

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR- ANNABA UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR –ANNABA



جامعة باجي مختار عنابة

Faculté des sciences de l'Ingénieur Année 2010-2011

Département de Métallurgie et Génie des Matériaux

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

**Modélisation mécanique et l'étude expérimentale d'une  
tôle ferritique présentant des hétérogénéités texturales  
(gradient de texture et écart à l'orthotropie)**

Option

**Mise en Forme des Matériaux**

Par

**Oualid CHAHAOUI**

**DIRECTEUR DE THESE:**M.L. FARESProfesseurU. Annaba

**CO-DIRECTEUR DE THESE:**F. MONTHEILLETDirecteur de recherche/CNRS ENSM-SE

**DEVANT LE JURY**

<b>PRESIDENT</b>	K. CHAOUI	Professeur	U. Annaba
<b>EXAMINATEURS</b>	N. ROUAG	Professeur	U. Constantine
	O. KHALFALLAH	Professeur	U. Constantine
	A. DARSOUNI	Maître de Conférences	U. Annaba
<b>MEMBRE INVITE</b>	D. PIOT	Chargé de recherche/CNRS	ENSMSE. France



## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je voudrais ici témoigner toute ma gratitude à Mr le Professeur *M.L Fares*, mon directeur de thèse, pour sa confiance, sa disponibilité et le grand intérêt qu'il a toujours manifesté pour ce travail. Sa rigueur scientifique, ses encouragements et son soutien m'ont permis de m'initier à la recherche et de mener à bien ce travail. Je lui exprime ma sincère reconnaissance.

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet de recherche relatif à un "Accord Programme CNRS/DPGRF" contracté avec le centre Sciences des Matériaux et des Structures (SMS) de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne. Dans ce contexte, je remercie tout particulièrement mon co-encadreur de thèse *M. Frank Montheillet*, directeur de recherche au CNRS, pour son aide, sa patience, pour le temps qu'il m'a accordé tout au long du déroulement de cette thèse et pour la confiance qu'il m'a accordée, en m'accueillant dans le laboratoire Plasticité, Endommagement et Corrosion des Matériaux (CNRS UMR 5146).

J'ai eu également de la chance d'être aidé par *David Piot, Michel Darrieulat et Christophe Desrayaud*, Chargés de Recherche pour la réalisation de ce travail. Leurs compétences et leurs qualités humaines ont été une source de motivation permanente pour moi. Cela m'a été d'un grand apport pour ma formation et je leur exprime toute ma profonde gratitude.

Je remercie vivement le professeur *Kamel Chaoui* de l'université d'Annaba d'avoir bien accepté de présider le jury de soutenance.

Je remercie également les professeurs *Nadjet Rouag et Omar Khalafallah* de l'université de Constantine, le Docteur *Abderrazek Darsouni*, Maître de Conférences à l'université de Annaba de m'avoir honoré en bien acceptant d'être examinateurs de ce travail et en participant au jury de soutenance.

J'aimerais aussi exprimer toute ma reconnaissance au personnel technique du laboratoire SMS pour leur assistance chaleureuse, notamment *Gilles Blanc et Prisca Leveque* pour la métallographie, *Severine Girard* pour la caractérisation mécanique de traction, *Paul Jouffrey* et *Marilyne Mondon* pour le MEB.

Enfin, je n'oublie pas de remercier tous mes collègues "thésards" et tout particulièrement *Anouar Halloumi* avec lesquels j'ai passé 18 mois de stage à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne et ce dans une ambiance sympathique.



**Résumé:** les propriétés d'aptitude à l'emboutissage des tôles dépendent fortement de l'anisotropie induite par le laminage antérieur. Cela est particulièrement vrai pour les aciers ferritiques, qui présentent de forts gradients de textures après laminage à chaud, et ce pour deux raisons: (i) la recristallisation continue se produisant pendant la déformation à chaud, (ii) aucune transformation de phase ne se produit lors du refroidissement. D'autre part, si au cours du laminage classique (symétrique), la tôle laminée présente généralement une symétrie orthotrope, dans le laminage asymétrique, où par exemple les vitesses de rotation des cylindres sont différentes, la vitesse de déformation au niveau du foyer de déformation est plutôt à caractère asymétrique. Par conséquent, l'hypothèse d'une symétrie orthotrope n'est plus justifiée, spécialement dans le cas où le cisaillement est plus prononcé. Ainsi, la présente thèse comporte deux parties: (i) L'estimation des gradients de texture à travers l'épaisseur de tôles d'acier inoxydables ferritiques laminées à chaud, utilisant des approches analytiques d'homogénéisation. Des techniques de diffraction des rayons X, ont été utilisées afin d'évaluer les fractions volumiques des composantes de texture et l'anisotropie plastique des tôles a été caractérisée à l'aide d'essais de traction uniaxiale et orthogonale. Le cas d'une tôle hétérogène bicouche a été traité au moyen de deux approches, l'une dite simplifiée et l'autre généralisée. (ii) L'effet de la partie monoclinique sur le comportement global orthotrope d'une tôle laminée dans un plan de symétrie donnée. Les textures d'une tôle de laboratoire, ayant subi un laminage asymétrique, a été étudiée par la technique de diffraction d'électrons rétrodiffusés (EBSD). Les paramètres associés à la fonction d'écoulement, dérivés du critère quadratique orthotrope Hill, ont été déterminés à partir des fractions volumiques des composants de texture en utilisant l'approche CMTP (Continuum Mechanic of Textured Polycrystals"). Deux grandeurs sont définies pour évaluer l'écart à l'orthotropie et une méthode a été proposée afin de trouver la "meilleure" estimation du comportement orthotrope de la tôle. Une analyse du comportement mécanique d'une tôle soumise à un chargement combiné de cisaillement et de compression (CSC) a été également effectuée pour illustrer la méthode.

**Mots clés :** Modélisation mécanique, mise en forme des tôles, évolution anisotropie, Critères d'écoulement orthotropes, gradient de texture.

**Abstract:** The drawability properties of metal sheet strongly depend on anisotropy induced by rolling. This is especially true for ferritic steels, which exhibit strong crystallographic textures after hot rolling, for two reasons: (i) continuous recrystallization occurs during hot working and (ii) no phase transformation occurs upon cooling. In another hand, in classical (symmetric) rolling, the overall rolled sheet exhibit orthotropic symmetry. Conversely, in asymmetric rolling, where for instance the rotation velocities of the cylinders are different, the strain rate in the roll gap is rather asymmetrical. Then, the assumption of orthotropic sample symmetry becomes not justified specially in the case of pronounced shear deformation. Then, the present thesis includes two parts; the evaluation of texture gradients through the thickness of the hot rolled ferritic stainless sheet, using analytic approaches of homogenization. In this step, XRD techniques were performed in order to assess the volume fractions of texture components. The plastic anisotropy of sheets is characterized by uniaxial and orthogonal tensile tests. The case of a heterogeneous sandwich sheet was treated using two approaches: the first one referred to as "simplified"; the second to as "generalized". (ii) The effect of the monoclinic parts on the global orthotropic behavior of a rolled metal sheet in a given symmetry plan. The crystallographic texture of an asymmetrically rolled sheet was investigated by Electron Back Scattered Diffraction (EBSD). The parameters of the associated yield equation, derived from the quadratic orthotropic Hill criterion, were determined from the volume fractions of the texture components using the "Continuum Mechanics of Textured Polycrystals" (CMTP) approach. Two quantities are defined to assess the departure from orthotropy and a method is proposed to find the "best" orthotropic estimation of the sheet behavior. Mechanical behavior analysis of a sheet submitted to combined shear and compression (CSC) loading is also used to illustrate the method.

**Keywords:** Constitutive model, sheet metal forming, anisotropy evolution, orthotropic yield criterion, texture gradient.

ملخص

الهدف الأساسي من هذا البحث يتمثل في بداية الأمر في اقتراح مقارنة رياضية نظرية (بسيطة ومعممة) لمجانس التغيرات الحاصلة في نسيج سمك صفيحة معدنية من الفولاذ الغير مؤكسد مدرفلة بالتناظر على البارد وذلك باستعمال تقنية أشعة x في كل طبقة على حدى. من أجل معرفة الخصائص الميكانيكية للصفحة قمنا بمعايرتها عن طريق تجربة الجذب في اتجاه واحد لاحقاً. في المرحلة الثانية اختبرنا صفيحة أخرى مدرفلة بلا تناظر على البارد. بحيث المساحات المتاخمة لأسطوانات الدرفلة تتأثر بجذب سطحي شديد (Cisaillement) ومن أجل معرفة طبيعة التناظر المونوكليينيكي (Système monoclinique) والتحصل على الثوابت الأنزوتروبية (Paramètres anisotropies) المؤثرة في نسيج الصفيحة قمنا باختبار (EBSD) (إنعراج الإلكترونات المنعكسة) بمساعدة مقارنة (CMTP) (المكانيك المستمر لنسيج متعدد البلورات) تحصلنا على الثوابت الأنزوتروبية.

- لمعرفة الفارق الإرتونروبي في المعلم الإبتدائي والمعلم المقرب لمعرفة طبيعة الصفيحة. ومن أجل ذلك إقترحنا نموذج نظري يربط بين وجود تأثيرين مختلفين هما :

- قوة الضغط (Compression) وقوة الجذب السطحي (Cisaillement) وهذا النموذج يدعى ترابط ضغط-جذب.

الكلمات الافتتاحية: نمذجة ميكانيكية، معالجة الصفائح بالضغط، تغير انيزوتروبي، معايير القياس

البلاستيكي، تدرجات البنية



## Table des matières

	Page
<b>Liste des figures</b>	
<b>Liste des tableaux</b>	
<b>Introduction Générale</b> .....	1
<b>Chapitre I : Analyse bibliographique</b> .....	3
<b>1. Les aciers ferritiques hétérogènes</b> .....	4
1.1 Matériaux hétérogènes .....	4
1.2 Hétérogénéités texturales.....	5
1.2.1 Les hétérogénéités de déformation.....	5
1.2.2 Les hétérogénéité des traitements thermiques.....	6
1.2.3 Gradients de textures.....	6
1.2.4 Textures cristallographiques.....	7
1.2.4.1 Fonction de distribution des orientations cristallines.....	7
1.2.4.2 Texture de déformation dans les alliages ferritiques.....	9
1.2.4.3 Prise en compte des symétries.....	11
1.2.4.4 Prise en compte de l'effet de la texture.....	13
1.2.4 Modèles polycristallins.....	14
1.2.4.1 Principes de l'homogénéisation.....	14
1.2.4.2 Déformation de polycristaux et hypothèses de localisation.....	16
1.2.4.3 Hypothèses extrêmes et hypothèse dérivées de la plasticité polycristalline.....	16
• Modèle de Sachs (hypothèses de contrainte uniforme).....	16
• Modèle de Taylor.....	16
• Hypothèses de Taylor à déformations relâchées.....	17
• Lois de mélange simples.....	17
<b>2. Formulation et modélisation des lois de comportement</b> .....	18
2.1 Critères de plasticité.....	19
2.1.1 Critères de plasticité isotrope.....	20



2.1.1.1	Critère de Tresca.....	22
2.1.1.2	Critère de Von Mises.....	22
2.1.1.3	Critère de Hosford (1972).....	22
2.1.2	Critères de plasticité anisotropes orthotropes.....	22
•	Critère quadratique de Hill (1948).....	24
•	Critère non quadratique de Hill (1979).....	25
2.1.3	Coefficient d'anisotropie $R(\theta)$ .....	25
<b>3.</b>	<b>Approche C.M.T.P.....</b>	<b>27</b>
3.1	Travaux antérieurs sur la méthode CMTP.....	28
3.2	Formulation de l'approche CMTP .....	28
3.3	Application.....	32
3.3.1	Cas des métaux de structure c.f.c.....	32
3.3.2	Cas des métaux de structure c.c.....	32
3.4	Formulation de l'approche CMTP pour plusieurs composantes de textures en utilisant les tenseurs d'ordre 4 du type de l'élasticité.....	35
<b>4.</b>	<b>Caractère monoclinique des tôles laminées.....</b>	<b>38</b>
<b>Chapitre II :</b>	<b>Matériaux et procédures expérimentales.....</b>	<b>39</b>
<b>1</b>	<b>Tôle industrielle .....</b>	<b>40</b>
1.1	Matériau.....	40
1.2.	Procédures expérimentales.....	42
1.2.1	Anisotropie du comportement mécanique.....	42
1.2.1.1	Essais de traction.....	42
1.2.1.2	Détermination du coefficient de Lankford.....	42
1.2.1.3	Détermination de la contrainte d'écoulement.....	44
1.2.2	Caractérisations microstructurales.....	45
1.2.2.1	Microstructures.....	45
1.2.2.2	Textures.....	45
1.2.2.2.1	Rappels sur les conventions et représentations des textures.....	46
1.2.2.2.2	Calcul de la Fonction de Densité des Orientations Cristallines (FDOC).....	48
1.2.2.2.3	Détermination expérimentale des figures de pôles.....	48
1.2.2.2.4	Détermination des fractions volumiques des composantes de texture.....	50

<b>2. Tôle de laboratoire ferritique .....</b>	<b>57</b>
2.1 Matériau.....	57
2.2 Procédures expérimentales.....	57
2.2.1 Préparation des échantillons.....	57
2.2.2 Caractérisations microstructurales.....	57
2.2.3 Caractérisation microtexturales.....	59
2.2.3.1 Historique de l'analyse EBSD "Electron Back Scattered Diffraction".....	59
2.2.3.2 Eléments matériels.....	59
2.2.3.3 Principe théorique de la technique EBSD.....	61
2.2.3.4 Dépouillement des résultats.....	61
<b>Chapitre III : Modélisation mécanique.....</b>	<b>67</b>
<b>1 Tôle industrielle.....</b>	<b>68</b>
1.1 Tôle homogène.....	68
1.1.1 Cadre général.....	68
1.1.2 Traction uniaxiale.....	72
1.1.3 Traction orthogonale.....	73
1.2 Tôle hétérogène (Tôle Sandwich).....	77
1.2.1 .Approche simplifiée.....	77
1.2.2 .Approche généralisée.....	79
1.2.3 Application.....	83
1.2.3.1 Choix des paramètres des F, G, H et N .....	83
1.2.3.2 Résultats de la modélisation théorique de la tôle bicouche (approches simplifiée et généralisée).....	85
1.2.3.3 <b>Conclusions</b> .....	93
1.2.4 Approche C.M.T.P.....	93
1.2.4.1 Traction uniaxiale.....	93
1.2.4.2 Traction orthogonale.....	96
1.2.4.3 Résultats graphiques et discussions.....	97
<b>2. Tôle asymétrique.....</b>	<b>100</b>
2.1 Analyse du comportement monoclinique prismatique.....	100
2.2 Les principaux éléments du critère monoclinique.....	100
2.3 Symétrie monoclinique prismatique "cas général du laminage.".....	102
2.4 Illustration et évaluation quantitative du comportement non-orthotrope d'une tôle déformée par laminage asymétrique.....	106
2.4.1 Résultats des prévisions du comportement monoclinique.....	109
2.4.2 Estimation de l'écart à l'orthotropie .....	111

---

2.5 Approximation orthotrope du critère monoclinique prismatique .....	114
<b>Conclusion générale</b> .....	123
Perspective.....	124
<b>Références bibliographiques</b> .....	125
<b>Annexe 1</b> .....	134
<b>Annexe 2</b> .....	136
<b>Annexe 3</b> .....	138

Liste des figures

	<b>Chapitre I</b>	<b>Page</b>
<b>Figure I.1:</b> Définition des angles d'Euler.....		10
<b>Figure I.2 :</b> Exemple de fonction des orientations cristallines pour le laminage à chaud d'un acier ferritique. Coupes à $\varphi_1 = Cste$ .....		10
<b>Figure I.3 :</b> Exemple figure de pôles (110) et (100) pour le laminage à chaud d'un acier ferritique.....		10
<b>Figure I.4:</b> Représentation des fibres des principales textures pour les métaux à structure cubique centrée dans l'espace d'Euler. (a) espace d'Euler; (b) section à $\varphi_2 = 45^\circ$ dans l'espace d'Euler.....		12
<b>Figure I.5:</b> Plans de symétrie pour un échantillon centré dans l'épaisseur de la tôle (hachuré) et un échantillon excentré (plein).....		12
<b>Figure I.6:</b> Évolution d'un critère en écrouissage isotrope.....		21
<b>Figure I.7 :</b> Différents modes de déformations.....		21
<b>Figure I.8:</b> Critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales.....		23
<b>Figure I.9 :</b> Critère de Von mises dans l'espace des contraintes principales.....		23
<b>Figure I.10 :</b> Surface d'écoulement.....		26
<b>Figure I.11:</b> Évolution du critère de Hill (1948) en fonction du coefficient de Lankford.....		26
<b>Figure I.12 :</b> Section de l'espace des contraintes faisant apparaître les sommets $S_i$ , $S_j$ et $S_k$ du polyèdre critique.....		31
<b>Figure I.13</b> Intersection du polyèdre critique et de la surface d'écoulement ellipsoïdale C.M.T.P avec les plans (a) : (A, B), (b) : (A, F), (c) : (F, G) dans un espace de contraintes à cinq dimensions (A, B, F, G et H).....		31
<b>Figure I.14:</b> Variation avec $\xi$ des paramètres.....		34
<b>Figure I.15 :</b> Variation avec $\xi$ de l'écart moyen $r = \sqrt{\frac{\sum \epsilon_i^2}{n}}$ , permettant de déterminer la qualité de l'ajustement de l'ellipsoïde (E) au polyèdre critique ( $P_c$ ).....		34
<b>Figure I.16:</b> Variations des paramètres $\alpha$ et $\beta$ du critère de plasticité C.M.T.P en fonction du rapport $\xi = \tau_c' / \tau_c$ des cissons résolues critiques associées respectivement aux systèmes $\{112\}$ $\langle 111 \rangle$ et $\{110\}$ $\langle 111 \rangle$ .....		34
<b>Figure I.17 :</b> Symétrie orthotrope dans le laminage des tôles.....		37
<b>Figure I.18 :</b> Schéma du laminage asymétrique des tôles		37
<b>Chapitre II</b>		
<b>Figure II.1 :</b> Schéma de la machine de traction INSTRON.....		41
<b>Figure II.2 :</b> Dimensions des éprouvettes de traction uniaxiale.....		41
<b>Figure II.3 :</b> Eprouvette de traction inclinée de $\theta$ par rapport à la direction de laminage (DL).....		41
<b>Figure II.4:</b> Évolution du coefficient de Lankford expérimental $R(\theta)$ dans le plan de la tôle.....		43
<b>Figure II.5:</b> Courbe contrainte déformation selon les différentes directions dans le plan de la tôle...		43

<b>Figure II.6:</b> Evolution de la contrainte normalisée $\sigma(\theta)/\sigma(0)$ dans le plan de la tôle.....	47
<b>Figure II.7 :</b> Géométrie du gradient de texture à travers l'épaisseur de la tôle.....	47
<b>Figure II.8 :</b> Micrographies optiques de la tôle industrielle selon les trois plans orthogonaux.....	47
<b>Figure II.9:</b> Représentation schématique de Goniomètre 4 cercles.....	49
<b>Figure II.10:</b> Principe de diffraction de Bragg.....	49
<b>Figure II.11:</b> Définition des repères de la tôle et de l'échantillon.....	49
<b>Figure II.12 :</b> Figures de pôles expérimentales mesurées en surface de la tôle.....	51
<b>Figure II.13 :</b> Figures de pôles expérimentales mesurées en mi-épaisseur de la tôle.....	51
<b>Figure II.14 :</b> FDOC calculée en surface de l'échantillon affichant une symétrie monoclinique.....	52
<b>Figure II.15:</b> FDOC de la tôle industrielle en mi-épaisseur présentant une symétrie orthotrope.....	53
<b>Figure II.16 :</b> Sections à $\Pi_2 = 45^\circ$ montrant les zones de symétrie monoclinique en surface et de symétrie orthotrope en mi-épaisseur.....	56
<b>Figure II.17:</b> Figures de pôles recalculées pour une symétrie triclinique.....	56
<b>Figure II.18:</b> Micrographie optique de la section (DL, DN) de la tôle laminée asymétriquement.....	58
<b>Figure II.19:</b> Microscope Électronique à Balayage JSM 6500F.....	58
<b>Figure II.20:</b> Plan de caractérisation (DL, DN) choisi normal à la direction DT.....	60
<b>Figure II.21:</b> Représentation schématique de la technique EBSD connectée à un MEB.....	60
<b>Figure II.22:</b> Exemple de diagramme de Kikuchi.....	60
<b>Figure II.23 :</b> Carte représentative d'un contraste de bandes ( <i>Band Contrast</i> ) de l'échantillon recuit.....	62
<b>Figure II.25 :</b> Brut de figures de pôles {100}, {112}, {111}, {110} obtenues à partir de mesures EBSD.....	64
<b>Figure II.26:</b> Figure de pole inverse de l'échantillon d'étude.....	64
<b>Figure II.27:</b> Figures de pôles des analyses EBSD recalculées à l'aide de logiciel de MTM-FHM.....	64
<b>Figure II.28:</b> FDOC calculée à partir de la technique EBSD suivant le plan (DL, DT) de la tôle ferritique de laboratoire.....	66
<b>Figure II.29:</b> Sections à $\Pi_2 = 0^\circ$ et $45^\circ$ montrant les zone de symétrie monoclinique.....	66

### Chapitre III

<b>Figure III.1 :</b> Schéma de l'essai de traction pour la détermination du coefficient de Lankford $R(\angle)$ d'une tôle homogène.....	69
<b>Figure III.1 :</b> Représentation schématique d'une tôle hétérogène (tôle bicouches).....	69
<b>Figure III.3:</b> Contrainte normalisée calculée par la méthode simplifiée.....	86
<b>Figure III.4:</b> Coefficient de Lankford normalisé calculé par la méthode simplifiée.....	87
<b>Figure III.5:</b> Contrainte normalisée calculée par la méthode généralisée.....	88
<b>Figure III.6 :</b> Coefficient de Lankford normalisé calculé par la méthode généralisée.....	89
<b>Figure III.7 :</b> Coefficient de Lankford calculé par les 2 méthodes (simplifiée et généralisée) (a) - $\angle = 0.3$ et (b) - $\angle = 0,7$ .....	90
<b>Figure III.9:</b> Paramètres d'anisotropie calculés par la méthode simplifiée.....	91

<b>Figure III.10 :</b> Coefficient de Lankford (a) et contrainte d'écoulement (b) calculés pour des essais de traction (uniaxiale et orthogonale) avec $F = 0,25$ , $G = 0,75$ , $H = 1$ et $N = 1$ , (c) Vitesse de cisaillement dans le cas de la traction uniaxiale.....	92
<b>Figure III.11:</b> Evolution des propriétés mécaniques calculées en traction uniaxiale et orthogonale par l'approche C.M.T.P dans le plan de la tole pour un materiau de texture Cube.....	98
<b>Figure III.12:</b> Evolution des propriétés mécaniques calculées en traction uniaxiale et orthogonale par l'approche C.M.T.P dans le plan de la tole pour un materiau de texture Goss.....	98
<b>Figure III.13 :</b> Evolutions des propriétés mécaniques calculées par l'approche C.M.T.P au niveau des deux couches de la tôle.....	99
<b>Figure. III.14:</b> Comparaison des résultats de mesure et de calcul par l'approche C.M.T.P des propriétés mécaniques.....	99
<b>Figure III.15:</b> Procédé de laminage présentant les types de symétrie à travers l'épaisseur de la tôle.....	106
<b>Figure III.16:</b> Evolution des paramètres mécaniques dans le plan de la tole pour un materiau (50%Cube +50% Goss).....	107
<b>Figure III.17:</b> Géométrie de l'essai de "Compression Cisaillement Combinés" (CSC).....	107
<b>Figure III.18:</b> Evolution des vitesses de déformation $\dot{\epsilon}_y(\theta)/\dot{\epsilon}_{xx}(0)$ dans le plan de la tôle.....	110
<b>Figure III.19:</b> Evolution de contrainte de cisaillement dans le plan de la tôle.....	110
<b>Figure III.20:</b> Evolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la contrainte de compression pour les diverses orientations dans le plan de la tôle.....	112
...	
<b>Figure III.21:</b> Evolution du coefficient de Lankford dans la direction de laminage en fonction de la fraction volumique de diverses composantes de texture.....	112
<b>Figure III.22 :</b> Evolution du coefficient de Lankford dans le plan de la tôle pour les diverses composantes de texture.....	113
<b>Figure III.23:</b> Représentation de l'écart entre les tenseurs orthotrope et monoclinique.....	113
<b>Figure III.24:</b> Evolution de la norme de la partie monoclinique global.....	116
<b>Figure III.25:</b> Evolution de la norme de la partie monoclinique $\ M'_{pm}\ $ pour chaque composante de texture.....	117
<b>Figure III.26 :</b> Evolution du a)- $R(\theta)$ et de b)- $\sigma(\theta)/\sigma(0)$ dans le plan de la tôle pour les deux repères (initial et celui tourné de $35^\circ$ ).....	121
<b>Figure III.27 :</b> Evolution du a)- $\tau(\theta)/\tau(0)$ et b)- des effets monocliniques dans le plan de la tôle pour le repère initial (ligne continue) et celui tourné de $35^\circ$ autour de DT (ligne discontinue).....	121

### Annexes

<b>Figure A.1:</b> Schématisation de la simulation des orientations idéales des composantes dans les deux couches de l'épaisseur de la tôle à partir de la principale figure de pôle (100) pour une symétrie triclinique.....	134
<b>Figure A.2:</b> Schématisation de la simulation des orientations idéales des composantes dans la	135

---

tôle à partir de la principale figure de pôle (100) pour une symétrie triclinique.....

<b>Liste des tableaux</b>	<b>Page</b>
<b>Tableau I.1</b> : Fibres représentatives des matériaux cubiques centrés.....	9
<b>Tableau II.1</b> Composition chimique de l'acier AISI 439-430Ti (% massique).....	42
<b>Tableau II.2</b> : Valeurs expérimentales du coefficient de Lankford selon la valeur de l'angle ( $\theta$ ) par rapport à la direction de laminage DL.....	44
<b>Tableau II.3</b> : Valeurs expérimentales de la contrainte d'écoulement $\hat{\sigma}(\lambda)$ pour une déformation $\varepsilon = 0.2\%$ .....	45
<b>Tableau II.4</b> : Fractions volumiques calculées des différentes orientations.....	54
<b>Tableau II.5</b> : Fractions volumiques de composantes de texture dérivées des calculs des FDOC.....	65
<b>Tableau III.1</b> Les divers paramètres d'anisotropie utilisés dans les calculs.....	85
<b>Tableau III.2</b> : Paramètres d'anisotropie pour chaque composante de texture et pour l'ensemble de la tôle.....	111
<b>Tableau III.3</b> : Evaluation de l'écart au comportement orthotrope.....	114
<b>Tableau III.4</b> : Paramètres d'anisotropie pour chaque composante de texture et pour l'ensemble de la tôle dans les axes tournés par $\psi = 35^\circ$ .....	118
<b>Tableau III.5</b> : Evaluation de l'écart au comportement orthotrope dans les axes tourné par $\psi = 35^\circ$ .....	118



## Notations

$F, G, H, L, M, N$	Paramètres anisotropes orthotrope du critère de Hill
$F', G', H', L', M', N'$	Paramètres anisotropes orthotrope du critère de Hill après rotation autour de DT
$p, q, r, t$	Paramètres anisotropes associés à la symétrie monoclinique prismatique
$p', q', r', t'$	Paramètres anisotropes associés à la symétrie monoclinique prismatique après rotation autour de DT
$H$	La matrice Hessienne
$\sigma_{ij}^1$	Tenseur de contraintes dans la 1 <sup>re</sup> couche de tôle sandwich
$\sigma_{ij}^2$	Tenseur de contraintes dans la 2 <sup>eme</sup> couche de tôle sandwich
$\sigma_0$	Contrainte d'écoulement équivalente
$\tau$	Contrainte de cisaillement
$\sigma(\theta)$	Contrainte d'écoulement dans le plan de la tôle
$\dot{\epsilon}$	Vitesse de deformation
$\dot{\epsilon}_{ij}$	Tenseur de vitesses de déformation
$\dot{\epsilon}_{ij}^1$	Tenseur de vitesses de déformation dans la 1 <sup>re</sup> couche
$\dot{\epsilon}_{ij}^2$	Tenseur de vitesses de déformation dans la 2 <sup>eme</sup> couche
$R(\theta)$	Coefficient d'anisotropie dans le plan de la tôle
$\lambda$	Multiplicateur plastique
$\theta$	angle entre l'axe $x_1$ et n'importe quelle autre direction dans le plan de la tôle
$e_1$	Epaisseur de la 1 <sup>re</sup> couche de la tôle hétérogène
$e_2$	Epaisseur de la 2 <sup>eme</sup> couche de la tôle hétérogène
$e$	Epaisseur totale de la tôle
$\lambda$	Fraction volumique
$\Lambda^2$	Axe de symétrie d'un angle $2\pi/n$ .
$s_{ij}$	Tenseur des contraintes deviatorique
$s'_{ij}$	Tenseur des contraintes deviatorique dans une nouvelle base.
$X, Y, Z$	Système de coordonnées de l'échantillon
$x, y, z$	Système de coordonnées de l'échantillon
$x', y', z'$	Système de coordonnées de l'échantillon après rotation autour de DT
$Q_8, Q_6, Q_4, Q_2, Q_0$	Constantes
DL, DT, DN	Direction de laminage, transverse et normale
$M$	Tenseur de 4 <sup>ieme</sup> ordre associé critère quadratique
$M_0$	Partie orthotrope de $M$
$M_{pm}$	Partie purement monoclinique de $M$
$\sigma = \sigma_{33}$	Contrainte de compression normale dans 'CSC test'
$\phi_1, \Phi, \phi_2$	Angles d'Euler
$\psi$	Angle de la tôle autour DT
$\psi_0$	Valeur de $\psi$ quand $\ M_{pm}\ $ est minimisé



## Introduction Générale

Les aciers laminés ferritiques sont des matériaux polycristallins qui comportent plusieurs phases de caractéristiques mécaniques différentes ; ce qui signifie que des mécanismes à la fois intergranulaires et intragranulaires sont à l'origine du comportement à l'échelle macroscopique. Le développement industriel des aciers inoxydables ferritiques, en particulier, se justifie, entre autres, par leur résistance aux hautes températures et leur caractéristique d'emboutissabilité. Ces propriétés sont très recherchées notamment dans la fabrication des pots d'échappement "*haut de gamme*" dans les industries d'automobiles. De tels aciers se caractérisent par leur teneur massique en chrome (11÷17) % qui leur confère leurs propriétés inoxydables et par l'absence du nickel qui favorise leur structure ferritique. En outre, le faible taux de carbone a pour effet de réduire la précipitation de carbures au niveau des joints de grains du matériau, évitant ainsi le phénomène de corrosion intergranulaire.

Depuis l'élaboration du matériau jusqu'à l'étape de sa mise en forme, le matériau acquiert une histoire qui lui confère une texture cristallographique et morphologique, une taille de grains, des fractions volumiques de phases, des précipités ou encore un taux d'éléments en solution solide. Ces éléments physiques et microstructuraux sont d'une importance capitale pour la représentation du matériau à l'état initial. Au cours des différentes sollicitations, le matériau développe une structure interne complexe plus ou moins hétérogène à différentes échelles. L'identification du comportement de chaque phase, dans des conditions de chargement (monotone simple, complexe ou cyclique) permet de décrire correctement le comportement macroscopique du matériau et d'optimiser la microstructure par le contrôle des procédés d'élaboration et de traitements.

Ainsi, l'objectif principal de cette thèse, consiste dans premier temps à proposer et valider une démarche mettant en œuvre des approches théoriques d'homogénéisation et de modélisation d'un gradient de texture réparti à travers l'épaisseur d'une tôle ferritique industrielle déformée à chaud par laminage classique (symétrique). Cette démarche passe par une analyse et une meilleure compréhension du comportement mécanique séparément au niveau de chaque couche et globalement pour tout le matériau.

Dans une deuxième partie, nous examinerons un autre type de tôle obtenue dans le laboratoire par laminage asymétrique, là où l'effet des cisaillements sera encore plus intense dans le plan de la tôle. Nous proposons un modèle de calcul théorique pour mettre en évidence le caractère mécanique monoclinique prismatique de la tôle, Le modèle proposé, désigné sous le nom de test de "Compression Cisaillement Combinés" (CSC), est caractérisé d'un côté par l'application d'une contrainte de cisaillement parallèle au plan de la tôle lors de l'entraînement du laminé dans l'emprise métal cylindre et d'autre part par l'application d'une contrainte de cisaillement parallèle au plan de la tôle.

Le premier chapitre sera consacré à, une synthèse bibliographique des principaux travaux expérimentaux et théoriques effectués sur les aciers ferritiques. Les caractéristiques principales, relatives aux textures cristallographiques et leur hétérogénéité (mécanique), en tenant compte de la symétrie matérielle cristalline de la matière, seront décrites.

Nous examinons par la suite les différentes hypothèses d'homogénéisation et de localisation issues de la littérature permettant de prendre en considération l'anisotropie

mécanique et structurale. Nous présenterons une synthèse de formulation des lois de comportement plastique (critères de plasticité les plus classiques isotropes et non isotropes, quadratiques et non quadratiques).

Une présentation de l'approche C.M.T.P, reposant sur des bases physiques combinant deux approches différentes, sera donnée. Elle a trait à la fois à une approche microscopique de la déformation, prenant en considération la texture cristalline, et à une approche macroscopique (phénoménologique), à l'échelle de la mécanique des milieux continus.

Dans un deuxième Chapitre, on présente les matériaux d'études tout en abordant le protocole expérimental relatif aux diverses techniques utilisées pour leur caractérisation.

Les résultats et les discussions, inhérents aux essais de traction uniaxiale réalisés sur la tôle industrielle, serviront de base pour la prédiction de l'anisotropie mécanique globale du matériau pour en déduire enfin les grandeurs mécaniques correspondantes.

Pour ce qui est de la tôle de laboratoire, ayant subi le laminage asymétrique, les évolutions de la microstructure cristallographique et l'influence du procédé de fabrication sur la symétrie locale de différentes proportions texturales seront considérées.

Enfin, dans un troisième chapitre, nous utilisons des modèles pour décrire les phénomènes décrits plus haut, en utilisant des approches analytiques et numériques. En effet, les essais effectués sur une tôle hétérogène (tôle industrielle) ne donnent que la réponse mécanique globale de celle-ci et ne permettent pas d'évaluer l'effet de zones de comportement différent suivant la profondeur du matériau. Ainsi, un modèle mécanique, basé sur les hypothèses de Taylor et de Sachs, sera donc proposé afin de mettre en évidence l'hétérogénéité du comportement rhéologique de chaque couche à travers l'épaisseur des tôles.

Pour la caractérisation du comportement monoclinique des tôles, en fait, les essais mécaniques classiques dans le plan de la tôle, ne permettent pas de mettre en évidence les termes non orthotropes. En se basant sur les propriétés de calcul tensoriel, on peut estimer l'écart à l'orthotropie de la tôle (tôle de laboratoire).

L'approche C.M.T.P. (Continuum Mechanics of Textured Polycrystals), sera utilisée dans les deux cas de figures (tôles industrielle et de laboratoire) afin de déterminer les paramètres d'anisotropie et de valider son éventuelle utilisation par rapport aux résultats expérimentaux décrits dans le Chapitre II.

Nous terminerons notre travail par une conclusion générale.



# Chapitre I

## Partie bibliographique

La connaissance du comportement mécanique des aciers ferritiques hétérogènes et de leur sensibilité à la vitesse de déformation et à la température est essentielle afin de maîtriser les procédés de mise en forme et la tenue en service des aciers sous sollicitation dynamique. Les aciers destinés à l'emboutissage par exemple sont caractérisés par différentes propriétés mécaniques. Dans de tels matériaux, la texture de recuit est fortement influencée par la texture héritée du laminage à chaud antérieur. En outre, le contact tribologique métal cylindre au cours de procès de déformation engendre des hétérogénéités structurales. Néanmoins, le problème des hétérogénéités de propriétés mécaniques dans l'épaisseur des tôles reste posé.

Dans ce chapitre à caractère bibliographique, nous présentons une synthèse des travaux sur la les tôles d'aciers ferritiques hétérogènes présentant des forts gradients de textures dans leurs épaisseurs. Nous présentons aussi les outils théoriques à caractère physique, métallurgique, ou mécanique qui facilitent la compréhension et la prévision des anisotropies et des hétérogénéités des propriétés mécaniques induites par les textures cristallographiques. Nous présentons ensuite l'influence de ces transformations sur le comportement mécanique des aciers ferritiques en utilisant une approche microscopique basée sur la théorie de la plasticité des cristaux est ensuite présentée. Une revue sur l'écoulement plastique, les différentes lois phénoménologiques utilisées dans l'approche macroscopique et les différents critères d'écoulement d'anisotropie, sera donnée.

## 1. Les aciers ferritiques hétérogènes

### 1.1 Matériaux hétérogènes

L'hétérogénéité de comportement d'un polycristal a été considérée dans de nombreux travaux, à savoir le cas d'un polycristal en traction simple [1] et celui de matériau métalliques biphasés [2]. Comme le signalent Ces hétérogénéités peuvent être aussi marquées aussi bien entre grains qu'entre différentes zones d'un même grain, comme il a été signalé par Bretheau [3]. De telles hétérogénéités sont surtout liées aux différences de comportement élasto-viscoplastique entres grains d'orientations cristallographiques différentes. Cependant, il faut noter que les hétérogénéités de comportement dans un monocristal ne sont pas aussi prononcées que dans un polycristal [4]. Elles conduisent, au cours de l'écrouissage, au développement de microstructures à l'intérieur des grains, comme il a été décrit par Hansen et Jensen [5]. Ces microstructures sont formées par des dislocations qui s'accumulent en formant des frontières délimitant l'espace en régions à plus faibles densités de dislocations. Cette observation de cellules de dislocations a été reportée dans de nombreux travaux [6, 7].

