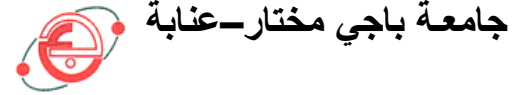


BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR – ANNABA



FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIORAT
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Comportement sous sollicitations dynamiques des structures renforcées par matériaux composites

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction

Par

TEKILI Sabiha

DEVANT LE JURY

Président :	Mr. Bey Kamel	Pr.	Université Badji Mokhtar – Annaba
Directeur de thèse :	Mr. Khadri Youcef	MCA	Université Badji Mokhtar – Annaba
Examineurs :	Mr. Hamadache Hamid	Pr.	Université Badji Mokhtar – Annaba
	Mr. Khochemane Lakhdar	Pr.	Université 20 Août 1955 – Skikda
	Mr. Bouzaouit Azzedine	Pr.	Université 20 Août 1955 – Skikda
	Mr. Boutaba Smail	Pr.	Université 8 Mai 1945 – Guelma
Invité :	Mr. Daouadji Ali	Pr.	INSA – Lyon, France

Année 2017

TABLE DES MATIERES

Listes des figures	4
Listes des tableaux	7
Dédicaces	8
Remerciements ..	9
Résumé	11
INTRODUCTION GENERALE	15
CHAPITRE I : ETUDE ET ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE	
I.1 Introduction	20
I.2 Matériaux composites	20
I.2.1 Composites à matrice organique (CMO).....	22
I.2.2 Composites à matrice céramique (CMC).....	23
I.2.3 Composites à matrice métallique (CMM).....	24
I.3 Composites stratifiés	25
I.4 Composites sandwichs	26
I.5 Composite convenant au renfort des structures.....	27
I.5.1 Système de PRF carbone.....	28
I.5.2 Système de PRF verre.....	28
I.5.3 Système d'ancre de fibre.....	28
I.5.4 Polymère Renforcé de Fibres de Carbone PRFC.....	30
I.6 Structures renforcées par matériaux composites.....	33
I.6.1 Infrastructure de transport.....	33
I.6.2 Installations industrielles.....	34
I.6.3 Projets marins et côtières	34
I.6.4 Assainissement de conduites et de buses.....	35
I.6.5 Renforcement et réparation structurelle des bâtiments.....	35
I.7 Poutres renforcées par matériaux composites.....	36

I.7.1 Poutres en béton armé renforcées par matériaux composites.....	37
I.7.2 Poutres en bois renforcées par matériaux composites.....	37
I.7.3 Poutres métalliques renforcées par matériaux composites.....	38
I.8 Position du problème.....	40
I.9 Conclusions.....	42

CHAPITRE II : MECANIQUE DES STRUCTURES EN MATERIAUX COMPOSITES

II.1. Introduction	45
II.2 Mécanique des milieux continus.....	45
II.3 Mécanique de composite unidirectionnel	49
II.3.1 Relations contraintes-déformations.....	49
II.3.2 Module d'élasticité équivalent.....	52
II.4 Mécanique des structures stratifiées	54
II.4.1 Nomenclature des structures stratifiées.....	55
II.4.2 Type de structures stratifiées	56
II.5 Théorie classique des stratifiées	56
II.5.1 Relations entre déformations et déplacements.....	60
II.5.2 Relations entre les efforts résultants et les déformations.....	60
II.5.3 Déformations dans chaque pli.....	61
II.6 Comportement des poutres stratifiées.....	62
II.7 Conclusion	63

CHAPITRE III : VIBRATION LIBRE DES POUTRES RENFORCEES PAR MATERIAUX COMPOSITES, METHODE ANALYTIQUE

III.1 Introduction.....	65
III.2 Vibration libre des poutres renforcées par matériaux composites.....	65
III.3 Propriétés mécaniques de matériaux composites	70
III.4 Équation de vibration libre et résolution.....	69
III.5 Fréquences et modes de vibration pour les poutres conditions aux limites simples.....	76
III.6 Applications.....	78
III.7 Conclusions.....	85

CHAPITRE IV : VIBRATION LIBRE DES POUTRES RENFORCEES PAR MATERIAUX COMPOSITES, METHODE DES ELEMENTS FINIS

IV.1 Introduction	87
IV. 2 Equations fondamentales.....	87
IV.2.1. Formulation élément poutre d'Euler - Bernoulli	87
IV.2.2. Transformation des opérateurs de dérivations.....	91
IV.2.3. Détermination de la matrice de rigidité.....	91
IV.3. Conditions aux limites.....	97
IV.4 Applications.....	98
IV.5. Conclusions.....	106

CHAPITRE V : VIBRATIONS FORCEES DES POUTRES RENFORCEES PAR MATERIAUX COMPOSITES SOUS SOLLICITATIONS DYNAMIQUES

V.1 Introduction.....	109
V.2 Modèle théorique	109
V.3 Facteur d'Amplification Dynamique (FAD).....	114
V.4 Applications.....	115
V.4.1 Vibration libre.....	115
V.4.2 Vibration forcée.....	117
V.4.2.1 Influence de la vitesse.....	117
V.4.2.2 Influence de l'amortissement	118
V.4.2.3 Influence de l'orientation des fibres.....	119
V.4.2.4 Influence du rapport des épaisseurs h/H.....	121
V.4.2.5 Influence du rapport longueur-épaisseur L/H.....	122
V.5 Conclusion.....	124
CONCLUSION GENERALE.....	127
REFERENCES.....	130
ANNEXES.....	134
PUBLICATION N°1.....	135
PUBLICATION N°2.....	141
PUBLICATION N°3.....	150

Listes des figures

- Fig.1.1 Exemples de multi-matériaux : (a) composite carbone/époxy, (b) béton armé, (c) bois vu au microscope optique
- Fig.1.2 Matériau composite
- Fig. 1.3 Structures géométriques des composites : (a) fibres longues, (b) fibres courtes, (c) particules.
- Fig. 1.4 Constituants des matériaux composites
- Fig. 1.5 Stratifiés à base de plis unidirectionnels.
- Fig. 1.6 Structures Sandwichs
- Fig. 1.7 Système de PRF carbone à une couche et deux couches
- Fig. 1.8 Système de PRF verre unidirectionnel et bidirectionnel
- Fig. 1.9 Ancrage composite avec une mèche de fibre de carbone (a) et de verre (b)
- Fig. 1.10 Comparaison de comportement entre différents matériaux
- Fig. 1.11 Comparaison de comportement entre différents PRFC (CFRP)
- Fig. 1.12 Renforcement des infrastructures de transport par matériaux composites
- Fig. 1.13 Renforcement des installations industrielles par matériaux composites
- Fig. 1.14 Renforcement des structures marines par matériaux composites : (a) sans renforcement, (b) avec renforcement
- Fig. 1.15 Assainissement de conduites et de buses par matériaux composites: (a) sans renforcement, (b) avec renforcement
- Fig.1.16 Renforcement et réparation structurelle des bâtiments par matériaux composites TFC.
- Fig.1.17 Renforcement par Tissus en Fibres de CarboneTFC d'une poutre en béton armé.
- Fig.1.18 Renforcement par Tissus en Fibres de CarboneTFC d'une poutre en acier
- Fig. 1.19 Comparaison de comportement entre les poutres renforcées et celles non renforcées.
-
- Fig. 2.1 Etat de contraintes
- Fig. 2.2 Matériau composite unidirectionnel.

- Fig. 2.3 Etat complet de contraintes dans le repère local
- Fig. 2.4 Élément de composite et orientation des fibres
- Fig. 2.5 Plan de contrainte de l'élément composite dans la direction x
- Fig. 2.6 Structure stratifiée.
- Fig. 2.7 Nomenclature des stratifiés
- Fig. 2.8 Différents types de stratifié
- Fig. 2.9 Section droite d'un stratifié avant et après l'action de la charge extérieure
-
- Fig. 3.1 Élément de poutre.
- Fig. 3.2 Flexion cylindrique d'une poutre
- Fig. 3.3 Renforcement sur les deux côtés de la poutre (sandwich)
- Fig. 3.4 Tronçon de poutre élémentaire
- Fig. 3.5 Différentes conditions aux limites simples de la poutre
- Fig. 3.6 Fréquences propres de la poutre pour différents modes et pour des rapports d'épaisseur h/H variant de 0.6 à 1.0.
- Fig. 3.7 Fréquences propres de la poutre pour différents angle des fibres et pour des rapports d'épaisseur h/H variant de 0.6 à 1.0
- Fig. 3.8 Fréquences propres de la poutre pour différents L/H et pour des rapports d'épaisseur h/H variant de 0.6 à 1.0
- Fig. 3.9 Modes propres de la poutre pour différents modes
- Fig. 3.10 Modes propres de la poutre pour différents h/H et pour des rapports d'épaisseur h/H
-
- Fig. 4.1 Géométrie de la poutre revêtue en composite
- Fig. 4.2 Élément poutre d'Euler - Bernoulli à deux nœuds en coordonnées globales
- Fig. 4.3 Élément poutre d'Euler Bernoulli en coordonnées locales
- Fig. 4.4 Fonctions de forme pour l'élément poutre à deux nœuds
- Fig. 4.5 Discrétisation en quatre éléments finis à deux nœuds.
- Fig. 4.6 Comparaison des résultats de la MEF et de la méthode analytique pour les dix premiers modes
- Fig. 4.7 Comparaison des résultats de la MEF et de la méthode analytique pour différents h/H

Fig. 4.8 Fréquence naturelle en fonction de (h/H) et (θ)

Fig. 4.9 Première fréquence en fonction du (h/H)

Fig. 4.10 Fréquence naturelle en fonction de θ

Fig. 4.11 Cinq premiers modes de la poutre C.A.L. S-S

Fig. 4.12 Cinq premiers modes de la poutre C.A.L. E-E

Fig. 4.13 Modes propres de la poutre renforcée par matériaux composites

Fig. 5.1 Poutre sur deux appuis simples, excitée par une force en mouvement.

Fig. 5.2 Déplacement dynamique en fonction de la position de la charge et pour différentes vitesses de la charge roulante

Fig. 5.3 Déplacement dynamique en fonction de la position de la charge et pour différents coefficients d'amortissement

Fig. 5.4 Déplacement dynamique en fonction de la position de la charge et pour différentes orientations des fibres

Fig. 5.5 FAD en fonction de la vitesse de la charge et pour différentes orientations des fibres

Fig. 5.6 Déplacement dynamique en fonction de la position de la charge et pour différents rapports h/H

Fig. 5.7 FAD en fonction de la vitesse de la charge et pour différents rapports h/H

Fig. 5.8 Déplacement dynamique en fonction de la position de la charge et pour différents rapports L/H

Fig. 5.9 FAD en fonction de la vitesse de la charge et différents rapports L/H

Liste des tableaux :

Tableau 1.1 : Caractéristiques mécaniques des tissus composites

Tableau 1.2 : Caractéristiques mécaniques des fibres

Tableau 1.3 : Poutres en acier renforcées par des matériaux composites.

Tableau 3.1 : Fonctions modales transversales de la poutre

Tableau 3.2 : Modules élastiques du matériau composite unidirectionnel avec $V_{fibre} = 0,6$

Tableau 3.3 : Propriétés mécaniques de l'acier

Tableau 4.1: Coordonnées et poids d'intégration de Gauss

Tableau 4.2 : Propriétés physiques des deux modèles de poutres I et II

Tableau 4.3 : Première fréquence (Hz) de la poutre avec et sans revêtement (renforcement)

Tableau 5.1 : Premières fréquences naturelles et vitesse critique pour différentes h/H

Tableau 5.2 : Première fréquence naturelle et vitesse critique de la poutre pour différent θ

Tableau 5.3 : Première fréquence naturelle et vitesse critique de la poutre pour différent L/H

Dédicaces

Je dédie ce travail en guise de reconnaissance, d'amour et d'affection à mes parents

Teḳili Sabiha

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement, **Y. Khadri** directeur de thèse pour son soutien qu'il n'a cessé de m'apporter, sa disponibilité et ses précieux conseils qui ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie ensuite tout particulièrement le Professeur **K. Bey** d'avoir accepté d'être président du jury de ma thèse.

J'exprime mes remerciements aussi au professeur **H. Hamadache** d'avoir accepté d'être examinateur de mon travail de thèse.

Je voudrais remercier également les Professeurs **L. Khochemane** et **A. Bouzaouit**, professeurs à l'université 20 Août 1955– Skikda, ainsi que **S. Boutaba** professeur à l'université 8 Mai 1945 – Guelma, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de l'examiner. Je tiens à remercier le professeur **B. Merzoug** qui a contribué à la traduction de nos articles.

Je ne voudrais pas oublier de remercier le professeur **A. Doauadji** de l'INSA de Lyon, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et pour son aide durant mon séjour de stage de courte durée.

Enfin, je remercie tous les membres de ma famille pour leur soutien.

Publications et communications Internationales

En plus de ce mémoire de thèse, ces travaux ont conduit aux publications et communications internationales suivantes :

1. **S. Tekili**, Y. Khadri, and B. Merzoug, “Free Vibration Analysis of the Strengthened Beams by Composite Coats, *Advanced Materials Research* Vol. 716 (2013) pp 595-599. <http://www.ttp.net/978-3-03785-713-7/12.html>
2. **S. Tekili**, Y. Khadri, B. Merzoug, “Finite element analysis of free vibration of beams with composite coats, *Mechanika*, (2015) Vol. 21, No 4 pp 290-295
<http://www.mechanika.ktu.lt/index.php/Mech/article/view/9849>
3. **S. Tekili**, Y. Khadri, B. Merzoug, E. M. Daya, A. Daouadji, Free and forced vibration of strengthened beams by composite coats subjected to moving load, *Mechanics of Composite Materials - Springer*, (2017) Vol. 52, No. 6., P. 789-798.
<http://link.springer.com/journal/11029>

1. **Tekili S.**, Khadri Y., et Merzoug B., Analyse des vibrations libres des poutres sandwichs renforcées par matériaux composites, Journées scientifiques Franco-Maghrébines, du 21 au 23 octobre 2014, Hammamet-Tunisie.
2. **Tekili S.**, Khadri Y., Roubeche M., Merzoug B., Analyse des vibrations libres des poutres composites, 2èmes Journées Scientifiques Franco-Maghrébines, Caractérisation des matériaux complexes, du 10 au 13 octobre 2015, Annaba-Algérie.
3. Kallouche A., Khadri Y., **Tekili S.**, Merzoug B., Simulation numérique des vibrations libres des poutres composites multicouches, 2èmes Journées Scientifiques Franco-Maghrébines, Caractérisation des matériaux complexes, du 10 au 13 octobre 2015, Annaba-Algérie.
4. Khadri Y., **Tekili S.**, Daya E. M., Daouadji A., Comportement dynamique de poutre renforcée par matériaux composites soumise à une charge mobile, 3èmes Journées scientifiques Franco-

Maghrébines: Caractérisation des Matériaux Complexes, 28-30 novembre 2016 à l'Université Paris-Est Créteil (ICMPE, Thiais).

5. **Tekili Sabiha**, Khadri Youcef, Vibrations des poutres en acier renforcées par matériaux composites PRF sous sollicitation dynamique, 3ème I.C.M'2017 Annaba, 26-27 Avril 2017.

