Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar – Annaba –

Badji Mokhtar University – Annaba–

جامعة باجي مختار

–عنابة–

Année 2016/2017

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Option

Systèmes Dynamiques

Présentée par

BOUSBIAT Lilia

DIRECTEUR DE THÈSE :	MAKHLOUF Ammar	PROF.	U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRÉSIDENT :	LAOUAR Abdelhamid	MCA.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	SALMI Abdelwaheb	MCA.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	BADI Sabrina	MCA.	UNIV. DE GUELMA
EXAMINATEUR :	HADIDI Elbahi	MCA.	U.B.M. ANNABA

Remerciements

Avant tout je tiens à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse **Pr. Amar Makhlouf** pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour sa disponibilité et sa patience, pour ses qualités humaines et scientifiques. Un grand merci de m'avoir donné la chance de réaliser ce modeste travail.

Mes plus sincères remerciements vont également à **Pr. Abdelhamid Laouer** qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ainsi que Monsieur Selmi Abdelwaheb, Madame Badi Sabrina et Monsieur Hadidi Elbahi pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Un remerciement tout particulier à Mr Paul Raynaud De Fitte, professeur à l'université de Rouen de m'avoir accueilli au laboratoire de mathématique Rafael Salam, Rouen.

Je tiens à exprimer mes remerciements à tous les miens qui m'ont soutenu par leur amour et leur confiance. À mes amis qui trouveront ici toute ma reconnaissance pour leurs aides et encouragements à terminer cette thèse, plus particulièrement Rym, Zeyneb et Safia.

Ces remerciements ne peuvent s'achever sans remercier ma famille, Sa présence et ses encouragements sont pour moi les piliers fondateurs de ce que je suis et de ce que je fais !

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier les solutions périodiques de certains systèmes différentiels polynômiaux en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre. Cette étude est illustrée par des applications. Le premier système étudié est du deuxième ordre, de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \varepsilon P(x,y) + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + \varepsilon Q(x,y) + h_2(t), \end{aligned}$$

où P, Q sont des polynômes en x, y de degré n, $h_i(t) = h_i(t+2\pi)$ avec $i = 1, 2$, sont des fonctions périodiques et ε est un petit paramètre.

Le deuxième système est du troisième ordre, de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \varepsilon P(x,y,z) + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + \varepsilon Q(x,y,z) + h_2(t), \\ \dot{z} &= az + \varepsilon R(x,y,z) + h_3(t), \end{aligned}$$

où a est un nombre réel, P, Q et R sont des polynômes en x, y, z de degré n, $h_i(t) = h_i(t+2\pi)$ avec $i = 1, 2, 3$ sont des fonctions périodiques et ε est un petit paramètre.

Enfin, on étudie le système différentiel polynômial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} P_1(x,y,u,v) \\ P_2(x,y,u,v) \\ P_3(x,y,u,v) \\ P_4(x,y,u,v) \end{pmatrix},$$

où A est une matrice constante de dimension 4×4, P_1, P_2, P_3 et P_4 sont des polynômes en x, y, u, v de degré n, $h_i(t) = h_i(t+2\pi)$ avec $i = 1, 2, 3, 4$ sont des fonctions périodiques et ε est un petit paramètre.

Mots-clés: Solution périodique, Système différentiel, Méthode de moyennisation.

Classification AMS: 34C25-34C29-58F21.

Abstract

The objective of this thesis is to study the periodic solutions of some polynomial differential systems using averaging method of first order, this study is illustrated by applications. The first system studied is of second order which takes the form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y+\varepsilon P(x,y)+h_1(t), \\ \dot{y} &= x+\varepsilon Q(x,y)+h_2(t), \end{aligned}$$

where P, Q are polynomials in the variables x, y of degrees n, $h_i(t)=h_i(t+2\pi)$ with $i=1,2$, being periodic functions and ε is a small parameter.

The second system is of third order and takes the form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y+\varepsilon P(x,y,z)+h_1(t), \\ \dot{y} &= x+\varepsilon Q(x,y,z)+h_2(t), \\ \dot{z} &= az+\varepsilon R(x,y,z)+h_3(t), \end{aligned}$$

where a is a real number, P,Q and R are polynomials in the variables x, y, z of degrees n, $h_i(t)=h_i(t+2\pi)$ with $i=1,2,3$ being periodic functions and ε is a small parameter.

Finally we study the following differential system

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} P_1(x,y,u,v) \\ P_2(x,y,u,v) \\ P_3(x,y,u,v) \\ P_4(x,y,u,v) \end{pmatrix},$$

where A is 4×4 constant matrix, P_1, P_2, P_3 and P_4 are polynomials in the variables x, y, u, v of degrees n, $h_i(t)=h_i(t+2\pi)$ with $i=1,2,3,4$ being periodic functions and ε is a small parameter.

Key words: Periodic solution, Differential system, Averaging method.

Classification AMS: 34C25-34C29-58F21.

ملخص

هدفنا في هذه الأطروحة هو دراسة الحلول الدورية لبعض الجمل التفاضلية متعددة الحدود باستخدام طريقة المتوسط من الدرجة الأولى، هذه الدراسة موضحة بتطبيقات. الجملة الاولى المدروسة من الدرجة الثانية و من الشكل التالي

$$\begin{aligned} x' &= -y + \varepsilon P(x,y) + h_1(t), \\ y' &= x + \varepsilon Q(x,y) + h_2(t), \end{aligned}$$

بحيث ، Q و P هم متعددو الحدود في المتغيرات x, y من الدرجة n, $h_i(t+2\pi) = h_i(t)$,بحيث i=1,2, دوال دورية ذات الدور 2π و ε وسيط صغير.

الجملة الثانية المدروسة من الدرجة الثالثة و من الشكل التالي

$$\begin{aligned} x' &= -y + \varepsilon P(x,y,z) + h_1(t), \\ y' &= x + \varepsilon Q(x,y,z) + h_2(t), \\ z' &= a.z + \varepsilon R(x,y,z) + h_3(t), \end{aligned}$$

بحيث a عدد حقيقي, P، Q و R هم متعددو الحدود في المتغيرات x, y, z من الدرجة n, $h_i(t+2\pi) = h_i(t)$ بحيث i=1,2,3 دوال دورية ذات الدور 2π و ε وسيط صغير.

الجملة الثالثة المدروسة من الدرجة الرابعة و من الشكل التالي

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ u' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} P_1(x,y,z,u) \\ P_2(x,y,z,u) \\ P_3(x,y,z,u) \\ P_4(x,y,z,u) \end{pmatrix}$$

بحيث A مصفوفة ثابتة من حجم 4*4, P_i هم متعددو الحدود من الدرجة n, $h_i(t+2\pi) = h_i(t)$ بحيث i=1,2,3,4 دوال دورية ذات الدور 2π و ε وسيط صغير.

الكلمات المفتاحية :

نظام تفاضلي، دورة الحد, نظرية المتوسط، الحلول الدورية.

Table des matières

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée pour étudier les systèmes physiques qui évoluent au cours du temps. On suppose que l'état d'un système, à un instant donné, peut être représenté par un élément x d'un espace d'état X. L'espace X est de dimension finie (un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou plus généralement une variété différentiable). L'évolution du système est décrite par un système différentiel sur X qu'on écrira

$$\dot{x} = f(x), \; x \in X, \tag{i}$$

où $f : X \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs sur X. Ainsi, (i) représente un système autonome d'équations différentielles ordinaires.

La théorie des systèmes dynamiques a son origine dans les travaux de H.Poincaré, à la fin du 19ème siècle, sur la théorie des équations différentielles de la dynamique, développés à partir de son étude sur le problème à trois corps [8]. L'une des solutions de ces équations était si compliquée et irrégulière pour une certaine configuration qu'elle semblait aller au hasard. Mais il était possible, sans avoir à écrire exactement les solutions, de décrire la nature de celles-ci, c'est-à-dire leur comportement structurel, d'équilibre stable ou instable. Poincaré introduisait alors la notion de «cycle limite». Vers 1892, Alexandre M. Lyapounov avait effectué des travaux dans la même direction sur la stabilité du mouvement. A. M. Andronov, l'un des pionniers de l'école mathématique russe des systèmes dynamiques, avait repris les résultats de Poincaré et de Lyapounov, les appliquant à des situations physiques dans le domaine des systèmes physiques dissipatifs, il avait développé une théorie générale des oscillations non-linéaires centrée autour de l'idée de système auto-oscillant et de bifurcations. Par la suite, avec les travaux de Birkhoff et d'autres s'est dégagée la notion de système abstrait, de flot et d'ensembles limites.

Un des problèmes importants dans la théorie des systèmes différentiels est l'étude des orbites périodiques, leur existence, leur nombre et leur stabilité. Un cycle limite d'un système différentiel est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de ce système. En général, obtenir des solutions périodiques est un problème difficile et souvent impossible. La méthode de moyennisation réduit ce problème difficile des systèmes différentiels à la recherche des racines positives d'un système algébrique non linéaire. Cette méthode est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des solutions périodiques des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par Krylov et Bogoliubov en 1937 [13] et Bogoliubov et Mitropolskii (1961) [5]. Elle a été ensuite développée par Verhulst [40], Sanders et Verhulst [33], Malkin (1956) [24], Roseau (1966) [31], Llibre et Buica (2004) [6]...

L'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \tag{ii}$$

où t$\in I \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon << 1$ et f est T-périodique en t, et de déterminer l'équation moyennée associée à cette équation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(x), \tag{iii}$$

où

$$F(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x, 0)dt,$$

et chercher les solutions périodiques de l'équation (ii).

Beaucoup de classes d'importants problèmes en mécanique classique,...., peuvent être transformées en l'équation (ii). D'autres formes et théorèmes de la méthode de moyennisation ont été démontrés ces dernières années [7] et beaucoup d'articles ont été publiés concernant l'application de cette méthode.

Récemment l'étude des solutions périodiques des systèmes différentiels polynômiaux de dimension trois a été considérée par différent auteurs; ([9],[17],[19],[30],.........). Dans

[30], D. Pi et X. Zhang, ont prouvé que le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \varepsilon P(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + \varepsilon Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= \varepsilon R(x, y, z), \end{aligned} \tag{iv}$$

où P, Q et R sont des polynômes en x, y, z de degré n., a au plus $n(n-1)/2$ cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du système linéaire $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$, $\dot{z} = 0$. Dans [9], A. Cima, J. Llibre et M. A. Teixeira ont trouvé que le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \varepsilon(ax + P(x, y, z)), \\ \dot{y} &= x + \varepsilon(ay + Q(x, y, z)), \\ \dot{z} &= \varepsilon(cz + R(x, y, z)), \end{aligned}$$

a au moins n(n-1)/2 cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du système $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$, $\dot{z} = 0$, où P, Q et R sont des polynômes de degré n en commençant par des termes de degré 2. Dans [17], J. Llibre, J. Yu et X. Zhang ont considéré le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \varepsilon P(x, y, z), \\ \dot{y} &= x + \varepsilon Q(x, y, z) + \varepsilon \cos t, \\ \dot{z} &= az + \varepsilon R(x, y, z), \end{aligned}$$

où P, Q et R sont des polynômes en x, y, z de degré n et a est un nombre réel différent de zéro. Ils ont trouvé que ce système a au moins $m \in \{1, 2, ..., 2[(n-1)/2+1]\}$ cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire contenue dans $z = 0$ quand $\varepsilon = 0$. Dans [19], J. Llibre et A. Makhlouf ont considéré le système (iv), avec P, Q et R sont des polynômes de degré n_1, n_2, n_3. Ils ont trouvé qu'il existe au plus $[(m-1)/2]n_3$ cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du système différentiel linéaire $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$, $\dot{z} = 0$ où $m = \max\{n_1, n_2\}$.

On se propose d'étudier l'existence des solutions périodiques du système différentiel perturbé suivant

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + \varepsilon P(x, y, z) + h_1(t), \\
\dot{y} &= x + \varepsilon Q(x, y, z) + h_2(t), \\
\dot{z} &= az + \varepsilon R(x, y, z) + h_3(t),
\end{aligned}$$

où a est un nombre réel, P, Q et R sont des polynômes en x, y et z, de degré n, $h_i(t) = h_i(t + 2\pi)$ avec $i = 1, 2, 3$ sont des fonctions périodiques et ε est un petit paramètre.

L'étude des solutions périodiques des systèmes différentiels de dimension quatre a été considéré par plusieurs auteurs ([9],[17],[19],[30]). Dans notre travail on étudie le système différentiel perturbé de dimension quatre suivant

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} P_1(x, y, u, v) \\ P_2(x, y, u, v) \\ P_3(x, y, u, v) \\ P_4(x, y, u, v) \end{pmatrix},$$

où A est une matrice constante de dimension 4×4, P_1, P_2, P_3 et P_4 sont des polynômes en variables x, y, u et v, de degré n, $h_i(t) = h_i(t + 2\pi)$ avec $i = 1, 2, 3, 4$ sont des fonctions périodiques et ε est un petit paramètre.

Cette thèse comporte cinq chapitres:

Le premier chapitre est un rappel des notions essentielles utilisées pour l'étude des systèmes dynamiques.

Dans le second chapitre, nous avons introduit la théorie de moyennisation pour chercher les cycles limites des systèmes différentiels. Nous avons illustré les résultats par des exemples.

Le troisième chapitre étudie l'existence des solutions périodiques d'un système différentiel polynômial du second ordre en utilisant la méthode de moyennisation.