Dans un premier temps, la prise en compte de la microstructure réelle d'un polycristal a été limitée à une description à deux dimensions pour le cas de petites déformations [8, 9]. Les travaux de Canova *et al* [10] portent aussi sur de telles configurations; leur originalité réside dans les lois de comportement prenant en compte les interactions entre dislocations. On retrouve également la prise en compte des densités de dislocations sur le comportement d'un polycristal en traction simple par la méthode des *éléments finis* [11]; une distribution des déformations à l'intérieur des grains semblable à celle mesurée expérimentalement a été obtenue. Le modèle utilisé prévoit un partitionnement des grains en domaines se distinguant par des systèmes actifs différents et un accroissement de la

densité de dislocations essentiellement près des grains, malgré la présence d'une bande de localisation de la déformation axiale.

Ces derniers travaux énumérés ci-dessus, concernant la description du comportement intragranulaire au sein d'un polycristal, sont les plus avancés car ils présentent une modélisation en grandes déformations avec la prise en compte de lois phénoménologiques.

Afin de s'approcher au mieux de la microstructure réelle d'un matériau hétérogène de manière systématique, Ghosh et Moorthy [12] ont développé une approche par éléments finis en deux dimensions; chaque élément fini est une cellule de "Voronoi" comportant un nombre d'arêtes, une forme et une taille qui sont variables d'un élément à l'autre. Cette méthode est intéressante car chaque grain est décrit singulièrement, de manière simple et systématique, mais elle ne permet pas l'étude du comportement intracellulaire et elle reste pour l'heure bidimensionnelle.

L'objectif relatif aux mécanismes de l'hétérogénéité des matériaux est d'estimer les propriétés macroscopiques du matériau homogène équivalent. Un des premiers travaux dans ce domaine revient à Hill [13]. Le moyen de substituer un milieu homogénéisé par un matériau hétérogène a été obtenu moyennant la théorie mathématique d'homogénéisation [14,15]. Depuis, la méthode a été élargie au comportement plastique des matériaux métalliques [16, 17]. Une grande partie des arguments développés pour l'homogénéisation était établie de manière générale pour trouver des applications dans d'autres domaines. Les travaux correspondants ont engendré un grand nombre d'études numériques [18-20] qui ont été développées indépendamment des études micromécaniques précédentes.

Pour le laminage, par exemple, les variations de la distribution des textures à travers l'épaisseur d'une tôle laminée ont été observées depuis 1962 par Wassermann et al. [21]. L'origine des hétérogénéités de texture issues du laminage à froid de monocristaux de cuivre a été étudiée par Asbeck et al. [22]. Le rapport entre la longueur du foyer de déformation et l'épaisseur de l'échantillon y était le paramètre le plus influant, ainsi, un rapport inférieur à 0.5 contribuait fortement au développement d'intenses hétérogénéités de texture à travers l'épaisseur de la tôle. A titre d'exemple, au cours des premières passes de dégrossissage (laminage à chaud industriel), de tels comportements peuvent avoir lieu, toutefois, dans les opérations ultérieures de laminage à froid (tandem), le rapport sera plus grand et les variations de texture seront minimisées à travers l'épaisseur. D'autres investigations menées par Hirsch [23], portant sur la caractérisation des textures de tôles laminées au laboratoire, montrent que celles-ci se concentrent plutôt au niveau de la section médiane de la tôle.

## 1.2 Hétérogénéités texturales

Les problèmes de l'hétérogénéité et de l'anisotropie de propriétés mécaniques des matériaux subissant de grandes déformations plastiques et/ou différents traitements thermiques posent d'énormes problèmes aux industriels. Leur apparition peut être imputée à plusieurs causes et origines [24].

### 1.2.1 Les hétérogénéités de déformation



Pour l'étude des hétérogénéités de déformation, l'ensemble des sciences de la matière a été mis à contribution. Dans le champ mécanique, plusieurs approches ont été

explorées. Elles sont adaptées à des échelles différentes et à des degrés plus ou moins fins de connaissance du matériau. La mécanique est utilisée sous deux formes :

- discrète : qui se rapporte à l'étude des mouvements des dislocations (phénomène microscopique).
- Des milieux continus : dès que l'on considère des distances de plusieurs nanomètres, il est licite de supposer la continuité de la matière. Les joints de grains constituent néanmoins une frontière par rapport à laquelle toute analyse doit se situer. Deux classes de méthodes

Il existe plusieurs classifications des hétérogénéités de déformation selon le niveau de l'échelle d'étude:

- microscopique qui est une conséquence d'un adoucissement local intragranulaire (bandes de glissement) [25].
- mésoscopique due aux propriétés métallurgiques du matériau et à la présence de zones dures et de zones molles (différences de densité de dispersoïdes, grains restaurés ou recristallisés, bandes de cisaillement etc [26.]
- macroscopique due au processus de déformation lui-même (phénomènes de friction, gradient de température, procédé, etc [27].

### 1.2.2 Les hétérogénéité des traitements thermiques

Lorsqu'ils sont effectués ultérieurement à la déformation, ils régissent certaines des propriétés métallurgiques du matériau (essentiellement la trempe). Au niveau de la microstructure du matériau, plusieurs voies de description sont à considérer importantes: les hétérogénéités de texture cristallographique, la texture morphologique et/ou topologique et les hétérogénéités de recristallisation. Notre intérêt d'étude sera focalisé essentiellement sur les hétérogénéités macroscopiques de déformation et sur leur influence sur la texture cristallographique.

### 1.2.3 Textures cristallographiques

Au cours des dernières décennies, de nombreux travaux ont été menés sur les textures cristallographiques. De part les innombrables problèmes posés aux industriels, ces travaux concernent, pour la plupart, la mise en forme par laminage à chaud de matériaux de structures cristallines cubiques. Néanmoins, pour une structure cristallographique donnée (par exemple CFC), tous les matériaux présentent des textures cristallographiques familières dont la variable physique influant est l'énergie de défauts d'empilement [28]. En particulier, les tôles d'aciers ferritiques laminées à chaud, peuvent présenter généralement de forts gradients de texture cristallographiques à travers leur épaisseur ou le long de la direction normale.

En outre, la tôle est normalement laminée à froid par la suite avant de subir un traitement de recuit permettant une recristallisation, en l'occurrence l'obtention d'une texture finale appropriée aux transformations à froid ultérieures. Dans ce contexte, il est

souhaitable de développer des orientations ayant des plans {111} parallèles aux surfaces de la tôle, appelées  $\gamma$ -fibre [29,30].

Si au cours du laminage d'une tôle l'état de contrainte peut être considéré comme étant un état de contrainte plane, les facteurs géométriques, les frottements au niveau du foyer de déformation, les gradients de déformations et les températures, peuvent causer d'importantes déviations d'un tel état.

Les hétérogénéités de texture résultent également du cisaillement mécanique imposé par les cylindres de laminage à la peau de la tôle. Pour le laminage asymétrique, par exemple, les conditions asymétriques sont imposées par les différences entre les vitesses de rotation ou les diamètres des deux cylindres de travail. Ces conditions font que les forces normales exercées sont réduites par rapport au laminage conventionnel et les surfaces de contact avec les cylindres de travail subissent, en contre partie, des cisaillements très significatifs [31,32]. L'évolution des gradients de texture à travers l'épaisseur pendant le laminage à froid a été rapportée en détail [33-35].

Les études menées sur les microstructures de déformation des aciers ont été la plupart du temps motivées par un désir de mieux comprendre l'évolution de comportement et de texture de recristallisation des tôles laminées à froid et recristallisées. Ce n'est qu'au cours des années 1980 que des études quantitatives des textures et des effets des paramètres de déformation ont vu le jour. Des outils mathématiques ont été proposés pour la description quantitative des textures telles que le calcul des fonctions de distribution des orientations cristallines (F.D.O.C.). Par ailleurs, des dispositifs expérimentaux de laboratoire, visant à reproduire les modes de déformation industriels, ont été mis en place, notamment les dispositifs de compression plane servant à modéliser le laminage à l'échelle industrielle. En outre, l'accroissement des capacités informatiques a permis la prédiction de textures par diverses approches afin de pouvoir les comparer aux textures observées expérimentalement [36].

#### 1.2.4.1 Fonction de distribution des orientations cristallines

Au cours des traitements thermomécaniques, la déformation des grains composant le polycristal est accompagnée d'une rotation de leur réseau cristallin vers une ou plusieurs orientations préférentielles caractéristiques. La distribution de ces orientations n'étant, en général pas aléatoire, on parle alors de texture cristallographique. Cette texture est traditionnellement représentée par la fonction de distribution des orientations cristallines, notée  $f(g)$  dont la détermination nécessite la résolution de relations analytiques la reliant à des données expérimentales telle que par exemple les figures de pôles ou les orientations individuelles. Cette fonction de densité des orientations des cristallites est définie par la fraction volumique  $dV/V$  du matériau ayant une orientation  $g$  à  $dg$  près:

$$f(g) = f(\varphi_1, \phi, \varphi_2) = \frac{dV/V}{dg}$$

$g$  pouvant être exprimée en termes d'angles d'Euler, l'élément différentiel d'orientation  $dg$  s'écrira sous la forme :

$$dg = \frac{1}{8\pi^2} \sin \phi \, d\phi \, d\varphi_1 \, d\varphi_2$$

Dans le cas d'orientations cristallines aléatoires, chaque élément d'orientation, ainsi défini, contient la même fraction volumique de cristallites, si bien que :

$$f(g)_{\text{random}} = 1$$

Puisque  $f(g)$  est une fonction de densité, elle est positive et normée à l'unité :

De manière conventionnelle, la rotation  $g = \{\varphi_1, \phi, \varphi_2\}$  peut être caractérisée aussi par les trois angles d'Euler (Fig. I.1), qui sont définis comme étant trois rotations successives autour d'axes privilégiés et sont définis comme suit.

Une première rotation d'un angle  $\varphi_1$  autour de l'axe Z (DN) du repère macroscopique suivie d'une deuxième rotation d'un angle  $\phi$  autour du nouvel axe ( $x'$ ) et finalement une dernière rotation d'un angle  $\varphi_2$  autour de l'axe ( $z'$ ).

Les trois rotations peuvent être mathématiquement transcrites par le triplet d'Euler  $g = \{\varphi_1, \phi, \varphi_2\}$  avec  $0^\circ < (\varphi_1, \phi, \varphi_2) < 360^\circ$  :

$$g(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad g(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'orientation du grain est alors représentée par un point représentatif dans l'espace des orientations ou espace d'Euler.

Sous forme matricielle, la matrice de changement de base  $M(g)$  permettant de passer du repère cristal au repère échantillon est définie par :

$$M(g) = g(\varphi_1).g(\phi).g(\varphi_2)$$

$$M(g) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \phi & \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \phi & \sin \varphi_2 \cos \phi \\ -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \phi & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \phi & \cos \varphi_2 \sin \phi \\ \sin \varphi_1 \sin \phi & -\cos \varphi_1 \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

De cette façon, la détermination de la fonction  $f(g)$  permet une description quantitative complète de la texture cristallographique. En général, elle n'est pas déterminée directement par l'expérience proprement dite, mais plus précisément, calculée à partir des figures de pôles expérimentales. Sa représentation en deux dimensions consiste en des coupes à  $\varphi_1$  ou  $\varphi_2$  constants dont un exemple est montré en Figure I.2 pour le cas du laminage d'un matériau cubique centré.

Seule une F.D.O.C. contient la totalité de l'information concernant la texture d'un matériau. Néanmoins, les figures de pôles permettent aussi de caractériser sous une

forme graphique les textures (Fig. I.3). Une figure représente l'orientation de la famille de plans  $\{h\ k\ l\}$  dans un des plans du repère macroscopique qui est, en général, le plan de laminage. Il ne s'agit donc que d'une information partielle car en principe il faut deux figures de pôles complètes, et dans la pratique trois ou quatre figures de pôles incomplètes différentes pour reconstruire une F.D.O.C.

#### 1.2.4.2 Texture de déformation dans les alliages ferritiques

La texture des aciers inoxydables ferritiques après le laminage à froid et le recuit postérieur est fortement dépendante de la texture de laminage à chaud.

Les textures de laminage à froid et de recuit des aciers inoxydables ferritiques et celles des aciers sans interstitiels (IF Steels) ou à bas carbone sont les plus étudiées; Le laminage à chaud de ces derniers est normalement effectué dans le domaine austénitique dans lequel des mécanismes de maillage successifs, associés à la recristallisation dynamique discontinue (RDD) produisent une texture aléatoire [37], comme Gavard l'a observé pour les aciers inoxydables austénitiques [38].

Les textures des tôles laminées sont généralement représentées par des textures dites de "fibre". Une texture de fibre est la réunion d'un grand nombre d'orientations préférentielles admettant une direction cristallographique commune dans le repère lié à la tôle. La texture est dite complète ou totale lorsque les différentes orientations préférentielles constituant la texture se déduisent les unes des autres par rotation d'un angle  $\theta$  entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ . Les textures cristallographiques des tôles ferritiques se composent généralement de deux fibres ( $\alpha$  et  $\gamma$ ) et un couple d'orientation pour chaque composante individuelle. La *fibre- $\alpha$*  contient les orientations pour lesquelles la direction cristallographique  $\langle 110 \rangle$  est parallèle à la direction de laminage (DL) tandis que la *fibre- $\gamma$*  regroupe les orientations de direction  $\langle 111 \rangle$  parallèle à la direction normale (DN). Ces deux fibres peuvent être représentées par des segments de droites, dans l'espace d'Euler (Fig. I.4a), définies par:  $\varphi_1 = 0^\circ$ ,  $\varphi_2 = 45^\circ$  et  $\phi$  variable pour la *fibre- $\alpha$*  et  $\varphi_2 = 45^\circ$ ,  $\phi = 55^\circ$  et  $\varphi_1$  variable pour la *fibre- $\gamma$*  (Fig. 1.4b). En plus de ces fibres, les composantes les plus fréquentes sont celles de Goss  $\{110\} \langle 001 \rangle$  et Cube  $\{100\} \langle 001 \rangle$ . D'autres importantes composantes de texture de laminage des tôles dans les aciers cubiques centrés sont F  $\{111\} \langle 112 \rangle$ , I  $\{112\} \langle 110 \rangle$  et H  $\{001\} \langle 110 \rangle$  [39].

Une meilleure description des textures de déformation de matériaux à maille cubique centrée consiste à procéder à un recensement de l'ensemble des textures de déformation dont les principales sont regroupées dans le Tableau I.1.

Tableau I.1 : Fibres représentatives des matériaux cubiques centrés		
Fibre	Axe de fibre	Principales composantes de la fibre
$\alpha$	$\langle 110 \rangle // DL$	$\{001\} \langle 110 \rangle$ . $\{112\} \langle 110 \rangle$ . $\{111\} \langle 110 \rangle$
$\gamma$	$\{111\} // DN$	$\{111\} \langle 110 \rangle$ . $\{111\} \langle 112 \rangle$
$\eta$	$\langle 001 \rangle // DL$	$\{001\} \langle 100 \rangle$ . $\{011\} \langle 100 \rangle$
$\xi$	$\{011\} // DN$	$\{011\} \langle 100 \rangle$ . $\{011\} \langle 211 \rangle$ . $\{011\} \langle 111 \rangle$ . $\{011\} \langle 011 \rangle$
$\varepsilon$	$\{110\} // DT$	$\{001\} \langle 110 \rangle$ . $\{112\} \langle 111 \rangle$ . $\{111\} \langle 112 \rangle$ . $\{011\} \langle 100 \rangle$

La plupart de ces fibres sont schématisées dans la section de  $\varphi_2 = 45^\circ$  dans l'espace d'Euler, ce qui donne une bonne présentation des propriétés de texture en regardant une seule section de cet espace. Afin d'éviter la confusion avec les symboles  $\alpha$  et  $\gamma$  décrivant les phases "ferrite" et "austénite", les fibre- $\alpha$  et fibre- $\gamma$  sont souvent appelées respectivement, ND-fibre et RD-fibre.

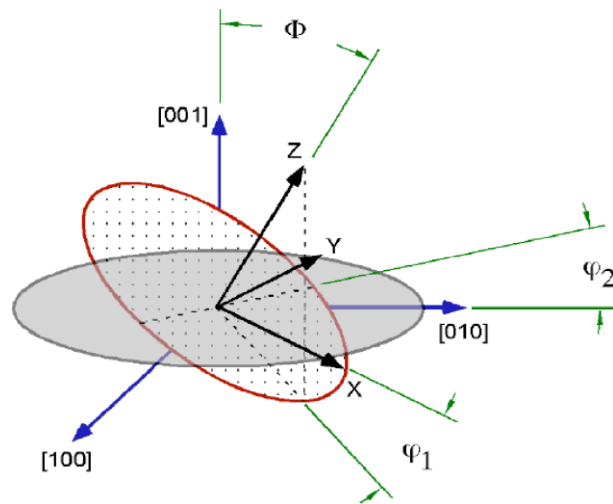


Figure I.1: Définition des angles d'Euler

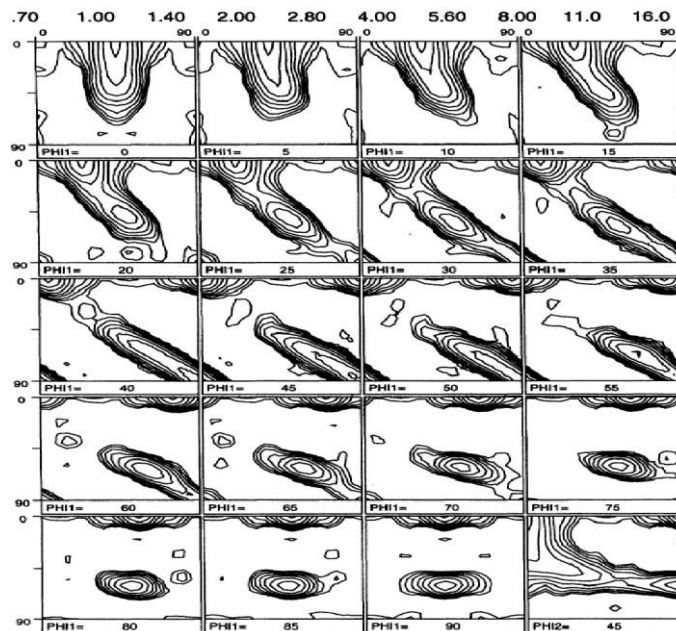


Figure I.2 : Exemple de fonctions des orientations cristallines pour le laminage à chaud d'un acier ferritique. Coupes à  $\varphi_1 = \text{Cte}$

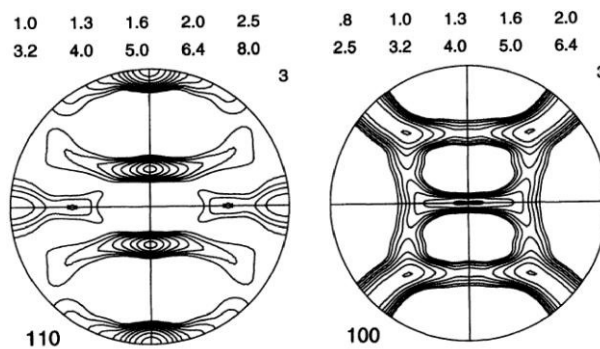


Figure I.3 : Exemple figure de pôles (110) et (100) pour le laminage à chaud d'un acier ferritique.



### 1.2.4.3 Prise en compte des symétries

Il existe plusieurs façons de définir les symétries d'un matériau, selon qu'elles forment un groupe dont un sous groupe est dit irréductible parce qu'il génère d'autres éléments sans que l'un de ces éléments ne puisse être généré par les autres.

Les matériaux présentent usuellement les éléments de groupes de symétries suivants:

- La symétrie monoclinique prismatique (parfois appelée centrosymétrie). Le groupe de symétrie comprend la symétrie par rapport à un plan et une rotation d'un angle  $\pi$  autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. Elle concerne par exemple, la texture en surface des barres des tubes sollicités en torsion et des tôles laminées asymétriquement.

- La symétrie orthotrope (ou orthorhombique). Le groupe de symétrie comprend les symétries par rapport à 3 plans perpendiculaires comme c'est le cas pour les tôles laminées.

- L'orthotropie de révolution (dite isotropie plane ou isotropie transverse). Le groupe de symétrie comprend un plan de symétrie et les rotations d'un angle quelconque autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. C'est la symétrie des solides de révolution considérés dans leur ensemble, par exemple les fils fins, dont la texture est supposée homogène dans toute la masse.

- La symétrie cubique dont le groupe de symétrie comprend des symétries par rapport à deux séries de plans (ceux parallèles aux faces du cubes et ceux passant par deux arêtes opposées). L'isotropie est telle que ce groupe comprend toutes les symétries du groupe dit "orthogonal" qui transforme un trièdre orthonormé en un autre trièdre orthonormé.

Selon l'analyse de Lequeu et al. [40]

- Pour qu'une symétrie monoclinique prismatique soit satisfaite, il est nécessaire qu'une composante de cisaillement  $\{hkl\} \langle uvw \rangle$  doit être accompagnée d'une autre composante de cisaillement  $\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\} \langle \bar{u}\bar{v}\bar{w} \rangle$  ayant la même fraction volumique et subi éventuellement la même rotation par rapport à l'axe de symétrie.

- Pour que la symétrie orthotrope soit satisfaite, une composante de laminage doit être accompagnée de trois autres composantes de laminage  $\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\} \langle \bar{u}\bar{v}\bar{w} \rangle$ ,  $\{hkl\} \langle \bar{u}\bar{v}\bar{w} \rangle$  et  $\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\} \langle uvw \rangle$ .

Les composantes de texture sont en général, données en tenant compte des orientations cristallographiques équivalentes notées  $\{hkl\} \langle uvw \rangle$ ; elles peuvent donc être autosymétriques, symétriques d'ordre 2 ou symétriques d'ordre 4.

Après avoir examiné les conditions de symétrie relatives à la texture cristallographique du matériau, nous devons indiquer celles liées à la cinématique du chemin de déformation qui connaît trois cas possibles:

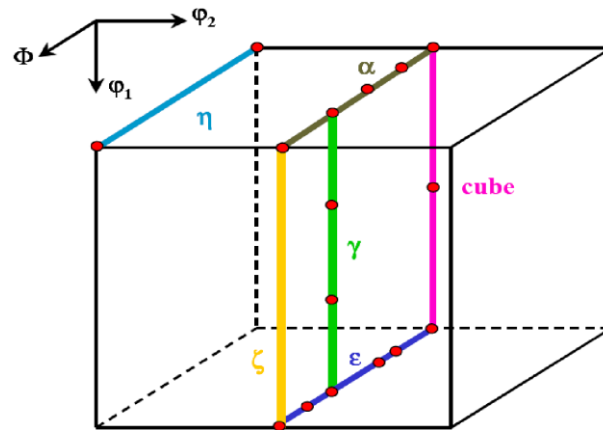
- Le chemin de déformation respecte la symétrie du matériau auquel il s'applique, c'est par exemple le cas d'une traction faite selon l'un des axes d'orthotropie d'une tôle.

- Le chemin ne respecte que certaines symétries du groupe de symétrie du matériau comme pour le cas d'un cisaillement dans le plan d'une tôle, qui est compatible avec la symétrie monoclinique prismatique mais non avec l'orthotropie.

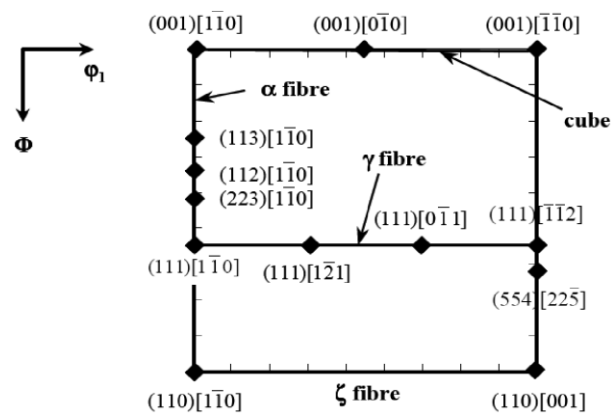
- Enfin, ce chemin ne respecte aucune symétrie; déformé, le matériau devient totalement anisotrope [41].





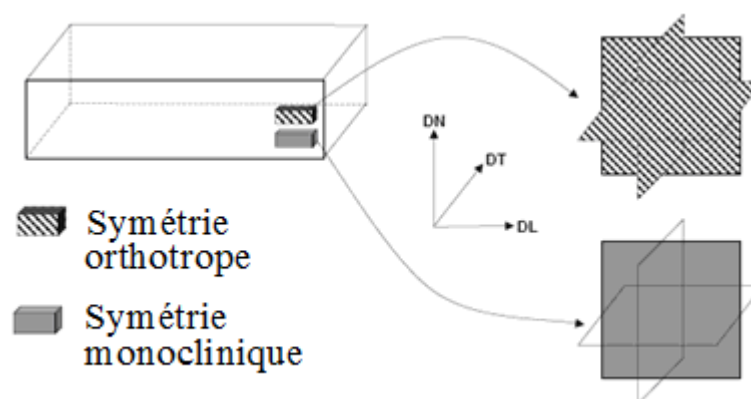


(a)



(b)

**Figure I.4:** Représentation des fibres des principales textures pour les métaux à structure cubique centrée dans l'espace d'Euler. **(a)** espace d'Euler; **(b)** section à  $\varphi_2 = 45^\circ$  dans l'espace d'Euler



**Figure I.5:** Plans de symétrie pour un échantillon centré dans l'épaisseur de la tôle (hachuré) et un échantillon excentré (plein)



L'espace des angles d'Euler  $(\varphi_1, \phi, \varphi_2)$  est décrit complètement lorsque  $\varphi_1$  varie de 0 à  $2\pi$ ,  $\phi$  de 0 à  $\pi$  et  $\varphi_2$  de 0 à  $2\pi$ . Toutefois, lorsque le réseau cristallin du métal est cubique et lorsque l'échantillon est orthotrope, Hansen et al. [42] ont démontré qu'il peut exister 96 domaines équivalents dans l'espace des orientations. En traduisant les opérations de symétrie définies ci-dessus dans l'espace des angles d'Euler, 96 orientations présentent une F.D.O.C. de même valeur de façon à respecter les symétries prescrites. Ainsi, la connaissance d'une FDOC sur un des domaines équivalents permet de caractériser la répartition complète des orientations cristallines d'un échantillon orthotrope. La symétrie globale de la fonction utilisée pour représenter la texture doit tenir compte de la symétrie cristalline du matériau et celle de l'échantillon, induite par son histoire et notamment compte tenu du processus mécanique qui lui a été appliqué.

Dans le cas d'une tôle laminée, la symétrie globale est orthorhombique. En effet, si on considère la tôle entière, les plans (DL, DT), (DT, DN) et (DL, DN) sont des plans de symétrie. On obtient alors une symétrie orthotrope pour la fonction de texture et le domaine utile dans l'espace d'Euler peut se réduire à:  $0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  et  $0 \leq \varphi_2 \leq \pi/2$ . Par ailleurs, si on considère une couche excentrée de la tôle et non plus la tôle dans sa globalité, en raison de la présence des cisaillements, la symétrie de l'échantillon sera monoclinique car les plans (DL,DT) et (DT,DN) ne sont plus des plans de symétrie (Fig. I.5). La F.D.O.C. s'étend alors au domaine:  $0 \leq \varphi_1 \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  et  $0 \leq \varphi_2 \leq \pi/2$  [43- 45].

#### 1.2.4.4 Prise en compte de l'effet de la texture

Selon la littérature, différentes approches tenant compte l'effet de la texture du matériau ont été proposées. Darrieulat et Piot proposèrent une méthode associée à la représentation de la fonction de distribution des orientations à l'aide de la méthode de la composante de texture [46]. Soit un matériau orthotrope dont ses N composantes de texture sont connues. Une représentation différentiable peut être associée à chacune des composantes de texture à l'aide de la théorie de la plasticité cristalline et le comportement du matériau entier est la moyenne des comportements de chacune des composantes. Selon l'hypothèse admise, consistant à considérer que le polycristal se comporte comme un cristal,  $12 \cdot N$  systèmes de glissement ont été alors considérés au lieu des 12 systèmes de glissement caractéristiques de systèmes de glissement pour un cristal à structure cristalline cubique face centrée. Les orientations de chacun sont données par les données de texture, et chacun des N ensembles va contribuer proportionnellement à sa fraction volumique. Cette hypothèse est réaliste dans le cas où il n'y a pas d'effets spécifiques des joints de grains et pas de distribution spatiale des grains particulière. Si les  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , sont les fractions volumiques de chaque composante de texture, la méthode de combinaison correspond à une moyenne de puissance  $n$ . Ainsi, la surface d'écoulement sera définie comme l'enveloppe interne des hyperplans d'équations :

$$F_n(s) = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{g=1}^{12} |s : M_i^g|^n \right)^{\frac{1}{n}} \quad (1.2)$$

Où  $M^g$  est le tenseur de Schmid pour le système de glissement  $g$ , et  $s$  la contrainte déviatorique. L'exposant  $n$  permet de prendre en compte la distribution des orientations autour de l'orientation idéale.

Darrieulat et Montheillet ont proposé un autre modèle pour décrire le comportement plastique d'agrégats orthotropes de cristaux cubiques [47]. Tout d'abord, ils ont associé à chaque composante de texture une équation d'écoulement quadratique, réduite dans le cas où le matériau a une symétrie cubique. Les équations d'écoulement sont ensuite combinées en utilisant deux hypothèses de moyenne permettant de décrire le comportement du polycristal à l'aide d'une équation d'écoulement quadratique de Hill. Les paramètres de la surface d'écoulement sont alors dérivés analytiquement des orientations et de leurs fractions volumiques. Cette méthode ne prédit pas l'évolution de texture mais les expressions étant analytiques, la surface d'écoulement peut être recalculée assez rapidement à différentes étapes du procédé, si l'on connaît l'évolution de la texture. Habraken [48], présenta une méthode d'interpolation contrainte-déformation basée sur un modèle polycristallin en tenant compte de la texture cristallographique. La méthode décrit le comportement anisotrope mécanique pour une région restreinte de la surface de charge délimitée par 5 tenseurs de contrainte relativement proches. Cette approche a été utilisée conjointement avec le modèle de Taylor pour simuler un cas d'emboutissage.

## 1.2.4 Modèles polycristallins

La réponse mécanique des grains constituant un métal à un chargement peut être décrite par des modèles polycristallins. Le problème de conditions aux limites consiste à estimer le ou les champs macroscopiques de contrainte ou de déformation en tout point du matériau déformé plastiquement.

Différents modèles polycristallins basés sur les principes de l'homogénéisation ont été développés. Les différences principales entre les modèles proposés sont les lois constitutives à l'échelle du grain et les méthodes de changement d'échelle permettant de passer de l'échelle du grain à l'échelle de l'agrégat polycristallin [49].

### 1.2.4.1 Principes de l'homogénéisation

Soit un matériau hétérogène dont les propriétés mécaniques varient sur une distance caractéristique petite (microscopique) devant l'échelle d'un volume élémentaire (macroscopique). A l'échelle du volume élémentaire, le matériau peut être considéré comme homogène. Si l'on considère deux échantillons de ce matériau, la microstructure varie mais les propriétés mécaniques moyennes sont supposées constantes. Un tel volume élémentaire est appelé Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.) du matériau hétérogène considéré. Ce volume sera désigné par  $V$  et sa surface extérieure par  $\partial V$ . Si on suppose que le matériau est constitué de phases distinctes, notées  $g$ , parfaitement accolées, sa loi de comportement à un instant donné  $t$  peut s'écrire :

$$\sigma(t) = F_g [\varepsilon(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} \quad (1.3)$$

Où  $F_g$  désigne une fonctionnelle non linéaire.

Cette forme générale permet de représenter différents types de comportement: élastiques, élastoplastiques et élastoviscoplastiques.

La méthodologie de l'homogénéisation comporte trois étapes qui sont la représentation, la localisation et l'homogénéisation.

Dans la première étape, on définit l'échelle caractéristique d'hétérogénéité et les propriétés mécaniques et physiques correspondantes. Dans le cas des polycristaux, la phase  $g$  correspond à un ensemble de grains de mêmes composition chimique, forme et orientation cristalline. La taille d'un grain étant en général de quelques dizaines de micromètres, l'échelle macroscopique étant de l'ordre du millimètre, le nombre de phases contenues dans un V.E.R. est par conséquent très important. Après avoir déterminé la nature de chaque phase, on définit son comportement, sa fraction volumique et sa répartition spatiale, en établissant ainsi la relation entre les grandeurs microscopiques.

En résumé, il s'agit, dans cette étape, de déterminer dans le cas des polycristaux la loi de comportement à l'échelle des grains ainsi que leur différente orientation cristallographiques et éventuellement leur position relative.

Dans notre étude, nous supposons que tous les grains représentatifs du polycristal répondent à la même loi de comportement et ne diffèrent donc que par leur orientation cristallographique  $g$  [50].

L'étape de "localisation" consiste à relier les histoires des grandeurs mécaniques locales (microscopiques) à celles des grandeurs macroscopiques. Dans le cas particulier d'un comportement linéaire élastique, cette étape se ramène à l'estimation des tenseurs de localisation en déformation  $A$  ou en contrainte  $B$  tels que:

$$\forall x \in V, \quad \varepsilon(x) = A(x) : E \quad (1.4a)$$

$$\forall x \in V, \quad \sigma(x) = B(x) : \Sigma \quad (1.4b)$$

L'étape d'"homogénéisation" se ramène à déterminer le comportement du milieu homogène équivalent associé au V.E.R. considéré, appelé comportement effectif du matériau hétérogène. A chaque instant  $t$ , la contrainte macroscopique  $\Sigma$  (ou la déformation macroscopique  $E$ ) peut être définie respectivement comme la moyenne spatiale des contraintes locales  $\sigma$  et des déformations locales  $\varepsilon$ :

$$\Sigma(t) = \langle \sigma(t) \rangle \text{ avec } \sigma(t) = \frac{1}{V} \int \sigma(t) dV \quad (1.5a)$$

$$E(t) = \langle \varepsilon(t) \rangle \text{ avec } \varepsilon(t) = \frac{1}{V} \int \varepsilon(t) dV \quad (1.5b)$$

De telle sorte que  $\langle A \rangle = \langle B \rangle = I$  où  $I$  désigne le tenseur identité du quatrième ordre.

A l'aide d'une hypothèse d'ergodicité, la distinction entre moyennes d'ensemble et d'espace disparaît [51]. L'opération de moyenne spatiale est donc identifiée à une moyenne sur l'ensemble des orientations cristallines dans le cas des polycristaux. La recherche des champs mécaniques  $\sigma$  et  $\varepsilon$  qui sont les solutions des équations (1.4) et (1.5), est équivalente à la résolution d'un problème de structure sur le V.E.R. avec des conditions aux limites imposées à son contour de type déformation homogène ou contrainte homogène [52].

#### 1.2.4.2 Déformation de polycristaux et hypothèses de localisation

Un polycristal soumis à un mode de déformation simple tel que la compression uniaxiale, voit ces grains se déformer différemment. Les grains d'orientations distinctes ont des réponses mécaniques différentes et créent un comportement hétérogène. Les déformations et les contraintes locales par rapport à la déformation et à l'état de contraintes du polycristal constituent ce qu'on appelle la localisation. Pour commencer à modéliser la déformation plastique du polycristal, Sachs (1928) [53] et Taylor (1938) [54] ont proposé des hypothèses de localisation simple permettant de considérer les grains séparément. Ces hypothèses ont été délaissées pour laisser place à de nombreuses formes différentes qui sont encore employées actuellement. Mais, il reste toujours que la détermination locale des vitesses de déformation au sein du polycristal est un objectif primordial. Elle permet de connaître le comportement collectif des grains ainsi que leur évolution individuelle (état microstructural et orientation cristallographique). Pour cela, la répartition très précise des grains dans le polycristal et la prise en compte d'une déformation hétérogène est nécessaire.

Une autre approche consiste à considérer que chaque grain subit la réaction d'une matrice environnante dont le comportement est la moyenne des comportements des grains du polycristal. Ceci représente une vision statistique qui évite la considération d'une répartition topologique. Les schémas autocohérents fonctionnent sur cette hypothèse mais considèrent que le champ de déformation au sein de chaque grain est homogène car ils sont construits à partir du modèle d'inclusion d'Eshelby [55].

#### 1.2.4.3 Hypothèses extrêmes et hypothèse dérivées de la plasticité polycristalline

- **Modèle de Sachs (hypothèses de contrainte uniforme)**

Les hypothèses de Sachs supposent que la contrainte locale est proportionnelle à la contrainte macroscopique. Puisque des grains d'orientations distinctes se déforment différemment avec le même état de contrainte, l'hypothèse implique une décohérence entre les grains. Cette hypothèse est dite borne inférieure car elle minimise l'énergie de déformation du polycristal. Son utilisation est très limitée car d'un point de vue théorique elle ne permet pas l'emploi de n'importe quelle loi de comportement du cristal. En effet, si l'on simule la mise en charge croissante d'un polycristal suivant cette hypothèse et avec un comportement rigide-plastique, on remarque que les grains ne peuvent se déformer simultanément. Lorsque la contrainte atteint le polyèdre critique correspondant au grain, ce dernier se déforme seul. Pour qu'un second grain se déforme, il faut que la contrainte dépasse le polyèdre critique du premier grain déformé.

- **Modèle de Taylor**

Cette seconde hypothèse suppose que la déformation locale vaut la déformation macroscopique, ce qui assure donc la cohésion entre les grains. S'il n'y a donc aucune incompatibilité géométrique, cependant, le champ des contraintes subit une discontinuité aux joints des grains. Concernant la puissance de déformation, à l'inverse des hypothèses de Sachs, elle constitue la borne supérieure. Cette hypothèse ne tient pas non plus compte de l'interaction entre les grains.

En simulation mécanique, elle s'adapte bien aux matériaux dont les cristaux se déforment de manière assez isotrope, c'est à dire ceux qui possèdent beaucoup de systèmes de glissement.

Pour cette raison, elle a eu beaucoup de succès pour simuler des textures de matériaux CFC et CC à haute énergie de faute d'empilement et à petits grains.

- **Hypothèses de Taylor à déformations relâchées**

Cette hypothèse a pour origine la déformation de monocristaux dans des conditions n'imposant qu'une partie des déformations. En 1976, Renouard et Wintenberger [56], ont explicité une méthode de détermination des systèmes de glissement actifs dans un cristal rigide-plastique soumis à un nombre limité de déformations. En parallèle Honnef et Mecking (1978) [57] ont apporté une modification à l'hypothèse de Taylor, jugée trop "forte", pour avancer qu'au sein d'un polycristal, les grains se déforment de manière hétérogène afin d'assurer la cohésion avec les autres grains qui se déforment différemment. Dans le cas des grains allongés soumis à une déformation qui tend à les allonger, seules les extrémités se déforment différemment du cœur. Ces petites zones assurent donc la continuité géométrique et permettent au cœur de se déformer avec moins de glissement et donc moins d'énergie. Les cisaillements accommodés, non imposés par ces petites zones, contribuent à fournir une hypothèse moins forte que celle de Taylor mais réaliste pour l'intérieur des grains. Van Houtte (1985) [58], résume et présente son utilisation en compression plane.