Résumé

ملخص

تستخدم المواد المركبة بشكل متزايد في مجال الطيران والمجال المدني والبحري والصناعي وذلك لما تتميز به من خواص ميكانيكية عالية. في الآونة الأخيرة، يتم استخدام المواد المركبة (البوليمر المدعوم بالألياف) PRF لبناء الهياكل المعدنية. والعديد من الباحثين استخدموا PRF لغرض ترميم أو تدعيم هيكل معدني ومقارنة أدائه مع حالة الإجهاد ولكن دراسات قليلة قد عالجت مشكلة ديناميكيات الهياكل المعدنية المدعومة بالمواد المركبة تحت تحميل ديناميكي. في هذه الأطروحة، دراسة الاهتزازات الحرة للهياكل المدعومة تمت بطريقة تحليلية باستخدام تقريب الوسائط وباستخدام طريقة العناصر المحددة مع الشروط الحدية المختلفة، إما السلوك الديناميكي للهياكل المعدنية المدعومة والخاضعة لحمولة متحركة بسرعة ثابتة فكانت دراسة تحليلية باستخدام تكامل Duhamel. وتم استخدام نظرية الهياكل الكلاسيكية (CBT) لتحديد عناصر الصلابة لطبقات المادة المركبة. وقمنا بدراسة براميتريية لمختلف تشكيلات الهيكل المدعوم وذلك لتحليل تأثير مختلف العناصر (اتجاه الألياف، وسرعة الحمولة ونسبة السماكة) على الرد الديناميكي وعلى عامل التضخيم الديناميكي (FAD) والنتائج المتحصل عليها في هذا العمل تبين أن PRF تقدم بديلا واعدة لبناء الهياكل المعدنية. وبالإضافة إلى ذلك فهي تعمل على تحسين السلوك الديناميكي للهياكل مثل الحد من الاهتزاز وزيادة اجمالي التخميد للهياكل.

الكلمات المفتاحية: الاهتزازات - الهياكل - المواد المركبة (FRP) - تدعيم - قوة متحركة

Résumé

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans les domaines aéronautiques, civils, navals et industriels grâce à leurs propriétés mécaniques élevées. Récemment, les matériaux composites (Polymère Renforcé de Fibres) PRF sont utilisés pour le renforcement des structures métalliques. Les PRF sont utilisés soit dans le but de réparer ou de renforcer la structure et comparer leur performance à la fatigue. Mais très peu de travaux ont abordé le problème dynamique des poutres métalliques renforcées par matériaux composites sous chargement dynamique. Dans cette thèse, l'étude des vibrations libres des poutres métalliques renforcées par les PRF a été réalisée par une méthode analytique en utilisant l'approximation modale et par la méthode des éléments finis (MEF) avec différentes conditions aux limites. Le comportement dynamique des poutres métalliques renforcées par PRF, sous une charge mobile à une vitesse constante a été analysé analytiquement en utilisant l'intégrale de Duhamel. La théorie de poutre classique (CBT) a été utilisée pour déterminer les paramètres de rigidité des couches composites. Une étude paramétrique a été menée sur diverses configurations de la poutre renforcée afin d'analyser l'effet des différents paramètres (l'orientation des fibres, la vitesse de la charge et le rapport d'épaisseur) sur la réponse dynamique et le facteur d'amplification dynamique (FAD). Les résultats obtenus dans ce travail montrent que les PRF offrent une alternative prometteuse pour le renforcement des structures métalliques. En outre ils améliorent le comportement dynamique de structures telles que la réduction des vibrations et l'augmentation de l'amortissement des structures.

Mots clés : vibrations– poutres – composites PRF – renforcement – force mobile.

Abstract

The composite materials are increasingly used in the aeronautical, civil, naval and industrial fields thanks to their high mechanical properties. Recently, the composite materials PRF (Reinforced Polymer of Fibers) are used for the reinforcement of the metallic structures. Several researchers have used FRP either to repair or strengthen the structure and compare their performance to fatigue. But very little work has addressed the dynamic problem of reinforced metal beams by composite materials under dynamic loading. In this thesis, the study of the free vibrations of FRP reinforced metal beams was carried out by an analytical method using the modal approximation and the finite element method (FEM) with different boundary conditions. The dynamic behavior of the PRF-reinforced metal beams under a moving load at a constant speed was analyzed analytically using the Duhamel integral. The classical beam theory (CBT) was used to determine the stiffness parameters of composite layers. A parametric study was carried out on various configurations of the reinforced beam to analyze the effect of the different parameters (fiber orientation, load velocity and thickness ratio) on dynamic response and d Dynamic amplification (FAD). The results obtained in this work show that FRPs offer a promising alternative for the reinforcement of metallic structures. In addition, they improve the dynamic behavior of structures such as vibration reduction and increased damping of the structures.

Keywords: vibration– beam – FRP composites –strengthening– moving force.

Introduction Générale

L'insuffisance de capacité structurale issue des erreurs de conception lors du dimensionnement ou lors de l'exécution, des défauts de résistance du au chargement excessif, ainsi que celle liée à la fatigue de la structure sous chargement dynamique et cyclique sont à l'origine de la diminution de la durée de vie théorique des structures. La réduction de la vulnérabilité aux vibrations des structures existantes est un enjeu de première importance. Les structures sont souvent soumises à de nombreuses vibrations sources de bruit et de défaillance mécanique. Afin de prolonger la durée de vie de telles structures, il existe plusieurs alternatives qui dépendent du niveau de ces dommages: si des fissures apparaissent dans des zones moins critiques, elles peuvent être réajustées par des matériaux composites, on parle de réparation dans ce cas. Cette solution, est souvent utilisée en maintenance aéronautique. Si les fissures ne sont pas encore apparues, une solution plus prospective est envisagée. Une couche de composite peut en effet être collée sur la structure afin de la renforcer de manière préventive, on parle alors de renforcement. Cette dernière solution fait l'objet de la présente étude.

Au cours des dernières décennies, l'application de polymère renforcé de fibres (PRF) pour le renforcement des éléments structuraux est devenue une option efficace pour répondre aux sollicitations extrêmes telles que des chocs et des séismes, dont les conséquences peuvent être désastreuses. Cependant, leur emploi nécessite une maîtrise des règles de comportement mécanique des structures renforcées par ces matériaux et plus particulièrement dans le domaine dynamique. Cette maîtrise repose sur la connaissance de leurs caractéristiques dynamiques, fréquences et modes propres.

Le matériau composite utilisé dans cette thèse est le matériau composite unidirectionnel à fibres continues, ce matériau connaît une popularité grandissante au sein de plusieurs industries de pointe. Cette tendance est principalement motivée par les propriétés spécifiques élevées de ces matériaux. Nous nous intéressons ici aux matériaux composites

PRF à base de fibres de carbone et fibres de verre et nous nous limitons au cas des matrices époxy.

Ce travail de thèse consiste dans un premier temps à modéliser le renforcement de poutres métalliques renforcées par des couches en composite PRF. Dans un deuxième temps, à réaliser l'analyse vibratoire libre et forcée des poutres sans et avec renforcement par collage des feuilles en matériaux composites. Pour réaliser l'étude dynamique des poutres renforcées par matériau composite, il est impératif de passer par les théories des stratifiés, ainsi les paramètres de rigidité du matériau isotrope seront redéfinis par des paramètres de rigidité équivalente.

L'objectif principal de ce mémoire est d'une part développer des modèles analytique et numérique permettant l'étude du comportement vibratoire des structures renforcées par matériaux composites. D'autre part, l'élaboration des programmes sous Matlab afin de pouvoir réaliser des études paramétriques sur les structures renforcées par matériaux composites.

Le mémoire de thèse est divisé en cinq chapitres.

Le premier chapitre est une synthèse bibliographique qui comprend trois parties: la première partie est une présentation d'une manière générale des principales propriétés des matériaux constitutifs des composites (matrice et fibres) ainsi que les principes de différents processus de mise en œuvre des structures composites. Dans la seconde partie nous avons effectué une revue des différents types de renforcement des structures et en particulier les poutres en béton armé, en bois et en acier ainsi que les différents types de composite convenant au renfort des structures. La dernière partie a pour objet de situer le contexte dans lequel se pose le problème de l'analyse vibratoire des structures par collage des couches en matériaux composites.

Dans le second chapitre, comportement mécanique des matériaux composites, nous allons donner quelques notions sur la mécanique des milieux continus (MMC) pour les matériaux composites. Nous rappelons les notions de base de la théorie d'élasticité et nous introduisons les lois constitutives qui décrivent le comportement des matériaux composites définies comme des relations entre les composants du tenseur des déplacements et du tenseur

des déformations. Plusieurs théories des stratifiés sont développées pour décrire le comportement des matériaux composites. Une approche appropriée pour les poutres renforcées par matériaux composites est utilisée pour prendre en compte le couplage entre les comportements en membrane, flexion et torsion. Cette méthode nous permet de redéfinir les paramètres de rigidité par des paramètres de rigidité équivalente.

Le troisième chapitre porte sur l'étude analytique des vibrations libres des poutres renforcées par matériaux composites. La modélisation analytique du comportement dynamique des structures poutres renforcées par matériaux composites est réalisée par la formulation mathématique de l'équation d'équilibre dynamique de la poutre. Ceci conduit à des équations différentielles aux dérivées partielles, du second ordre, dont les variables indépendantes sont constituées de la position du point x et du temps t . Nous allons étudier dans ce chapitre les fréquences et les modes propres de deux modèles de poutre sur deux appuis simples renforcées par des couches en composites. Le premier modèle ayant un cœur en matériau isotrope (acier) et des peaux en composite verre/époxyde, cependant le second modèle est constitué d'une poutre en acier renforcée par matériau composite en carbone/époxyde.

Le quatrième chapitre est consacré à l'analyse des vibrations libres des poutres renforcées par matériaux composites en utilisant la méthode des éléments finis. Une étude paramétrique est également faite dans ce chapitre en utilisant le modèle développé avec diverses conditions aux limites. Deux types de poutres ont été utilisés, poutre en acier et en mousse, les deux poutres sont renforcées par des matériaux composites en verre/époxyde. Le modèle numérique de la méthode des éléments finis est validé en comparant ses résultats avec ceux trouvés par la méthode analytique du chapitre 3.

Enfin, le cinquième chapitre, concerne l'étude des vibrations forcées des poutres en aluminium renforcées par des couches en composite carbone/époxy. La structure est modélisée par une poutre sur deux appuis simple, excitée par une charge dynamique se déplaçant avec une vitesse constante. L'équation du mouvement de la poutre est résolue analytiquement en utilisant la méthode de superposition modale et l'intégrale de Duhamel. Pour atteindre la performance souhaitée de la poutre renforcée, on a réalisé une étude paramétrique en faisant varier l'épaisseur et l'orientation des fibres des couches composites.

Ainsi, différentes configurations de renforcement de la poutre sont considérées pour différentes vitesses de la charge et différent rapport longueur-épaisseur.

Chacun de ces chapitres est terminé par une conclusion partielle, dont le bilan est effectué en conclusion générale, et qui permet d'envisager des perspectives aux travaux présentés ici.

CHAPITRE I

ETUDE ET ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction

Le développement de nouveaux « éco-matériaux » plus performants mécaniquement que les solutions traditionnelles répondant également à de nouveaux critères du domaine de la construction à savoir une solution éco-logico-économique. Le renforcement des structures en béton armé, en bois, ou métalliques par des matériaux composites s'inscrit parfaitement dans une logique de développement d'un écoproduit qui vise soit à prolonger la durée de vie de la structure existante, soit à développer un nouveau système de structures plus performant. Dans ce chapitre nous allons présenter les matériaux composites utilisés dans le renforcement des différentes structures. Avec une analyse bibliographique on va essayer de faire un inventaire des recherches effectuées sur le comportement dynamique des structures renforcées par des matériaux composites.

I.2 Matériaux composites

Définition : un composite est un matériau hétérogène formé au moins de deux constituants qui occupent des phases différentes, ces constituants sont disposés selon une organisation géométrique, qui confère au composite des propriétés supérieures à celles des constituants pris séparément [1].

La mécanique des composites dépend des propriétés des constituants formant le composite et de la structure selon laquelle les renforts sont arrangés dans la matrice. Les composites sont conçus à partir de la combinaison d'au moins de deux facteurs. (Fig.1.1).

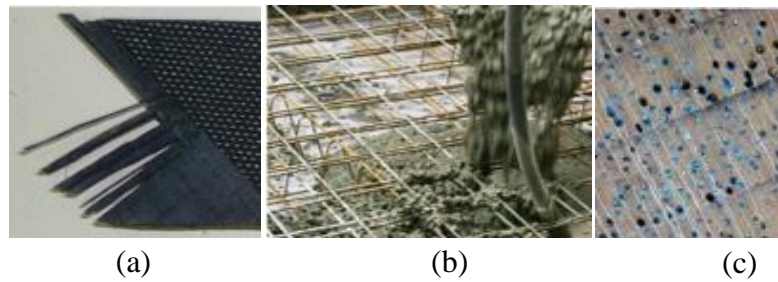
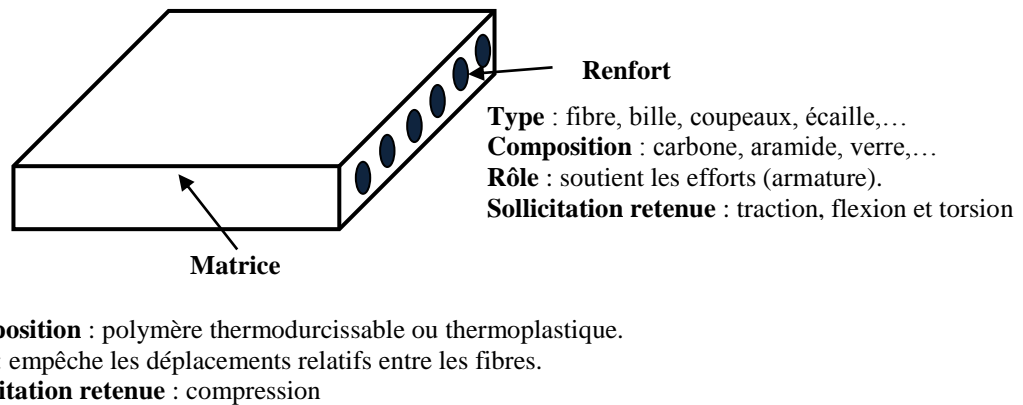


Fig.1.1 Exemples de multi-matériaux [1] :

(a) composite carbone/époxy, (b) béton armé, (c) bois vu au microscope optique

Les composites sont formés de matrice et de renforts (Fig. 1.2).



Composition : polymère thermodurcissable ou thermoplastique.
Rôle : empêche les déplacements relatifs entre les fibres.
Sollicitation retenue : compression

Fig.1.2 Matériau composite

Les renforts sont généralement conçus de sorte à avoir des propriétés mécaniques, telles que la résistance et la rigidité, optimales. Les renforts sont inclus dans la matrice de façon orientée dans une direction précise ou en vrac, aléatoirement. On distingue trois types de renforts: fibres longues, fibres courtes et particules (Fig.1.3).