Dans le chapitre quatre, on étudie l'existence des solutions périodiques d'un système différentiel polynômial du troisième ordre en utilisant la méthode de moyennisation. On distingue deux cas possibles à étudier. Pour chaque cas on démontre un théorème d'existence des solutions périodiques du système différentiel polynômial du troisième ordre correspondant puis on donne une application pour chaque théorème et sa preuve. Ces résultats ont fait l'objet d'une première publication dans la revue "International journal of differential equation" sous le titre

[1]: A. Makhlouf and L. Bousbiat, Periodic solutions of some polynomial differential system in dimension 3 via averaging theory, (Hindawi) International Journal of differential equations, volume 2015, Article ID 263837.

Enfin, dans le dernier chapitre, et comme suite au chapitre précédent, on étudie l'existence des solutions périodiques d'un système différentiel polynômial du quatrième ordre en utilisant la méthode de moyennisation. On distingue cinq cas possibles à étudier. Pour chaque cas on démontre un théorème d'existence des solutions périodiques du système différentiel polynômial du quatrième ordre correspondant puis on donne une application pour chaque théorème et sa preuve. Ces résultats ont fait l'objet d'une deuxième publication dans la revue "journal of applied mathematics and physics" sous le titre

[2]: Amar, M. and Lilia, B. (2017) Periodic Solutions of Some Polynomial Differential Systems in $\mathbb{R}^4$. Journal of Applied Mathematics and Physics, 5, 194-223.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire des notions de base sur les systèmes dynamiques qui seront utiles par la suite.

1.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1.1 *Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie et continue sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que*

i) $U(0, x) = x$

ii) $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ *pour* $t, s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est linéaire si

$$U(t, \alpha x + \beta y) = \alpha U(t, x) + \beta U(t, y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 1.1.1 *Soit le système*

$$\dot{x} = Ax, \;\; x(0) = x_0, \tag{1.1.1}$$

où A est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La solution de (1.1.1) est donnée par

$$x(t) = e^{tA} x_0,$$

le système (1.1.1) engendre un système dynamique

$$\begin{aligned} U &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ U(t, x) &= e^{tA} x. \end{aligned}$$

1.2 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.2.1 *Soit le système non linéaire autonome*

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $f(x) \in \mathbb{R}^n$.

On appelle flot du système différentiel (1.2.1), l'ensemble des applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *définies par*

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

où $\phi(t, x_0)$ *est la solution de (1.2.1) telle que* $\phi(0, x_0) = x_0$.

1.3 Points d'équilibre et linéarisation

Définition 1.3.1 *On appelle point d'équilibre du système (1.2.1) tout point* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que :* $f(x_0) = 0$.

Définition 1.3.2 *On appelle système linéarisé du système (1.2.1) au voisinage du point d'équilibre* x_0, *le système*

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.3.1}$$

où $A = Df(x_0)$ *est la jacobienne de* f *au point* x_0*:*

$$Df(x_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0))_{1 \leq i,j \leq n}. \tag{1.3.2}$$

Définition 1.3.3 *Le point critique* x_0 *est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne* $Df(x_0)$ *n'a de partie réelle nulle.*

Remarque 1.3.1 *La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.*

1.3.1 Nature des points critiques

Soit le système (1.3.1), où A est une matrice 2×2 et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres:

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent alors le point critique $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable.

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe on a trois cas:

   (a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un nœud stable.

   (b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un nœud instable.

   (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $x = x_0$ est un nœud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.

3. Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées et $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un foyer. Il est stable si $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ et il est instable si $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$.

4. Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $x = x_0$ est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable.

1.4 Portrait de phase

Définition 1.4.1 *Soit le système différentiel*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y), \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

où P, Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d.

Le portrait de phase est l'ensemble des orbites qui représentent les solutions du système (1.4.1) dans l'espace des phases ainsi que ces points critiques qui sont considérés comme des solutions constantes. Le plan (xoy) est appelé plan de phase.

1.5 Orbites périodiques et cycles limites

Définition 1.5.1 *On appelle solution périodique toute solution $x = \phi(t)$ de l'équation (1.2.1) telle qu'il existe un nombre T vérifiant $\phi(t + T) = \phi(t)$.*

Une solution périodique du système (1.2.1) correspond a une orbite (courbe) fermée dans l'espace des phases.

Définition 1.5.2 *Un cycle limite est une solution périodique isolée, c'est à dire qu'il existe un voisinage de ce cycle où on ne peut pas trouver une autre orbite fermée.*

Remarque 1.5.1 *Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite, le cycle limite est dit stable ou attractif, sinon il est dit instable.*

Définition 1.5.3 *L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x de ce cycle limite.*

Exemple 1.5.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y - ax(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + ay - ay(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Tel que $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre, en utilisant les coordonnées polaires (r,θ) où $x = rcos(\theta)$ et $y = rsin(\theta)$, le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{r} = ar(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

D'où

$$\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = 0 \ ou \ r = 1.$$

Pour $r = 1$, on a l'orbite périodique $(x(t), y(t)) = (cos(\theta+\theta_0), sin(\theta+\theta_0))$ avec $\theta(0) = \theta_0$. Dans le plan de phase, c'est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, c'est un cycle limite unique.

1.6 Système différentiel linéaire non homogène

Soit le système linéaire non homogène suivant

$$\dot{x} = Ax + b(t) \tag{1.6.1}$$

où A est une matrice de dimension $n \times n$, b(t) est un vecteur des fonctions continues.

La matrice fondamentale du système

$$\dot{x} = Ax \tag{1.6.2}$$

est toute matrice inversible $\Phi(t)$ de dimension $(n \times n)$ qui vérifie

$$\Phi'(t) = A\Phi(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

où $\Phi(t) = e^{At}$ vérifiant $\Phi(0) = I$, et I est la matrice identitée de dimension $n \times n$. En outre, toute matrice fondamentale de (1.6.2) est donnée par

$$\Phi(t) = e^{At}C$$

avec C est une matrice inversible.

Après avoir trouvé la matrice fondamentale du système (1.6.2), il est facile de résoudre le système (1.6.1) en utilisant le résultat suivant.

Théorème 1.6.1 *Si $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale de (1.6.2), alors la solution du système non homogène (1.6.1) avec condition intiale $x(0) = x_0$ est unique, donnée par*

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)ds. \tag{1.6.3}$$

Preuve. voir [29]. ■

Remarque 1.6.1 *Si $\Phi(t) = e^{At}$, alors la solution (1.6.3)), est donnée par*

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-As}b(s)ds.$$

Exemple 1.6.1 *Soit l'équation*

$$\ddot{x} + x = f(t). \tag{1.6.4}$$

On pose $\dot{x} = y$, alors l'équation précédente peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + f(t), \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente sous la forme de l'équation (1.6.1) en prenant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \text{ et } e^{-At} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi la solution de l'équation (1.6.4) avec $x(0) = x_0$ *est donnée par*

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{-As}b(s)ds.$$

Donc

$$x(t) = x_0 \cos(t) - \dot{x}_0 \sin(t) + \int_0^t f(s)\sin(s-t)ds.$$

CHAPITRE 2 Théorie de moyennisation

2.1 Introduction

La théorie de moyennisation est un outil classique pour étudier le comportement des systèmes dynamiques non linéaires, et en particulier, de leurs orbites périodiques. Dans ce chapitre nous allons introduire les résultats principaux sur la théorie de moyennisation et les théorèmes que nous allons utiliser dans notre travail.

2.2 Méthode de moyennisation dans le cas périodique

2.2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon F(t, \mathbf{x}(t)) + \varepsilon^2 R(t, \mathbf{x}(t), \varepsilon),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.2.1}$$

avec $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, D est un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $F(t, \mathbf{x})$ et $R(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ sont $T-$périodiques en t. Le système moyenné associé au système (2.2.1) est défini par

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \varepsilon f^0(\mathbf{y}(t)),\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.2.2}$$

où

$$f^0(\mathbf{y}) = \frac{1}{T}\int_0^T F(s, \mathbf{y})\mathbf{ds}. \tag{2.2.3}$$

Le théorème suivant nous donne les conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné (2.2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.2.1).

Théorème 2.2.1 *[40] Considérons le système (2.2.1) et supposons que les fonctions vectorielles $F, R, D_{\mathbf{x}}F, D^2_{\mathbf{x}}F$, et $D_{\mathbf{x}}R$ sont continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0,\infty[\times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. De plus, on suppose que F et R sont T-périodiques en t avec T est indépendante de ε.*

a) Si $p \in D$ est un point singulier du système moyenné (2.2.2) tel que

$$\det(D_{\mathbf{x}}f^0(p)) \neq 0, \tag{2.2.4}$$

alors pour $\mid \varepsilon \mid > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T-périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.2.1) telle que $x_\varepsilon(t) \to p$ quand $\varepsilon \to 0$.

b) Si le point singulier y=p du système moyenné (2.2.2) est hyperbolique alors pour $\mid \varepsilon \mid > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x_\varepsilon(t)$ du système (2.2.1) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que p.

Exemple 2.2.1 *Considérons l'équation de Van der Pol*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

En utilisant les coordonnées polaire (r, θ) où $x = rcos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin^2(\theta), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon\cos(\theta)(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin(\theta). \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin^2(\theta) + O(\varepsilon).$$

D'après (2.2.3) on obtient

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin^2(\theta)d\theta = \frac{1}{8}r(r^2 - 4).$$

La seule racine positive de $f^0(r)$ est r=2. Comme $(\frac{df^0}{dr})(2) = 1$, d'après le théorème 2.2.1 il suit que le système (2.2.5) pour $\mid \varepsilon \mid \neq 0$ suffisamment petit, admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon 2 du système non perturbé (2.2.5) avec $\varepsilon = 0$. De plus, comme $(\frac{df^0}{dr})(2) = 1 > 0$, ce cycle limite est instable.

Exemple 2.2.2 *On considère le système*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(-2 + x - xy + x^2 + y^2)y, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

En coordonnées polaires, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r \sin^2(\theta)(2r^2 - 2 + r\cos(\theta) - r^2\sin(\theta)\cos(\theta) - r^2\cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon(r^2(2\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos^3(\theta)\sin(\theta) - \cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) \\ \qquad + r\sin(\theta)\cos^2(\theta)) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)). \end{cases}$$

Ou d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \sin^2(\theta)(2r^2 - 2 + r\cos(\theta) - r^2\sin(\theta)\cos(\theta) - r^2\cos^2(\theta) + O(\varepsilon^2).$$

On trouve

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi}(-2r\pi + \frac{7}{4}r^3\pi) = 0,$$

cette équation admet une seule racine positive $r = \frac{2}{7}\sqrt{14}$, alors pour $\mid \varepsilon \mid > 0$ suffisamment petit le système (2.2.6) admet un seul cycle limite.

2.2.2 Méthode de moyennisation du second ordre

Considérons les deux problèmes aux valeurs initiales

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t,x) + \varepsilon^2 F_2(t,x) + \varepsilon^3 F_3(t,x,\varepsilon), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.2.7}$$

où F_1 et $F_2 : [0,+\infty) \times D \to R^n$, $F_3 : [0,+\infty) \times D \times [0,\varepsilon_0] \to R^n$ sont des fonctions continues, T périodiques par rapport à t et D est un ouvert de R^n.

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 f^{10}(y) + \varepsilon^2 g^0(y), \quad y(0) = y_{0,} \tag{2.2.8}$$

où f^0, f^{10} et g^0 sont les fonctions moyennées de F_1, f^1 et F_2 respectivement.

Théorème 2.2.2 *Soit*

$$f^1(t,x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y^1(t,x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(x)$$

où

$$y^1(t,x) = \int_0^t [F_1(s,x) - f^0(x)]ds + z(x)$$

avec $z(x)$ est une fonction de classe C^1 telle que la moyenne de y^1 est nulle.

Supposons que :

a) $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, F_2 et F_3 sont continues sur leurs domaines de définitions et lipchitziennes en x.

b) $F_3(t,x,\varepsilon)$ est uniformément bornée par une constante M dans $[0, \frac{M}{\varepsilon}) \times D \times (0, \varepsilon_0]$.

c) T est indépendante de ε.

d) $y(t) \in D$ sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2)$$

sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$.

Corollaire 2.2.1 *Si les hypothèses du théorème 2.2.2 sont satisfaites et de plus $f^0(y) = 0$, alors*

1. Si p est le point d'équilibre du système moyenné (2.2.8) tel que

$$\frac{\partial}{\theta y}(f^{10}(y) + g^0(y)) \mid_{y=p} \neq 0, \tag{2.2.9}$$

alors il existe une solution T-périodique $x_\varepsilon(t)$ de l'équation (2.2.7) telle que $x_\varepsilon(t) \to p$ quand $\varepsilon \to 0$.

2. Si p est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique $x_\varepsilon(t)$ de (2.2.7) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p.