- **Lois de mélange simples**

Dans un matériau multiphasé réel, les tenseurs des vitesses de déformation et des contraintes ne sont pas uniformes (constants) dans les domaines homogènes, car ils doivent vérifier la continuité des vecteurs déplacements (ou vitesse) et des contraintes normales aux interfaces. Toutefois, toutes les lois de mélange qui seront présentées dans la suite ne feront intervenir que des grandeurs moyennes par phase. Dans un premier temps, nous nous intéresserons à des lois de mélange dites "simples", dans la mesure où (i) elles ne font pas intervenir explicitement le caractère tensoriel des déformations (ou vitesses de déformation) et des contraintes ; (ii) elles ne font pas directement appel à un calcul de localisation et par conséquent, ne prennent pas en compte les caractéristiques morphologiques et topologiques de l'agrégat.

En considérant le cas d'un mélange de deux phases viscoplastiques, la solution exacte du problème doit vérifier les trois relations de moyenne :



$$\begin{aligned}
 f\langle \varepsilon_1 \rangle + (1-f)\langle \varepsilon_2 \rangle &= \bar{\varepsilon} \\
 f\langle \sigma_1 \rangle + (1-f)\langle \sigma_2 \rangle &= \sigma \\
 f\langle \dot{\varepsilon}_1 \rangle + (1-f)\langle \dot{\varepsilon}_2 \rangle &= \dot{\varepsilon}
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

$\langle x_i \rangle$  est la valeur moyenne de la grandeur  $x_i$  dans la phase  $i$  et  $\bar{\varepsilon}, \sigma$  et  $\dot{\varepsilon}$  sont les grandeurs macroscopiques correspondantes. Il est donc naturel de chercher un modèle simple satisfaisant à :

$$\begin{aligned}
 f\varepsilon_1 + (1-f)\varepsilon_2 &= \bar{\varepsilon} \\
 f\sigma_1 + (1-f)\sigma_2 &= \sigma \\
 f\dot{\varepsilon}_1 + (1-f)\dot{\varepsilon}_2 &= \dot{\varepsilon}
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Où les vitesses de déformation, les contraintes et les puissances sont désormais des scalaires constants dans chacune des deux phases. Cette exigence semble *a priori* possible puisque si l'on se donne, par exemple la vitesse de déformation macroscopique, les relations (1.7) constituent un système de trois équations (en général non-linéaires) à trois inconnues  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\sigma$ . Toutefois, un calcul simple montre que les deux seules solutions possibles sont alors  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  (modèle de Taylor) et  $\sigma_1 = \sigma_2$  (modèle statique) qui correspondent aux deux bornes obtenues précédemment. Il faut donc renoncer à vérifier l'une des équations (1.7), mais le problème devenant alors indéterminé, il convient de leur adjoindre une condition supplémentaire, moins contraignante que l'équation éliminée du système.

Certains auteurs ont choisi de fixer empiriquement l'une des variables. Ainsi, pour un mélange de deux phases plastiques écrouissables, l'une des déformations  $\varepsilon_1$  ou  $\varepsilon_2$ , ou encore leur rapport  $\varepsilon_2 / \varepsilon_1$ , peut être déterminé à l'aide de mesures de microdureté. Une alternative intéressante a été récemment proposée pour un agrégat de deux phases élastiques, consistant à imposer l'égalité des énergies, soit  $E_1 \varepsilon_1^2 / 2 = E_2 \varepsilon_2^2 / 2$ , d'où l'on peut déduire le module d'Young du mélange.

Pour un mélange de phases plastiques écrouissables, on peut de même imposer l'égalité des incréments de travail plastique:  $\sigma_1 d\varepsilon_1 = \sigma_2 d\varepsilon_2$ . Cette hypothèse, dite "IsoW" peut être étendue au cas de deux phases viscoplastiques de même coefficient de sensibilité à la vitesse  $m$ , ce qui donne pour la consistance du mélange [59].

$$\frac{K}{K_1} = \frac{f \Sigma^{m/(m+1)} + (1-f) \Sigma}{f \Sigma^{1/(m+1)} + (1-f)^m}
 \tag{1.11}$$

## 2. Formulation et modélisation des lois de comportement

Le procédé de mise en forme de tôles métalliques le plus répandu est le laminage. Ce procédé confère aux grains constituant la tôle, une orientation privilégiée suivant la direction de laminage (DL). L'étude du comportement de ces tôles est le plus souvent abordée dans le cadre d'une approche élastoplastique pour la plupart des procédés de mise en forme de tôles. La théorie élastoplastique comporte deux approches différentes décrivant chacune d'elle une échelle du comportement. La première est appelée approche phénoménologique (ou macroscopique) et la deuxième est appelée approche microscopique (ou modèle micro-macro). Les deux approches visent à décrire l'évolution de l'état de contrainte et de déformation lors d'une succession de déformations.

La modélisation du comportement élastoplastique, dans son aspect phénoménologique, comporte la détermination de trois paramètres:

- un critère de plasticité qui décrit la surface d'écoulement qui, après plastification, deviendra la surface de charge.
- une loi d'écrouissage qui définit l'évolution de la surface de charge tout au long de l'écrouissage.
- une loi constitutive qui permet d'associer les contraintes aux déformations.

Nous exposons dans cette section la formulation des lois de comportement dans un cadre général puis nous présentons une synthèse sur les critères de plasticité isotropes, et anisotropes quadratiques et non quadratiques.

## 2.1 Critères de plasticité

La limite d'élasticité pour une direction de chargement constante peut facilement s'obtenir par un essai de traction uniaxiale. Cependant, il est beaucoup moins évident d'obtenir la limite élastique pour un chargement à direction multiple. Le critère de plasticité, ou critère d'écoulement, est une équation qui permet, à l'aide d'essais simples, de définir la contrainte équivalente à partir de laquelle les déformations deviennent irréversibles, et ce, pour tous les types de chargement. Pour un cas de chargement bidimensionnel, la limite d'écoulement est représentée par la frontière d'une surface. Si la contrainte se trouve à l'intérieur de la surface, la déformation est élastique alors que si elle est à l'extérieur, le critère n'est pas défini. Le problème se complique lorsque l'on cherche à obtenir la limite d'élasticité pour des chargements combinés et que le comportement du matériau est anisotrope, c'est-à-dire lorsque le comportement d'un matériau varie d'une direction de chargement à l'autre.

Un critère de plasticité doit être une fonction convexe dans l'espace des contraintes. La convexité de la surface de plasticité assure l'unicité d'un incrément de déformation plastique pour un état de contraintes donné. Mathématiquement parlant, la fonction de charge  $f$  est convexe, si elle est deux fois différentiable et sa matrice Hessienne  $H$  est semi-définie positivement. Ceci implique que les valeurs propres de  $H$  sont positives ou nulles. La matrice Hessienne  $H$  est définie comme suit :

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \quad (1.12)$$

La plasticité fait référence à un état de déformation irréversible que le matériau est susceptible d'atteindre une fois qu'il a franchi un état de contrainte seuil. Cet état seuil est décrit par la surface de charge  $f$  :

$$f = (\bar{\sigma}_{ij}) - \sigma_0 \leq 0 \quad (1.13)$$

Dans cette expression, la contrainte  $\bar{\sigma}_{ij}$  est appelé contrainte équivalente au sens du critère de plasticité et est déterminée à l'aide d'une fonction associée au potentiel des contraintes. Cette contrainte est comparée à une deuxième contrainte  $\sigma_0$  dite contrainte d'écoulement du matériau et qui représente la contrainte seuil plastique. Lorsque la contrainte équivalente est inférieure à la contrainte d'écoulement ( $f < 0$ ), la déformation est purement élastique. Inversement, dès que la contrainte équivalente est égale à la

contrainte d'écoulement plastique ( $f = 0$ ), le seuil est atteint et le matériau commence à se déformer plastiquement.

Pour être en mesure d'évaluer la contrainte, on doit négliger les déformations élastiques par rapport à la déformation totale. L'évaluation de la déformation plastique s'effectue à l'aide de la loi de la normalité:

$$\mathbb{E}_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.14)$$

La dérivée  $\partial f(\sigma_{ij}) / \partial \sigma_{ij}$  indique la direction de l'incrément de déformation plastique qui, d'après le postulat de Drucker, est perpendiculaire à la surface du critère tandis que  $\lambda$  est un scalaire positif qui varie proportionnellement avec la déformation plastique. Dans le cas où le potentiel plastique  $g$  diffère de la fonction de charge, la loi d'écoulement définie par l'équation (1.14) est alors dite *non associée*.

Avant de passer à un nouvel incrément de déformation, on doit modifier le critère d'écoulement  $f$ , de manière à faire évoluer la limite d'élasticité pour le prochain incrément. C'est ici qu'intervient la loi d'écrouissage. Il existe quelques lois d'écrouissage, mais la loi d'écrouissage isotrope est la plus simple à utiliser. De manière simple, l'écrouissage isotrope consiste à faire grandir la surface d'écoulement de façon homothétique à la surface initiale, (Fig. 1.6), à un taux d'expansion  $dr$  proportionnel au coefficient d'écrouissage  $\lambda$ . Pour les prochains incréments, il faudra tenir compte de l'évolution de  $r$  de la surface de charge lors de l'évaluation du critère. Il faut donc évaluer la fonction  $f$  avec la limite élastique courante; pour ce faire, on ajoute l'évolution  $r$  à la limite élastique expérimentale.

$$f = \bar{\sigma}_{ij} - (S_y + r) = 0$$

Pour la suite, il convient d'introduire la Figure 1.7 qui présente différents modes de déformations. Les points  $I_1$ , et  $I_3$  représentent des modes de déformation plane. En accord avec la loi de la normalité (14), la déformation plane, correspondant à  $I_1$ , représente une limite supérieure, car si  $\mathbb{E}_{11} = 0$  la pente  $y$  est verticale. On peut appliquer le même

raisonnement à  $I_3$ . Le point  $I_5$  représente une expansion équiaxiale ( $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$ ). On reconnaît aussi les points  $I_2$  et  $I_4$  qui identifient les chemins de chargement uniaxiaux. Ces chemins de chargement sont très utiles pour identifier les critères, car ils peuvent, en théorie, être vérifiés expérimentalement.

Il existe une grande variété de critères de plasticité qui visent à modéliser le plus fidèlement possible le comportement des tôles. Ces critères peuvent être répertoriés en deux familles: les critères isotropes et anisotropes.

### 2.1.1 Critères de plasticité isotrope

On dit d'un matériau qu'il est isotrope lorsqu'il a les mêmes propriétés mécaniques, en l'occurrence le même comportement dans toutes les directions. Cette condition permet certaines hypothèses qui rendent le critère plus simple à utiliser.

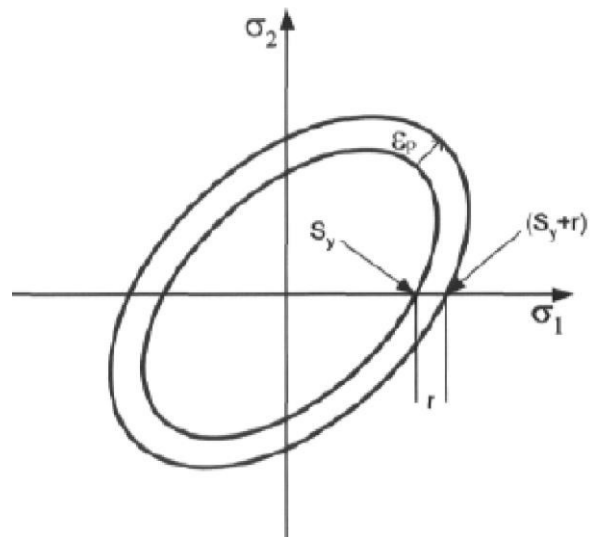


Figure I.6: Évolution d'un critère en écrouissage isotrope

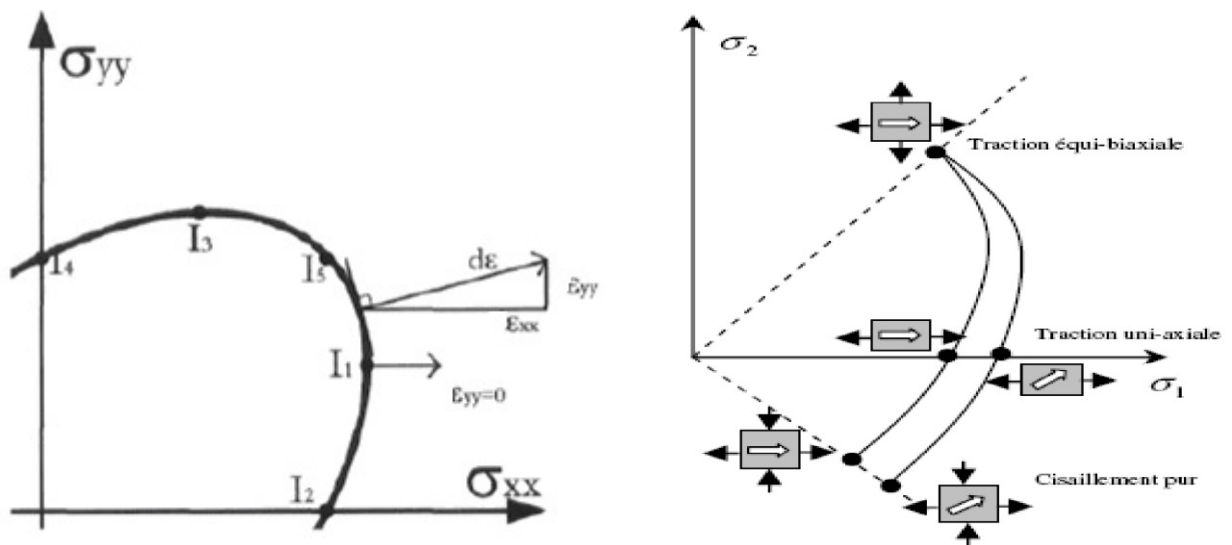


Figure I.7 : Différents modes de déformations

### 2.1.1.1 Critère de Tresca

Le premier critère d'écoulement plastique des métaux métallique est celui de Tresca (1864). Selon l'hypothèse que la limite de cisaillement d'un cristal est égale à la limite en cisaillement pur du matériau, il proposa que la limite d'écoulement plastique du matériau est atteinte lorsque le cisaillement maximum défini en (I.14) atteint la limite d'élasticité  $K$  en cisaillement pur, c'est-à-dire:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \text{Avec } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (\text{I.15})$$

Le critère est très facile à évaluer expérimentalement. Selon la Figure I.8, on note que dans le plan, le déviateur de contraintes est sur le plan  $p$  formant une surface d'écoulement de forme hexagonale (la contrainte hydrostatique étant nulle).

### 2.1.1.2 Critère de Von Mises

En 1913, Von MISES a formulé un critère d'écoulement, en fonction de la limite élastique déterminée à l'aide d'essai de traction uniaxiale (Fig. I.9). Ce critère est le plus utilisé en raison de sa grande facilité d'emploi dans les calculs numériques. Von Mises suggère que l'énergie élastique de cisaillement nécessaire à la distorsion du solide soit la même que celle qu'il faut apporter pour engendrer la déformation plastique lors d'un essai de traction uniaxiale. En égalant ces deux quantités d'énergie, il obtient le critère suivant dans l'espace des contraintes à 6 dimensions qui s'écrit:

$$f(\sigma_{ij}) = (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 6(\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2) = 2\sigma_0^2 \quad (\text{I.16})$$

Hosford propose en 1972 [60] de remplacer l'exposant 2 de l'équation de Von Mises par une variable dans l'intervalle  $1 \leq \alpha \leq \infty$  ce qui permet d'ajuster la courbe aux résultats expérimentaux. Ce critère permet de représenter d'une manière assez simple les courbes intermédiaires à Tresca et Von Mises; pour la valeur  $\alpha = 1$ , on retrouve le critère de Tresca et pour  $\alpha = 2$ , on retrouve celui de Von Mises. On verra plus loin que la variable  $\alpha$  peut s'apparenter à certaines familles de matériaux [61].

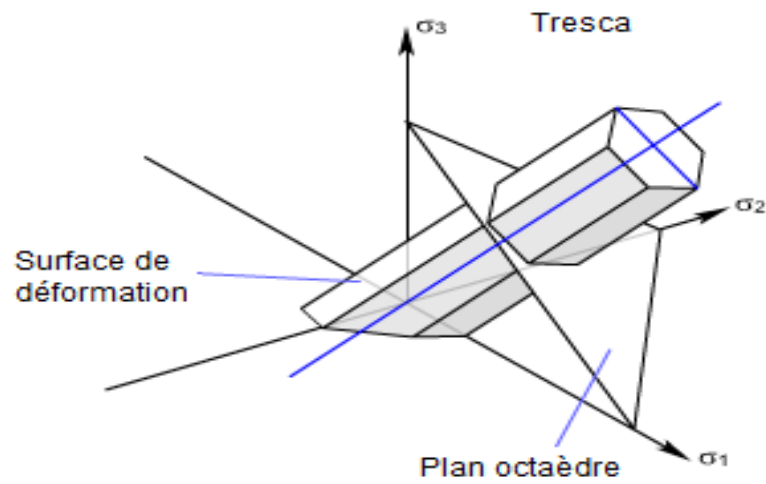
### 2.1.1.3 Critère de Hosford (1972)

L'intérêt d'améliorer la précision des critères est apparu vers le milieu du 20e siècle pour des applications structurales. C'était en même temps que l'apparition des calculs numériques et la méthode des éléments finis. On s'intéresse, entre autres, au comportement des matériaux anisotropes.

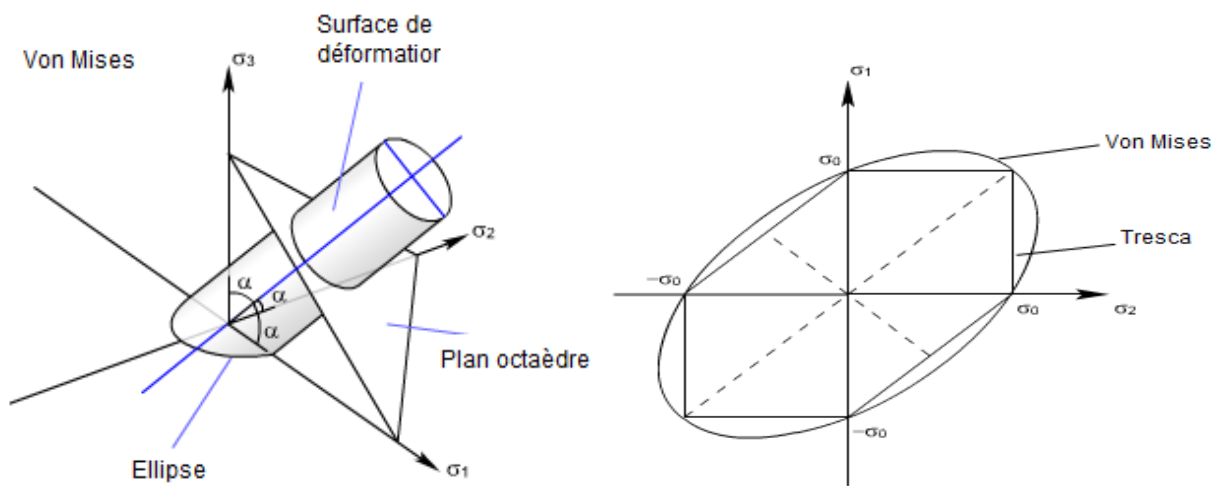
## 2.1.2 Critères de plasticité anisotropes orthotropes

L'orthotropie correspond à un cas particulier de l'anisotropie, pour lequel le matériau présente trois plans de symétrie orthogonaux. La prise en compte de cette anisotropie est

importante, du fait que les processus mécaniques de fabrication des tôles (le laminage, par exemple) confèrent à ces matériaux une anisotropie initiale orthotrope.



**Figure I.8:** Critère de Tresca dans l'espace des contraintes principales



**Figure I.9 :** Critère de Von mises dans l'espace des contraintes principales



● Critère quadratique de Hill (1948)

En 1948, Hill [62] présente une formulation de la théorie mathématique de la plasticité. Il établit un critère dit anisotrope, c'est à dire que son expression ne peut se réduire à une fonction des seuls invariants. Des directions privilégiées interviennent, correspondants à une anisotropie qui conserve trois plans de symétrie dans l'état d'écroutissage du matériau. Les intersections de ces trois plans sont les axes principaux d'anisotropie.

Ce critère est généralement utilisé pour modéliser le comportement des matériaux orthotropes tels que les tôles minces ayant 3 directions particulières, à savoir la direction de laminage, la direction transverse et la direction normale. Dans ces axes d'orthotropie la contrainte équivalente de Hill s'écrit :

$$f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 2\sigma_0^2 \quad (I.18)$$

La forme de la surface d'écoulement dans l'espace des contraintes est déterminée par 6 coefficients  $F, G, H, L, M$  et  $N$ . En théorie, ces coefficients peuvent être déterminés à l'aide d'essais de traction dans les trois directions ( $F, G, H$ ) et d'essais de cisaillement ( $L, M, N$ ). Dans le cas des tôles métalliques, trois tests de traction à  $0^\circ, 45^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage sont suffisants. Dans le cas où le chargement est en contrainte plane, l'équation (I.18) se réduit à l'expression suivante :

$$f(\sigma_{ij}) = (G + H)\sigma_{11} - 2H\sigma_{11}\sigma_{22} + (H + F)\sigma_{22}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 2\sigma_0^2 \quad (I.19)$$

Si l'on pose  $L = M = N = 3F = 3G = 3H$ , la relation (I.18) se réduit au critère de Von Mises correspondant à un matériau incompressible isotrope.

La détermination complète de la surface de charge en contraintes planes (Fig. I.10) d'un matériau supposé obéir au critère de Hill passe par l'identification de l'ensemble de ses paramètres. L'identification de ces derniers requiert l'expression de la contrainte équivalente par un essai de traction sur des éprouvettes orientées d'un angle ( $\theta$ ) par rapport à la direction de laminage. Cette contrainte peut être aisément obtenue en appliquant une matrice de rotation (d'axe  $z$  et d'angle  $\theta$ ) au tenseur des contraintes exprimé dans le repère de l'essai (correspondant à un tenseur de traction uniaxiale) pour le transformer dans le repère d'orthotropie. Le tenseur ainsi calculé est ensuite injecté dans l'expression (I.19) pour en déduire la contrainte équivalente dans la direction  $\theta$  :

$$\sigma(\theta) = \frac{2\sigma_0}{(F \sin^4 \theta + G \cos^4 \theta + H \cos^2 2\theta + 2N \sin^2 \theta \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (I.20)$$

Le critère de Hill est très utilisé pour déterminer les surfaces d'écoulement des tôles minces. Il n'est malheureusement pas valide pour les matériaux pour lesquels  $R(\theta) < 1$ , comme c'est souvent le cas pour l'aluminium [63].

La Figure I.11, illustre l'effet de la valeur du coefficient d'anisotropie sur le critère de Hill (1948) dans laquelle, on constate que l'ellipse s'allonge en fonction de  $R(\theta)$ . Pour un  $R(\theta)$  élevé, la déformation plastique (en état de contrainte biaxiale) est plus difficile à atteindre, ce qui réduit la mise en forme en expansion.

Le critère quadratique de Hill (1948) est largement utilisé pour décrire le comportement des tôles. Cependant, pour certains matériaux tels que les alliages d'aluminium, ce critère n'est pas assez précis pour décrire leur comportement [64, 65]. Aussi, d'autres critères ont vu le jour et ont été alors proposés pour mieux prévoir le comportement des matériaux (Hill, 1979 [66]), (Hill, 1990 [67]), (Hill, 1993 [68]), (Karafllis et al. 1993 [69]), (Barlat et Lian, 1989 [70]), (Barlat et al. 1991 [71]).

- **Critère non quadratique de Hill (1979)**

Afin d'accommoder le comportement "anormal" de l'aluminium, Hill [66] a proposé un deuxième critère non quadratique qui n'est valable que dans le cas où les directions principales du tenseur des contraintes coïncident avec les directions d'orthotropie du matériau. Dans ce cas, le critère s'écrit sous la forme suivante :

$$f(\sigma_{ij}) = f|\sigma_{22} - \sigma_{33}|^m + g|\sigma_{33} - \sigma_{11}|^m + h|\sigma_{11} - \sigma_{22}|^m + a|2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}|^m + b|2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}|^m + c|2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}|^m = 2\sigma_0^m \quad (I.21)$$

( $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ ) Sont les contraintes principales, ( $a, b, c, f, g, h$ ) correspondent aux paramètres d'anisotropie et sont identifiables à partir des limites élastiques et des coefficients de Lankford. Le coefficient  $m$  est aussi un paramètre du modèle dont l'identification nécessite de disposer d'un essai combiné (traction équibiaxiale ou autres...). Le critère de Hill (1979) n'est valable que lorsque le matériau est orthotrope et la charge coaxiale à un axe de symétrie. Selon Hos (1979) [72] et Lia (1991) [73], les valeurs de  $m \approx 6$  et  $m \approx 8$  donnent de bonnes approximations respectivement, pour les matériaux cubiques centrés et cubiques à faces centrés.

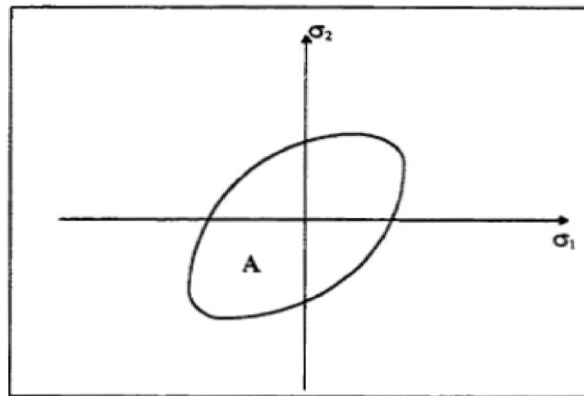
### 2.1.3 Coefficient d'anisotropie $R(\theta)$

Après les brèves présentations des critères de plasticité anisotropes les plus courants, il convient d'introduire le coefficient d'anisotropie  $R(\theta)$ , appelé coefficient de Lankford [74] qui caractérise l'anisotropie plastique d'une tôle. Ce paramètre est mesurable à l'aide d'un essai de traction uniaxiale en déterminant le rapport des déformations de la largeur  $\epsilon_y$  sur celle de l'épaisseur  $\epsilon_z$  :

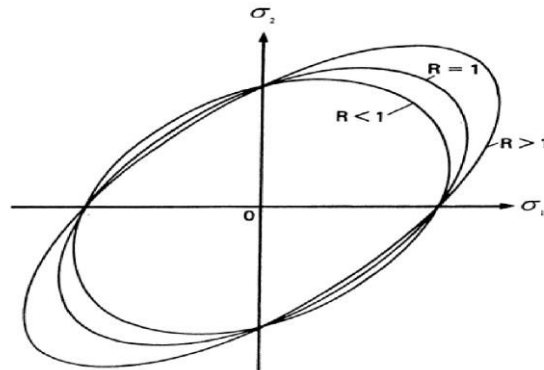
$$R(\theta) = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_z} \quad (I.23)$$

Une grande valeur de ce coefficient indique la tendance d'une tôle à se déformer plastiquement en largeur plutôt qu'en épaisseur, ce qui peut favoriser certains états de contrainte où l'écoulement sur la largeur peut se produire plus facilement que sur l'épaisseur. En présence d'une anisotropie, ce coefficient varie en fonction de l'orientation de découpage de l'éprouvette de traction par rapport à la direction de laminage. Dans la pratique (industrie), il est très commun d'identifier les coefficients de Lankford (

$R_0$ ,  $R_{45}$  et  $R_{90}$ ) pour les trois orientations particulières définies à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage, et d'en déduire un coefficient d'anisotropie moyen  $\bar{R}$  :



**Figure I.10** : Schématisation d'une surface d'écoulement d'un matériau anisotrope



**Figure I.11**: Évolution de la surface d'écoulement issue du critère de Hill (1948) en fonction du coefficient de Lankford.

$$\bar{R} = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4} \quad (I.24)$$

Et un écart  $\Delta R$  :

$$\Delta R = \frac{R_0 - 2R_{45} + R_{90}}{4} \quad (I.25)$$

Lorsque ( $\bar{R} \neq 1$  et  $\Delta R \neq 0$ ) on parle d'*anisotropie transverse*. Dans le cas particulier où ( $\bar{R} \neq 1$  et  $\Delta R = 0$ ), on parle alors d'*anisotropie normale* (ou orthotropie de révolution, ou encore isotropie plane) qui traduit une isotropie du comportement dans le plan de la tôle, et une anisotropie dans la direction de l'épaisseur ( $\bar{R} \neq 1$ ). Enfin, le cas isotrope est retrouvé pour ( $R_0 = R_{45} = R_{90} = 1$ ), autrement dit ( $\bar{R} = 1$  et  $\Delta R = 0$ ).

### 3. Approche C.M.T.P.

La modélisation fine des procédés de mise en forme, tels que le laminage, le forgeage ou l'emboutissage, nécessite la prise en compte de l'anisotropie plastique du produit. La distribution spatiale des constituants du matériau doit également être prise en compte, en particulier dans les alliages biphasés [75]. Les textures cristallines étant la cause principale de l'anisotropie du comportement plastique des matériaux, diverses approches sont utilisées pour définir la relation les liant, à savoir :

- L'approche phénoménologique, basée sur la mécanique des milieux continus de Hill (1948), ne fait pas de relation entre anisotropie et texture. C'est-à-dire les relations d'écoulement plastique proposées n'ont pas de base physique car elles ne tiennent pas compte explicitement de la texture cristallographique qui est la première source d'anisotropie. C'est pourquoi, des modèles, basés sur la mécanique des monocristaux et sur des hypothèses de combinaison ont été développés afin d'obtenir le comportement global d'un polycristal à partir du comportement de chacun de ses grains.
- Dans ce contexte, une méthode simplifiée, dite C.M.T.P. (Continuum Mechanics of Textured Polycrystals), dans laquelle les différentes orientations sont explicitement prises en considération, a été proposée. Cette méthode permet de décrire, d'une manière plus simple, l'anisotropie des monocristaux ou à la limite celle des polycristaux fortement texturés, matériaux dans lesquels une ou plusieurs orientations idéales sont aisément identifiables. Toutefois, elle trouve ses fondements sur les hypothèses fondamentales qui sont les suivantes:
  - le matériau est représenté par un petit nombre de composantes de texture correspondant aux orientations idéales dont les axes  $\langle 100 \rangle$  du cristal sont choisis comme axes principaux d'anisotropie; ce qui permet de faire le lien entre la mécanique et la physique par la simple superposition des axes d'anisotropie mécanique et de l'anisotropie cristallographique.
  - le comportement plastique de chaque composante de texture est décrit par la mécanique des milieux continus, c'est là qu'on peut éventuellement faire intervenir la représentation des surfaces d'écoulement par des fonctions puissance.

- la réponse du matériau global s'obtient par la combinaison des comportements de chaque composante et les paramètres F, G, H, L, M et N du critère de Hill doivent être choisis de manière à ce qu'ils donnent le meilleur ajustement du critère macroscopique

par rapport à la frontière d'écoulement cristallographique du monocristal ou du polycristal (fortement texturé).

### 3.1 Travaux antérieurs sur la méthode CMTP

La méthode CMTP a été exposée pour la première fois en 1985 par Montheillet, Gilormini et Jonas pour établir la relation entre les contraintes axiales ainsi que le développement de texture pendant l'essai de traction [76]. Elle a fait l'objet de la thèse de Lequeu [77] qui l'a ensuite appliqué pour le cas des tôles laminées [78], pour faire ensuite l'objet de différentes présentations [79-81]. Elle a été également utilisée dans la modélisation de l'essai de compression plane de monocristaux par Fares et al. [44, 45]. Darrieulat a reformulé cette approche en combinant plusieurs composantes de textures pour la prédiction du comportement mécanique anisotrope des polycristaux [47].

Parmi les autres auteurs qui se sont intéressés à la méthode CMTP nous citerons Baudi [82], Driver [83], Fortunier [84], Mizera [85], Orleans-Joliet [86], Lee et Chan [87].

### 3.2 Formulation de l'approche CMTP

Le critère de plasticité quadratique proposé par Hill (1948), sans prise en compte de l'effet Bauschinger, s'écrit d'après la relation dans les axes principaux d'anisotropie du matériau comme suit.

$$f(\sigma) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2N\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2L\sigma_{23}^2 = 1 \quad (1.26)$$

Et peut s'écrire encore :

$$f(S) = F(S_{22} - S_{33})^2 + G(S_{33} - S_{11})^2 + H(S_{11} - S_{22})^2 + 2NS_{12}^2 + 2MS_{13}^2 + 2LS_{23}^2 = 1 \quad (1.27)$$

Où S désigne le tenseur déviateur des contraintes. Il décrira aussi un sous-espace de dimension cinq car sa trace est nulle :

$$S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0 \quad (1.28)$$

Comme il a été déjà spécifié, l'évaluation des paramètres d'anisotropie n'est possible que par la réalisation d'une série d'expériences convenables de traction et de cisaillement le long des directions principales d'anisotropie. Ceci s'avère cependant extrêmement difficile car la détermination des axes pose un problème selon le mode de déformation utilisé ; le choix de ces axes est spécifique et n'est pas toujours évident [62]. C'est dans cette optique que la procédure C.M.T.P. fut adoptée car elle d'écrit d'une manière plus simple l'anisotropie des matériaux à une échelle macroscopique. Elle donne alors une représentation analytique adéquate de la frontière qui est fonction de l'orientation idéale (polycristaux fortement texturés ou monocristaux). En raison de la symétrie cubique, les contraintes d'écoulement dans une traction uniaxiale ou un cisaillement simple doivent

être identiques pour les trois directions <100> du cristal, ce qui revient à écrire les conditions :

$$F = G = H \quad \text{et} \quad L = M = N \quad (I.29)$$

Ce qui nous permet d'exprimer le critère de plasticité sous la forme :

$$f(S) = 3F[S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2] + 2L[S_{23}^2 + S_{13}^2 + S_{12}^2] = 1 \quad (I.30)$$

Pour une commodité de calcul et en raison de l'incompressibilité plastique du matériau, (Lequeu et al.) [88,89], ont préconisé la méthode de représentation vectorielle d'un tenseur symétrique de trace nulle pour arriver au remplacement des composantes  $S_{ij}$  du tenseur déviateur des contraintes  $S$  par celles d'un vecteur  $s^{\perp}$  dans un espace à cinq dimensions :

$$s_1 = \frac{(S_{22} - S_{11})}{\sqrt{2}}, \quad s_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot S_{33}, \quad s_3 = \sqrt{2} \cdot S_{23}, \quad s_4 = \sqrt{2} \cdot S_{13}, \quad s_5 = \sqrt{2} \cdot S_{12} \quad (I.31)$$

Le critère de plasticité, selon cette nouvelle notation, se transcrita :

$$F(s) = 3F(s_1^2 + s_2^2) + L(s_3^2 + s_4^2 + s_5^2) = 1 \quad (I.32)$$

Bishop et Hill [90,91] ont introduit cinq variables indépendantes a, b, f, g et h définissant un espace à cinq dimensions. Il a été démontré que la frontière d'écoulement du monocristal est un polyèdre centro-symétrique (Fig. I.12). Les points  $S_i$  ( $i = 1,56$ ) sont les intersections respectives du polyèdre critique (Pc). Les points  $S_i'$  sont les intersections respectives des vecteurs  $\overline{OS_i^{\perp}}$  avec l'ellipsoïde (E). Par des calculs numériques, (Lequeu et al.) [88] ont minimisé la quantité suivante :

$$\sum_{i=1}^{56} |\overline{S_i S_i'}|^2 \quad (I.33)$$

Pour évaluer deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  tels que les paramètres F, G, H, L, M et N de Bishop et Hill s'expriment comme suit :

$$F = G = H = \frac{\alpha}{6\tau_c^2} \quad \text{et} \quad L = M = N = \frac{\beta}{6\tau_c^2}$$

Avec :  $\alpha = 0.409$  et  $\beta = 0.66$  où  $\tau_c$  est la cission résolue critique du cristal supposée identique pour tous les systèmes de glissement [88].

La Figure I.12 montre bien que la frontière d'écoulement ellipsoïdale obtenue circonscrit de près le polyèdre critique bien que quelques sommets restent situés en dehors ou à l'intérieur de l'ellipsoïde. Cette frontière est supposée donner une bonne approximation des vecteurs de contraintes correspondants aux sommets qui interviennent en général

dans la plasticité des cristaux [90-92], bien qu'elle surestime légèrement les amplitudes des vecteurs associés aux faces planes.

Le critère C.M.T.P. se présentera alors sous la forme :

(I.34)

Si  $\sqrt{6}\tau_c$  est choisi comme unité de contrainte, le critère d'écoulement plastique anisotrope à symétrie cubique s'écrit tout simplement :

$$f(S) = 3\alpha [S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2] + 2\beta [S_{23}^2 + S_{13}^2 + S_{12}^2] = 1 \quad (I.35)$$

Si on considère respectivement que  $\tau_0$  et  $\sigma_0$  sont respectivement les contraintes d'écoulement en cisaillement simple et en traction uniaxiale le long des axes  $\langle 100 \rangle$  du monocristal, le rapport  $\tau_0/\sigma_0$  prend la valeur : . Selon l'analyse de Bishop et Hill, correspondant au polyèdre critique, cette même grandeur est égale à l'unité. En revanche, pour les cas d'un matériau isotrope de Von Mises, elle est égale à 0,58 ( $\sqrt{\alpha/\beta} = \sqrt{1/3} = 0,58$ ). Les intersections du polyèdre critique et de la frontière d'écoulement C.M.T.P. avec les plans (A, B), (A, F) et (F, G) de l'espace à cinq dimension (A, B, F, G et H) sont montrées en Figure I.13 (a), (b) et (c).

