

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar
Annaba

Badji Mokhtar University -
Annaba



جامعة باجي مختار

عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire LaPS



THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Mathématiques
Option : Modélisation Mathématiques-Actuariat

Utilisation des modèles Arch-Garch pour modéliser le marché de
l'énergie : Prix de pétrole et de gaz

Par:

Bousseba Fatma Zohra

Sous la direction de

ZEGHDOUDI Halim

M.C.A U.B.M. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT : Remita

Med Riad

Prof. U.B.M. Annaba

EXAMINATEUR : Hadji

Mohamed Lakhder

M.C.A U. B.M. Annaba

EXAMINATEUR : Tiar

Ahcène

M.C.A U. 20 août 1955. Skikda

Année :2017

في هـ

ARCH-GARCH وتطبيقاتها

الى القيمة المعرضة للخطر. على وجه التحديد نقدم دراسة ببليوغرافية شاملة

تطوير نماذجها. ثانياً، نحن نركز على مقايضة تقلب في ظل نموذج هيستون والتباين التسعير ومقايضة التقلبات في سوق النفط (نموذج العودة الى الوسط). نضيف فائدة أخرى من نماذج قارش حيث قدمنا تطبيق حول تطاير سعر الصرف من سعر النفط وتعطى الدراسة الفترة من 1 2009 الى غاية 31 ديسمبر 2014 2192 .

Table des matières

1	Modèles ARCH / GARCH et Value at Risk (VaR)	10
1.1	Processus stationnaires	11
1.2	Séries financières	13
1.3	Modèles ARCH(q)	14
1.3.1	Présentation du processus ARCH	14
1.3.2	Test de racine unitaire ou test de stationnarité	17
1.3.3	Test de Dickey et Fuller augmenté	18
1.3.4	Tests de racine unitaire : les tests de phillips-Perron	20
1.4	Modèles GARCH(p,q)	20
1.4.1	Présentation du processus GARCH	20
1.4.2	Description du processus GARCH	20
1.5	Estimation des paramètres ARCH	22
1.5.1	Estimation par maximum de vraisemblance	22
1.6	Variantes des processus ARCH	23
1.6.1	Modèle GARCH-M	23
1.6.2	Modèle IGARCH	24
1.7	Modèles ARCH/GARCH asymétriques	27
1.7.1	Modèle EGARCH	28
1.7.2	Modèle APARCH	29
1.7.3	Modèles TGARCH	30
1.8	Value at Risk (VaR)	31
1.8.1	Introduction	31
1.8.2	Historique	32
1.8.3	Définition de la VaR	32
1.9	Méthodes d'estimation de la Value at Risk	33
1.9.1	L'analyse historique	34
1.9.2	Méthodes paramétrique	35
1.9.3	La méthode de RiskMetrics	35
1.9.4	Méthode de simulation de Monté Carlo	36

2	Modèles de Heston et retour à la moyenne	38
2.1	Swaps de volatilité	39
2.2	Swaps de volatilité sous le modèle de Heston	40
2.2.1	Le modèle à volatilité stochastique	40
2.2.2	Expression explicite et propriétés de σ_t^2	41
2.3	Modèle de <i>GARCH</i> (1, 1) et swap de volatilité	45
2.4	Modèle retour à la moyenne	47
2.4.1	Solution explicite du modèle retour à la moyenne	49
2.4.2	Quelques propriétés de modèle retour à la moyenne à la volatilité stochastique $\sigma^2(t)$	50
2.4.3	Variance Swap sous le modèle retour à la moyenne	51
2.4.4	Volatilité Swap sous le modèle retour à la moyenne	52
2.4.5	Modèle de volatilité stochastique à risque neutre avec retour à la moyenne	54
2.4.6	Modèle de volatilité stochastique à risque neutre	54
2.5	Variance et volatilité swaps pour le risque neutre	56
3	Marché d'énergie et Application	57
3.1	Histoire du pétrole	57
3.1.1	Découvertes	57
3.1.2	les crises pétrolières :1973-1985	58
3.1.3	Evolution des prix du pétrole 2009 - 2014	59
3.2	Marchés de l'énergie	60
3.2.1	Introduction	60
3.2.2	Marché pétrolier	61
3.2.3	Marchés européens	62
3.2.4	Les marchés gaziers mondiaux	62
3.2.5	Les enjeux des approvisionnements européens en gaz	62
3.2.6	Baisse de la consommation gazière européenne	62
3.3	Applications (prix de pétrole)	63
3.3.1	Résumé de la littérature existant sur l'énergie GARCH	63
3.3.2	Application 1	64
3.3.3	Modélisation	65
3.3.4	test de Racine unitaire	65
3.3.5	Analyse descriptive	66
3.3.6	Critères de choix des modèles	66
3.3.7	Discussion	70
3.3.8	Application 2 :(prix du pétrole août 1987-octobre 2016)	70

Bibliographie

Abstract

This thesis focuses on the profit of GARCH models and their applications to the Value-At-Risk. More precisely, we give an extensive bibliographic overview of the developments of the ARCH- GARCH. To this end, we add another interest t of GARCH models which we made an application relates to exchange rate volatility of oil price. The study relates to the period 01 January 2009 to 31 December 2014, a total of 2192 observations given. On the other hand, we are interested in the volatility swaps under the Heston model and the pricing of swaps of variance and volatility in the oil market (return to average model).

Résumé

Nous proposons, dans cette thèse, de donner l'intérêt à des modèles ARCH-GARCH et leurs applications dans la valeur à risque. Plus précisément, nous donnons un aperçu bibliographique exhaustif sur le développement de ses modèles. D'autre part, nous nous intéressons aux swaps de volatilité sous le modèle de Heston et la tarification des swaps de variance et de volatilité dans le marché du pétrole (modèle retour à la moyenne). De plus, nous ajoutons un autre intérêt des modèles GARCH on présente une application concerne la volatilité du taux de change du prix du pétrole. L'étude porte sur la période du 1er janvier 2009 au 31 décembre 2014, soit 2192 observations, et un exemple numérique de prix du pétrole (août 1987-octobre 2016) a été donné dont nous utilisons les swaps de volatilité sous le modèle GARCH (1,1) en temps continu (retour à la moyenne).

Introduction

Le problème de la volatilité stochastique et ses effets sur les prix des options ont été examinés par plusieurs auteurs : **Merton** en 1976 a examiné le cas où le prix suit un processus de diffusion avec sauts. **Scott** et **Wiggin** en 1987, **Chesney** et **Scott** en 1989, **Momlino** et **Turnbull** en 1990 ; ont développés des modèles qui nécessitent soit l'utilisation des simulations numériques soit la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles parabolique dans la plupart des cas de dimension supérieure ou égale à deux. **Hull** et **White** en 1987 ont utilisé l'équation différentielle de **Garman** (1983) pour déduire une solution sous forme sérielle du prix d'une option d'achat européenne sur un actif avec une volatilité qui n'est pas corrélée avec le prix de sous-jacent. **Stein** en 1991 et **Heston** en 1993 ont modélisé la dynamique de la volatilité par un processus de retour à la moyenne (**Ornstein Ulenbeck**) ; et font apparaître des solutions basées sur les séries de Fourier et les fonctions caractéristiques.

Une autre approche pour la modélisation de la volatilité stochastique dans un contexte discret sont les modèles *ARCH* et *GARCH*. Les travaux sur les processus conditionnellement hétéroscédastiques d'Arch introduits par Engle en 1982 et leur extension *GARCH* (*ARCH* généralisés) sont dus à *Bollerslev* (1986). Leur caractérisation repose essentiellement sur le concept de variance conditionnelle. Dans ces modèles, celle-ci s'écrit comme une fonction affine des valeurs passées du carré de la série. Ces modèles ont permis de modéliser la majeure partie de la dynamique non linéaire des rendements d'actifs financiers, justifiant de ce fait, thématiquement et

empiriquement l'existence d'une volatilité aléatoire des prix des actifs intégrés dans le marché de l'énergie.

Parmi les principaux inconvénients des modèles à volatilité stochastique et qu'ils créent une situation d'incomplétude des marchés, décroissance des autocorrélations et le kurtosis conditionnel constant. Pour remédier ces problèmes, une nouvelle approche a été développée (swaps de variance ou swaps de volatilité).

De plus, des modèles *GARCH* univariés ont été utilisés pour la volatilité de prix du pétrole depuis les années 1990 et est devenu les pratiques standard. Malgré l'explosion de nouveaux types de modèles *GARCH*, y compris **GARCH BOLLERSLEV** multivarié (1986), **GARCH BAILLIE** partiellement intégré et d'autres. (1996), *GARCH* non paramétrique (**Bühlmann** et **Mc Neil**, (2002) et le composant multiplicateur **GARCH ENGLE** et **Sokalska** (2012), les modèles simples du *GARCH*(1, 1) restent très utiles parce qu'ils convergent beaucoup plus rapidement à un maximum local dans l'évaluation de probabilité quasi maximale, en livrant la prédiction de la performance qui n'est pas évidemment inférieure aux modèles multivariés **Wang** et **Wu** (2012).

Récemment, **Efimova** et **Serletis** (2014) examinent les propriétés empiriques des volatilités des prix du pétrole, du gaz naturel et de l'électricité utilisant une gamme des modèles *GARCH* univariés et multivariés et des données quotidiennes de marchés de gros aux États-Unis pendant la période de 2001 à 2013.

Pour ces raisons, nous allons étudier le comportement de la dynamique du taux de change du prix de pétrole.

L'objectif de la thèse est d'analyser et d'étudier le comportement de la dynamique du taux de change des prix du pétrole, en appliquant la méthode de Value at Risk. Comme dans la plupart des travaux existants dans la littérature économique, on considère un modèle sous forme multiplication où le bruit blanc au sens faible, dépendant de la volatilité. La théorie classique des séries temporelles n'étant pas suffisante pour décrire les mouvements à court terme du taux de change, nous proposons dans ce travail une méthode qui permet de modéliser la volatilité à l'aide d'un processus GARCH appliquées aux données sur des prix du pétrole. La thèse comporte trois chapitres, une introduction et une conclusion. Ce travail est composé de deux parties, une partie théorique contient deux chapitres et une partie pratique qui contient un seul chapitre.

Ainsi, dans le premier chapitre nous rappelons quelques notions de base nécessaire pour les développements des autres chapitres. Ainsi, les processus stationnaires, les séries financières, les modèles ARCH/GARCH et leurs extensions avec quelques méthodes d'estimation sous plusieurs distributions, la Valeur à risque (VaR) et les méthodes d'estimation de la VaR les plus utilisées.

Le chapitre 2 contient les swaps de volatilité sous le modèle de Heston et le pricing des swaps de variance et de volatilité dans le marché de pétrole dans certaines étapes, que nous avons considérées de manière similaire dans le travail de Swishchuk [33] dont nous avons trouvé une formule de swap de variance explicite et une formule de swap de volatilité de forme fermée pour l'actif énergétique avec une

volatilité stochastique qui suit le modèle GARCH (1,1) en temps continu (retour à la moyenne).

Enfin, le dernier chapitre, qui est l'essentiel de cette thèse, contient une application portée sur la volatilité du taux de change des prix du pétrole pendant la période du 1er janvier 2009 au 31 décembre 2014, soit 2192 observations et un exemple numérique de prix du pétrole (août 1987-octobre 2016) a été donné dont nous utilisons les swaps de volatilité sous le modèle GARCH (1,1) en temps continu (retour à la moyenne).

Chapitre 1

Modèles ARCH / GARCH et Value at Risk (VaR)

Face aux lacunes des représentations $ARMA(p,q)$ pour les problèmes monétaires et Financiers, **Engle** (1982) propose une nouvelle classe de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques ($ARCH$) aptes à capter le comportement de la volatilité dans le temps.

Engle (1982) a donc proposé ces processus pour pallier les insuffisances de la classe des représentations $ARMA$, notamment en ce qui concerne les séries financières qui présentent une volatilité (ou variabilité instantanée mesurée par la variance conditionnelle) fonction du temps et par des ajustements asymétriques.

Ainsi, les modèles $ARCH$ sont basés sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle. La famille des modèles $ARCH$ peut se décomposer en deux

sous-ensembles : les modèles *ARCH linéaires* et les modèles *ARCH non linéaires*.

Les premiers reposent sur une spécification quadratique de la variance conditionnelle des perturbations : modèles $ARCH(p, q)$, $GARCH(p, q)$ (ce modèle : $GARCH(p, q)$ est défini par **Bollerslev** (1986)) et $IGARCH(p, q)$ ce qui on va l'aborder. Les modèles *ARCH non linéaires* sont caractérisés par des spécifications asymétriques des perturbations ce sont les modèles $EGARCH(p, q)$, $TARCH(q)$ et $TGARCH(p, q)$ ce qui on va l'aborder.

1.1 Processus stationnaires

La stationnarité joue un rôle majeur en séries temporelles car elle remplace de manière naturelle l'hypothèse d'observations iid (indépendantes et identiquement distribuées) en statistique standard. Garantissant que l'accroissement de la taille de l'échantillon s'accompagne d'une augmentation du même ordre de l'information, la stationnarité est à la base d'une théorie asymptotique générale.

On considère généralement deux notions de stationnarité.

Définition 1.1 (*Stationnarité stricte*) le processus (X_t) est dit strictement stationnaire si les vecteurs (X_1, \dots, X_k) et $(X_{1+h}, \dots, X_{k+h})$ ont même loi jointe, pour tout entier k et tout entier relatif h .

la notion suivante peut sembler moins exigeante car elle n'impose de contraintes qu'aux deux premiers moments des variables X_t , mais contrairement à la stationnarité

stricte, elle requiert l'existence de ceux-ci.

Définition 1.2 (Stationnarité au second-ordre) le processus (X_t) est dit stationnaire au second-ordre si

$$(i) E[X_t^2] < \infty \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

$$(ii) E[X_t] = m \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

$$(iii) \text{cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}.$$

La fonction $\gamma(\cdot)$ est appelée fonction d'autocovariance. (resp. d'autocorrélation) de (X_t) .

L'exemple le plus simple de processus stationnaire au second-ordre est celui du bruit blanc. Ce processus est particulièrement important car il permet de construire des processus stationnaires plus complexes.

Définition 1.3 (Bruit blanc faible) Le processus (ε_t) est appelé bruit blanc faible s'il vérifie, pour une constante positive σ^2 :

$$(i) E[\varepsilon_t] = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

$$(ii) E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

$$(iii) \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = 0 \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0.$$

Remarque 1.4 Il importe de noter qu'aucune hypothèse d'indépendance n'est faite dans la définition du bruit faible. Les variables aux différentes dates sont seulement non corrélées et la distinction est cruciale en particulier pour les modèles de séries

financières. Il est parfois nécessaire de remplacer l'hypothèse (iii) par l'hypothèse plus forte

(iii') les variables ε_t et ε_{t+h} sont indépendantes.

On parle alors de bruit blanc fort.

1.2 Séries financières

La modélisation des séries financières est un problème complexe. Cette complexité n'est pas seulement due à la grande variété des séries utilisées (prix d'action, taux d'intérêt, taux de change etc.), à l'importance de la fréquence d'observation (seconde, minute, heure, jour, etc) ou à la disponibilité d'échantillons de très grande taille. Elle tient surtout à l'existence de régularités statistique (faits stylisés) communes à un très grand nombre de séries financières et difficiles à reproduire artificiellement à partir de modèles stochastiques.

Dans un article paru en 1963, *Mandelbrot* mettait en évidence un ensemble de telles propriétés. Ces régularités empiriques, vérifiées et complétées depuis par de nombreux auteurs, apparaissent plus ou moins nettement en fonction de la fréquence d'observation de la série et de sa nature. Les propriétés que nous présentons ci-dessous valent surtout pour des séries quotidiennes de prix d'action.

Soit S_t le cours d'un actif à la date t et $\epsilon_t = \log(S_t/S_{t-1})$ le logarithme du rendement (également appelé rendement). La série (ϵ_t) est souvent proche de celle décrivant

les variations relatives des prix : $r_t = \frac{s_t - s_{t-1}}{s_{t-1}}$, soit $\epsilon_t = \log(1 + r_t)$. Ces deux séries présentent sur celle des prix l'avantage d'être sans unité, ce qui facilite les comparaisons entre plusieurs titres. Les propriétés suivantes ont été abondamment commentées dans la littérature financière.

Non stationnarité de S_t . Les trajectoires de prix sont généralement proches de celle d'une marche aléatoire sans terme constant (voir la série de pétrole chapitre 3).

1.3 Modèles ARCH(q)

1.3.1 Présentation du processus ARCH

Selon l'analyse traditionnelle, de Box et Jenkins (1970), la prévision est fondée sur la moyenne conditionnelle de la série à étudier. Par exemple si une variable Z_t suit un processus $AR(1)$ stationnaire :

$$Z_t = \theta Z_{t-1} + \epsilon_t$$

avec ϵ_t i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$, alors la moyenne conditionnelle de Z_{t+1} est θZ_t tandis que sa moyenne inconditionnelle est nulle. Par ailleurs, Engle (1982) souligne que l'amélioration des prévisions issues des séries chronologiques provient tout à fait de l'exploitation de l'information contenue dans la moyenne conditionnelle du processus. La variance conditionnelle du processus $AR(1)$ (σ_ϵ^2) et la variance inconditionnelle $\sigma_\epsilon^2/(1 - \theta)$ sont constantes quelque soit la période de prévision. Alors que se passerait-il s'il y a des

changements dans les variances des erreurs de prévisions? L'économétrie classique présentera certainement des faiblesses pour modéliser ce genre de phénomène car il va sans doute se poser un problème d'hétéroscédasticité, pour simple raison que la matrice de variance-covariance des erreurs Ω_u ne sera pas définie à un scalaire près par la matrice identité I . C'est à dire $\Omega_u \neq \sigma^2 I$. C'est pour apporter une réponse à cette problématique que Engle(1982) a introduit le processus *ARCH*, un modèle économétrique, tenant compte de variances conditionnelles qui varient dans le temps. Plus précisément, les modèles *ARCH* sont des modèles auto-régressifs conditionnellement hétéroscédastiques et sont basés sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle.

Pour bien comprendre le processus *ARCH*, nous allons présenter ce processus tel qu'il a été introduit par Engle (1982)

Description du processus ARCH

On dit qu'une variable X_t suit un processus *ARCH*(q) si

$$X_t = z_t \sqrt{h_t}$$

avec

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot X_{t-i}^2 \tag{1.1}$$

z_t désigne un bruit blanc gaussien c'est à dire $E[z_t] = 0$ et $E[z_t^2] = \sigma_z^2 = 1$.

Plus précisément z_t désigne un ensemble de variables aléatoires indépendantes,

identiquement distribuées, centrées, réduites, tant dis que h_t désigne une variable déterministe et positive qui est conditionnelle à l'information des valeurs passées de X_t . C'est à dire que $X_t = \{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-j}, \dots\}$.