Exemple 2.2.3 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(y^2 + 8xy - 2x^2) + \varepsilon^2 ax, \\ \dot{y} = x + 4\varepsilon xy + \varepsilon^2 ay. \end{cases} \tag{2.2.10}$$

En coordonnées polaires, le système (2.2.10) peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(8r\cos^2\theta\sin\theta - 7r\cos^3\theta + 5r\cos\theta + \varepsilon a\ ), \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon r\sin\theta + 7\varepsilon r\cos^2\theta\sin\theta + 8\varepsilon r\cos\theta - 8\varepsilon r\cos\theta, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r(8r\cos^2\theta\sin\theta - 7r\cos^3\theta + 5r\cos\theta + \varepsilon a\ )}{1 - \varepsilon r\sin\theta + 7\varepsilon r\cos^2\theta\sin\theta + 8\varepsilon r\cos\theta - 8\varepsilon r\cos\theta},$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= -r^2\cos\theta(-8\cos\theta\sin\theta + 7\cos^2\theta - 5)\varepsilon + r(-15r^2\cos^5\theta\sin\theta \\ &\quad +5\cos\theta\sin\theta + 22r^2\cos^3\theta\sin\theta + 112r^2\cos^6\theta - 160r^2\cos^4\theta \\ &\quad +48r^2\cos^2\theta + a)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme (2.2.7) avec

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r) &= -r^2\cos\theta(-8\cos\theta\sin\theta + 7\cos^2\theta - 5), \\ F_2(\theta, r) &= r(-15r^2\cos^5\theta\sin\theta + 5\cos\theta\sin\theta + 22r^2\cos^3\theta\sin\theta \\ &\quad +112r^2\cos^6\theta - 160r^2\cos^4\theta + 48r^2\cos^2\theta + a), \\ F_3(\theta, r, \varepsilon) &= O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Donc nous allons appliquer le Théorème précédent

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta(-8\cos\theta\sin\theta + 7\cos^2\theta - 5)d\theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) &= -2r\cos\theta(-8\cos\theta\sin\theta + 7\cos^2\theta - 5), \\ \int_0^\theta F_1(s, r)ds &= \frac{r^2}{3}(8 - 8\cos^3\theta - 7\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta). \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r)\int_0^\theta F_1(s, r)ds + F_2(\theta, r)d\theta, \\ &= r(a - r^2). \end{aligned}$$

L'équation $f^{10}(r) = 0$ *a une seule racine positive* $r = +\sqrt{a}$ *et on a* $\frac{d}{dr} f^{10}(r) = a - 3r^2$.

1. Si $a > 0$, *alors le système différentiel (2.2.10) a un cycle limite stable d'amplitude* $r = \sqrt{a}$ *car* $\frac{d}{dr} f^{10}(\sqrt{a}) = -2a < 0$.

2. Si $a \leq 0$, *alors l'équation* $f^{10}(r) = 0$ *n'a pas de racine simple positive, donc le système différentiel (2.2.10) n'a pas de cycle limite.*

2.2.3 Autre méthode de moyennisation du premier ordre

On considère le problème de bifurcation des solutions T-périodiques du système différentiel de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon). \qquad (2.2.11)$$

avec ε suffisamment petit.

Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe C^2, $T-$périodiques en t et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que le système non perturbé

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t, \mathbf{x}), \qquad (2.2.12)$$

a une sous-variété de dimension k de solutions périodiques.

Soit $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ la solution du système non-perturbé (2.2.12) telle que $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{z}$. La linéarisation du système non-perturbé (2.2.12) au long de la solution périodique $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ est écrite comme

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}} F_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0))\mathbf{y}. \qquad (2.2.13)$$

On note par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.2.13) et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur ses k premières coordonnées; i.e. $\xi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k)$. On suppose qu'il existe une sous-variété $\mathbf{Z}$ de dimension k de solutions T-périodiques du système (2.2.12).

Théorème 2.2.3 *Soit* $V \subset \mathbb{R}^k$ *un ouvert borné,* $\beta : Cl(V) \to \mathbb{R}^{n-k}$ *une fonction de classe* C^2. *On suppose que* *(i)* $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)),\ \alpha \in Cl(V)\} \subset \Omega$ *et que pour chaque* $\mathbf{z}_\alpha \in \mathbf{Z}$ *la solution* $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)$ *de (2.2.12) est* $T-$ *périodique.*

(ii) pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathbf{Z}$ *il existe une matrice fondamentale* $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ *de (2.2.13) telle que la matrice* $M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(0) - M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(T)$ *a dans le coin supérieur droit la matrice nulle de dimension* $k \times (n-k)$, *et dans le coin inférieur droit une matrice* Δ_α *de dimension* $(n-k) \times (n-k)$ *avec* $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $\mathcal{F} : Cl(V) \to \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \xi(\frac{1}{T}\int_0^T M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha))dt). \tag{2.2.14}$$

S'il existe $a \in V$ *telle que* $\mathcal{F}(a) = 0$ *et* $det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, *alors il existe une solution T-périodique* $\varphi(t, \varepsilon)$ *du système (2.2.11) telle que* $\varphi(0, \varepsilon) \to \mathbf{z}_a$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

De plus, si les valeurs propres de la matrice jacobienne $(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{z}})(a)$ *sont hyperboliques, alors la solution périodique correspondante* $x(t, \varepsilon)$ *de l'équation (2.2.11) est hyperbolique et son type de stabilité ou d'instabilité est donnée par ses valeurs propres.*

Preuve. Voir Malkin [24] et Roseau [31]. Pour une autre preuve voir aussi [7]. ∎

Si k=n on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.2 *On suppose qu'il existe un ensemble ouvert et borné* V *avec* $Cl(V) \subset \Omega$ *telle que pour chaque* $\mathbf{z} \in Cl(V)$, *la solution* $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ *est* $T-$*périodique, on considère la fonction* $\mathcal{F} : Cl(V) \to \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \int_0^T M_{\mathbf{z}}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}))dt. \tag{2.2.15}$$

S'il existe un $a \in V$ *telle que* $\mathcal{F}(a) = 0$ *et* $\det((\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{z}})(a)) \neq 0$, *alors il existe une solution* $T-$*périodique* $\varphi(t, \varepsilon)$ *du système (2.2.11) telle que* $\varphi(0, \varepsilon) \to a$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

De plus, si les valeurs propres de la matrice jacobienne $(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{z}})(a)$ *sont hyperboliques, alors la solution périodique correspondante* $x(t, \varepsilon)$ *de l'équation (2.2.11) est hyperbolique et son type de stabilité ou d'instabilité est donnée par ses valeurs propres.*

Exemple 2.2.4 *On considère l'équation suivante*

$$\dddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \tag{2.2.16}$$

Si

$$y = \dot{x}, z = \ddot{x}.$$

L'équation (2.2.16) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = z - y + x + \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \end{cases} \tag{2.2.17}$$

Le système (2.2.17) a un point singulier unique, l'origine, lorsque $\varepsilon = 0$*. La partie linéaire du système (2.2.17) avec* $\varepsilon = 0$ *à l'origine est*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice sont $\pm i$ *et 1. En faisant un changement de variable linéaire*

$$(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T,$$

on écrit le système (2.2.17) de telle manière que la partie linéaire à l'origine sera à sa forme normale réelle de Jordan, c.à.d. $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^T = J(X, Y, Z)^T$*, la forme normale réelle de Jordan de la matrice* A *est*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.18}$$

On a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0,$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T$, *c.à.d.*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} - \dot{y}, \\ \dot{Y} = -\dot{y} + \dot{z}, \\ \dot{Z} = \dot{x} + \dot{z}. \end{cases} \tag{2.2.19}$$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X - Y + Z \\ -X - Y + Z \\ -X + Y + Z \end{pmatrix}. \tag{2.2.20}$$

On remplace (2.2.17) et (2.2.20) dans (2.2.19), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \breve{F}(X, Y, Z, t) \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \breve{F}(X, Y, Z, t) \end{cases} \tag{2.2.21}$$

où $\breve{F} = \breve{F}(X, Y, Z, t) = F(x, y, z, t)$.

Pour $\varepsilon = 0$, *la solution du système* $(2.2.21)_{\varepsilon=0}$ *est*

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}$$

On applique le théorème 2.2.3 au système différentiel (2.2.21), le système (2.2.21) peut être écrit en tant que système (2.2.11) en prenant

$$x = (X, Y, Z), F_1(x, t) = (0, \breve{F}, \breve{F}) \text{ et } F_2(x, t, \varepsilon) = (0, 0, 0).$$

Soit $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$ *la solution du système (2.2.21) telle que*

$$x(0; X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

Il est clair que le système non-perturbé (2.2.21) avec $\varepsilon = 0$ *admet un centre à l'origine dans le plan (X,Y). Les solutions* $2\pi-$*périodiques correspondantes sont* $x(t, X_0, Y_0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t))$ *telle que*

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice fondamentale $M(t)$ *du système non perturbé (2.2.21) avec* $\varepsilon = 0$ *est*

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix},$$

comme $1 - e^{-2\pi} \neq 0$*, toutes les hypothèses du théorème 2.2.3 sont vérifiées. Par conséquent, nous allons étudier les zéros* $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ *des deux premières composantes de la fonction* $\mathcal{F}(\alpha)$ *donnée par*

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{-1}(t) F_1(x(t, z_\alpha), t) dt), \quad \text{avec } \xi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2),$$

c.à.d.

$$\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha)).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t)\breve{F}\left(x(t;X_0,Y_0,0,0),t\right)dt, \qquad (2.2.22)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t)F\left(\frac{X(t)-Y(t)}{2},-\frac{X(t)+Y(t)}{2},\frac{-X(t)+Y(t)}{2},t\right)dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t)\breve{F}\left(x(t;X_0,Y_0,0,0),t\right)dt, \qquad (2.2.23)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t)F\left(\frac{X(t)-Y(t)}{2},-\frac{X(t)+Y(t)}{2},\frac{-X(t)+Y(t)}{2},t\right)dt.\end{aligned}$$

On pose $\mathcal{F}(\alpha)=(\mathcal{F}_1(X_0,Y_0),\mathcal{F}_2(X_0,Y_0))$, *En remplaçant la fonction* F *dans (2.2.22) et (2.2.23), on obtient*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(X_0,Y_0) &= -\frac{1}{16}\left(X_0+Y_0\right)\left(6X_0^2+X_0+6Y_0^2-Y_0\right),\\ \mathcal{F}_2(X_0,Y_0) &= \frac{3}{8}\left(-Y_0X_0^2+Y_0^2X_0\right)-\frac{3}{8}\left(-Y_0^3+X_0^3\right)+\frac{1}{8}\left(-Y_0^2+X_0^2\right)-\frac{1}{8}Y_0X_0.\end{aligned}$$

Si $\mathcal{F}_1(X_0,Y_0)=\mathcal{F}_2(X_0,Y_0)=0$, *on trouve*

$$(X_0^*,Y_0^*)=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right).$$

De plus

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(X_0,Y_0)}\Big|_{(X_0,Y_0)=\left(X_0^*,Y_0^*\right)}=\frac{3}{2048}\neq 0\right).$$

Alors, pour $\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ *avec* $\varepsilon_0>0$ *suffisamment petit, il y a une solution isolée* $2\pi-$*périodique* $x(t,\varepsilon)$ *de l'équation différentielle (2.2.16) telle que*

$$x(0,\varepsilon)\to-\frac{1}{4},\dot{x}(0,\varepsilon)\to 0,\ddot{x}(0,\varepsilon)\to\frac{1}{4},$$

quand $\varepsilon\to 0$.

CHAPITRE 3

Solutions périodiques de certains systèmes différentiels polynômiaux de dimension 2

3.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce chapitre nous étudions l'existence des solutions périodiques du système différentiel polynômial du deuxième ordre suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \varepsilon P(x, y) + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + \varepsilon Q(x, y) + h_2(t), \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

où P, Q sont des polynômes en x, y de degré n, $h_i(t) = h_i(t + 2\pi)$ avec $i = 1, 2$, sont des fonctions périodiques et ε est un petit paramètre. On a utilisé le corollaire 2.2.2 pour démontrer nos résultats.

Nos résultats principaux pour l'étude des solutions périodiques du système (3.1.1) sont les suivants.

Théorème 3.1.1 *Soient*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(t)P(a(t), b(t)) + \sin(t)Q(a(t), b(t)))dt, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\sin(t)P(a(t), b(t)) + \cos(t)Q(a(t), b(t)))dt, \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

où

$$\begin{aligned} a(t) &= \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t(\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds, \\ b(t) &= \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t(\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Si

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}(\cos(s)h_1(s) - \sin(s)h_2(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi}(-\sin(s)h_1(s) + \cos(s)h_2(s))ds &= 0, \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

alors pour toute racine (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$\mathcal{F}_k(x_0, y_0) = 0, k = 1, 2,$$

satisfaisant

$$\det(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2,)}{\partial(x_0, y_0)} \mid_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}) \neq 0,$$

le système différentiel (3.1.1) a une solution périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$*, qui tend vers la solution périodique donnée par*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t(\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t(\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \end{pmatrix} \tag{3.1.5}$$

du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + h_2(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Notons que cette solution est périodique de période 2π.