On remarque que les deux frontières d'écoulement peuvent être assez différentes pour certaines directions des contraintes. Cependant, la comparaison n'est effectuée ici, qu'entre l'ellipsoïde C.M.T.P. et la frontière d'écoulement d'un monocristal. Par contre, si l'on considérait un polycristal présentant une orientation idéale unique, dans lequel les grains sont plus ou moins désorientés par rapport à l'orientation idéale, la différence entre les deux frontières apparaîtrait comme assez réduite.

En vertu de (I.35), on peut donner une autre expression du critère C.M.T.P.:

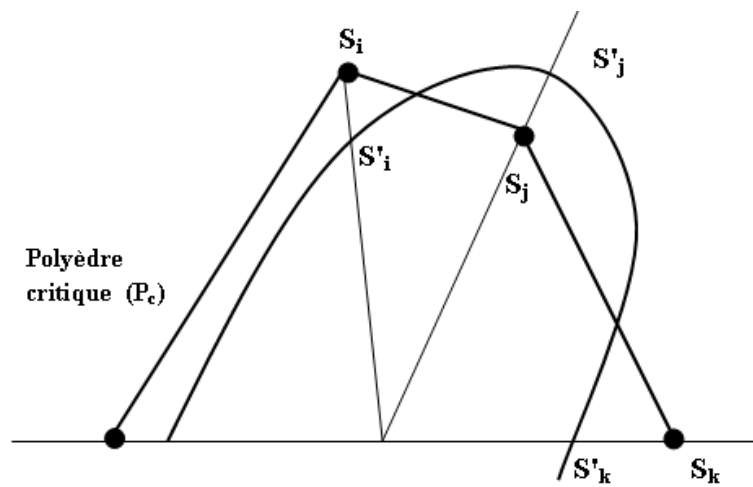
(I.36)

Avec :  $A = \frac{\beta}{3\alpha}$  et  $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{\alpha}}$

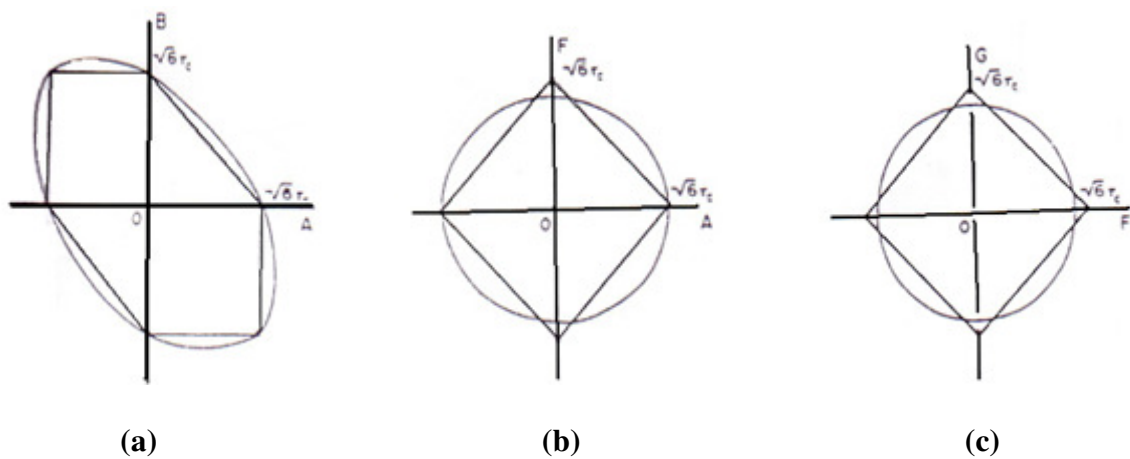
Le paramètre A remplace les constantes F, G, H, L, M et N et détermine la forme de la frontière d'écoulement, tandis que  $\sigma_0$  est la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale suivant les axes d'anisotropie du monocristal et détermine la taille de celle-ci. Lorsque A = 1, cette relation s'identifie au critère isotrope de Von Mises. D'autre part, des études numériques se rapportant à la modélisation du comportement plastique anisotrope de matériaux cubiques à faces centrées [76,93], dans le but de minimiser la quantité (I.33) ont conduit à la détermination de A étant égale à 0,409 et  $\bar{\sigma}$  égale à  $2,4\tau_c$ . Pour les matériaux cubiques centrés, A est égal à 0,373 pour un glissement sur le système  $\{112\} \langle 11\bar{1} \rangle$  [94].







**Figure I.12** : Section de l'espace des contraintes faisant apparaître les sommets  $S_i$ ,  $S_j$  et  $S_k$  du polyèdre critique



**Figure I.13** Intersection du polyèdre critique et de la surface d'écoulement ellipsoïdale C.M.T.P avec les plans (a) : (A, B), (b) : (A, F), (c) : (F, G) dans un espace de contraintes à cinq dimensions (A, B, F, G et H) [77].



### 3.3 Application

#### 3.3.1. Cas des métaux de structure c.f.c.

Les études numériques, se rapportant à la modélisation du comportement plastique anisotrope des matériaux cubiques à faces centrées [77,94], dans le but de minimiser la quantité de l'expression (m) ont permis de déterminer les constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , relatives au polyèdre critique  $P$  correspondant aux matériaux cubiques à faces centrées (Fig. I.14). Ces deux constantes sont exprimées en unités  $\tau_c$  où  $\tau_c$  désigne la cission résolue critique (CRC) des systèmes de glissement  $\{111\} \langle 1\bar{1}0 \rangle$ . Elles prennent les valeurs  $\alpha = 0,172$  et  $\beta = 3,46$ . L'écart quadratique moyen  $\Delta$  (Fig. I.15), calculé entre la frontière d'écoulement ellipsoïdale (E) et le polyèdre critique  $P$ , étant égal à  $0,172 \tau_c$ , peut être considéré comme faible sachant que les valeurs minimum et maximum des  $\Delta$ , sont respectivement  $2 \tau_c$  et  $3,46 \tau_c$ . Compte tenu de l'expression  $r_p$ , la valeur correspondante de A est égale à 0.409 et celle de  $\sigma_0$  est égale à  $0,172 \tau_c$  (Fig. I.16).

#### 3.3.2 Cas des métaux de structure c.c.

Dans la même optique, cette approche a été utilisée pour les matériaux cubiques centrés supposés se déformer par glissements cristallographiques sur les 12 systèmes  $\{110\} \langle 111 \rangle$  et  $\{112\} \langle 111 \rangle$  [87,95].

La cission résolue critique  $\tau_c$  de ces derniers sera supposée identique pour les deux sens de glissement, malgré l'absence de symétrie cristallographique.

Le rapport  $\Delta / \tau_c$ , où  $\tau_c$  désigne la *contrainte résolue critique* des systèmes  $\{110\} \langle 111 \rangle$ , permet de distinguer différents types de matériaux cc. Le polyèdre critique  $P'$  d'un monocristal de structure cc se déformant par glissement cristallographique sur les seuls 12 systèmes  $\{112\} \langle 111 \rangle$ , ainsi que les polyèdres critiques  $P$  correspondant au glissement simultané sur les deux types de systèmes, ont été étudiés. Le polyèdre comporte 2x45 sommets symétriques par rapport à l'origine, répartis en 5 classes de sommets cristallographiquement équivalents.

La minimisation de la quantité  $\Sigma$  conduit dans ce cas à  $\Delta = 0,172 \tau_c$  et  $\sigma_0 = 0,172 \tau_c$ ; cette dernière valeur étant voisine de celle obtenue pour le polyèdre  $P'$ . Les deux types de systèmes de glissement ne peuvent être actifs simultanément que pour

[96]. Les deux valeurs extrêmes de  $\xi$  correspondant respectivement au glissement sur les plans  $\{112\}$  seuls (polyèdre  $P$ ) et sur les plans  $\{110\}$  seuls (polyèdre  $P'$ ). Lorsque  $\xi$  est situé dans cet intervalle, le polyèdre  $P$  présente deux formes

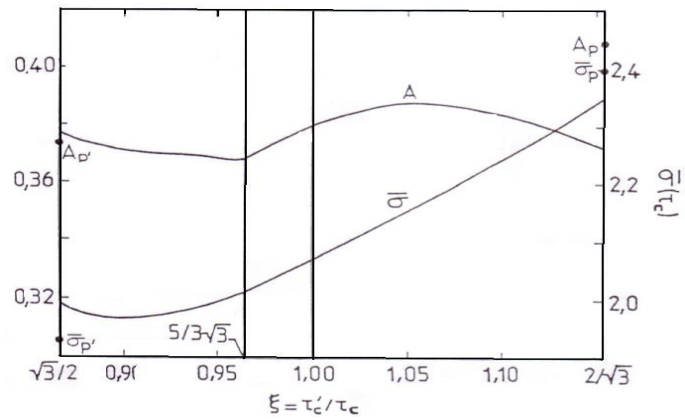
différentes, suivant que  $\alpha$  est inférieur ou supérieur à  $\alpha_c$  (2,88). Toutefois, dans les deux cas, il comporte 2x216 sommets symétriques par rapport à l'origine, répartis en 15

classes de sommets cristallographiquement équivalents. La minimisation de la quantité  $(m)$  a été effectuée numériquement pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

La Figure I.17 montre les variations de  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $r$ . La légère discontinuité de pente observée dans les variations de  $\beta$  et dans une plus faible mesure dans celles de  $\alpha$  pour  $r = \alpha_c$  est liée au changement de forme du polyèdre  $P_m$  pour cette valeur de  $r$ .

On notera que les valeurs obtenues aux limites de l'intervalle  $r \in [\alpha_c, 1]$  (i.e.  $\alpha \approx 0,762$ ,  $\beta \approx 0,862$ ,) et  $r \in [0, \alpha_c]$  (i.e.  $\alpha \approx 0,543$ ,  $\beta \approx 0,608$ ,) sont sensiblement différentes des valeurs déterminées précédemment à partir des polyèdres  $P_m$  et  $P_{m'}$  respectivement. Ces différences résultent de fait que la fonction de la quantité  $(m)$  à minimiser n'est pas la même dans les deux cas : elle fait en effet intervenir les 2x45 sommets du polyèdre  $P_m$  ou les 2 x 28 sommets du polyèdre de  $P_{m'}$  dans le premier cas, mais par contre les 2 x 216 sommets du polyèdre  $P_m$  dans le second cas.

La Figure I.18 montre les variations de l'écart moyen  $\sigma_0$  avec  $r$ . Il est intéressant de noter que le meilleur ajustement est obtenu pour une valeur de  $r$  voisine de 1. On remarque que  $r_p'$  et  $r_p$  sont inférieurs aux valeurs de  $r$  obtenues respectivement pour  $\alpha_c$  et  $\alpha$ , la valeur correspondante de  $A$  est égale à 0.381 et celle de  $\sigma_0$  est égal a [96].



**Figure I.14:** Variation avec  $\xi$  des paramètres :  $A = \frac{\beta}{3\alpha}$  et [96].

**Figure I.15 :** Variation avec  $\xi$  de l'écart moyen , permettant de déterminer la qualité de L'ajustement de l'ellipsoïde (E) au polyèdre critique ( $p_c$ ) [96].

**Figure I.16:** Variations des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  du critère de plasticité C.M.T.P en fonction du rapport des cissions résolues critiques associées respectivement aux systèmes  $\{112\}$   $\langle 111 \rangle$  et  $\{110\}$   $\langle 111 \rangle$  [95].



### 3.4 Formulation de l'approche CMTP pour plusieurs composantes de textures en utilisant les tenseurs d'ordre 4 du type de l'élasticité.

Pour combiner entre plusieurs orientations de texture et pour la concision des calculs, on peut alors proposer le critère de plasticité du matériau global comme une moyenne des critères de chaque constituant pondérés par les fractions volumiques. Donc il est commode d'introduire deux tenseurs d'ordre 4 et de dimensions 3, et les composantes de texture dans les axes du cristal, seront exprimées dans la référence de la tôle utilisant l'écriture invariante :

(I.37)

désigne le tenseur d'élasticité d'ordre 4 et de dimension 3 de l'ensemble du matériau anisotrope. Il est courant de représenter les tenseurs de ce type sous forme d'une matrice 6 x 6 symétrique en adoptant la convention suivante [96].

Les matériaux orthotropes ayant principalement des textures de laminage, la matrice M devient :

Dans les axes liés à l'orientation idéale de la composante symétrisée:

(I.38)

Avec (cas isotrope) quand  $A = 1$ .

- Le tenseur unité  $[U]$  est défini dans les axes de repère orthonormé :

- Le tenseur  $[V]$  est relatif aux composantes de textures dans les orientations idéales  $\langle 100 \rangle$

Si  $V_{ijkl} = 0$  et  $V_{ijkl} = 0$  dans le cas contraire.



Pour mettre en évidence les termes de tenseur dans les références de la tôle (S) à partir des axes du cristal (C), on utilise l'expression suivante :

$$(I.39)$$

De même  $[V_S^i]$  s'écrit :

L'orthotropie exige de considérer 4 composantes (éventuellement confondues 2 à 2 ou 4 à 4) de fractions volumiques égales:  $f_1, f_2, f_3, f_4$ ,  $\{hkl\} <uvw>$  et (Fig. I.17).

D'où :

$$[V] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 V_i \Rightarrow [V] = ([V_1] + [V_2] + [V_3] + [V_4]) / 4$$

Reflétant le comportement mécanique des tôles de laminage.

Le calcul d'homogénéisation se fait lorsque plusieurs composantes de textures entrent en jeu en faisant la moyenne pondérée pour les fractions volumiques :

$$[\bar{V}] = \sum_{i=1}^N f_i [V^i] \quad \text{Et} \quad f_0 = 1 - \sum_{i=1}^N f_i$$

: étant la fraction volumique du fond continu.



**Figure I.17** : Symétrie orthotrope dans le laminage des tôles.

**Figure I.18** : Schéma du laminage asymétrique des tôles.



#### 4. Caractère monoclinique des tôles laminées

La littérature nous fournit de nombreux travaux concernant les calculs de l'anisotropie/surface d'écoulement et les gradients de textures induits sur les tôles laminées. Par exemple, dans le laminage classique (laminage symétrique), la symétrie matérielle manifestée est celle d'orthotropie, bien que les composantes de cisaillement du signe opposé, plus ou moins intenses, puissent être présentes au niveau de la surface du métal [97,98]. Cependant, la vitesse de déformation est généralement simplifiée par la considération d'un état de déformation plane [99].

Le laminage asymétrique est un processus de déformation ayant le même aspect opératoire que le laminage symétrique sauf que les rayons où les vitesses circonférentielles des deux cylindres du laminoir sont différentes (Figure 1.18). Ces différences contribuent à introduire une composante de cisaillement plus intense au niveau de la surface du matériau qui peut présenter plusieurs avantages par rapport au laminage classique. Les efforts appliqués seront plus faibles ce qui conduit à la possibilité d'augmenter la réduction d'épaisseur par passe par rapport au laminage classique [100,101]. Lorsque, par exemple, les vitesses de rotation des cylindres sont différentes, la vitesse de déformation dans le plan de la tôle est plutôt asymétrique. Par conséquent, la symétrie orthotrope de l'échantillon devient non justifiée et plus particulièrement, dans le cas d'un cisaillement prononcé [97]. Dans ce contexte, Hill [102] a conservé la symétrie orthotrope dans l'étude du changement de longueur pendant un essai de torsion d'un tube, mais cette prétention n'a pas été justifiée expérimentalement. La plupart des expériences antérieures (Bailey et al. [103]; Michino et al. [104] ; Stout et al [105]; Eisenberg et al [106]; Helling et al [107]) ont été effectuées pour étudier les surfaces d'écoulements dans l'espace de contraintes sans se référer à une éventuelle symétrie orthotrope. Une étude expérimentale, menée par Kim [108] a montré que la symétrie orthotrope est maintenue pendant la torsion des tubes étirés à froid avec un changement des axes d'orthotropie. Darrieulat et al. [96] dans des études se rapportant à des essais de torsion (déformation de cisaillement simple), ont avancé que le critère de Hill peut être élargi au cas de la symétrie monoclinique prismatique. Au regard de ce qui a été cité précédemment, un écart à l'orthotropie plus important est prévisible et le comportement mécanique des tôles est susceptible de devenir à caractère monoclinique [109,110]. Dans ce cas, la direction transverse  $DT//\varphi^2$  sera un axe de rotation et (DL, DN) un plan miroir de symétrie, cependant (DT, DN) et (DL, DT) ne sont plus des plans de symétrie.

Chapitre II  
Matériaux  
Et  
Procédures expérimentales

La maîtrise et la compréhension du comportement des tôles laminées sur lesquelles nous avons travaillé, destinées aux opérations d'emboutissage, requiert la détermination de plusieurs caractéristiques permettant de caractériser leur emboutissabilité.

Le laminage à chaud et/ou à froid de ces tôles conduit à la formation de textures cristallographiques dont dépendent étroitement ces caractéristiques. Ainsi la tôle peut présenter de forts gradients dans son épaisseur; autrement dit, les orientations idéales majoritairement présentes en peau et à cœur ne sont pas les mêmes. Lorsque l'on caractérise l'anisotropie de tôles orthotropes au moyen d'essais mécaniques telle que la traction, par exemple par la mesure du coefficient de Lankford, on obtient un comportement moyen résultant de la combinaison des diverses couches composant le matériau. Aussi, il devient intéressant de relier ce comportement global à la texture cristallographique hétérogène présente afin de déterminer la distribution spatiale des textures produisant l'anisotropie la plus favorable. D'autre part, selon le niveau et le type des efforts mis en jeu lors de la déformation, le caractère orthotrope de ces tôles peut être mis en question en présentant alors un écart à l'orthotropie en raison des symétries affichées. C'est dans cette optique que notre étude expérimentale sera consacrée à deux types de tôles d'aciers ferritiques :

- La première tôle (industrielle), en acier inoxydable ferritique a été déformée à chaud selon le procédé classique par laminage symétrique. A ce stade, des essais de traction seront réalisés afin de déterminer les caractéristiques mécaniques les plus fondamentales telles que la contrainte d'écoulement, les coefficients d'écrouissage  $n$  et celui de Lankford  $R(\theta)$ . L'identification des textures induites et leurs quantification permettra d'intégrer les valeurs expérimentales ainsi déterminées dans un modèle analytique afin d'étudier au mieux l'hétérogénéité texturale au niveau de l'épaisseur de la tôle.

- La deuxième tôle d'étude a été élaborée au niveau du laboratoire et présente une composition chimique essentiellement à base de fer de haute pureté. Contrairement à la tôle industrielle, elle a subi, quant à elle, un laminage asymétrique afin de discrétiser son comportement en termes de microtexture et de propriétés de symétries affichées, notamment celle de la symétrie monoclinique prismatique due aux intenses efforts de cisaillement en surface de la tôle.

Nous décrivons dans un premier temps les protocoles expérimentaux et les techniques d'analyse utilisées. Nous analysons ensuite les différentes mesures des caractéristiques mécaniques et celles des composantes de textures locales obtenues (à cœur et à peau) afin de pouvoir les intégrer dans un modèle (approche CMTP) développé au sein du Laboratoire SMS de l'Ecole Nationale des Mines de Saint-Étienne (Cf. Chap. III). Ces protocoles expérimentaux serviront ainsi à identifier et à quantifier les grandeurs mécaniques recherchées.

## 1. Tôle industrielle

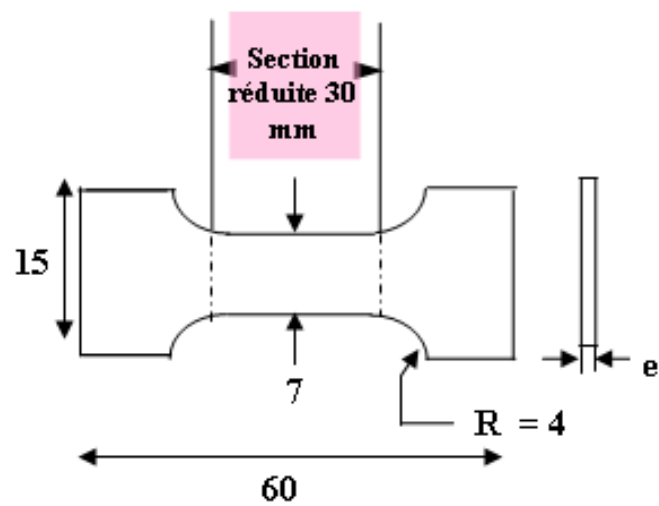
### 1.1 Matériau

Le matériau d'étude est en acier inoxydable ferritique fourni par le groupe Arcelor-MittalSteel (division-Stainless-Europe) sous forme de tôle mince de 1 mm d'épaisseur. Il fait partie de la famille AISI 439-430Ti (EN 1. 4510) dont la dénomination européenne





**Figure II.1** : Schéma de la machine de traction INSTRON



**Figure II.2** : Dimensions des éprouvettes de traction uniaxiale

**Figure II.3** : Epreuve de traction inclinée de  $\theta$  par rapport à la direction de laminage (DL)



correspond à la désignation X3CrTi17. Les indications sur la composition chimique du matériau affichée sur le [Tableau II.1](#) sont données par le fournisseur.

<b>Tableau II.1</b> Composition chimique de l'acier AISI 439-430Ti (% massique)						
<b>Cr</b>	<b>Ti</b>	<b>C</b>	<b>Si</b>	<b>Mn</b>	<b>P</b>	<b>S</b>
16,5	0.35	<0,05	<1	<1	<0,04	<0.015

Conformément à ce tableau, le caractère d'inoxydabilité de ce matériau est marqué par sa teneur en chrome qui est supérieure à 12%. Le faible pourcentage en carbone est contribue à améliorer la soudabilité de l'acier et a éviter la formation de carbures de chrome telle que le  $M_{23}C_6$  qui peut être la cause d'une corrosion intergranulaire. Les autres éléments, en quantité négligeable, à part ne titane ne semblent pas avoir beaucoup d'influence sur le métal.

## 1.2. Procédures expérimentales

### 1.2.1 Anisotropie du comportement mécanique

#### 1.2.1.1 Essais de traction

Dans son principe, l'essai de traction uniaxial consiste à exercer, sur une éprouvette de dimensions initiales (longueur  $L_0$  et section  $S_0$ ) une déformation croissante jusqu'à leur rupture. Au cours de l'essai, on suit l'évolution de la charge  $F$  en fonction de l'allongement  $\Delta l$  de l'éprouvette. On définit alors des variables conventionnelles (ou nominales) qui sont déterminées à partir de l'état initial, et des variables rationnelle (ou vraies) qui sont définies par rapport à l'instant où l'on fait la mesure de  $F$  et  $\Delta l$ . A partir de cela, la détermination d'autres grandeurs caractéristiques supplémentaires, telles que les coefficients d'écrouissage et de Lankford, seront à déterminer afin de mieux expliquer le comportement mécanique de notre matériau d'étude.

Les essais de traction ont été réalisés sur des éprouvettes normalisées sous chargement uniaxial utilisant une machine de type INSTRON modèle 1186 de force de 200 KN de l'École des Mines de Saint Etienne, schématisée en [Figure II.1](#). Les essais sont assistés par ordinateur gérant automatiquement les paramètres d'asservissement du moteur. Les résultats des grandeurs mécaniques sont enregistrés dans un fichier contenant le nombre de points, le temps, le déplacement de l'extensomètre et l'effort axial.

Les éprouvettes ont été usinées au niveau de l'atelier de l'École des Mines de Saint-Étienne. De forme plate et de mêmes dimensions ([Fig. II.2](#)), elles ont été découpées selon le plan de la tôle avec un angle ( $\theta$ ) variant de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  par rapport à la direction de laminage et ce avec un pas de  $15^\circ$  ([Fig. II.3](#)).

#### 1.2.1.2 Détermination du coefficient de Lankford

Pour la détermination du coefficient d'anisotropie de Lankford lors de l'étirage des échantillons, la charge de la machine a été fixée à  $F_0 = 0.2$  KN et la vitesse de déplacement imposée à la traverse à 0.05 mm/s. Le déroulement de tout l'essai s'est



**Figure II.4:** Évolution du coefficient de Lankford expérimental  $R(\theta)$  dans le plan de la tôle

**Figure II.5:** Courbe contrainte déformation selon les différentes directions dans le plan de la tôle



déroulé en 5 étapes dont chacune correspond à un pas de traction de l'ordre de 3% (<0.9 mm) sans pour autant atteindre la zone d'instabilité plastique afin d'assurer une déformation globale homogène. La résistance à l'allongement est mesurée grâce à un extensomètre de longueur initiale de 25mm et de sensibilité égale à 0,006 mm.

Le dépouillement des mesures s'est fait par le tracé des courbes contraintes en fonction de la déformation vraie  $Ln (l/l_0)$ .

Le coefficient de l'anisotropie  $R(\theta)$  est alors déterminé comme étant le rapport entre les vitesses de déformation suivant la largeur et l'épaisseur de l'échantillon selon l'expression:

$$(II.1)$$

Où les  $\epsilon_x$  désignent les composantes du tenseur des vitesses de déformation telle que :

$$\epsilon_x = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \quad \text{et} \quad \epsilon_y = \frac{1}{b} \frac{db}{dt} \quad (II.2)$$

Où  $b_0$  et  $b_f$  représentant respectivement les épaisseurs initiales et finales de la zone utile de l'éprouvette de traction; il en est de même pour les largeurs.

Les valeurs des coefficients de Lankford relatives à chaque angle de découpe choisi sont affichées dans le [Tableau II.2](#) qui fait ressortir une variation très significative selon les différentes directions choisies avec notamment une valeur maximale pour l'angle remarquable de 45° ([Fig. II.4](#)).

<b>Tableau II.2</b> : Valeurs expérimentales du coefficient de Lankford selon la valeur de l'angle ( $\theta$ ) par rapport à la direction de laminage DL.							
$\theta$ (deg.)	0	15	30	45	60	75	90
$R(\theta)$	0,70	0,90	1,26	1,41	1,30	1,24	0,82

### 1.2.1.3 Détermination de la contrainte d'écoulement

Le calcul de la fonction d'érouissage  $\sigma = f(\epsilon)$ , à partir des grandeurs globales (Force-déplacement) fournies par la machine de traction, a été effectué selon l'hypothèse d'homogénéité des champs de contraintes et de déformations au niveau de la partie utile de l'éprouvette.

Les valeurs mesurées de  $\sigma(\theta)$  et de la contrainte normalisée  $\sigma(\theta)/\sigma(0)$ , selon les différentes directions dans le plan de la tôle, sont enregistrées dans le [Tableau II.3](#) et leur évolution en fonction de l'angle ( $\theta$ ) est illustrée en [Figures II.5](#) et [II.6](#) respectivement, pour une déformation de 2%.

**Tableau II.3:** Valeurs expérimentales de la contrainte d'écoulement  $\bar{\sigma}(\theta)$  pour une déformation  $\varepsilon = 0.2\%$ .

	0	15	30	45	60	75	90
	277.67	270.67	272.67	283.34	260.00	177.34	271.34
$\sigma(\theta)/\sigma(0)$	1.000	0.974	0.981	1.021	0.936	0.998	0.977

La superposition des courbes de traction, selon les différentes directions dans le plan de la tôle, est indicatrice d'un même comportement mécanique de la tôle, en l'occurrence,

une assez bonne reproductibilité des essais (Fig. II.5). En outre, selon la Fig. II.6, on peut remarquer que l'anisotropie au niveau des courbes d'écrouissage n'est pas très prononcée, c'est-à-dire qu'elle est peu sensible à la direction de la traction contrairement au coefficient d'anisotropie qui affiche des valeurs extrémales de  $\sim 0,7$  et  $1,41$  à  $\theta = 0$  et  $45^\circ$ , respectivement.

## 1.2.2 Caractérisations microstructurales

### 1.2.2.1 Microstructures

L'analyse microstructurale se rapporte à 2 échantillons de forme rectangulaire et de dimensions  $(25 \times 20)$  mm<sup>2</sup>, découpés sur le plan de la tôle (DL, DT).

Après enrobage, l'un des échantillons a subi un polissage mécanique sur sa surface extérieure tandis que le deuxième a été profondément poli jusqu'à la moitié de son épaisseur, notée mi-épaisseur (cœur de la tôle) (Fig. II.7). Ces opérations consistaient, dans un premier temps, en un polissage mécanique à l'aide de papiers abrasif de granulométrie décroissante allant jusqu'au grade 1200 suivi d'un polissage de finition réalisé sur feutre avec lubrification à l'alumine (1 et 0,25)  $\mu\text{m}$ .

Le premier échantillon a subi ensuite une attaque chimique sur ses trois faces correspondant aux plans (DL, DT), (DT, DN), (DN, DL), moyennant un réactif composé de 60% de HNO<sub>3</sub> et 40% de H<sub>2</sub>O. Cette attaque permet de mettre en évidence les micrographies illustrées en Fig. II.8, obtenues à l'aide d'un microscope optique de type GX.51 Olympus. Les microstructures ainsi révélées affichent une structure à grains ferritiques, de dimensions égales à  $\sim 26\mu\text{m}$  et de formes plus ou moins équiaxes. Cette homogénéité de structure peut être attribuée au traitement thermique de recristallisation antérieur subi à la tôle après le laminage à froid.

### 1.2.2.2 Textures

Une tôle polycristalline est un assemblage de grains qui peuvent être assimilés à de petits monocristaux appelés cristallites. Chaque cristallite est définie par sa forme, sa taille et son orientation cristallographique. Un matériau présente une anisotropie cristallographique ou texture lorsque les cristallites ne sont pas orientées au hasard, mais possèdent une ou plusieurs orientations préférentielles. Après avoir décrit l'orientation d'une cristallite, nous évoquerons différentes manières de représenter cette orientation dans une tôle. Nous présenterons ensuite un moyen de caractérisation et de détermination d'une texture cristalline qui sera la fonction de distribution des orientations



cristallines (FDOC) avant d'exposer la représentation des textures dans les aciers en général.

### 1.2.2.2.1 Rappels sur les conventions et représentations des textures

Différentes méthodes permettent la représentation de l'orientation d'un cristal dans une tôle (Cf. Chap. I):

- les angles d'Euler,
- les indices de Miller,
- les figures de pôles,
- la fonction de distribution de densité des orientations
- les fractions volumiques des composantes idéales de la texture.
- 

Les figures de pôles et la fonction de distribution de densité des orientations permettent une bonne description qualitative des textures et sont très utiles pour la détermination des principales composantes d'une texture. Lorsque ces dernières sont connues et que l'on souhaite les comparer à une autre texture de même type, le calcul des fractions volumiques des textures est alors la solution la plus simple, bien que ce soit possible à partir d'une FDOC.

La texture globale d'un matériau ou macrotexture est mesurée à l'aide de la technique de diffraction des rayons X selon les principes généraux de la diffraction des structures cristallines. Une source de rayons X et un détecteur sont en position de diffraction pour une famille de plans  $\{hkl\}$  donnée (Fig. II.9). Le cristal est fixé sur une tête goniométrique, elle-même montée sur un berceau qui tourne autour du faisceau. Un détecteur mesure alors les intensités des taches de diffraction. La démarche consiste d'abord, à trouver aléatoirement des taches de diffraction, puis à estimer et affiner les paramètres de maille. La détermination automatique des positions du cristal conduit à la formation de raies de diffraction de sorte que chaque direction macroscopique choisie corresponde au vecteur de diffraction défini par la loi de Bragg. Les intensités diffractées relatives aux pôles  $\{hkl\}$  peuvent être représentées par des lignes d'iso-intensités sur la sphère des pôles ou sur le plan équatorial par projection stéréographique.

La mesure des figures de pôles est conditionnée par la loi de Bragg qui doit être vérifiée pour plusieurs plans  $\{hkl\}$  :

$$2d_{hkl} \sin \theta = n\lambda \quad (\text{II.3})$$

Cette expression comporte deux paramètres expérimentaux qui sont  $\theta$  (angle d'incidence du faisceau X par rapport à la famille de plans  $\{hkl\}$  et  $\lambda$  (longueur d'onde de la radiation utilisée). Pour réaliser les conditions de diffraction sur une famille de plans  $\{hkl\}$  la longueur d'onde a été fixée et la variable prise en compte est donc l'angle  $\theta$  (Fig. II.10). Pour un matériau donné et un faisceau de rayons X monochromatique de longueur d'onde donnée, il n'y aura diffraction des rayons X que pour des angles d'incidences bien déterminés. Ces angles sont en relation avec les distances entre les plans réticulaires produisant la réflexion

-



**Figure II.6:** Evolution de la contrainte normalisée  $\sigma(\theta)/\sigma(0)$  dans le plan de la tôle

**Figure II.7 :** Géométrie du gradient de texture à travers l'épaisseur de la tôle

**Figure II.8 :** Micrographies optiques de la tôle industrielle selon les trois plans orthogonaux



### 1.2.2.2.2 Calcul de la Fonction de Densité des Orientations Cristallines (FDOC)

L'orientation des cristallites par rapport à une tôle de matériau métallique, consiste à amener en coïncidence deux repères cartésiens  $K_S$  et  $K_C$ , (Fig. II.11).

-  $K_S$  est le repère macroscopique lié à la symétrie de l'échantillon qui est (DL, DT, DN) dans le cas d'une tôle laminée. Avec: DL (direction de laminage), DT (direction transverse) et DN (direction normale).

-  $K_C$  est le repère microscopique lié au réseau cristallin. Le choix de ce repère n'est pas unique et dépend de la symétrie considérée. Les axes étant en règle générale, choisis parallèlement aux directions cristallographiques caractéristiques de la symétrie cristalline [100], [010] [001].

Cette opération se réduit à une opération de rotation, symbolisée par  $g$  qui peut être défini de différentes manières en amenant le repère macroscopique  $K_S$  sur le repère microscopique  $K_C$  [111].

### 1.2.2.2.3 Détermination expérimentale des figures de pôles

La détermination des textures d'un échantillon consiste à évaluer les orientations cristallographiques préférentielles des grains qui le composent. On peut donc, analyser la texture par la détermination de figures de pôles qui donnent la densité des pôles (hkl) en fonction de leur orientation par rapport à l'échantillon. La quantification et l'analyse des différentes orientations présentes dans la tôle d'étude ont été réalisées à l'aide d'un diffractomètre à haute résolution de type *Dosophatex Philips* de l'École des mines de Saint-Étienne.

L'étude expérimentale concerne principalement la détermination des textures de laminage qui déterminent de manière prédominante l'anisotropie de matériau. Après polissage mécanique des 2 types d'échantillons, on procède à la mesure des figures de pôles {100}, {110} et {112}.

Les intensités de diffraction des RX sont traitées à l'aide du logiciel MTM-FHM de Van Houtte [112]. Ce dernier permet de calculer les fonctions de distribution des orientations cristallines (FDOC) au moyen d'une décomposition en harmoniques sphériques [113] développée initialement par Bunge et d'une "ghost correction" [114] comme interface d'impression. Les figures de pôles seront ensuite recalculées à partir des fonctions (mesurées) en tenant compte des éléments de symétrie des échantillons et du changement de repère. Cependant, les figures de pôles utilisées pour la caractérisation des textures sont généralement incomplètes en raison de la limitation de l'angle d'incidence à environ  $75^\circ$  lors de la diffraction X. Aussi, une meilleure description quantitative de ces textures consiste à calculer les FDOC à partir d'un ensemble de figures de pôles. Ces fonctions, définies dans l'espace tridimensionnel des angles d'Euler avec  $0^\circ < (\varphi_1, \phi, \varphi_2) < 360^\circ$ , représentent les fractions volumiques des cristallites ayant une orientation donnée  $\{\varphi_1, \phi, \varphi_2\}$  [115].



**Figure II.9:** Représentation schématique de Goniomètre 4 cercles.

**Figure II.10:** Principe de diffraction de Bragg

**Figure II.11:** Définition des repères de la tôle et de l'échantillon





Les figures de pôles mesurées selon les deux couches de la tôle, respectivement en surface et à mi-épaisseur, sont présentées en [Fig. II.12](#) et [13](#). Deux exemples correspondant à la symétrie monoclinique (en surface) et à la symétrie orthotrope (au cœur) sont donnés respectivement dans les [Figures II.14](#) et [15](#). Les mesures sont représentées sous forme de coupes bidimensionnelle à  $\Pi_2$  constant variant de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  avec un pas constant de  $5^\circ$ .

