = (X_{2,0}, Y_{2,0})$, on voit que pour $t = T$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq r \leq T} \left(|X_{1,r} - X_{2,r}|^2 + |Y_{1,r} - Y_{2,r}|^2 \right) \right] = 0$$

Il s'en suit que

$$(X_{1,t}, Y_{1,t}) = (X_{2,t}, Y_{2,t}) \quad q.s. \text{ pour tout } t \in [0, T]$$

Étape 2. Nous allons prouver que $(X_t^n, Y_t^n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy de $M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ pour tout $t \in [0, T]$. Par les mêmes procédures utilisées dans l'étape 1, nous avons pour tout $m > n$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left(|X_t^m - X_t^n|^2 + |Y_t^m - Y_t^n|^2 \right) \right] \\ & \leq C \int_0^T \psi(s) \mathbb{E} \left[\left| X_{s-\frac{1}{m}}^m - X_{s-\frac{1}{n}}^n \right|^2 + \left| Y_{s-\frac{1}{m}}^m - Y_{s-\frac{1}{n}}^n \right|^2 \right] ds \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left| X_{s-\frac{1}{m}}^m - X_{s-\frac{1}{n}}^n \right|^2 + \left| Y_{s-\frac{1}{m}}^m - Y_{s-\frac{1}{n}}^n \right|^2 \right] \\ & \leq 2 \mathbb{E} \left[\left| X_{s-\frac{1}{m}}^m - X_{s-\frac{1}{m}}^n \right|^2 + \left| X_{s-\frac{1}{m}}^n - X_{s-\frac{1}{n}}^n \right|^2 \right. \\ & \quad \left. + \left| Y_{s-\frac{1}{m}}^m - Y_{s-\frac{1}{m}}^n \right|^2 + \left| Y_{s-\frac{1}{m}}^n - Y_{s-\frac{1}{n}}^n \right|^2 \right] \\ & \leq 2 \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} \left(|X_u^m - X_u^n|^2 + |Y_u^m - Y_u^n|^2 \right) \right] \\ & \quad + 2 \mathbb{E} \left[\left(\left| X_{s-\frac{1}{m}}^n - X_{s-\frac{1}{n}}^n \right|^2 + \left| Y_{s-\frac{1}{m}}^n - Y_{s-\frac{1}{n}}^n \right|^2 \right) \right] \end{aligned}$$

et d'après le lemme 3.2, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left(|X_t^m - X_t^n|^2 + |Y_t^m - Y_t^n|^2 \right) \right] \\ & \leq C \int_0^T \psi(r) \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq r} \left(|X_u^m - X_u^n|^2 + |Y_u^m - Y_u^n|^2 \right) \right] dr \\ & \quad + 2CK_1 \left[\Phi \left(s - \frac{1}{m} \right) - \Phi \left(s - \frac{1}{n} \right) \right] \int_0^T \psi(r) dr \end{aligned}$$

Alors on a d'après le lemme de Gronwall,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left(|X_t^m - X_t^n|^2 + |Y_t^m - Y_t^n|^2 \right) \right] \leq \tilde{K}_1 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \exp \left(C \int_0^T \psi(s) ds \right)$$

où $\tilde{K}_1 = 2K_1CT \sup_{0 \leq t \leq T} [\varphi(t)\psi(t)]$, ce qui signifie que $(X_t^n, Y_t^n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d)$.

Etape 3. Nous allons montrer que la limite (X_t, Y_t) dans $M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ est la solution de système (3.1). Pour l'existence, soit $(X_0, Y_0) \in M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d) \times M_G^2(0, T; \mathbb{R}^d)$ une condition initiale telle que $\mathbb{E}[|X_0|^2 + |Y_0|^2] < \infty$.