De plus, si les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,)}{\partial(x_0,y_0)}(x_0^*, y_0^*)$ *sont hyperboliques, alors la solution périodique correspondante* $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ *du système différentiel (3.1.1) est hyperbolique et son type de stabilité ou d'instabilité est donnée par ses valeurs propres.*

Corollaire 3.1.1 *On considère le système différentiel (3.1.1) où*

$$\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2(t) \\ \cos^2(t) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+xy+y \\ y^2+x^2 \end{pmatrix}.$$

Ce système différentiel admet une solution périodique stable $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ *, qui tend vers la solution périodique* $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *du système différentiel*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - \sin^2(t), \\ \dot{y} &= x + \cos^2(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, *où*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin(2t) + \frac{1}{6}\cos(2t) \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos(2t) + \frac{1}{3}\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.1.2 *On considère l'équation de duffing suivante*

$$\ddot{y} + ay - \varepsilon y^3 + b(t) = \varepsilon h(y, \dot{y}). \tag{3.1.6}$$

avec, a=1, b(t)=sin(t)cos(t) et $h(y,\dot{y}) = y^2 + \dot{y}^2 - \dot{y}$, *alors cette équation admet une solution périodique semi stable* $y(t,\varepsilon)$ *qui tend vers la solution périodique y(t)=-*$\frac{1}{6}\sin(2t)$ *de l'équation différentielle non perturbée*

$$\ddot{y} + y + \sin(t)\cos(t) = 0.$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

3.2 Preuves

Preuve du théorème 3.1.1. On va utiliser le corollaire 2.2.2 afin d'étudier l'existence des solutions périodiques du système différentiel (3.1.1) . Ce dernier peut s'écrire sous la forme du système (2.2.11) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ t = t, \ F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y + h_1(t) \\ x + h_2(t) \end{pmatrix} \text{ et } F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}.$$

En premier temps on doit trouver les solutions périodiques du système non perturbé, qui sont présentées par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \end{pmatrix},$$

cet ensemble de solutions est $2\pi-$périodique si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

On obtient les conditions de périodicité suivantes

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos(s)h_1(s) - \sin(s)h_2(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (-\sin(s)h_1(s) + \cos(s)h_2(s))ds &= 0, \end{aligned}$$

Notons que notre ensemble de solutions est de dimension deux. Obtenir les solutions périodiques du système (3.1.1) se réduit à trouver les racines $\mathbf{z} = (x_0, y_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (2.2.15). La matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel $(3.1.1)_{\varepsilon=0}$ est la suivante

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Calculons $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ on trouve

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) = 0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où $\mathcal{F}_1(x_0, y_0)$ et $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$ ont été définies dans l'énoncé du théorème 3.1.1 par (3.1.2). Si les solutions (x_0^*, y_0^*) du système (3.2.1) vérifient que

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)} \mid_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right) \neq 0.$$

Alors pour toute racine (x_0^*, y_0^*) du système (3.2.1) on obtient une solution 2π-périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ du système différentiel (3.1.1) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit qui tend vers la solution périodique suivante

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \end{pmatrix}$$

du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + h_2(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \to 0$.

La preuve de la seconde partie du théorème 3.1.1 sur le type de stabilité de la solution périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ découle directement de la dernière partie de l'énoncé du corollaire 2.2.2. ■

Preuve du corollaire 3.1.1. On va appliquer le théorème 3.1.1 avec

$$\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2(t) \\ \cos^2(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + xy + y \\ y^2 + x^2 \end{pmatrix}.$$

Premièrement, on peut vérifier facilement les conditions (3.1.4)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (-\cos(s)\sin^2(s) - \sin(s)\cos^2(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (\sin^3(s) + \cos^3(s))ds &= 0, \end{aligned}$$

Après on calcule les fonctions $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ du Théorème 3.1.1, On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) &= \frac{1}{2} - \frac{2}{3}x_0 + \frac{13}{12}y_0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) &= -\frac{43}{36} - \frac{4}{3}y_0 - \frac{11}{12}x_0, \end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ admet une solution (x_0^*, y_0^*) donnée par $(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3})$, les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}(x_0^*, y_0^*)$ dans cette solution sont $\begin{pmatrix} -1 + \frac{I\sqrt{127}}{12} \\ -1 - \frac{I\sqrt{127}}{12} \end{pmatrix}$, qui ont deux parties réelles négatives.

Le déterminant

$$\det(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)} \mid_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)})$$

pour cette solution est $\frac{271}{144}$. On obtient en utilisant le théorème 3.1.1 les solutions définies dans l'énoncé du corollaire 3.1.1. ■

Preuve du corollaire 3.1.2. L'équation (3.1.6) peut s'écrire sous la forme du système (3.1.1) en prenant $\dot{y}$=x

$$\begin{cases} \dot{y} = x, \\ \dot{x} = -y - \varepsilon y^3 + \sin(t)\cos(t) = \varepsilon(y^2 + x^2 - x). \end{cases}$$

On va appliquer le théorème 3.1.1. Premièrement, on peut vérifier facilement les conditions (3.1.4)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (-\sin^2(s)\cos(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (\cos^2(s)\sin(s))ds &= 0, \end{aligned}$$

Après on calcule les fonctions $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ du Théorème 3.1.1, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{48} - \frac{1}{4}x_0 - \frac{7}{48}y_0 - \frac{3}{8}x_0^2 y_0 - \frac{1}{8}x_0^2 - \frac{3}{8}y_0^2, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{16}x_0 - \frac{3}{4}y_0 - \frac{1}{4}x_0 y_0 + \frac{3}{8}x_0^3 + \frac{3}{8}x_0 y_0^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ admet une solution (x_0^*, y_0^*) donnée par $(0, \frac{-1}{3})$, les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,)}{\partial(x_0,y_0)}(x_0^*, y_0^*)$ dans cette solution sont $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{143}}{48} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{143}}{48} \end{pmatrix}$, qui sont deux réelles positive et négative respectivement.

Le déterminant

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)} \mid_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right)$$

pour cette solution est $\frac{433}{2304}$, on obtient en utilisant le théorème 3.1.1 les solutions définies dans l'énoncé du corollaire 3.1.2. ∎

CHAPITRE

4 Solutions périodiques de certains systèmes différentiels polynômiaux de dimension 3

4.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce chapitre nous étudions l'existence des solutions périodiques du système différentiel polynômial du troisième ordre suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \varepsilon P(x,y,z) + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + \varepsilon Q(x,y,z) + h_2(t), \\ \dot{z} &= az + \varepsilon R(x,y,z) + h_3(t), \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

où a est un nombre réel, P, Q et R sont des polynômes en x, y, z de degré n, $h_i(t) = h_i(t+2\pi)$ avec $i = 1,2,3$ sont des fonctions périodiques et ε est un petit paramètre. On a utilisé le théorème 2.2.3 et le corollaire 2.2.2 pour démontrer nos résultats.

Un certain nombre de travaux ont étudié le système (4.1.1) dans le cas homogène (le cas où $h_i(t) = 0$ avec $i = 1,2,3$) en utilisant d'autres versions de la méthode de moyennisation ,[9],[17],[19],[30]). Dans [10],[18], [20] et [25] les auteurs ont étudié les solutions périodiques des classes d'équations différentielles du troisième ordre en utilisant la méthode de moyennisation. Il existe beaucoup d'articles qui ont étudié les solutions périodiques des systèmes différentiels du troisième ordre en utilisant le théorème du point fixe, Schauder et Schauder Leray ([11],[28],[32]), ou la méthode de la réduction non-locale ([1],[12]).

Nos résultats principaux pour l'étude des solutions périodiques du système (4.1.1) sont les suivants.

Théorème 4.1.1 *On considère le système différentiel (4.1.1) avec a=0. Soient*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x_0,y_0,z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(t)P(a(t),b(t),c(t))+\sin(t)Q(a(t),b(t),c(t)))dt,\\
\mathcal{F}_2(x_0,y_0,z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\sin(t)P(a(t),b(t),c(t))+\cos(t)Q(a(t),b(t),c(t)))dt,\\
\mathcal{F}_3(x_0,y_0,z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(a(t),b(t),c(t))dt, \qquad (4.1.2)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
a(t) &= \cos(t)x_0-\sin(t)y_0+\int_0^t(\cos(t-s)h_1(s)-\sin(t-s)h_2(s))ds, \qquad (4.1.3)\\
b(t) &= \sin(t)x_0+\cos(t)y_0+\int_0^t(\sin(t-s)h_1(s)+\cos(t-s)h_2(s))ds,\\
c(t) &= z_0+\int_0^t h_3(s)ds.
\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}(\cos(s)h_1(s)-\sin(s)h_2(s))ds &= 0, \qquad (4.1.4)\\
\int_0^{2\pi}(-\sin(s)h_1(s)+\cos(s)h_2(s))ds &= 0,\\
\int_0^{2\pi} h_3(s)ds &= 0,
\end{aligned}$$

alors pour toute racine (x_0^*,y_0^*,z_0^*) du système

$$\mathcal{F}_k(x_0,y_0,z_0)=0, k=1,2,3,$$

satisfaisant

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}\mid_{(x_0,y_0,z_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*)}\right)\neq 0,$$

le système différentiel (4.1.1) avec a=0 a une solution périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ z(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$*, qui tend vers la solution périodique donnée par*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t(\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t(\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ z_0^* + \int_0^t h_3(s)ds \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + h_2(t), \\ \dot{z} &= h_3(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Notons que cette solution est périodique de période 2π

Théorème 4.1.2 *On considère le système différentiel (4.1.1) avec* $a \neq 0$. *Soient*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0,y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(t)P(a(t),b(t),c(t)) + \sin(t)Q(a(t),b(t),c(t)))dt, \quad (4.1.6) \\ \mathcal{F}_2(x_0,y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\sin(t)P(a(t),b(t),c(t)) + \cos(t)Q(a(t),b(t),c(t)))dt, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} b(t) &= \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t(\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds, \quad (4.1.7) \\ c(t) &= \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t(\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds, \\ d(t) &= z_0e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)}h_3(s)ds. \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}(\cos(s)h_1(s)+\sin(s)h_2(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi}(-\sin(s)h_1(s)+\cos(s)h_2(s))ds &= 0,\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

et

$$z_0 = \frac{1}{1-e^{2\pi a}}\int_0^{2\pi} e^{a(2\pi-s)}h_3(s)ds,$$

alors pour toute racine (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$\mathcal{F}_k(x_0,y_0)=0, k=1,2,$$

satisfaisant

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\mid_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right)\neq 0,$$

le système différentiel (4.1.1) avec $a\neq 0$ *a une solution périodique* $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ z(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$, *qui tend vers la solution périodique donnée par*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^*-\sin(t)y_0^*+\int_0^t(\cos(t-s)h_1(s)-\sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0^*+\cos(t)y_0^*+\int_0^t\sin(t-s)h_1(s)+\cos(t-s)h_2(s)ds \\ \frac{e^{at}}{1-e^{2\pi a}}\int_0^{2\pi}e^{a(2\pi-s)}h_3(s)ds+\int_0^t e^{a(t-s)}h_3(s)ds \end{pmatrix} \tag{4.1.9}$$

du système différentiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y+h_1(t), \\ \dot{y} &= x+h_2(t), \\ \dot{z} &= az+h_3(t),\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Notons que cette solution est périodique de période 2π.

Corollaire 4.1.1 *On considère le système différentiel (4.1.1) avec a=0 où*

$$\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t)\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2+xyz \\ y^2+z^2+xyz \\ x+y+z\end{pmatrix}.$$

Ce système différentiel admet quatre solutions périodiques instables $\begin{pmatrix} x_k(t,\varepsilon) \\ y_k(t,\varepsilon) \\ z_k(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ *avec* $k = 1, 2, 3, 4,$ *qui tendent vers les solutions périodiques* $\begin{pmatrix} x_k(t) \\ y_k(t) \\ z_k(t) \end{pmatrix}$ *du système différentiel*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \sin(t), \\ \dot{y} &= x + \cos(t), \\ \dot{z} &= -\sin(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0,$ *où*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t) \\ \frac{3}{2}\sin(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x_4(t) \\ y_4(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t) \\ \frac{3}{2}\sin(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Corollaire 4.1.2 *On considère le système différentiel (4.1.1) avec* $a \neq 0$ *où*

$$\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - x^2y \\ x + y - xy^2 \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Ce système admet deux solutions périodiques instable et stable $\begin{pmatrix} x_1(t,\varepsilon) \\ y_1(t,\varepsilon) \\ z_1(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$, *et* $\begin{pmatrix} x_2(t,\varepsilon) \\ y_2(t,\varepsilon) \\ z_2(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$, *respectivement, qui tendent vers les solutions périodiques suivantes*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(t) + (\frac{4}{5} - \frac{\sqrt{139}}{10})\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) + (-\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\cos(t) \\ \frac{-a\cos(t)+\sin(t)}{a^2+1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(t) + (\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) - (\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\cos(t) \\ \frac{-a\cos(t)+\sin(t)}{a^2+1} \end{pmatrix}$$

du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \sin(t), \\ \dot{y} &= x + \cos(t), \\ \dot{z} &= az + \cos(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

4.2 Preuves

L'ensemble des solutions du système différentiel (4.1.1) avec $\varepsilon = 0$ et $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ est le suivant

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \\ h_3(s) \end{pmatrix} ds,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

C'est à dire

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ e^{at}z_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}h_3(s)ds \end{pmatrix}. \quad (4.2.1)$$

En étudiant la périodicité de cet ensemble, on a distingué deux cas selon les valeurs de a.