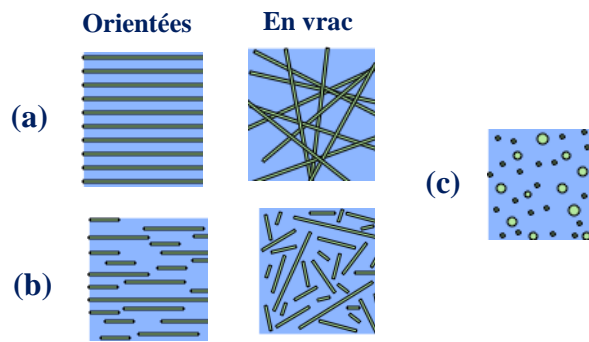


Fig. 1.3 Structures géométriques des composites [1] :

(a) fibres longues, (b) fibres courtes, (c) particules.

L'utilisation des matrices dans les composites permet de coller des fibres entre elles et de transférer des efforts aux fibres. De plus, la matrice joue un rôle très important pour résister aux efforts tranchants, aux forces transversales et aux forces de compression. Par ailleurs, la matrice protège la fibre, en l'isolant de l'humidité, de l'oxydation et des agressions chimiques.

On peut distinguer trois types de matrice: les composites à matrice organique (CMO), les composites à matrice céramique (CMC) et les composites à matrice métallique (CMM).

I.2.1 Composites à matrice organique (CMO)

On distingue deux types de composites à matrice organique (CMO):

- les composites de grande diffusion (GD) et
- les composites à haute performance (HP).

Les composites à grande diffusion (GD), sont en général des plastiques renforcés par des fibres courtes. Les composites à grande diffusion (GD) peu coûteux et représentant près de 95% des CMO. Les composites à haute performance (HP), ont des renforts sous forme des fibres longues. La résistance mécanique et rigidité sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux composites GD.

Les composites à haute performance (HP) qui sont plus onéreux mais présentant des qualités mécaniques supérieures, notamment employés dans l'aéronautique, le nautisme, les sports et loisirs ou encore la construction industrielle.

Les matrices employées pour ces composites sont des résines polymères elles peuvent être :

- Thermoplastiques, qui se présentent sous forme solide et que l'on met en forme en les ramollissant par chauffage, puis en les solidifiant par refroidissement ;
- Thermodurcissables sous forme liquide visqueuse et que l'on met en forme en déclenchant une réaction chimique de polymérisation par ajout d'un durcisseur, ce qui entraîne une solidification.

De manière générale, les matrices thermodurcissables sont plus fréquemment employées que les thermoplastiques, en raison de leur plus grande facilité de mise en forme (il est plus facile d'imprégner des fibres avec un liquide qu'avec des granulés ramollis, et les températures à utiliser sont souvent plus raisonnables).

Parmi les plus courantes, on peut citer les résines polyester, peu coûteuses et souvent utilisées dans les applications "grande diffusion", et les résines époxy (ou époxydes), très employées dans les applications "hautes performances".

Différentes fibres peuvent être employées pour conception des composites. Il y a principalement quatre types de fibres:

- les fibres de verre, peu coûteuses et ultra-répondues (95% des renforts !), utilisées dans pratiquement toutes les applications "grande diffusion" et certaines applications "hautes performances" ;
- les fibres de carbone, plus onéreuses mais très performantes d'un point de vue mécanique, utilisées notamment en aéronautique, en construction industrielle et dans les sports et loisirs;
- les fibres d'aramide (Kevlar) ou de polypropylène, plus résistantes aux chocs et plus tenaces que le carbone, d'où leur utilisation, entre autres, dans les gilets pare-balles et autres protections balistiques ;
- les fibres végétales comme le chanvre ou le lin, assez peu coûteuses et renouvelables, qui commencent à faire leur apparition sur certaines pièces peu sollicitées mécaniquement.

I.2.2 Composites à matrice céramique (CMC)

Beaucoup moins répandus que leurs homologues à matrice organique en raison d'un coût élevé, les CMC s'adressent aux applications à très haute température. Ils sont principalement utilisés dans l'industrie spatiale et l'aéronautique militaire, ainsi que pour la conception d'organes haut de gamme comme des disques ou plaquettes de freins.

Les céramiques possèdent de nombreux atouts pour de telles applications : elles peuvent résister à des températures très élevées, sont plus légères que de nombreux métaux, et présentent une bonne stabilité chimique. Malheureusement, leur grande fragilité limite fortement leur domaine d'utilisation.

Dans les CMC, les renforts et la matrice sont souvent constituées de carbure de silicium (SiC), de carbone (C) ou d'alumine (Al₂O₃).

I.2.3 Composites à matrice métallique (CMM)

Les composites à matrice métallique ont été élaborés pour tenter de concilier les qualités des métaux (ductilité, bonne tenue face au vieillissement et au feu...) avec la légèreté et les bonnes caractéristiques mécaniques propres aux structures composites. Ce sont des matériaux performants, mais pénalisés par un coût de revient encore élevé. Les CMM comportent une matrice en métal léger (aluminium et ses alliages, magnésium, titane...) et un renfort pouvant être, comme pour les CMO ou CMC, de deux types : soit des particules ou des fibres courtes céramiques, soit des fibres longues céramiques ou métalliques.

Renforts : Les propriétés mécaniques du composite dépendent fortement de la forme et de l'orientation des renforts :

- les composites à fibres longues présentent un meilleur comportement mécanique que les composites à fibres courtes ou à particules, du moins dans les directions renforcées par les fibres ;

- les composites à fibres parallèles présentent un comportement mécanique anisotrope, tandis que les composites à fibres orientées aléatoirement ou à particules présentent un comportement à peu près isotrope.

Ainsi, pour des applications structurelles, c'est-à-dire des pièces devant résister à des efforts importants, on utilise généralement des fibres longues, dont on adapte l'orientation aux sollicitations subies par la pièce.

En revanche, pour des applications non structurelles, on utilise généralement des fibres courtes ou des particules, dont le coût de mise en œuvre est moins élevé. Le verre, associé à des matrices de résine, est utilisé sous forme de microbilles ou de fibres courtes pour réaliser des plastiques renforcés ou des isolants thermiques. Sous forme de fibres longues, il peut servir à des applications structurelles comme les coques des bateaux.

Les différents constituants des matériaux composites sont récapitulés en figure 1.4.

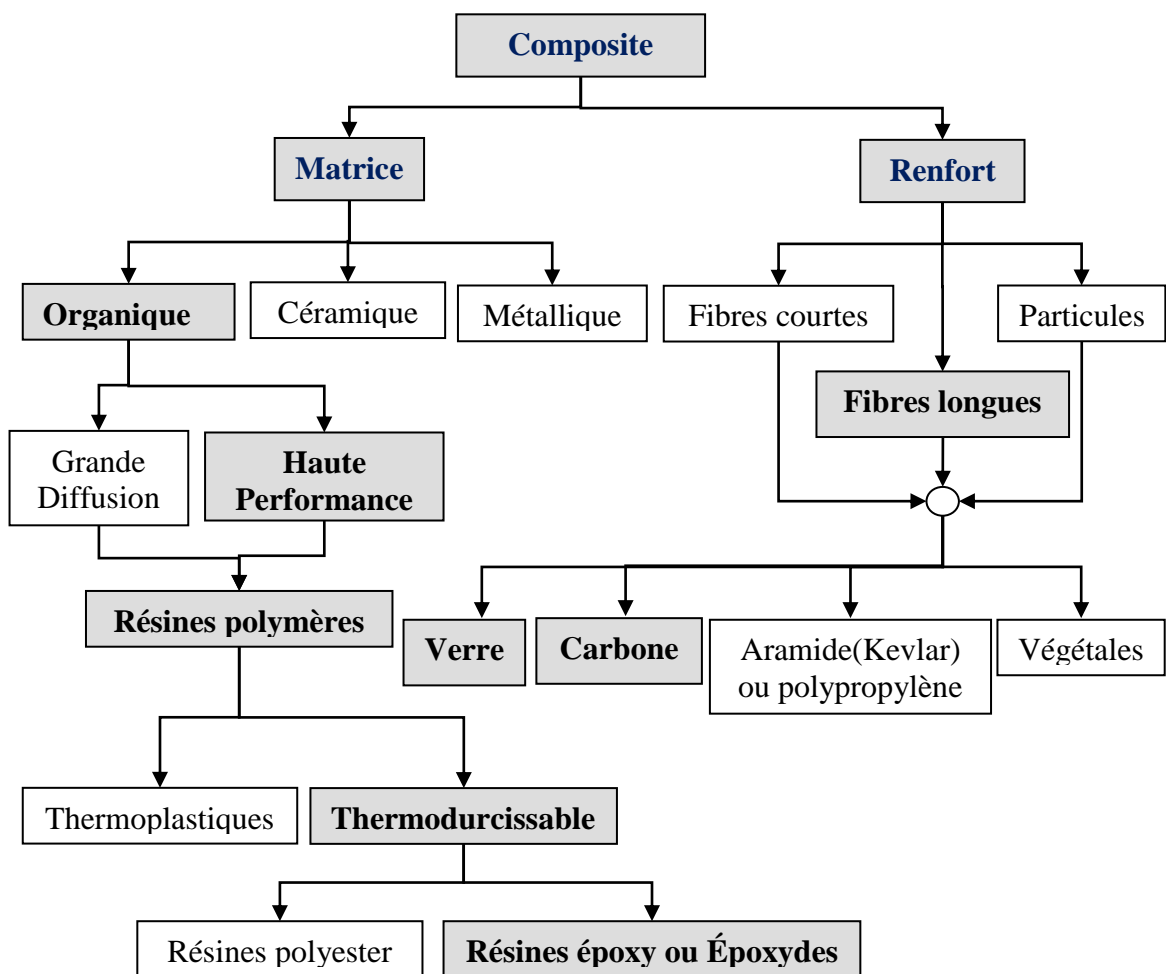


Fig. 1.4 Constituants des matériaux composites

I.3 Composites stratifiés

Les stratifiés sont des structures composites courantes, formées par l'empilement de plusieurs couches adhérant l'une à l'autre. Dans un stratifié, les fibres sont agencées en couches fines (quelques dixièmes de millimètre) nommées « plis ». Après la mise en forme, ces couches seront liées entre elles par l'intermédiaire de la matrice. Au sein d'un pli, les renforts peuvent avoir n'importe quel type de disposition, pourvu qu'elle soit plane :

- soit un **mat**: les fibres sont disposées "en vrac" sans orientation privilégiée sur quelques couches, ce qui donne un comportement quasi-isotrope dans le plan ;
- soit l'un des **tissus plans**, ce qui donne un comportement plus ou moins anisotrope selon la proportion de fils dans les deux directions ;
- soit un **tissu unidirectionnel**(Fig.1.5): les fibres sont disposées parallèlement les unes aux autres sur quelques couches et uniquement maintenues dans cette disposition par quelques fils de trame, ce qui donne un comportement fortement anisotrope.

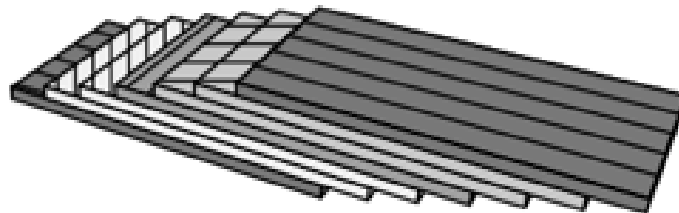


Fig. 1.5 Stratifiés à base de plis unidirectionnels.

Il existe également des stratifiés hybrides tels que le GLARE ("GLAssREinforced") utilisé dans l'Airbus 380, constitué d'un empilement de fines feuilles d'aluminium alternées avec des plis unidirectionnels de fibres de verre et matrice époxy.

I.4 Composites sandwichs

Les matériaux composites sandwichs résultent, généralement de l'association de deux semelles ou peaux, de faibles épaisseurs, constituées de matériaux de haute résistance et haut

module, d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible masse volumique. Ces structures complexes offrent de grandes potentialités aux concepteurs dans des domaines divers. L'âme la plus utilisée dans les sandwichs à âme pleine est la mousse de polymère, tel que le polyuréthane (PU), polychlorure de vinyle (PVC). L'assemblage des peaux et du cœur est réalisé par collage avec des adhésifs de synthèse de type époxy ou polyester.

Pour concevoir des pièces rigides en flexion et en torsion, une technique couramment employée est celle des structures en sandwich (Fig.1.6), constituées de deux peaux (généralement stratifiées) collées sur une âme épaisse mais légère, comme une mousse de polymères ou un nid d'abeilles, à l'aide d'adhésifs .

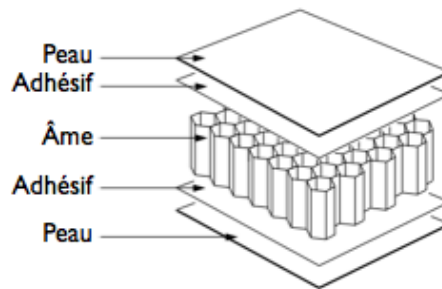


Fig. 1.6 Structures Sandwichs[1]

I.5 Composite convenant au renfort des structures

Au cours des deux dernières décennies, les matériaux composites PRF (Polymère Renforcé de Fibres) ou FRP (Fibres Reinforcement Polymer) ont progressivement gagné l'acceptation à l'échelle des applications du génie civil en raison de leurs avantages uniques, y compris leur rapport de haute résistance-poids, et excellente résistance à la corrosion. En particulier, de nombreuses possibilités d'utilisation des matériaux composites PRF pour le renforcement des structures.

Le renforcement et la réparation des structures par collage de matériaux composites sont devenus relativement courants. Cela consiste à associer à la structure existante par collage structural un matériau relativement léger ayant de plus hautes performances mécaniques (en

termes de raideur et de contrainte ultime en traction). Les matériaux composites PRF sont composés de fibres noyées dans une matrice.

Les principaux matériaux de renforcement utilisent directement des PRF sous forme de bande continue et d'autres font l'appel à un semi-produit tel que les tissus de fibres. Dans les deux cas, les PRF sont constitués de deux composants: les matériaux de renfort comme des fibres ou de tissus de fibres, et le matériau liant ou matrice.

I.5.1 Système de PRF carbone

Le système de PRF carbone est composé d'époxy adhésif et de tissu unidirectionnel et bidirectionnel de fibres de carbone. La figure 1.6 montre trois cas des systèmes de PRF carbone où le tissu unidirectionnel de fibres de carbone est renforcé par des fibres de verre (Fig. 1.7a) et par des fibres d'aramide (Fig. 1.7b). La figure (Fig. 1.7c) représente le système de PRF carbone à deux couches.

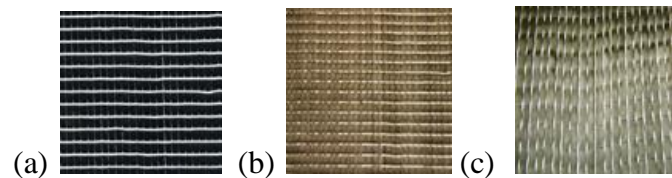


Fig. 1.7 Système de PRF carbone à une couche et deux couches [2]

I.5.2 Système de PRF verre

Le système de PRF verre est composé d'époxy adhésif et de tissu unidirectionnel (Fig. 1.8a) et bidirectionnel (Fig. 1.8b) de fibres de verre. Les fibres de verre sont orientées dans la direction de 0° et 90° .