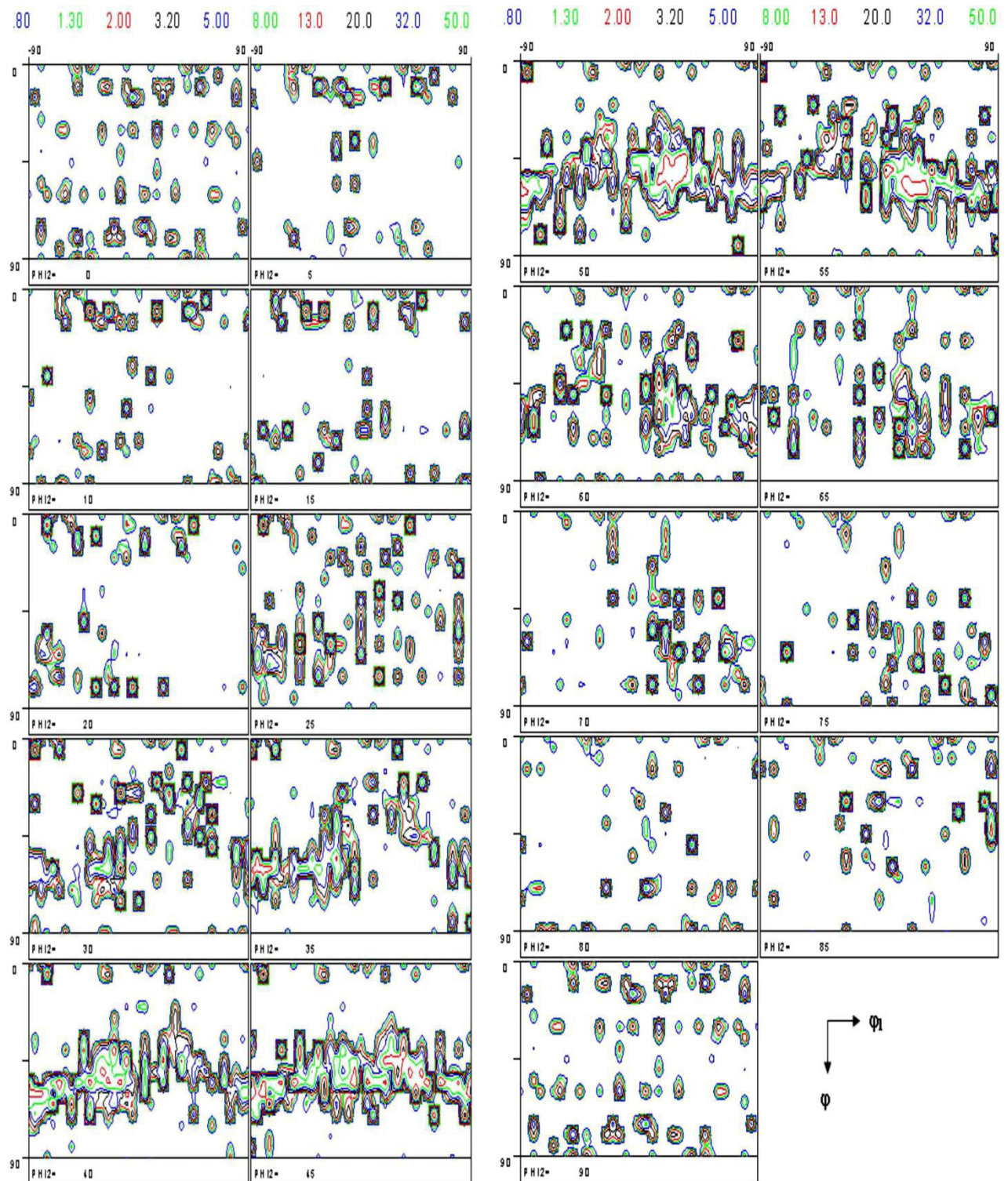
#### **1.2.2.2.4 Détermination des fractions volumiques des composantes de texture**

Chaque orientation étant traitée individuellement, un algorithme "VolFrac2" développé par van Houtte [\[112\]](#) permet de minimiser le temps de calcul. Le principe est d'attribuer une orientation à une et à une seule orientation idéale si et seulement si sa désorientation est inférieure à une valeur seuil classiquement égale à  $15^\circ$  qui correspond à la désorientation minimale d'un joint de grain. Le logiciel peut aller jusqu'à un nombre maximal d'orientations de l'ordre de 5000. La discrétisation des principales proportions des orientations de texture réparties dans la matrice du matériau est rassemblée dans le [Tableau II.4](#).

**Figure II.12** : Figures de pôles expérimentales mesurées en surface de la tôle

**Figure II.13** : Figures de pôles expérimentales mesurées en mi-épaisseur de la tôle





**Figure II.14 :** FDOC calculée en surface de l'échantillon affichant une symétrie monoclinique.



**Figure II.15:** FDOC de la tôle industrielle en mi-épaisseur présentant une symétrie orthotrope.



Les résultats de discrétisation des principales proportions des orientations de texture réparties dans la matrice du matériau pour une symétrie libre sont rassemblés dans le [Tableau II.4](#).

<b>Tableau II.4 : Fractions volumiques calculées des différentes orientations</b>								
<b>Composante s De texture</b>	<b>Symétrie Monoclinique</b>				<b>Symétrie Orthotrope</b>			
	<b>Surface (vol. %)</b>				<b>Mi-épaisseur (vol. %)</b>			
	<b>Brut</b>	<b>Isotrop e</b>	<b>Raffin é</b>	<b>Groupemen t</b>	<b>Brut</b>	<b>Isotrop e</b>	<b>Raffin é</b>	<b>Groupemen t</b>
(001) [1-10]	1.540	2.350	0.148	0.148	0.560	2.260	-0.794	-0.794
(112) [1-10]	1.420	2.240	0.093	1.846	1.860	2.220	0.529	2.202
(11-2) [1-10]	3.080	2.240	1.753		3.040	2.280	1.673	
(111) [1-10]	2.280	1.120	1.616	5.533	1.680	1.150	0.990	4.039
(111) [0-11]	4.740	1.390	3.917		3.960	1.520	3.049	
(221) [1-10]	1.120	1.760	0.077	1.577	1.100	1.730	0.063	2.137
(22-1) [1-10]	1.500	0.000	1.500		2.14	0.110	2.074	
(110) [1-10]	0.680	1.980	-0.492	-0.492	0.22	1.890	-0.912	-0.912
(111) [3-41]	4.180	2.080	2.948	10.21	7.56	2.360	6.146	17.692
(11-1) [3-4-1]	6.920	2.140	5.653		7.54	2.410	6.096	
(11-1) [-341]	3.380	0.960	2.811	8.464	0.000	0.910	-0.545	
(111) [-34-1]	7.860	1.010	7.262		6.780	1.310	5.995	
(111) [1-21]	8.640	1.600	7.692	7.692	12.68 0	2.160	11.38 5	17.104
(11-1) [-121]	6.720	1.710	5.707	5.707	6.900	1.970	5.719	
(001) [100]	0.950	2.460	-0.506	-0.506	1.380	2.400	-0.057	-0.057
(012) [100]	1.190	1.920	0.053	0.896	0.820	1.870	-0.300	-0.560
(01-2) [100]	1.980	1.920	0.843		0.860	1.870	-0.260	
(011) [100]	0.980	2.140	-0.286	-0.286	0.460	2.050	-0.768	-0.768
<b>Fond continu</b>	<b>40.80 0</b>	<b>68.960</b>	<b>59.20 5</b>	<b>59.205</b>	<b>40.46 0</b>	<b>67.520</b>	<b>59.91 0</b>	<b>59.910</b>



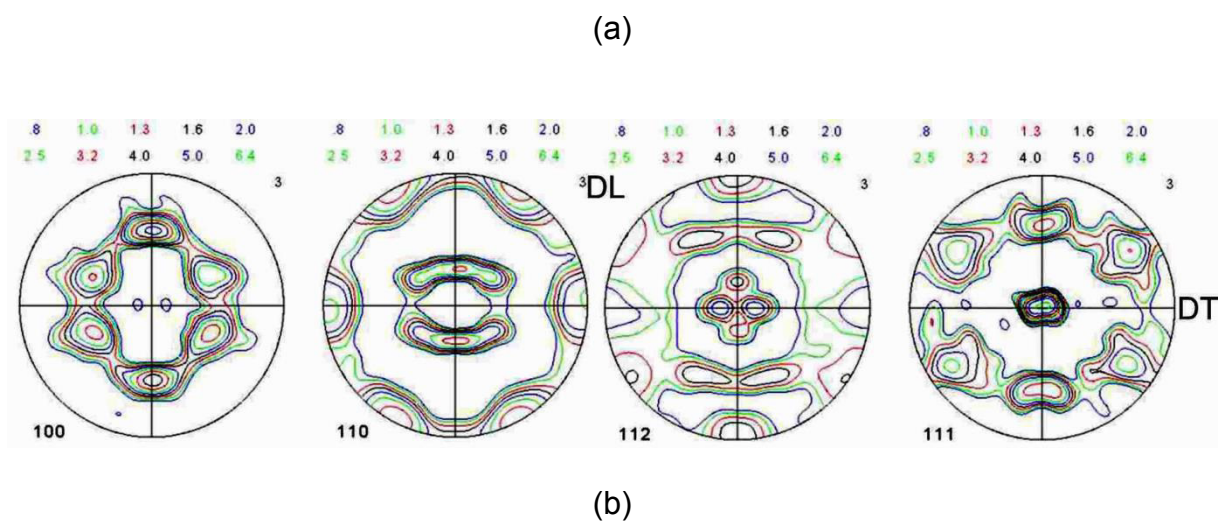
La quantification complète de l'évolution de la texture de la tôle pour les couches en surface et à mi-épaisseur, basée sur la décomposition des FDOC en termes de fonctions gaussiennes, est illustrée en [Figures II.14](#) et [15](#) respectivement. Les textures présentes peuvent être également traduites en 2 dimensions selon des coupes à  $\Pi_2 = 45^\circ$  et ce pour les 2 niveaux de l'épaisseur de la tôle comme il est illustré en [Figure. II.16](#). Les plus fréquentes composantes observées sont de type (11-1) [3-4-1], (111) [1-21], (11-2) [1-10] et de (111) [1-10].

Pour l'analyse en surface, les orientations simultanément présentes ont été regroupées afin de vérifier la symétrie monoclinique (symétrie par rapport au plan (DL, DN)). Il en est de même pour le cœur pour la vérification de la symétrie orthotrope. La simulation des orientations idéales est présentée en [Annexe 1](#).

Afin d'éliminer les intensités indésirables, tout en gardant rien que les dispersions des orientations majoritairement présentes dans le matériau, les figures de pôles sont recalculées à partir des 4 principales figures de pôles (100), (110), (112) et (111) à l'aide de logiciel MTM-FHM ([Fig. II.17](#)) pour une symétrie libre (symétrie triclinique). On remarque que les composantes  $\{11-1\} \langle 3-4-1 \rangle$ ,  $\{111\} \langle 1-21 \rangle$  et  $\{111\} \langle 1-10 \rangle$  sont majoritaires, comme il est montré par la figure de pôles des familles de plans  $\{100\}$ ,  $\{110\}$ ,  $\{112\}$  et  $\{111\}$  et ce pour les deux niveaux de la tôle en tenant compte de la répartition des mêmes composantes dans la partie isotrope du matériau (fond continu). Selon le [Tableau II.4](#), la discrétisation effectuée sur les orientations texturales et leurs poids permet de voir les composantes  $\{11-1\} \langle 3-4-1 \rangle$  et  $\{111\} \langle 1-21 \rangle$  de symétrie monoclinique en surface alors qu'elles sont de symétrie orthotrope au niveau du cœur du matériau. Toutefois, les deux couches présentent une symétrie cristalline globale plus ou moins orthotrope par rapport à l'axe transverse DT. Les composantes de type  $\{111\} \langle 341 \rangle$  indiquent que la peau (surface) ne s'écarte que faiblement de la symétrie orthotrope. Cependant, un "*gradient d'orthotropie*" est à noter entre la peau et le cœur de la tôle.

Dans le but de caractériser et de prévoir un comportement monoclinique que peut présenter une tôle, on a envisagé de compléter l'étude par l'analyse de textures d'une tôle élaborée au laboratoire et qui a subi un "laminage asymétrique". Dans ces conditions, il est fort attendu que le caractère monoclinique soit plus prononcé, du fait des cisaillements intenses imposés au niveau du plan de la tôle.

**Figure II.16 :** Sections à  $\Pi_2 = 45^\circ$  montrant les zones de symétrie monoclinique en surface et de symétrie orthotrope en mi-épaisseur.



**Figure II.17:** Figures de pôles recalculées pour une symétrie triclinique

- (a) en surface
- (b) en mi-épaisseur

## 2. Tôle de laboratoire ferritique

### 2.1 Matériau

La tôle laminée à chaud, utilisée dans cette partie expérimentale, est du fer de haute pureté contenant 60 ppm de carbone et d'épaisseur voisine de 2mm avant déformation. Au cours d'une opération de laminage classique, le caractère de la déformation est essentiellement un état de compression plane avec quelques cisaillements locaux générant plus ou moins de locales textures à caractère monoclinique. Afin d'intensifier l'écart à l'orthotropie induit par les forts cisaillements imposés à la tôle, un laminage asymétrique à température ambiante est alors adopté après avoir fait subir au matériau un traitement de recuit pendant 45 min à 400 ° C. Les deux cylindres utilisés ont un diamètre égal à  $R = 100\text{mm}$  mais présentant un relatif taux de vitesse de rotation élevé de 15. Afin d'intensifier les cisaillements préconisés, huit passes avec 20% de réduction d'épaisseur par passe, ont été effectuées pour obtenir finalement une épaisseur de la feuille d'environ 0,5mm.

### 2.2 Procédures expérimentales

#### 2.2.1 Préparation des échantillons

La tôle a été découpée en échantillons de forme carrée et de section égale à 10 mm<sup>2</sup> pour subir par la suite un recuit de recristallisation sous vide à 450 ° C pendant 45 min. Pour faciliter l'élimination des oxydes en surface et pour éviter le phénomène d'écrouissage induit par le découpage mécanique, les échantillons ont été polis électrolytiquement dans une solution contenant 950 ml d'acide acétique et 60 ml d'acide perchlorique à 15 ° C, sous une tension de 20 V pendant 10 s.

#### 2.2.2 Caractérisations microstructurales

Pour les caractérisations microstructurales, déterminant l'orientation, la forme et la taille des grains, l'observation de l'un des échantillons s'est faite sur un plan normal à la direction transverse de la tôle (TD). Avant de procéder aux observations, la préparation de la surface consistait en un polissage mécanique à l'aide de papiers abrasifs en SiC de granulométries décroissantes (P240 à P2500), suivi d'un polissage de finition à la pate diamantées (3µm et 1µm), utilisant de la silice colloïdale en suspension. La solution d'attaque a été du type DINO comprenant 140 d'H<sub>2</sub>O ml, 100 ml d' H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>, 4g H<sub>2</sub>C<sub>2</sub>O<sub>4</sub>, 1,5 ml d'HF et 2 ml d'H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>.

Les microstructures ont été alors observées à l'aide d'un microscope optique de type *GX.51Olympus*. La Fig. II.18 montre une micrographie optique du matériau laminé asymétriquement après le traitement de recuit préconisé. La microstructure affichée est très hétérogène à partir de laquelle on peut aisément observer une recristallisation partielle de l'échantillon. Elle révèle bien des zones qui sont complètement recristallisées tandis que d'autres affichent de larges bandes de cisaillements. Des colonies de nouveaux grains recristallisés se sont développées à l'intérieur de certains grains écrouis, alors que d'autres grains ne contiennent encore aucun germe de recristallisation, autrement dit que ces germes croissent localement dans l'environnement écroui constitué par leur "grain-mère".



**Figure II.18:** Micrographie optique de la section (DL, DN) de la tôle laminée asymétriquement.

**Figure II.19:** Microscope Électronique à Balayage JSM 6500F



Des colonies de nouveaux grains recristallisés se sont développées à l'intérieur de certains grains écrouis, alors que d'autres grains ne contiennent encore aucun germe de recristallisation, autrement dit que ces germes croissent localement dans l'environnement écroui constitué par leur "grain-mère".

### 2.2.3 Caractérisation microtexturales

L'identification et la quantification des textures ont été effectuées à l'aide d'un microscope électronique à balayage de type JEOL-JSM-6500 F équipé d'un système EBSD opérant à 20 kV (Fig. II.19). La diffraction rétrodiffusée des électrons (EBSD) "Electron Back Scattered Diffraction", plus rarement nommée BKD (Backscattered Kikuchi Diffraction), est utilisée comme technique de caractérisation additionnelle au microscope électronique à balayage.

Comme la section de l'échantillon sur le plan (DL, DT) est très petite dévoilant donc un nombre insuffisant de grains à caractériser, et parce que ces derniers sont trop allongés et écrouis dans le plan (DL, DT), l'échantillon pour observation a été tourné sur le plan normal à DT comme il est schématisé en Figure II.20.

#### 2.2.3.1 Historique de l'analyse EBSD "Electron Back Scattered Diffraction"

Cette technique voit ses fondements remonter aux travaux de Nishikawa et Kikuchi menés en 1928 pour la transmission) [116], puis à Alam [117] pour la rétrodiffusion. Depuis, la méthode EBSD n'a cessé de se développer et ce n'est qu'au début des années 1990 qu'elle fut complètement automatisée [118].

La technique a été discutée en détail par Venables et al. [119, 120]. L'automatisation de l'EBSD a ouvert de nouveaux horizons dans l'analyse quantitative de textures en raison de sa résolution spatiale élevée exceptionnelle, son accès aux corrélations d'orientation, sa vitesse, et sa capacité pour représenter la distribution quantitative de texture et de joints de grain par le biais de cartes des orientations. En outre, la technique permet la reconstruction tridimensionnelle de la microstructure à partir de 3 sections consécutives d'échantillons analysés [121]. Les systèmes EBSD actuels permettent des mesures de l'ordre d'une trentaine d'orientations par seconde, alors que certains constructeurs annoncent des dispositifs permettant d'effectuer plus de 1000 analyses par seconde.

#### 2.2.3.2 Eléments matériels

Pour la mise en œuvre de la technique EBSD dans un microscope électronique à balayage, le matériel nécessaire se compose de trois éléments principaux:

- un faisceau d'électrons d'énergie suffisante (de 15 à 30 kV).
- un échantillon cristallin devant être typiquement *3tilté3* (incliné) à 70° pour que la quantité d'électrons rétrodiffusés soit la plus importante possible. La préparation de la surface analysée doit préserver la structure de l'échantillon devant être préparée par élimination de toute trace d'oxyde ou contamination, mais sans pour cela créer d'écrouissage ou de rugosité importante. Ainsi un polissage mécanique de la surface suivi d'un polissage électrolytique est nécessaire





**Figure II.20:** Plan de caractérisation (DL, DN) choisi normal à la direction DT

**Figure II.21:** Représentation schématique de la technique EBSD connectée à un MEB.

**Figure II.22:** Exemple de diagramme de Kikuchi.



- un détecteur EBSD spécifique constitué d'un écran fluorescent placé près du point source d'électrons rétrodiffusés (sur lequel les électrons rétrodiffusés forment le diagramme) et d'une caméra à bas niveau de lumière qui prend les images des diagrammes en temps réel. L'axe du détecteur doit être normal à l'axe de d'inclinaison de l'échantillon pour un éclairage optimal.

### 2.2.3.3 Principe théorique de la technique EBSD

La technique de diffraction d'électrons rétrodiffusés est une méthode d'analyse qui permet de déterminer les orientations cristallographiques sur des matériaux mono ou polycristallins. Elle est utilisée pour obtenir un diagramme de diffraction caractéristique de l'orientation du grain analysé. Un faisceau d'électrons incident vient balayer la surface du matériau à analyser. En fonction de la cristallographie du matériau, un faisceau d'électrons rétrodiffusés est émis puis recueilli par un écran phosphore. La diffraction des électrons incidents sur les plans cristallographiques en position de Bragg s'effectue sous la forme d'un cône de diffraction très aplati qui correspond à l'angle de Bragg très faible qui est intercepté par l'écran phosphore, d'où l'apparition de lignes délimitant des bandes de Kikuchi (Fig. II.21). Pour obtenir les conditions optimales d'acquisition du signal, le plan de l'échantillon est incliné de  $70^\circ$  par rapport à l'horizontale. Ces différentes bandes propres à chaque orientation du cristal sont analysées par un logiciel (*Flamenco d'HKL Technologies*) afin d'obtenir l'orientation cristallographique du point analysé. Une cartographie d'orientation des grains peut être obtenue en balayant la surface de l'échantillon avec le faisceau d'électrons (Fig. II.22). Cette technique permet de sonder des profondeurs sous la surface libre de l'échantillon de l'ordre de quelques dizaines de nm. A partir de cette carte des orientations locales, le logiciel Channel 5 permet d'obtenir la carte des désorientations et ainsi de déterminer la présence de joints et de sous joints de grains. Cette technique a été majoritairement utilisée pour l'étude de la microstructure et de la texture des échantillons.

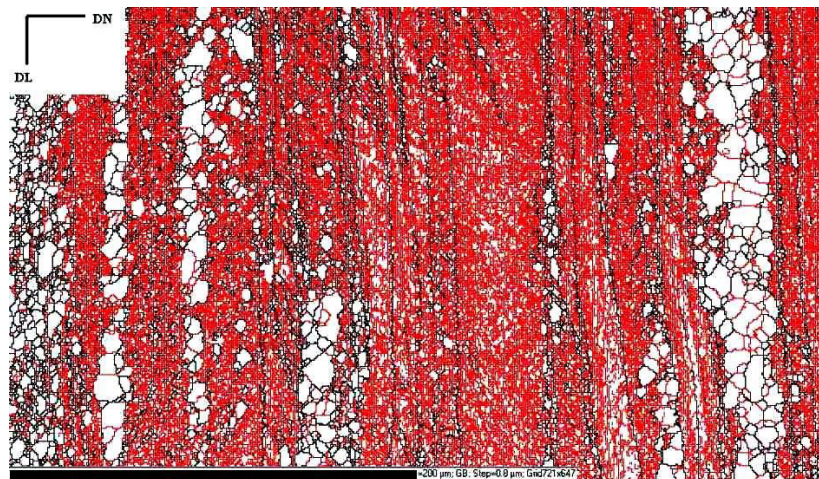
### 2.2.3.4 Dépouillement des résultats

Par la technique EBSD, on obtient dans un premier temps une carte "*Band Contrast*", illustrée en Fig. II.23 qui affiche des zones claires correspondantes à des diagrammes de Kikuchi dans lesquelles la recristallisation a été complète. En revanche, les zones foncées correspondent à des diagrammes superposés dénotant une absence totale de la recristallisation. L'absence de recristallisation dans ce cas, pose un problème de non indexation de certains points. On peut ensuite obtenir la carte des joints et sous joints de grains en fonction de leur désorientation. Si la désorientation entre deux frontières est supérieure à  $15^\circ$ , on considère que l'on a un joint de grain, par contre, si cette désorientation en est inférieure, alors on est en présence d'un sous joint de grain. La Figure II. 24 représente ainsi une carte de joints et sous-joints de grains en fonction de leur désorientation "*Grain Boundary*".

L'analyse des figures de pôles obtenues par l'EBSD (Figure IV.25), montre une tôle présentant une texture de laminage de symétrie monoclinique prismatique significative par rapport à l'axe transverse DT (le plan de symétrie est normal à la direction DT).



**Figure II.23** : Carte représentative d'un contraste de bandes (*Band Contrast*) de l'échantillon recuit.



**Figure II.24** : Carte représentative de joints et sous joints de grains (*Grain boudary*) obtenue par la méthode EBSD.



Parmi les composantes de texture révélées, les deux orientations  $(323)[\bar{1}\bar{3}3]$  et  $(013)[23\bar{1}]$  paraissent les plus prépondérantes. En outre, il est clairement discernable que de telles orientations ne sont pas situées le long de la fibre  $\gamma$  ( ) comme c'est le cas conventionnellement pour les textures de laminage propres aux matériaux cubique centrés.

Le changement local dans l'orientation cristalline peut aussi être observé sur les figures des pôles inverses comme il est présenté en [Figure II.26](#). Il peut y être manifestement constaté une assez importante dispersion des intensités autour du pôle  $(323)[133]$  et  $(013)[231]$ .

Les descriptions précédentes, relatives à des figures de pôles "bruts", peuvent être corrigées à l'aide du logiciel MTM-FHM afin de mieux déceler l'existence de la symétrie monoclinique prismatique qui est plus significative en [Figure II.27](#) et [II.28](#). On porte aussi à titre d'exemple en [Figure II.29](#) des FDOC calculées, affichant les zones de symétrie monoclinique, pour des coupes à  $\Pi_2 = 0^\circ$  et  $\Pi_2 = 45$  respectivement.

La discrétisation des principales orientations cristallines, présentées sous forme d'angle d'Euler, a été effectuée à l'aide du logiciel "Volfrac2", en tenant compte de la répartition des mêmes composantes dans la partie isotrope du matériau (fond continu). La dispersion admise étant de  $15^\circ$ , les valeurs des fractions volumiques des composantes de textures mesurées (1) et calculées (2), sont enregistrées dans le [Tableau II.5](#) et la simulation des orientations idéales est présentée en [Annexe 1](#).

Les orientations globalement représentées par deux paires majoritaires ([Tableau II.5](#)), sont de types :  $A : (323)[\bar{1}\bar{3}3]$ ,  $\bar{A} : (32\bar{3})[\bar{1}\bar{3}\bar{3}]$  et  $B : (013)[\bar{2}3\bar{1}]$ ,  $\bar{B} : (0\bar{1}3)[23\bar{1}]$ . Du fait de la symétrie monoclinique par rapport au plan (RD, ND) affichée par les orientations  $A$  et  $\bar{A}$  ainsi que par  $B$  et  $\bar{B}$  ([Fig. II. 29](#)), celles-ci peuvent être alors représentées seulement par les 2 composantes A et B. Il peut être également remarqué que les composantes de textures développées dans l'échantillon d'étude sont dominées presque par les 2 orientations  $(323)[-1-33]$  et  $(013)[-23-1]$  qui coïncident avec la fibre  $\alpha$  ( $\{111\}$ // ND) sans la présence de fibre  $\alpha$ .

Pour une même orientation, les composantes symétriques peuvent être divisées en 2 ou 4 variantes: A1, A2 et B1, B2, B3, B4. Les fractions volumiques de ces composantes seront la somme de poids de toutes ces variantes :  $A=A1+A2$ ,  $B=B1+B2+B3+B4$ .

La discrétisation des principales orientations cristallines, présentées sous forme d'angle d'Euler, a été effectuée à l'aide du logiciel "Volfrac2", en tenant compte de la répartition des mêmes composantes dans la partie isotrope du matériau (fond continu). La dispersion admise étant de  $15^\circ$ , les valeurs des fractions volumiques des composantes de textures mesurées (1) et calculées (2), sont enregistrées dans le [Tableau II.5](#) et la simulation des orientations idéales est présentée en [Annexe 1](#).





**Figure II.25 :** Brut de figures de pôles {100}, {112}, {111}, {110} obtenues à partir de mesures EBSD

**Figure II.26:** Figure de pole inverse de l'échantillon d'étude

**Figures II.27:** Figures de pôles des analyses EBSD {100}, {112}, {111}, {110} recalculées à l'aide de logiciel de MTM-FHM pour une symétrie monoclinique par rapport à DT.



**Tableau II.5:** Fractions volumiques de composantes de texture dérivées des calculs des FDOC.

Composantes De Texture	Angles d'Euler			Symétrie Monoclinique (Vol. %)			
	$\varphi_1$	$\Phi$	$\varphi_2$	(1)		(2)	
	64	55	60	20.24		18.2	
	-64	125	60	10.90		10.90	
	220	20	20	9.90		7.88	
	140	160	20	5.02		5.00	
	90	15	45	0.50		-0.57	
(11 $\bar{5}$ )[552]	90	165	45	3.70		2.70	
	290	77	45	2.54	3.80	0.72	0.190
(33 $\bar{1}$ )[3 $\bar{1}$ 6]	70	102	45	1.26		-0.53	
	110	77	45	2.08	2.46	1.720	1.817
(33 $\bar{1}$ )[3 $\bar{1}$ 6]	-110	102	45	0.38		0.097	
	90	60	45	3.18		2.23	
	90	120	45	2.36		1.33	
	0	45	20	3.70	4.56	2.090	1.452
	180	45	20	0.86		-0.638	
	180	135	20	1.32	2.56	0.47	0.970
	0	135	20	1.24		0.50	
<b>Fond continu (Vol. %)</b>				<b>30.82</b>		<b>47.90</b>	

**Figure II.28:** FDOC calculée à partir de la technique EBSD suivant le plan (DL, DT) de la tôle ferritique de laboratoire

**Figure II.29:** Sections à  $\Pi_2 = 0^\circ$  et  $45^\circ$  montrant les zones de symétrie monoclinique



# Chapitre III

## Modélisation mécanique

La caractérisation de l'anisotropie plastique des matériaux métalliques au moyen d'essais mécaniques ne conduit qu'à l'obtention d'un comportement moyen résultant de la combinaison des diverses couches de matériaux. En effet, les essais effectués sur une tôle hétérogène ne donnent que la réponse mécanique globale de celle-ci et ne permettent pas d'évaluer l'effet de zones de comportement différent suivant la profondeur, en particulier au voisinage de la surface du produit. Un tel effet peut par contre être analysé et prédit à l'aide d'approches mécaniques ; (i) modélisation analytique ; (ii) calculs numériques associés ; que nous aborderons dans une première partie de ce chapitre. Dans ce contexte et sur la base de la mécanique des monocristaux et sur les hypothèses de combinaison des comportements de chaque composante de texture d'un polycristal, la méthode CMTP peut en être une alternative appropriée. Elle peut rendre compte du comportement mécanique anisotrope de la tôle laminée par le procédé dit classique (laminage symétrique) et ce à partir de la simple connaissance d'un nombre d'orientations préférentielles et de la répartition volumique des grains entre les différentes couches composant le matériau.

En outre, du fait que la surface d'une tôle laminée puisse subir des cisaillements intenses au niveau de sa surface de contact entre les cylindres (laminage asymétrique), on sera amené à considérer par cet état de fait une symétrie matérielle (micro et macro) du matériau de type monoclinique prismatique et non orthotrope. Les essais de caractérisation mécaniques classiques ne permettent pas d'évaluer les paramètres non orthotropes de la tôle. Dans cette optique, une extension du critère de Hill (1948)] peut être prise en compte afin d'évaluer le comportement mécanique des tôles laminées et évaluer l'écart à l'orthotropie. Pour mettre en évidence le caractère monoclinique au moyen des essais mécaniques, on se propose de combiner deux logiques de déformations par un essai de "compression-cisaillement". Ainsi, on aura à déterminer l'angle de rotation autour de l'axe TD pour lequel la partie purement monoclinique du critère de plasticité est strictement minimale afin de donner une approximation orthotrope du critère monoclinique prismatique. De même que pour la première partie, des calculs analytiques et numériques, basés sur l'approche C.M.T.P., seront effectués afin d'en déduire le comportement mécanique global du matériau à partir des orientations microscopiques.

## **1 Tôle industrielle**

### **1.1 Tôle homogène**

Considérons une tôle ferritique formée d'une seule couche, comme il est schématisé en [Fig. III.1](#). Les champs de contraintes et de déformations correspondants, sous les diverses sollicitations imposées, sont considérés (macroscopiquement) les mêmes et uniformes à travers toute la tôle.

#### **1.1.1 Cadre général**

La caractérisation mécanique des tôles passe par la présentation des tenseurs de contraintes et de déformations globaux relatifs aux essais de tractions uniaxiale et orthogonale adoptés comme moyens d'identification des grandeurs recherchées, à savoir le coefficient d'anisotropie et la contrainte d'écoulement.





**Figure III.1 :** Schéma de l'essai de traction pour la détermination du coefficient de Lankford  $R(\ell)$  d'une tôle homogène

**Figure III.2 :** Représentation schématique d'une tôle hétérogène (tôle bicouches)

$$\sigma_E = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et

L'étude du comportement mécanique de telles tôles se fait strictement dans le repère orthotrope du matériau. La détermination des grandeurs mécaniques est effectuée à l'aide d'une matrice de passage, présentant une invariance par une rotation quelconque autour d'un axe particulier, par exemple  $X_3$  (isotropie transverse), selon le raisonnement suivant:

Soit la matrice de passage du repère 'échantillon' au repère 'orthotrope' et sa matrice transposée:

On peut exprimer le tenseur des contraintes dans le repère orthotrope comme suit:

Le premier critère décrivant une tôle homogène, insensible à l'effet Bauschinger et tenant compte de l'anisotropie initiale du matériau, fut proposé par Hill [62]. Mathématiquement, ce critère de plasticité se présente comme une fonction convexe dans l'espace des contraintes. Ainsi, la fonction de charge  $f(\sigma_{ij})$  doit être convexe si elle est deux fois différentiable et sa matrice hessienne H est semi-définie positivement, ce qui implique que ses valeurs propres doivent être positives ou nulles.

La matrice hessienne H s'écrit:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}$$

Le comportement des tôles laminées s'inscrit, le plus souvent, dans le cadre d'une anisotropie orthotrope dans le repère  $(X_1, X_2, X_3)$  où  $X_1$  est la direction de laminage,  $X_2$  la direction transverse et  $X_3$  la direction normale au plan de la tôle.

Le critère proposé est un critère quadratique qui s'exprime dans le repère orthotrope sous la forme suivante:

Tels que  $F, G, H, L, M$  et  $N$  sont les paramètres d'anisotropie de Hill, déterminant la forme de la surface d'écoulement et son degré d'anisotropie.

Selon l'hypothèse de contraintes planes, consistant à négliger toutes les composantes du tenseur des contraintes hors plan de la tôle ( ), ce critère peut se réduire à l'expression suivante :

(III.2)

Ainsi, le nombre de paramètres décrivant l'anisotropie de la tôle se réduit à quatre paramètres qui sont  $F, G, H$  et  $N$  et le tenseur de contraintes dans le nouveau repère orthotrope s'écrit:

$$\sigma_{22} = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta + \tau \sin 2\theta$$

Le remplacement de ces valeurs dans le critère de Hill aboutit à la nouvelle expression:

(III.3)

Du fait que la déformation plastique correspond à une transformation irréversible du matériau, l'identification des lois de comportement associées introduit les principes de la thermodynamique postulant l'existence d'un potentiel dissipatif  $f$  à partir duquel dérive une relation entre le tenseur taux de déformation et le tenseur des contraintes, appelée loi d'écoulement:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad \lambda \geq 0 : \text{Scalaire positif isotrope} \quad (III.4)$$

En associant cette loi au critère de Hill, on obtient respectivement:

$$\begin{aligned} & -2H(\sigma_x \cos 2\theta - \sigma_y \cos 2\theta - 2\tau \sin 2\theta) \cos 2\theta - N(\sigma_x \sin 2\theta - \sigma_y \sin 2\theta + 2\tau \sin 2\theta) \sin 2\theta \ ] \\ \dot{\epsilon}_{zz} = & -\lambda [ 2F(\sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta + \tau \sin 2\theta) + 2G(\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta - \tau \sin 2\theta) \ ] \end{aligned}$$

### 1.1.2 Traction uniaxiale

Généralement, la caractérisation mécanique d'une tôle passe par un essai de traction uniaxial, dans lequel la seule composante non nulle du tenseur des contraintes est dans le repère de l'éprouvette ( $x, y, z$ ). Ceci est vrai lorsque la longueur de l'éprouvette est très grande devant sa largeur. L'effet des têtes est alors négligé mais une vitesse de cisaillement est généralement observée dans son plan.

Dans ce cas, les deux tenseurs de contraintes et de vitesse de déformations s'expriment par :

$$\sigma_E = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En reprenant les mêmes démarches que dans le cadre général, le tenseur de contraintes dans le repère de la tôle peut être écrit:

Par substitution dans le critère de Hill, la contrainte d'écoulement, en fonction de la rotation des différentes sollicitations dans le plan (DL, DT), peut s'écrire :

(III.5)

A partir de la loi d'écoulement (Eq. III.4), on obtient alors :

Par conséquent, on peut normaliser les vitesses de déformations transverse, normale et de cisaillement par la vitesse de déformation imposée dans la direction uniaxiale  $\dot{\epsilon}$ .

$$\frac{\dot{\epsilon}_{yy}}{\dot{\epsilon}} = \frac{2(F + G) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2H \cos^2 2\theta - N \sin^2 2\theta}{2F \sin^4 \theta + 2G \cos^4 \theta + 2H \cos^2 2\theta + N \sin^2 2\theta}$$

$$\frac{\dot{\epsilon}_{zz}}{\dot{\epsilon}} = -\frac{2F \sin^2 \theta + 2G \cos^2 \theta}{2F \sin^4 \theta + 2G \cos^4 \theta + 2H \cos^2 2\theta + N \sin^2 2\theta}$$

L'anisotropie plastique des tôles est généralement caractérisée par le coefficient de Lankford [74], au moyen d'essais de traction uniaxiale effectués dans le plan de laminage suivant diverses directions faisant un angle  $\theta$  par rapport à la direction du laminage (Fig. III.1):

(III.6)

### 1.1.3 Traction orthogonale

On peut aussi considérer un essai de traction orthogonal (cas extrême), en supposant les cisaillements nuls. Cette hypothèse est réaliste dans le cas d'une éprouvette de largeur très grande par rapport à sa longueur. Alors, le matériau développera une contrainte de cisaillement (cission)  $\sigma_{xy}$  non nulle et les tenseurs de contraintes et de déformations s'écriront:

$$\underline{\epsilon}_E = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix}$$

En utilisant la matrice de passage  $P$  on trouve :

En posant :

$$\text{et} \quad 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$$

Le critère de Hill peut s'écrire:

(III.7)

En associant la loi d'écoulement à ce critère on aura alors :

A partir de ces expressions, on détermine le rapport de la contrainte de cisaillement sur celle de l'écoulement pour avoir:

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{-[F \sin^2 \theta - G \cos^2 \theta - (2H - N) \cos 2\theta] \sin 2\theta}{(F + G + 4H) \sin^2 2\theta + 2N \cos^2 2\theta} = \xi$$

Où  $\xi$  est un paramètre représentatif du rapport de contrainte de cisaillement et d'écoulement.