Preuve du théorème 4.1.1. On va utiliser le corollaire 2.2.2 afin d'étudier l'existence des solutions périodiques du système différentiel (4.1.1) avec a=0. Ce dernier peut s'écrire sous la forme du système (2.2.11) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ t = t, \ F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y + h_1(t) \\ x + h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix} \text{ et } F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

En premier temps on doit trouver les solutions périodiques du système non perturbé, qui sont présentées par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ z_0 + \int_0^t h_3(s)ds \end{pmatrix},$$

cet ensemble de solutions est $2\pi-$périodique si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \\ z(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}.$$

On obtient les conditions de périodicité suivantes

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos(s)h_1(s) - \sin(s)h_2(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (-\sin(s)h_1(s) + \cos(s)h_2(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} h_3(s)ds &= 0. \end{aligned}$$

Notons que notre ensemble de solutions est de dimension trois. Obtenir les solutions périodiques du système (4.1.1) avec a=0 se réduit à trouver les racines $\mathbf{z} = (x_0, y_0, z_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (2.2.15). La matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel $(4.1.1)_{\varepsilon=0}$ avec a=0 est la suivante

$$M(t) = M_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ on trouve

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0) = 0, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

où $\mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0)$, $\mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0)$ et $\mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0)$ ont été définies dans l'énoncé du théorème 4.1.1 par (4.1.2). Si les solutions (x_0^*, y_0^*, z_0^*) du système (4.2.2) vérifient que

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*)}\right) \neq 0.$$

Alors pour toute racine (x_0^*, y_0^*, z_0^*) du système (4.2.2) on obtient une solution 2π-périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ z(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ du système différentiel (4.1.1) avec a=0 et pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit qui tend vers la solution périodique suivante

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ z_0^* + \int_0^t h_3(s)ds \end{pmatrix}$$

du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + h_2(t), \\ \dot{z} &= h_3(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \to 0$. ■

Preuve du théorème 4.1.2. On va utiliser le théorème 2.2.3 afin d'étudier l'existence des solutions périodiques du système différentiel (4.1.1) avec $a \neq 0$, ce dernier peut s'écrire sous la forme du système (2.2.11) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ t = t, \ F_0(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y + h_1(t) \\ x + h_2(t) \\ az + h_3(t) \end{pmatrix} \text{ et } F_1(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

En premier temps on doit trouver les solutions périodiques du système non perturbé $(4.1.1)_{\varepsilon=0}$ avec $a \neq 0$ qui sont présentées par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t(\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t(\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ e^{at}z_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}h_3(s)ds \end{pmatrix}.$$

Cet ensemble de solutions est $2\pi-$périodique si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \\ z(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}.$$

On obtient les conditions de périodicité suivantes

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}(\cos(s)h_1(s) + \sin(s)h_2(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi}(-\sin(s)h_1(s) + \cos(s)h_2(s))ds &= 0, \end{aligned}$$

et

$$z_0 = \frac{1}{1-e^{2\pi a}} \int_0^{2\pi} e^{a(2\pi-s)}h_3(s)ds.$$

Notons que notre ensemble de solutions est de dimension deux. La matrice fondamentale M(t) du système $(4.1.1)_{\varepsilon=0}$ est la suivante

$$M(t) = M_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{at} \end{pmatrix}.$$

On a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi a} \end{pmatrix}.$$

Alors toutes les conditions du théorème 2.2.2 sont satisfaites. Obtenir les solutions périodiques du système (4.1.1) avec $a \neq 0$ se réduit à trouver les racines $\mathbf{z} = (x_0, y_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (2.2.14), calculons $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ on trouve

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) = 0, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

où $\mathcal{F}_1(x_0, y_0)$, $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$ ont été définies dans l'énoncé du théorème 4.1.2 par (4.1.6). Si les racines (x_0^*, y_0^*) du système (4.2.3) vérifient que

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)} \mid_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right) \neq 0,$$

alors pour toute racine (x_0^*, y_0^*) du système (4.2.3) on obtient une solution 2π-périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ z(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ du système différentiel (4.1.1) avec $a \neq 0$ et pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit qui tend vers la solution périodique suivante

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t(\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t(\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ \frac{e^{at}}{1-e^{2\pi a}} \int_0^{2\pi} e^{a(2\pi-s)}h_3(s)ds + \int_0^t e^{a(t-s)}h_3(s)ds \end{pmatrix}$$

du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + h_1(t), \\ \dot{y} &= x + h_2(t), \\ \dot{z} &= az + h_3(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \to 0$. ■

Preuve du corollaire 4.1.1. On va appliquer le théorème 4.1.1 avec

$$\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2+xyz \\ y^2+z^2+xyz \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Premièrement, on peut vérifier facilement les conditions (4.1.4)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (\cos(s)\sin(s) - \sin(s)\cos(s))ds &= 0, \\
\int_0^{2\pi} (-\sin^2(s) + \cos^2(s))ds &= 0, \\
\int_0^{2\pi} -\sin(s)ds &= 0.
\end{aligned}$$

Après on calcule les fonctions $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ du Théorème 4.1.1, On obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x_0,y_0,z_0) &= \frac{1}{4}x_0y_0 - \frac{1}{8}y_0^2 + \frac{1}{8}x_0^2 + \frac{1}{8}x_0 - \frac{1}{8}y_0, \\
\mathcal{F}_2(x_0,y_0,z_0) &= -1 + z_0 + \frac{1}{4}x_0y_0 + \frac{1}{8}y_0^2 - \frac{1}{8}x_0^2 - \frac{1}{8}x_0 - \frac{1}{8}y_0, \\
\mathcal{F}_3(x_0,y_0,z_0) &= z_0 - 1.
\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = 0$ admet quatre solutions (x_0^*, y_0^*, z_0^*) données par $(0,0,1)$, $(-1,0,1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ et $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}(x_0^*, y_0^*, z_0^*)$ dans ces solutions sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{8} \\ -\frac{\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} + \frac{I\sqrt{2}}{8} \\ -\frac{1}{4} - \frac{I\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{-2+2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{-2+2\sqrt{3}} \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8} + \frac{I}{8}\sqrt{2+2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8} - \frac{I}{8}\sqrt{2+2\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

qui ont toutes au moins une partie réelle positive.

Le déterminant

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} \mid_{(x_0,y_0,z_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*)}\right)$$

pour ces quatre solutions est $\frac{-1}{32}, \frac{3}{32}, \frac{3}{32}, \frac{3}{32}$ respectivement, on obtient en utilisant le théorème 4.1.1 les solutions définies dans l'énoncé du corollaire 4.1.1. ■

Preuve du corollaire 4.1.2. On va appliquer le théorème 4.1.2 avec

$$\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} P(t,x,y,z) \\ Q(t,x,y,z) \\ R(t,x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-x^2y \\ x+y-xy^2 \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Premièrement, on peut vérifier facilement les conditions (4.1.8)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} 2\cos(s)\sin(s)ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (-\sin^2(s)+\cos^2(s))ds &= 0. \end{aligned}$$

On trouve aussi

$$z_0 = \frac{-a}{a^2+1}.$$

Après on calcule les fonctions $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ du Théorème 4.1.2, On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0,y_0) &= \frac{3}{4}x_0y_0 + \frac{1}{2} + x_0 + \frac{3}{8}y_0, \\ \mathcal{F}_2(x_0,y_0) &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x_0^2 + \frac{5}{8}y_0^2 - \frac{1}{8}x_0 + y_0. \end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ a deux solutions (x_0^*, y_0^*) données par $(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{139}}{10})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{139}}{10})$,et les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}(x_0^*, y_0^*)$ dans ces solutions sont

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{139}}{8} \\ \frac{2}{5}+\frac{3\sqrt{139}}{40} \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} \frac{2}{5}-\frac{3\sqrt{139}}{40} \\ -\frac{\sqrt{139}}{8} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant

$$\det(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\mid_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)})$$

pour ces deux solutions est $\frac{\sqrt{139}}{320}(16+3\sqrt{139})$, $\frac{\sqrt{139}}{320}(-16+3\sqrt{139})$ respectivement, on obtient en utilisant le théorème 4.1.2 les solutions définies dans l'énoncé du corollaire 4.1.2. ■

CHAPITRE 5

Solutions périodiques de certains systèmes différentiels polynômiaux de dimension 4

5.1 Introduction et résultats principaux

Ce chapitre étudie l'existence des solutions périodiques du système différentiel polynômial du quatrième ordre suivant

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} P_1(x,y,u,v) \\ P_2(x,y,u,v) \\ P_3(x,y,u,v) \\ P_4(x,y,u,v) \end{pmatrix}, \tag{5.1.1}$$

où A est une matrice constante de dimension 4×4 , P_1, P_2, P_3 et P_4 sont des polynômes en x, y, u et v de degré n, $h_i(t) = h_i(t + 2\pi)$ avec $i = 1, 2, 3, 4$ sont des fonctions périodiques et ε est un petit paramètre.

Beaucoup de travaux ont étudié les solutions périodiques des systèmes différentiels du quatrième ordre ([21],[22],[23],[34],[35],[36],[37],[38],[39]). La plupart des auteurs ont utilisé les autres versions de la méthode de moyennisation ou d'autres méthodes (par exemple: point fixe, Schauder et Schauder Leray).

Nos résultats principaux pour l'étude des solutions périodiques du système (5.1.1) sont les suivants.

Théorème 5.1.1 *On considère le système (5.1.1) avec* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*, soient*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0,y_0,u_0,v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(t)P_1(a(t),b(t),c(t),d(t))+\sin(t)P_2(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt, \\ \mathcal{F}_2(x_0,y_0,u_0,v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\sin(t)P_1(a(t),b(t),c(t),d(t))+\cos(t)P_2(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt, \\ \mathcal{F}_3(x_0,y_0,u_0,v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(t)P_3(a(t),b(t),c(t),d(t))+\sin(t)P_4(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt, \\ \mathcal{F}_4(x_0,y_0,u_0,v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\sin(t)P_3(a(t),b(t),c(t),d(t))+\cos(t)P_4(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt, \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

où

$$\begin{aligned} a(t) &= \cos(t)x_0-\sin(t)y_0+\int_0^t(\cos(t-s)h_1(s)-\sin(t-s)h_2(s))ds, \\ b(t) &= \sin(t)x_0+\cos(t)y_0+\int_0^t(\sin(t-s)h_1(s)+\cos(t-s)h_2(s))ds, \\ c(t) &= \cos(t)u_0-\sin(t)v_0+\int_0^t(\cos(t-s)h_3(s)-\sin(t-s)h_4(s))ds, \\ d(t) &= \sin(t)u_0+\cos(t)v_0+\int_0^t(\sin(t-s)h_3(s)+\cos(t-s)h_4(s))ds, \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}(\cos(s)h_1(s)-\sin(s)h_2(s))ds &= 0, \qquad (5.1.3) \\ \int_0^{2\pi}(-\sin(s)h_1(s)+\cos(s)h_2(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi}(\cos(s)h_3(s)-\sin(s)h_4(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi}(-\sin(s)h_3(s)+\cos(s)h_4(s))ds &= 0, \end{aligned}$$

Alors pour chaque racine $(x_0^*, y_0^*, u_0^*, v_0^*)$ *du système*

$$\mathcal{F}_k(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, k = 1, 2, 3, 4,$$

vérifiant

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, u_0, v_0)} \Big|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)=(x_0^*,y_0^*,u_0^*,v_0^*)}\right) \neq 0,$$

le système différentiel (5.1.1) a une solution périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ u(t,\varepsilon) \\ v(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$*, qui tend vers la solution périodique donnée par*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t(\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t(\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ \cos(t)u_0^* - \sin(t)v_0^* + \int_0^t(\cos(t-s)h_3(s) - \sin(t-s)h_4(s))ds \\ \sin(t)u_0^* + \cos(t)v_0^* + \int_0^t(\sin(t-s)h_3(s) + \cos(t-s)h_4(s))ds \end{pmatrix} \quad (5.1.4)$$

du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ *quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Notons que cette solution est périodique de période 2π.

Dans la suite on considère le système différentiel (5.1.1) avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

On a distingué trois cas selon les valeurs de λ et μ:

Cas 1: $\lambda \neq \mu \neq 0$.

Cas 2: $\mu \neq 0$ et $\lambda = 0$ (ou $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$).

Cas 3: $\lambda = \mu = 0$.

Nos résultats pour ces trois cas sont les suivants

Théorème 5.1.2 *Cas 1*

Soient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x_0,y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(t)P_1(a(t),b(t),c(t),d(t))+\sin(t)P_2(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt,\\
\mathcal{F}_2(x_0,y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\sin(t)P_1(a(t),b(t),c(t),d(t))+\cos(t)P_2(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt,
\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

où

$$\begin{aligned}
a(t) &= \cos(t)x_0-\sin(t)y_0+\int_0^t(\cos(t-s)h_1(s)-\sin(t-s)h_2(s))ds,\\
b(t) &= \sin(t)x_0+\cos(t)y_0+\int_0^t(\sin(t-s)h_1(s)+\cos(t-s)h_2(s))ds,\\
c(t) &= e^{\lambda t}u_0+\int_0^t e^{\lambda(t-s)}h_3(s)ds,\\
d(t) &= e^{\mu t}v_0+\int_0^t e^{\mu(t-s)}h_4(s)ds.
\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}(\cos(s)h_1(s)+\sin(s)h_2(s))ds &= 0, \qquad (5.1.6)\\
\int_0^{2\pi}(-\sin(s)h_1(s)+\cos(s)h_2(s))ds &= 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi}e^{\lambda(2\pi-s)}h_3(s)ds,\\
v_0 &= \frac{1}{1-e^{2\pi\mu}}\int_0^{2\pi}e^{\mu(2\pi-s)}h_4(s)ds,
\end{aligned}$$

alors pour chaque racine (x_0^*,y_0^*) *du système*

$$\mathcal{F}_k(x_0,y_0)=0, k=1,2,$$

vérifiant

$$\det(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\mid_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)})\neq 0,$$

le système différentiel (5.1.1) a une solution périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ u(t,\varepsilon) \\ v(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$*, qui tend vers la solution périodique donnée par*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t \sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s)ds \\ \frac{e^{\lambda t}}{1-e^{2\pi\lambda}} \int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-s)}h_3(s)ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}h_3(s)ds \\ \frac{e^{\mu t}}{1-e^{2\pi\mu}} \int_0^{2\pi} e^{\mu(2\pi-s)}h_3(s)ds + \int_0^t e^{\mu(t-s)}h_4(s)ds \end{pmatrix} \tag{5.1.7}$$

du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ *quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Notons que cette solution est périodique de période 2π.