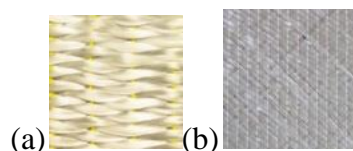


Fig. 1.8 Système de PRF verre unidirectionnel et bidirectionnel [2]

I.5.3 Système d’ancrage de fibre

L’ancrage est une mèche unidirectionnelle en fibre composite faite sur mesure. Elle est utilisée pour obtenir des meilleures terminaisons du tissu renforcé et une meilleure transmission des efforts. Il existe deux types d’ancrage composite : avec une mèche de fibres type de carbone (Fig. 1.9a) et avec une mèche de fibre de verre (Fig. 1.9b).

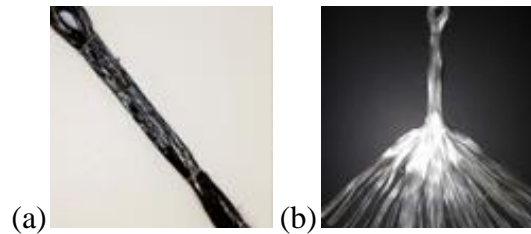


Fig. 1.9 Ancrage composite avec une mèche de fibre de carbone (a) et de verre (b) [3]

Le tableau 1.1 donne les différentes caractéristiques mécaniques des composites. Le tissu en fibre de carbone a d’excellentes propriétés mécaniques qui sont optimales comparativement à ceux des autres tissus. De plus tissu en composite de fibre de carbone possède une excellente résistance à la fatigue et aux sollicitations dynamiques. Son seul inconvénient réside dans son prix très cher.

Tableau 1.1 Caractéristiques mécaniques des tissus composites [3]

Caractéristiques	Tissus avec fibre de verre	Tissus avec fibre d’aramide	Tissus avec fibre de carbone
Résistance à la traction	Très bonne	Très bonne	Très bonne
Résistance à la compression	Bonne	Faible	Bonne
Raideur	Faible	Grande	Très grande
Résistance à la fatigue statique	Faible	Bonne	Excellente
Résistance à la fatigue cyclique	Assez bonne	Bonne	Excellente

Densité	Assez faible	Très faible	Faible
Résistance aux produits chimiques	Faible	Bonne	Très bonne
Coût	Bon	Assez cher	Cher

I.5.4 Polymère Renforcé de Fibres de Carbone (PRFC) ou Carbone Fibres Reinforcement Polymer (CFRP)

Les matériaux composites PRF sont le plus souvent composés de matrice époxy et de fibres de carbone, les matériaux composites PRFC ont l'avantage d'être relativement légers. Les fibres de carbones sont fabriquées en carbonisant les fibres de polymères individuellement de diamètre 2-4 μ m, éventuellement tissées ou tressées au préalable, sous tension et en les tirant de plus de 100 % à des températures supérieures à 2700°C. La longueur des lamelles PRFC peut atteindre des 100de mètres avec une présentation en rouleau.

En comparaison de la longueur, l'épaisseur des PRFC est beaucoup plus petite par rapport à l'acier, ce qui donne la possibilité de réaliser plusieurs couches superposées.

Les lamelles PRFC ne demandent pas de traitement spécial pour résister aux agents chimiques agressifs dans l'environnement. En état de service, elles sont quasiment insensibles à la corrosion. Les PRFC présentent un rapport résistance/poids très élevé.

La fabrication des fibres de carbone fait appel à une technologie très délicate. On peut distinguer deux types de composites PRFC selon leur mode de fabrication [1]:

- les matériaux composites à **haute résistance (HR)** sont issus d'une mise en œuvre par carbonisation.
- les matériaux composites à **haut module (HM)** sont issus d'une fabrication par graphitisation.

La graphitisation consistant à la fabrication de précurseur, étirage (orientation), oxydation (220°C) dans l'air sous tension et la carbonisation à 1500°C sous atmosphère inerte

pour les fibres de carbone à haute résistance, ou graphitisation à 3000°C sous atmosphère inerte pour les fibres de carbone à haut module.

Les caractéristiques mécaniques des fibres issues de la carbonisation et de la graphitisation sont données dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2 : Caractéristiques mécaniques des fibres [1]

Fibres	Fibres issues de la Carbonisation (HR)	Fibres issues de la Graphitisation (HM)
Pureté	97 à 98 % de carbone	99 % de carbone
Masse volumique	1800 kg/m ³	2100 à 2200 kg/m ³
Résistance en traction	3000 à 5000MPa	2500 à 3000 MPa
Module en traction	environ 250 GPa	environ 500 GPa

Le matériau composite est un matériau élastique dont le comportement diffère de celui du béton et de celui des aciers (Fig.1.10).

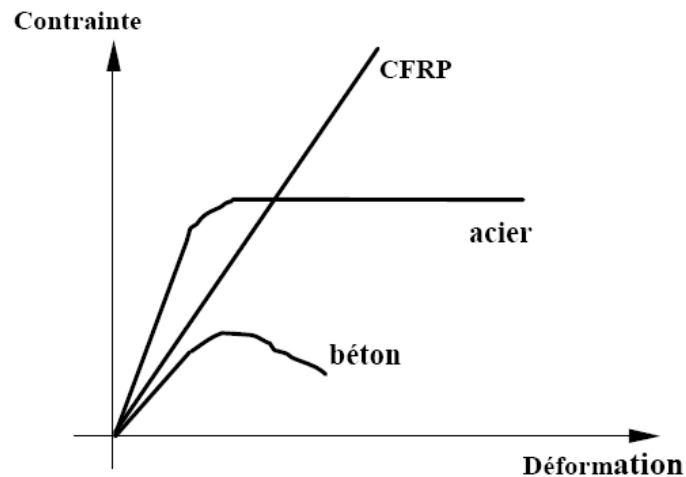


Fig. 1.10 Comparaison de comportement entre différents matériaux[1]

La Fig.1.11 montre les réponses typiques de contrainte-déformation des composites de PRF en contraste avec celle de l'acier doux, où il est clairement visible que les composites de PRF présentent un comportement de tension-déformation élastique linéaire avant la rupture. La fibre a un comportement élastique linéaire jusqu'à rupture: les lois de comportement des fibres sont donc de type 'élastique fragile'.

Trois types de matériau composite PRFC (CFRP) sont désignés ici

- le PRFC (CFRP) à **résistance élevée**,
- le PRFC (CFRP) à **module intermédiaire** et
- le PRFC (CFRP) à **module élevé**

et leurs courbes contrainte-déformation sont illustrés à la Fig. 1.11.

La résistance en traction des PRFC (CFRP) monte jusqu'à 3000 MPa avec une masse volumique d'environ 1.6 g/cm^3 quatre fois plus petite que celle de l'acier. Ce rapport permet de diminuer les dimensions de la structure qui satisfont les demandes d'esthétisme et qui facilite le transport ainsi que la manipulation (pas de matériel de levage, ni de serrage). Le module d'Young des PRFC varie entre 150 et 300 GPa.

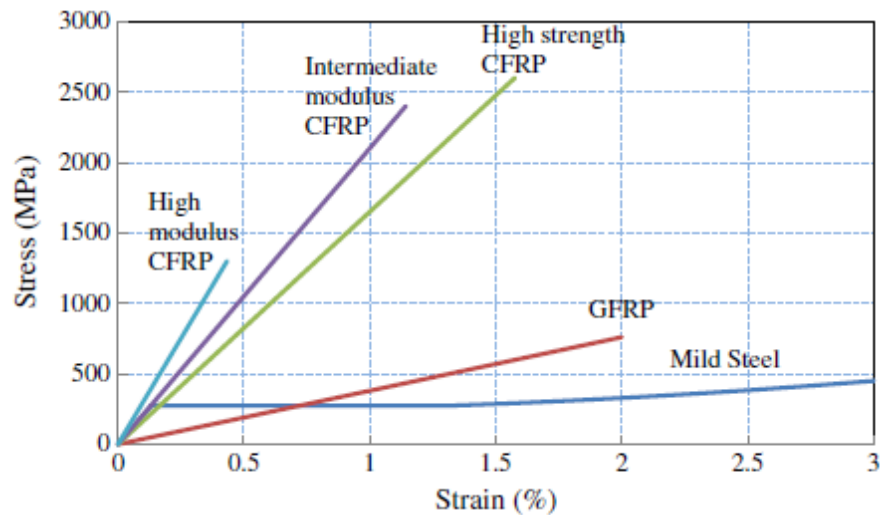


Fig. 1.11 Comparaison de comportement entre différents PRFC (Figure adaptée de [4])

Un composite composé de **fibres de carbone HR et d'une matrice époxy ou vinylester** a les caractéristiques mécaniques suivantes :

Module d'Young longitudinal en traction: 155 -165GPa

Résistance longitudinale en traction: 500 – 3000MPa

Déformation à la rupture: 1,2 – 1,3 %.

Comme pour les fibres de carbone, le comportement des lamelles PRFC reste dans la phase d'élasticité jusqu'à la rupture.

L.6 Structures renforcées par matériaux composites

La pathologie structurelle issue des erreurs de conception lors du dimensionnement ou lors de l'exécution, des défauts de résistance à l'effort tranchant ou en flexion due au chargement excessif, ainsi que celle liée à la fatigue de la structure sous chargement cyclique sont à l'origine de la diminution de la durée de vie théorique des structures. Face à ce problème, la réparation ou le renforcement par collage de matériaux composites s'avère être une technique prometteuse.

De nos jours, le collage de matériaux composites est l'une des méthodes de réhabilitation les plus utilisées dans ce marché grâce aux avantages des matériaux composites:

la facilité de mise en place, l'inertie à la température ambiante et la très bonne tenue à la fatigue.

Pour l'amélioration de la résistance des structures, on utilise les matériaux composites (PRF).

I.6.1 Infrastructure de transport

Initialement conçu pour le renforcement sismique, les renforts tissés en fibre de carbone et verre ont été appliqués aux réparations d'urgence et pour répondre aux augmentations de charge sur les ponts (fig.1.12). Avec les ancrages en fibre de carbone, il est désormais possible d'utiliser ces bandes de carbone comme une résistance à la flexion des membres ainsi que pour l'amélioration de la résistance au cisaillement. En particulier, les réparations structurelles avec des tissus en fibre de carbone sont applicables à des cas comportant de sévères critères de fatigue.



Fig. 1.12 Renforcement des infrastructures de transport par matériaux composites : pont avec renforcement [2]

I.6.2 Installations industrielles

Le renforcement par matériaux composites des installations industrielles (raffineries, stations d'épuration, éoliennes, centrales nucléaires et usines de production) permet d'accomplir des réparations rapides avec un impact minimal sur la production et l'exploitation (fig.1.13). Cela peut réduire considérablement les temps d'arrêt et les pertes associées.

Les différentes opérations de renforcement par matériaux composites des installations industrielles sont : rénovation structurelle, protection contre les incendies, atténuation des ondes de choc, réparation contre la corrosion et revêtement haute performance



Fig. 1.13 Renforcement des installations industrielles par matériaux composites [2]

I.6.3 Projets marins et côtiers

Le travail dans des environnements marins et côtiers présente des conditions de travail et des challenges uniques pour les entrepreneurs. On emploie des techniques très avancées et innovantes pour réparer et remettre en état les structures marines (fig.1.14a) sans renforcement et (fig.1.14b), avec renforcement. Ils offrent des solutions de réhabilitation structurelle pour des éléments au-dessus ou sous la surface de l'eau.

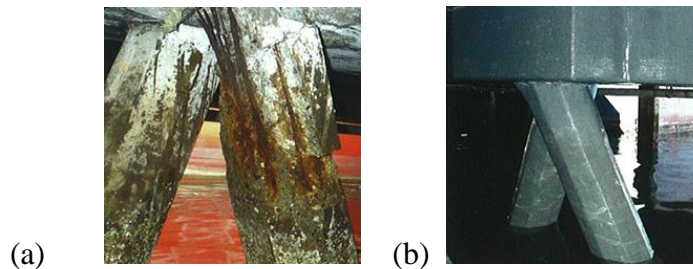


Fig. 1.14 Renforcement des structures marines par matériaux composites [2]:

(a) sans renforcement, (b) avec renforcement

La protection contre la corrosion est essentielle pour les structures côtières, en particulier celles construites à proximité de l'eau salée. La réparation des dégâts existants peut être sur le béton, le bois ou l'acier, et les protéger contre la dégradation future due à des éléments corrosifs. Les opérations de réhabilitation marine, y compris des projets à grande échelle, dans la restauration, réparation et protection du béton sont : quais et structures de construction, embarcadères, pieux en bois, résidences côtières, réparation en zone de marnage, prolongation de la durée de vie de la structure, protection contre et réduction de la corrosion, protection contre l'érosion et augmentation de charge.

I.6.4 Assainissement de conduites et de buses

Le développement et la mise en pratique de techniques innovantes de renforcement et de réparations de conduites de gros diamètre de 800 mm de diamètre et plus, (fig. 1.15) en béton précontraint, béton armé et de segments de conduites en acier est réalisé grâce au système carbonique. Cela inclut le renforcement des conduites contre l'éclatement sous pression ou l'affaissement sous contraintes externes, ainsi que la protection contre la corrosion. Pour l'application dans les conduites d'eau potable il est possible de rajouter des revêtements de protection contre les attaques chimiques ou les agressions atmosphériques.

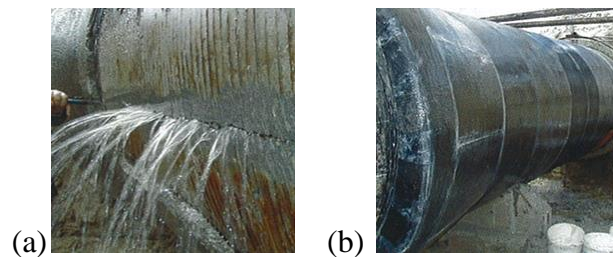


Fig. 1.15 Assainissement de conduites et de buses par matériaux composites [2]:

(a) sans renforcement, (b) avec renforcement

I.6.5 Renforcement et réparation structurelle des bâtiments

Les matériaux composites sont utilisés pour le renforcement et la réparation de structures très sensibles : bases militaires, hôpitaux, bâtiments publics, écoles, palais de justice, stades et ambassades.

La fig. 1.16 montre le renforcement des joints d'un bâtiment pour augmenter la ductilité de la structure.



Fig.1.16 Renforcement et réparation structurelle des bâtiments par matériaux composites

Nœud de structure renforcé par TFC

Le revêtement de protection contre les flammes et la fumée peut être utilisé comme un système autonome ou en tant que couche de composite. Pour la protection contre les incendies, le renforcement en fibre de carbone contre une charge supplémentaire exige habituellement une classification contre les incendies de 2 à 4 heures.

Les renforcements structurels sont réalisés à la fois pour les gouvernements et les clients industriels pour assurer une protection contre les ondes de choc industrielles ou encore contre les attaques terroristes. La protection contre les explosions peut également être obtenue en utilisant le système contre les intrusions forcées.

I.7 Poutres renforcées par matériaux composites

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section droite). Une poutre est un élément de structure utilisé pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions. Les aubes de turbine, l'aile d'avion, et la pale d'hélicoptère sont en général considérées comme des poutres.