L'équation (1.1) peut aussi s'écrire sous la forme de :

$$X_t^2 = z_t^2 \left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot X_{t-i}^2 \right]$$

On s'aperçoit ici que ce n'est pas le processus X_t qu'on cherche à modéliser mais plutôt le processus de X_t^2 . Rappelons que les variables X_t ne sont pas indépendantes et ne sont pas auto-corrélées, ainsi les espérances conditionnelles et non conditionnelles sont nulles. C'est-à-dire que

$$E[X_t] = E \left[z_t \cdot \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot X_{t-i}^2} \right] = 0 \quad (1.2)$$

et

$$E[X_t | X_{t-i}] = E \left[z_t \cdot \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot X_{t-i}^2 | X_{t-i}} \right] = 0 \quad (1.3)$$

Comme on l'avait souligné plus haut l'idée de base du processus *ARCH* est que la variance conditionnelle varie dans le temps. Dès lors ont vérifié que la variance conditionnelle de X_t est définie par :

$$V[X_t | X_{t-i}] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot X_{t-i}^2 \quad \forall i \geq 1 \quad (1.4)$$

Tant dis que la variance inconditionnelle est exprimée par :

$$V[X_t] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot V[X_{t-i}] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_q} \quad (1.5)$$

Il y a lieu de noter que si i tend vers l'infini, la variance conditionnelle converge vers la variance inconditionnelle. De façon explicite nous avons :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V(X_t | X_{t-i}) = \lim_{i \rightarrow +\infty} [\alpha_0 + \alpha_i X_{t-i}^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q} = V[X_t]$$

Cependant il conviendrait d'imposer certaines restrictions sur les coefficients α_0 et α_i pour que les variances soient définies positives. Cela nécessite que $\alpha_0 > 0$ et $0 \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_q < 1$.

Le dernier aspect à signaler est que les auto-covariances conditionnelles du processus X_t sont nulles. C'est à dire que

$$Cov(X_t, X_{t+k} | X_{t-i}) = 0 \quad \forall k \geq 1 \text{ et } \forall i \geq 1$$

En d'autres termes, cela signifie que conditionnellement à X_{t-i} , le processus de X_t est sans mémoire.

Après avoir décrit le processus *ARCH* et ses différentes propriétés, nous allons passer en revue le processus *GARCH*.

1.3.2 Test de racine unitaire ou test de stationnarité

C'est ici qu'on décide en général de la différentiation ou non de la série. Les tests principaux les plus utilisés dans la littérature sont les tests de **Dicky-Fuller** et de

Phillips-Perron pour lesquelles l'hypothèse nulle est la non stationnarité de la série étudiée. On effectue la régression suivante : $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$ et le processus est :

-stationnaire si $|\rho| < 1$

-explosif si $|\rho| > 1$

-intégré si $|\rho| = 1$.

1.3.3 Test de Dickey et Fuller augmenté

C'est la correction du test de **Dickey et Fuller**, qui prend en compte l'autocorrélation possible de la série différenciée par l'utilisation des valeurs retardées,

$$H_0 : X_t \text{ non stationnaire contre } H_1 : X_t \text{ stationnaire}$$

Dickey-Fuller considèrent trois modèles de base pour la série X_t , $t = 1, \dots, T$.

-Modèle [A] : Sans constante ni tendance déterministe :

$$(1 - \rho B) X_t = \varepsilon_t$$

-Modèle [B] : Avec constante sans tendance déterministe :

$$(1 - \rho B) (X_t - \mu) = \varepsilon_t$$

-Modèle [C] : Avec constante et tendance déterministe :

$$(1 - \rho B) (X_t - \alpha - \mu) = \varepsilon_t$$

et dans chacun des trois modèles, on suppose que $\varepsilon_t \rightarrow BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$. En pratique, on estime les modèles sous la forme suivante :

-Modèle [1] : Sans constante ni tendance déterministe :

$$(1 - B) X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

-Modèle [2] : Avec constante sans tendance déterministe :

$$(1 - B) X_t = \phi X_{t-1} + \gamma + \varepsilon_t$$

-Modèle [3] : Avec constante et tendance déterministe :

$$(1 - B) X_t = \phi X_{t-1} + \lambda + \delta t + \varepsilon_t$$

avec $\phi = \rho - 1$ et $\varepsilon_t \rightarrow BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$. On teste alors

$$H_0 : \phi = 0 \text{ (non stationnarité) contre } H_1 : \phi < 0 \text{ (stationnarité)}$$

la règle de décision est : Si la valeur calculée de la t - *statistique* associée à ϕ est inférieure à la valeur critique, on rejette l'hypothèse nulle de non stationnarité, si non on accepte l'hypothèse nulle de non stationnarité.

Ce test est relativement limité car il apparaît quasi-systématiquement une autocorrélation des résidus. Et pour résoudre ce problème d'autocorrélation, deux types de corrections ont été proposées : une correction paramétrique (**test de Dickey-Fuller augmenté**) et une correction non paramétrique (**test de Phillips-Perron**).

1.3.4 Tests de racine unitaire : les tests de phillips-Perron

Philips-Perron (1988) proposent une méthode non paramétrique pour corriger de la présence d'autocorrélation, sans avoir à ajouter des endogènes retardées comme dans la méthode de DF augmentée.

1.4 Modèles GARCH(p,q)

1.4.1 Présentation du processus GARCH

Le processus *GARCH* (Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity) a été introduit en 1986 par Bollerslev. Le processus GARCH est une extension du processus ARCH, il présente les mêmes propriétés et les mêmes fondements que le processus ARCH. Disons que la seule différence se situe au niveau de la définition. Le modèle *GARCH* a deux dimensions (p, q) alors que le modèle *ARCH* en a une (q) .

1.4.2 Description du processus GARCH

Ceci dit une variable X_t suit un processus *GARCH*(p, q) si :

$$X_t = z_t \sqrt{h_t} \tag{1.6}$$

avec

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \tag{1.7}$$

et z_t un bruit blanc faible. $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ et $\beta_i \geq 0$

Tout comme le processus $ARCH(q)$, le modèle $GARCH(p, q)$ présente aussi une moyenne conditionnelle et une moyenne non conditionnelle nulle. c'est à dire que

$$E[X_t] = 0 \quad (1.8)$$

$$E[X_t | X_{t-i}] = 0 \quad (1.9)$$

Comme précédemment, le modèle $GARCH(p, q)$ est également stationnaire au second ordre. Cela nécessite alors que l'inégalité suivante soit respectée :

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$$

Cette condition nécessaire et suffisante permet de valider la définition des moments d'ordre deux. Ainsi la variance non conditionnelle est constante dans le temps et se définit par :

$$V[X_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \right)} \quad (1.10)$$

Tandis que la variance conditionnelle se présente de la façon suivante

$$E[X_t | X_{t-i}] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

Enfin, on remarque tout comme pour le modèle $ARCH(q)$, les auto-covariances conditionnelles du processus $GARCH(p, q)$ sont nulles.

1.5 Estimation des paramètres ARCH

Pour comprendre cette approche, nous allons tout d'abord considérer le cas plus simple d'un processus *ARCH* pur pour X_t , sans régression ni composante *ARMA*. Nous étudierons ensuite le cas des processus *GARCH*, et enfin des modèles de régression avec erreur *GARCH* et les modèles *ARMA – GARCH*.

1.5.1 Estimation par maximum de vraisemblance

L'estimation des paramètres de modèles *ARCH* se base très souvent sur la maximisation de la fonction de vraisemblance. Par hypothèse X_t est conditionnellement gaussien. La vraisemblance associée à X_t conditionnellement au passé $X_{\underline{t-1}}$ est donc :

$$L(X_t | X_{\underline{t-1}}; \theta) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (1.11)$$

et dépend du vecteur de paramètres $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)^t$ à travers σ_t . La fonction de vraisemblance de $(X_1; \dots; X_T)^t$ conditionnelle à $X_0 = \emptyset$, est par conséquent

$$L_T(X_1, X_2, \dots, X_T | X_{\underline{t-1}}; \theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (1.12)$$

l'estimateur est alors défini comme le vecteur

$$\hat{\theta}_T = (\hat{\alpha}_{0;T}, \dots, \hat{\alpha}_{p;T})^t$$

qui maximise le logarithme de cette fonction de vraisemblance :

$$\hat{\theta}_T = \arg \max_{\theta} \ln L_T(X_1, X_2, \dots, X_T; \theta)$$

Sous diverses conditions de régularité, l'estimateur est convergent (**Weiss 1986**).

1.6 Variantes des processus ARCH

1.6.1 Modèle GARCH-M

On peut trouver plusieurs extensions des modèles *ARCH* et *GARCH* utilisées dans le domaine de la finance. **Engle-Lilien-Robbins** (1987) ont proposé des modèles *GARCH – M* (*General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity in Mean*) où la variance conditionnelle est une variable explicative de la moyenne conditionnelle. Ces processus semblent ainsi plus adaptés à une description de l'influence de la volatilité sur le rendement des titres ce qui paraît assez réaliste pour les cours boursiers.

Définition 1.5 *L'écriture du modèle GARCH – M porte sur la non-stationnarité de son processus de variance conditionnel et par une variance non conditionnelle infinie. Soit un processus y_t , d'espérance $\mathbb{E}[y_t] = 0$ (pourquoi), satisfaisant une représentation du type GARCH – M(p, q). Ce processus s'écrit sous la forme suivante :*

$$y_t = X_t b + \delta h_t + z_t \sqrt{h_t} = x_t b + \delta \text{Var}[\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}] + z_t \sqrt{h_t}$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (1.13)$$

et

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}] = 0 \quad (1.14)$$

$$\text{Var}[\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}] = \text{Var}[y_t / y_{t-1}] = h_t$$

En plus de la forme linéaire de l'écriture de y_t ci-dessus ; On peut envisager différentes variantes de la relation entre la variable dépendante y_t et la variance conditionnelle.

Par exemple, on peut considérer les cas suivants :

Forme Log-Linéaire :

$$y_t = X_t b + \delta \log h_t + \varepsilon_t \quad (1.15)$$

Forme Racine Carrée

$$w_t = X_t b + \delta \sqrt{h_t} + \varepsilon_t \quad (1.16)$$

1.6.2 Modèle IGARCH

Le modèle *IGARCH* (Integrated Gèneral Autoregressive Conditional heteroskedasticity) correspond au cas d'une racine unitaire dans la variance conditionnelle. C'est un modèle qui caractérisait par un effet de persistance dans la variance. C'est-à-dire qu'un choc sur la variance conditionnelle actuelle se répercute sur toutes les valeurs futures prévues.

L'étude de la stationnarité (au 2^{nd} ordre) d'un processus *GARCH* revient à démontrer que la variance inconditionnelle est asymptotiquement indépendante du temps (**Gourieroux**, 1992). Le processus ε_t étant une différence de martingale (admettant des composantes non corrélées de moyen nulle), on a la propriété suivante :

$$Var[X_t] = Var[\mathbb{E}(X_t|X_{\underline{t-1}})] + \mathbb{E}[Var(X_t|X_{\underline{t-1}})] = \mathbb{E}[h_t] \quad (1.17)$$

la proposition suivante permet de caractériser la notion de stationnarité asymptotique d'un processus $GARCH(p, q)$.

Proposition 1.6 *un processus ε_t satisfaisant une représentation $GARCH(p, q)$ telle que :*

$$Var[X_t|X_{\underline{t-1}}] = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i} \quad (1.18)$$

Avec $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$ et $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$, est asymptotiquement stationnaire au second ordre si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$$

En effet, nous avons vu dans la première section que l'on pouvait obtenir la représentation ARMA suivante sur le processus au carré ε_t^2 :

$$X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 + \mu_t - \sum_{j=1}^p \beta_j \mu_{t-j} \quad (1.19)$$

où :

$$\mu_t = X_t^2 - h_t = X_t^2 - Var(X_t/X_{\underline{t-1}}) \quad (1.20)$$

est un processus d'innovation pour X_t^2 .

On peut alors montrer que :

$$X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 + \mu_t - \sum_{j=1}^p \beta_j \mu_{t-j} \quad (1.21)$$

Par construction

$$\mathbb{E}[\mu_{t-i}] = \mathbb{E}[X_{t-i}^2] - \mathbb{E}[h_{t-i}] = 0$$

puisque nous avons vu que $Var[X_t] = \mathbb{E}[h_t]$, dès lors que ε_t est une différence de martingale. On a donc :

$$\mathbb{E}[X_t^2] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \mathbb{E}[X_{t-i}^2] \quad (1.22)$$

Dès lors, il suffit que les racines du polynôme retard défini par :

$$\Phi(L) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) L^i \quad (1.23)$$

soient toutes à l'extérieur du disque unité pour la suite :

$$\mathbb{E}[X_t^2] = Var[X_t]$$

Le processus est alors asymptotiquement stationnaire. Par conséquent un modèle $IGARCH(p, q)$ est défini par la non-stationnarité de son processus de variance conditionnelle.

Définition 1.7 *Un processus X_t satisfait une représentation $IGARCH(p, q)$ si et seulement si :*

$$Var[X_t/X_{t-1}] = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i}$$

avec

$$\alpha_0 \geq 0, \alpha_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, p \text{ et } \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$$

et

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{i=1}^q \beta_i = 1$$

L'exemple le plus simple est bien évidemment le processus $IGARCH(1, 1)$ proposé notamment par **Nelson** (1990) :

$$Var[X_t/X_{t-1}] = h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Pour ce processus les prévisions de la variance conditionnelles aux différents horizons k sont de la forme :

$$\mathbb{E}[h_{t+k}/X_t] = (\alpha_1 + \beta_1)^k h_t + \alpha_0 \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_1 + \beta_1)^i \quad (1.24)$$

Ainsi, lorsque $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, le processus X_t est stationnaire et un choc sur la variance conditionnelle h_t a une influence décroissante et asymptotiquement négligeable sur h_{t+k} quand k tend vers l'infini. Par contre, lorsque $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, on a :

$$\mathbb{E}[h_{t+k} | X_t] = h_t + \alpha_0 k \quad (1.25)$$

diverge avec k .

1.7 Modèles ARCH/GARCH asymétriques

La seconde grande approche couvre les modèles $ARCH$ non linéaires et plus particulièrement la prise en compte des phénomènes asymétriques. L'idée est que l'effet hétéroscédastique n'est sans doute pas le même suivant que l'erreur précédente est positive ou négative. Deux grandes classes de modèles ont été proposés :

-**Nelson** (1990) s'est intéressé aux évolutions asymétriques de la variance à l'aide des modèles $EGARCH$ (Exponential Generalized AutoRegressive Conditional Hete-

roskedastic).

-**Engle et Bollerslev** (1986) ont étudié les models *ARCH* à seuils (*TARCH*) où la variance est une focntion linéaire définie par morceaux qui permettent différentes fonctions de volatilité selon le signe et la valeur des chocs. **Rabemananjara** et **Zakoian** (1991) ont proposé une généralisation avec les modèles *TGARCH*.

1.7.1 Modèle EGARCH

Proposé par **Nelson** (1991), le processus *Exponential GARCH* ou *EGARCH*(p, q) donne à la variance conditionnelle la définition suivante :

Définition 3.5 : un processus ε_t satisfait une représentation *EGARCH*(p, q) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t} \\ \log(h_t) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(h_{t-i}) \end{aligned} \quad (1.26)$$

où le résidu normalisé z_t est un bruit faible et où la fonction $g(\cdot)$ vérifie :

$$g(z_{t-i}) = \theta z_{t-i} + \gamma(|z_{t-i}| - \mathbb{E}|z_{t-i}|) \quad (1.27)$$

Si l'on pose $\alpha_i = \theta \alpha_i$ et $b_i = \alpha_i \gamma_i$ la variance conditionnelle de ε_t peut se réécrire sous la forme :

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i z_{t-i} + \sum_{i=1}^q b_i (|z_{t-i}| - \mathbb{E}(|z_{t-i}|)) + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(h_{t-i}) \quad (1.28)$$

Dans le cas d'un processus $EGARCH(1, 1)$, nous avons donc :

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1} + b_1(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z_{t-1}|]) + \beta_1 \log(h_{t-1}) \quad (1.29)$$

Deux remarques doivent être faites à ce niveau :

Remarque 1.8 *l'écriture porte sur le logarithme de la variance conditionnelle h_t de ε_t , en conséquence aucune restriction n'a besoin d'être imposée sur les différents paramètres de l'équation pour assurer la positivité de h_t .*

Remarque 1.9 *la variance conditionnelle h_t fait apparaître un effet de signe, correspondant à $\alpha_1 z_{t-1}$, et un effet d'amplitude mesuré par $b_1(|z_{t-1}| - \mathbb{E}[|z_{t-1}|])$. Dans ces expressions, la valeur de $\mathbb{E}[|z_{t-1}|]$ dépend bien évidemment de la loi supposée de z_t . On a ainsi pour les trois distributions : loi Gaussienne, loi de Student, loi de Student dissymétrique et standardisée.*

1.7.2 Modèle APARCH

Introduit par **Ding, Granger** et **Engle** (1993) le modèle $APARCH$ est l'un des plus intéressants notamment parce qu'il admet comme cas particuliers plusieurs autres processus existants.

Définition 1.10 *Un processus ε_t satisfait une représentation $APARCH(p, q)$ si et seulement si :*

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$$

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-1} | -\gamma_i \varepsilon_{t-1})^\delta + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^\delta$$

où $\sigma_t = \sqrt{h_t}$ est l'écart-type conditionnel de ε_t , et z_t est un bruit blanc faible. La positivité σ_t est assurée par les conditions : $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ et $-1 < \gamma_i < 1, i = 1, \dots, q, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \delta > 0$.

La stationnarité au second ordre d'un processus *APARCH* nécessite :

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i \mathbb{E} [(|\varepsilon_{t-1} | -\gamma_i \varepsilon_{t-1})^\delta] + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^\delta < 1 \quad (1.30)$$

Dans le cas d'un processus *APARCH*(1, 1) on a :

$$\sigma_1^\delta = \alpha_0 + \alpha_1 (|\varepsilon_{t-1} | -\gamma_1 \varepsilon_{t-1})^\delta + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta \quad (1.31)$$

On remarque en particulier que :

- un processus *APARCH*(1, 1) correspond à un processus *ARCH* lorsque :

$$\delta = 2 \text{ et } \gamma_i = 0 \text{ et } \beta_1 = 0$$

- un processus *APARCH*(1, 1) correspond à un processus *GARCH* lorsque :

$$\delta = 2 \text{ et } \gamma_i = 0$$

1.7.3 Modèles TGARCH

Les modèles *TARCH* (**Zakoian**, 1991) et *TGARCH* (**Zakoian**, 1994) sont l'un des modèles asymétriques, définis de la façon suivante :

Définition 1.11 *un processus ε_t satisfait une représentation TGARCH si et seulement si :*

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$$

Un processus ε_t satisfait une représentation $TGARCH(1, 1)$ si et seulement si :

$$\sigma_1^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 I_{\varepsilon_{t-i} < 0} + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 I_{\varepsilon_{t-i} > 0} \quad (1.32)$$

où le résidu normalisé z_t est un bruit faible et $I_{\varepsilon_{t-i} < 0}$ désigne la fonction indicatrice telle que $I_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 1$ si $\varepsilon_{t-i} < 0$ et $I_{\varepsilon_{t-i} < 0} = 0$ sinon. Dans le cas d'un processus $TGARCH(1, 1)$ on a :

$$\sigma_1^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 I_{\varepsilon_{t-1} < 0} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 I_{\varepsilon_{t-1} > 0} \quad (1.33)$$

Ce type de modèle permet de prendre en compte une dissymétrie de l'information : les agents suivent un comportement différent selon que la variable à expliquer est à la hausse ou à la baisse (une erreur (-) va entraîner un plongeon bien plus rapide que l'erreur (+) c'est pour cela que les cours boursiers parfois chutent beaucoup avant de remonter).