Théorème 5.1.3 *Cas 2*

Soient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0,y_0,u_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos(t)P_1(a(t),b(t),c(t),d(t)) + \sin(t)P_2(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt, \\ \mathcal{F}_2(x_0,y_0,u_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-\sin(t)P_1(a(t),b(t),c(t),d(t)) + \cos(t)P_2(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt, \\ \mathcal{F}_3(x_0,y_0,u_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_3(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt, \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

où

$$\begin{aligned} a(t) &= \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds, \\ b(t) &= \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds, \\ c(t) &= u_0 + \int_0^t h_3(s)ds, \\ d(t) &= e^{\mu t}v_0 + \int_0^t e^{\mu(t-s)}h_4(s)ds. \end{aligned}$$

Si

$$\int_0^{2\pi} (\cos(s)h_1(s) + \sin(s)h_2(s))ds = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}(-\sin(s)h_1(s)+\cos(s)h_2(s))ds=0, \tag{5.1.9}$$
$$\int_0^{2\pi} h_3(s)ds=0,$$

et

$$v_0 = \frac{1}{1-e^{2\pi\mu}}\int_0^{2\pi} e^{\mu(2\pi-s)}h_4(s)ds,$$

alors pour chaque racine (x_0^*, y_0^*, u_0^*) *du système*

$$\mathcal{F}_k(x_0,y_0,u_0)=0, k=1,2,3,$$

vérifiant

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)}{\partial(x_0,y_0,u_0)}\mid_{(x_0,y_0,u_0)=(x_0^*,y_0^*,u_0^*)}\right)\neq 0,$$

le système différentiel (5.1.1) a une solution périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon)\\ y(t,\varepsilon)\\ u(t,\varepsilon)\\ v(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$*, qui tend vers la solution périodique donnée par*

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ u(t)\\ v(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t(\cos(t-s)h_1(s)-\sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t \sin(t-s)h_1(s)+\cos(t-s)h_2(s)ds \\ u_0^* + \int_0^t h_3(s)ds \\ \frac{e^{\mu t}}{1-e^{2\pi\mu}}\int_0^{2\pi} e^{\mu(2\pi-s)}h_4(s)ds + \int_0^t e^{\mu(t-s)}h_4(s)ds \end{pmatrix} \tag{5.1.10}$$

du système différentiel (5.1.1)$_{\varepsilon=0}$ *quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Notons que cette solution est périodique de période 2π.

Théorème 5.1.4 *cas 3*

Soient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x_0,y_0,u_0,v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(t)P_1(a(t),b(t),c(t),d(t))+\sin(t)P_2(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt,\\
\mathcal{F}_2(x_0,y_0,u_0,v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\sin(t)P_1(a(t),b(t),c(t),d(t))+\cos(t)P_2(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt,\\
\mathcal{F}_3(x_0,y_0,u_0,v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_3(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt, \qquad (5.1.11)\\
\mathcal{F}_4(x_0,y_0,u_0,v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_4(a(t),b(t),c(t),d(t)))dt,
\end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds, \\
b(t) &= \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds, \\
c(t) &= u_0 + \int_0^{2\pi} h_3(s)ds, \\
d(t) &= v_0 + \int_0^{2\pi} h_4(s)ds.
\end{aligned}
$$

Si

$$
\begin{gathered}
\int_0^{2\pi} (\cos(s)h_1(s) + \sin(s)h_2(s))ds = 0, \\
\int_0^{2\pi} (-\sin(s)h_1(s) + \cos(s)h_2(s))ds = 0, \\
\int_0^{2\pi} h_3(s)ds = 0, \\
\int_0^{2\pi} h_4(s)ds = 0,
\end{gathered} \tag{5.1.12}
$$

alors pour chaque solution $(x_0^*, y_0^*, u_0^*, v_0^*)$ *du système*

$$\mathcal{F}_k(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, k = 1, 2, 3, 4,$$

satisfaisant

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, u_0, v_0)} \mid_{(x_0,y_0,u_0,v_0)=(x_0^*,y_0^*,u_0^*,v_0^*)}\right) \neq 0,$$

le système différentiel (5.1.1) a une solution périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ u(t,\varepsilon) \\ v(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$*, qui tend vers la solution périodique donnée par*

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t \sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s)ds \\ u_0^* + \int_0^{2\pi} h_3(s)ds \\ v_0^* + \int_0^{2\pi} h_4(s)ds \end{pmatrix} \tag{5.1.13}
$$

du système différentiel (5.1.1)$_{\varepsilon=0}$ *quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Notons que cette solution est périodique de période 2π.

On considère le système (5.1.1) avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, notre résultat est le suivant

Théorème 5.1.5 *Soient*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos(t)P_1(a(t), b(t), c(t), d(t)) + \sin(t)P_2(a(t), b(t), c(t), d(t)))dt, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\sin(t)P_1(a(t), b(t), c(t), d(t)) + \cos(t)P_2(a(t), b(t), c(t), d(t)))dt, \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

où

$$\begin{aligned} a(t) &= \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t(\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds, \\ b(t) &= \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t(\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds, \\ c(t) &= e^{\lambda t}u_0 + te^{\lambda t}v_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}(h_3(s) + (t-s)h_4(s))ds, \\ d(t) &= e^{\lambda t}v_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}h_4(s)ds. \end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}(\cos(s)h_1(s) + \sin(s)h_2(s))ds = 0, \\ \int_0^{2\pi}(-\sin(s)h_1(s) + \cos(s)h_2(s))ds = 0, \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

et

$$u_0 = \frac{2\pi}{(1-e^{2\pi\lambda})^2}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-s)}h_4(s)ds + \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-s)}(h_3(s) - sh_4(s))ds,$$

$$v_0 = \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-s)}h_4(s)ds,$$

alors pour chaque solution (x_0^*, y_0^*) *du système*

$$\mathcal{F}_k(x_0, y_0) = 0, k = 1, 2,$$

satisfaisant

$$\det(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)} \mid_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}) \neq 0,$$

le système différentiel (5.1.1) a une solution périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ u(t,\varepsilon) \\ v(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$, *qui tend vers la solution périodique donnée par*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t \sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s)ds \\ \int_0^t e^{\lambda(t-s)}(h_3(s) + (t-s)h_4(s))ds + \frac{e^{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(t-s)}(h_3(s) - sh_4(s))ds}{e^{2\pi\lambda}-1} + \frac{2\pi e^{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(t-s)}h_4(s)ds}{(e^{2\pi\lambda}-1)^2} \\ \frac{e^{2\pi\lambda}}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(t-s)}h_4(s)ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}h_4(s)ds \end{pmatrix}$$

du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ *quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Notons que cette solution est périodique de période 2π.

Corollaire 5.1.1 *On considère le système différentiel (5.1.1) où*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} P_1(x,y,u,v) \\ P_2(x,y,u,v) \\ P_3(x,y,u,v) \\ P_4(x,y,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - yx^2 \\ x + y - xy^2 \\ x + y + u + v \\ x + y + u + v \end{pmatrix}.$$

Ce système différentiel admet quatre solutions périodiques instables $\begin{pmatrix} x_k(t,\varepsilon) \\ y_k(t,\varepsilon) \\ u_k(t,\varepsilon) \\ v_k(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ *avec* $k = 1, 2, 3, 4$, *qui tendent vers les solutions périodiques* $\begin{pmatrix} x_k(t) \\ y_k(t) \\ u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(t) + (\frac{4}{5} - \frac{\sqrt{139}}{10})\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) + (-\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\cos(t) \\ -\frac{1}{2}\cos(t) - (\frac{9}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) + (\frac{9}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\cos(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(t) + (\frac{4}{5} - \frac{\sqrt{139}}{10})\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) + (-\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\cos(t) \\ -\frac{1}{2}\cos(t) - (\frac{9}{5} - \frac{\sqrt{139}}{10})\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) + (\frac{9}{5} - \frac{\sqrt{139}}{10})\cos(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \\ u_3(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(t) + (\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) - (\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\cos(t) \\ -\frac{1}{2}\cos(t) - (\frac{9}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) + (\frac{9}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\cos(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_4(t) \\ y_4(t) \\ u_4(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(t) + (\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) - (\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})\cos(t) \\ -\frac{1}{2}\cos(t) - (\frac{9}{5} - \frac{\sqrt{139}}{10})\sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) + (\frac{9}{5} - \frac{\sqrt{139}}{10})\cos(t) \end{pmatrix},$$

du système différentiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y+\sin(t),\\ \dot{y} &= x+\cos(t),\\ \dot{u} &= -v+\sin(t),\\ \dot{v} &= u+\cos(t),\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Corollaire 5.1.2 *On considère le système différentiel (5.1.1) où*

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}h_1(t)\\ h_2(t)\\ h_3(t)\\ h_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(t)\cos(t)\\ \cos^2(t)\\ \cos(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix}P_1(x,y,u,v)\\ P_2(x,y,u,v)\\ P_3(x,y,u,v)\\ P_4(x,y,u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+xy\\ x+y-xy\\ x+y+u\\ x+y\end{pmatrix}.$$

Ce système différentiel admet une solution périodique instable $\begin{pmatrix}x(t,\varepsilon)\\ y(t,\varepsilon)\\ u(t,\varepsilon)\\ v(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$*, qui tend vers*

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ u(t)\\ v(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\cos(t)\\ \frac{1}{2}\sin(t)\\ \frac{-3}{10}\cos(t)+\frac{1}{10}\sin(t)\\ \frac{-5}{26}\cos(t)+\frac{1}{26}\sin(t)\end{pmatrix},$$

du système différentiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \sin(t)\cos(t),\\ \dot{y} &= x + \cos^2(t),\\ \dot{u} &= 3u + \cos(t),\\ \dot{v} &= 5v + \sin(t)\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Corollaire 5.1.3 *On considère le système différentiel (5.1.1) où*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t)\cos(t) \\ \sin^3(t)\cos(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} P_1(x,y,u,v) \\ P_2(x,y,u,v) \\ P_3(x,y,u,v) \\ P_4(x,y,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + xy \\ x + y - xy \\ x + y - u^2 + 3u \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Ce système différentiel admet deux solutions périodiques instables $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ u(t,\varepsilon) \\ v(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$*, qui tendent vers*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{2}(3-\sqrt{7})\cos(t) + \sin(t) \\ \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{3}{10}\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) \\ \frac{1}{2}(3+\sqrt{7})\cos(t) + \sin(t) \\ \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{3}{10}\sin(t) \end{pmatrix}$$

du système différentiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y+\sin(t)\cos(t),\\ \dot{y} &= x+\sin^3(t)\cos(t),\\ \dot{u} &= \cos(t),\\ \dot{v} &= 3v+\sin(t)\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Corollaire 5.1.4 *On considère le système différentiel (5.1.1) où*

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}h_1(t)\\h_2(t)\\h_3(t)\\h_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(t)\\\cos(t)\\\sin(t)\\\sin(t)\cos(t)\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix}P_1(x,y,u,v)\\P_2(x,y,u,v)\\P_3(x,y,u,v)\\P_4(x,y,u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x^2-xy^2+y^2\\3y^2-yx^2+x^2\\u\\v\end{pmatrix}.$$

Ce système différentiel admet trois solutions périodiques instables $\begin{pmatrix}x_k(t,\varepsilon)\\y_k(t,\varepsilon)\\u_k(t,\varepsilon)\\v_k(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$ *avec* $k=1,2,3$*, qui tendent vers les solutions périodiques* $\begin{pmatrix}x_k(t)\\y_k(t)\\u_k(t)\\v_k(t)\end{pmatrix}$ *où*

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\y_1(t)\\u_1(t)\\v_1(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos(t)\\0\\-\cos(t)\\\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos^2(t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \\ -\cos(t) \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos^2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \\ u_3(t) \\ v(_3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}\cos(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) \\ -\cos(t) \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos^2(t) \end{pmatrix}$$

du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \sin(t), \\ \dot{y} &= x + \cos(t), \\ \dot{u} &= \sin(t), \\ \dot{v} &= \sin(t)\cos(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Corollaire 5.1.5 *On considère le système différentiel (5.1.1) où*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \\ \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} P_1(x,y,u,v) \\ P_2(x,y,u,v) \\ P_3(x,y,u,v) \\ P_4(x,y,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - x^2 y \\ -xy^2 \\ x + y + u \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Ce système différentiel admet deux solutions périodiques $\begin{pmatrix} x_k(t,\varepsilon) \\ y_k(t,\varepsilon) \\ u_k(t,\varepsilon) \\ v_k(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$, *avec* $k = 1, 2,$

qui tendent vers les solutions périodiques $\begin{pmatrix} x_k(t) \\ y_k(t) \\ u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix}$ *où*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ \frac{-1}{25}\cos(t) - \frac{7}{25}\sin(t) \\ -\frac{1}{5}\cos(t) - \frac{2}{5}\sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos(t) \\ 3\sin(t) \\ \frac{-1}{25}\cos(t) - \frac{7}{25}\sin(t) \\ -\frac{1}{5}\cos(t) - \frac{2}{5}\sin(t) \end{pmatrix}$$

du système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - \sin(t), \\ \dot{y} &= x - \cos(t), \\ \dot{u} &= 2u + v + \sin(t), \\ \dot{v} &= 2v + \sin(t), \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

5.2 Preuves

Preuve du théorème 5.1.1. On va utiliser le corollaire 2.2.2 afin d'étudier les solutions périodiques du système différentiel (5.1.1), ce dernier peut s'écrire sous la forme du système (2.2.11) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}, \ t = t, \ F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y + h_1(t) \\ x + h_2(t) \\ -v + h_3(t) \\ u + h_4(t) \end{pmatrix} \text{ et } F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P_1(x, y, u, v) \\ P_2(x, y, u, v) \\ P_3(x, y, u, v) \\ P_4(x, y, u, v) \end{pmatrix}.$$