On a pour tout $u \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |X_u - X_u^k|^2 &\leq 3 \left| \int_0^u f_1 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) - f_1(s, X_s, Y_s) ds \right|^2 \\ &\quad + 3 \left| \int_0^u f_2 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) - f_2(s, X_s, Y_s) d\langle B \rangle_s \right|^2 \\ &\quad + 3 \left| \int_0^u f_3 \left(s, X_{s-\frac{1}{k}}^k, Y_{s-\frac{1}{k}}^k \right) - f_3(s, X_s, Y_s) dB_s \right|^2 \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de *BDG* (2.12), (2.13) et l'hypothèse H_2 , on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq T} \left(|X_u^k - X_u|^2 \right) \right] \\ &\leq C \int_0^T \psi(s) \mathbb{E} \left[\left(\left| X_{s-\frac{1}{k}}^k - X_s \right|^2 + \left| Y_{s-\frac{1}{k}}^k - Y_s \right|^2 \right) \right] ds \\ &\leq 2C \int_0^T \psi(s) \mathbb{E} \left[\left(\left| X_{s-\frac{1}{k}}^k - X_s^k \right|^2 + \left| Y_{s-\frac{1}{k}}^k - Y_s^k \right|^2 \right) \right] ds \\ &\quad + 2C \int_0^T \psi(s) \mathbb{E} \left[\left(\left| X_{s-\frac{1}{k}}^k - X_s \right|^2 + \left| Y_{s-\frac{1}{k}}^k - Y_s \right|^2 \right) \right] ds \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.2 on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq T} \left(|X_u^k - X_u|^2 \right) \right] \\ &\leq \frac{M}{k} + 2C \int_0^T \psi(s) \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} \left(|X_u^k - X_u|^2 + |Y_u^k - Y_u|^2 \right) \right] ds \end{aligned}$$

où

$$M = \tilde{K}_1 C \int_0^T \psi(s) ds \exp \left\{ C \int_0^T \varphi(s) ds \right\}$$

De même, nous avons la même formule avec $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq T} (|Y_u^k - Y_u|^2) \right]$ au lieu de $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq T} (|X_u^k - X_u|^2) \right]$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq T} (|X_u^k - X_u|^2 + |Y_u^k - Y_u|^2) \right] \\ & \leq \frac{2M}{k} + 4C \int_0^T \psi(s) \cdot \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq s} (|X_u^k - X_u|^2 + |Y_u^k - Y_u|^2) \right] ds \end{aligned}$$

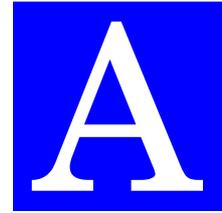
Il résulte d'après le lemme de Gronwall que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq u \leq T} (|X_u^k - X_u|^2 + |Y_u^k - Y_u|^2) \right] \leq \frac{2M}{k} \exp \left(4C \int_0^T \psi(s) ds \right)$$

et lorsque k tend vers l'infini, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| (X_t^k, Y_t^k) - (X_t, Y_t) \right\| = 0$$

D'où le résultat. ■



CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un système de deux équations différentielles stochastiques gouvernées par un G -mouvement Brownien, conditionnées par des coefficients de Lipschitz et de croissance linéaire dépendants du temps par la méthode de schéma d'approximation de Caratheodory. En rappelant que cette méthode est moins utilisée chez les chercheurs malgré ses avantages par rapport aux autres qui sont plus utilisables. Pour réaliser ce travail, on a commencé par rappeler les définitions et les théorèmes usuels sur le calcul G -stochastique. En outre, on s'est basé sur les principaux résultats que nous avons utilisés directement pour démontrer nos théorèmes. Enfin, il convient de noter que la recherche dans ce domaine n'en est qu'à ses débuts.

Notre travail ouvre de vastes perspectives; nous espérons étendre ce travail aux cas des matrices G -stochastiques et des systèmes de plusieurs G -équations

différentielles stochastiques avec d'autres conditions plus larges et de trouver des applications concrètes dans de nombreux domaines tels que la finance, le contrôle stochastique, la physique, l'économie etc...

RÉSUMÉ / ABSTRACT

Titre : Les G -Fonctionnelles Exponentielles et Les G -Equations Différentielles Stochastiques.

Dans cette thèse nous démontrerons l'existence et l'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles stochastiques gouvernées par un G -mouvement Brownien en utilisant le schéma d'approximation de Caratheodory.

Mots-clés : G -espérance, G -mouvement Brownien, G -équation différentielle stochastique, Schéma d'approximation de Caratheodory.

Title : G -Eponential Functionals and G -Stochastic Differential Equations.

In this thesis, we present both existence and uniqueness of solution for a system of stochastic differential equations driven by a G -Brownian motion by using the Caratheodory approximation scheme.

Keywords : G -expectation, G -brownian motion, G -stochastic differential equation, Caratheodory approximation scheme.