En remplacement dans (III.2) on obtient:

Et:

En posant :

$$T_1 = \sin^2 \theta + \xi \sin 2\theta$$

On obtient:

(III.8)

Le rapport de contraintes peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\xi = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{U}{V}$$

D'où:

On peut aussi écrire:

Et

A partir des suppositions formulées précédemment, nous pouvons présenter le coefficient d'anisotropie de Lankford  $R(\theta)$  sous les diverses formes:

$$R(\theta) = \frac{\mathbb{E}_{yy}}{\mathbb{E}_{zz}} = -\frac{2F(\sigma \sin^2 \theta + \tau \sin 2\theta) \cos^2 \theta + 2G(\sigma \cos^2 \theta - \tau \sin 2\theta) \sin^2 \theta}{2F(\sigma \sin^2 \theta + \tau \sin 2\theta) + 2G(\sigma \cos^2 \theta - \tau \sin 2\theta)} +$$

$$+ \frac{-2H(\sigma \cos 2\theta - 2\tau \sin 2\theta) \cos 2\theta - N(\sigma \sin 2\theta + 2\tau \cos 2\theta) \sin 2\theta}{2F(\sigma \sin^2 \theta + \tau \sin 2\theta) + 2G(\sigma \cos^2 \theta - \tau \sin 2\theta)}$$

$$R(\theta) = \frac{\mathbb{E}_{yy}}{\mathbb{E}_{zz}} = -\frac{F(V \sin^2 \theta + U \sin 2\theta) \cos^2 \theta + G(V \cos^2 \theta - U \sin 2\theta) \sin^2 \theta}{F(V \sin^2 \theta + U \sin 2\theta) + G(V \cos^2 \theta - U \sin 2\theta)} +$$

$$+ \frac{-H(V \cos 2\theta - 2U \sin 2\theta) \cos 2\theta - \frac{N}{2}(V \sin 2\theta + 2U \cos 2\theta) \sin 2\theta}{F(V \sin^2 \theta + U \sin 2\theta) + G(V \cos^2 \theta - U \sin 2\theta)}$$

Des calculs effectués à l'aide du logiciel Maple, donnent:

Avec :  $Q = [Q_8 \cos^8 \theta + Q_6 \cos^6 \theta + Q_4 \cos^4 \theta + Q_2 \cos^2 \theta + Q_0]^{\frac{1}{2}}$

Tels que :

$$Q_8 = 16(F + G)N^2 - 8[(F - G)^2 + 8S]N + 16TS$$

$$Q_6 = -16(3F + G)N^2 + 8[(3F^2 + G^2 + 12FG + 12GH + 20HF)]N - 32TS$$

$$Q_4 = 4(13F + G + 4H)N^2 - 8[(3F^2 + 4H^2 + 8FG + 6GH + 18HF)]N + 16TS$$

$$Q_2 = -8(3F + 2H)N^2 + 8[(F + 2H)^2 + 2S]N$$

Avec :

De même:

$$Z = [2N(F + G) - 4S] \cos^4 \theta - [2N(F + G) - 4S] \cos^2 \theta - 2HN$$

Avec:

$$W = 2[2N(F + G) - 4S] \cos^4 \theta + [-2N(3F + G) + 8S] \cos^2 \theta + 2FN$$

Soit :

$$R(\theta) = \frac{-[2N(F + G) - 4S](\cos^4 \theta - \cos^2 \theta) + 2HN}{2[2N(F + G) - 4S] \cos^4 \theta + [-2N(3F + G) + 8S] \cos^2 \theta + 2FN}$$



$$R(\theta) = \frac{[N(F+G) - 2S](\sin^2 \theta \cos^2 \theta) + HN}{[2N(F+G) - 4S]\cos^4 \theta + [-N(3F+G) + 4S]\cos^2 \theta + FN} \quad (\text{III.9})$$

Car :  $\cos^4 \theta - \cos^2 \theta = -\sin^2 \theta \cos^2 \theta$

Pour  $\theta = 0$  :  $Q = (Q_8 + Q_6 + Q_4 + Q_2 + Q_0)^{\frac{1}{2}} = 2N\sqrt{G+H}$

$$\frac{\sigma(0^\circ)}{\sigma_0} = \frac{1}{\sqrt{G+H}}$$

On trouve la même valeur qu'en traction uniaxiale selon DL :

$$R = \frac{H}{G} \quad \text{et} \quad \frac{\tau}{\sigma_0} = 0$$

## 1.2 Tôle hétérogène (Tôle Sandwich)

Les essais effectués sur une tôle hétérogène ne donnent qu'une réponse mécanique globale en ne permettant pas d'évaluer l'effet de zone de comportements différents suivant sa profondeur, en particulier au voisinage de la surface du produit. L'approche analytique proposée se limite au cas d'un matériau composé de deux couches (1) et (2) orthotropes, de mêmes axes (DL, DT, DN) et dont le comportement est régi par le critère de Hill quadratique et la loi d'écoulement associée. Leurs respectifs paramètres d'anisotropie F1, G1, H1, N1 et F2, G2, H2, N2 sont différents et les deux autres paramètres L et M n'interviennent pas pour des sollicitations limitées au plan de la tôle. La caractérisation mécanique proposée passe, de prime abord, par une approche simplifiée puis considérer, en second lieu, le cas général.

### 1.2.1 Approche simplifiée

On suppose dans un premier temps, que les deux couches sont parfaitement collées (Fig. III.2) (homogénéisation des couches) l'une à l'autre et leurs épaisseurs définies par :

$$e_1 = \lambda e \quad \text{et} \quad e_2 = (1 - \lambda)e$$

Avec :

$$e_1 + e_2 = 1$$

Où (e) désigne l'épaisseur totale de la tôle et  $\lambda$  sa fraction volumique; pour  $\lambda = 0$  on est en présence de la deuxième couche et quand  $\lambda = 1$  on est dans la première.

La caractérisation s'opère par différentes sollicitations mécaniques parmi lesquelles on traite des tractions simples suivant les deux directions orthotropes DL et DT, un essai de cisaillement simple dans le plan de la tôle et un essai de traction équibiaxial selon DL et DT. Dans toutes ces considérations, nous établissons la relation entre les paramètres globaux d'anisotropie de la tôle en fonction des ceux locaux dans chaque couche, en considérant les hypothèses de sollicitations parallèles (modèle de Taylor) qui supposent des déformations identiques dans les deux couches.

On a:  $\varepsilon_{11}^{(1)} = \dot{\varepsilon}_{11}^{(2)}$ ,  $\varepsilon_{22}^{(1)} = \dot{\varepsilon}_{22}^{(2)}$  et  $\varepsilon_{12}^{(1)} = \dot{\varepsilon}_{12}^{(2)}$

Par suite de l'incompressibilité plastique, les déformations associées aux conditions de liaisons interfaciales, obtenues par la moyenne des contraintes pondérées des épaisseurs respectives des deux milieux, on écrit:

$$\varepsilon_{33}^{(1)} = \dot{\varepsilon}_{33}^{(2)}$$

D'où l'obtention de 4 équations permettant la détermination des paramètres F, G, H et N.

Les deux milieux sont pondérés par les conditions de mélange suivantes :

$$TS (X1) \Leftrightarrow \sigma_{11} = \frac{e_1 \sigma_{11}^{(1)} + e_2 \sigma_{11}^{(2)}}{e_1 + e_2} = \lambda \sigma_{11}^{(1)} + (1 - \lambda) \sigma_{11}^{(2)} \quad (\text{III.10})$$

$$TS (X2) \Leftrightarrow \sigma_{22} = \frac{e_1 \sigma_{22}^{(1)} + e_2 \sigma_{22}^{(2)}}{e_1 + e_2} = \lambda \sigma_{22}^{(1)} + (1 - \lambda) \sigma_{22}^{(2)} \quad (\text{III.11})$$

$$TEB (X1 \text{ et } X2) \Leftrightarrow \sigma_{EB} = \frac{e_1 \sigma_{EB}^{(1)} + e_2 \sigma_{EB}^{(2)}}{e_1 + e_2} = \lambda \sigma_{EB}^{(1)} + (1 - \lambda) \sigma_{EB}^{(2)} \quad (\text{III.12})$$

$$CIS (X1, X2) \Leftrightarrow \sigma_{12} = \frac{e_1 \sigma_{12}^{(1)} + e_2 \sigma_{12}^{(2)}}{e_1 + e_2} = \lambda \sigma_{12}^{(1)} + (1 - \lambda) \sigma_{12}^{(2)} \quad (\text{III.13})$$

En remplaçant ces expressions dans le critère de Hill (Eq. III.2), on tire les paramètres globaux F, G, H et N :

$$\begin{aligned} (\text{II.10}) \Leftrightarrow \frac{\sigma_0}{\sqrt{G+H}} &= \frac{\lambda \sigma_0}{\sqrt{G_1+H_1}} + \frac{(1-\lambda)\sigma_0}{\sqrt{G_2+H_2}} \Rightarrow (G+H) = \frac{(G_1+H_1)(G_2+H_2)}{(\lambda\sqrt{G_2+H_2} + (1-\lambda)\sqrt{G_1+H_1})^2} \\ (\text{II.11}) \Leftrightarrow \frac{\sigma_0}{\sqrt{F+H}} &= \frac{\lambda \sigma_0}{\sqrt{F_1+H_1}} + \frac{(1-\lambda)\sigma_0}{\sqrt{F_2+H_2}} \Rightarrow (F+H) = \frac{(F_1+H_1)(F_2+H_2)}{(\lambda\sqrt{F_2+H_2} + (1-\lambda)\sqrt{F_1+H_1})^2} \\ (\text{II.12}) \Leftrightarrow \frac{\sigma_0}{\sqrt{F+G}} &= \frac{\lambda \sigma_0}{\sqrt{F_1+G_1}} + \frac{(1-\lambda)\sigma_0}{\sqrt{F_2+G_2}} \Rightarrow (F+G) = \frac{(F_1+G_1)(F_2+H_2)}{(\lambda\sqrt{F_2+G_2} + (1-\lambda)\sqrt{F_1+G_1})^2} \\ (\text{II.13}) \Leftrightarrow \frac{\sigma_0}{\sqrt{2N}} &= \frac{\lambda \sigma_0}{\sqrt{2N_1}} + \frac{(1-\lambda)\sigma_0}{\sqrt{2N_2}} \Rightarrow (N) = \frac{N_1 N_2}{(\lambda\sqrt{N_2} + (1-\lambda)\sqrt{N_1})^2} \end{aligned}$$

D'où:

$$F = \frac{1}{2}[(\text{II.11}) + (\text{II.12}) - (\text{II.10})] = \frac{1}{2} \left[ \frac{(F_1+H_1)(F_2+H_2)}{(\lambda\sqrt{F_2+H_2} + (1-\lambda)\sqrt{F_1+H_1})^2} + \frac{(F_1+G_1)(F_2+G_2)}{(\lambda\sqrt{F_2+G_2} + (1-\lambda)\sqrt{F_1+G_1})^2} - \frac{(G_1+H_1)(G_2+H_2)}{(\lambda\sqrt{G_2+H_2} + (1-\lambda)\sqrt{G_1+H_1})^2} \right]$$

$$G = \frac{1}{2}[(\text{II.10}) + (\text{II.12}) - (\text{II.11})] = \frac{1}{2} \left[ \frac{(G_1 + H_1)(G_2 + H_2)}{(\lambda\sqrt{G_2 + H_2} + (1-\lambda)\sqrt{G_1 + H_1})^2} + \frac{(F_1 + G_1)(F_2 + G_2)}{(\lambda\sqrt{F_2 + G_2} + (1-\lambda)\sqrt{F_1 + G_1})^2} - \frac{(F_1 + H_1)(F_2 + H_2)}{(\lambda\sqrt{F_2 + H_2} + (1-\lambda)\sqrt{F_1 + H_1})^2} \right]$$

$$H = \frac{1}{2}[(\text{II.10}) + (\text{II.11}) - (\text{II.12})] = \frac{1}{2} \left[ \frac{(G_1 + H_1)(G_2 + H_2)}{(\lambda\sqrt{G_2 + H_2} + (1-\lambda)\sqrt{G_1 + H_1})^2} + \frac{(F_1 + H_1)(F_2 + H_2)}{(\lambda\sqrt{F_2 + H_2} + (1-\lambda)\sqrt{F_1 + H_1})^2} - \frac{(F_1 + G_1)(F_2 + G_2)}{(\lambda\sqrt{F_2 + G_2} + (1-\lambda)\sqrt{F_1 + G_1})^2} \right]$$

$$N = \frac{N_1 N_2}{(\lambda\sqrt{N_2} + (1-\lambda)\sqrt{N_1})^2}$$

La détermination de ces 4 paramètres intervient dans l'identification des grandeurs mécaniques recherchées tels que la contrainte d'écoulement (Eq. III.5) et le coefficient de Lankford  $R(\theta)$  (Eq. III.6), dans les deux milieux de la tôle.

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_0}{(F \sin^4 \theta + G \cos^4 \theta + H \cos^2 2\theta + 2N \sin^2 \theta \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$R(\theta) = \frac{[H \cos^2 2\theta - (F + G - 2N) \cos^2 \theta \sin^2 \theta]}{F \sin^2 \theta + G \cos^2 \theta}$$

### 1.2.2 Approche généralisée

Nous nous proposons d'affiner beaucoup plus nos calculs en détaillant d'avantage l'approche simplifiée par la détermination des grandeurs mécaniques dans chaque couche et dans le matériau global. Pour cela, on suppose qu'au cours d'une traction uniaxiale, les tenseurs des vitesses de déformation sont identiques dans les deux couches, soit :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^{(1)} = \underline{\underline{\epsilon}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\epsilon}}_{xx} & \underline{\underline{\epsilon}}_{xy} & 0 \\ \underline{\underline{\epsilon}}_{yx} & \underline{\underline{\epsilon}}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{\epsilon}}_{zz} \end{bmatrix}$$

Où la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}$  est imposée.

Les tenseurs des contraintes sont, quant à eux, différents dans les deux couches et dans le matériau global :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma^{(1)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(1)} & \sigma_{xy}^{(1)} & 0 \\ \sigma_{xy}^{(1)} & \sigma_{yy}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad \sigma^{(2)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(2)} & \sigma_{xy}^{(2)} & 0 \\ \sigma_{xy}^{(2)} & \sigma_{yy}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A l'aide de matrice du passage, nous exprimons ces deux tenseurs dans le repère de la tôle ( $X_1, X_2, X_3$ ) :

$$\sigma_T^{(1)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(1)} \cos^2 \theta + \sigma_{yy}^{(1)} \sin^2 \theta - \sigma_{xy}^{(1)} \sin 2\theta & (\sigma_{xx}^{(1)} - \sigma_{yy}^{(1)}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy}^{(1)} \cos 2\theta & 0 \\ (\sigma_{xx}^{(1)} - \sigma_{yy}^{(1)}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy}^{(1)} \cos 2\theta & \sigma_{xx}^{(1)} \sin^2 \theta + \sigma_{yy}^{(1)} \cos^2 \theta - \sigma_{xy}^{(1)} \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_T^{(1)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(1)} & \sigma_{12}^{(1)} & 0 \\ \sigma_{12}^{(1)} & \sigma_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_T^{(2)} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^{(2)} \cos^2 \theta + \sigma_{yy}^{(2)} \sin^2 \theta - \sigma_{xy}^{(2)} \sin 2\theta & (\sigma_{xx}^{(2)} - \sigma_{yy}^{(2)}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy}^{(2)} \cos 2\theta & 0 \\ (\sigma_{xx}^{(2)} - \sigma_{yy}^{(2)}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy}^{(2)} \cos 2\theta & \sigma_{xx}^{(2)} \sin^2 \theta + \sigma_{yy}^{(2)} \cos^2 \theta - \sigma_{xy}^{(2)} \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_T^{(2)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(2)} & \sigma_{12}^{(2)} & 0 \\ \sigma_{12}^{(2)} & \sigma_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Idem pour les vitesses de déformations :

$$\underline{\epsilon}_T = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \cos^2 \theta + \epsilon_{yy} \sin^2 \theta - \epsilon_{xy} \sin 2\theta & (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) \sin \theta \cos \theta + \epsilon_{xy} \cos 2\theta & 0 \\ (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) \sin \theta \cos \theta + \epsilon_{xy} \cos 2\theta & \epsilon_{xx} \sin^2 \theta + \epsilon_{yy} \cos^2 \theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\epsilon}^{(1)}_T = \underline{\epsilon}^{(2)}_T$$

A l'aide de logiciel de calcul Maple, les critères de Hill pour les 2 milieux s'écrivent :

$$\sigma_0^2 = A_1 \sigma_{xx}^{(1)2} + B_1 \sigma_{yy}^{(1)2} + C_1 \sigma_{xy}^{(1)2} + D_1 \sigma_{xx}^{(1)} \sigma_{yy}^{(1)} + E_1 \sigma_{xx}^{(1)} \sigma_{xy}^{(1)} + S_1 \sigma_{yy}^{(1)} \sigma_{xy}^{(1)} \quad (\text{III.14})$$

$$\sigma_0^2 = A_2 \sigma_{xx}^{(2)2} + B_2 \sigma_{yy}^{(2)2} + C_2 \sigma_{xy}^{(2)2} + D_2 \sigma_{xx}^{(2)} \sigma_{yy}^{(2)} + E_2 \sigma_{xx}^{(2)} \sigma_{xy}^{(2)} + S_2 \sigma_{yy}^{(2)} \sigma_{xy}^{(2)} \quad (\text{III.15})$$

Avec :

$$A_1 = (G_1 + H_1) \cos^4(\theta) + (H_1 + F_1) \sin^4 \theta + 2(N_1 - H_1) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$$

$$B_1 = (F_1 + H_1) \cos^4(\theta) + (H_1 + G_1) \sin^4 \theta + 2(N_1 - H_1) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$$

$$C_1 = (2N_1) \cos^4(\theta) + (2N_1) \sin^4 \theta + 4(F_1 - N_1 + G_1 + 4H_1) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$$

$$E_1 = (4N_1 - 8H_1 - 4G_1) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + (8H_1 - 4N_1 + 4F_1) \cos(\theta) \sin^3(\theta)$$

$$S_1 = (-4N_1 + 4F_1 + 8H_1) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + (-4G_1 - 8H_1 + 4N_1) \cos(\theta) \sin^3(\theta)$$

Et:

$$B_2 = (F_2 + H_2) \cos^4(\theta) + (H_2 + G_2) \sin^4 \theta + 2(N_2 - H_2) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$$

$$D_2 = -2H_2 \cos^4(\theta) - 2H_2 \sin^4 \theta + (2F_2 - 4N_2 + 2G_2 + 4H_2) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$$

La loi d'écoulement dans les 2 milieux  $\epsilon_{ij} = \lambda_1 \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$  conduit au système linéaire suivant :

$$\epsilon_{xx} = \lambda_1 [2A_1 \sigma_{xx}^{(1)} + D_1 \sigma_{yy}^{(1)} + E_1 \sigma_{xy}^{(1)}] \quad (\text{III.16})$$

$$\epsilon_{yy} = \lambda_1 [D_1 \sigma_{xx}^{(1)} + 2B_1 \sigma_{yy}^{(1)} + S_1 \sigma_{xy}^{(1)}] \quad (\text{III.17})$$

$$(\text{III.18})$$

$$(\text{III.19})$$

$$(\text{III.20})$$

$$(\text{III.21})$$

En rajoutant les conditions de mélange entre les deux couches, on aura :

$$(\text{III.22})$$

$$(\text{III.23})$$

$$\sigma_{xx} = \lambda \sigma_{xx}^{(1)} + (1 - \lambda) \sigma_{xx}^{(2)} \quad (\text{III.24})$$

Les inconnues du problème sont:

et ,

Soit au total 11 inconnues.

En tenant compte de la relation d'incompressibilité, on a:

Les équations disponibles sont:

- les deux critères de plasticité (2 équations)
- les deux lois d'écoulement associées relatives aux composantes  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  (4 équations)

- les conditions de liaison entre les deux couches, soit:  $\varepsilon_{yy}^{(1)} = \varepsilon_{yy}^{(2)}$  et (2 équations)

- les relations de moyenne, soient:

$$\sigma_{yy} = \lambda \sigma_{yy}^{(1)} + (1 - \lambda) \sigma_{yy}^{(2)} = 0 \quad (3 \text{ équations})$$

Ce qui nous donne au total 11 équations.

Comme  $\sigma_{yy}$  est imposée (connue) dans les deux couches, et à partir des Eq. III.16 à III.23 on peut établir le système suivant :

(III.25)

(III.26)

(III.27)

(III.28)

(III.29)

(III.30)

Ce qui donne :

L'utilisation de méthodes de résolution (Gauss, Cramer...) permet la détermination des contraintes réparties dans les deux couches.

$$\sigma_{xy}^{(2)} = - \frac{\varepsilon (\omega_1 \lambda_1^3 \lambda_2 + \omega_2 \lambda_1 \lambda_2^3)}{a_1 \lambda_1^3 \lambda_2 + a_2 \lambda_1 \lambda_2^3 + a_3 \lambda_2^3 \lambda_1}$$

Par remplacement de ces valeurs dans les critères des Eq. III.2 et III.3 associés aux deux couches, on peut écrire:

Ce système peut être transformé en une équation polynomiale de degré 6, en posant:

On aura :

Ce système de 11 équations à 11 inconnues a été ainsi résolu de manière partiellement analytique, débouchant sur une équation polynomiale de degré 6 et d'inconnue le rapport

. La résolution numérique de cette dernière a permis de montrer l'existence d'une solution positive unique dans tous les cas étudiés ce qui permet alors de calculer toutes les inconnues du problème. Le calcul des coefficients de la tôle bicouche est porté en [Annexe 2](#).

### 1.2.3 Application

Les résultats du calcul obtenus pour les deux approches (simplifiée et généralisée) peuvent être exploités graphiquement en faisant varier les facteurs  $\mu$  et  $\nu$  des deux couches en fonction de différentes valeurs des paramètres globaux d'anisotropie F, G, H et N. Ces derniers seront choisis de manière à ce que le coefficient de Lankford et la contrainte d'écoulement de chacune des couches soient toujours positifs, tout en respectant les conditions physiques imposées aux deux facteurs.

#### 1.2.3.1 Choix des paramètres des F, G, H et N

##### a) – Contrainte d'écoulement

Avec :

En posant:

Pour

Pour  $t=0 \Rightarrow N \geq H$

##### b) - Coefficient d'anisotropie $R(\theta)$

Les conditions physiques imposent:

$$\text{et } R(90) = \frac{H}{F} \geq 0 ; \quad \text{Donc: } H, F, \text{ et } G > 0$$



Sachant qu'un seul des trois pourrait être négatif pour assurer la convexité de la frontière d'écoulement et comme :

Avec:

Pour

Remplaçons dans y1.

Étude de la positivité du minimum de R (l) :

Alors : et  $\Rightarrow N > \frac{F+G}{2}$  et

Ce qui donne : (jj)

On montre simplement, que pour assurer la positivité du minimum de R (l), N doit être compris entre et . Les exemples donnés dans le [Tableau III.1](#) vérifient bien la relation [122].

Tableau III.1 Le Choix des divers paramètres d'anisotropie utilisés dans les applications.					
Cas	Couche	F	G	H	N
A	1	0.75	0.25	1	1
	2	0.25	0.75	1	1
B	1	1	1	0.25	1
	2	1	1	0.75	1
C	1	1	1	1	1.25
	2	1	1	1	1

### 1.2.3.2 Résultats de la modélisation théorique de la tôle bicouche (approches simplifiée et généralisée)

Trois cas de figures (A, B et C) sont présentés pour l'analyse de l'anisotropie de la tôle bicouche ([Tableau III.1](#)). Pour le cas A, la couche (2) est de même composition que la couche (1) à part qu'elle n'ait subie une rotation de  $90^\circ$  autour de la direction normale au plan de la tôle (faisant ainsi intervertir F et G). Les cas B et C sont choisis pour montrer les influences respectives des paramètres H et N. A titre d'exemple, des premiers résultats du calcul obtenus pour les deux approches (simplifiée et généralisée) pour un essai de traction uniaxial, sont explicités graphiquement par les [Figures. III.3-8](#) et ce, en faisant varier les valeurs des paramètres locaux et/ou globaux d'anisotropie F, G, H et N. Un autre type d'exemple est donné en [Fig. III.9](#) montrant l'évolution des paramètres d'anisotropie F, G, H et N selon l'épaisseur de la tôle pour les trois classes A, B et C, par l'approche simplifiée. Enfin, un dernier exemple, montrant une comparaison de calculs entre des essais de traction uniaxiale et orthogonale pour la couche (2) du cas A est montré en [Fig. III.10](#).

D'après les [Fig. III \(3-6\)](#), on observe que l'influence des deux méthodes (simplifiée et généralisée) sur les allures des courbes des contraintes, du coefficient de Lankford et sur leur grandeurs est nettement remarquable, malgré la légère différence des valeurs des paramètres d'anisotropie déclarées pour les trois classes A, B et C. Par contre, cette influence est moins nette en [Figs. III \(7 et 8\)](#) pour les mêmes classes. Le cas de la classe A peut être considéré comme un exemple d'anisotropie entre les deux couches autrement dit, la couche (2) n'est simplement que la couche (1) tournée de  $90^\circ$  dans le sens contraire des aiguilles de montre. L'évolution des paramètres d'anisotropie à travers l'épaisseur du matériau est présentée en [Fig. III.9](#). Sur la [Fig. III.9 \(a\)](#), on représente l'influence individuelle de chaque paramètre de la classe A sur le comportement anisotrope de la tôle et ce dans les trois directions de l'orthotropie (DL, DT, DN) pour le plan de cisaillement (DL, DT). Les [Fig. III.9 \(b\) et \(c\)](#) montrent l'influence directe des paramètres H et N, respectivement.

Si on compare les résultats des paramètres mécaniques affichés en [Fig. III.10 \(a-b\)](#), on observe que les deux essais de traction (uniaxiale et orthogonale) convergent en donnant les mêmes valeurs pour les angles remarquables  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  mais divergent pour les autres angles dans le plan de la tôle. Afin d'estimer l'écart persistant entre les deux courbes, on trace l'évolution de la norme de la vitesse de cisaillement dans le plan de la tôle ([Fig. III.10 \(c\)](#)) dont la courbe dénote une allure sinusoïdale montrant la valeur maximale de l'écart recherché par rapport à la ligne neutre (0).

(a)

(b)

(c)

(d)

**Figure III.3:** Contrainte normalisée calculée par la méthode simplifiée

- (a) -  $\bar{\sigma} = 0$ ,
- (b) -  $\bar{\sigma} = 0,3$ ,
- (c) -  $\bar{\sigma} = 0,7$
- (d) -  $\bar{\sigma} = 1$ .



(a)

(b)

(c)

(d)

**Figure III.4:** Coefficient de Lankford normalisé calculé par la méthode simplifiée

(a) -  $L = 0$

(b) -  $L = 0,3$

(c) -  $L = 0,7$

(d) -  $L = 1$



(a)

(b)

(c)

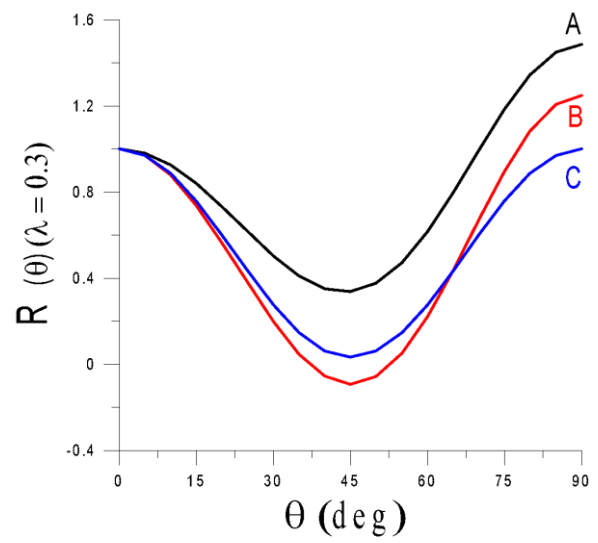
(d)

**Figure III.5:** Contrainte normalisée calculée par la méthode généralisée

- (a) -  $\underline{L} = 0$ ,
- (b) -  $\underline{L} = 0,3$ ,
- (c) -  $\underline{L} = 0,7$
- (d) -  $\underline{L} = 1$ .







(a)

(b)

(c)

(d)

**Figure III.6 :** Coefficient de Lankford normalisé calculé par la méthode généralisée

- (a) -  $\lambda = 0$ ,
- (b) -  $\lambda = 0,3$
- (c) -  $\lambda = 0,7$
- (d) -  $\lambda = 1$ .



(a)

(b)

**Figure III.7 :** Coefficient de Lankford calculé par les 2 méthodes (simplifiée et généralisée) (a) -  $L = 0.3$  et (b) -  $L = 0,7$ .

(a)

(b)

**Figure III.8:** Contrainte d'écoulement calculée par les 2 méthodes (simplifiée et généralisée); (a)  $L = 0.3$  et (b)  $L = 0,7$ .



(a)

(b)

(c)

**Figure III.9:** Paramètres d'anisotropie calculés par la méthode simplifiée.



(a)

(b)

(c)

**Figure III.10** : Coefficient de Lankford (a) et contrainte d'écoulement (b) calculés pour des essais de traction (uniaxiale et orthogonale) avec  $F = 0,25$ ,  $G = 0,75$ ,  $H = 1$  et  $N = 1$ , (c) Vitesse de cisaillement dans le cas de la traction uniaxiale.





### 1.2.3.3 Conclusions

Le cas d'une tôle bicouche, présentant des paramètres d'anisotropie différents a été traité dans un premier temps par une approche simplifiée, entièrement analytique. Puis un modèle semi analytique a été mis en place, en supposant des tenseurs de vitesses de déformation identiques dans les deux couches. Dans les trois cas d'école testés, les résultats de deux approches suggérées sont très voisins. L'analyse du cas classique d'une tôle homogène a permis de montrer que les résultats peuvent être sensiblement différents selon que l'essai de traction est uniaxial (hypothèse communément admise) ou orthogonal (cisaillement interdit dans le plan de la tôle).

### 1.2.4 Approche C.M.T.P

#### 1.2.4.1 Traction uniaxiale

Le critère de plasticité, en termes de CMTP, se transcrita :

(III.31)

Soient P1 et P2 deux matrices de passage du repère cristal (C) au repère échantillon (E) et de l'échantillon à celui de la tôle (DL, DT, DN), respectivement.

représente l'orientation idéale de la texture cristalline, où est la famille des plans cristallographiques coïncidant avec le plan de laminage et celle des directions cristallographiques parallèles à la direction du laminage (DL).

(III.32)

Avec :

$$n_1 = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

Et :

Alors:

(III.33)

En posant:                    la matrice de passage globale de référence (C) au repère orthotrope, on écrit:

(III.34)

Avec:    et    pour  $i = 1, 2, 3$

Le tenseur des contraintes dans le repère du cristal (C) est donné à l'aide de la matrice de passage P sous la forme suivante :

(III.35a)

: Matrice transposée de P à partir du repère échantillon (E) au repère cristal (C).

(III.35b)

En vertu des hypothèses considérées initialement, une loi d'écoulement peut-être dérivée directement du critère de plasticité à l'aide du principe de normalité.

(III.36)

Ici, le potentiel plastique étant confondu avec le critère C.M.T.P. de l'expression (III.31) et étant une fonction scalaire quadratique du 2<sup>ème</sup> degré, aura comme dérivées partielles des fonctions linéaires des composantes  $S_{ij}$ . Quant à     il est défini comme scalaire positif.

La relation    avec    et I : la matrice unitaire, permet d'exprimer le tenseur deviatorique des contraintes au niveau du cristal, tenant en compte le résultat du passage trouvé en (III.35-b).

Alors :    (III.37)

A partir des expressions (III.31) et (III.36, 37) on écrit:

(III.38)

L'approche C.M.T.P étant proposée localement (microscopiquement) à l'échelle de l'orientation du cristal (C), les grandeurs mécaniques recherchées seront exprimées dans le repère échantillon (E), selon la transformation suivante:

(III.39)

$$\underline{\varepsilon}_z = \underline{\lambda} \sigma [A((3n_2 a_2 a_1 + 3n_3 a_3 a_1)n_1 + (3n_1 a_2 a_1 + 3n_3 a_3 a_2)n_2 + (3n_1 a_3 a_1 + 3n_2 a_3 a_2)n_3) + n_1^2(3a_1^2 - 1) + n_2^2(3a_2^2 - 1) + n_3^2(3a_3^2 - 1)]$$

Le coefficient d'anisotropie:

$$R(\theta) = \frac{A((3b_2 a_2 a_1 + 3b_3 a_3 a_1)b_1 + (3b_1 a_2 a_1 + 3b_3 a_3 a_2)b_2 + (3b_1 a_3 a_1 + 3b_2 a_3 a_2)b_3) + (3a_1^2 - 1)b_1^2 + (3a_2^2 - 1)b_2^2 + (3a_3^2 - 1)b_3^2}{A((3n_2 a_2 a_1 + 3n_3 a_3 a_1)n_1 + (3n_1 a_2 a_1 + 3n_3 a_3 a_2)n_2 + (3n_1 a_3 a_1 + 3n_2 a_3 a_2)n_3) + n_1^2(3a_1^2 - 1) + n_2^2(3a_2^2 - 1) + n_3^2(3a_3^2 - 1)} \quad (III.40)$$

La contrainte d'écoulement peut être déterminée par deux méthodes :

**a)** - En remplaçant les relations de l'Eq. III.37 dans le critère C.M.T.P (Eq. III.31):

(III.41-a)

**b)** - À partir de la puissance de déformation :

On aura :

Ce qui donne :

(III.41-b)

#### **1.2.4.2 Traction orthogonale**

Le tenseur des contraintes dans le repère de l'éprouvette :

Le tenseur des contraintes dans le repère du cristal (C) est donné à l'aide de la matrice de transformation sous la forme :

(III.42)

Pour arriver à l'expression de la contrainte d'écoulement (Cf. détail de calculs en [Annexe 3](#)):

(III.43)

En outre:

(III.44)

### 1.2.4.3 Résultats graphiques et discussions

La modélisation du comportement mécanique des tôles laminées par la méthode C.M.T.P. montre que la texture cristallographique liée à la distribution des orientations cristallines entre les différents grains, est la principale source de l'anisotropie.

L'approche CMTP a pu être utilisée pour les deux essais de traction uniaxiale et orthogonale afin de prévoir le comportement mécanique anisotrope de deux tôles ayant des orientations constituées respectivement de 100% Cube et de 100% Goss (orientations autosymétriques) comme il est illustré en [Figures III.11](#). Il peut y être observé, qu'en dehors des points extrêmes, correspondants aux angles remarquables ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ ), les courbes affichées divergent légèrement et ceci concorde avec les investigations utilisant le critère de Hill proprement dit.

Toutefois, le formalisme mathématique pour lequel a été développé la méthode CMTP dans notre cas est limité à une seule orientation préférentielle principale. Pour obtenir le comportement mécanique global du matériau, il faut tenir en considération la répartition volumique des grains de différentes orientations et combiner entre les comportements de différentes composantes.

Les résultats de la discrétisation des principales composantes de textures présentes dans les 2 couches d'une tôle sandwich ([Tableau II.4, Chap. II](#)) permettent de calculer, moyennant la méthode CMTP, les grandeurs mécaniques locales recherchées au niveau du plan de la tôle. Ainsi une comparaison des résultats de calcul avec les paramètres globaux mesurés par l'expérience est donnée en [Fig. III.13-14](#).

Les profils des courbes expérimentales montrent que l'évolution du coefficient de Lankford est différente de la valeur 1 (cas isotrope). Le degré d'anisotropie de la tôle est extrême pour l'angle  $45^\circ$ , ce qui manifestement coïncide avec le coefficient d'anisotropie calculé à partir de la méthode C.M.T.P ([Fig. III.12](#)). En revanche, son amplitude est très faible comparativement à celui expérimental, tandis que les mesures de la contrainte d'écoulement dans le plan de la tôle, donnent des valeurs très similaires à celles prévues par la méthode C.M.T.P. ([Fig. III.14.a](#)).

L'analyse de l'hétérogénéité des textures par l'approche C.M.T.P dans le cas des tôles 100% Cube et 100% Goss, à travers leur épaisseur, passant par la détermination des paramètres  $R(\theta)$  et  $\sigma(\theta)$  ([Figures III.11-12](#)), montre clairement que la tôle étudiée est

presque homogène dans son ensemble ce qui ne concorde pas avec certains résultats de la littérature.

(a)

(b)

**Figure III.11:** Evolution des propriétés mécaniques calculées en traction uniaxiale et orthogonale par l'approche C.M.T.P dans le plan de la tole pour un materiau de texture Cube.

- (a) - Contrainte d'écoulement
- (b) - Coefficient de Lankford

(a)

(b)

**Figure III.12:** Evolution des propriétés mécaniques calculées en traction uniaxiale et orthogonale par l'approche C.M.T.P dans le plan de la tole pour un materiau de texture Goss.

- (a) - Contrainte d'écoulement
- (b) - Coefficient de Lankfor

(a)

(b)

**Figure III.13** : Evolutions des propriétés mécaniques calculées par l'approche C.M.T.P au niveau des deux couches de la tôle.

(a) - Contrainte d'écoulement  $\sigma$  ( $\theta$ )

(b) - Coefficient de Lankford R ( $\theta$ )

(a)

(b)

**Figure. III.14**: Comparaison des résultats de mesure et de calcul par l'approche C.M.T.P des propriétés mécaniques.

(a) - Contrainte d'écoulement



(b) - Coefficient de Lankford

## 2. Tôle asymétrique

### 2.1 Analyse du comportement monoclinique prismatique

Ce type d'anisotropie a fait l'objet déjà de nombreuses études [42,96]. Généralement, dans le cas d'une tôle laminée, le cœur du produit présente une symétrie *orthotrope* caractérisée par des plans de symétrie (DL, DT), (DT, DN), et (DN, DL) (Fig. III.15). En revanche, du fait des composantes de cisaillement imposées par les cylindres au voisinage de la surface de la tôle, il est attendu que les zones de peau présentent plutôt une symétrie *monoclinique prismatique* (appelée simplement *monoclinique* dans la suite). Ces zones seront caractérisées par un seul plan de symétrie, en l'occurrence le plan (DN, DL) pour lequel la direction transverse DT en est l'axe de symétrie (noté  $\alpha_2$ ).

Le critère de plasticité quadratique, se présentant comme une généralisation du critère orthotrope de Hill [62] peut décrire le comportement associé à ce type de symétrie :

(III.45)

Avec  $\sigma_0$  car le matériau est supposé insensible à la contrainte moyenne.

Ce critère comporte donc 9 paramètres indépendants qui sont: F, G, H, L, M, N, p, q et r. Par exemple, si l'on pose  $p = q = r = 0$ , on retrouve bien le critère de Hill.

Si:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont des contraintes d'écoulement en traction uniaxiale suivant les directions principales d'anisotropie, on voit que:

$$F + G = \frac{1}{(\sigma_0^3)^2}$$

Si:  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  sont des contraintes en cisaillement simples par rapport aux axes principaux d'anisotropie, on obtient :

Les coefficients  $F, G, H, L, M, N, p, q, r$  doivent satisfaire les conditions de convexité du critère en lequel lui est associé la matrice hessienne:  $H_{ij}$  qui est définie semi positive (  $H_{ii}$  et la diagonale positives ou nulles).

La première condition de convexité étant:

Avec: (III.46)

Le déterminant de la matrice Hessienne devient:

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 2q \\ -H & F+G & -F & 2r \\ -G & -F & F+G & 2t \\ 2q & 2r & 2t & 2M \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont déterminées selon la relation caractéristique suivante :

Pour  $K^3$ , on trouve: (III.47)

Pour  $K^2$ , on trouve: (III.48)

Pour  $K^1$ , on trouve:

Ce qui donne :

$$-3M(FH + FG + HG) + 2H(q+r)^2 + 2H(q+t)^2 + 2H(r+t)^2 + 4(Fq^2 + Gr^2 + Ht^2) \leq 0$$

Avec :

Alors :

On aura donc :

(III.49)

## 2.2 Les principaux éléments du critère monoclinique

L'écriture abrégée de la fonction d'écoulement (III.45) peut être transcrite sous forme tensorielle :

(III.50)

Les indices de sommation tensorielle sont et représente le tenseur d'élasticité d'ordre 4 et de dimension 3.