En premier temps on doit trouver les solutions périodiques du système non perturbé $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ qui sont présentées par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t(\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t(\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ \cos(t)u_0 - \sin(t)v_0 + \int_0^t(\cos(t-s)h_3(s) - \sin(t-s)h_4(s))ds \\ \sin(t)u_0 + \cos(t)v_0 + \int_0^t(\sin(t-s)h3(s) + \cos(t-s)h_4(s))ds \end{pmatrix}.$$

Cet ensemble de solutions est $2\pi-$périodique si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \\ u(2\pi) \\ v(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

On obtient les conditions de périodicité données par (5.1.3). Notons que notre ensemble de solutions est de dimension quatre. Obtenir les solutions périodiques du système (5.1.1) se réduit à trouver les racines $\mathbf{z} = (x_0, y_0, u_0, v_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (2.2.15). La matrice fondamentale M(t) du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ est la suivante

$$M(t) = M_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Calculons $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ on trouve

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \\ \mathcal{F}_4(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

où $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ *et* $\mathcal{F}_4$ ont été définies dans l'énoncé du théorème 5.1.1 par (5.1.2). Si les solutions $(x_0^*, y_0^*, u_0^*, v_0^*)$ du système (5.2.1) vérifient que

$$\det(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, u_0, v_0)} |_{(x_0,y_0,u_0,v_0)=(x_0^*,y_0^*,u_0^*,v_0^*)}) \neq 0.$$

Alors il existe une solution 2π-périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ u(t,\varepsilon) \\ v(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ du système différentiel (5.1.1) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit qui tend vers la solution périodique donnée par (5.1.4) du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ quand $\varepsilon \to 0$. ■

Preuve du théorème 5.1.2. On va utiliser le théorème 2.2.3 afin d'étudier les solutions périodiques du système différentiel (5.1.1), ce dernier peut s'écrire sous la forme du système (2.2.11) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}, \ t = t, \ F_0(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y + h_1(t) \\ x + h_2(t) \\ \lambda v + h_3(t) \\ \mu u + h_4(t) \end{pmatrix} \text{ et } F_1(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P_1(x,y,u,v) \\ P_2(x,y,u,v) \\ P_3(x,y,u,v) \\ P_4(x,y,u,v) \end{pmatrix}.$$

En premier temps on doit trouver les solutions périodiques du système non perturbé $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ qui sont présentées par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ e^{\lambda t}u_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}h_3(s)ds \\ e^{\mu t}v_0 + \int_0^t e^{\mu(t-s)}h_4(s)ds \end{pmatrix}.$$

Cet ensemble de solutions est 2π-périodique si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \\ u(2\pi) \\ v(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

On obtient les conditions de périodicité définies dans l'énoncé du théorème 5.1.2 par (5.1.6). Notons que notre ensemble de solutions est de dimension deux. La matrice fondamentale M(t) du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ est la suivante

$$M(t) = M_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

On a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{-\lambda 2\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-e^{-\mu 2\pi} \end{pmatrix},$$

alors toutes les conditions du théorème 2.2.3 sont satisfaites. Obtenir les solutions périodiques du système (5.1.1) se réduit à trouver les racines $\mathbf{z} = (x_0, y_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (2.2.14). Calculons $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ on trouve

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) = 0, \end{cases} \tag{5.2.2}$$

où $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ ont été définies dans l'énoncé du théorème 5.1.2 par (5.1.5). Si les solutions (x_0^*, y_0^*) du système (5.2.2) vérifient que

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)} \mid_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right) \neq 0.$$

Alors il existe une solution 2π-périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ u(t,\varepsilon) \\ v(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ du système différentiel (5.1.1) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit qui tend vers la solution périodique donnée par (5.1.7) du système differentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ quand $\varepsilon \to 0$. ∎

Preuve du théorème 5.1.3. On va utiliser le théorème 2.2.3 afin d'étudier les solutions périodiques du système différentiel (5.1.1), ce dernier peut s'écrire sous la forme du système (2.2.11) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}, \; t = t, \; F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y + h_1(t) \\ x + h_2(t) \\ h_3(t) \\ \mu v + h_4(t) \end{pmatrix} \text{ et } F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P_1(x, y, u, v) \\ P_2(x, y, u, v) \\ P_3(x, y, u, v) \\ P_4(x, y, u, v) \end{pmatrix}.$$

En premier temps on doit trouver les solutions périodiques du système non perturbé $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ qui sont présentées par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ u_0 + \int_0^t h_3(s)ds \\ e^{\mu t}v_0 + \int_0^t e^{\mu(t-s)}h_4(s)ds \end{pmatrix}.$$

Cet ensemble de solutions est 2π-périodique si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \\ u(2\pi) \\ v(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

On obtient les conditions de périodicité définies dans l'énoncé du théorème 5.1.3 par (5.1.9). Notons que notre ensemble de solutions est de dimension trois. La matrice fondamentale M(t) du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ est la suivante

$$M(t) = M_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

On a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-\mu 2\pi} \end{pmatrix},$$

alors toutes les conditions du théorème 2.2.3 sont satisfaites. Obtenir les solutions périodiques du système (5.1.1) se réduit à trouver les racines $\mathbf{z} = (x_0, y_0, u_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (2.2.14). Calculons $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ on trouve

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0, u_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, u_0) = 0, \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, u_0) = 0, \end{cases} \tag{5.2.3}$$

où $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ *et* $\mathcal{F}_3$ ont été définies dans l'énoncé du théorème 5.1.3 par (5.1.8).

Si les solutions (x_0^*, y_0^*, u_0^*) du système (5.2.3) vérifient que

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, u_0)} \mid_{(x_0,y_0,u_0)=(x_0^*,y_0^*,u_0^*)}\right) \neq 0.$$

Alors il existe une solution 2π-périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ u(t,\varepsilon) \\ v(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ du système différentiel (5.1.1) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit qui tend vers la solution périodique donnée par (5.1.10) du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ quand $\varepsilon \to 0$. ∎

Preuve du théorème 5.1.4. On va utiliser le corollaire 2.2.2 afin d'étudier les solutions périodiques du système différentiel (5.1.1), ce dernier peut s'écrire sous la forme du système (2.2.11) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}, \ t = t, \ F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y + h_1(t) \\ x + h_2(t) \\ h_3(t) \\ h_4(t) \end{pmatrix} \quad \text{et } F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P_1(x, y, u, v) \\ P_2(x, y, u, v) \\ P_3(x, y, u, v) \\ P_4(x, y, u, v) \end{pmatrix}.$$

En premier temps on doit trouver les solutions périodiques du système non perturbé $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ qui sont présentées par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ u_0 + \int_0^t h_3(s)ds \\ v_0 + \int_0^t h_4(s)ds \end{pmatrix}.$$

Cet ensemble de solutions est 2π-périodique si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \\ u(2\pi) \\ v(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

On obtient les conditions de périodicité définies dans l'énoncé du théorème 5.1.4 par (5.1.12). Notons que notre ensemble de solutions est de dimension quatre.

Obtenir les solutions périodiques du système (5.1.1) se réduit à trouver les racines $\mathbf{z} = (x_0, y_0, u_0, v_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (2.2.15). La matrice fondamentale M(t) du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ est la suivante

$$M(t) = M_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ on trouve

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \\ \mathcal{F}_4(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \end{cases} \tag{5.2.4}$$

où $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ *et* $\mathcal{F}_4$ ont été définies dans l'énoncé du théorème 5.1.4 par (5.1.11).

Si les solutions $(x_0^*, y_0^*, u_0^*, v_0^*)$ du système (5.2.4) vérifient que

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, u_0, v_0)} \Big|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)=(x_0^*,y_0^*,u_0^*,v_0^*)}\right) \neq 0.$$

Alors il existe une solution 2π-périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ u(t,\varepsilon) \\ v(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ du système différentiel (5.1.1) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit qui tend vers la solution périodique donnée par (5.1.13) du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ quand $\varepsilon \to 0$. ■

Preuve du théorème 5.1.5. On va utiliser le théorème 2.2.3 afin d'étudier les solutions périodiques du système différentiel (5.1.1), ce dernier peut s'écrire sous la forme du système (2.2.11) en prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}, \ t = t, \ F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y + h_1(t) \\ x + h_2(t) \\ \lambda u + v + h_3(t) \\ \lambda v + h_4(t) \end{pmatrix} \text{ et } F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} P_1(x, y, u, v) \\ P_2(x, y, u, v) \\ P_3(x, y, u, v) \\ P_4(x, y, u, v) \end{pmatrix}.$$

En premier temps on doit trouver les solutions périodiques du système non perturbé $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ qui sont présentées par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t(\cos(t-s)h_1(s) - \sin(t-s)h_2(s))ds \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t(\sin(t-s)h_1(s) + \cos(t-s)h_2(s))ds \\ e^{\lambda t}u_0 + te^{\lambda t}v_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}(h_3(s) + (t-s)h_4(s))ds \\ e^{\mu t}v_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}h_4(s)ds \end{pmatrix}$$

Cet ensemble de solutions est $2\pi-$périodique si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x(2\pi) \\ y(2\pi) \\ u(2\pi) \\ v(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}, .$$

on obtient les conditions de périodicité définies dans l'énoncé du théorème 5.1.5 par (5.1.15). Notons que notre ensemble de solutions est de dimension deux. La matrice fondamentale M(t) du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ est la suivante

$$M(t) = M_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

On a

$$M^{-1}(0)-M^{-1}(2\pi)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{-\lambda 2\pi} & 2\pi e^{-\lambda 2\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 1-e^{-\lambda 2\pi} \end{pmatrix},$$

alors toutes les conditions du théorème 2.2.3 sont satisfaites.

Obtenir les solutions périodiques du système (5.1.1) se réduit à trouver les racines $\mathbf{z}=(x_0,y_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z})=0$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (2.2.14). Calculons $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ on trouve

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(x_0,y_0)=0, \\ \mathcal{F}_2(x_0,y_0)=0, \end{cases} \tag{5.2.5}$$

où $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ ont été définies dans l'énoncé du théorème 5.1.5 par (5.1.14).

Si les solutions (x_0^*,y_0^*) du système (5.2.5) vérifient que

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\ |_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right)\neq 0.$$

Alors il existe une solution 2π-périodique $\begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \\ u(t,\varepsilon) \\ v(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$ du système différentiel (5.1.1) avec $\varepsilon\neq 0$ suffisamment petit qui tend vers la solution périodique du système différentiel $(5.1.1)_{\varepsilon=0}$ quand $\varepsilon\to 0$. ■

Preuve du corollaire 5.1.1. On va appliquer le théorème 5.1.1, premièrement, on peut vérifier facilement les conditions (5.1.3)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}(\cos(s)\sin(s)-\sin(s)\cos(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi}(-\sin^2(s)+\cos^2(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi}(\cos(s)\sin(s)-\sin(s)\cos(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi}(-\sin^2(s)+\cos^2(s))ds &= 0, \end{aligned}$$

Après les calculs de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$ on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x_0, y_0, u_0, v_0) &= \frac{1}{2} + x_0 + \frac{3}{8}y_0 + \frac{3}{4}x_0 y_0, \\
\mathcal{F}_2(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x_0 - \frac{1}{8}x_0^2 + y_0 + \frac{5}{8}y_0^2, \\
\mathcal{F}_3(x_0, y_0, u_0, v_0) &= x_0 + u_0 + 1, \\
\mathcal{F}_4(x_0, y_0, u_0, v_0) &= y_0 + v_0 - 1.
\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = 0$ admet quatre solutions $(x_0^*, y_0^*, u_0^*, v_0^*)$ données par $(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10}, -\frac{1}{2}, \frac{9}{5} - \frac{\sqrt{139}}{10})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{5} - \frac{\sqrt{139}}{10}, -\frac{1}{2}, \frac{9}{5} - \frac{\sqrt{139}}{10})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10}, -\frac{1}{2}, \frac{9}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})$ et $(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{5} - \frac{\sqrt{139}}{10}, -\frac{1}{2}, \frac{9}{5} + \frac{\sqrt{139}}{10})$, les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3,\mathcal{F}_4)}{\partial(x_0,y_0,u_0,v_0)}(x_0^*, y_0^*, u_0^*, v_0^*)$ dans ces solutions sont

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{139}}{8} \\ \frac{2}{5} + \frac{3\sqrt{139}}{40} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{139}}{8} \\ \frac{2}{5} + \frac{3\sqrt{139}}{40} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{3\sqrt{139}}{40} \\ \frac{-\sqrt{139}}{8} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; et \; \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{3\sqrt{139}}{40} \\ \frac{-\sqrt{139}}{8} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui ont toutes au moins deux parties réelles positives.

Le déterminant

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, u_0, v_0)} \,|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)=(x_0^*,y_0^*,u_0^*,v_0^*)}\right)$$

pour ces quatre solutions est $1,89, 0,71, 1,89, 0,71$, respectivement, on obtient en utilisant le théorème 5.1.1 les solutions définies dans l'énoncé du corollaire 5.1.1. ■

Preuve du corollaire 5.1.2. On va appliquer le théorème 5.1.2, premièrement, on peut vérifier facilement les conditions (5.1.6)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (\cos^2(s)\sin(s) - \sin(s)\cos^2(s))ds &= 0, \\
\int_0^{2\pi} (-\sin^2(s)\cos(s) + \cos^3(s))ds &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{-3}{10}, \\
v_0 &= -\frac{5}{26}.
\end{aligned}$$

Après les calculs de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(x_0,y_0) &= \frac{7}{9}+\frac{7}{6}x_0-\frac{4}{3}y_0,\\ \mathcal{F}_2(x_0,y_0) &= \frac{7}{9}+\frac{7}{6}x_0+\frac{4}{3}y_0.\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ admet une solution (x_0^*, y_0^*) donnée par $(-\frac{2}{3}, 0)$, les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}(x_0^*, y_0^*)$ dans cette solution sont $\binom{\frac{5}{4}+\frac{1}{12}I\sqrt{233}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{12}I\sqrt{233}}$, qui ont deux parties réelles positives.