BIBLIOGRAPHY

- [1] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber and D. Heath, Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9(3) : 203-228, 1999.
- [2] X. Bai, Y. Lin, On the existence and uniqueness of solutions to stochastic differential equations driven by G -Brownian motion with Integral-Lipschitz coefficients, arXiv:1002.1046v3 [math.PR] (2010).
- [3] D. R. Bell and S.E.A. Mohammed, On the solution of stochastic ordinary differential equations via small delays, *Stochastic and Stochastics Reports*, vol. 4, no. 28, pp. 293-299, 1989.
- [4] H. Boutabia, A. Ouaoua, G -equations différentielles stochastiques et résolution numérique de la G -équation de la chaleur, thèse de Doctorat sciences, U.B.M de Annaba, soutenue en 2016.
- [5] H. Boutabia, I. Grabsia, Chaotic expansion in the G -expectation space. *Opuscula Math*, 33,no,4 (2013), 647-666.
- [6] Z. Chen and L. G. Epstein, Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time. *Econometrica* 70(4) : 1403-1443, 2002.
- [7] G. Choquet, (1953) Theory of capacities, *Annales de Institut Fourier*, 5, 131–295.

- [8] E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1955.
- [9] F. Coquet, Y. Hu, J. Mémin and S. Peng, Filtration-consistent nonlinear expectations and related G -expectations. Probab. Theory Relat. Fields 123(1) : 1-27, 2002.
- [10] C. Dellacherie, (1972) Capacités et Processus Stochastiques. Springer Verlag.
- [11] L. Denis, M. Hu and S. Peng, Function spaces and capacity related to a sublinear expectation : application to G -Brownian motion paths. Potential Anal. 34(2) : 139-161, 2011.
- [12] L.G. Epstein and S. Ji, Ambiguous volatility, possibility and utility in continuous time. arXiv :1103.1652.
- [13] L.G. Epstein and S. Ji, Ambiguous volatility and asset pricing in continuous time. arXiv :1301.4614
- [14] F. Faizullah, A note on the Caratheodory approximation scheme for stochastic differential equations under G -Brownian motion, Z. Natural forsh 67a (2012) , 699–704.
- [15] F. Faizullah and D. Piao, Existence of solutions for G – $SDEs$ with upper and lower solutions in the reverse order, Int. J. Phy. Sci, vol 3, no. 7 (2012), 432–439.
- [16] F. Faizullah and D. Piao, A note on the existence of solutions for backward stochastic differential equations under G -Brownian motion, World App. Sci. J., (accepted).
- [17] H. Föllmer, A. Schied, (2002) Convex measures of risk and trading constraints. Finance and Stochastics 6 (4), 429-447.

- [18] F. Gao, Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equations driven by G -Brownian motion, *Stochastic Processes and Their Applications*, vol 119, no. 10 (2009), 3356–3382.
- [19] X. Guo, C. Pan and S. Peng, A note on G -optimal stopping problems. arXiv :1211.0598v1.
- [20] M. Hu and X. Li, Independence under the G -expectation framework, *Journal of Theoretical Probability* 27(3) (2014), 1011–1020.
- [21] P. Huber, V. Strassen, (1973) Minimax tests and the Neyman-Pearson Lemma for capacity. *The Annals of Statistics*, Vol. 1, No. 2 pp 252-263.
- [22] X. Li, and S. Peng, Stopping times and related Itô's calculus with G -Brownian motion, *Stochastic Processes and their Applications* 121 (2011) 1492–1508.
- [23] Q. Lin, Some properties of stochastic differential equations driven by G -Brownian motion, *Acta Mathematica Sinica, English Series* 29 (2013), 923–942.
- [24] Y. Lin, Equations différentielles stochastiques sous les espérances mathématiques non-linéaire et applications, Ph. D. thesis. Université de Rennes 1, 2013.
- [25] Y. Lin, Stochastic differential equations driven by G -Brownian motion with reflecting boundary conditions, *Electronic Journal of Probability* 18 (2013), 1–23.
- [26] K. Liu, Caratheodory approximate solution for a class of semilinear stochastic evolution equations with time delays, *Journal of Mathematical Analysis And Applications* 220 (1998), no. AY975889, 349–364.