1.8 Value at Risk (VaR)

1.8.1 Introduction

Le risque de marché correspond à un risque de perte des portefeuilles des investisseurs dû aux variations des marchés financiers : marchés des instruments de base

(actions, obligations, devises, matières premières), mais marchés des produits dérivés (contrats à terme, options). Pour gérer le risque de marché, il faut donc mesurer de manière précise ce risque extrême. La mesure qui répond à cela est la VaR (Value at Risk). La notion de Value at Risk ou valeur ajustée au risque s'est originellement développée dans les milieux financiers avant d'être largement reprise dans les problématiques assurantielles.

1.8.2 Historique

La notion de Value-at-Risk (VaR) est apparue pour la première fois dans le secteur de L'assurance. A la fin des années 1980, la banque Bankers Trust fut l'une des premières institutions à utiliser cette notion sur les marchés financiers aux Etats-Unis, mais c'est principalement la banque JP Morgan qui dans les années 90 a popularisée ce concept notamment grâce à son système RiskMetrics. La Value-at-Risk est ensuite devenue, en moins d'une dizaine d'années, une mesure de référence du risque sur les marchés financiers, consacrée notamment par la réglementation prudentielle définie dans le cadre des accords de Bâle II

1.8.3 Définition de la VaR

Définition 1.12 (mathématique) *On appelle Value-at-Risk de niveau $\alpha \in (0; 1)$ associée au risque X , le quantile de niveau α ,*

$$VaR(X; \alpha) = x_\alpha \text{ où } P(X \leq x_\alpha) = \alpha \quad (1.34)$$

ou encore

$$VaR(X; \alpha) = \inf\{x, P(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha) = Q(\alpha)$$

où F_X^{-1} désigne la fonction quantile de la loi de X .

Définition 1.13 (économie) *La value at risk (VaR) représente la perte potentielle maximale d'un investisseur sur la valeur d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs financiers compte tenu d'un horizon de détention et d'un intervalle de confiance. Dans un autre sens, elle correspond au montant de pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité donnée sur un horizon de temps donné. Elle se calcule à partir d'un échantillon de données historiques ou se déduit des lois statistiques habituelles (loi normale). Originnaire du secteur de l'assurance, cette technique a été importée en 1980 sur les marchés financiers aux États-Unis par la banque Banker Trust, puis popularisée par JP Morgan et son service Riskmetrics.*

1.9 Méthodes d'estimation de la Value at Risk

Les méthodes de calcul sont déterminées par la distribution choisie pour modéliser les pertes et profits du portefeuille. maintenant, nous allons présenter les méthodes d'estimation de la VaR les plus utilisées.

1.9.1 L'analyse historique

La méthode d'estimation de la VaR par analyse historique repose sur l'hypothèse que la distribution des variations de prix observée à partir de l'historique va se reproduire dans l'avenir. Dans les faits, cela revient à supposer que les variations de prix des différents facteurs de risque sont stationnaires.

Plus concrètement, la détermination de la VaR se déroule comme suit :

- Calculer la valeur actuelle du portefeuille.
- Recueillir les rendements historiques pour chaque facteur de risque impliqué (cours des actions, taux d'échange, etc.).
- Calculer les valeurs «historiques» des pertes et profits du portefeuille ; les ranger par ordre croissant.
- Calculer la VaR, en fonction du niveau de confiance et du nombre de données historiques utilisées.

Remarque 1.14 *Le principal reproche que l'on peut formuler à l'encontre de cette méthode est le suivant :*

il suffit qu'un petit nombre d'observations sortent de l'ordinaire pour que la valeur de la VaR soit influencée pendant une longue période (égale à la durée des historiques). Ainsi, une erreur de mesure ou une valeur exceptionnelle peuvent avoir des effets désastreux sur l'estimation de la VaR. En revanche, cette méthode possède l'avantage d'être une méthode simple, flexible

et robuste. Les hypothèses sont peu exigeantes et les données nécessaires peu nombreuses.

1.9.2 Méthodes paramétrique

La méthode variance-covariance

On fait l'hypothèse que les rendements du portefeuille et des facteurs de risque ont des distributions normales. Même si cette hypothèse n'est pas empiriquement justifiée, elle permet de simplifier énormément les calculs. Voici ses principales étapes :

- Calculer la valeur actuelle V_0 du portefeuille.
- Estimer la moyenne m et la volatilité σ des rendements futurs du portefeuille (à partir de données historiques) ;
- La VaR du portefeuille est donné par la formule suivante :

$$VaR = V_0(-m + z_q\sigma) \quad (1.35)$$

Où z_q est égal à 1.65 si le niveau de confiance est 95% et égal à 2.33 si le niveau de confiance est 99%.

1.9.3 La méthode de RiskMetrics

On procède comme pour la méthode variance-covariance, mais avec une autre estimation de la volatilité. L'idée de base est de

faire varier la volatilité dans le temps, en accordant un plus grand poids aux données les plus récentes.

On peut ainsi s'adapter plus rapidement aux changements des conditions du marché et mieux tenir compte des événements extrêmes. Plus concrètement, on commence d'abord par calculer la volatilité historique. On parcourt ensuite chronologiquement les rendements historiques en actualisant la volatilité à l'aide de la formule :

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda)r_{n-1}^2 \quad (1.36)$$

Remarque 1.15 *Le principal point fort de cette méthode repose sur la rapidité et la simplicité des calculs qui nécessitent seulement une matrice de variance-covariance entre les différents actifs présents dans le portefeuille.*

1.9.4 Méthode de simulation de Monté Carlo

La méthode dite « Simulation de Monte Carlo », spécifie un modèle pour le comportement de la série de rendement du portefeuille. Ayant défini le processus de Génération aléatoire des prix ou rendement des prix, la simulation de Monte Carlo, fourni les valeurs possible du portefeuille, à un horizon h , après l'instant T .

La méthodologie SMC est conduite comme suit :

1- Spécifier le processus stochastique, générateur des séries de rendement, de Chaque composant du portefeuille, et le processus générateur des corrélations. dans le cas d'un portefeuille multi actions.

2- Simuler aléatoirement les rendements de chaque actif.

3- Obtenir les prix de chaque actif $P_j(t)$ et Calculer la valeur du portefeuille

$$\sum n_j p_j(t) = p_p(t). \quad (1.37)$$

4- Répéter les étapes 2 et 3, afin d'obtenir une distribution des valeurs du Portefeuille.

5- Mesurer la VaR, tel que elle représente la valeur négative du $(1 - \alpha)$ percentile de la distribution simulée des valeurs du portefeuille.

Chapitre 2

Modèles de Heston et retour à la moyenne

Ce chapitre se concentre sur les swaps de volatilité sous le modèle de Heston et la tarification des swaps de variance et de volatilité dans le marché de pétrole dans certaines étapes, que nous avons considérées de manière similaire dans le travail de Swishchuk [33] dont nous avons trouvé une formule de swap de variance explicite et une formule de swap de volatilité de forme fermée pour l'actif énergétique avec une volatilité stochastique qui suit le modèle GARCH (1,1) en temps continu (retour à la moyenne). Dans cette étude, un exemple numérique de prix du pétrole (août 1987-octobre 2016) a été donné.

2.1 Swaps de volatilité

Tout d'abord, nous rappelons en bref, les swaps, swaps de variance et de volatilité

Définition 2.1 *Swaps ont été introduits dans les années 1980. Un contrat de swap est un accord entre deux parties d'échanger des flux monétaires à une ou plusieurs dates futures telles que définies dans Tuckman (1996). Dans ce contrat une partie accepte de payer un montant fixe à une contrepartie qui à son tour les honneurs de l'accord en payant un montant variable, qui dépend du niveau de certains sous-jacent spécifique.*

On rappelle qu'un swap de variance est un contrat permettant d'échanger (to swaps) un montant de variance réalisée sur un laps de temps donné, contre un montant de variance fixée à l'avance. Le swap de volatilité est un contrat à terme sur la volatilité annualisée dans lequel un investisseur qui paye un montant fixe K_{vol} (un euro) comme nominale à l'échéance, reçoit le montant variable σ_R^2 (un euro) comme nominal.

Exemple 2.2 *Pour fixer les idées, supposons que la valeur notionnelle du swap soit de 50000 euros et la variance fixe du swap K_{var} , dont la durée est ici d'un an, est établie à 15 /. Si la variance réalisée du swap s'est établie à 10/ durant la durée du swap, le négociant devra payer au fonds 250000 euros. Par ailleurs, si la volatilité réalisée s'est plutôt avérée de 20/ durant l'année le fond devra payer 250000 euros au négociant, ce qui le compensera en tout ou en partie pour les pertes qu'il subies lors de l'exercice des options qu'il a écrites. Le swap de volatilité, fonctionne sur le*

meme principe que le swap de variance sauf que sa cote est l'ecart type des rendements réalisées d'un titre financier et non sa variance, comme c'est le cas pour le swap de variance. Nous savons que la cote d'un swap de variance est reliée à celle de swap de volatilité par un ajustement dit de convexité.

2.2 Swaps de volatilité sous le modèle de Heston

2.2.1 Le modele à volatilité stochastique

Soit $(\Omega, F, F_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré de filtration F_t , $t \in [0; T]$. On considère le modèle de Heston avec volatilité stochastique dans le cas de risque neutre. Les dynamique du prix S_t et la variance sont décrit par les équations différentielles stochastiques suivantes :

$$\begin{cases} dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t dw_1(t) \\ d\sigma_t^2 = k(\theta^2 - \sigma_t^2)dt + \xi \sigma_t dw_2(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où

r_t : le taux d'interet déterministe

$\sigma_0 > 0$ et $\theta > 0$ la moyenne de la volatilité à courte terme et long terme respectivement,

$k > 0$: la vitesse de retour à la moyenne,

$\xi > 0$: la volatilité de la volatilité

$w_1(t)$ et $w_2(t)$ sont deux mouvements Browniens standards indépendants.

On peut réécrire le système (2.1) comme suit :

$$\begin{cases} dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t dw_1(t) \\ d\sigma_t^2 = k(\theta^2 - \sigma_t^2)dt + \rho\xi\sigma_t dw_1(t) + \xi\sqrt{1-\rho}\sigma_t dw(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

où $w(t)$ est le mouvement Brownien qui est indépendant de $w_1(t)$. Soit $cov(dw_1(t), dw_2(t)) = \rho dt$. On peut transformer le système (2.2) au système (2.1) si nous remplaçons $\rho dw_1(t) + \sqrt{1-\rho}dw(t)$ par $dw_2(t)$.

2.2.2 Expression explicite et propriétés de σ_t^2

Dans ce paragraphe, nous reformulons les résultats obtenus en [32], qui sont nécessaires à l'étude de la variance, les swaps de volatilité, le prix du pseudo-variance, pseudo-volatilité et les problèmes des marchés financiers avec volatilité déterministe en fonction de temps, proposés par He et Wang, [22]. Cette approche a été appliquée pour la première fois à l'étude de la stabilité stochastique des processus de Cox-Ingersoll-Ross [33]. Le processus de prix d'actifs de Heston à une variance σ_t^2 suit le processus de Cox-Ingersoll-Ross [25], ce processus est décrit par la deuxième équation du système (2.1). Si la volatilité σ_t suit le processus Ornstein-Uhlenbeck [29], alors la formule d'Ito nous informe que la variance σ_t^2 suit exactement le processus décrit par la deuxième équation du système (2.1).

Commençons par définir le processus, et la fonction suivantes

$$v_t := e^{kt}(\sigma_t^2 - \theta^2) \quad (2.3)$$

$$\Phi(t) := \xi^{-2} \int_0^t (e^{k\Phi(s)} (\sigma_0^2 - \theta^2 + \tilde{w}_2(t) + \theta^2 e^{2k\Phi(s)})^{-1} ds \quad (2.4)$$

Définition 2.3 On définit $B(t) := \tilde{w}_2(\Phi_t^{-1})$, $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{\Phi_t^{-1}}$ et $t \wedge s := \min(t, s)$ où , Φ_t^{-1} est la fonction reciproque de Φ_t .

Les proprietes de $B(t)$ sont les suivantes :

- a) $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -martingale et $E(B(t)) = 0$;
- b) $E(B^2(t)) = \xi^2 (\frac{e^{kt}-1}{k} (\sigma_0^2 - \theta^2) + \frac{e^{2kt}-1}{2k} \theta^2)$;
- c) $E(B(s)B(t)) = \xi^2 (\frac{e^{k(t \wedge s)}-1}{k} (\sigma_0^2 - \theta^2) + \frac{e^{2k(t \wedge s)}-1}{2k} \theta^2)$.

Lemme 2.4 On a les considérations suivantes

a)

$$\sigma_t^2 = e^{-kt} (\sigma_0^2 - \theta^2 + B(t)) + \theta^2, \quad (2.5)$$

b)

$$E(\sigma_t^2) = e^{-kt} (\sigma_0^2 - \theta^2) + \theta^2, \quad (2.6)$$

c)

$$\begin{aligned} E(\sigma_s^2 \sigma_t^2) &= \xi^2 e^{-k(t+s)} \left(\frac{e^{k(t \wedge s)} - 1}{k} (\sigma_0^2 - \theta^2) + \frac{e^{2k(t \wedge s)} - 1}{2k} \theta^2 \right) + e^{-k(t+s)} (\sigma_0^2 - \theta^2)^2 \\ &\quad + e^{-kt} (\sigma_0^2 - \theta^2) \theta^2 + e^{-ks} (\sigma_0^2 - \theta^2) \theta^2 + \theta^4. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Démonstration.

a) Utilisons la deuxième équation du système (2.1) et la relation (1) avec

$$\sigma_t = \sqrt{e^{-kt} v_t + \theta^2},$$

on obtient l'équation de dv_t :

$$dv_t = d(e^{kt}(\sigma_t^2 - \theta^2)) = k(\sigma_t^2 - \theta^2)e^{kt}dt + e^{kt}d(\sigma_t^2) \quad (3)$$

$$= k(\sigma_t^2 - \theta^2)e^{kt}dt + e^{kt} [k(\theta^2 - \sigma_t^2)dt + \xi\sigma_t dw_2(t)]$$

$$dv_t = \xi e^{kt} \sqrt{e^{-kt}v_t + \theta^2} dw_2(t). \quad (4)$$

Maintenant, on utilise l'approche du changement de temps (voir Ikeda et Watanabe(1981)),

$$dv_t = \sigma(t, v_t)dw_2(t), \text{ where } \sigma(t, v_t) = \xi e^{kt} \sqrt{e^{-kt}v_t + \theta^2},$$

on obtient la solution de l'équation (4) :

$$v_t = \sigma_0^2 - \theta^2 + B(t). \quad (5)$$

Substituons (5) en (4) on trouve :

$$\sigma_t^2 = e^{-kt}(\sigma_0^2 - \theta^2 + B(t)) + \theta^2.$$

b) On a

$$E(\sigma_t^2) = E(e^{-kt}(\sigma_0^2 - \theta^2 + B(t)) + \theta^2),$$

Utilisons les propriétés de $B(t)$, on obtient :

$$E(\sigma_t^2) = e^{-kt}(\sigma_0^2 - \theta^2) + \theta^2.$$

c) Nous avons

$$E(\sigma_s^2 \sigma_t^2) = E((e^{-ks}(\sigma_0^2 - \theta^2 + B(s)) + \theta^2) (e^{-kt}(\sigma_0^2 - \theta^2 + B(t)) + \theta^2)),$$

Utilisons les propriétés de $B(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} E(\sigma_s^2 \sigma_t^2) &= \xi^2 e^{-k(t+s)} \left(\frac{e^{k(t \wedge s)} - 1}{k} (\sigma_0^2 - \theta^2) + \frac{e^{2k(t \wedge s)} - 1}{2k} \theta^2 \right) + e^{-k(t+s)} (\sigma_0^2 - \theta^2)^2 \\ &\quad + e^{-kt} (\sigma_0^2 - \theta^2) \theta^2 + e^{-ks} (\sigma_0^2 - \theta^2) \theta^2 + \theta^4. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.5 *On a*

a)

$$E(V) = \frac{1 - e^{-kT}}{kT} (\sigma_0^2 - \theta^2) + \theta^2, \quad (6)$$

b)

$$\text{Var}(V) = \frac{\xi^2 e^{-2kT}}{2k^3 T^2} [(2e^{2kT} - 4kT e^{kT} - 2)(\sigma_0^2 - \theta^2) + (2kT e^{2kT} - 3e^{2kT} + 4e^{kT} - 1)\theta^2]. \quad (7)$$

Démonstration.

a) Nous obtenons la valeur moyenne de V :

$$E(V) = \frac{1}{T} \int_0^T E(\sigma_t^2) dt$$

et d'après le lemme 1, on obtient :

$$E(V) = \frac{1 - e^{-kT}}{kT} (\sigma_0^2 - \theta^2) + \theta^2.$$

b) La variance de V est égale à : $\text{Var}(V) = E(V^2) - E^2(V)$, le moment d'ordre 2 ,

obtenu en appliquant la formule (3) du lemme 1 :

$$\begin{aligned} E(V^2) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E(\sigma_t^2 \sigma_s^2) dt ds \\ &= \frac{\xi^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \left[e^{-k(t+s)} \left(\frac{e^{k(t \wedge s)} - 1}{k} (\sigma_0^2 - \theta^2) + \frac{e^{2k(t \wedge s)} - 1}{2k} \theta^2 \right) \right] dt ds + E^2(V) \end{aligned} \quad (8)$$

Par (8), et la formule de la variance, on trouve :

$$Var(V) = \frac{\xi^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \left[e^{-k(t+s)} \left(\frac{e^{k(t \wedge s)} - 1}{k} (\sigma_0^2 - \theta^2) + \frac{e^{2k(t \wedge s)} - 1}{2k} \theta^2 \right) \right] dt ds$$

après les calculs, nous obtenons :

$$Var(V) = \frac{\xi^2 e^{-2kT}}{2k^3 T^2} \left[(2e^{2kT} - 4kT e^{kT} - 2)(\sigma_0^2 - \theta^2) + (2kT e^{2kT} - 3e^{2kT} + 4e^{kT} - 1)\theta^2 \right]$$

■

Corollaire 2.6 *Si k est très large, on obtient :*

$$E(V) = \theta^2 \text{ et } Var(V) = 0.$$

Démonstration. L'idée est de faire le passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$. ■

Remarque 2.7 *Dans ce cas la maturité de swap T n'influence pas $E(V)$ et $Var(V)$.*

2.3 Modèle de $GARCH(1, 1)$ et swap de volatilité

Le modèle de GARCH est nécessaire à la fois pour le swap de variance et le swap de volatilité. Le modèle de la variance dans une version continue pour le modèle de Heston est

$$d\sigma_t^2 = k(\theta^2 - \sigma_t^2)dt + \xi\sigma_t dw_2(t)$$

La version discrète du processus $GARCH(1, 1)$ est décrite par Engle et Mezriche

$$V_{n+1} = (1 - \alpha - \beta)V + \alpha U_n^2 + \beta V_n$$

où

V : la variance a long terme

U_n : la dérive ajustée des rendements des actions au moment n

α : le poids attribué à U_n^2

β : le poids attribué à V_n

En outre, nous utilisons la relation suivante pour calculer les paramètres discrets de $GARCH(1, 1)$, où

$$V = \frac{C}{1 - \alpha - \beta}$$

$$k = \frac{1 - \alpha - \beta}{\Delta t} \left(\theta = \frac{V}{\Delta t_L}, \sigma_0 = \frac{V}{\Delta t_S} \right)$$

$$\xi^2 = \frac{\alpha^2 (K - 1)}{\Delta t}$$

Où $\Delta t_L = \frac{1}{252}$, 252 jours de bourse pour une année donnée

$\Delta t_S = \frac{1}{63}$, 63 jours de bourse pour 3 mois

Maintenant, nous allons discuter brièvement la validité de l'hypothèse que le processus risque au neutre de la variance instantanée est une limite en temps continue des processus de $GARCH(1, 1)$. Il n'est bien connu que cette limite à la propriété que l'augmentation de la variance instantanée est conditionnellement non corrélée avec le rendement de l'actif sous-jacent. Ce qui implique malheureusement que, à chacun échéance T , la volatilité implicite est symétrique. Par conséquent, pour les actifs dont les options sont toujours à pris avec un sourire symétrique, ces observations peuvent être utilisé pour calibrer d'abord le modèle ou comme un test de validité du modèle. Il est à noter qu'il n'est pas approprié d'utiliser les volatilités implicites à la monnaie en général pour le prix d'un swap de volatilité.