On a aussi

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\,|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)=(-\frac{1}{2},0)}\right)=\frac{28}{9}\ .$$

On obtient en utilisant le théorème 5.1.2 la solution définie dans l'énoncé du corollaire 5.1.2. ■

Preuve du corollaire 5.1.3. On va appliquer le théorème 5.1.3, premièrement, on peut vérifier facilement les conditions (5.1.9)

$$\int_0^{2\pi}(\cos^2(s)\sin(s)+\sin^4(s)\cos(s))ds=0,$$

$$\int_0^{2\pi}(-\sin^2(s)\cos(s)+\cos^2(s)\sin^3(s))ds=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(s)ds=0.$$

On trouve aussi

$$v_0 = -\frac{1}{10}.$$

Après les calculs de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$ on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(x_0,y_0,u_0) &= \frac{15}{16}x_0-\frac{49}{48}y_0+\frac{127}{720},\\ \mathcal{F}_2(x_0,y_0,u_0) &= \frac{47}{48}x_0+\frac{17}{16}y_0+\frac{737}{720},\\ \mathcal{F}_3(x_0,y_0,u_0) &= -u_0^3+3u_0-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = 0$ admet deux solutions (x_0^*, y_0^*, u_0^*) données par $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{15}, \frac{1}{2}(3-\sqrt{7}))$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{15}, \frac{1}{2}(3+\sqrt{7}))$, les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)}{\partial(x_0,y_0,u_0)}(x_0^*, y_0^*, u_0^*)$

dans ces solutions sont

$$\begin{pmatrix} 1 + I\frac{\sqrt{2294}}{48} \\ 1 - I\frac{\sqrt{2294}}{48} \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + I\frac{\sqrt{2294}}{48} \\ 1 - I\frac{\sqrt{2294}}{48} \\ -\sqrt{7} \end{pmatrix},$$

qui ont toutes au moins deux parties réelles positives.

Le déterminant

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, u_0)} \mid_{(x_0,y_0,u_0)=(x_0^*,y_0^*,u_0^*)}\right)$$

pour ces deux solutions est $\frac{2299\sqrt{7}}{1152}, \frac{-2299\sqrt{7}}{1152}$, respectivement, on obtient en utilisant le théorème 5.1.3 les solutions définies dans l'énoncé du corollaire 5.1.3. ■

Preuve du corollaire 5.1.4. On va appliquer le théorème 5.1.4, premièrement, on peut vérifier facilement les conditions (5.1.12)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (2\sin(s)\cos(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (-\sin^2(s) + \cos^2(s))ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin(s)ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin(s)\cos(s)ds &= 0, \end{aligned}$$

Après les calculs de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$ on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0, y_0, u_0, v_0) &= \frac{-1}{4}x_0^3 - \frac{3}{8}x_0^2 - \frac{1}{8}x_0 - \frac{1}{8}y_0^2 - \frac{1}{4}x_0y_0^2, \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, u_0, v_0) &= -\frac{1}{8}y_0(2x_0 + 2x_0^2 + 2y_0^2 + 3), \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, u_0, v_0) &= u_0 + 1, \\ \mathcal{F}_4(x_0, y_0, u_0, v_0) &= v_0 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_4 = 0$ admet trois solutions $(x_0^*, y_0^*, u_0^*, v_0^*)$ données par $(0, 0, -1, -\frac{1}{4}), (-\frac{1}{2}, 0, -1, -\frac{1}{4})$ et $(-1, 0, -1, -\frac{1}{4})$, les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3,\mathcal{F}_4)}{\partial(x_0,y_0,u_0,v_0)}(x_0^*, y_0^*, u_0^*, v_0^*)$ dans ces solutions sont

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{8} \\ \frac{-3}{8} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{-5}{16} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} \\ \frac{-3}{8} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui ont toutes au moins deux parties réelles positives.

Le déterminant pour ces trois solutions

$$\det(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, u_0, v_0)} \mid_{(x_0,y_0,u_0,v_0)=(x_0^*,y_0^*,u_0^*,v_0^*)})$$

est $\frac{3}{64}, \frac{-5}{256}, \frac{3}{64}$, respectivement, on obtient en utilisant le théorème 5.1.4 les solutions définies dans l'énoncé du corollaire 5.1.4. ■

Preuve du corollaire 5.1.5. On va appliquer le théorème 5.1.5, premièrement, on peut vérifier facilement les conditions (5.1.15)

$$\int_0^{2\pi} (-\cos(s)\sin(s) - \sin(s)\cos(s))ds = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin(s)\sin(s) - \cos(s)\cos(s)ds = 0.$$

On trouve aussi

$$u_0 = -\frac{1}{25},$$
$$v_0 = -\frac{1}{5},$$

Après les calculs de $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) &= \frac{-1}{8} y_0(6x_0 - 7), \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2} - \frac{5}{8}x_0 + \frac{1}{8}x_0^2 - \frac{5}{8}y_0^2. \end{aligned}$$

Le système $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ admet deux solutions (x_0^*, y_0^*) données par $(1, 0), (4, 0)$ et les valeurs propres de la matrice jacobienne $\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}(x_0^*, y_0^*)$ pour ces solutions sont

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8}I\sqrt{3} \\ \frac{-1}{8}I\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{8}I\sqrt{51} \\ \frac{-1}{8}I\sqrt{51} \end{pmatrix},$$

qui ont toutes des parties réelles nulles.

Le déterminant pour ces deux solutions (x_0^*, y_0^*)

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)} \mid_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right)$$

est $\frac{3}{64}, \frac{51}{64}$, respectivement, on obtient en utilisant le théorème 5.1.5 les solutions définies dans l'énoncé du corollaire 5.1.5.

Dans ce cas on ne peut rien dire sur la stabilité des solutions. ■

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons utilisé l'une des plus importantes méthodes perturbatives pour étudier l'existence des solutions périodiques de certains systèmes différentiels polynômiaux de dimension deux, trois et quatre. Nous avons perturbé un système non homogène et nous avons illustré notre étude par des exemples.

Nous continuerons nos recherches des solutions périodiques des équations différentielles perturbées par un paramètre suffisamment petit, en utilisant la théorie de moyennisation.

On s'intéresse à la recherche des solutions périodiques du système différentiel

$$\dot{x} = Ax + h(t) + \varepsilon P(x),$$

où, $x = (x_1, .., x_n)$, $h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ : \\ h_n(t) \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ : \\ P_n(x) \end{pmatrix}$ sont des polynômes de degré n, A est une matrice constante $n \times n$ et ε est un petit paramètre. Ce problème est la généralisation des trois cas étudiés dans cette thèse.

On s'intéresse aussi à l'étude des solutions périodiques de l'équation différentielle d'ordre quatre suivante :

$$x^{(4)} + a\dddot{x} + g(\dot{x})x + b\dot{x} + \varepsilon f(t, \overset{\cdot\cdot}{x}, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}) = p(t).$$

où, a et b sont des constantes, g et f sont des fonctions continues et p est continue, T-périodique.

Bibliographie

[1] U. Afuwape, Remarkes on Barbashin-Ezeilo problems on third-order differential equations, J. Math. Anal. Appl. 317(2006), 613-619.

[2] Barrow-green, J. POINCARÉ and the three body problem, History of mathematics, 11, American Mathematical society, London Mathematical society, 1997.

[3] M. Bobieński and H. Żołądek, Limit cycles for multidimensional vector field. The elliptic case, J. Dynam. Control Syst., 9:265–310, 2003.

[4] M. Bobieński and H. Żołądek, Limit cycles of three–dimensional polynomial vector fields, Nonlinearity, 18:175–209, 2005.

[5] N. N. Bogoliubov and Yu. A. Mitropolskii, Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations, Gordon and Breach, New York, 1961.

[6] A. Buică and J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, Bull. Sci. Math., 128(1), 7-22, 2004.

[7] A. Buică, J. P. Francoise and J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, Comm. on Pure and Appl. Anal. 6 (2007), 103–111.

[8] D. Chenciner, De la mécanique Céleste à la théorie des Systèmes dynamiques, aller et retour, Epistémologie des systèmes dynamiques, Paris, 1999.

[9] A. Cima, J. Llibre and M. A. Teixeira, Limit cycles of some polynomial differential systems in dimension 2, 3 and 4 via averaging the ory, Appl. Anal. 87 (2008), 149–164.

[10] F. S. Diasand and L. F Mello, Nonlinear analysis of a quadratic system obtained from a scalar third order differential equation, Electron. J. Diff. Equ. 161 (2010), 1–25.

[11] F. Esmailzadech, M. Ghorashi and B. Mehri, Periodic behavior of a nonlinear dynamical system, Nonlinear Dynam. 7(1995),335-344.

[12] S. P. Hastings, On the uniqueness and global asymptotic stability of periodic solutions for a third order system, Rocky Mountain, J. Math. 7(1977),513-538.

[13] N. M. Krylov and N. N. Bogoliubov, Introduction to Nonlinear Mechanics (in Russian), Izd. AN UkSSR, Kiev, 1937. Vvedenie v Nelineinikhu Mekhaniku.

[14] N. G. Lloyd, Degree theory. Cambridge tracts in mathematics ; 73. Cambridge University Press, 1978.

[15] J. Llibre, D. D. Novas and M. A. Teixeira, Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree, Nonlinearity, 2014, 27, 563-583.

[16] J. Llibre. Averaging theory and limit cycles for quadratic systems. Radovi Mat., 11:1 14, 2002.

[17] J. Llibre, J. Yu and X. Zhang, Limit cycles coming from the perturbation of 2-dimensional centers of vector fields in $\mathbb{R}^3$, Dynam. Systems Appl. 17(2008), 625-636.

[18] J. Llibre, J. Yu and X. Zhang, Limit Cycles of Third Order Differential Equations, Rocky Mountain, J. Math, 2010; 40: 581-594.

[19] J. Llibre, A. Makhlouf, Limit cycles of polynomial differential systems bifurcating from the periodic orbits of a linear differential system in $\mathbb{R}^d$, Bull. Sci. math. 133 (2009), 578–587.

[20] J. Llibre, A. Makhlouf, Periodic Orbits of a Non-autonomous Quadratic Differential System obtained from Third Order Differential Equations, Dynamical systems, June 2012; 27:2, 161-168.

[21] J. Llibre, A. Makhlouf, Periodic solutions of the fourth-order non-autonomous differential equation $u'''' + qu'' + pu = \varepsilon f(t, u, u', u'', u''', u'''')$, Appl. Math & Comp 219, 827-836, 2012.

[22] J. Llibre, A. Makhlouf, On the limit cycles for a class of fourth-order differential equations, J. Phys. A : Math. Theor, 45, 055214, 2012.

[23] J. Llibre, N. Sellami, A. Makhlouf, Limit cycles for a class of fourth-order differential equations, Applicable Analysis 88 (12), (2009), 1617-1630.

[24] I. G. Malkin, Some problems of the theory of nonlinear oscillations, (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit, Moscow, 1956.

[25] A. Makhlouf, M. Hamamda, Limit cycles of third-order differential equations, Ann. of Diff. Eqs. 30:4 (2014).

[26] A. Makhlouf and L. Bousbiat, Periodic solutions of some polynomial differential system in dimension 3 via averaging theory, (Hindawi) International Journal of differential equations , volume 2015, ID 263837.

[27] M. Amar and B. Lilia, (2017) Periodic Solutions of Some Polynomial Differential Systems in R4. Journal of Applied Mathematics and Physics, 5, 194-223.

[28] F. Monhos, Periodic solutions for a third order differential equation under conditions on the potential, Portugaliae Math. 55(1998),475-484.

[29] L. Perko, Differential equations and dynamical systems. 3rd ed. Vol. 7, Texts in applied New York (NY) : Springer-Verlag; 2001.

[30] D. Pi, X. Zhang, Limit cycles of differential systems via averaging theory, Candian. App. Vol 17, Number 1, Spring 2009.

[31] M. Roseau, Vibrations non linéeaires et théorie de la stabilité, (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol 8, Springer–Verlag, Berlin–New York, 1966.

[32] R. REISSING, Periodic solutions of a third order nonlinear differential equation, Ann. Math. Pura. Appl. 92(1972),193-198.

[33] J. A. SANDERS and F. VERHULST, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Applied Mathematical Sciences, Vol 59, Springer, Berlin, 1985.

[34] H. O. TEJUMOLA, Boundedess and periodicity of solutions of certain fourth-order differential equations, Ann. Mat. Pura Appl. 80(1968), 177-196.

[35] H. O. TEJUMOLA, Periodic solutions of certain fouth-order differential equations, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. CI. Sci. Fis. Mat. Natur. 57(1974), 328-336.

[36] H. O. TEJUMOLA, On the existence of periodic solutions of certain fouth-order differential equations, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. CI. Sci. Fis. Mat. Natur. 57(1974), 530-533.

[37] A. TIRYAKI, Periodic solutions of a certain fourth order differential equations, Indian J. Pure. Appl. Math. 20 (1989), 235-241.

[38] E. TUNÇ, On the periodic solutions of certain fourth and fifth order vector differential equations. Math. Commun, 10(2005), No.2, 135-141.

[39] E. TUNÇ, Uniqueness theorems for periodic solutions of certain fourth and fifth order differential systems, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica (New Series) Vol. 2 (2007), No. 3, pp. 797-804.

[40] F. VERHULST, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Universitext, Springer, 1996.