L'utilisation d'un tissu de matériaux composites (PRF) associé à des colles époxy sur des surfaces tendues ou sur des surfaces latérales est un moyen très efficace pour renforcer les poutres, plus particulièrement, pour les poutres faiblement armées.

I.7.1 Poutres en béton armé renforcées par matériaux composites

Le PRF, étant un matériau de haute résistance à la traction, peut généralement être utilisé pour ses plus grands avantages, lorsqu'il est combiné avec du béton qui est résistant à la compression mais pauvre en tension. De telles applications comprennent le collage externe de PRF pour poutres en béton pour des fins de renforcement (Fig.1.17), ou structures en béton armé précontraint avec PRF.

Le collage du tissu sur des surfaces tendues augmente la résistance ultime des poutres renforcées et en diminuant la flèche des structures, il augmente également leur raideur limitant ainsi la propagation des fissures.



Fig.1.17 Renforcement par Tissus en Fibres de Carbone TFC d'une poutre en béton armé.

La maintenance des ouvrages de génie civil est un problème de plus en plus préoccupant dans la mesure où le coût des ouvrages neufs est de plus en plus élevé.

L'une des techniques les plus classiques et efficaces pour les désordres structurels est la réparation de structures en béton armé dégradé par placage extérieur en acier : faible encombrement et intervention mineure sont les principaux avantages.

I.7.2 Poutres en bois renforcées par matériaux composites

La construction de structures en bois lamellé-collé a augmentée de manière significative dans le monde entier ces dernières années. Cette augmentation de son utilisation doit s'accompagner d'innovations technologiques. La plus grande opportunité pour étendre l'utilisation des produits du bois tel que le bois lamellé collé dans la construction est de combiner ce matériau avec d'autres tels que des éléments composites ou hybrides (par exemple renforcé de fibres de bois lamellé-collé).

Beaucoup de travaux ont noté que les barres PRF de verre utilisées pour renforcer une poutre lamellé-collé ont un effet positif sur la rigidité en flexion et sur la charge ultime.

I.7.3 Poutres métalliques renforcées par matériaux composites

Semblable à une poutre en béton armé, une poutre d'acier peut être renforcée par collage de feuille en PRF (Fig. 1.18). Nombreux auteurs s'accordent sur la technique de renforcement des structures en acier à l'aide de matériaux composites renforcés par des fibres vis-à-vis de la fatigue.

L'utilisation des PRF dans le renforcement des structures en acier pour les exploitations innovantes profite des avantages des PRF :

- Le principal avantage du PRF sur de l'acier dans le renforcement des structures est son rapport résistance-poids.
- Un autre avantage important du PRF, qui ne concerne que les stratifiés de PRF est la capacité de ces stratifiés PRF à suivre des surfaces courbes et irrégulières d'une structure. Ceci est difficile à réaliser en utilisant des plaques d'acier.
- Un troisième avantage du PRF est que ses propriétés matérielles dans des directions différentes peuvent être adaptées pour une application particulière.

Les plaques d'acier peuvent aussi être adhésif-collé, mais la liaison est moins attrayant pour les plaques d'acier en raison de leur poids et le manque de souplesse dans la forme.



Fig.1.18 Renforcement par Tissus en Fibres de Carbone TFC d'une poutre en acier

Des plaques d'acier peuvent également être fixés par soudage à renforcer des structures en acier existantes, mais le collage de stratifiés de PRF est supérieure à la soudure de tôles d'acier dans les situations suivantes:

(1) Collage de stratifiés de PRF pour une meilleure résistance à la fatigue a l'avantage que le processus de renforcement ne présente pas de nouvelles contraintes résiduelles;

(2) Dans certaines applications (par exemple des réservoirs de stockage de pétrole et des usines chimiques) où le risque d'incendie doit être minimisé, la soudure doit être évitée lors du renforcement d'une structure; le collage de stratifiés de PRF est alors une alternative très attrayante;

(3) les aciers à haute résistance souffrent de réduction de résistance locale importante dans les zones affectées par la chaleur de soudures, les stratifiés de PRF collés offrent une méthode de compensation de la force idéale.

La fig.1.19 montre l'effet de l'adhésion des tissus de PRF sur des surfaces de structures, une modification des comportements structuraux comparativement à ceux des structures non renforcées.

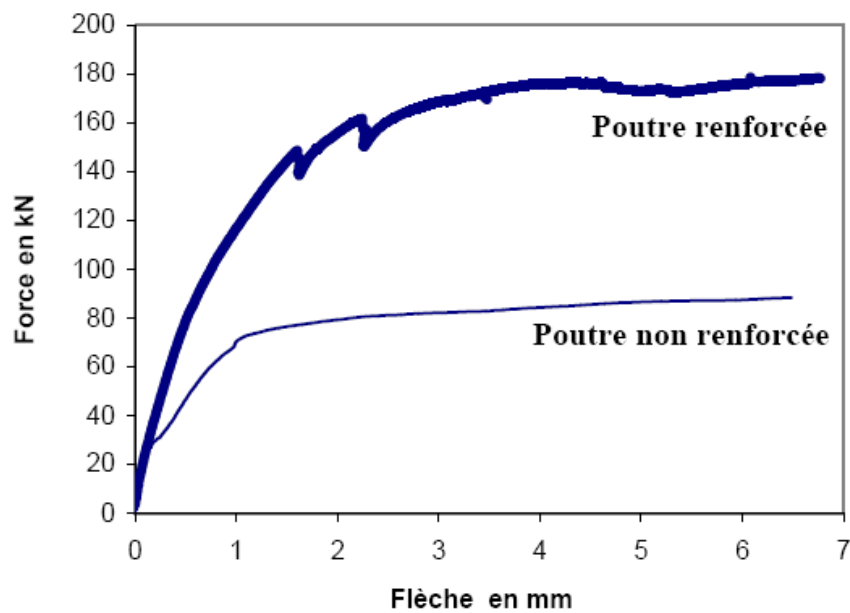


Fig.1.19 Comparaison du comportement mécanique de la poutre renforcée et avec celle non renforcée [1].

I.8 Position du problème

L'étude du comportement dynamique des structures isotropes soumises à des charges mobiles à été réalisée par beaucoup de travaux en utilisant des méthodes analytiques, expérimentales et numériques [5-9].

En général, la réponse dynamique produite par une charge mobile est supérieure à celle produite par la charge statique. Les vibrations des poutres isotropes sous l'action d'une force mobile avec une vitesse constante ont été traitées dans [5-7].

Abu-Hilal et Zibdeh [8] ont présenté une analyse des vibrations des poutres avec différents cas de conditions aux limites, traversés par une force en mouvement. Ichikawa [9] a

effectué l'analyse des effets de la masse roulante sur le comportement dynamique d'une poutre isotrope. Un chargement excessif ou répété peut éventuellement subir des dommages de fatigue importante aux structures. Ainsi, la capacité portante de ces structures et leur durée de vie théorique sont réduites avec le temps. Face à ce type de problème, le renforcement par matériaux composites représente l'une des meilleures solutions grâce aux performances mécaniques élevées des matériaux composite : un poids léger, une capacité d'absorption d'énergie, ainsi que leur durabilité et résistance à la corrosion.

Dans la réparation ou le renforcement des structures, particulièrement des poutres en béton armé, on utilise souvent les matériaux composites PRF (Polymère Renforcé de Fibres) sous forme de bande continue[10-13].

Le développement de l'emploi des composites nécessite une information complémentaire sur leurs propriétés. Pour l'analyse de poutre renforcée par matériau composite on utilise différentes théories de poutres composites. La théorie des poutres multicouches, a été utilisée dans [14] pour l'analyse vibratoire des poutres composites en utilisant la méthode des éléments finis. La solution exacte des vibrations libres de poutres composites stratifiées a été obtenue dans [15] en utilisant la théorie de cisaillement-déformation de premier ordre.

La théorie de cisaillement-déformation d'ordres supérieurs a été utilisée dans l'étude des vibrations des poutres composites [16].

Certains auteurs [17-20] traitent le problème de poutres composites stratifiés à celle de poutres homogènes isotropes avec des propriétés équivalentes. Avec le développement technologique des techniques de mise en œuvre et la disponibilité des composites à haut module et des adhésifs de qualité, les matériaux composites offrent une alternative prometteuse dans la réhabilitation des structures métalliques [21-25].

Pour l'amélioration la résistance des structures en acier, on utilise les matériaux composites à fibre de carbone à haut module PRFC (Polymère Renforcé de Fibres de Carbone).Plusieurs travaux ont été réalisés sur le renforcement des structures métalliques par des matériaux composites vis-à-vis de la fatigue[25-28].

Volkan Kahya [29] a présenté la solution analytique approximative pour la réponse dynamique des poutres sandwich composite soumis à une masse en mouvement.

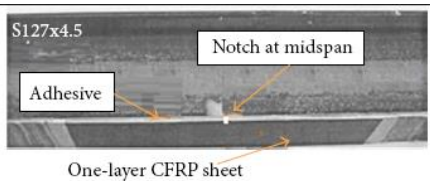
Hamada et al. [30] ont étudiés les fréquences propres et des propriétés d'amortissement des couches en composites des poutres.


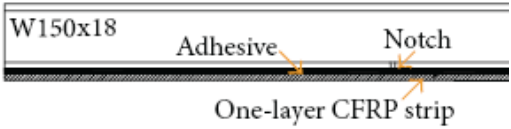
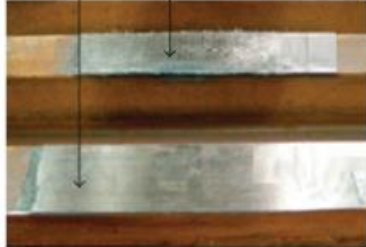
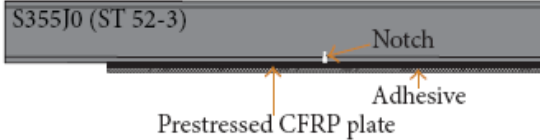
L'analyse des poutres métalliques renforcées par matériaux composites sous une charge roulante aléatoire, a été réalisée par Zibdeh et al. [31].

Le Tableau 1. 3 résume quelques travaux relatifs à la résistance à la fatigue des poutres en acier renforcées par des matériaux composites. Un grand nombre de chercheurs se sont concentrés sur la résistance à la fatigue et à la prévision de la fatigue des structures de type poutres.

Afin de prolonger la durée de vie de telles structures, il existe plusieurs alternatives qui dépendent du niveau de ces dommages : si des fissures apparaissent dans ce cas on doit réparer par collage des matériaux composites. Si les fissures ne sont pas encore apparues, on doit coller une couche de composite sur la structure afin de la renforcer de manière préventive. Cette dernière solution fait l'objet de la présente étude.

Tableau 1.3 : Poutres en acier renforcées par des matériaux composites.

Réf.	Poutres en acier	Composite	Figure
[32] M. Tavakkoli-zadeh [2003]	S127x4.5 L = 1220 mm E = 194,4 GPa	CFRP: 300mm×76mm×1,27m Epoxy: mélange de résine et le durcisseur E=144 GPa	
	127x76UB13	FRP :	

<p>[33] J. Deng [2007]</p>	<p>L=1200 mm $E=205\text{GPa}$</p>	<p>$e=3$ et $L=400$ mm Époxy (Sikadur31Normal): $E=8$ GPa</p>	
<p>[34] Y. J. Kim [2011]</p>	<p>W150x18 L=1830 mm $E=200\text{GPa}$</p>	<p>FRP : $e=1.4$ et $L=50$ mm Époxy: $E=4.5$ GPa</p>	
<p>[35] H. Jiao [2012]</p>	<p>Niveau 400150UB14 L1400xW75xH15 0mm, $E=207,4\text{GPa}$</p>	<p>FRP: SikaCarbo Dur M 1214 $e=1.4\text{mm}$ $E=210\text{GPa}$, Époxy: Sika dur-330</p>	
<p>[36] E. Ghafoori [2012]</p>	<p>S355J0 1100 x 120 x 65mm, $E=210\text{GPa}$</p>	<p>CFRP: 910x 50 x 1,2 mm (S512), $E=165$ GPa Araldite2015adhésif: $E=1,75\text{GPa}$</p>	

I.9 Conclusion

Les chercheurs dans le domaine de l'analyse de poutre renforcée par matériau composite utilisent les théories de poutres de type Euler-Bernoulli ou Timoshenko. Beaucoup de chercheurs prêtent attention à résistance à la fatigue des poutres en acier renforcée par matériau composite. Le collage de tissu de matériaux composites sur les surfaces tendues ou les surfaces latérales est un moyen très efficace pour renforcer ou réparer des structures.

Les résultats de la recherche concluent que les matériaux composites offrent une alternative prometteuse dans le renforcement des structures en acier.

Les polymères renforcés (PRF) ont été largement utilisées pour la réparation et renforcement des structures en béton. Le renforcement des structures en acier est également souhaitable, lorsque celles-ci se dégradent avec l'augmentation de la corrosion.

CHAPITRE II

Mécanique des structures en matériaux composites

II.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter un résumé de la théorie classiques des composites. Cependant pour les lecteurs intéressés par plus de détails, ils peuvent consulter les ouvrages de [17 - 19], et de [38 - 39]. Dans la première partie de ce chapitre, nous rappelons les notions de base de la théorie d'élasticité et nous introduisons les lois constitutives qui

décrivent le comportement des matériaux définies comme des relations entre les composants du tenseur des déplacements, du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes. La seconde partie décrit le comportement du composite unidirectionnel.

Une approche appropriée pour les poutres composites est utilisée pour prendre en compte le couplage entre les comportements en membrane, flexion et torsion. Cette méthode nous permet de redéfinir les paramètres de rigidité par des paramètres de rigidité équivalente utilisés dans ce document. Finalement, la dernière partie de ce chapitre décrit l'analyse des stratifiées utilisés dans le renforcement des poutres.

II.2 Mécanique des milieux continus:

Pour les lecteurs intéressés par plus de détails, ils peuvent consulter l'ouvrage[40].L'état de contrainte est défini par la relation suivante (Fig. 2.1) :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

où i indique la direction de la contrainte et j indique la direction de la normale.

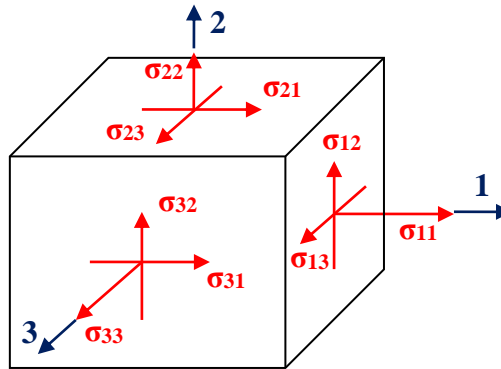


Fig. 2.1 Etat de contraintes

A l'équilibre on aura le tenseur de contrainte suivant :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ Sym & & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

L'état de déformation est défini de façon similaire à l'état de contrainte :

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ Sym & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ Sym & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Les déformations linéaires et angulaires dans le système de coordonnées cartésiennes sont définies par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ii} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (2.3)$$

Les équations de compatibilité sont comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial^2 x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial^2 x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} &= 0 \quad i \neq j \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad i \neq j \neq k \end{aligned} \quad (2.4)$$

La relation entre les contraintes et les déformations est donnée par la loi de Hooke généralisée :

$$\{\sigma\} = [C] \times \{\varepsilon\} \quad (2.5)$$

$$\text{où } \{\sigma\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{32} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{21}\}^T,$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{31} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{32} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{21}\}^T$$

et [C] est la matrice de rigidité donnée par la relation suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ C_{2111} & C_{2122} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & C_{2121} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

et inversement :

$$\{\varepsilon\} = [C]^{-1} \{\sigma\} = [S] \{\sigma\}$$

où $[S] = [C]^{-1}$ est la matrice de souplesse ou de flexibilité.