Cependant notre $GARCH(1, 1)$ rapprochant devient assez robuste.

2.4 Modèle retour à la moyenne

cas déterministe :

$$d\sigma^2(t) = a(L - \sigma^2(t))dt$$

où

$a > 0$: Taux du retour à la moyenne

L : niveau de retour à la moyenne (ou niveau d'équilibre)

quand $\sigma^2(t) > L$, le terme dérive est négatif, entraînant un retrait vers le niveau

d'équilibre ;

si la variable $\sigma^2(t) < L$, le terme dérive est positif, tirant $\sigma^2(t)$ revenir à la valeur d'équilibre plus élevée.

cas stochastique :

$$d\sigma^2(t) = a(L - \sigma^2(t))dt + \gamma\sigma^2(t)dW_t \quad (2.8)$$

un processus stochastique du retour à la moyen a un terme de dérive qui ramène la variable à un certain niveau d'équilibre. Le résultat final est que la variable tend à osciller autour de cet équilibre.

chaque fois que le terme stochastique rend la variable éloignée de l'équilibre, le terme déterministe agira de telle sorte que la variable commencera à revenir à l'équilibre

terme stochastique :

$$\gamma\sigma^2(t)dW_t$$

où

γ : volatilité de la volatilité $\sigma(t)$

W_t : processus standard de wiener $W_t = N(0, \sqrt{t})$

2.4.1 Solution explicite du modèle retour à la moyen

$$V_t := e^{at}(\sigma^2(t) - L) \quad (2.9)$$

Ensuite, de (2.9) et (2.8) nous obtenons

$$dV_t := ae^{at}(\sigma^2(t) - L)dt + e^{at}d\sigma^2(t) = \sigma(V_t + e^{at}L)dW_t \quad (2.10)$$

Utilisation de l'approche de changement de temps dans l'équation (2.10) (Voir IKEDA et Watanabe (1981) ou Elliot (1982)) on obtient la solution suivante de l'équation (2.10)

$$V_t = (\sigma^2(0) - L + W(\phi_t^{-1})),$$

Où (voir (2.9)),

$$\sigma^2(t) = e^{-at}[\sigma^2(0) - L + W(\phi_t^{-1})] + L, \quad (2.11)$$

Où $W(t)$ est un F_t -Processus de Wiener unidimensionnel standard mesurable, ϕ_t^{-1} est une fonction inverse pour ϕ_t :

$$\phi_t = \gamma^2 \int_0^t (\sigma^2(0) - L + W(s) + e^{a\phi_s} L)^{-2} ds. \quad (2.12)$$

On remarque que

$$\phi_t^{-1} = \gamma^2 \int_0^t (\sigma^2(0) - L + W(\phi_t^{-1}) + e^{as} L)^2 ds, \quad (2.13)$$

Qui découle de (2.12).

2.4.2 Quelques propriétés de modèle retour à la moyenne à la volatilité stochastique $\sigma^2(t)$

À partir de (2.11), nous obtenons la valeur moyenne du premier moment pour la volatilité stochastique retour à la moyenne $\sigma^2(t)$:

$$E\sigma^2(t) = e^{-at}[\sigma^2(0) - L] + L. \quad (2.14)$$

Cela signifie que $E\sigma^2(t) \longrightarrow L$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Nous avons besoin de cette valeur pour évaluer le swap de variance.

$$E\sigma^2(t) = (e^{-at}(\sigma^2(0) - L) + L)^2 + \gamma^2 e^{-2at} [(\sigma^2(0) - L)^2 \frac{e^{\gamma^2 t} - 1}{\gamma^2} + \frac{2L(\sigma^2(0) - L)(e^{at} - e^{\gamma^2 t})}{a - \gamma^2} + \frac{L^2(e^{2at} - e^{\gamma^2 t})}{2a - \gamma^2}]$$

$$\text{Var}(\sigma^2(t)) = E\sigma^2(t)^2 - (E\sigma^2(t))^2$$

$$= \gamma^2 e^{-2at} [(\sigma^2(0) - L)^2 \frac{e^{\gamma^2 t} - 1}{\gamma^2} + \frac{2L(\sigma^2(0) - L)(e^{at} - e^{\gamma^2 t})}{a - \gamma^2} + \frac{L^2(e^{2at} - e^{\gamma^2 t})}{2a - \gamma^2}].$$

$$E\sigma^2(t)\sigma^2(s) = e^{-a(t+s)}(\sigma^2(0) - L)^2 + e^{-a(t+s)} \left\{ \gamma^2 [(\sigma^2(0) - L)^2 \frac{e^{\gamma^2(t \wedge s)} - 1}{\gamma^2} \right.$$

$$\left. + \frac{2L(\sigma^2(0) - L)(e^{a(t \wedge s)} - e^{\gamma^2(t \wedge s)})}{a - \gamma^2} + \frac{L^2(e^{2a(t \wedge s)} - e^{\gamma^2(t \wedge s)})}{2a - \gamma^2} \right\}$$

$$+ e^{-at}(\sigma^2(0) - L)L + e^{-as}(\sigma^2(0) - L)L + L^2.$$

2.4.3 Variance Swap sous le modèle retour à la moyenne

Calculer le swap de variance pour $\sigma^2(t)$ nous avons besoin $E\sigma^2(t)$ De (2.14) il s'ensuit que

$$E\sigma^2(t) = e^{-at}[\sigma^2(0) - L] + L.$$

puis $E\sigma_R^2 := EV$ Prend les mesures suivantes :

$$E\sigma_R^2 := EV := \frac{1}{T} \int_0^T E\sigma^2(t)dt = \frac{(\sigma^2(0) - L)}{aT} (1 - e^{-aT}) + L. \quad (2.15)$$

Rappeler que

$$V := \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t)dt.$$

2.4.4 Volatilité Swap sous le modèle retour à la moyenne

Pour calculer le swap de volatilité pour $\sigma^2(t)$ nous avons besoin $E\sqrt{V} = E\sqrt{\sigma_R}$ et cela signifie que nous sommes plus que juste $E\sigma^2(t)$ Parce que la volatilité réalisée $\sigma_R := \sqrt{V} = \sqrt{\sigma_R^2}$ en utilisant Brockhaus-long approximation on obtient alors

$$E\sqrt{V} \approx \sqrt{EV} - \frac{var(V)}{8(EV)^{3/2}}. \quad (2.16)$$

Nous avons EV calculé en (2.15). Nous avons besoin

$$Var(V) = EV^2 - (EV)^2 \quad (2.17)$$

De (2.15) il s'ensuit que (EV) a la form :

$$(EV)^2 = \frac{(\sigma^2(0) - L)^2}{a^2T^2} (1 - e^{-aT})^2 + 2 \frac{(\sigma^2(0) - L)}{aT} (1 - e^{-aT})L + L^2. \quad (2.18)$$

Calculons EV^2 :

$$\begin{aligned}
EV^2 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E\sigma^2(t)\sigma^2(s) dt ds \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [e^{-a(t+s)}(\sigma^2(0)-L)^2 + e^{-a(t+s)}\{\gamma^2[(\sigma^2(0)-L)^2 \frac{e^{\gamma^2(t\wedge s)} - 1}{\gamma^2} + \frac{2L(\sigma^2(0)-L)(e^{a(t\wedge s)} - e^{\gamma^2(t\wedge s)})}{a - \gamma^2} \\
&\quad + e^{-at}(\sigma^2(0)-L)L + e^{-as}(\sigma^2(0)-L)L + L^2] dt ds \tag{2.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(V) &= EV^2 - (EV)^2 \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T e^{-a(t+s)}\{\gamma^2[(\sigma^2(0)-L)^2 \frac{e^{\gamma^2(t\wedge s)} - 1}{\gamma^2} + \frac{2L(\sigma^2(0)-L)(e^{a(t\wedge s)} - e^{\gamma^2(t\wedge s)})}{a - \gamma^2} + \frac{L^2(e^{2a(t\wedge s)} - e^{\gamma^2(t\wedge s)})}{2a - \gamma^2} \\
&= \frac{\sigma^2(0) - L}{T^2} \int_0^T \int_0^T e^{-a(t+s)}(e^{\gamma^2(t\wedge s)} - 1) dt ds + \frac{2L\gamma^2(\sigma^2(0) - L)}{(a^2 - \gamma^2)T^2} \int_0^T \int_0^T e^{-a(t+s)}(e^{a(t\wedge s)} - e^{\gamma^2(t\wedge s)}) dt ds \\
&\quad + \frac{\gamma^2 L^2}{(2a - \gamma^2)T^2} \int_0^T \int_0^T e^{-a(t+s)}(e^{2a(t\wedge s)} - e^{\gamma^2(t\wedge s)}) dt ds. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

2.4.5 Modèle de volatilité stochastique à risque neutre avec retour à la moyen

Dans cette section, nous allons obtenir les valeurs des swaps de variance et de volatilité sous une mesure du risque neutre P^*

$$a \longrightarrow a^* := a + \lambda\sigma, \quad L \longrightarrow L^* := \frac{aL}{a + \lambda\sigma}$$

où λ est un prix de marché du risque

2.4.6 Modèle de volatilité stochastique à risque neutre

En considérant le modèle (2.8)

$$d\sigma^2(t) = a(L - \sigma^2(t))dt + \sigma\sigma^2(t)dW_t \quad (2.21)$$

Nous voulons trouver une probabilité P^* équivalent à P , Sous lequel le processus $e^{-rt}\sigma^2(t)$ est une martingale, où $r > 0$ est un taux d'intérêt constant. L'hypothèse que nous avons faite sur la filtration $(F_t)_{t \in [0, T]}$ Nous permet d'exprimer la densité de la probabilité P^* par rapport à P . Nous désignons cette densité par L_T . Il est bien connu qu'il existe un processus adopté $(q(t))_{t \in [0, T]}$ De sorte que, pour tous $t \in [0, T]$,

$$L_t = e^{\int_0^t q(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t q^2(s)ds} \quad a.s.$$

Dans ce cas

$$\frac{dP^*}{dP} = e^{\int_0^T q(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T q^2(s)ds} = L_T.$$

Dans notre cas, avec le modèle (2.18), le processus $q(t)$ est égal à

$$q(t) = -\lambda\sigma^2(t), \quad (2.22)$$

où λ est le prix du marché et $\lambda \in R$. Par conséquent, pour notre modèle

$$L_T = e^{-\lambda \int_0^T \sigma^2(u)dW_u - \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^T \sigma^4(u)du}$$

Sous probabilité P^* , le processus (W_t^*) définit par

$$W_t^* := W_t + \lambda \int_0^t \sigma^2(u)du \quad (2.23)$$

est un mouvement brownien standard (théorème de Girsanov) (voir Elliott And Kopp (1999)). Par conséquent, dans un monde neutre en termes de risque, notre modèle (2.21) nous obtenons :

$$d\sigma^2(t) = (aL - (a + \lambda\sigma)\sigma^2(t))dt + \sigma\sigma^2(t)dW_t^*$$

Où, de manière équivalente

$$d\sigma^2(t) = a^*(L^* - \sigma^2(t))dt + \sigma\sigma^2(t)dW_t^* \quad (2.24)$$

où

$$a^* := a + \lambda\gamma, L^* := \frac{aL}{a + \lambda\gamma} \quad (2.25)$$

et W_t^* est défini dans (2.23)

Enfin, nous pouvons voir que le modèle dans (2.24) est le même que le modèle initial (2.8), et nous allons appliquer la méthode de changement de temps à ce modèle (2.24) pour obtenir les valeurs des swaps de variance et de volatilité .

2.5 Variance et volatilité swaps pour le risque neutre

En utilisant les mêmes arguments que dans la section précédente, nous obtenons les expressions suivantes pour la variance et la volatilité. Pour les swaps de variance, nous avons (voir (2.15) et (2.25)) :

$$E^* \sigma_R^2 := EV := \frac{1}{T} \int_0^T E \sigma^2(t) dt = \frac{(\sigma^2(0) - L^*)}{a^* T} (1 - e^{-a^* T}) + L^*. \quad (2.26)$$

et pour le swap de volatilité que nous trouvons (voir (2.15) et (2.25))

$$E^* \sqrt{V} \approx \sqrt{E^* V} - \frac{Var(V)}{8(E^* V)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.27)$$

Chapitre 3

Marché d'énergie et Application

3.1 Histoire du pétrole

L'exploitation du pétrole remonte à une époque ancienne, mais son importance, commerciale et industrielle,

croît à partir du XIXe siècle pour connaître au XXe siècle un essor économique et aussi une succession de crises.

3.1.1 Découvertes

Lors du processus de formation du pétrole, celui-ci quitte sa roche-mère et migre vers la surface s'il ne rencontre pas de couche imperméable dans sa migration, il atteint la surface du sol, ou il est lentement détruit car inflammable. Si une couche imperméable l'arrête, il s'accumule en dessous de celle-ci, constituant ainsi un gise-

ment pétrolifère. A la suite de mouvements de terrain ultérieurs, des failles peuvent se produire, et permettent à de petites quantités de pétrole de fuir jusqu'à la surface.

3.1.2 les crises pétrolières :1973-1985

La Californie a dès le 1er choc pétrolier lancé un programme ambitieux d'efficacité énergétique qui lui a permis de presque stabiliser sa consommation moyenne par personne (Sa population ayant augmenté, la consommation totale a néanmoins augmenté, mais proportionnellement beaucoup moins que dans les autres états).

En février 1971, l'Algérie annonça à la surprise générale la nationalisation des hydrocarbures, elle fut suivie par l'Irak en 1972, puis par la Libye en 1973, qui nationalisa à son tour cinq compagnies anglo-américaines de pétrole. En octobre 1973 éclata la guerre du Kippour. Les pays arabes, déjà mécontents de la dévaluation du dollar américain qui servait à payer leur pétrole (la convertibilité en or du dollar ayant été supprimée), décrétèrent un embargo pétrolier. Le prix du pétrole bondit de 3 à 13 USD. Une crise encore plus grave eut lieu en 1979, provoquée par la Révolution iranienne. Le prix culmina à 40 dollars en 1981. La production mondiale passa de 66 Mbbbl/j en 1979 à 56 en 1983, le niveau de 1979 ne fut retrouvé qu'en 1993 - et il ne le fut jamais si l'on divise par la population.

Dans ce contexte, les pays non-membres de l'OPEP se lancèrent dans un développement rapide de prospection et forage dans de nouvelles régions, comme la baie de Campeche, la mer du Nord, la Sibérie et l'Alaska. Les efforts en matière d'énergie

nucléaire furent intensifiés, ainsi que les économies d'énergie. L'utilisation du charbon et du gaz naturel pour l'électricité fut accrue. La croissance de l'économie mondiale marqua un coup d'arrêt. Les répercussions politiques furent importantes. Les chocs pétroliers eurent des impacts variés dans la vie quotidienne : réduction de la cylindrée des voitures, heure d'été, etc.

3.1.3 Evolution des prix du pétrole 2009 - 2014



figure1 : prix du pétrole brut en dollar par baril

Début 2009, le prix évolue entre 40 et 50 USD/bbl. Chakib Khelil, l'ancien ministre algérien de l'énergie, a envisagé que le cours puisse atteindre 60 USD/bbl en fin d'année 2009.

Les acteurs pétroliers ont aussi changé dans les années 2000. Les géants du secteur public dans les BRICS, l'histoire du pétrole, avec des valorisations qui témoignent de la forte confiance des investisseurs dans leur croissance.

À la suite d'une hausse tendancielle bien qu'irrégulière depuis 2005, le prix du pétrole dépasse les 100 \$ le baril en juin 2014.

Depuis mi-2014

Le prix du pétrole est divisé par deux au deuxième semestre 2014, s'établissant autour de 50 \$ le baril en décembre, tarif qui se maintient en moyenne tout au long de 2015. L'excès d'offre est notamment dû au développement du Pétrole de schiste aux États-Unis et à la volonté de l'OPEP de ne pas céder de parts de marché.

3.2 Marchés de l'énergie

3.2.1 Introduction

Le pétrole est resté cher, bien qu'affichant une légère baisse, dans un contexte tendu, principalement pour des raisons géopolitiques. En l'absence d'évolution majeure sur le marché du GNL ou des modifications de l'équilibre offre /demande dans les trois grandes zones de consommation (Amérique du Nord, Europe et Asie) les différentiels de prix du gaz entre ses différents marchés restent importants.

3.2.2 Marché pétrolier

Un cours moins volatil en 2013

Le contexte économique et géopolitique, notamment sa répercussion sur les fondamentaux du marché pétrolier a été un facteur important de variation des cours durant l'année 2013. Toutefois, l'amplitude des variations n'a été moindre que les années antérieures. Avec une moyenne de 108,7 dollars par baril (\$/b) en 2013 pour le Brent ICE, le cours moyen du brut est en baisse (- 2,7%) par rapport à 2012 (111,7 \$/b), mais reste à un niveau toujours élevé, dépassant pour la troisième année consécutive le niveau atteint en 2008 (97 \$/b).

L'équilibre offre-demande a favorisé la détente des cours au premier semestre, le Brent passant de son point haut de l'année, atteint début février à 118,9 \$/b, à un point basse mi-avril à 97,7 \$/b, avant de se stabiliser dans une fourchette de 100-105 \$/b jusqu'au début du mois de juillet. Le contexte géopolitique et les perturbations de l'offre ont favorisé l'appréciation des cours au second semestre. Après une remontée jusqu'à 116 \$/b fin août début septembre, le cours du Brent a évolué au dernier trimestre entre 108 et 112 \$/b, soutenu par les perturbations affectant la production libyenne.

3.2.3 Marchés européens

En 2013, les prix du gaz, que ce soit sur les marchés au comptant (spot) ou dans le cadre des contrats longs termes, se sont stabilisés à des niveaux élevés après une augmentation continue depuis 2009. Les achats de gaz sur les marchés au comptant tendent à prendre une place de plus en plus importante en Europe. En moyenne, les prix sur ces marchés ont augmenté de 8,9 % passant de 25 €/Mwh en 2012 à plus de 27 €/Mwh en 2013. Cependant, on observe en 2013 une tendance à la stabilisation des prix après une remontée progressive et constante durant l'année 2012. Les prix ont ainsi évolué en moyenne mensuelle entre 27,4 €/Mwh en janvier et 28,3€/Mwh en décembre.

3.2.4 Les marchés gaziers mondiaux

Pour l'année 2013, le commerce gazier mondial semble confirmer le ralentissement de son expansion avec une croissance du gaz commercialisé estimée à 1,5 % par Cedigaz1 (contre 2,3 % en 2012 et 2,8 % en 2011).