Il est courant de représenter les tenseurs de ce type sous forme d'une matrice 6 x 6 symétrique. La forme matricielle de l'Eq. III.46 s'écrit pour une symétrie monoclinique :

Dans le repère de la tôle, le tenseur M peut se décomposer en deux tenseurs:

- $M_o$  (associé au comportement orthotrope)
- $M_{pm}$  (associé au comportement purement monoclinique):

Avec:

$$M_o = \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F+H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix}$$

Et:

$$M_{pm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ \sqrt{2}q & \sqrt{2}r & \sqrt{2}t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.3 Symétrie monoclinique prismatique "cas général du laminage"

Au cours du laminage, les tôles peuvent présenter des états de déformations différents d'une couche à une autre de sorte que les surfaces (les peaux) en contact avec les cylindres du laminage subissent des cisaillements simples suivant la direction de laminage. On parle alors de symétrie monoclinique prismatique qui consiste à considérer 2 composantes de textures ayant d'inégales fractions volumiques  $\{hkl\} <uvw>$ ,  $\{\bar{h}\bar{k}\bar{l}\} <\bar{u}\bar{v}\bar{w}>$  et qui admettent respectivement le plan (DL, DN) et l'axe  $DT//\varphi 2$  comme plan et axe de symétrie.

Il est alors intéressant de rappeler ici la loi de comportement globale du matériau sans aucune considération de symétrie matérielle (symétrie libre ou triclinique) qui s'écrit:

La connaissance d'une orientation et de sa fraction volumique permet de calculer le comportement mécanique de chaque composante de texture composant le matériau.

Soit la matrice de passage de repère cristal (c) à celui d'échantillon (ici échantillon c'est la tôle) (S):

Avec :  $p_1 = u^2 + v^2 + w^2$  et

La procédure de calcul, requiert la connaissance des composantes de textures du tenseur dans le repère échantillon tout en respectant les règles de changement de base d'un tenseur:

Avec : car pour le laminage le plan de symétrie monoclinique (DL, DN) est perpendiculaire à la direction transverse  $DT//\varphi 2$ .

Le tenseur monoclinique prismatique des composantes de textures de laminage symétrisé par rapport à la direction transverse (DT) est :

Lorsque plusieurs composantes de textures entrent en jeu, un calcul d'homogénéisation s'effectue en faisant la moyenne pondérée des fractions volumiques composant le matériau:

$$[\bar{V}] = \sum_{i=1}^N f_i [V^i] \quad \text{Et} \quad f_0 = 1 - \sum_{i=1}^N f_i ,$$

: étant la fraction volumique du fond continu.

Idem pour le tenseur symétrique du critère de plasticité: qui répond aux hypothèses de Taylor (déformation relâchée uniforme à travers tout le matériau et égale à la déformation équivalente).

Pour  $i = 0 \dots N$   $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i$  et  $\bar{\sigma}_i = \sigma_i$

On écrit :

$$[M^{-1}] = \sum_{i=0}^N f_i [M^{-1}_i] \quad (i=0,1,\dots,N)$$

$$[M_i^{-1}] = \frac{1}{A} [U] + (1 - \frac{1}{A}) [V^i]$$

Avec :  $f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_N = 1$  et  $[\bar{V}] = \sum_{i=1}^N f_i [V^i]$

$$[M^{-1}] = f_0 [U] + \frac{[U]}{A} (1 - f_0) + (1 - \frac{1}{A}) [\bar{V}]$$

Alors :

$$[M^{-1}] = [\frac{1}{A} + (1 - \frac{1}{A}) f_0] [U] + (1 - \frac{1}{A}) [\bar{V}]$$

(III.51)

Le même tenseur, s'exprimant dans le cadre des hypothèses de contrainte uniforme à travers tout le matériau et égale la contrainte équivalente,

Pour [III.26]

S'écrit:

$$[M_i] = A[U] + (1-A)[V_i]$$

$$[M] = f_0[U] + A[U](1-f_0) + (1-A)[\bar{V}] \quad (III.52)$$

A l'aide des deux dernières matrices (III.51, 52), il est possible d'obtenir la loi d'écoulement monoclinique prismatique et les surfaces d'écoulement dans l'espace des tenseurs des contraintes:

$$2\sigma_0^2 = S^T [M^{-1}] S$$

$$2\sigma_0^2 = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ \sqrt{2}S_{23} \\ \sqrt{2}S_{13} \\ \sqrt{2}S_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M^{-1}_{1111} & M^{-1}_{1122} & M^{-1}_{1133} & 0 & M^{-1}_{1113} & 0 \\ M^{-1}_{1122} & M^{-1}_{2222} & M^{-1}_{2233} & 0 & M^{-1}_{2213} & 0 \\ M^{-1}_{1133} & M^{-1}_{2233} & M^{-1}_{3333} & 0 & M^{-1}_{3313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^{-1}_{2323} & 0 & M^{-1}_{2312} \\ M^{-1}_{1113} & M^{-1}_{2213} & M^{-1}_{3313} & 0 & M^{-1}_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^{-1}_{1223} & 0 & M^{-1}_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ \sqrt{2}S_{23} \\ \sqrt{2}S_{13} \\ \sqrt{2}S_{12} \end{bmatrix} \quad (III.53)$$

Pour les hypothèses des contraintes uniformes on a :

$$2\sigma_0^2 = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ \sqrt{2}S_{23} \\ \sqrt{2}S_{13} \\ \sqrt{2}S_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{1111} & M_{1122} & M_{1133} & 0 & M_{1113} & 0 \\ M_{1122} & M_{2222} & M_{2233} & 0 & M_{2213} & 0 \\ M_{1133} & M_{2233} & M_{3333} & 0 & M_{3313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{2323} & 0 & M_{2312} \\ M_{1113} & M_{2213} & M_{3313} & 0 & M_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{1223} & 0 & M_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ \sqrt{2}S_{23} \\ \sqrt{2}S_{13} \\ \sqrt{2}S_{12} \end{bmatrix}$$

En utilisant les propriétés suivantes :

Le développement de l'Eq. III.53 donne:

$$\begin{aligned} A &= M_{1111} - M_{1122} - M_{1133} + M_{2233} \\ \text{Avec: } B &= M_{2222} - M_{1122} + M_{1133} - M_{2233} \\ C &= M_{3333} + M_{1122} - M_{1133} - M_{2233} \end{aligned}$$

Par analogie au critère de Hill monoclinique prismatique :

On peut donc tirer les paramètres d'anisotropie correspond au critère :

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{9}(2B + 2C - A) & G &= \frac{1}{9}(2A + 2C - B) \\ N &= M_{1212} & M &= M_{1313} \\ p &= 2M_{1223} & r &= M_{2213} \\ t &= M_{3313} \end{aligned}$$

En utilisant ce dernier développement, on peut aisément déterminer les propriétés mécaniques recherchées pour un matériau anisotrope présentant plusieurs composantes de textures. A titre d'exemple graphique, une orientation principale composée de 50% texture Cube et 50% texture Goss est donnée en Fig. III.16.

#### 2.4 Illustration et évaluation quantitative du comportement non-orthotrope d'une tôle déformée par laminage asymétrique.

Toute caractérisation de mesure du coefficient de Lankford, réalisée au moyen des essais mécaniques classiques tel que la traction, dans le plan d'une tôle déformée par le laminage asymétrique (état de contraintes planes  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ ), ne permet pas de mettre en évidence les termes non orthotropes p, q, r et t issus de la relation (III.45). Ainsi, un éventuel écart à l'orthotropie ne pouvant pas être estimé, on se propose alors d'examiner différemment la partie monoclinique du critère par la considération d'un test de caractérisation simple présenté en Fig. III.17. Un tel test, noté "CSC", repose sur un principe simple de déformation combinant un effort normal de compression  $\sigma_{33}$  et une contrainte tangentielle de cisaillement dans le plan de la tôle (Combined Shear and Compression). Cette sollicitation mécanique, permet d'identifier les grandeurs mécaniques du caractère monoclinique du matériau, à partir des composantes de textures développées à l'aide de l'approche C.M.T.P.

Le tenseur de contrainte peut être écrit dans les axes de l'échantillon (S):

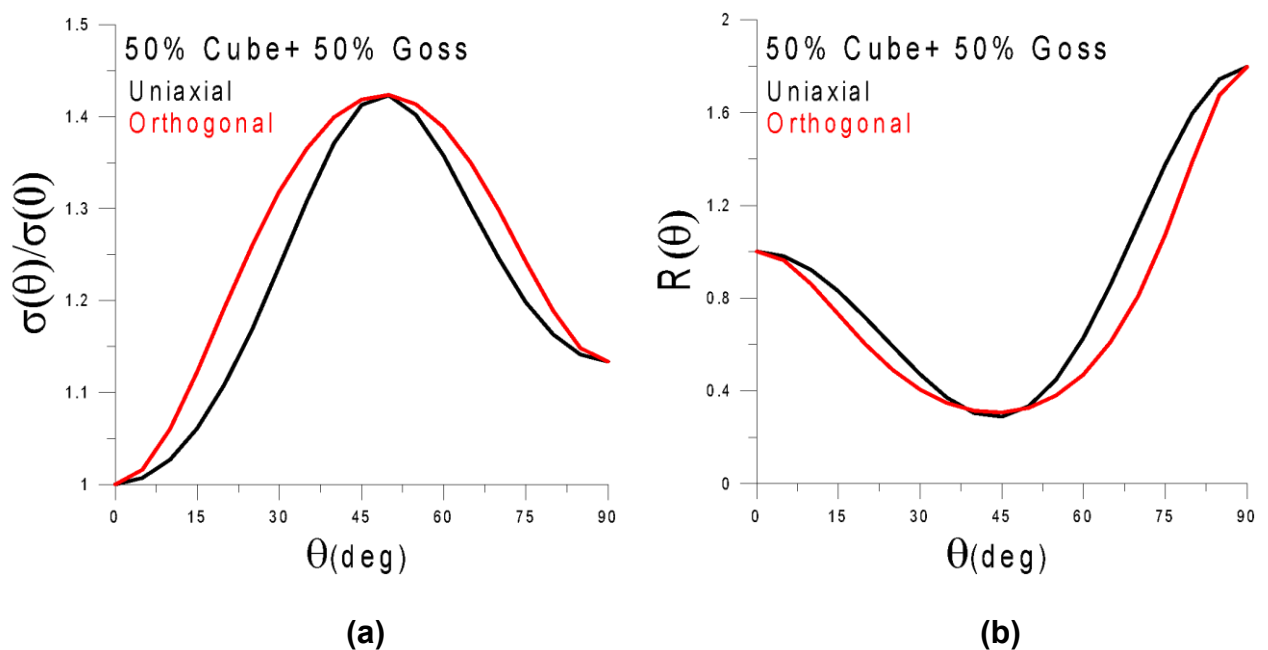
$$\sigma_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (\text{III.54})$$

Où  $\tau = \sigma_{xz}$ , est la contrainte de cisaillement et  $\sigma$  la contrainte extérieure de compression.

Soit La matrice de passage du repère "échantillon" au repère "Tôle" et sa matrice transposée :

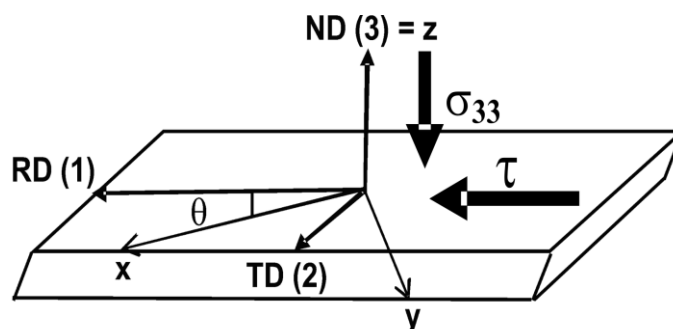


**Figure III.15:** Procédé de laminage présentant les types de symétrie à travers l'épaisseur de la tôle.



**Figure III.16:** Evolution des paramètres mécaniques dans le plan de la tole pour un materiau (50%Cube +50% Goss).

- (a) - contrainte d'écoulement
- (b) - coefficient de Lankford



**Figure III.17:** Géométrie de l'essai de "Compression Cisaillement Combinés" (CSC)



On peut exprimer le tenseur des contraintes dans le nouveau repère de la tôle (R) comme suit:

$$\sigma_R = P \sigma_S P^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(III.55)

Compte tenu des conditions des contraintes de compression et de cisaillement imposées par l'essai, le critère monoclinique (Eq : III.45) s'écrit :

$$(2L \sin^2 \theta + 2M \cos^2 \theta) \tau^2 + 4t \cos \theta \sigma \tau + (F + G) \sigma^2 = 2\sigma_0^2$$

$$(2L \sin^2 \theta + 2M \cos^2 \theta) \tau^2 + 4t \cos \theta \sigma \tau + (F + G) \sigma^2 - 2\sigma_0^2 = 0$$

La solution de cette équation de 2<sup>ime</sup> degré pour  $\tau > 0$  est :

$$\tau(\theta) = \frac{-2t\sigma \cos \theta + \sqrt{4t^2 \sigma^2 \cos^2 \theta - (2L \sin^2 \theta + 2M \cos^2 \theta)[(F + G)\sigma^2 - 2\sigma_0^2]}}{2L \sin^2 \theta + 2M \cos^2 \theta}$$

(III.56)

La contrainte de cisaillement  $\tau$  dans les 2 sens de laminage (RD) sera:

- Pour  $\theta = 0$ ,

$$\tau_2 = \frac{2t\sigma + \sqrt{4t^2 \sigma^2 - 2M[(F + G)\sigma^2 - 2\sigma_0^2]}}{2M}$$

- Pour  $\theta = \pi$ ,

La différence entre les 2 sens donne l'effet monoclinique de la tôle:

(III.57a)

$$\tau(\theta + \pi) - \tau(\theta) = \frac{2t\sigma \cos \theta}{L \sin^2 \theta + M \cos^2 \theta}$$

En Général:

(III.57b)

On associe la loi d'écoulement au critère de Hill monoclinique en obtenant le tenseur des vitesses de déformation:

$$\epsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad \lambda \geq 0 : \text{Scalaire positif isotrope}$$

(III.58)

$$\epsilon_{xx} = 2\lambda [-(F \sin^2 \theta + G \cos^2 \theta) \sigma + ((p + r) \sin 2\theta \sin \theta + 2q \cos^3 \theta) \tau]$$

$$\epsilon_{xy} = 2\lambda[-(F \cos^2 \theta + G \sin^2 \theta) \sigma + ((q - p) \sin 2\theta \sin \theta + 2r \cos^3 \theta) \tau]$$

$$\epsilon_{xy} = 2\lambda[(G - F) \sigma \sin 2\theta + ((2r - 2q) \sin 2\theta \cos \theta + 2p \cos 2\theta \sin \theta) \tau]$$

$$\epsilon_{xz} = 2\lambda[2t \cos \theta \sigma + 2(M \cos^2 \theta + L \sin^2 \theta) \tau]$$

$$\epsilon_{yz} = 2\lambda[-2t \sin \theta \sigma + (L - M) \sin 2\theta \tau]$$

$$\epsilon_{zz} = -(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})$$

### 2.4.1 Résultats des prévisions du comportement monoclinique.

Dans cette section, nous présentons l'évolution des propriétés mécaniques de la tôle telles que les vitesses de déformations, la contrainte de cisaillement et l'effet de chaque composante de texture sur le coefficient de Lankford, en tenant compte de la symétrie monoclinique du critère de plasticité.

A partir des courbes représentatives de l'évolution des vitesses de déformation dans le plan de laminage de la tôle, présentées en [Figure III.18](#), on constate que la vitesse de cisaillement  $\epsilon_{xz}$  exhibe la plus grande valeur algébrique tandis que sa fluctuation est plutôt faible comparativement au reste des autres courbes. En [Figure III.19](#), on remarque que pour une contrainte de compression  $\sigma_{33}$  donnée, la norme de la contrainte de cisaillement  $\tau$  est plus importante dans la direction de laminage (sens positif de  $\tau$ ) que dans l'autre sens (sens négatif de  $\tau$ ).

En ce qui concerne l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la contrainte de compression dans le plan de la tôle ([Fig. III.20](#)), on observe que, pour une même valeur de la contrainte normale, la norme de la grandeur de la cission de cisaillement est plus importante dans la direction de laminage (RD) et l'allure de la courbe a tendance à diminuer pour toutes les autres directions. En revanche, lorsque la contrainte normale augmente, la contrainte de cisaillement diminue.

L'influence individuelle de chaque composante de texture en proportion volumique sur le coefficient de Lankford dans la direction de laminage ( $\theta = 0^\circ$ ) est montrée en [Figure III.21](#). Il est intéressant d'y remarquer que la composante  $^{(554)}[\bar{2}25]$ , particulièrement dans cette direction, a un effet significatif sur l'anisotropie et ce malgré sa faible présence dans le matériau. En revanche, pour les autres directions du plan de la tôle, cette influence varie d'une orientation à l'autre ([Fig. III.22](#)). A titre d'exemple, pour ( $\theta = 90^\circ$ ), c'est la composante  $^{(133)}[3\bar{1}0]$  qui caractérise le comportement anisotrope de la tôle.

L'influence des orientations individuelles et celle globale de la tôle sur son comportement final est conditionnée par les valeurs des paramètres d'anisotropie, déterminés moyennant la méthode CMTP et qui sont répertoriés dans le [Tableau III.2](#).



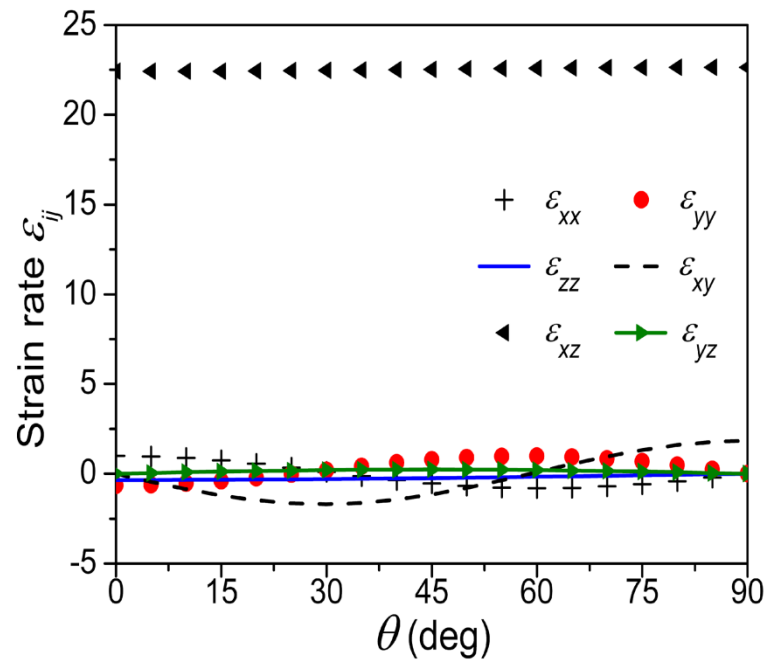


Figure III.18: Evolution des vitesses de déformation  $\varepsilon_{ij}(\theta)/\varepsilon_{xx}(0)$  dans le plan de la tôle.

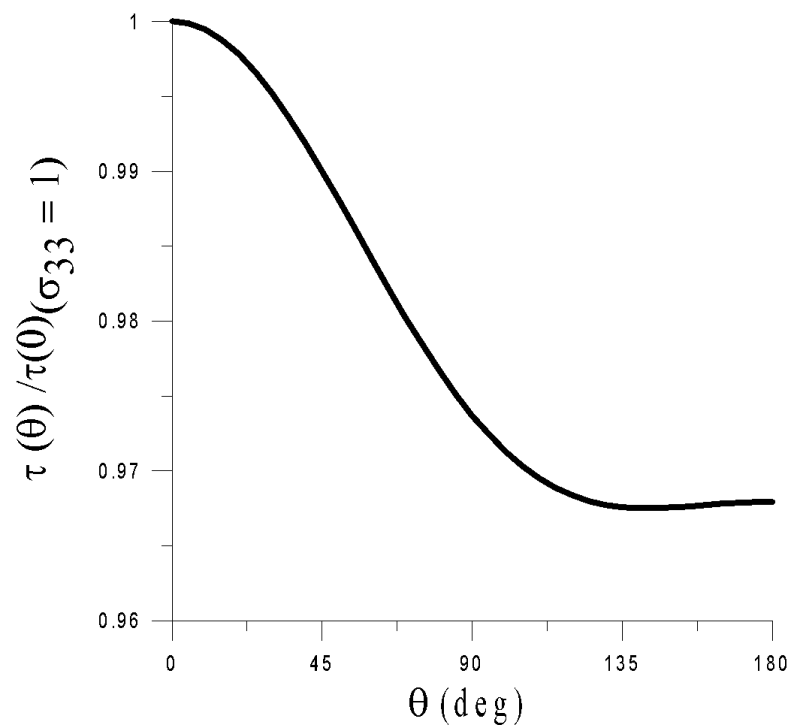


Figure III.19: Evolution de contrainte de cisaillement dans le plan de la tôle.



**Tableau III.2:** Paramètres d'anisotropie pour chaque composante de texture et pour l'ensemble de la tôle.

	(323)[ $\bar{1}\bar{3}3$ ]	(013)[ $\bar{2}3\bar{1}$ ]	(115)[ $\bar{5}5\bar{2}$ ]	(331)[ $3\bar{1}\bar{6}$ ]	(554)[ $\bar{2}2\bar{5}$ ]	(113)[ $3\bar{1}0$ ]	Overall sheet
<i>F</i>	0.1378	0.3029	0.3114	0.0943	0.1094	0.0651	0.2528
<i>G</i>	0.1551	0.2573	0.2725	0.2481	0.1705	0.2773	0.2615
<i>H</i>	0.1873	0.1138	0.0597	0.2124	0.2617	0.2829	0.2505
<i>L</i>	0.8000	0.4697	0.4527	0.8869	0.8567	0.9453	0.8531
<i>M</i>	0.7653	0.5609	0.5306	0.5794	0.7346	0.5209	0.8356
<i>N</i>	0.7010	0.8480	0.9562	0.6508	0.5522	0.5097	0.8576
<i>P</i>	-0.3037	0.1370	-0.3095	0.0378	0.5065	-0.1949	-0.0691
<i>q</i>	0.0516	0.1210	-0.0851	-0.0848	-0.2279	0.1455	0.0372
	0.1073	0.0484	-0.1094	0.0133	0.1790	-0.0689	-0.0244
<i>t</i>	0.0557	-0.1695	0.1945	0.0714	0.0488	-0.0765	-0.0128

#### 2.4.2 Estimation de l'écart à l'orthotropie

Les tôles subissant un laminage asymétrique présentent des cisaillements intenses au voisinage de la zone de contact avec les cylindres de laminage. Ceci aura pour effet de générer une répartition inégale des fractions volumiques des composantes de texture autour de l'axe transverse de la tôle. Cette symétrie de répartition inégale admet DT// $\alpha$ 2 comme axe de symétrie (symétrie monoclinique prismatique) et (DL, DN) comme plan de symétrie. Il devient alors nécessaire de connaître la différence entre ces deux comportements orthotrope et purement monoclinique de la tôle dans le repère orthotrope classique de laminage (DL, DT, DN). Un formalisme mathématique basé sur l'algèbre linéaire considère un espace vectoriel associé aux tenseurs,  $M_o$  et la projection de  $M$  dans les axes orthotrope de la tôle comme il est schématisé en Fig. III.23.

Le calcul de l'écart à l'orthotropie consiste alors à trouver l'angle  $\alpha$  entre les deux tenseurs avec:  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$

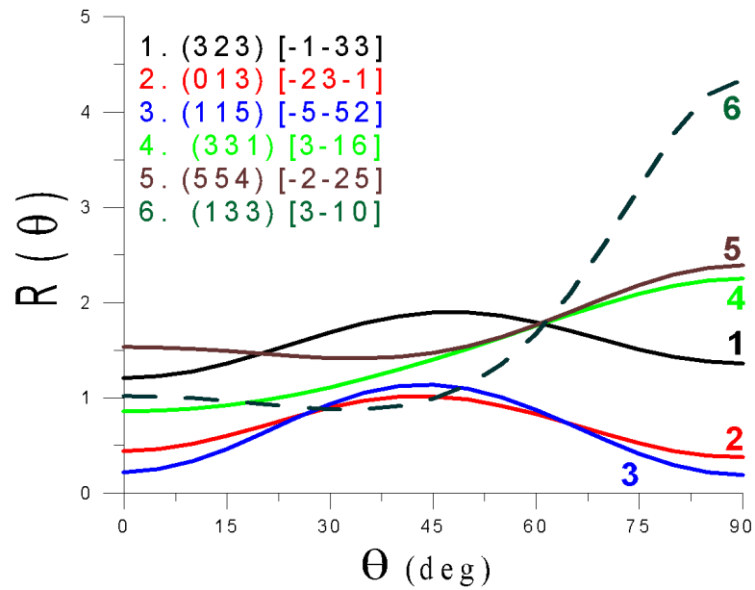
$$\cos \alpha = \frac{M : M_o}{\|M\| \|M_o\|} = \frac{\|M_o\|}{\sqrt{\|M_o\|^2 + \|M_{pm}\|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\|M_{pm}\|^2}{\|M_o\|^2}}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2p^2 + 4(q^2 + r^2 + t^2)}{(G+H)^2 + (F+H)^2 + (G+F)^2 + 2H^2 + 2G^2 + 2F^2 + N^2 + M^2 + L^2}}} \quad (\text{III.59})$$

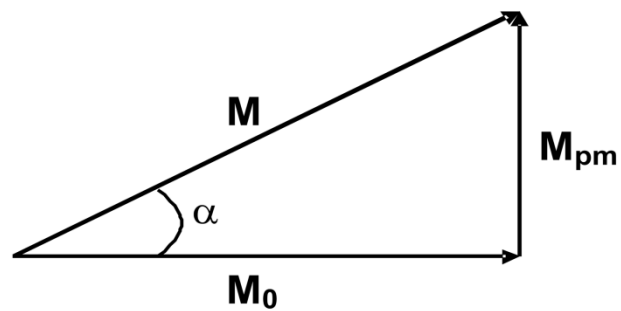


**Figure III.20:** Evolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la contrainte de compression pour les diverses orientations dans le plan de la tôle.

**Figure III.21:**  
Evolution du coefficient de Lankford dans la direction de laminage en fonction de la fraction volumique de diverses composantes de texture



**Figure III.22 :** Evolution du coefficient de Lankford dans le plan de la tôle pour les diverses composantes de texture.



**Figure III.23:** Représentation de l'écart entre les tenseurs orthotrope et monoclinique

Ou :

$$tg\alpha = \frac{\|M_{pm}\|}{\|M_o\|} = \frac{\sqrt{2p^2 + 4(q^2 + r^2 + t^2)}}{\sqrt{(G+H)^2 + (F+H)^2 + (G+F)^2 + 2H^2 + 2G^2 + 2F^2 + N^2 + M^2 + L^2}}$$

Le **Tableau III.3** correspond à l'écart à l'orthotropie pour les composantes de textures individuelles aussi bien que pour la texture globale de la tôle, estimé à partir de  $\Delta\tau$ ,  $\|M_{pm}\|$  et  $\alpha$ . Dans la deuxième colonne du tableau,  $\delta$  désigne la fraction de la contribution monoclinique associée à chaque composante de texture non orthotrope, tandis que  $\delta\|\Delta\tau\|$ , dans la *colonne 4*, indique la contribution effective de la composante. Il est observable que l'orientation (115) [-5-52] a un grand effet sur l'anisotropie globale, malgré sa faible proportion dans le matériau. Il est intéressant de noter, que malgré que l'écart global au comportement orthotrope ( $\alpha \approx 4.22^\circ$ ) puisse demeurer faible, les intenses cisaillements imposés lors du laminage asymétrique contribuent à une probable symétrie monoclinique.

<b>Tableau III.3:</b> Evaluation de l'écart au comportement orthotrope						
Orientations	$\delta$	$\ \Delta\tau\ $	$\delta \cdot \ \Delta\tau\ $	$\ M_{pm}\ $	$\ M_o\ $	$\alpha(^{\circ})$
(323)[ $\bar{1}33$ ]	7.30	0.145	1.058	0.503	1.477	18.80
(013)[ $\bar{2}3\bar{1}$ ]	2.88	0.604	1.740	0.469	1.490	17.48
(115)[ $\bar{5}52$ ]	3.27	0.733	2.400	0.648	1.529	22.96
(331)[ $3\bar{1}\bar{6}$ ]	1.62	0.246	0.400	0.229	1.483	08.80
(554)[ $\bar{2}25$ ]	0.90	0.133	0.120	0.926	1.483	32.00
(113)[ $3\bar{1}0$ ]	0.48	0.294	0.141	0.450	1.516	16.55
Overall sheet		0.0307		0.1348	1.825	4.22

A partir du développement des formulations tensorielles, on a pu ainsi décomposer le critère d'anisotropie en deux termes, l'un orthotrope (terme qui lui-même comprend une partie isotrope) et l'autre purement monoclinique, permettant l'estimation de l'écart à l'orthotropie.

Le coefficient d'anisotropie de Lankford reste insensible au comportement purement monoclinique de la tôle, car sa formulation de base est totalement dépendante des paramètres d'anisotropie orthotrope.

## 2.5 Approximation orthotrope du critère monoclinique prismatique

Considérons une loi de comportement mécanique qui fait apparaître une symétrie monoclinique prismatique.

On exprime son critère de plasticité (Hill 1948) dans un repère (RD, TD, ND) de matériau, et nous nous sommes posés la question suivante : quelle est la loi de comportement faisant apparaître une symétrie orthotrope la plus proche de la loi initiale monoclinique dans le nouveau repère (RD', TD, ND') qui se déduit par une rotation d'angle  $\psi$  autour de la direction transverse  $DT // \Delta 2$ , pour cela, exprimons le critère de Hill :

$$(F + 4G + H)s_{11}^2 + (4F + G + H)s_{22}^2 + (4F + 4G - 2H)s_{11}s_{22} + 2Ls_{23}^2 + 2Ms_{13}^2 + 2Ns_{12}^2 + 4ps_{12}s_{23} + 4s_{13}[(2q + r)s_{11} + (q + 2r)s_{22}] = 2\sigma_0^2 \quad (\text{III.60})$$

Le passage du référentiel initial (RD, TD, ND) au nouveau repère (RD', TD, ND') se fait à l'aide de la matrice de passage suivante:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}$$

Ainsi que le tenseur des contraintes dans le nouveau repère est  $s'_{ij}$  et s'écrit sous la forme :

L'ensemble de système linéaire est établi moyennant la matrice de passage R selon la relation :

$$(s_{ij})_R = R(s'_{ij})_{R'} R^T = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'_{11} & s'_{12} & s'_{13} \\ s'_{12} & s'_{22} & s'_{23} \\ s'_{13} & s'_{23} & s'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix}$$

$$s_{11} = s'_{11} \cos^2 \psi + s'_{33} \sin^2 \psi - s'_{13} \sin 2\psi$$

$$s_{22} = s'_{22}$$

$$s_{33} = -s'_{11} \sin^2 \psi + s'_{33} \cos^2 \psi + s'_{13} \sin 2\psi$$

D'où:

$$s_{12} = s'_{12} \cos\psi - s'_{23} \sin\psi$$

$$s_{23} = s'_{12} \sin\psi + s'_{23} \cos\psi$$

En remplaçant ces valeurs dans le critère monoclinique initial (III.45), on obtient :

(III.61)

Où: les  $s'_{ij}$  sont les composantes du tenseur déviateur des contraintes dans le nouveau repère et  $F'$ ,  $G'$ ,  $H'$ ,  $L'$ ,  $M'$ ,  $N'$ ,  $p'$ ,  $q'$  et  $r'$  sont fonction des paramètres initiaux  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  et de l'angle de rotation  $\psi$ .

Avec :

$$G' = \frac{1}{8}(4G - F - H + 2M) + \frac{1}{8}(4G + F + H - 2M) \cos 4\psi + \frac{1}{2}(q - t) \sin 4\psi$$

$$H' = \frac{1}{2}(F + H) - \frac{1}{2}(F - H) \cos 2\psi - r \sin 2\psi$$

$$L' = \frac{1}{2}(L + N) - \frac{1}{2}(L - N) \cos 2\psi - p \sin 2\psi$$

$$M' = \frac{1}{4}(4G + F + H + 2M) - \frac{1}{4}(4G + F + H - 2M) \cos 4\psi - (q - t) \sin 4\psi$$

$$p' = \frac{1}{2}(L - N) \sin 2\psi + p \cos 2\psi$$

Par remplacement des valeurs de  $F'$ ,  $G'$ ,  $H'$ ,... et  $r'$ , calculées à partir de l'approche C.M.T.P., dans l'expression de  $R'(\theta)$  à , on peut exprimer "le repère naturel" de tôle comme suit :

Et :

(III.62)

Où :

Le calcul des normes de deux parties tensorielles qui constituent l'expression quadratique du critère monoclinique (III.61) dans la nouvelle base est :

**Figure III.24:** Evolution de la norme de la partie monoclinique  $\|M'_{pm}\|$  pour la "tôle globale" en fonction de l'angle de rotation autour de l'axe transverse DT. ( $\varphi$  est l'angle de rotation autour de TD).

**Figure. III.25:** Evolution de la norme de la partie monoclinique  $\|M'_{pm}\|$  pour chaque composante de texture en fonction de l'angle de rotation autour de l'axe transverse DT





L'évolution de la norme de la partie purement monoclinique de la "tôle globale" et des principales composantes de textures en fonction de  $\psi$ , montre que la norme de la partie purement monoclinique est minimale pour  $\psi = 35^\circ$  (Fig. III.24). L'angle minimal pour chaque composante de texture est présenté également sur la Figure. III.25. Cet angle définit la référence dans laquelle le comportement mécanique de la tôle est le plus proche d'un comportement orthotrope. Les valeurs des nouveaux paramètres d'anisotropie dans la nouvelle base, déterminées à partir de l'approche C.M.T.P, sont portées sur le Tableau III.4 et les paramètres utilisés pour estimer l'écart à l'orthotropie sont données dans le Tableau III.5.

**Tableau III.4:** Paramètres d'anisotropie pour chaque composante de texture et pour la "tôle globale" dans les axes tournés à  $\psi = 35^\circ$

				(331)[ $\bar{3}\bar{1}\bar{6}$ ]			Overall sheet
	0.0532	0.2862	0.1257	0.1458	-0.0087	0.0720	0.2290
	0.2829	0.2791	0.0943	0.1669	0.3513	0.2570	0.3045
	0.2719	0.1305	0.2453	0.1610	0.3799	0.2760	0.2742
	1.0528	0.4654	0.9092	0.7736	1.2326	0.9852	0.9196
	0.5097	0.5173	0.8870	0.7418	0.3730	0.5616	0.7496
	0.4481	0.8523	0.4997	0.7641	0.1764	0.4698	0.7912
	-0.0573	-0.1308	-0.3424	0.1238	-0.0302	0.1379	-0.0257
	0.0320	-0.0123	0.2711	-0.0369	-0.1492	-0.2601	-0.0036
	-0.0367	0.0165	-0.0374	0.0045	-0.0612	-0.0235	-0.0083
	-0.0650	0.2623	0.1211	-0.1340	-0.0040	-0.0232	0.0151

**Tableau III.5:** Evaluation de l'écart au comportement orthotrope dans les axes tournés à  $\psi = 35^\circ$

Orientations	$\delta$					
(323)[ $\bar{1}\bar{3}\bar{3}$ ]	7.30	0.046	0.335	0.484	1.474	18.18
(013)[ $\bar{2}\bar{3}\bar{1}$ ]	2.88	0.208	0.600	0.333	1.454	12.90
(115)[ $\bar{5}\bar{5}\bar{2}$ ]	3.27	0.286	0.935	0.383	1.479	22.56
(331)[ $\bar{3}\bar{1}\bar{6}$ ]	1.62	0.172	0.278	0.117	1.472	4.552
(554)[ $\bar{2}\bar{2}\bar{5}$ ]	0.90	0.020	0.018	0.864	1.505	29.85
(113)[ $\bar{3}\bar{1}\bar{0}$ ]	0.48	0.082	0.040	0.419	1.462	15.99
Overall sheet	-	0,017	-	0.111	1.826	3.50

On se propose ensuite de considérer le raisonnement inverse consistant à avancer la possibilité que tout matériau ayant un critère de plasticité de la forme (III.63) puisse répondre à l'orthotropie dans un repère judicieusement choisi. Dans ce cas, la réponse serait positive si et seulement si on pouvait inversement calculer les coefficients  $F''$ ,  $G''$ ,  $H''$ ,  $L''$ ,  $M''$ ,  $N''$  et l'angle  $\psi$  en fonction des paramètres supposés donnés  $F'$ ,  $G'$ ,  $H'$ ,  $L'$ ,  $M'$ ,  $N'$ ,  $p'$ ,  $q'$  et  $r'$  de (Tableau III.4).

Pour , déduisons les valeurs de  $F'$ ,  $G'$ ,  $H'$ ... $p'$ ,  $q'$ ,  $r'$  etc., pour ne considérer que la partie orthotrope du critère exprimé en (III.61) :

(III.63)

En utilisant la même matrice de rotation  $R$  autour de  $TD$ , pour revenir à l'état initial:

D'où:

Une substitution de ces nouvelles quantités dans (III.63) nous amène à une nouvelle forme d'écriture tensorielle du critère monoclinique prismatique:

Tels que :

$$H'' = H' \cos^2 \psi + F' \sin^2 \psi$$

(III.64)

Les expressions inverses sont déduites de (III.64):

(III.65)

$$M' = \frac{M'' + (2F'' + 8G'' + 2H'' + 4M'')(\cos^4 \psi - \cos^2 \psi)}{1 + 8(\cos^4 \psi - \cos^2 \psi)}$$

Et:

étant calculé en remplaçons  $L'$  et dans , on peut écrire:

Comme il s'agit d'un système de 9 équations à 7 inconnues, cela requiert deux *relations de liaison* entre les paramètres:

sont déterminés analytiquement pour être sous la forme :



(a)

(b)

**Figure III.26** : Evolution du a)-  $R(\theta)$  et de b)-  $\sigma(\theta)/\sigma(0)$  dans le plan de la tôle pour les deux repères (initial et celui tourné de  $35^\circ$ ).