- [27] J. Ma and S. Yao, On quadratic g -evaluations/expectations and related analysis. *Stoch. Anal. Appl.* 28(4) : 711-734, 2010.
- [28] X. Mao, *Stochastic Differential Equations and their Applications*, Horwood Publishing Chichester, 1997.
- [29] X. Mao, Approximate solutions for stochastic differential equations with pathwise uniqueness, *Stochastic Analysis and Applications*, vol. 3, no. 12, pp. 355-367, 1994.
- [30] X. Mao, Approximate solutions for a class of stochastic evolution equations with variable delays, *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, vol. 12, no. 5,6, pp. 525-533, 1991.
- [31] L. Peng and W. Falei, Stochastic differential equations driven by G -Brownian motion and ordinary differential equations, arXiv:1309.5232v2 [math.PR] (2014).
- [32] S. Peng, Y. Song, J. Zhang, A complete representation theorem for G -martingales. arXiv:1201.2629 (2012).
- [33] S. Peng, Nonlinear expectation and stochastic calculus under uncertainty with robust central limit theorem and G -Brownian motion, arXiv:1002.4546v1 [math.PR], (2010).
- [34] S. Peng, Survey on normal distributions, central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations, *Science in China Series A: Mathematics* 52(7) (2009), 1391–1411.
- [35] S. Peng, Multi-dimensional G -Brownian motion and related stochastic calculus under G -expectation, *Stoch. Proc. Appl.* 118 (2008), 2223–2253.

- [36] S. Peng, A New Central Limit Theorem under Sublinear Expectations. arXiv, 0803.2656 (2008).
- [37] S. Peng, G -Brownian motion and dynamic risk measure under volatility uncertainty. arXiv: [math.PR] 0711.2834v1 (2007).
- [38] S. Peng, Law of Large Numbers and Central Limit Theorem under Nonlinear Expectations, in arXiv : math. PR/0702358v1, 2007.
- [39] S. Peng, G -expectation, G -Brownian motion and related stochastic calculus of Itô's type, The Abel Symposium 2005, Abel Symposia 2, Edit. Benth et al., Springer-Verlag, 541–567.
- [40] S. Peng, Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains, Chin. Ann. Math. 2005, 26B(2), 159-184.
- [41] S. Peng, Filtration consistent nonlinear expectations and evaluations of contingent claims. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series 20(2), 1–24 (2004).
- [42] S. Peng, Monotonic limit theorem of $BSDE$ and nonlinear decomposition theorem of Doob-Meyer's type. Probab. Theory Relat. Fields 113(4) : 473-499, 1999.
- [43] S. Peng, Backward SDE and related g -expectation. Backward stochastic differential equations (Paris, 1995-1996), 141-159. Pitman Res. Notes Math. Ser. 364, Harlow : Longman, 1997.
- [44] Y. Ren, J. Wang and L. Hu, Multi-valued stochastic differential equation driven by G -Brownian motion and related stochastic control problems, International Journal of Control (2016), 1–23.

- [45] Y. Ren and L. Hu, A note on the stochastic differential equations driven by G -Brownian motion, *Statistics and Probability Letters*, vol. 81, pp. 580-585, 2011.
- [46] E. Rosazza, Risk measure via g -expectation. *Insurance Math. Econom.* 39(1) : 19-34, 2004.
- [47] R. Tevzadze, Solvability of backward stochastic differential equations with quadratic growth. *Stochastic*.
- [48] J. Vorbrink, Financial markets with volatility uncertainty. *arXiv :1012.1535v2*. *Process. Appl.* 118(3) : 503-515, 2008.
- [49] H. Young, Caratheodory approximate solution to stochastic differential delay equation, *Filomat* 30, no 7 (2016), 2019–2028.
- [50] B. Zhang, J. Xu and D. Kannan, Extension and application of Itô's formula under G -framework. *Stoch. Anal. Appl.* 28(2) : 322-349, 2010.

العنوان : الجي مؤثرات الأسية و الجي معادلات تفاضلية ستوكاستيكية.

ملخص : في هذه الأطروحة نبرهن وجود ووحداية حل جملة معادلات تفاضلية سطوكاستيكية مقيدة بالحركة جي براونية مستعملين في ذلك البيان التقريبي لكاراتهودوري.

كلمات مفتاحية : جي أمل الرياضياتي، جي حركة براونية، جي معادلة تفاضلية سطوكاستيكية، بيان تقريب كاراتهودوري.

Titre : Les G-Fonctionnelles Exponentielles et Les G-Equations Diffrentielles Stochastiques.

Résumé : Dans cette thèse, nous démontrerons l'existence et l'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles stochastiques gouvernées par un G-mouvement Brownien en utilisant le schéma d'approximation de Caratheodory.

Mots-clés : G-espérance, G-mouvement Brownien, G-équation différentielle stochastique, Shéma d'approximation de Caratheodory.

Title : G-Exponential Functional and G-Stochastic Differential Equations.

Abstract : In this thesis, we present both existence and uniqueness of solution for a system of stochastic differential equations driven by a G-Brownian motion by using the Caratheodory approximation scheme.

Keywords : G-expectation, G-brownian motion, G-stochastic differential equation, Caratheodory approximation scheme.