3.2.5 Les enjeux des approvisionnements européens en gaz

3.2.6 Baisse de la consommation gazière européenne

La consommation gazière dans les vingt-huit États membres de l'UE a connu une nouvelle baisse légère, à 462 Gm³ (-1,4 %) en 2013. Cette baisse est légèrement plus faible que celle de 2012 (-2 %) et s'explique par la situation économique qui

reste défavorable, mais est partiellement compensée cette année par la demande des secteurs résidentiels et tertiaires en raison du climat. Si la consommation a baissé dans une majorité de pays, elle a cependant progressé en Allemagne (+6,4 %, premier marché européen en volume), aux Pays-Bas (+2,1 %), en France (+1,2 %), en Estonie (+4,9 %), en République Tchèque (+1,9 %) et en Pologne (+0,3 %). L'Italie (-6,5 %), l'Espagne (-8,1 %) et la Roumanie (-13,6 %) ont été les plus gros contributeurs à la baisse de la demande européenne. Au Royaume-Uni, la consommation s'est maintenue au niveau de 2012.

3.3 Applications (prix de pétrole)

3.3.1 Résumé de la littérature existant sur l'énergie GARCH

Il existe une vaste littérature sur la modélisation de Hétéroscédasticité conditionnelle des prix de l'énergie. Ces modèles vont de ARCH de base à des modèles complexes de SWARCH, FIGARCH et stable GARCH. La majorité des modèles GARCH d'énergies examinées sont de faible ordres, la plus commune étant GARCH (1,1). Beaucoup des demandes d'applications favorisent les modifications de GARCH, qui tiennent compte des effets asymétriques, c'est-à-dire, asymétrique GARCH et EGARCH. Plusieurs auteurs constatent que les modèles GARCH-M ont les meilleures propriétés d'ajustement.

Quelques chercheurs emploient utilisé le GARCH bivarié pour étudier les liens

entre les marchés étroitement liés. Les études plus complexes impliquent des modèles basés sur l'intégration fractionnaire, commutant des régimes et les distributions stables des rendements énergétiques.

La plupart des études utilisent des données quotidiennement ou mensuelles sur le pétrole brut. La modélisation de GARCH des changements des prix de produit pétrochimique est généralement effectué dans le cadre de l'erreur corrections des modèles. Il y a les cas seulement seules des études de gaz naturel et le charbon. La seule recherche indirectement liée à l'électricité, porte sur les cours des actions d'entreprise d'électricité. Dans notre recherche, nous utilisons une gamme de produits énergétiques, y compris deux séries de pétroles bruts, deux séries de gaz naturel, une série de prix d'électricité et une série de gaz prix de pétrole.

3.3.2 Application 1

On vas appliquer aux données du taux de change des prix du pétrole en utilisant logiciel Eviews 7.2.

EViews (Vues économétriques) est un logiciel statistique sous Windows, utilisé principalement pour des séries chronologique orientées analyse économétrique. Il est développé par Micro Software quantitative (SMQ). La version 1.0 a été publiée en Mars 1994, La version d'EViews 7.2 a été publiée en novembre 2011.

3.3.3 Modélisation

Les données

Les données représentent le taux de change journalier des prix du pétrole (S_t). L'étude porte sur la période 1 janvier 2009 à

31 décembre 2014 un total de 2192 observations données. Les données sont représentées dans la figure 1 et la partie (Annexe).

La première étape de cette application est l'étude stationnaire de la série. En outre, nous avons utilisé le test de racine unitaire de Dickey-Fuller (ADF) et le test Philips Péron (PP) (les résultats des tests sont fait à l'aide de logiciel Eviews).

3.3.4 test de Racine unitaire

Dans cette section, nous avons résumé l'unité des tests de racines et les résultats d'analyse descriptive $prix$ $\ln prix$ $D \ln prix$ $Dprix$

test	ADF	PP
$prix$	-1.758414	-2.065765
$\ln prix$	-2.178748	-2.981970
$D \ln prix$	-40.25772	-40.23678
$Dprix$	-47.08854	-47.12848

Table 1 : (test de racine unitaire) avec $\alpha = 1\%$)

test de racine unitaire confirmer la stationnarité de la série $D \ln \text{prix}$ et $D \text{prix}$.

3.3.5 Analyse descriptive

Dans ce tableau, on a résumé les paramètres de distribution de la série $D \text{prix}$ du taux de change

	Mean	Median	Std.Dev	Skewness	Kurtosis	Jarque-B
$D \text{prix}$	0.095152	0.063664	1.851917	0.005052	2.938286	0.357179

Table 2 : Statistique descriptives de $D \text{prix}$

Les paramètres de distribution de série $D \text{prix}$, montre que le coefficient d'asymétries (*skewness*) et d'aplatissement (*kurtosis*), donnant naissance à des distribution léptokurtique.

La probabilité pour les valeurs extrêmes est inférieure à celle d'une distribution normale, et les valeurs sont plus larges autour de la moyenne Jarque-Bera est 0.357179.

3.3.6 Critères de choix des modèles

Afin de valider les performances des modèles, nous procédons au diagnostique des critères de choix issus de chacune des modélisation comme suit :

1) **Jarque-Bera** is a test statistic for testing whether the series is normally distributed. The statistic is computed as :

$$\mathbf{Jarque - Bera} = \frac{N}{6} \left(S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right)$$

where S is the skewness, and K is the kurtosis.

2) **Erreur absolue moyenne** : $MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i|$

3) **Erreur absolue moyenne en pourcentage** : $MAPE = \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$

4) **Racine de l'erreur quadratique moyenne** : $RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}$

5) **$R^2 - ajusté$** (adjust R^2) donnée par : $R^2 = \frac{(n-1)R^2 - p}{n - (p+1)}$ ou p est le nombre de

variables explicatives dans le modèle.

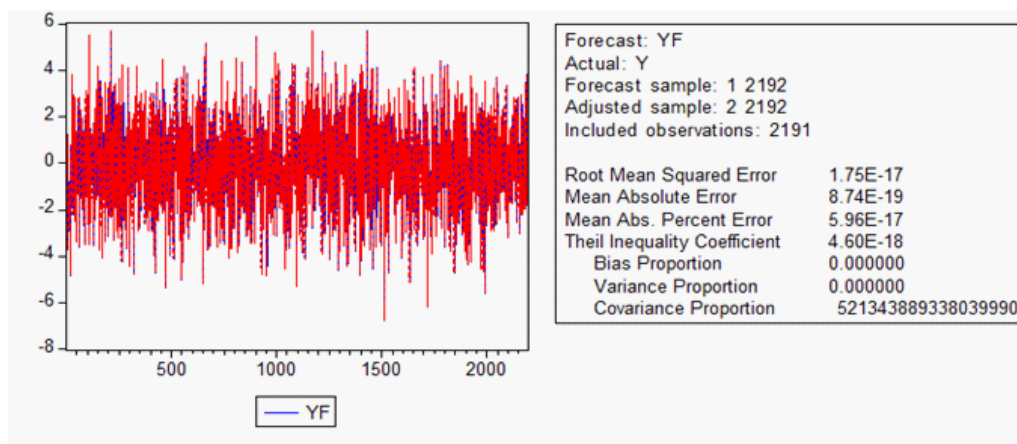
6) **Erreur de somme de régression (SEE)**.

7) **Critère de Schwarz** : $(BIC) = n \ln(SEE) + k \ln(n)$.

Remarque 3.1 *Pour qu'un modèle de prévision soit jugé performant il faut que les indicateurs suivants : BIC, SEE, RMSE, MAE, MAPE soient petits et $R^2 - ajusté$ soit grand.*

models	Adju R^2	SEE	BIC	RMSE	MAE	MAPE
GARCH(1,1)	1,000 000	1.20E-15	-65.68464	1.20E-15	8.40E-16	5.48E-14
GARCH(1,2)	1,000 000	1.38E-15	-65.43098	1.37E-15	9.71E-16	6.30E-14
GARCH(2,1)	1,000 000	1.85E-15	-64.92211	1.84E-15	1.17E-15	7.55E-14
GARCH(2,2)	1,000 000	4.28E-15	-63.24255	4.27E-15	2.73E-15	1.77E-13
GARCH(1,3)	1,000 000	4.90E-13	-53.69498	4.89E-13	3.55E-13	2.31E-11

Table3 :Étude de comparaison GRACH(p,q)



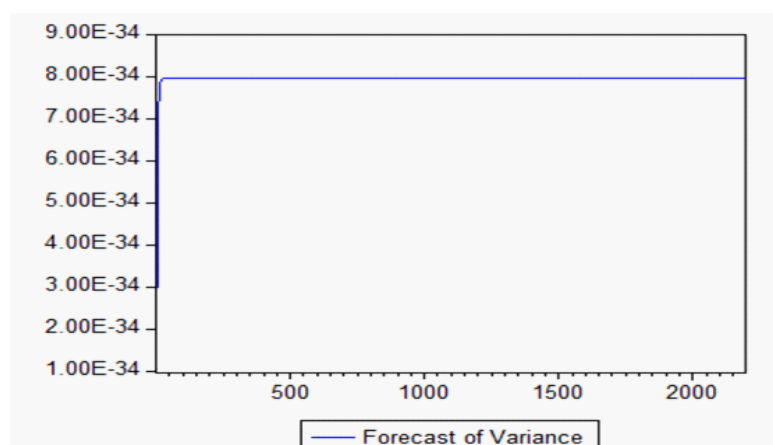


figure 2 : Prévision de variance

Après une lecture visuelle de figure2 et tableau 3 on remarque l'exactitude des prévision des modèles GARCH (1,1) sont clairement les plus performants puisqu'ils obtiennent le score le plus bas sur les métriques d'ajustement tout en représentant les MAE, RMSE, MAPE, SEE et BIC les plus bas parmi tous les modèles. Ils sont suivis de près par GARCH (1,2) qui est placé confortablement plus bas que GARCH (2,1) GARCH (2,2) et GARCH (1,3). Cependant, le modèle GARCH (1,1) est simple et facile à manipuler.

Les résultats montrent également que le modèle GARCH (1,1) améliore les performances de prévision et confirme le travail d'Efimova et Serletis (2014) ainsi de Chan et Grant (2015).

3.3.7 Discussion

Les modèles de classe GARCH non linéaires, capables de capter la volatilité à longue mémoire et / où asymétrique, présentent une précision de prévision supérieure à celle des modèles linéaires, en particulier dans les prévisions de volatilité sur des horizons plus longs, tels que cinq ou vingt jours. Nos résultats indiquent que le degré de persistance de la volatilité a été réduit en intégrant les variations de variance dans le modèle de volatilité.

3.3.8 Application 2 :(prix du pétrole août 1987-octobre 2016)

Dans la première étape, nous calculons la valeur des prix des swaps de variance et de volatilité d'un prix mensuel du pétrole.

Nous pouvons obtenir les valeurs des paramètres des prix à terme du pétrole brut pour la période d'aout 1987 à octobre 2016 que nous répétons les memes étapes que Bos, Ware et Pavlov 2002.

Enfin les valeurs des paramètres sont :

$$a = 1.324 \quad \gamma = 0.431 \quad L = 0.7688 \quad \lambda = 0.051$$

selon les formules (swaps de variance et swaps de volatilité) (2.10),(2.11) et les valeurs des paramètres, nous trouvons les valeurs pour les paramètres ajustés en fonction du risque a^* et L^*

$$a^* = a + \lambda\gamma = 1.3459$$

$$L^* = \frac{aL}{a + \lambda\gamma} = 0.7562 \quad \text{et } \sigma^2(0) = 2.25$$

Remarque 3.2 *pour le swap de variance et pour l'échange de volatilité avec des paramètres ajustés en fonction du risque, nous pouvons utiliser des formules (2.26) et (2.27), respectivement.*

Conclusion et Perspectives

À l'issue de cette étude, nous savons que les modèles GARCH normaux expliquent une partie de la non-normalité de la distribution des prix de l'énergie. Lorsqu'ils le font, le terme d'erreur présente encore une asymétrie et une leptokurtose. Ceux qui sont couramment utilisés par les compagnies d'énergie. Pour tenir compte de la distribution non gaussienne des rendements énergétiques et de la volatilité changeante, nous utilisons le GARCH stable.

D'après la partie pratique, on constate que les modèles GARCH (1,1) sont clairement les plus performants puisqu'ils obtiennent le score le plus bas sur les métriques d'ajustement tout en représentant les MAE, RMSE, MAPE, SEE et BIC les plus bas parmi tous les modèles.

Par ailleurs, nous pouvons dans nos recherches futures à savoir :

- de généraliser ce travail sur le gaz naturel et l'électricité ;
- en utilisant des modèles GARCH multivariée pour d'examiner la relation entre les marchés boursiers et pétroliers utilisant des modèles bivariés BEKK GARCH (1,1) et DCC GARCH (1,1).

Bibliographie

- [1] Baillie R.T, Bollerslev, T., and Mikkelsen, H.O Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 74, 3-30 (1996).
- [2] Bera, A. K., et Higgins, M. L. , "ARCH Models : Properties, Estimation and Testing", *Journal of Economic Surveys*, 7(4), 307-366.(1993)
- [3] Benjamin HAMIDI, Patrick KOUONTCHOU, Bertrand MAILLET, "L'approche DARE pour une mesure de risque diversifiée", *Documents de Travail du Centre d'Economie de la Sorbonne* (2010).
- [4] Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, 307-327, (1986).
- [5] Brockhaus, O. and Long, D. "Volatility swaps made simple", *RISK*, January, 92-96(2000).
- [6] Brooks, C. GARCH Modelling in finance : A review of the software options, *Economic Journal* : 107(443) 1271-1276 (1997).

- [7] Brooks, C. and S. P. Burke. Forecasting exchange rate volatility using conditional variance models selected by information criteria. *Economics Letters* 61 : 273-278 (1998).
- [8] Chevreau Antoine, Godin Sylvain , "Définition de la Value-at-Risk", Master ESA, Université d'Orléans, (2006).
- [9] Christophe Hurlin , "Econométrie pour la Finance Modèles ARCH - GARCH Applications à la VaR ", MASTER ECONOMETRIE ET STATISTIQUE APPLIQUEE (ESA), Université d'Orléans (2007).
- [10] Christophe Hurlin, Université d'Orléans, Laboratoire d'Economie d'Orléans (UMR CNRS 6221) "Value-at-Risk Partie 1.", Master ESA, Université d'Orléans, (2007).
- [11] Christophe HURLIN, "Econométrie Appliquée Séries Temporelles", Cours de Tronc Commun (2004).
- [12] Christian FRANCO "Modèles GARCH et à volatilité stochastique", GREMARS-EQUIPE Université Lille 3, (14 mars 2007)
- [13] Campbell J.Y., Lo A. et MacKinlay, A.C. , *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- [14] Charpentier, A., *Séries Temporelles : Théorie et Applications*, Polycopié de Cours, Université Paris IX Dauphine (1997).
- [15] Cobbaut, R. , *Théorie Financière*, Economica. [5] Colletaz G. "Condhet.src :

- Estimation de Modèles ARCH sous RATS”, Document de Recherche LEO, 2002-24.
- [16] Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M. and Zou, J. A guide to volatility and variance swaps, *The Journal of Derivatives*, Summer, 9-32 (1999).
- [17] Engle, R. "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50, 987-1008 (1982).
- [18] Engle, R. F., D. M. Lilien and R. P. Robins, 'Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure : The ARCH-M Model', *Econometrica*, 55, 391-407, (1987).
- [19] Engle, R. Jeffrey, R. Forecasting the frequency of changes in quoted foreign exchange prices with the autoregressive conditional duration model. *Journal of Empirical Finance*, 4(3), pp.187-212(1997).
- [20] Ezzebssa, A. Modélisation des Marchés Financiers et Krachs Boursiers. Thèse de doctorat (2014).
- [21] François-Eric Racicot et Raymond Théoret. *Traité d'économétrie financiers*, ISBN 2-7605-1123-5. D1123N c(2001).
- [22] He. R and Y. Wang, "Price pseudo-variance, pseudo covariance, pseudo-volatility, and pseudo-correlation swaps-in analytical close forms", in *Proceedings of the 6th PIMS industrial Problems Solving Workshop (PIMS IPSW'02)*, pp. 27-37, University of British Columbia, Vancouver, Canada, (2002).

- [23] Heston, S. "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, 6, 327-343 (1993).
- [24] Hopper, G. P. What determines the exchange rate : Economics factors or market sentiment. *Business Review* : 17-29. Federal Reserve Bank of Philadelphia (1997).
- [25] J.C. Cox, J.Inegersoll, and S. Ross, "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica journal of the Econometric Society*, vol. 53, no. 2, pp.385-407,(1985).
- [26] Javaheri A. "The Volatility Process" Ph.D. Thesis in progress, Ecole des Mines de Paris (2002).
- [27] Lallouche, A. Volatilité stochastique :application aux indices boursiers. Thèse de doctorat (2017).
- [28] Nedjar,S. Sur les séries chronologiques : applications aux taux de change.Mémoire de magistère (2013).
- [29] Oksendal. B, *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*, Springer, New York, NY, USA, (1998).
- [30] Panorama energies-climat. LES Marchés pétroliers et gaziers Mondiaux, Edition (2014).
- [31] Svetlozar T.Rachev "Handbook of computational and numerical methods in finance (2004)

- [32] Swishchuk. A, "Variance and volatility swaps in energy markets" journal of Energy Markets, vol. 6, no. 1, pp. 33-49,2013.
- [33] Swishchuk. A and Kalemanova .A, "the stochastic stability of interest rates with jump changes", Theory Probability and Mathematical Statistics, vol. 61, pp. 161-172, (2000).
- [34] Tuckman Bruce. Fixed income securities : tools for today's markets. New York John Wiley and Sons, (1996).
- [35] TEMAME Naima. Estimation du quantile extrême et de la VaR, (2011).
- [36] West Kenneth, and Dongchul Cho. The Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility. "Journal of Econometrics, 69(2), pp. 367-391 (1995).
- [37] Zeghdoudi, H. Ezzehsa, A. Remita, M. Nedjar, S. Around ARCH/GARCH models and their application to exchange rate volatility. International Journal of Statistics and Economics, Vol 11 N 2 , 44-60 (2013).
- [38] Zeghdoudi, H . Boudjaada L. Tlaidjia N. Use of the Artificial Neural Networks (ANNs) to Guiding the Financial Decisions : Exchange Rate Volatility of Algerian Dinar. International Research Journal of Finance and Economics, Issue 115 October, 87-94 (2013b).
- [39] Zeghdoudi, H. Lallouche, A. Remita, M, R. On Volatility Swaps for stock market Forecast : Application Example CAC 40 French Index. Journal of Probability and Statistics, Article ID 854578, 6 pages (2014).

- [40] Zeghdoudi, H . Bouseba , F,Z . Use of the GARCH Models to Energy Markets : Oil Price Volatility. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol11, N° 6 pp. 4385-4394 (2015).
- [41] Zakoian, J.-M, "Threshold Arch Models", CREST.DP, (1991).
- [42] Zakoian, J.-M, "Threshold Heteroscedastic Models" , Journal of Economic Dynamics and Control, 18, 931–955, (1994).