A l'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_1 \\ \sigma_{22} = \sigma_2 \\ \sigma_{33} = \sigma_3 \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_4 \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_5 \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_6 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} = \gamma_{13} = \gamma_{31} = \varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \varepsilon_6 \end{array} \right.$$

La relation (2.5) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

Si le matériau ne possédant aucune propriété de symétrie il est appelé matériau **triclinique** c'est le cas le plus général.

Pour le cas particulier [3]:

Le matériau **unidirectionnel** se comporte comme un matériau orthotrope qui possède 3 plans de symétrie perpendiculaire deux à deux, ayant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse (Fig. 2.2) avec $C_{22} = C_{33}$, $C_{12} = C_{13}$ et $C_{55} = C_{66}$:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

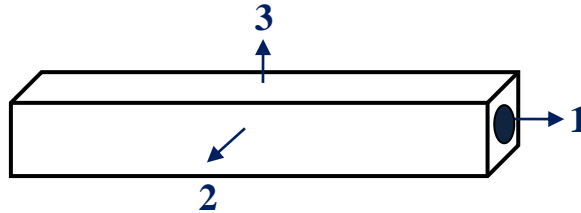


Fig. 2.2 Matériau composite unidirectionnel.

Un **matériau est isotrope** si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence.

L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit aux relations

$$C_{22} = C_{11} \quad C_{23} = C_{12} \quad C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) :$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Un matériau isotrope est caractérisé par deux constantes d'élasticité indépendantes C_{11} et C_{12} qui sont exprimés par les **coefficients de Lamé** λ et μ :

$$C_{12} = \lambda \text{ et } \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \mu$$

d'où

$$C_{11} = \lambda + 2\mu$$

Le **coefficient de Poisson** du matériau est

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Il y a deux coefficients élastiques fondamentaux indépendants E et ν et les relations suivantes :

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu, \quad (2.10)$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

II.3 Mécanique de composite unidirectionnel

II.3.1 Relations contraintes-déformations

L'état complet de contraintes dans le repère local (1,2) d'un pli est représenté par la Fig. 2.3. Ainsi les propriétés mécaniques du pli ont été mesurées dans ce repère local.

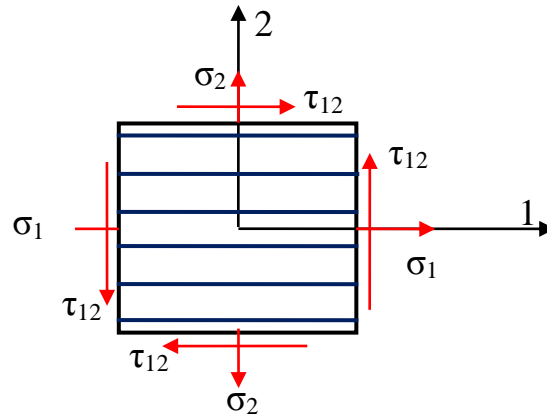


Fig. 2.3 Etat complet de contraintes dans le repère local

Les équations de transformation relatives aux contraintes sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \times \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Où [T] est la matrice de changement de repère :

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Les équations de transformation relatives aux déformations sont tout à fait similaires à celles des contraintes

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Afin d'obtenir directement γ_{xy} il faut remplacer T(θ) par T'(θ) :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T'(\theta)] \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

$$[T'(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Les relations entre les contraintes et les déformations d'un pli soumis à un état complet de contraintes dans le repère local (1,2), sont définies par l'équation suivante [3]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 = \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

où les constantes de la matrice Q sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \\ Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = Q_{21} \\ Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} = G_{12} \end{cases} \quad (2.18)$$

Dans le repère globale (x, y) les relations entre les contraintes et les déformations sont données par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

La matrice \bar{Q} est déduite par intermédiaire de la matrice de rigidité dans le repère local Q en tenant compte de la rotation des axes avec un angle θ (Fig. 2.4).

L'angle de rotation des systèmes d'axes θ est considéré comme positif lorsqu'il faut tourner dans le sens trigonométrique pour passer de l'axe x vers l'axe 1.

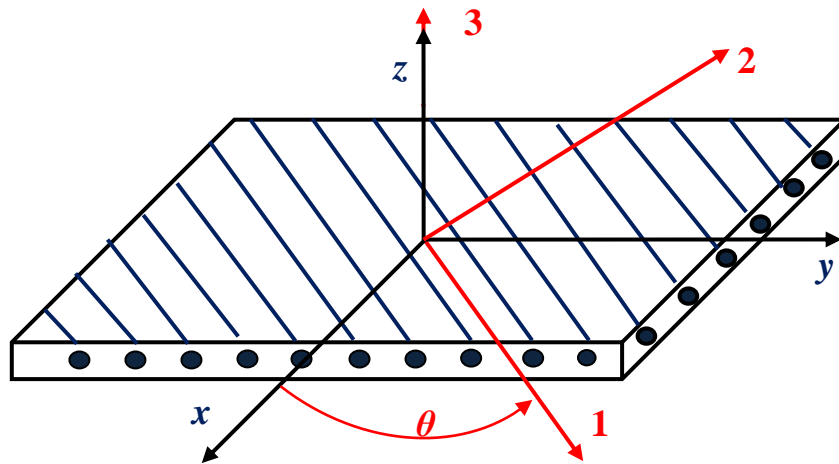


Fig. 2.4 Élément de composite et orientation des fibres

La matrice \bar{Q} est calculée comme suit :

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = [T(\theta)]^{-1} \times [Q] \times [T'(\theta)] \quad (2.20)$$

Les éléments de la matrice \bar{Q} sont déterminés par les équations suivantes [3] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ \bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{22} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{array} \right. \quad (2.21)$$

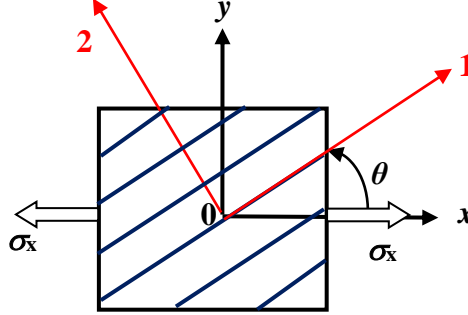
II.3.2 Module d'élasticité équivalent

Le module d'élasticité suivant la direction ox (Fig. 2.5) est

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

Cette équation donne[3]:

$$E_x = \frac{1}{\frac{1}{E_1} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_2} \sin^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{V_{12}}{E_1} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \quad (2.22)$$


 Fig. 2.5 Plan de contrainte de l'élément composite dans la direction x

En substituant $\theta = \theta + 90^\circ$ dans l'expression précédente, on obtient :

$$E_y = \frac{1}{\frac{1}{E_1} \sin^4 \theta + \frac{1}{E_2} \cos^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{V_{12}}{E_1} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \quad (2.23)$$

- *Coefficients de Poisson équivalent*

$$\nu_{xy} = E_x \left(\frac{V_{12}}{E_1} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) \quad (2.24)$$

De façon similaire, on obtient

$$\nu_{yx} = E_y \left(\frac{V_{21}}{E_2} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) \quad (2.25)$$

- *Module de rigidité G_{xy} équivalent*

$$G_{xy} = \frac{1}{2 \left(\frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} + \frac{4V_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{12}} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \quad (2.26)$$

II.4 Mécanique des structures stratifiées

Les structures stratifiées sont constituées d'un certain nombre de plis qui sont empilés et collés successivement les uns sur les autres comme indiqué à la figure 2.6. Les axes x , y et z représentent le repère global de la structure. Par contre les axes 1 et 2 définissent le repère local du pli, ils sont orientés respectivement de façon parallèle et perpendiculaire à la direction des fibres. Le nombre de pli varie de 1 à n_p .

La séquence d'empilement commence à partir du premier pli inférieur et se termine au dernier pli. Chaque pli est défini par une épaisseur (h_k), une orientation (θ_k) et un matériau (mat_k). L'épaisseur de la structure stratifiée, H est égale à la somme des h_k . L'orientation du pli k , θ_k est définie par l'angle que fait son repère local (1,2) par rapport au repère global (x , y) de la structure.

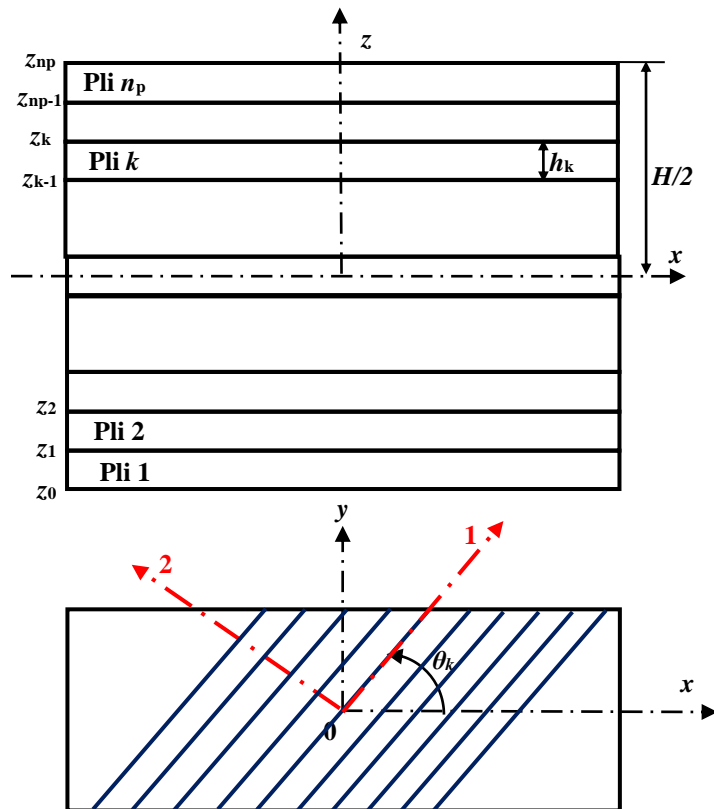


Figure 2.6 Structure stratifiée.

II.4.1 Nomenclature des structures stratifiées

Une structure stratifiée est caractérisée par la séquence d'empilement des plis qui la constitue et l'orientation de chaque pli. Des plis adjacents sont séparés par une barre oblique (/) si leurs angles ont de différentes valeurs absolues. Un indice est utilisé afin d'indiquer le nombre de plis adjacents possédant la même orientation.

L'orientation de chaque pli est définie entre les crochets en commençant par le pli extérieur inférieur, en passant par le plan moyen jusqu'au pli extérieur supérieur. L'indice T à l'extérieur des crochets signifie que la séquence est définie au complet. Si deux plis consécutifs sont de mêmes orientations mais de signes opposés, on peut utiliser le signe \pm devant cette orientation afin d'alléger la représentation. On peut réduire davantage la nomenclature d'une structure stratifiée si celle-ci est symétrique par rapport au plan moyen ($z = 0$). La façon de faire est de simplement représenter la première moitié de la séquence et d'utiliser l'indice S à l'extérieur des crochets afin d'indiquer la symétrie.

La figure 2.7 donne quelques exemples de nomenclature des structures stratifiées.

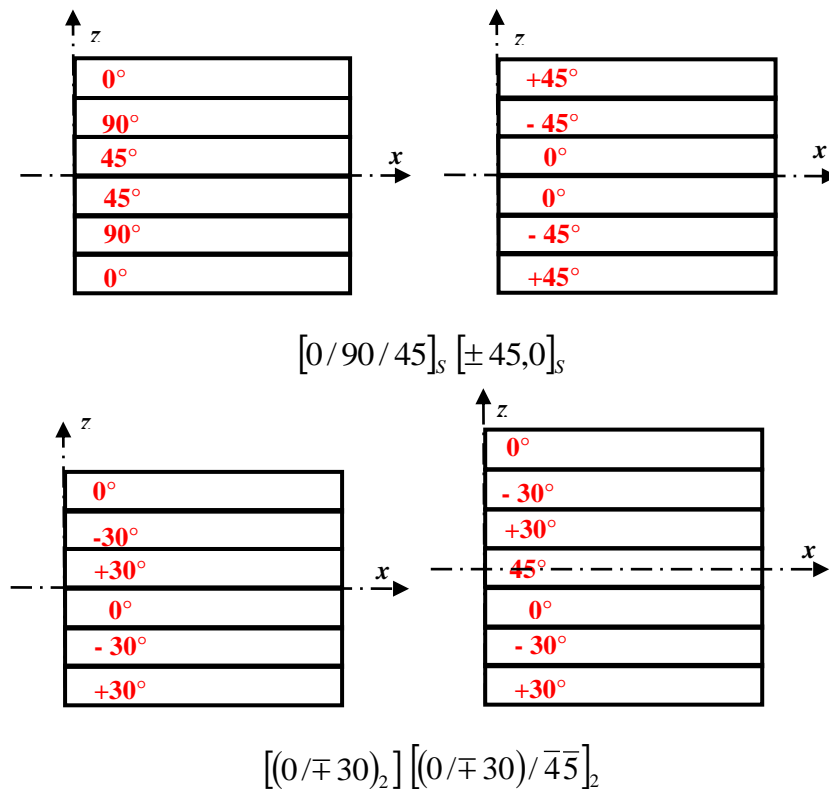


Fig. 2.7 Nomenclature des stratifiés

Les nombres entre crochets désignent l'angle de chaque pli (en degrés) par rapport à une direction de référence.

II.4.2 Type de structures stratifiées :

On peut avoir plusieurs types de structures stratifiées (Fig. 2.8) :

- Stratifié symétrique: Les plis sont disposés symétriquement par rapport au plan moyen géométrique (plan (x, y) passant par le milieu de l'épaisseur du stratifié).
- Stratifié équilibré: Nombre de plis à +θ est égal au nombre de plis à -θ.
- Stratifié orthogonal: Plis de 0° et de 90°

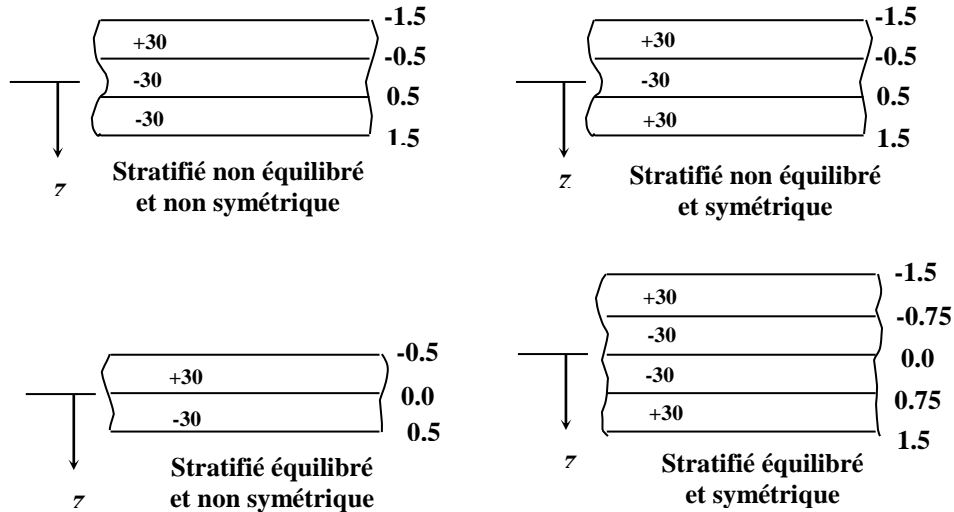


Fig.2.8 Différents types de stratifié

II.5 Théorie classique des stratifiées

L'expression générale du déplacement u en tout point d'un stratifié, de coordonnées (x, y, z) , peut être exprimée sous la forme de polynômes en z , généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de (x, y) .