(a)

(b)

**Figure III.27** : Evolution du a)-  $\tau(\theta)/\tau(0)$  et b)- des effets monocliniques dans le plan de la tôle pour le repère initial (ligne continue) et celui tourné de  $35^\circ$  autour de DT (ligne discontinue).



Pour  $\theta = 35^\circ$ , on détermine alors les valeurs de  $F''$ ,  $G''$ ,  $H'' \dots r''$  dans un nouveau repère. Cette procédure nous permet de déterminer le coefficient de Lankford  $r''$  dans un repère judicieusement choisi pour qu'il soit le plus proche possible de celui initial (naturel); c'est la bonne approximation orthotrope du critère monoclinique prismatique qui consiste à dire que la "meilleure approximation orthotrope" est obtenue en se plaçant dans les axes de la tôle tournés à  $35^\circ$ .

(III.66)

(III.67)

Les fonctions  $r''$  et  $r''_{90}$ , associées au critère de Hill, sont représentées dans les Figures III.26- a, b, dans le repère naturel de la tôle et dans le repère tourné de  $35^\circ$ , respectivement. Le léger écart observé entre l'allure des courbes des deux fonctions se justifie par le fait que la meilleure "approximation orthotrope" de l'ensemble de la tôle, ne peut pas être la bonne estimation orthotrope pour une propriété spécifique donnée, telles que les vitesses de déformations qui restent, par nature, orthotropes dans n'importe quel système de référence.

Dans la Figure III.27-a, on remarque que la valeur de la contrainte de cisaillement normalisée  $\tau(\theta)/\tau(0)$  (ligne continue) est plus importante dans le sens positif  $\tau(0)$  de la direction de laminage que dans le sens (négatif  $\tau(0)$ ). Cette dissemblance, peut être causée par la différence des diamètres des cylindres de laminage **ou par différence des vitesses de rotation des cylindres**. Toutefois, le phénomène inverse est observé dans le repère tourné à  $35^\circ$  (ligne discontinue). En Fig. III.27-b, l'écart du comportement orthotrope dans le plan de la tôle est mesuré par  $r''$  associé au test CSC comme il est défini par l'Eq. III.57a.

Le paramètre équivalent  $r''_{90}$  dans le plan retourné est aussi donné dans la figure et qui montre que le comportement du matériau est plus proche de l'orthotropie dans la nouvelle base. En valeur absolue les deux courbes présentent la même allure avec une différence maximale de l'ordre de 0.013 suivant la direction RD et ce dans les deux sens (positif et négatif). Cet état de fait se traduit donc par une symétrie monoclinique prismatique par rapport à la direction transverse.

En outre, il est intéressant de noter que la valeur minimum de  $r''$  est égale à zéro, ce qui signifie que la symétrie monoclinique de la tôle est seulement "apparente", alors que réellement la symétrie est plutôt orthotrope. La condition nécessaire pour qu'une tôle de symétrie monoclinique "apparente" soit orthotrope, dans un système de référence tourné à un angle  $\theta$ , équivaut à  $r'' = 0$ , ce qui est équivalent à  $r'' = 0$ . Ceci mène à

deux conditions liants les paramètres monocliniques initiaux à ceux dérivés de la rotation par l'angle (Eq. III.66 et 67).



## Conclusion générale

La revue bibliographique, présentée dans le *Chapitre I*, a permis de présenter l'état de l'art concernant les hétérogénéités de textures et le problème de symétrie inhérents au laminage des tôles ferritiques. La transition d'échelle utilisée est fondée sur une démarche d'homogénéisation pour les matériaux hétérogènes intégrant l'interaction intergranulaire selon les différentes hypothèses de localisation. Nous avons abordé ainsi la description du comportement plastique des tôles laminées au cours d'un chargement uniaxial. Nous avons mis en exergue quelques propriétés relatives à l'écoulement plastique anisotrope, et nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'étude du critère de Hill ainsi qu'à d'autres critères de plasticité non quadratiques. Le caractère monoclinique prismatique des tôles ainsi qu'une tentative de sa modélisation mathématique ont été aussi formulés.

L'approche et les techniques expérimentales adoptées dans cette étude ont été détaillées dans le *Chapitre II*.

Dans un premier temps, le déroulement de l'étude s'est appuyé sur un ensemble de données expérimentales obtenues au moyen d'essais mécaniques de caractérisation sous chargement en traction uniaxiale dans le plan de la tôle et de caractérisation microstructurale par RX d'une tôle industrielle d'acier inoxydable ferritique. Les différentes analyses des résultats expérimentaux nous ont permis ainsi de vérifier que des paramètres d'anisotropie plus réalistes peuvent être obtenus à partir de données de textures fournies par la société ArcelorMittal de manière à exploiter le modèle développé en *Chapitre 3*. Une comparaison des prévisions de ce modèle, relatives à la détermination des grandeurs  $\hat{r}(\lambda)$  et  $R(\lambda)$ , avec les mesures expérimentales a été possible.

Pour que l'étude sur les hétérogénéités structurales soit plus ou moins complète, il a fallu également considérer les problèmes de symétrie de la tôle laminée. En effet le caractère orthotrope global d'une tôle peut présenter des écarts surtout au niveau de la zone de contact métal cylindre. A ce stade, on a complété l'étude par l'analyse de la texture d'une tôle de laboratoire obtenue par "laminage asymétrique", dont le caractère monoclinique est plus prononcé par le cisaillement intense dans le plan de la tôle autour de la direction transverse DT. Moyennant la technique EBSD, on a caractérisé la microtexture locale du matériau.

Nous avons présenté, dans le *Chapitre III*, une analyse du cas classique d'une tôle homogène qui a permis de montrer que les résultats peuvent être sensiblement différents suivant que l'essai de traction est uniaxial (hypothèse communément admise) ou orthogonal (cisaillement interdit dans le plan de la tôle). Le cas d'une tôle bicouche constituée de deux matériaux orthotropes de mêmes axes mais de paramètres différents a été traité dans un premier temps par une approche simplifiée, entièrement analytique. Puis un modèle semi analytique a été mis en place en supposant les tenseurs des vitesses de déformation identiques dans les deux couches. Dans les trois cas d'école testés, les résultats de ces deux approches sont très voisins.

Enfin un modèle théorique de calcul inspiré de l'essai de "Compression et Cisaillement Combinés" (CSC) a été développé pour le cas du laminage asymétrique afin de mettre en évidence la partie non orthotrope du critère monoclinique prismatique. A l'aide de la méthode CMTP, on a pu déterminer les paramètres d'anisotropie orthotropes et ceux monocliniques.

Suite aux résultats de caractérisation expérimentale de la tôle industrielle, on peut conclure que:

- un faible gradient de texture est obtenu suivant toute l'épaisseur du matériau, en conséquence, la symétrie non orthotrope est moins prononcée.
- l'amplitude calculée du coefficient d'anisotropie global de la tôle calculé à partir de la méthode CMTP est plus faible par rapport à celle déterminée expérimentalement, toutefois, une certaine analogie est observée dans l'allure des contraintes d'écoulements globales (calculée et mesurée).
- les mesures locales des fractions volumiques dans les deux couches de la tôle sandwich, donne un faible gradient d'hétérogénéité texturale dans l'épaisseur de la tôle pour les propriétés mécaniques et prévues par la méthode CMTP.
- en première approximation, la symétrie cristalline observée dans les deux couches de la tôle sandwich est plus ou moins orthotrope ce qu'est en désaccord avec la littérature, donnant ainsi un écart à l'orthotropie presque nul.

Pour la tôle asymétrique, analysée par les électrons rétrodiffusés au niveau de son plan normal avec comme axe de symétrie la direction transverse DT:

- la symétrie monoclinique (non orthotrope) est manifestement prononcée ce qui permet de mettre en évidence le caractère mécanique du comportement purement monoclinique qu'a subi la tôle au cours de la déformation.
- L'écart à l'orthotropie estimé est assez significatif et peut être quantitativement

estimé par le paramètre

- La composante "purement monoclinique" de l'anisotropie n'a aucun effet sur l'essai mécanique dont lequel les contraintes sont exercées dans le plan de la tôle. En particulier, le coefficient de Lankford est insensible aux effets non orthotropes.
- Le modèle de calcul, basé sur l'essai proposé "Compression cisaillement combinés" (CSC) a pu mettre en évidence le caractère non orthotrope de la tôle.
- Du fait que "l'écart à l'orthotropie" est limité, on peut suggérer dans une première estimation que le comportement mécanique d'une telle tôle peut être considéré comme orthotrope. Le '*bon choix*' des axes d'orthotropie peut être justifié en minimisant la partie purement monoclinique de  $\|M_{pm}\|$ , qui est l'approximation orthotrope la plus appropriée du critère monoclinique prismatique.

## Perspectives

- Pour une meilleure compréhension du comportement mécanique anisotrope et des gradients de texture des tôles ferritiques laminées, une modélisation mécanique sur tout l'intervalle de l'épaisseur de la tôle est à envisager, prenant en considération un nombre indéterminé des couches (généralisation du cas d'une tôle bicouche). Dans cette optique, d'éventuelles caractérisations expérimentales, moyennant l'E.B.S.D. est souhaitable.
- Afin de mieux prévoir le comportement mécanique de chaque couche et du comportement global des tôles laminées, il serait aussi intéressant de proposer une simulation numérique par élément finis utilisant un code de calcul sur un logiciel de simulation (*Abaqus*).
- Pour analyser finement le caractère anisotrope et monoclinique des tôles laminées, nous proposons d'utiliser plusieurs hypothèses d'homogénéisation.



---

**Références bibliographiques**

- [1] F. Delaire, J. L. Raphanel, C. Rey. "Plastic heterogeneities of a copper multicrystal deformed in uniaxial tension: experimental study and finite element simulations". *Acta Mater* **48** pp. 1075–1087 (2000).
- [2] L. Allais, M. Bornert, T. Bretheau, D. Caldemaison. "Experimental characterization of the local strain field in a heterogeneous elastoplastic material". *Acta Mater* **42(11)** pp. 3865–3880 (1994).
- [3] T. Bretheau, D. Caldemaison. Test of mechanical interaction models between polycrystal grains by means of local strain measurements. In: Deformation of Polycrystal: Mechanisms and Microstructures, éd. Hansen N., Horsewell A., Leffers T, Lilholt H. *2nd Riso International Symposium on Metallurgy and Materials Science, Riso National Laboratory, Roskilde, Denmark* pp. 157–161 (1981).
- [4] S. Forest, G. Cailletaud. "Strain localisation in single crystals: bifurcation analysis, effects of boundaries and interfaces". *Eur J Mech, A/Solids* **14** pp. 747–771 (1995).
- [5] N. Hansen, D.J Jensen. "Development of microstructure in FCC metals during cold work". *Phil Trans R Soc London* **A357** pp. 1447–1469 (1999).
- [6] G. Saada. "Dislocation Interactions and Plastic Deformation of Crystals". In: Electron Microscopy and Strength of Crystals, éd. Thomas Gareth et Washburn Jack, Berkeley, California. *1st Berkeley Int Mat Conf "The Impact of Transmission Electron Microscopy on Theories of the Strength of Crystals, Interscience* pp. 651–663 (1963).
- [7] T. Ungar, J.I. Langford, R.J. Cerink, G. Voros, R. Pelaumer, G. Oszlanyi, I. Etkvas "Microbeam X-Ray diffraction study of structural properties of polycrystalline metals by means of synchrotron radiation". *Mat Sc Engng* **247** pp. 81–87 (1998).
- [8] M. Zehetbauer, T. Ungar, R. Kral, A. Borbel y, E. Schafler, B. Ortner, H. Amenitsh, S. Bernstorff. "Scanning X-Ray diffraction peak profile analysis in deformed Cu-polycrystals by synchrotron radiation". *Acta mater*, **47(n3)** pp. 1053–1061 (1999).
- [9] F. Havlicek, J. Kratochvil, M. Tokuda, V. Lev."Finite element model of plastically deformed multicrystal". *Int J Plasticity* **6** pp. 281–291 (1990).
- [10] G.R. Canova, H.R. Wenk, A. Molinari. "Deformation modelling of multi-phase polycrystals: case of quartz-mica aggregate". *Acta metall mater* **40(7)** pp. 1519–1530 (1992).
- [11] J. Harder. "A crystallographic model for the study of local deformation processes in polycrystals". *Int J Plasticity* **15(n6)** pp. 605–624 (1999).
- [12] S. Ghosh, K. Lee, S. Moorthy. "Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoï Cell finite element method". *Int J Sol Struct* **32(1)** pp. 27–62 (1995).

- 
- [13] R. Hill. "The elastic behavior of a crystalline aggregate". *Proc. Phys. Soc. Lond.* **A65** pp. 349–354 (1952).
- [14] P.E. Sanchez. "Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes". *Int. J. Engrg. Sci* **12** pp. 331–351 (1974).
- [15] Sanchez, P.E. *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory*. Lecture Notes in Physics pp. 127 (1980).
- [16] P. Suquet. "Analyse limite et homogénéisation". *C.R. Acad. Sci. Paris II* **296** pp. 1355–1358 (1983).
- [17] G. Bouchitte, P. Suquet. "Homogenization, plasticity and yield design". *Composite Media and Homogenization Theory* pp. 107–133 (1991).
- [18] J.F. Bourgat. "Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients" *Springer-Verlag, Berlin*. **704** (1977).
- [19] M.P. Bendsoe, N. Kikuchi. "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* **71** pp. 197–224 (1988).
- [20] J.M. Guedes, N. Kikuchi. "Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptative finite element methods". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* **83** pp. 143–198 (1990).
- [21] G. Wassermann, J. Grewen. "In Texturen metallischer Werkstoffe II, Aufl". *Springer Vedag, Berlin* pp. 273 (1962).
- [22] H. O. Asbeck, H. Mecking. "Influence of friction and geometry of deformation on texture inhomogeneities during rolling of Cu single crystals as an example". *Mater. Sci. Eng* **34** pp. 111-119 (1978).
- [23] J. Hirsch. "Recrystallization of FCC metals as investigated by ODF analysis. In Annealing ProcessesmRecovery, Recrystallization and Grain Growth", (eds. N. Hansen, D. Juul Jensen, T. Leffers, B. Ralph), *7th Riso International Symposium, Riso, Denmark* pp. 349-360 (1986).
- [24] D. Solas. "Anisotropie des propriétés mécaniques et endommagement des alliages Al- Zn-Mg-Cu". *Thèse, Institut national polytechnique de Grenoble* 170 p. xv, 11, 28, 64 (1997).
- [25] S. Gorczyca, S. Dymek, J. Rys, M. Maslanka, M. Wrobel. "Nomenclaturefor structural heterogeneity produced by the deformation of metals". *J. Engi Mat. Tech* **31** pp. 23-31 (1986).
- [26] J. Gil Sevillano, P. Van Houtte, E. Aernoudt. "Large strain work hardening and textures". *Progress in Mat. Sciences* **25** pp. 69-134 (1980).

- 
- [27] L.S Semiatin, J.J Jonas. "Formability and workability of metals plastic instability and flow localization". *ASM Series in metal processing* (1983).
- [28] B. Bacroix, J.J. Jonas. "The Influence of Non-Octahedral Slip on Texture Development in FCC Metals". *Textures and Microstructures* **8 & 9** pp. 267-311 (1988).
- [29] R.J. Asaro, A. Needleman. "Texture development and strain hardening in rate dependent polycrystals". *Acta. Metall* **33** pp. 923-954 (1985).
- [30] Yu. S. Avraamov, A.G. Gvozdev, V.M. Kutsak. "Orientation dependence of grain boundary energy of Si iron". *Phys. Met. Metallog* **36** pp. 198-201 (1973).
- [31] K.H. Kim, D.N. Lee. "Analysis of deformation textures of asymmetrically rolled aluminum sheets". *Acta Mater* **49** pp. 2583-95 (2001).
- [32] S.N. Lee, D.N. Lee. "Analysis of deformation textures of asymmetrically rolled steel sheets". *Int. J. Mech. Sci* **43** pp. 1997-2015. (2001).
- [33] M.Y. Huh, Y.S. Cho, O. Engler. "Effect of lubrication on the evolution of microstructure and texture during rolling and recrystallization of copper". *Mater. Sci. Eng* **A247** pp. 152-164 (1998).
- [34] M.Y. Huh, H.C. Kim, J.J. Park, O. Engler. "Evolution of through-thickness texture gradients in various steel sheets". *Met. Mater* **5** pp. 437-443 (1999).
- [35] M.Y. Huh, Y.S. Cho, J.S. Kim, O. Engler. "Effect of lubrication on the evolution of through thickness texture gradients in cold rolled and recrystallized low carbon steel". *Z. Metallkde* **90** pp. 124-131 (1999).
- [36] R. Quey. "Suivi de microtextures dans l'Aluminium en grande déformation à chaud" *Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure de Saint Etienne France* (2009).
- [37] L. Gavard. "Recristallisation dynamique d'aciers inoxydables austénitiques de haute pureté". *Thèse, Ecole des Mines de Saint Etienne* (2001).
- [38] T.R. Oliveira. "Effet de niobium et du titane sur la déformation à chaud d'acier inoxydables ferritiques stabilisés". *Thèse, l'Ecole Nationale Supérieure des mines de Saint Etienne France*. (2006).
- [39] L. Delannay, P. Van Houtte, A. Van Bael. "New parameter model for texture description in steel sheets". *Textures and Microstructures* **31** pp. 151-175 (1999).
- [40] Ph. Lequeu, F. Montheillet, J.J. Jonas. "Textures in non Ferrous Metals and Alloys", *Dérouit. Proc.AIME. Symp* pp.189 (1985).
- [41] M. Darrieulat. "Prévision du comportement plastique anisotrope des polycristaux texturés par la mécanique des milieux continus". *Thèse, Ecoles des Mines de Saint-Etienne et de Paris*. (1993).

- 
- [42] Hansen, J. Pospiech, K. Lucke. "Tables for texture analysis of cubic crystals" *Springer-Verlag, Berlin* pp. 17 (1978).
- [43] D. Piot. "Prévision de l'anisotropie plastique grâce à la représentation différentiable des surfaces d'écoulement". D.E.A (1994).
- [44] M.L Fares, F. Montheillet. "Modélisation mécanique de l'essai de compression plane de Monocristaux". *Revue de Métallurgie/Sciences et Génie des Matériaux*, n°5 pp.615-625 (1995).
- [45] M.L Fares, H. Essom, F. Montheillet. "Etude expérimentale de l'hétérogénéité de la déformation lors de l'essai de compression plane de monocristaux". *Mécaniques & Industries*. **3(6)** pp. 545-556 (2002).
- [46] M. Darrieulat, D. Piot. "A method of generating analytical yield surfaces of crystalline materials" *Int. J. Plasticity* **12** pp. 1221-12 (1996).
- [47] M. Darrieulat, F. Montheillet. "A texture based continuum approach for predicting the plastic behaviour of rolled sheet". *Int. J. Plasticity* **19** pp. 517-546 (2003).
- [48] A.M. Habraken, L. Duchêne. "Anisotropic elasto-plastic finite element analysis using a stress-strain interpolation method based on polycrystalline model". *Int. J. Plasticity* **20** pp. 1525-1560 (2004).
- [49] R. Logé. "Influence des conditions thermomécaniques et de la microstructure sur les évolutions de texture cristallographique du Zircaloy-4 en mise en forme à chaud". *Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris – CEMEF* (1999).
- [50] R. Masson. "Estimations non linéaires du comportement global de matériaux hétérogènes en formulation affine, application aux alliages de Zirconium", *Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique* (1998).
- [51] M. Bornert, T. Bertheau, P. Gilormini. "Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques". *Paris, Hermes Science Publications* (2001).
- [52] M. Béringhier. "Distribution et transport des variables de modèles polycristallins pour la prédiction de l'anisotropie mécanique des métaux en mise en forme". *Thèse de l'école des mines de Paris* (2006).
- [53] G. Sachs. "Zur Ableitung einer Fließbedingung", *Z. Ver. Deu. Ing.* **72** pp. 734-736, (1928).
- [54] G.I. Taylor. "Plastic strain in metals". *J. Inst. Metals* **62** pp. 307-324 (1938).
- [55] J.D. Eshelby. "The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems". *Proc. Roy. Soc. London A* **241** pp. 376-396 (1957).

- 
- [56] M. Renouard, M. Wintenberger. "Déformation homogène par glissement des dislocations de monocristaux cubiques faces centres sous l'effet de contraintes et de déplacements imposés". *Compte rendu de l'académie de science Paris* t. **283 B** pp. 237-240 (1976).
- [57] H. Honnef, H. Mecking. "Textures of Materials". *Proc.I.C.O.T.O.M.5 Springer, Berlin* 1 pp. 265 (1978).
- [58] P. Van Houtte. "Application of the relaxed Taylor theory and the Bishop-Hill theory for the partially constrained deformation of crystals" *Mémoires et études scientifiques Revue de Métallurgie* Février pp .57-68 (1985).
- [59] F. Montheillet. "Comportement rhéologique des matériaux métalliques multiphasés". *Techniques de l'ingénieur*, **M 3010**. France (2004).
- [60] W.F. Hosford. "A generalized isotropic yield criterion", *Journal of Applied Mechanics, ASME* **39** pp. 607-609 (1972).
- [61] R.W. Logan, W.F. Hosford. "Upper-bound anisotropic yield locus calculations assuming <111> pencilglide". *International Journal of Mechanical Sciences* **22** pp. 419-430 (1980).
- [62] R. Hill. "A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals". *Proceedings of the Royal Society of London, Série A, Mathematical and physical Sciences* **193 (1033)** pp. 281-297 (1948).
- [63] J. Savoie, J.J. Jonas, S.R. MacEwen, R. Perrin. "Evolution of r-value during the tensile déformation of aluminium". *Textures and Microstructures* **23** pp. 1-23 (1995).
- [64] J.W Yoon, F. Barlat, K. Chung, F. Pourboghrat, D.Y. Yang. "Influence of initial back stress on the earing prediction of drawn cups for planar anisotropic aluminum sheets". *J. of Mat\_ Processing Tech* **80-81** pp. 433-437 (1998).
- [65] O.G. Lademo, O.S. Hopperstad, M. Langseth. "An evaluation of yield criteria and flow rules for aluminium alloys". *Int. J. of Plast* **15** pp. 191-208 (1999).
- [66] R. Hill. "Theoretical plasticity of textured aggregates". *Math. Proc. Camb. Phil. Soc* **58** pp. 179-191 (1979).
- [67] R. Hill. "Constitutive modeling of anisotropic plasticity in sheet metals". *J. Mech. Phys. Solids* **38** pp. 405-417 (1990).
- [68] R. Hill "A user friendly of orthotropic plasticity in sheet metals". *Int.J. Mech. Sci* **35** pp. 19-25 (1993).
- [69] A.P. Karallis, M.C. Boyce. "A general anisotropic yield criterion using bounds and transformation Weighting tensor". *J.Mech.Phys.Solids* **41(12)** pp. 1859-1886 (1993).



- 
- [70] F. Barlat, J. Lian. "Plastic behavior and stretchability of sheet metals Part I: yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions". *Int. J. Plasticity* **4** pp. 51-66 (1989).
- [71] F. Barlat, D.J. Lege, J.C. Brem. "A six component yield functions for anisotropic metals". *Int. J. Plasticity* **7** pp. 693-712 (1991).
- [72] W. F. Hosford. "On yield loci of anisotropic cubic metals". *Proc. 7th North American Metalworking Conf. SME – Dearborn, MI* pp. 191-197 (1979).
- [73] J. Lian and J. Chen. "Isotropic polycrystal yield surfaces of BCC and FCC metals: crystallographic and continuum mechanics approaches". *Acta Metall. Mater* **39** pp. 2285-2294 (1991).
- [74] W.T. Lankford, S.C. Snyder, J.A. Bausher. "New Criteria for predicting the press performance of deep drawing sheet". *Trans. ASM* **42** pp. 1197 (1949).
- [75] H.C Wu, H.k Hong, Y.P. Shiao. "Anisotropic plasticity with application lo sheet metals". *International Journal of Mechanical Sciences* **41** pp. 703-724 (1999).
- [76] F. Montheillet, P Gilormini et J.J. Jonas. "Relation between axial stresses and texture developpement during torsion testing: A simplified theory". *Acta Metall.* **33(4)** pp. 705-717 (1985).
- [77] P. Lequeu. "Comparison of crystallographic and continuum Yield surfaces for textured polycrystals". *PhD, University Mac Gill, Montréal* (1986).
- [78] Ph. Lequeu, J.J. Jonas. "Modeling of the plastic Anisotropy of textured Sheet". *Metall. Trans* **19** pp.105-120 (1988).
- [79] F. Montheillet, B. Orlans-Joliet, Ph. Tavernier. "Modélisation du comportement plastique anisotrope des métaux C.F.C ". *Mat. Tech* **77(9-10)** pp.35-39 (1989).
- [80] F. Montheillet, Ph. Lequeu. P. Gilormin, J.J Jonas. "A new method for describing the anisotropic proprieties of textured polycrystals". *8<sup>th</sup> International Conference on texture of materials, Santa Fe, NM, U.S.A* (1987).
- [81] F. Montheillet. "A simple Method for describing the anisotropic plastic response of metal sheet". *31<sup>emes</sup> journées du cercle d'études des métaux, Saint Etienne. France* (1992).
- [82] T.H Baudin, F. Montheillet, A.M Chaze, C.H Leveillant. " Prevision des Contraintes macroscopiques obtenues au cours d'essais de Traction-Torsion simultanée-relation avec la texture" *4<sup>ieme</sup> colloque Franco-Polonais de Métallurgie, Orsay 1989, in archives of metallurgy*, **35** pp. 311 (1990).
- [83] O. Engler, J. Mezera, J. Driver, K. lucke K. "Texture and plastic anisotropy in model Aluminium- Lithium Alloys". *9<sup>th</sup> International conference on textures of materials, Avignon, France* (1990).

- 
- [84] R. Fortunier. "Code de calcul TEXANI : Documentation utilisateur ". *Rapport interne. Ecole des mines de Sainte Etienne. France* (1989).
- [85] J. Mizera. "Texture et anisotropie plastique d'alliages Al-Li". *Thèse de Doctorat Ecole des mines de Sainte Etienne. France* (1993).
- [86] J.B. Orleans. "Déformation plastique de monocristaux de structure cubique centrée". *Thèse, Ecole des mines de Saint-Étienne* (1989).
- [87] W.B. Lee, K. Chan. "A theoretical analysis of equibiaxial Deformation texture under Non-Prescribed Strain path". *Textures and Microstructures* **13** pp. 31-40 (1990).
- [88] Ph. Lequeu, F. Montheillet, J.J. Jonas. "Textures in non Ferrous Metals and Alloys". *Proc.AIME. Symp*, pp. 189 (1985).
- [89] Ph. Lequeu, P. Gilormin, F. Montheillet, B. Bacroix, J.J. Jonas. " Yield surfaces for textured polycrystals –I .Crystallographi approach". *Acta Metall* **35** pp. 439-451 (1987).
- [90] J.F.W Bishop." A theoretical examination of the plastic deformation of crystals by glide". *Phil. Mag* **44** pp.51-64 (1953).
- [91] J.F.W Bishop, R. Hill. "A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses". *Phil. Mag* **42** pp. 414-427 (1951).
- [92] J. F. W. Bishop, R. Hill. "A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses". *Phil. Mag* **42** pp. 1298-1307 (1951).
- [93] Ph. Lequeu, J.J. Jonas. "Modeling of the plastic anisotropy of textured sheet". *Acta. Metall Trans* **19 A** pp. 105-120 (1988).
- [94] B. Orleans-Joliet, J.H Driver, F. Montheillet. " Plane strain compression of silicon-iron single crystals ". *Acta Metall. Mater* **38** pp. 581-594 (1990).
- [95] B. Orleans-Joliet, B. Bacroix, F. Montheillet, J. H. Driver, J. J. Jonas. "Yield surfaces of b.c.c. crystals for slip on the {110} [111] and {112} [111] systems". *Acta Metall Mater* **38** pp. 1365-1380 (1988).
- [96] M. Darrieulat. F. Montheillet. "Extension of the Hill 1948 yield criterion to the case of prismatic monoclinic symmetry". *Int. J. Mech. Sc* **38** pp. 1273-1284 (1996).
- [97] O. Engler, M.Y.Huh, C.N. Tome. "A study of through-thickness texture gradients in rolled sheets". *Metall Mater Trans* **A31** pp. 2299-2315 (2000).
- [98] J.Sidor, A. Miroux, R. Petrov, L. Kestens. " Microstructural and crystallographic aspects of conventional and asymmetric rolling processes". *Acta Materialia* **56** pp. 2495-2507 (2008).
- [99] J.K Kim, Y.K Jee, M.Y Huh, H.T Jeong. "Formation of textures and microstructures in asymmetrically cold rolled and subsequently annealed aluminum alloy 1100 sheets" *J mater Sci* **39** pp.5365-5369 ( 2004).

- 
- [100] R. Roumina, C.W. Sinclair. "Deformation Geometry and Through-Thickness Strain Gradients in Asymmetric Rolling". *Metallurgical and Materials Transactions* **39** pp. 2495-2503 (2008).
- [101] H. Watanabe, T. Muka, K. Ishikawa. " Differential speed rolling of an AZ31 magnesium alloy and the resulting mechanical properties" *J Mater Sci* **39** pp. 1477-1480 (2004).
- [102] R. Hill. "The Mathematical Theory of Plasticity". *Oxford University Press* (1950).
- [103] J.A Bailey. S.L Haas, K.C Nawab. "Anisotropy In Plastic Torsion" *Basic J Engng, Trans. ASME*, Paper No.71-Met-Y (1972).
- [104] JR, M. J Michino, W. N Findley. "Subsequent yield surfaces for annealed mild steel under dead-weight loading: aging, normality, convexity, corners, Baushinger, and cross effects" *J Engng Mat Tech Trans ASME* **96** pp. 56 (1974).
- [105] M.G Stout, S. Hecker, R.J Boursier. " An evaluation of anisotropic effective stress-strain criteria for the biaxial yield and flow of 2024 aluminum tubes". *Engng Mat Tech Trans ASME* **105** pp. 240-242 (1983).
- [106] M.A Eisenberg, C.F Yen. " A Theory Of Multiaxial Anisotropic Viscoplasticity". *J. App. Mech. Trans. ASME* **48** pp.276-284 (1984).
- [107] D.E Helling, A.K Miller, M.G Stout. "An Experimental Investigation Of The Yield Loci Of 1100-0 Aluminum, 70-30 Brass, And An Overaged 2024 Aluminum-Alloy After Various Prestrains" *J Engng Mat Tech Trans ASME* **108** pp.313-320 (1987).
- [108] K.H Kim. " Evolution of anisotropy during twisting of cold drawn tubes. " *J Mech. Phys Solids* **40** pp. 127-139 (1992).
- [109] A. Wauthier, H. Réglé, J. Formigoni, G. Herman. " The effects of asymmetrical cold rolling on kinetics, grain size and texture in IF steels". *Mater Character* **60** pp.90-95 (2009).
- [110] M.Y Huh, K.R Lee, O. Engler. "Evolution of texture and strain states in AA 3004 sheet during rolling with a dead block". *Int J Plas* **20** pp.1183-1197 (2004).
- [111] M.H. Mathon. "Caractérisation des textures par diffraction neutronique" *Collection SFN* **9** 49-64, *Laboratoire Léon Brillouin, CEA-CNRS, Bât. 563, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France* (2008).
- [112] P. Van Houtte. "The MTM-FHM Software System Version 2, Users Manual" (1995).
- [113] P. Van Houtte, "A new method for the determination of Texture Functions From incomplete Poles Figures-Comparison With Older Methods". *Textures and Microstructures* **6** pp. 137-162 (1984).

- 
- [114] P. Van Houtte. "A method for the generation of Various Ghost Correction Algorithms-The example of the Positivity Method and the Experimental Method". *Textures and Microstructures* pp. 199-212 (1991).
- [115] H. J. Bunge. "Zur darstellung allgemeiner texturen". *Z. Metallkde* **56** pp. 872 (1965).
- [116] S.Nishikawa. S. Kikuch. "The diffraction of cathode rays by calcite". *Proc Imperial Acad. Japan* **4** pp.475–477 (1928).
- [117] M.N. Alam, M. Blackman, D.W. Pashley. *Proc Roy Soc London A* pp. 221-224 (1954).
- [118] D.J. Dingley, V. Randle. "Microtexture determination by electron back-scatter diffraction". *J Mater Sci* **27** pp. 4545-4566 (1992).
- [119] J.A. Venables, C.J. Harland. "Electron back-scattering patterns. A new technique for obtaining crystallographic information in the scanning electron microscope". *Phil Mag* **27** pp. 1193-1200 (1973).
- [120] J.A. Venables, R .Bin-Jaya. "Accurate microcrystallography using electron back-scattering patterns". *Phil Mag* **35** pp.1317–1328 (1977).
- [121] S Zaefferer, R.A. Schwarzer. "Automated measurement of single grain orientations in the TEM". *Z Metallkd* **85** pp. 585–591 (1994).
- [122] W. Chehaoui, M.L. Fares, F. Montheillet. "Modélisation du comportement mécanique d'alliages métalliques hétérogènes et anisotropes". *1ère Conf. Int. Sur la Métallurgie et l'Environnement*, Annaba, Algérie (2007).

## Annexe 1

### A.1.1 Tôle Industrielle

**Figure A.1:** Schématisation de la simulation des orientations idéales des composantes dans les deux couches de l'épaisseur de la tôle à partir de la principale figure de pôle (100) pour une symétrie triclinique.

## A.1.2 Tôle de laboratoire

**Figure A.2:** Schématisation de la simulation des orientations idéales des composantes dans la tôle à partir de la principale figure de pôle (100) pour une symétrie triclinique.



---

## Annexe 2

**Approche généralisée: Calcul des coefficients pour une tôle bicouche**

$$b_3 = C_1 g_2^2 - D_1 q_1 U_3 + A_1 U_2^2 + B_1 q_2^2 + E_1 g_2 U_2 + 2A_1 U_3 U_1 - D_1 q_2 U_2 - S_1 q_2 g_2 + E_1 g_1 U_3$$







## Annexe 3

### Traction orthogonale

#### A.3.1 Calcul de la contrainte $\sigma(\theta)$

Le critère C.M.T.P. se présente sous la forme:

(A.1)

Le tenseur des contraintes dans le repère de l'éprouvette:

Le tenseur des contraintes dans le repère du cristal (C) est donné à l'aide de la matrice de transformation sous la forme :

(A.2)

Alors:

(A.3)

A l'aide du principe de normalité:

(A.4)

Le tenseur deviatorique local des contraintes se transcrit :

(A.5)

$$S_{23} = a_2 a_3 \sigma + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \tau$$

Les relations (A.1) et (A.4) donnent :

(A.6)

En remplaçant les valeurs de la relation (A.5) dans la relation (A.6) on obtient :

$$\varepsilon_1 = 3\lambda \left( a_1^2 - \frac{1}{3} \right) \sigma + 2\tau a_1 b_1$$

(A.7)

D'après cette dernière relation,      prendra de la forme suivante:

(A.8)

Les grandeurs mécaniques recherchées  
échantillon (E), selon la transformation :

seront exprimées dans le repère

Alors      s'écrira comme suit:

Avec :

(A.9)

Comme le tenseur des vitesses de déformation est diagonalisé dans la traction orthogonale, c'est-à-dire que avec , alors:

De cette dernière équation on détermine le rapport de contrainte de cisaillement à celle d'écoulement :

Si on pose les propositions suivantes :

$$H_2 = 6a_2^2b_2^2 + 3a_1^2b_2^2A + 3a_3^2b_2^2A + 3a_1a_2b_1b_2A + 3a_2a_3b_2b_3A$$

Alors:

$$\Psi = \frac{\tau}{\sigma(\theta)} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{H_1 + H_2 + H_3} \quad (\text{A.10})$$

Comme pour le cas de la traction uniaxiale, la contrainte d'écoulement est calculée à partir du critère C.M.T.P. et en considérant les expressions (A.1), (A.4) et (A.7), on aboutit à :

$$\text{Avec :} \quad (\text{A.11})$$

En posant :

On peut écrire :

$$\Omega = 24 (a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2) + 12A (a_3^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_2 a_3 b_2 b_3 + 2a_1 a_3 b_1 b_3 + 2a_1 a_2 b_1 b_2)$$

$$\mu = -8a_1 b_1 + 24a_2^3 b_2 - 8a_2 b_2 + 24a_3^3 b_3 - 8a_3 b_3 + 24a_2 a_3^2 b_2 A + 24a_3 a_2^2 b_3 A + 24a_1 a_3^2 b_1 A + 24a_3 a_1^2 b_3 A + 24a_1 a_2^2 b_1 A + 24a_2 a_1^2 b_2 A + 24a_1^3 b_1$$

L'expression (A.11) se réduira finalement à :

(A.12)

### A.3.2 Calcul de Coefficient d'anisotropie de lankford

$$R(\theta) = \frac{(6b_2 b_3^2 a_2 A + 6b_1^3 a_1 + 6b_3 a_3 b_2^2 A + 6b_2^3 a_2 + 6b_1 a_1 b_2^2 A + 6b_3^3 a_3 + 6b_3 a_3 b_1^2 A + 6b_2 a_2 b_1^2 A + 6b_1 a_1 b_3^2 A) \tau + (-b_2^2 + 3b_1^2 a_1^2 + 6b_1 b_2 a_1 a_2 A - b_3^2 + 6b_1 b_3 a_1 a_3 A - b_1^2 + 3b_2^2 a_2^2 + 6b_2 b_3 a_2 a_3 A + 3b_3^2 a_3^2) \sigma (\theta)}{(6n_2^2 b_2 a_2 + 6n_1 n_3 a_3 b_1 A + 6n_2 n_3 a_3 b_2 A + 6n_2 n_3 a_2 b_3 A + 6n_1^2 a_1 b_1 + 6n_3^2 a_3 b_3 A) + 6n_1 n_2 a_2 b_1 A + 6n_1 n_2 a_1 b_2 A + 6n_1 n_3 a_1 b_3 A) \tau + (6n_1 n_3 a_1 a_3 A + 3n_1^2 a_1^2 - n_2^2 - n_3^2 + 6n_1 n_2 a_1 a_2 A + 6n_2 n_3 a_2 a_3 A + 3n_2^2 a_2^2 + 3n_3^2 a_3^2 - n_1^2) \sigma (\theta)}$$

(A.13)