DATE	prix
01/01/2009	35,58
02/01/2009	40,44
03/01/2009	40,44
04/01/2009	40,44
05/01/2009	43,98
06/01/2009	46,32
07/01/2009	45,43
08/01/2009	42,06
09/01/2009	41,9
10/01/2009	41,9
11/01/2009	41,9
12/01/2009	40,15
13/01/2009	40,13
14/01/2009	41,32
15/01/2009	40,9
16/01/2009	42,23
17/01/2009	42,23
18/01/2009	42,23
19/01/2009	40,33
20/01/2009	39,29
21/01/2009	39,55
22/01/2009	40,28
23/01/2009	41,03
24/01/2009	41,03
25/01/2009	41,03
26/01/2009	42,54
27/01/2009	40,48
28/01/2009	40,81
29/01/2009	41,19
30/01/2009	42,02
31/01/2009	42,02
01/02/2009	42,02
02/02/2009	42,58
03/02/2009	41,57
04/02/2009	41,63
05/02/2009	42,15
06/02/2009	43,29
07/02/2009	43,29
08/02/2009	43,29
09/02/2009	43,9
10/02/2009	43,45
11/02/2009	42,29
12/02/2009	41,81
13/02/2009	42,31
14/02/2009	42,31
15/02/2009	42,31

16/02/2009	41,48
17/02/2009	39,8
18/02/2009	38,1
19/02/2009	38,98
20/02/2009	39,19
21/02/2009	39,19
22/02/2009	39,19
23/02/2009	39,47
24/02/2009	39,03
25/02/2009	40,71
26/02/2009	43,21
27/02/2009	43,23
28/02/2009	43,23
01/03/2009	43,23
02/03/2009	42,61
03/03/2009	41,79
04/03/2009	43,83
05/03/2009	43,64
06/03/2009	43,15
07/03/2009	43,15
08/03/2009	43,15
09/03/2009	44,04
10/03/2009	43,47
11/03/2009	42,38
12/03/2009	42,24
13/03/2009	44,15
14/03/2009	44,15
15/03/2009	44,15
16/03/2009	43,05
17/03/2009	44,71
18/03/2009	45,64
19/03/2009	47,39
20/03/2009	48,77
21/03/2009	48,77
22/03/2009	48,77
23/03/2009	50,18
24/03/2009	50,44
25/03/2009	50,14
26/03/2009	50,77
27/03/2009	50,41
28/03/2009	50,41
29/03/2009	50,41
30/03/2009	47,72
31/03/2009	46,65
01/04/2009	47,15
02/04/2009	49,97
03/04/2009	51,2

04/04/2009	51,2
05/04/2009	51,2
06/04/2009	51,9
07/04/2009	50,96
08/04/2009	50,25
09/04/2009	52,26
10/04/2009	52,26
11/04/2009	52,26
12/04/2009	52,26
13/04/2009	51,92
14/04/2009	51,07
15/04/2009	51,17
16/04/2009	51,55
17/04/2009	51,45
18/04/2009	51,45
19/04/2009	51,45
20/04/2009	49,59
21/04/2009	48,49
22/04/2009	48,51
23/04/2009	48,6
24/04/2009	49,97
25/04/2009	49,97
26/04/2009	49,97
27/04/2009	49,21
28/04/2009	48,7
29/04/2009	49,98
30/04/2009	50,36
01/05/2009	50,41
02/05/2009	50,41
03/05/2009	50,41
04/05/2009	52,11
05/05/2009	52,71
06/05/2009	54,09
07/05/2009	56,05
08/05/2009	56,35
09/05/2009	56,35
10/05/2009	56,35
11/05/2009	56,11
12/05/2009	56,76
13/05/2009	57,16
14/05/2009	55,99
15/05/2009	56,37
16/05/2009	56,37
17/05/2009	56,37
18/05/2009	55,86
19/05/2009	57,52
20/05/2009	58,47

21/05/2009	58,32
22/05/2009	58,75
23/05/2009	58,75
24/05/2009	58,75
25/05/2009	58,55
26/05/2009	58,71
27/05/2009	60,75
28/05/2009	61,77
29/05/2009	63,71
30/05/2009	63,71
31/05/2009	63,71
01/06/2009	66,08
02/06/2009	66,6
03/06/2009	66,14
04/06/2009	66,74
05/06/2009	67,81
06/06/2009	67,81
07/06/2009	67,81
08/06/2009	66,75
09/06/2009	68,42
10/06/2009	69,92
11/06/2009	70,6
12/06/2009	70,18
13/06/2009	70,18
14/06/2009	70,18
15/06/2009	68,98
16/06/2009	69,41
17/06/2009	69,1
18/06/2009	70,01
19/06/2009	70
20/06/2009	70
21/06/2009	70
22/06/2009	67,13
23/06/2009	66,34
24/06/2009	67,74
25/06/2009	68,27
26/06/2009	69,02
27/06/2009	69,02
28/06/2009	69,02
29/06/2009	69,16
30/06/2009	69,56
01/07/2009	69,26
02/07/2009	67,04
03/07/2009	66,12
04/07/2009	66,12
05/07/2009	66,12
06/07/2009	63,66

07/07/2009	62,97
08/07/2009	61,11
09/07/2009	60,58
10/07/2009	59,86
11/07/2009	59,86
12/07/2009	59,86
13/07/2009	59,66
14/07/2009	60,87
15/07/2009	61,73
16/07/2009	62,54
17/07/2009	63,23
18/07/2009	63,23
19/07/2009	63,23
20/07/2009	64,64
21/07/2009	65,04
22/07/2009	64,68
23/07/2009	66,46
24/07/2009	67,8
25/07/2009	67,8
26/07/2009	67,8
27/07/2009	69,01
28/07/2009	68,45
29/07/2009	65,81
30/07/2009	66,42
31/07/2009	68,59
01/08/2009	68,59
02/08/2009	68,59
03/08/2009	71,34
04/08/2009	71,53
05/08/2009	72,45
06/08/2009	72,92
07/08/2009	71,96
08/08/2009	71,96
09/08/2009	71,96
10/08/2009	71,68
11/08/2009	71,06
12/08/2009	71,04
13/08/2009	72,22
14/08/2009	71,14
15/08/2009	71,14
16/08/2009	71,14
17/08/2009	68,04
18/08/2009	69,47
19/08/2009	71,13
20/08/2009	72,57
21/08/2009	72,27
22/08/2009	72,27

23/08/2009	72,27
24/08/2009	72,89
25/08/2009	71,71
26/08/2009	70,44
27/08/2009	70,36
28/08/2009	71,72
29/08/2009	71,72
30/08/2009	71,72
31/08/2009	70,37
01/09/2009	68,11
02/09/2009	66,64
03/09/2009	66,65
04/09/2009	66,03
05/09/2009	66,03
06/09/2009	66,03
07/09/2009	66,2
08/09/2009	67,83
09/09/2009	68,97
10/09/2009	69,23
11/09/2009	68,21
12/09/2009	68,21
13/09/2009	68,21
14/09/2009	66,47
15/09/2009	66,95
16/09/2009	68,69
17/09/2009	70,27
18/09/2009	69,62
19/09/2009	69,62
20/09/2009	69,62
21/09/2009	68,42
22/09/2009	68,59
23/09/2009	67,87
24/09/2009	65,12
25/09/2009	64
26/09/2009	64
27/09/2009	64
28/09/2009	64,07
29/09/2009	64,25
30/09/2009	65,55
01/10/2009	67,72
02/10/2009	67,17
03/10/2009	67,17
04/10/2009	67,17
05/10/2009	66,81
06/10/2009	68,14
07/10/2009	67,76
08/10/2009	67,84

09/10/2009	68,86
10/10/2009	68,86
11/10/2009	68,86
12/10/2009	70,06
13/10/2009	70,94
14/10/2009	71,96
15/10/2009	73,2
16/10/2009	74,89
17/10/2009	74,89
18/10/2009	74,89
19/10/2009	75,82
20/10/2009	75,82
21/10/2009	76,37
22/10/2009	77,61
23/10/2009	77,59
24/10/2009	77,59
25/10/2009	77,59
26/10/2009	76,7
27/10/2009	76,43
28/10/2009	75,53
29/10/2009	75,94
30/10/2009	75,56
31/10/2009	75,56
01/11/2009	75,56
02/11/2009	74,95
03/11/2009	75,53
04/11/2009	77,6
05/11/2009	77,45
06/11/2009	76,25
07/11/2009	76,25
08/11/2009	76,25
09/11/2009	76,56
10/11/2009	76,5
11/11/2009	76,88
12/11/2009	76,06
13/11/2009	75,25
14/11/2009	75,25
15/11/2009	75,25
16/11/2009	76,48
17/11/2009	76,96
18/11/2009	77,86
19/11/2009	76,77
20/11/2009	75,77
21/11/2009	75,77
22/11/2009	75,77
23/11/2009	76,72
24/11/2009	75,22

25/11/2009	75,67
26/11/2009	75,96
27/11/2009	75,38
28/11/2009	75,38
29/11/2009	75,38
30/11/2009	76,21
01/12/2009	77,88
02/12/2009	77,31
03/12/2009	77,32
04/12/2009	76,81
05/12/2009	76,81
06/12/2009	76,81
07/12/2009	75,76
08/12/2009	74,8
09/12/2009	73,7
10/12/2009	71,43
11/12/2009	70,85
12/12/2009	70,85
13/12/2009	70,85
14/12/2009	70,64
15/12/2009	70,84
16/12/2009	72,17
17/12/2009	71,77
18/12/2009	71,78
19/12/2009	71,78
20/12/2009	71,78
21/12/2009	71,88
22/12/2009	71,32
23/12/2009	72,71
24/12/2009	74,33
25/12/2009	74,33
26/12/2009	74,33
27/12/2009	74,33
28/12/2009	74,83
29/12/2009	76,19
30/12/2009	76,77
31/12/2009	77,16

DATE	prix
01/01/2010	77,16
02/01/2010	77,16
03/01/2010	77,16
04/01/2010	78,23
05/01/2010	79,14
06/01/2010	79,7
07/01/2010	80,19
08/01/2010	79,94
09/01/2010	79,94
10/01/2010	79,94
11/01/2010	80,29
12/01/2010	79,08
13/01/2010	77,15
14/01/2010	77,59
15/01/2010	76,57
16/01/2010	76,57
17/01/2010	76,57
18/01/2010	75,75
19/01/2010	75,53
20/01/2010	75,3
21/01/2010	74,54
22/01/2010	73,02
23/01/2010	73,02
24/01/2010	73,02
25/01/2010	71,97
26/01/2010	71,94
27/01/2010	71,87
28/01/2010	71,4
29/01/2010	71,01
30/01/2010	71,01
31/01/2010	71,01
01/02/2010	71,02
02/02/2010	73,05
03/02/2010	75,14
04/02/2010	72,73
05/02/2010	69,71
06/02/2010	69,71
07/02/2010	69,71
08/02/2010	68,86
09/02/2010	69,76
10/02/2010	70,78
11/02/2010	71,81
12/02/2010	71,55
13/02/2010	71,55
14/02/2010	71,55
15/02/2010	71,72

16/02/2010	73,06
17/02/2010	74,33
18/02/2010	74,49
19/02/2010	75,17
20/02/2010	75,17
21/02/2010	75,17
22/02/2010	76,14
23/02/2010	75,75
24/02/2010	75,46
25/02/2010	74,66
26/02/2010	74,6
27/02/2010	74,6
28/02/2010	74,6
01/03/2010	75,75
02/03/2010	75,51
03/03/2010	76,52
04/03/2010	76,42
05/03/2010	77,27
06/03/2010	77,27
07/03/2010	77,27
08/03/2010	77,86
09/03/2010	77,38
10/03/2010	77,8
11/03/2010	77,76
12/03/2010	77,74
13/03/2010	77,74
14/03/2010	77,74
15/03/2010	76,24
16/03/2010	76,62
17/03/2010	78,25
18/03/2010	77,9
19/03/2010	77,18
20/03/2010	77,18
21/03/2010	77,18
22/03/2010	76,75
23/03/2010	77,54
24/03/2010	76,9
25/03/2010	77,03
26/03/2010	76,8
27/03/2010	76,8
28/03/2010	76,8
29/03/2010	77,77
30/03/2010	78,21
31/03/2010	78,7
01/04/2010	79,89
02/04/2010	79,89
03/04/2010	79,89

04/04/2010	79,89
05/04/2010	81,27
06/04/2010	82,55
07/04/2010	82,36
08/04/2010	81,6
09/04/2010	81,97
10/04/2010	81,97
11/04/2010	81,97
12/04/2010	82,2
13/04/2010	81,52
14/04/2010	82,63
15/04/2010	83,28
16/04/2010	82,86
17/04/2010	82,86
18/04/2010	82,86
19/04/2010	80,89
20/04/2010	81,83
21/04/2010	82,01
22/04/2010	82,36
23/04/2010	83,01
24/04/2010	83,01
25/04/2010	83,01
26/04/2010	83,91
27/04/2010	83,03
28/04/2010	82,13
29/04/2010	83,59
30/04/2010	84,13
01/05/2010	84,13
02/05/2010	84,13
03/05/2010	84,36
04/05/2010	84,16
05/05/2010	81,12
06/05/2010	78,52
07/05/2010	76,41
08/05/2010	76,41
09/05/2010	76,41
10/05/2010	78,08
11/05/2010	77,53
12/05/2010	78,29
13/05/2010	78,43
14/05/2010	75,95
15/05/2010	75,95
16/05/2010	75,95
17/05/2010	73,25
18/05/2010	72,77
19/05/2010	70,57
20/05/2010	69,64

21/05/2010	68,47
22/05/2010	68,47
23/05/2010	68,47
24/05/2010	68,84
25/05/2010	66,84
26/05/2010	68,21
27/05/2010	70,48
28/05/2010	70,62
29/05/2010	70,62
30/05/2010	70,62
31/05/2010	71,88
01/06/2010	70,96
02/06/2010	71,13
03/06/2010	72,84
04/06/2010	72,06
05/06/2010	72,06
06/06/2010	72,06
07/06/2010	69,61
08/06/2010	70,08
09/06/2010	71,05
10/06/2010	72,18
11/06/2010	72,26
12/06/2010	72,26
13/06/2010	72,26
14/06/2010	73,32
15/06/2010	73,14
16/06/2010	74,13
17/06/2010	75,21
18/06/2010	75,11
19/06/2010	75,11
20/06/2010	75,11
21/06/2010	75,94
22/06/2010	75,09
23/06/2010	74,06
24/06/2010	72,9
25/06/2010	73,8
26/06/2010	73,8
27/06/2010	73,8
28/06/2010	74,77
29/06/2010	72,66
30/06/2010	72,49
01/07/2010	70,48
02/07/2010	69,63
03/07/2010	69,63
04/07/2010	69,63
05/07/2010	69,05
06/07/2010	69,73

07/07/2010	69,74
08/07/2010	71,86
09/07/2010	72,79
10/07/2010	72,79
11/07/2010	72,79
12/07/2010	72
13/07/2010	72,58
14/07/2010	73,93
15/07/2010	73,26
16/07/2010	72,89
17/07/2010	72,89
18/07/2010	72,89
19/07/2010	72,94
20/07/2010	73,16
21/07/2010	73,16
22/07/2010	73,47
23/07/2010	74,44
24/07/2010	74,44
25/07/2010	74,44
26/07/2010	74,22
27/07/2010	73,95
28/07/2010	73,26
29/07/2010	74,19
30/07/2010	74,43
31/07/2010	74,43
01/08/2010	74,43
02/08/2010	77,09
03/08/2010	78,41
04/08/2010	78,88
05/08/2010	78,69
06/08/2010	78,15
07/08/2010	78,15
08/08/2010	78,15
09/08/2010	78,28
10/08/2010	76,87
11/08/2010	75,4
12/08/2010	73,73
13/08/2010	72,64
14/08/2010	72,64
15/08/2010	72,64
16/08/2010	72,27
17/08/2010	73,25
18/08/2010	73,05
19/08/2010	73,03
20/08/2010	71,78
21/08/2010	71,78
22/08/2010	71,78

23/08/2010	70,93
24/08/2010	69,69
25/08/2010	70
26/08/2010	71,4
27/08/2010	72,36
28/08/2010	72,36
29/08/2010	72,36
30/08/2010	73,05
31/08/2010	72,39
01/09/2010	72,49
02/09/2010	72,89
03/09/2010	73,05
04/09/2010	73,05
05/09/2010	73,05
06/09/2010	73,46
07/09/2010	73,03
08/09/2010	74,04
09/09/2010	74,48
10/09/2010	74,66
11/09/2010	74,66
12/09/2010	74,66
13/09/2010	75,06
14/09/2010	75,54
15/09/2010	75,37
16/09/2010	75,49
17/09/2010	74,95
18/09/2010	74,95
19/09/2010	74,95
20/09/2010	75,26
21/09/2010	75,34
22/09/2010	74,41
23/09/2010	74,28
24/09/2010	75,01
25/09/2010	75,01
26/09/2010	75,01
27/09/2010	75,06
28/09/2010	74,87
29/09/2010	75,74
30/09/2010	77,48
01/10/2010	79,52
02/10/2010	79,52
03/10/2010	79,52
04/10/2010	79,95
05/10/2010	80,14
06/10/2010	81,51
07/10/2010	81,07
08/10/2010	79,95

09/10/2010	79,95
10/10/2010	79,95
11/10/2010	80,44
12/10/2010	79,64
13/10/2010	80,9
14/10/2010	80,95
15/10/2010	79,86
16/10/2010	79,86
17/10/2010	79,86
18/10/2010	79
19/10/2010	79,25
20/10/2010	78,71
21/10/2010	79,26
22/10/2010	78,54
23/10/2010	78,54
24/10/2010	78,54
25/10/2010	80,03
26/10/2010	79,75
27/10/2010	79,19
28/10/2010	79,92
29/10/2010	79,42
30/10/2010	79,42
31/10/2010	79,42
01/11/2010	80,55
02/11/2010	81,9
03/11/2010	82,56
04/11/2010	84,33
05/11/2010	84,33
06/11/2010	84,33
07/11/2010	84,33
08/11/2010	84,62
09/11/2010	84,92
10/11/2010	85,27
11/11/2010	85,81
12/11/2010	83,67
13/11/2010	83,67
14/11/2010	83,67
15/11/2010	83,39
16/11/2010	82,35
17/11/2010	81,9
18/11/2010	81,09
19/11/2010	81,41
20/11/2010	81,41
21/11/2010	81,41
22/11/2010	80,96
23/11/2010	80,14
24/11/2010	81,16

25/11/2010	82,55
26/11/2010	82,34
27/11/2010	82,34
28/11/2010	82,34
29/11/2010	83,45
30/11/2010	83,65
01/12/2010	84,13
02/12/2010	86,13
03/12/2010	87,12
04/12/2010	87,12
05/12/2010	87,12
06/12/2010	88,13
07/12/2010	87,87
08/12/2010	87,46
09/12/2010	87,91
10/12/2010	87,65
11/12/2010	87,65
12/12/2010	87,65
13/12/2010	87,96
14/12/2010	88,21
15/12/2010	88,22
16/12/2010	88,76
17/12/2010	88,78
18/12/2010	88,78
19/12/2010	88,78
20/12/2010	88,59
21/12/2010	89,54
22/12/2010	90,02
23/12/2010	90,16
24/12/2010	90,73
25/12/2010	90,73
26/12/2010	90,73
27/12/2010	90,67
28/12/2010	90,08
29/12/2010	90,22
30/12/2010	89,47
31/12/2010	88,99