Le champ des déplacements est alors écrit sous la forme [17]:

$$u = u_0 + \left(c_0 \frac{\partial w}{\partial x} + c_1 \phi(x, t) \right) z + (c_2 \psi(x, t)) z^2 + \left(c_3 \psi(x, t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi(x, t) \right) \frac{1}{h^3} \right) z^3, \quad (2.27)$$

où u et w , sont les déplacements dans les directions x et z , respectivement, et ψ et ϕ sont les rotations d'un élément de ligne perpendiculaire à la direction initiale, dans la direction x et y , respectivement. Cette forme du champ des déplacements répond aux conditions de compatibilité des déformations, et permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite des poutres lors de la déformation.

Les théories de poutre sont classées en fonction de l'ordre de polynôme d'approximation du déplacement u à travers l'épaisseur. Les cas particuliers de l'équation (2.27) sont donnés par [17] :

Théorie classique de poutre (CBT) ou la théorie des poutres Euler-Bernoulli (EB) :

Avec les constantes $c_0 = -1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, la relation (2.27) devient :

$$u = u_0 - \frac{\partial w}{\partial x} z, \quad (2.28)$$

Théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT):

Avec les constantes $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, la relation (2.27) devient :

$$u = u_0 + \phi(x,t)z, \quad (2.29)$$

Théorie de déformation de cisaillement de second ordre (SSDT):

Avec les constantes $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, la relation (2.27) devient :

$$u = u_0 + \phi(x,t)z + \psi(x,t)z^2, \quad (2.30)$$

Théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre(TSDT):

Avec les constantes $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = - (4/3) h$, la relation (2.27) devient :

$$u = u_0 + (\phi(x,t))z - \left(\frac{4}{3} h \psi(x,t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi(x,t) \right) \frac{1}{h^3} \right) z^3, \quad (2.31)$$

Dans la théorie classique CBT, la déformation de cisaillement est ignorée et elle est généralement précise pour les poutres minces; tandis que pour des poutres épaisses on doit utiliser les théories de déformation de cisaillement FSDT pour avoir une bonne précision.

En raison de l'approximation linéaire du déplacement u , la théorie de poutre de Timoshenko est appelée la théorie de déformation en cisaillement d'ordre un (*First Order Shear Deformation Theory* FOSDT). Notons que cette approximation simple peut être appliquée aux poutres homogènes et aux poutres multicouches. Les fondements de la théorie classique des stratifiés poutre (CBT) ou la théorie des poutres Euler-Bernoulli (EB) se basent sur l'hypothèse de Kirchoff qui stipule que les sections planes restent planes et perpendiculaire au plan moyen.

La figure 2.9 représente la section droite d'un stratifié avant et après l'action de la charge extérieure. L'action de la charge extérieure sur la structure stratifié se traduit par des déplacements u , v et w d'un point A de coordonnées (x, y, z) en fonction des déplacements du plan moyen (u^0 , v^0 et w^0) et de la coordonnée z de ce point par rapport au plan moyen. Ces déplacements u , v et w sont sous la forme suivante [39]:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^0(x, y) - z\varphi_x(x, y) \\ v^0(x, y) - z\varphi_y(x, y) \\ w^0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

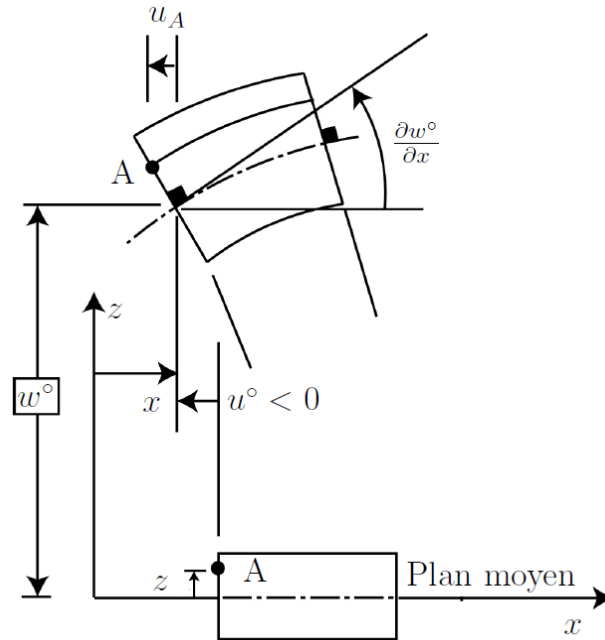
où

$$\begin{Bmatrix} \varphi_x(x, y) \\ \varphi_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w^0}{\partial x} \\ \frac{\partial w^0}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

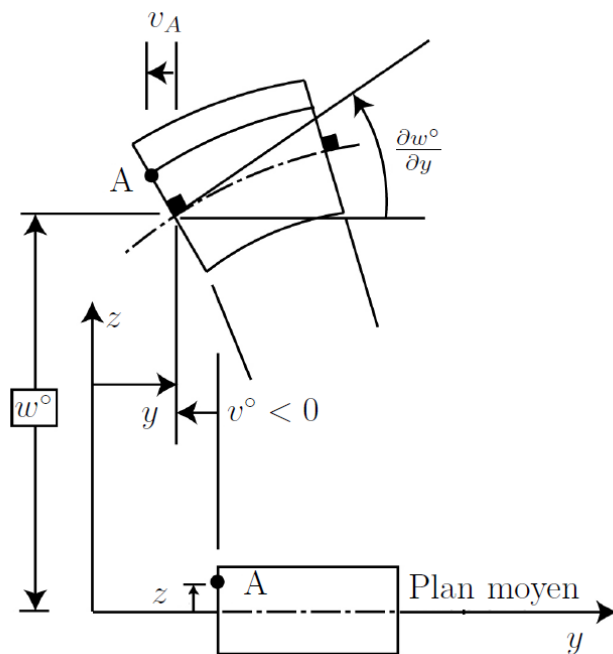
d'où

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u^0(x, y) - z \frac{\partial w^0}{\partial x} \\ v^0(x, y) - z \frac{\partial w^0}{\partial y} \\ w^0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

où u^0 , v^0 et w^0 sont les déplacements au point $(x,y,0)$ du plan moyen. L'exposant 0 signifie que les déformations et les courbures sont définies au plan moyen ($z=0$).



(a) Forme déformée (plan (x, z))



(b) Forme déformée (plan (y, z))

Fig. 2.9 Section droite d'un stratifié avant et après l'action de la charge extérieure [39]

II.5.1 Relations entre déformations et déplacements

En utilisant les relations des déplacements (2.33), les composantes de la déformation en un point **A** quelconque de l'épaisseur ont pour expression :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial u^0}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w^0}{\partial y \partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

II.5.2 Relations entre les efforts résultantes et les déformations

Les relations entre les forces et les déformations $(\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0)$ et les courbures $(\kappa_x^0, \kappa_y^0, \kappa_{xy}^0)$ sont définies par les équations suivantes [39]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Les relations entre les moments et les déformations et les courbures sont définies par les équations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

La matrice [A] est appelée matrice de rigidité en membrane, donnée par :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2.37)$$

La matrice [B] est appelée matrice de couplage membrane-flexion, donnée par:

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.38)$$

La matrice [D] est appelée matrice de rigidité en flexion, donnée par :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.39)$$

Finalement, les relations entre les éléments de réduction et les déformations du plan moyen géométrique peuvent s'écrire:

$$\begin{Bmatrix} N \\ \text{---} \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ \text{---} & | & \text{---} \\ B & | & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \text{---} \\ \kappa^0 \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

La matrice de rigidité [E] du stratifié est comme suit :

$$E = \begin{bmatrix} A & | & B \\ \text{---} & | & \text{---} \\ B & | & D \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Pour un stratifié symétrique, la matrice couplage membrane-flexion [B] est nulle.

De plus, si le stratifié est équilibré, les coefficients A_{16} et A_{26} sont aussi nuls d'où la relation (2.40) devient [39]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ \text{---} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & | & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \text{---} \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

II.5.3 Déformations dans chaque pli

La relation reliant les déformations du plan moyen d'un pli stratifié en fonction des forces et des moments appliqués sur ce plan moyen est donnée à l'équation suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} = [ABD]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

où la matrice $[ABD]^{-1}$ de dimensions 6×6 est l'inverse de la matrice $[ABD]$, qui représente le regroupement des matrices $[A]$, $[B]$ et $[D]$.

Les déformations dans le k^e pli en fonction de la position z par rapport au plan moyen de ce pli deviennent :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} + z_k \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (2.44)$$

Pour déterminer les contraintes dans le système de coordonnées (x, y) du pli, les déformations sont multipliées par la matrice $[Q]$ du pli k :

$$\{\sigma(x, y)\}_k = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon(x, y)\}_k \quad (4.45)$$

D'où les contraintes dans le k^e pli sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} + [\bar{Q}]_k z_k \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (4.46)$$

II.6 Comportement des poutres stratifiées

Les équations dynamiques sont :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho_{\acute{e}q} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P_z \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \rho_{\acute{e}q} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - P_x \quad (2.48)$$

où $\rho_{\acute{e}q}$, P_x et P_z sont la masse et les forces extérieures dans la direction x et z respectivement [19]:

$$\rho_{\acute{e}q} = \sum_{k=1}^N b \rho_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2.49)$$

où b est la largeur de la poutre.

II.7 Conclusion

Les propriétés globales du stratifié dépendent des propriétés du matériau de chaque pli, de son épaisseur et de l'orientation de celui-ci. Donc, c'est en variant l'orientation des plis et en choisissant les matériaux appropriés que l'on peut concevoir une structure stratifiée aux propriétés désirées.

Ce court exposé de la théorie classique des stratifiés avait pour but de permettre au lecteur de bien comprendre la nomenclature et les notions utilisées dans les chapitres 3 à 5 de ce document.

CHAPITRE III

Vibrations libres des poutres renforcées par matériaux composites Méthode analytique

III.1 Introduction

Les impératifs de légèreté, alliés à la robustesse ont dirigé très tôt les constructeurs aéronautiques, civils, navals et industriels vers des solutions composites en utilisant des structures renforcées par matériaux composites. Cela demande une meilleure maîtrise de leur comportement mécanique pour faciliter par la suite, leur exploitation ainsi que leur utilisation. Les éléments poutres sont les pièces de base des structures d'où l'importance de leur étude et analyse de leur comportement en statique et en dynamique.

III.2 Vibration libre des poutres renforcées par matériaux composites

La théorie des poutres considère, en effet que la longueur « a » est très grande devant l'épaisseur « h » et la largeur « b » de la poutre (Fig. 3.1).

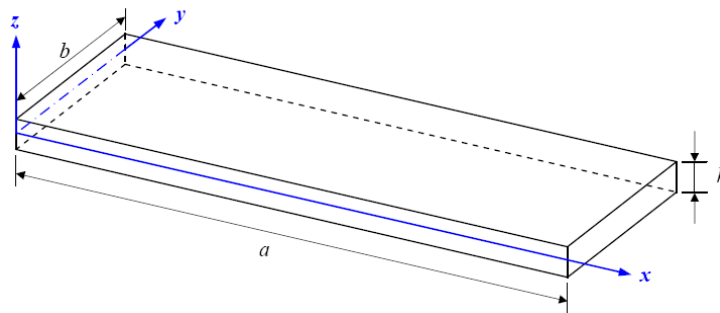


Fig. 3.1 Élément de poutre.

Pour une flexion cylindrique simple avec un moment fléchissant et un effort tranchant associé on se place dans l'hypothèse suivante: les sections droites des poutres restent droites (Fig. 3.2) au cours de la déformation (hypothèse de Navier-Bernoulli).

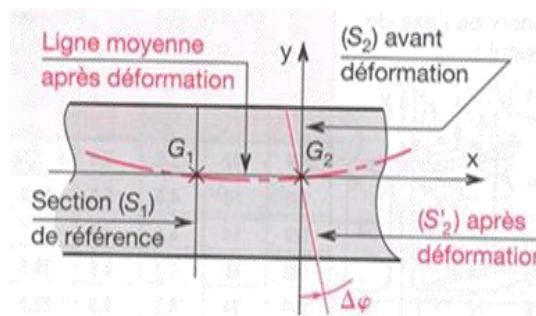


Fig.3.2 Flexion cylindrique d'une poutre [40]

Dans le cas des poutres renforcées en matériaux composites (Fig. 3.3) la poutre droite de section (A) est constituée par un empilement de matériaux de différentes épaisseurs.

L'analyse vibratoire du mouvement transverse libre de la poutre composite homogénéisée est étudiée, d'après l'hypothèse Euler-Bernoulli.

Nous considérons une poutre sur deux appuis simples renforcée par des manteaux composites Fig.3.3.

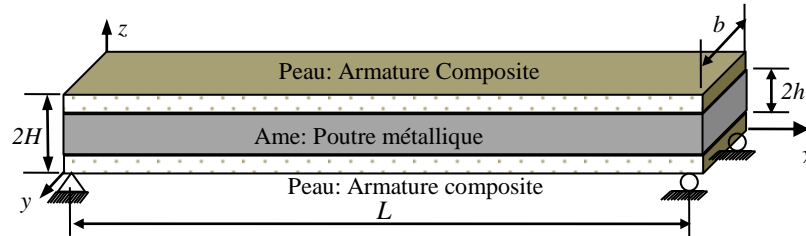


Fig. 3.3 Renforcement sur les deux côtés de la poutre (sandwich)

Hypothèses :

- on considère le cas de petits mouvements harmoniques autour d'une position d'équilibre.
- pas de glissement, ni séparation entre deux couches voisines.
- la discontinuité à l'interface entre les couches due à l'effet de Poisson, est négligeable.
- la rigidité flexionnelle est constante.
- les sections planes avant déformation restent planes après déformation.
- l'effet de l'effort tranchant est négligé.

Les équations d'équilibre exprimées à travers l'étude d'une tranche de poutre (Fig.3.4) restent vérifiées à chaque instant et sont strictement les mêmes que celles des poutres homogènes isotropes, puisque leur démonstration ne fait pas intervenir les propriétés des matériaux. L'équation d'équilibre dynamique peut être retrouvée pour une poutre isotrope en vibrations libres en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique à un élément infinitésimal de la poutre.