DATE	prix
01/01/2011	88,99
02/01/2011	88,99
03/01/2011	89,81
04/01/2011	91,28
05/01/2011	90,91
06/01/2011	92,06
07/01/2011	90,83
08/01/2011	90,83
09/01/2011	90,83
10/01/2011	91,33
11/01/2011	92,92
12/01/2011	94,23
13/01/2011	93,96
14/01/2011	94,04
15/01/2011	94,04
16/01/2011	94,04
17/01/2011	93,72
18/01/2011	93,8
19/01/2011	93,99
20/01/2011	92,95
21/01/2011	92,9
22/01/2011	92,9
23/01/2011	92,9
24/01/2011	93,2
25/01/2011	91,8
26/01/2011	92,58
27/01/2011	93,42
28/01/2011	94,1
29/01/2011	94,1
30/01/2011	94,1
31/01/2011	95,53
01/02/2011	96,39
02/02/2011	97,66
03/02/2011	97,71
04/02/2011	96,85
05/02/2011	96,85
06/02/2011	96,85
07/02/2011	96,02
08/02/2011	96,12
09/02/2011	96,93
10/02/2011	97,59
11/02/2011	97,37
12/02/2011	97,37
13/02/2011	97,37
14/02/2011	98,24
15/02/2011	99

16/02/2011	98,68
17/02/2011	99,77
18/02/2011	99,08
19/02/2011	99,08
20/02/2011	99,08
21/02/2011	100,59
22/02/2011	104,01
23/02/2011	105,88
24/02/2011	111,01
25/02/2011	108,31
26/02/2011	108,31
27/02/2011	108,31
28/02/2011	108,5
01/03/2011	108,27
02/03/2011	110,83
03/03/2011	110,48
04/03/2011	111,42
05/03/2011	111,42
06/03/2011	111,42
07/03/2011	112,03
08/03/2011	109,55
09/03/2011	109,96
10/03/2011	110,71
11/03/2011	109,18
12/03/2011	109,18
13/03/2011	109,18
14/03/2011	107,87
15/03/2011	106,56
16/03/2011	105,8
17/03/2011	108,08
18/03/2011	110,54
19/03/2011	110,54
20/03/2011	110,54
21/03/2011	110,1
22/03/2011	110,23
23/03/2011	111,09
24/03/2011	110,81
25/03/2011	110,91
26/03/2011	110,91
27/03/2011	110,91
28/03/2011	110,37
29/03/2011	109,87
30/03/2011	110,18
31/03/2011	111,42
01/04/2011	113,49
02/04/2011	113,49
03/04/2011	113,49

04/04/2011	115,21
05/04/2011	116,73
06/04/2011	117,75
07/04/2011	117,79
08/04/2011	120,15
09/04/2011	120,15
10/04/2011	120,15
11/04/2011	120,44
12/04/2011	117,68
13/04/2011	116,84
14/04/2011	118,03
15/04/2011	117,99
16/04/2011	117,99
17/04/2011	117,99
18/04/2011	117,37
19/04/2011	116
20/04/2011	117,97
21/04/2011	119,46
22/04/2011	119,46
23/04/2011	119,46
24/04/2011	119,46
25/04/2011	119,38
26/04/2011	118,96
27/04/2011	119,35
28/04/2011	120,91
29/04/2011	120,35
30/04/2011	120,35
01/05/2011	120,35
02/05/2011	119,9
03/05/2011	118,75
04/05/2011	116,96
05/05/2011	112,8
06/05/2011	104,4
07/05/2011	104,4
08/05/2011	104,4
09/05/2011	108,08
10/05/2011	111,48
11/05/2011	111,35
12/05/2011	107,19
13/05/2011	108,93
14/05/2011	107,79
15/05/2011	107,79
16/05/2011	107,79
17/05/2011	106,6
18/05/2011	107,4
19/05/2011	107,88
20/05/2011	107,42

21/05/2011	107,42
22/05/2011	107,42
23/05/2011	105,46
24/05/2011	107,3
25/05/2011	107,99
26/05/2011	109,83
27/05/2011	110,27
28/05/2011	110,27
29/05/2011	110,27
30/05/2011	109,59
31/05/2011	111,2
01/06/2011	111,44
02/06/2011	109,91
03/06/2011	110,44
04/06/2011	110,44
05/06/2011	110,44
06/06/2011	110,09
07/06/2011	110,66
08/06/2011	111,93
09/06/2011	113,43
10/06/2011	113,45
11/06/2011	113,45
12/06/2011	113,45
13/06/2011	113,33
14/06/2011	113,59
15/06/2011	112,62
16/06/2011	109,55
17/06/2011	107,51
18/06/2011	107,51
19/06/2011	107,51
20/06/2011	107,41
21/06/2011	107,82
22/06/2011	107,96
23/06/2011	106,08
24/06/2011	102,91
25/06/2011	102,91
26/06/2011	102,91
27/06/2011	101,55
28/06/2011	103,59
29/06/2011	106,19
30/06/2011	107,5
01/07/2011	106,45
02/07/2011	106,45
03/07/2011	106,45
04/07/2011	106,87
05/07/2011	107,12
06/07/2011	108,26

07/07/2011	110,76
08/07/2011	112,68
09/07/2011	112,68
10/07/2011	112,68
11/07/2011	111,35
12/07/2011	111,07
13/07/2011	113,25
14/07/2011	112,74
15/07/2011	112,2
16/07/2011	112,2
17/07/2011	112,2
18/07/2011	112,31
19/07/2011	112,68
20/07/2011	113,54
21/07/2011	113,2
22/07/2011	113,66
23/07/2011	113,66
24/07/2011	113,66
25/07/2011	113,33
26/07/2011	113,65
27/07/2011	113,4
28/07/2011	113,36
29/07/2011	112,18
30/07/2011	112,18
31/07/2011	112,18
01/08/2011	113,57
02/08/2011	111,85
03/08/2011	110,55
04/08/2011	107,48
05/08/2011	103,3
06/08/2011	103,3
07/08/2011	103,3
08/08/2011	102,37
09/08/2011	101,53
10/08/2011	101,2
11/08/2011	103,29
12/08/2011	103,81
13/08/2011	103,81
14/08/2011	103,81
15/08/2011	104,78
16/08/2011	105,42
17/08/2011	106,88
18/08/2011	105,42
19/08/2011	103,36
20/08/2011	103,36
21/08/2011	103,36
22/08/2011	103,84

23/08/2011	105,91
24/08/2011	106,53
25/08/2011	107,61
26/08/2011	107,52
27/08/2011	107,52
28/08/2011	107,52
29/08/2011	108,36
30/08/2011	109,48
31/08/2011	111,4
01/09/2011	111,21
02/09/2011	110,37
03/09/2011	110,37
04/09/2011	110,37
05/09/2011	108,42
06/09/2011	108,32
07/09/2011	111,33
08/09/2011	112,15
09/09/2011	110,4
10/09/2011	110,4
11/09/2011	110,4
12/09/2011	107,86
13/09/2011	108,42
14/09/2011	107,91
15/09/2011	109,58
16/09/2011	110,69
17/09/2011	110,69
18/09/2011	110,69
19/09/2011	108,68
20/09/2011	108,29
21/09/2011	108,99
22/09/2011	105,11
23/09/2011	104,37
24/09/2011	104,37
25/09/2011	104,37
26/09/2011	101,81
27/09/2011	104,53
28/09/2011	104,34
29/09/2011	103,11
30/09/2011	101,57
01/10/2011	101,57
02/10/2011	101,57
03/10/2011	99,71
04/10/2011	98,59
05/10/2011	99,9
06/10/2011	101,63
07/10/2011	103,22
08/10/2011	103,22

09/10/2011	103,22
10/10/2011	104,67
11/10/2011	105,61
12/10/2011	107,68
13/10/2011	107,05
14/10/2011	109,01
15/10/2011	109,01
16/10/2011	109,01
17/10/2011	110,13
18/10/2011	107,94
19/10/2011	108,65
20/10/2011	107,19
21/10/2011	108,31
22/10/2011	108,31
23/10/2011	108,31
24/10/2011	109,11
25/10/2011	109,47
26/10/2011	108,83
27/10/2011	109,09
28/10/2011	109,15
29/10/2011	109,15
30/10/2011	109,15
31/10/2011	107,12
01/11/2011	106,35
02/11/2011	108,65
03/11/2011	107,95
04/11/2011	109,96
05/11/2011	109,96
06/11/2011	109,96
07/11/2011	111,08
08/11/2011	113,79
09/11/2011	113,13
10/11/2011	111,67
11/11/2011	113,01
12/11/2011	113,01
13/11/2011	113,01
14/11/2011	112,69
15/11/2011	112,19
16/11/2011	112,26
17/11/2011	110,82
18/11/2011	109,12
19/11/2011	109,12
20/11/2011	109,12
21/11/2011	107,74
22/11/2011	108,34
23/11/2011	108,32
24/11/2011	108,1

25/11/2011	107,73
26/11/2011	107,73
27/11/2011	107,73
28/11/2011	108,75
29/11/2011	109,74
30/11/2011	110,38
01/12/2011	109,36
02/12/2011	109,61
03/12/2011	109,61
04/12/2011	109,61
05/12/2011	110,3
06/12/2011	109,49
07/12/2011	110,05
08/12/2011	108,98
09/12/2011	107,45
10/12/2011	107,45
11/12/2011	107,45
12/12/2011	107,33
13/12/2011	107,65
14/12/2011	106,88
15/12/2011	104,6
16/12/2011	103,57
17/12/2011	103,57
18/12/2011	103,57
19/12/2011	102,91
20/12/2011	105,05
21/12/2011	106,98
22/12/2011	107,49
23/12/2011	107,65
24/12/2011	107,65
25/12/2011	107,65
26/12/2011	107,65
27/12/2011	107,77
28/12/2011	107,52
29/12/2011	106,75
30/12/2011	106,84
31/12/2011	106,84

DATE	prix
01/01/2012	106,84
02/01/2012	106,84
03/01/2012	109,4
04/01/2012	111,73
05/01/2012	113
06/01/2012	112,23
07/01/2012	112,23
08/01/2012	112,23
09/01/2012	112,51
10/01/2012	112,98
11/01/2012	112,9
12/01/2012	112,93
13/01/2012	111,75
14/01/2012	111,75
15/01/2012	111,75
16/01/2012	111,71
17/01/2012	112,24
18/01/2012	111,78
19/01/2012	111,59
20/01/2012	111,37
21/01/2012	111,37
22/01/2012	111,37
23/01/2012	111,78
24/01/2012	111,49
25/01/2012	110,7
26/01/2012	111,26
27/01/2012	111,31
28/01/2012	111,31
29/01/2012	111,31
30/01/2012	111,11
31/01/2012	111,21
01/02/2012	110,61
02/02/2012	110,82
03/02/2012	111,26
04/02/2012	111,26
05/02/2012	111,26
06/02/2012	113,39
07/02/2012	114,68
08/02/2012	115,18
09/02/2012	116,26
10/02/2012	116,41
11/02/2012	116,41
12/02/2012	116,41
13/02/2012	117,19
14/02/2012	116,63
15/02/2012	117,94

16/02/2012	118,13
17/02/2012	118,59
18/02/2012	118,59
19/02/2012	118,59
20/02/2012	119,19
21/02/2012	119,19
22/02/2012	120,87
23/02/2012	121,69
24/02/2012	122,68
25/02/2012	122,68
26/02/2012	122,68
27/02/2012	123,24
28/02/2012	122,14
29/02/2012	129,79
01/03/2012	122,12
02/03/2012	123,12
03/03/2012	123,12
04/03/2012	123,12
05/03/2012	122,39
06/03/2012	122,02
07/03/2012	121,81
08/03/2012	124,17
09/03/2012	124,19
10/03/2012	124,19
11/03/2012	124,19
12/03/2012	123,92
13/03/2012	124,64
14/03/2012	124,34
15/03/2012	123,08
16/03/2012	122,96
17/03/2012	122,96
18/03/2012	122,96
19/03/2012	124,12
20/03/2012	123,09
21/03/2012	122,95
22/03/2012	121,83
23/03/2012	122,81
24/03/2012	122,81
25/03/2012	122,81
26/03/2012	123,53
27/03/2012	123,54
28/03/2012	122,29
29/03/2012	121,61
30/03/2012	120,89
31/03/2012	120,89
01/04/2012	120,89
02/04/2012	121,62

03/04/2012	122,95
04/04/2012	121,94
05/04/2012	121,15
06/04/2012	121,15
07/04/2012	121,15
08/04/2012	121,15
09/04/2012	120,4
10/04/2012	119,38
11/04/2012	117,8
12/04/2012	118,72
13/04/2012	119,1
14/04/2012	119,1
15/04/2012	119,1
16/04/2012	116,98
17/04/2012	116,27
18/04/2012	115,73
19/04/2012	116,24
20/04/2012	116,46
21/04/2012	116,46
22/04/2012	116,46
23/04/2012	115,5
24/04/2012	115,8
25/04/2012	116,05
26/04/2012	117,14
27/04/2012	117,25
28/04/2012	117,25
29/04/2012	117,25
30/04/2012	117,2
01/05/2012	117,08
02/05/2012	116,68
03/05/2012	115,31
04/05/2012	112,23
05/05/2012	112,23
06/05/2012	112,23
07/05/2012	110,12
08/05/2012	109,58
09/05/2012	109,85
10/05/2012	110,06
11/05/2012	109,24
12/05/2012	109,24
13/05/2012	109,24
14/05/2012	108,14
15/05/2012	108,7
16/05/2012	108,14
17/05/2012	107,1
18/05/2012	105,16
19/05/2012	105,16

20/05/2012	105,16
21/05/2012	105,93
22/05/2012	106,16
23/05/2012	104,16
24/05/2012	103,49
25/05/2012	104,59
26/05/2012	104,59
27/05/2012	104,59
28/05/2012	105,01
29/05/2012	105,13
30/05/2012	102,75
31/05/2012	101,06
01/06/2012	97,44
02/06/2012	97,44
03/06/2012	97,44
04/06/2012	95,48
05/06/2012	96,19
06/06/2012	97,89
07/06/2012	97,7
08/06/2012	95,87
09/06/2012	95,87
10/06/2012	95,87
11/06/2012	97,34
12/06/2012	94,99
13/06/2012	95,56
14/06/2012	95,22
15/06/2012	96,02
16/06/2012	96,02
17/06/2012	96,02
18/06/2012	95,03
19/06/2012	93,73
20/06/2012	93,08
21/06/2012	89,48
22/06/2012	88,74
23/06/2012	88,74
24/06/2012	88,74
25/06/2012	88,92
26/06/2012	90,13
27/06/2012	90,91
28/06/2012	90,92
29/06/2012	92,99
30/06/2012	92,99
01/07/2012	92,99
02/07/2012	94,07
03/07/2012	96,44
04/07/2012	97,3
05/07/2012	98,34

06/07/2012	96,84
07/07/2012	96,84
08/07/2012	96,84
09/07/2012	96,83
10/07/2012	96,33
11/07/2012	96,74
12/07/2012	97,32
13/07/2012	99,1
14/07/2012	99,1
15/07/2012	99,1
16/07/2012	99,93
17/07/2012	101,29
18/07/2012	101,73
19/07/2012	103,71
20/07/2012	103,7
21/07/2012	103,7
22/07/2012	103,7
23/07/2012	100,07
24/07/2012	100,51
25/07/2012	100,21
26/07/2012	101,47
27/07/2012	102,92
28/07/2012	102,92
29/07/2012	102,92
30/07/2012	102,94
31/07/2012	102,22
01/08/2012	102,54
02/08/2012	103,07
03/08/2012	104,46
04/08/2012	104,46
05/08/2012	104,46
06/08/2012	105,67
07/08/2012	107,58
08/08/2012	108,36
09/08/2012	108,39
10/08/2012	109,1
11/08/2012	109,1
12/08/2012	109,1
13/08/2012	109,67
14/08/2012	110,1
15/08/2012	110,65
16/08/2012	112,11
17/08/2012	111,56
18/08/2012	111,56
19/08/2012	111,56
20/08/2012	111,49
21/08/2012	112,28

22/08/2012	112,2
23/08/2012	113,56
24/08/2012	112,12
25/08/2012	112,12
26/08/2012	112,12
27/08/2012	112,04
28/08/2012	110,22
29/08/2012	109,9
30/08/2012	110,66
31/08/2012	111,17
01/09/2012	111,17
02/09/2012	111,17
03/09/2012	112,11
04/09/2012	112,85
05/09/2012	111,2
06/09/2012	111,75
07/09/2012	111,55
08/09/2012	111,55
09/09/2012	111,55
10/09/2012	112,32
11/09/2012	112,68
12/09/2012	113,36
13/09/2012	113,47
14/09/2012	114,87
15/09/2012	114,87
16/09/2012	114,87
17/09/2012	113,72
18/09/2012	110,95
19/09/2012	108,43
20/09/2012	105,88
21/09/2012	108,15
22/09/2012	108,15
23/09/2012	108,15
24/09/2012	107,47
25/09/2012	107,99
26/09/2012	106,84
27/09/2012	108,21
28/09/2012	109,68
29/09/2012	109,68
30/09/2012	109,68
01/10/2012	109,29
02/10/2012	109,32
03/10/2012	107,08
04/10/2012	106,99
05/10/2012	108,77
06/10/2012	108,77
07/10/2012	108,77

08/10/2012	107,94
09/10/2012	109,46
10/10/2012	110,94
11/10/2012	111,35
12/10/2012	111,06
13/10/2012	111,06
14/10/2012	111,06
15/10/2012	110,7
16/10/2012	111,09
17/10/2012	110,24
18/10/2012	109,77
19/10/2012	108,99
20/10/2012	108,99
21/10/2012	108,99
22/10/2012	107,13
23/10/2012	105,94
24/10/2012	105,68
25/10/2012	105,83
26/10/2012	106,37
27/10/2012	106,37
28/10/2012	106,37
29/10/2012	105,97
30/10/2012	106,12
31/10/2012	106,16
01/11/2012	106,26
02/11/2012	105,06
03/11/2012	105,06
04/11/2012	105,06
05/11/2012	103,42
06/11/2012	105,79
07/11/2012	106,87
08/11/2012	104,58
09/11/2012	105,21
10/11/2012	105,21
11/11/2012	105,21
12/11/2012	106,59
13/11/2012	105,97
14/11/2012	106,21
15/11/2012	107,23
16/11/2012	107,04
17/11/2012	107,04
18/11/2012	107,04
19/11/2012	108,76
20/11/2012	108,33
21/11/2012	107,88
22/11/2012	107,94
23/11/2012	108,08

24/11/2012	108,08
25/11/2012	108,08
26/11/2012	108,48
27/11/2012	108,07
28/11/2012	106,99
29/11/2012	107,49
30/11/2012	108,59
01/12/2012	108,59
02/12/2012	108,59
03/12/2012	108,44
04/12/2012	107,66
05/12/2012	107,2
06/12/2012	105,64
07/12/2012	104,75
08/12/2012	104,75
09/12/2012	104,75
10/12/2012	105,01
11/12/2012	104,8
12/12/2012	105,83
13/12/2012	106,01
14/12/2012	105,77
15/12/2012	105,77
16/12/2012	105,77
17/12/2012	106,07
18/12/2012	106,38
19/12/2012	107,1
20/12/2012	107,2
21/12/2012	106,63
22/12/2012	106,63
23/12/2012	106,63
24/12/2012	105,91
25/12/2012	105,91
26/12/2012	106,92
27/12/2012	108,03
28/12/2012	107,87
29/12/2012	107,87
30/12/2012	107,87
31/12/2012	107,76

DATE	prix
01/01/2013	107,76
02/01/2013	108,96
03/01/2013	109,15
04/01/2013	108,68
05/01/2013	108,68
06/01/2013	108,68
07/01/2013	108,15
08/01/2013	108,72
09/01/2013	109,01
10/01/2013	109,3
11/01/2013	108,2
12/01/2013	108,2
13/01/2013	108,2
14/01/2013	108,06
15/01/2013	108,35
16/01/2013	107,75
17/01/2013	108,01
18/01/2013	108,92
19/01/2013	108,92
20/01/2013	108,92
21/01/2013	109,32
22/01/2013	109,48
23/01/2013	109,71
24/01/2013	109,88
25/01/2013	110,2
26/01/2013	110,2
27/01/2013	110,2
28/01/2013	110,15
29/01/2013	110,52
30/01/2013	111,43
31/01/2013	112,3
01/02/2013	112,62
02/02/2013	112,62
03/02/2013	112,62
04/02/2013	112,99
05/02/2013	112,68
06/02/2013	113,1
07/02/2013	113,67
08/02/2013	114,44
09/02/2013	114,44
10/02/2013	114,44
11/02/2013	114,36
12/02/2013	114,3
13/02/2013	114,94
14/02/2013	114,67
15/02/2013	114,23

16/02/2013	114,23
17/02/2013	114,23
18/02/2013	114,18
19/02/2013	113,62
20/02/2013	113,28
21/02/2013	111,27
22/02/2013	110,94
23/02/2013	110,94
24/02/2013	110,94
25/02/2013	111,2
26/02/2013	110,1
27/02/2013	109,69
28/02/2013	108,62
01/03/2013	106,79
02/03/2013	106,79
03/03/2013	106,79
04/03/2013	106,12
05/03/2013	106,99
06/03/2013	107,64
07/03/2013	107,31
08/03/2013	107,06
09/03/2013	107,06
10/03/2013	107,06
11/03/2013	106,96
12/03/2013	106,51
13/03/2013	106,05
14/03/2013	105,88
15/03/2013	106,62
16/03/2013	106,62
17/03/2013	106,62
18/03/2013	106,36
19/03/2013	106,52
20/03/2013	105,85
21/03/2013	105,69
22/03/2013	105,13
23/03/2013	105,13
24/03/2013	105,13
25/03/2013	105,48
26/03/2013	105,86
27/03/2013	106,79
28/03/2013	107,23
29/03/2013	107,23
30/03/2013	107,23
31/03/2013	107,23
01/04/2013	106,97
02/04/2013	108,16
03/04/2013	106,8

04/04/2013	104,21
05/04/2013	103,1
06/04/2013	103,1
07/04/2013	103,1
08/04/2013	102,35
09/04/2013	102,72
10/04/2013	103,26
11/04/2013	102,44
12/04/2013	100,63
13/04/2013	100,63
14/04/2013	100,63
15/04/2013	98,56
16/04/2013	97,15
17/04/2013	96,71
18/04/2013	96,35
19/04/2013	97,4
20/04/2013	97,4
21/04/2013	97,4
22/04/2013	97,75
23/04/2013	97,52
24/04/2013	98,96
25/04/2013	99,89
26/04/2013	100,7
27/04/2013	100,7
28/04/2013	100,7
29/04/2013	100,91
30/04/2013	100,65
01/05/2013	99,97
02/05/2013	98,97
03/05/2013	101,47
04/05/2013	101,47
05/05/2013	101,47
06/05/2013	102,61
07/05/2013	102,75
08/05/2013	102,11
09/05/2013	101,67
10/05/2013	101,07
11/05/2013	101,07
12/05/2013	101,07
13/05/2013	100,47
14/05/2013	100,29
15/05/2013	99,66
16/05/2013	100,85
17/05/2013	101,45
18/05/2013	101,45
19/05/2013	101,45
20/05/2013	101,95

21/05/2013	101,39
22/05/2013	100,36
23/05/2013	99,03
24/05/2013	99,15
25/05/2013	99,15
26/05/2013	99,15
27/05/2013	99,56
28/05/2013	101,11
29/05/2013	100,54
30/05/2013	99,77
31/05/2013	98,78
01/06/2013	98,78
02/06/2013	98,78
03/06/2013	98,88
04/06/2013	99,87
05/06/2013	101,09
06/06/2013	100,93
07/06/2013	101,64
08/06/2013	101,64
09/06/2013	101,64
10/06/2013	101,38
11/06/2013	100,72
12/06/2013	100,89
13/06/2013	101,26
14/06/2013	103,33
15/06/2013	103,33
16/06/2013	103,33
17/06/2013	103,85
18/06/2013	103,1
19/06/2013	103,78
20/06/2013	101,4
21/06/2013	99,82
22/06/2013	99,82
23/06/2013	99,82
24/06/2013	98,33
25/06/2013	99,79
26/06/2013	99,39
27/06/2013	100,37
28/06/2013	100,78
29/06/2013	100,78
30/06/2013	100,78
01/07/2013	100,1
02/07/2013	100,63
03/07/2013	102,24
04/07/2013	102,39
05/07/2013	103,2
06/07/2013	103,2

07/07/2013	103,2
08/07/2013	103,96
09/07/2013	104,06
10/07/2013	104,69
11/07/2013	104,81
12/07/2013	104,82
13/07/2013	104,82
14/07/2013	104,82
15/07/2013	105,31
16/07/2013	105,39
17/07/2013	105,28
18/07/2013	106,11
19/07/2013	106,4
20/07/2013	106,4
21/07/2013	106,4
22/07/2013	106,14
23/07/2013	105,95
24/07/2013	105,44
25/07/2013	105,28
26/07/2013	105,1
27/07/2013	105,1
28/07/2013	105,1
29/07/2013	105,21
30/07/2013	104,92
31/07/2013	104,97
01/08/2013	106,1
02/08/2013	106,65
03/08/2013	106,65
04/08/2013	106,65
05/08/2013	106,43
06/08/2013	105,56
07/08/2013	104,89
08/08/2013	104,47
09/08/2013	104,94
10/08/2013	104,94
11/08/2013	104,94
12/08/2013	105,27
13/08/2013	106,75
14/08/2013	106,69
15/08/2013	107,96
16/08/2013	107,8
17/08/2013	107,8
18/08/2013	107,8
19/08/2013	107,83
20/08/2013	107,06
21/08/2013	106,95
22/08/2013	107,58

23/08/2013	108,25
24/08/2013	108,25
25/08/2013	108,25
26/08/2013	108,36
27/08/2013	109,28
28/08/2013	112,25
29/08/2013	112,8
30/08/2013	111,55
31/08/2013	111,55
01/09/2013	111,55
02/09/2013	110,32
03/09/2013	111,2
04/09/2013	111,55
05/09/2013	111,47
06/09/2013	112,1
07/09/2013	112,1
08/09/2013	112,1
09/09/2013	111,39
10/09/2013	109,26
11/09/2013	109,4
12/09/2013	109,83
13/09/2013	109,87
14/09/2013	109,87
15/09/2013	109,87
16/09/2013	109,04
17/09/2013	107,64
18/09/2013	107,26
19/09/2013	108,4
20/09/2013	107,34
21/09/2013	107,34
22/09/2013	107,34
23/09/2013	106,52
24/09/2013	105,8
25/09/2013	106,53
26/09/2013	106,34
27/09/2013	106,47
28/09/2013	106,47
29/09/2013	106,47
30/09/2013	105,61
01/10/2013	105,42
02/10/2013	106,08
03/10/2013	106,79
04/10/2013	106,94
05/10/2013	106,94
06/10/2013	106,94
07/10/2013	106,45
08/10/2013	107,36

09/10/2013	106,94
10/10/2013	107,69
11/10/2013	108,15
12/10/2013	108,15
13/10/2013	108,15
14/10/2013	108
15/10/2013	107,64
16/10/2013	107,19
17/10/2013	107,02
18/10/2013	106,54
19/10/2013	106,54
20/10/2013	106,54
21/10/2013	106,76
22/10/2013	106,77
23/10/2013	106,34
24/10/2013	105,37
25/10/2013	104,97
26/10/2013	104,97
27/10/2013	104,97
28/10/2013	105,75
29/10/2013	106,36
30/10/2013	106,31
31/10/2013	106,75
01/11/2013	105,53
02/11/2013	105,53
03/11/2013	105,53
04/11/2013	104,22
05/11/2013	103,83
06/11/2013	103,82
07/11/2013	102,64
08/11/2013	102,12
09/11/2013	102,12
10/11/2013	102,12
11/11/2013	103,39
12/11/2013	103,6
13/11/2013	103,52
14/11/2013	104,67
15/11/2013	105,24
16/11/2013	105,24
17/11/2013	105,24
18/11/2013	105,04
19/11/2013	105,02
20/11/2013	104,58
21/11/2013	105,4
22/11/2013	106,73
23/11/2013	106,73
24/11/2013	106,73

25/11/2013	106,07
26/11/2013	107,36
27/11/2013	107,14
28/11/2013	107,34
29/11/2013	107,07
30/11/2013	107,07
01/12/2013	107,07
02/12/2013	106,74
03/12/2013	108,08
04/12/2013	108,92
05/12/2013	108,22
06/12/2013	108
07/12/2013	108
08/12/2013	108
09/12/2013	107,72
10/12/2013	106,83
11/12/2013	106,81
12/12/2013	106,96
13/12/2013	105,95
14/12/2013	105,95
15/12/2013	105,95
16/12/2013	106,92
17/12/2013	106,57
18/12/2013	106,74
19/12/2013	107,49
20/12/2013	108,15
21/12/2013	108,15
22/12/2013	108,15
23/12/2013	108,73
24/12/2013	108,76
25/12/2013	108,76
26/12/2013	108,76
27/12/2013	109,35
28/12/2013	109,35
29/12/2013	109,35
30/12/2013	108,57
31/12/2013	107,94

DATE	prix
01/01/2014	106,85
02/01/2014	106,85
03/01/2014	104,99
04/01/2014	104,99
05/01/2014	104,99
06/01/2014	104,33
07/01/2014	104,51
08/01/2014	104,43
09/01/2014	104,28
10/01/2014	104,09
11/01/2014	104,09
12/01/2014	104,09
13/01/2014	103,93
14/01/2014	103,92
15/01/2014	104,28
16/01/2014	104,39
17/01/2014	103,98
18/01/2014	103,98
19/01/2014	103,98
20/01/2014	104,17
21/01/2014	105,26
22/01/2014	105,62
23/01/2014	106,11
24/01/2014	105,04
25/01/2014	105,04
26/01/2014	105,04
27/01/2014	104,62
28/01/2014	104,67
29/01/2014	104,57
30/01/2014	105,09
31/01/2014	104,45
01/02/2014	104,45
02/02/2014	104,45
03/02/2014	102,55
04/02/2014	102,55
05/02/2014	102,63
06/02/2014	103,34
07/02/2014	104,41
08/02/2014	104,41
09/02/2014	104,41
10/02/2014	105,52
11/02/2014	105,3
12/02/2014	105,46
13/02/2014	105,27
14/02/2014	105,58
15/02/2014	105,58

16/02/2014	105,58
17/02/2014	106,11
18/02/2014	106,53
19/02/2014	107,15
20/02/2014	106,79
21/02/2014	106,68
22/02/2014	106,68
23/02/2014	106,68
24/02/2014	106,7
25/02/2014	106,55
26/02/2014	106,49
27/02/2014	106,1
28/02/2014	105,92
01/03/2014	105,92
02/03/2014	105,92
03/03/2014	107,8
04/03/2014	106,3
05/03/2014	105,24
06/03/2014	104,37
07/03/2014	104,98
08/03/2014	104,98
09/03/2014	104,98
10/03/2014	104,48
11/03/2014	104,38
12/03/2014	103,75
13/03/2014	103,71
14/03/2014	103,83
15/03/2014	103,83
16/03/2014	103,83
17/03/2014	103,85
18/03/2014	103,29
19/03/2014	103,16
20/03/2014	102,37
21/03/2014	103,3
22/03/2014	103,3
23/03/2014	103,3
24/03/2014	103,13
25/03/2014	103,39
26/03/2014	103,62
27/03/2014	103,79
28/03/2014	104,27
29/03/2014	104,27
30/03/2014	104,27
31/03/2014	104,08
01/04/2014	103,25
02/04/2014	101,72
03/04/2014	101,57

04/04/2014	103,12
05/04/2014	103,12
06/04/2014	103,12
07/04/2014	102,16
08/04/2014	103,16
09/04/2014	104,22
10/04/2014	104,33
11/04/2014	104,07
12/04/2014	104,07
13/04/2014	104,07
14/04/2014	104,81
15/04/2014	105,21
16/04/2014	106,06
17/04/2014	105,53
18/04/2014	105,53
19/04/2014	105,53
20/04/2014	105,53
21/04/2014	105,53
22/04/2014	105,34
23/04/2014	105,19
24/04/2014	104,99
25/04/2014	105,2
26/04/2014	105,37
27/04/2014	105,37
28/04/2014	105,37
29/04/2014	105,43
30/04/2014	104,95
01/05/2014	103,95
02/05/2014	103,77
03/05/2014	104,25
04/05/2014	104,25
05/05/2014	104,25
06/05/2014	104,35
07/05/2014	103,69
08/05/2014	103,68
09/05/2014	103,94
10/05/2014	104,46
11/05/2014	104,46
12/05/2014	104,46
13/05/2014	104,21
14/05/2014	104,5
15/05/2014	105,62
16/05/2014	105,66
17/05/2014	105,95
18/05/2014	105,95
19/05/2014	105,95
20/05/2014	106,43

21/05/2014	106,18
22/05/2014	106,82
23/05/2014	107
24/05/2014	106,92
25/05/2014	106,92
26/05/2014	106,92
27/05/2014	106,73
28/05/2014	106,79
29/05/2014	106,35
30/05/2014	106,45
31/05/2014	105,91
01/06/2014	105,91
02/06/2014	105,3
03/06/2014	105,14
04/06/2014	105,56
05/06/2014	104,73
06/06/2014	105,38
07/06/2014	105,38
08/06/2014	105,38
09/06/2014	105,72
10/06/2014	105,89
11/06/2014	106,02
12/06/2014	107,46
13/06/2014	109,31
14/06/2014	109,31
15/06/2014	109,31
16/06/2014	109,09
17/06/2014	108,81
18/06/2014	109,6
19/06/2014	110,26
20/06/2014	110,48
21/06/2014	110,48
22/06/2014	110,48
23/06/2014	110,3
24/06/2014	109,62
25/06/2014	109,63
26/06/2014	109,38
27/06/2014	109,17
28/06/2014	109,17
29/06/2014	109,17
30/06/2014	108,59
01/07/2014	108,68
02/07/2014	108,35
03/07/2014	107,17
04/07/2014	107,34
05/07/2014	107,34
06/07/2014	107,34

07/07/2014	106,89
08/07/2014	106,25
09/07/2014	105,49
10/07/2014	105,16
11/07/2014	104,87
12/07/2014	104,87
13/07/2014	104,87
14/07/2014	104,12
15/07/2014	103,65
16/07/2014	104,44
17/07/2014	105,04
18/07/2014	105,54
19/07/2014	105,54
20/07/2014	105,54
21/07/2014	105,07
22/07/2014	105,74
23/07/2014	105,3
24/07/2014	105,22
25/07/2014	105,31
26/07/2014	105,31
27/07/2014	105,31
28/07/2014	105,11
29/07/2014	105,44
30/07/2014	105,21
31/07/2014	103,6
01/08/2014	102,89
02/08/2014	102,89
03/08/2014	102,89
04/08/2014	102,58
05/08/2014	102,23
06/08/2014	102,05
07/08/2014	102,22
08/08/2014	103,1
09/08/2014	103,1
10/08/2014	103,1
11/08/2014	102,29
12/08/2014	101,66
13/08/2014	100,88
14/08/2014	100,99
15/08/2014	99,94
16/08/2014	99,94
17/08/2014	99,94
18/08/2014	99,42
19/08/2014	98,93
20/08/2014	99,52
21/08/2014	99,03
22/08/2014	99,19

23/08/2014	99,19
24/08/2014	99,19
25/08/2014	99,09
26/08/2014	99,82
27/08/2014	100,06
28/08/2014	99,97
29/08/2014	99,99
30/08/2014	99,99
31/08/2014	99,99
01/09/2014	100,1
02/09/2014	98,95
03/09/2014	98,66
04/09/2014	99,15
05/09/2014	98,38
06/09/2014	98,38
07/09/2014	98,38
08/09/2014	97
09/09/2014	96,99
10/09/2014	95,93
11/09/2014	95,35
12/09/2014	95,68
13/09/2014	95,68
14/09/2014	95,68
15/09/2014	94,68
16/09/2014	95,3
17/09/2014	95,84
18/09/2014	95,19
19/09/2014	94,44
20/09/2014	94,44
21/09/2014	94,44
22/09/2014	94,37
23/09/2014	94,31
24/09/2014	94,18
25/09/2014	94,25
26/09/2014	94,13
27/09/2014	94,13
28/09/2014	94,13
29/09/2014	94,54
30/09/2014	94,17
01/10/2014	92,19
02/10/2014	90,4
03/10/2014	90,33
04/10/2014	90,33
05/10/2014	90,33
06/10/2014	90,4
07/10/2014	89,37
08/10/2014	88,32

09/10/2014	88,27
10/10/2014	86,43
11/10/2014	86,43
12/10/2014	86,43
13/10/2014	85,93
14/10/2014	85,14
15/10/2014	81,89
16/10/2014	81,17
17/10/2014	83,19
18/10/2014	83,19
19/10/2014	83,19
20/10/2014	82,37
21/10/2014	82,09
22/10/2014	81,94
23/10/2014	81,67
24/10/2014	82,48
25/10/2014	82,48
26/10/2014	82,48
27/10/2014	82,37
28/10/2014	82,44
29/10/2014	83,24
30/10/2014	82,79
31/10/2014	81,97
01/11/2014	81,97
02/11/2014	81,97
03/11/2014	80,64
04/11/2014	78,67
05/11/2014	78,11
06/11/2014	78,27
07/11/2014	78,67
08/11/2014	78,67
09/11/2014	78,67
10/11/2014	78,98
11/11/2014	77,27
12/11/2014	76,96
13/11/2014	75,15
14/11/2014	73,47
15/11/2014	73,47
16/11/2014	73,47
17/11/2014	73,9
18/11/2014	74,36
19/11/2014	74,05
20/11/2014	74,03
21/11/2014	75,42
22/11/2014	75,42
23/11/2014	75,42
24/11/2014	75,7

25/11/2014	74,28
26/11/2014	73,7
27/11/2014	70,8
28/11/2014	68,89
29/11/2014	68,89
30/11/2014	68,89
01/12/2014	66,44
02/12/2014	68,13
03/12/2014	67,31
04/12/2014	66,27
05/12/2014	65,32
06/12/2014	65,32
07/12/2014	65,32
08/12/2014	63,78
09/12/2014	62,33
10/12/2014	61,35
11/12/2014	60,5
12/12/2014	58,65
13/12/2014	58,65
14/12/2014	58,65
15/12/2014	57,92
16/12/2014	55,91
17/12/2014	55,64
18/12/2014	56,3
19/12/2014	55,52
20/12/2014	55,52
21/12/2014	55,52
22/12/2014	56,9
23/12/2014	55,59
24/12/2014	56,03
25/12/2014	56,03
26/12/2014	56,03
27/12/2014	56,03
28/12/2014	56,03
29/12/2014	54,44
30/12/2014	52,39
31/12/2014	52