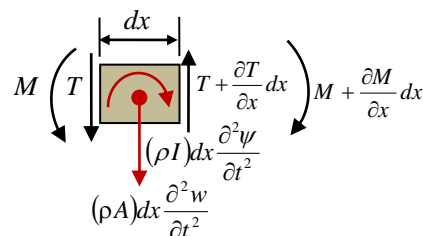


Fig.3.4 Tronçon de poutre élémentaire

L'équation de mouvement fait intervenir de nombreux paramètres: la flexion de la fibre neutre au point d'abscisse x à l'instant t notée y ; l'effort tranchant T ainsi que l'effort extérieur

par unité de longueur T_{ex} ; en régime libre l'effort extérieur est nul; le moment fléchissant M ; l'angle de rotation de l'axe neutre ψ . Cependant, si le calcul des fréquences naturelles de la poutre est fonction de ses propriétés mécaniques, il est par contre indépendant des forces excitatrices mises en jeu. Ce qui nous permet donc de faire cette étude dans le domaine des vibrations libres.

L'équation d'équilibre dynamique nous conduit aux deux équations suivantes :

$$\sum F /_y = -T + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) - \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\sum M /_o = -M + \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) + T \frac{dx}{2} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} - \rho I dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.2)$$

Après simplification on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + T = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (3.4)$$

En utilisant les relations classiques de la résistance des matériaux on obtient,

$$M = EI \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.5)$$

$$\psi - \frac{T}{\alpha GA} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (3.6)$$

Dans les cas usuels, certains termes de ces équations peuvent être négligés; il s'agit de $(\rho I)(\partial^2 \psi / \partial t^2)$ qui représente l'effet d'inertie en rotation et de $T/\alpha(GA)$ qui représente l'effet de cisaillement.

Une fois ces simplifications opérées, on dit que l'on résout le problème d'une poutre d'Euler-Bernoulli. Après élimination entre T , M et ψ on obtient $\partial M / \partial x = -T$, donc :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \quad (3.7)$$

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.8)$$

Avec les deux équations (3.3) et (3.7) on aura l'équation dynamique de la poutre:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad (3.9)$$

avec $m_l = \rho A$, on obtient [19] :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3.10)$$

Afin de calculer la flèche d'une poutre en stratifié de matériaux composites, il est nécessaire d'établir une formulation homogène, c'est-à-dire, les relations de comportement sont identiques à celles des poutres homogènes isotropes. Cette approche d'homogénéisation est basée sur les caractéristiques physiques équivalentes.

Par analogie, l'équation dynamique du mouvement libre équation (3.10) d'une poutre multicouche homogénéisée, peut être exprimée en fonction des propriétés physicomécaniques équivalentes en utilisant l'approche d'homogénéisation :

$$(E_{xx}I)_{\text{éq}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_l)_{\text{éq}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3.11)$$

Le moment d'inertie

$$I = b \int_{y_{i-1}}^{y_i} y^2 dy,$$

où y_i et y_{i-1} sont les coordonnées supérieure et inférieure du pli (i).

Le paramètre d'équivalence $(E_{xx}I)_{\acute{e}q}$, est déterminé, en supposant un collage parfait au niveau des différentes interfaces d'après :

$$E_{xx}I = \sum_{k=1}^N E_k b \int_{y_{i-1}}^{y_i} y^2 dy, \quad (3.12)$$

Après intégration, on obtient [19]:

$$E_{xx}I = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_p} b E_i (y_i^3 - y_{i-1}^3), \quad (3.13)$$

La rigidité équivalente pour la poutre composite revêtue sur les deux côtés (sandwich), représenté sur la Fig. 3.3, peut être écrite comme suit:

$$E_{xx}I = \frac{2b}{3} [E_c h^3 + E_f (H^3 - h^3)] \quad (3.14)$$

où E_c et E_f sont le module d'élasticité du cœur et des faces de la poutre, respectivement.

Le module d'élasticité des faces, E_f le long de l'axe de la poutre est exprimé comme suit :

$$\frac{1}{E_f} = \frac{1}{E_{11}} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_{22}} \sin^4 \theta + \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_{11}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (3.15)$$

où E_{11} , E_{22} , G_{11} et ν_{12} sont les propriétés mécaniques le long des directions de stratifiés.

L'angle θ est l'angle entre la direction principale des stratifiés et l'axe de la poutre.

Les propriétés mécaniques E_{11} , E_{22} , G_{11} et ν_{12} du stratifié composite unidirectionnel de fibres continus sont calculées avec l'utilisation de la règle de mélange (Matrice + Fibre).

Les modules de cisaillement des fibres et de la matrice sont calculés d'après :

$$G_{\text{fibre}} = \frac{E_{\text{fibre}}}{2(1 + \nu_{\text{fibre}})} \quad (3.16)$$

$$G_{matrice} = \frac{E_{matrice}}{2(1 + \nu_{matrice})} \quad (3.17)$$

où E_{fibre} , $E_{matrice}$, ν_{fibre} et $\nu_{matrice}$ représentent le module d'Young et le coefficient de Poisson des fibres et de la matrice respectivement .

Le comportement mécanique des matériaux composites dépend de plusieurs facteurs: le type de fibres, la fraction volumique de fibres et le type de matrice.

Dans les matériaux composites, les fibres reprennent principalement les efforts dans la direction des fibres. La matrice, quant à elle, transfère les contraintes aux fibres, et les protège. La résistance et le module d'Young des fibres sont plus importants par rapport à ceux de la matrice, le comportement mécanique des matériaux composites est donc piloté par les propriétés mécaniques des fibres et la quantité de fibres (fraction volumique).

III.3 Propriétés mécaniques de matériaux composites

Les propriétés mécaniques de matériaux composites peuvent être estimées selon la loi de Halpin-Tsai (lois des mélanges) [3]:

$$E_{com} = E_{fib}V_{fib} + E_m V_m$$

$$f_{com} \approx f_{fib}V_{fib} + f_m V_m$$

avec

$$V_{fib} + V_m = 1$$

où la fraction volumique V_{fib} typique est de l'ordre de 0,6 – 0,65.

E_{com} est le module d'Young du matériau composite dans la direction des fibres,

E_{fib} , module d'Young des fibres,

E_m module d'Young de la matrice,

V_{fib} fraction volumique de fibres,

V_m fraction volumique de la matrice,

f_{com} résistance en traction du matériau composite,

f_{fib} résistance en traction des fibres,

f_m résistance en traction de la matrice,

La fraction volumique de matrice est donnée par :

$$V_{matrice} = 1 - V_{fibre} \quad (3.18)$$

où V_{fibre} est la fraction volumique des fibres.

En utilisant la Loi de mélange on peut calculer les propriétés mécaniques du stratifié :

✓ Module d'Young longitudinal :

$$E_{11} = E_{fibre} V_{fibre} + E_{matrice} V_{matrice} \quad (3.19)$$

✓ Module d'Young transverse :

$$E_{22} = \frac{E_{matrice}}{\left(1 + \left(\frac{E_{matrice}}{E_{fibre}} - 1\right) V_{fibre}\right)} \quad (3.20)$$

✓ Module de cisaillement :

$$G_{12} = \frac{1}{\left(\frac{V_{fibre}}{G_{fibre}} + \frac{V_{matrice}}{G_{matrice}}\right)} \quad (3.21)$$

✓ Coefficient de Poisson ν_{12} :

$$\nu_{12} = \nu_{matrice} V_{matrice} + \nu_{fibre} V_{fibre} \quad (3.22)$$

✓ Coefficient de Poisson ν_{21} :

$$\nu_{21} = \nu_{12st} \frac{E_{2st}}{E_{1st}} \quad (3.23)$$

De même, la masse équivalente par unité de longueur peut être calculée comme suit [3]:

$$m_l = \sum_{i=1}^N \rho_i A_i, \quad (3.24)$$

La section transversale du pli (couche) est $A_i = b \int_{y_{i-1}}^{y_i} dy$, d'où $m_l = \sum_{i=1}^N b \rho_i \int_{y_{i-1}}^{y_i} dy$,

Après intégration, on aura :

$$m_i = \sum_{i=1}^N b \rho_i (y_i - y_{i-1}), \quad (3.25)$$

où m_i est la masse par unité de longueur de la poutre, et b est la largeur de la poutre et ρ_i est la densité de la i -ième couche. Ici, y_i est la distance entre l'axe neutre de la poutre et la couche i .

Pour une poutre sandwich (fig.3.3), l'équation (3.25) devient:

$$m_i = 2b[\rho_c h + \rho_f (H - h)], \quad (3.26)$$

où ρ_c et ρ_f sont les densités du noyau et des faces de la poutre, respectivement.

La densité du composite est donnée par la loi des mélange :

$$\rho_{com} = \rho_{lcom} = \rho_{fibre} V_{fibre} + \rho_{matrice} V_{matrice} \quad (3.27)$$

où ρ_{fibre} et $\rho_{matrice}$ sont la densité du fibre et de la matrice, respectivement.

III.4 Équation de vibration libre et résolution

Les énergies potentielles et cinétiques des différentes composantes de la poutre sont exprimées en fonction des déplacements des couches du stratifié. Afin de calculer les énergies totales, il nous faut donc exprimer ces déplacements.

La méthode retenue ici est une méthode approximative dite des modes assumées. Utilisée par de nombreux auteurs [5], [6], elle permet d'obtenir directement les équations de mouvements à l'inverse des méthodes de Galerkin ou Rayleigh-Ritz nécessitant la minimisation d'un reste [7]. Cette méthode consiste à discrétiser les déplacements sous la forme d'une série de produit de deux fonctions satisfaisants les conditions aux limites, l'une spatiale, l'autre temporelle.

L'équation (3.11) est une équation aux dérivées partielles d'ordre quatre à deux variables x et t , qui peut être découpée par l'équation suivante [19]:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x)q(t) \quad (3.28)$$

où N est une fonction admissible qui dépend de l'espace, ici la variable x .

La fonction, q , est la nouvelle coordonnée généralisée, qui dépend du temps t . Le nombre n est le nombre de modes utilisés pour représenter respectivement les déplacements.

En substituant l'équation (3.28) dans (3.11), on obtient [41-43] :

$$(E_{xx}I)_{\acute{e}q} q(t) \frac{\partial^4 N(x)}{\partial x^4} + (m_l)_{\acute{e}q} N(x) \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3.29)$$

En supposant les fonctions modales temporelles sous la forme [41]:

$$q(t) = A \sin(\omega t) \quad (3.30)$$

où ω , pulsation propre du i ème mode.

Et en substituant cette équation (3.30) dans (3.29), on obtient :

$$(E_{xx}I)_{\acute{e}q} \frac{\partial^4 N}{\partial x^4} - [(m_l)_{\acute{e}q} \omega^2] N = 0, \quad (3.31)$$

En supposant :

$$\left(\frac{m_l}{E_{xx}I} \right)_{\acute{e}q} \omega^2 = \lambda^4, \quad (3.32)$$

D'où

$$\frac{\partial^4 N}{\partial x^4} - \lambda^4 N = 0, \quad (3.33)$$

avec

$$\frac{\partial^4 N}{\partial x^4} = \lambda^4 N = \left[\left(\frac{m_l}{E_{xx}I} \right)_{\acute{e}q} \omega^2 \right] N,$$

L'équation (3.31) devient :

$$(E_{xx}I)_{\acute{e}q} q \left[\left(\frac{m_l}{E_{xx}I} \right)_{\acute{e}q} \omega^2 \right] N + (m_l)_{\acute{e}q} N \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + \omega^2 q(t) = 0, \quad (3.34)$$

Pour les poutres, les fonctions modales(3.33) associées au déplacement transverse sont supposées plus simples, dépendant d'un seul nombre d'onde comme suggéré par le modèle d'Euler –Bernoulli [42].

La solution de l'équation (3.33) est sous la forme suivante [42]:

- Pour $\omega = 0$

$$N(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \quad (3.35)$$

- Pour $\omega \neq 0$

$$N(x) = B_1 \cosh(\lambda x) + B_2 \sinh(\lambda x) + B_3 \cos(\lambda x) + B_4 \sin(\lambda x) \quad (3.36)$$

En effet, $N(x)$ représente le déplacement, $N'(x)$ représente la tangente au point x , $N''(x)$ représente le moment fléchissant au point d'abscisse x et $N'''(x)$ représente l'effort tranchant.

Les constantes B_1 , B_2 , B_3 , et B_4 et λ_i sont déterminées en utilisant les conditions aux limites de la poutre.

Pour une poutre qui repose sur deux appuis simples, comme indiqué sur la Fig. 3.3, les conditions aux limites cinématiques dites 'articulées' sont comme suit [43]:

$$\text{Pour } x = 0, \quad \begin{cases} w(0, t) = 0 \\ M(0, t) = E_{xx} I \frac{d^2 w(0, t)}{dx^2} = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\text{Pour } x = l, \quad \begin{cases} w(l, t) = 0 \\ M(l, t) = E_{xx} I \frac{d^2 w(l, t)}{dx^2} = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

En appliquant les conditions aux limites (3.17) et (3.18) à l'équation (3.15), on obtient un système homogène de quatre inconnues B_1, B_2, B_3 , et B_4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} w(0,t) = 0 \Rightarrow B_1 + B_3 = 0 \\ \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \lambda^2 (B_1 - B_3) = 0 \\ w(L,t) = 0 \Rightarrow ch(\lambda.L)B_1 + sh(\lambda.L)B_2 + \cos(\lambda.L)B_3 + \sin(\lambda.L)B_4 = 0 \\ \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \lambda^2 ch(\lambda.L)B_1 + \lambda^2 sh(\lambda.L)B_2 - \lambda^2 \cos(\lambda.L)B_3 - \lambda^2 \sin(\lambda.L)B_4 = 0 \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Sous forme matricielle, on aura [42]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ ch(\lambda.L) & sh(\lambda.L) & \cos(\lambda.L) & \sin(\lambda.L) \\ \lambda^2 ch(\lambda.L) & \lambda^2 sh(\lambda.L) & -\lambda^2 \cos(\lambda.L) & -\lambda^2 \sin(\lambda.L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.40)$$

En utilisant une résolution approchée, on cherche à ce que le déterminant de la matrice du système d'équations (3.40) soit nul (équation transcendante):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ ch(\lambda.L) & sh(\lambda.L) & \cos(\lambda.L) & \sin(\lambda.L) \\ \lambda^2 ch(\lambda.L) & \lambda^2 sh(\lambda.L) & -\lambda^2 \cos(\lambda.L) & -\lambda^2 \sin(\lambda.L) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.41)$$

L'équation caractéristique est :

$$\sin(\lambda L) \times sh(\lambda L) = 0 \quad (3.42)$$

Cette équation caractéristique donne une infinité dénombrable de solutions λ_i , d'où

$$\lambda_i = \frac{i\pi}{L} \quad (3.43)$$

A partir de l'équation (3.32), les pulsations propres ω_j sont

$$\omega_i = \left(\frac{i \times \pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{E_{xx} I}{m_i}} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.44)$$

et les modes propres sont comme suit :

$$N_i(x) = \sqrt{\frac{2}{m_l L}} \sin(\lambda_i x) = \sqrt{\frac{2}{m_l L}} \sin\left(\frac{i \times \pi}{L} x\right) \quad (3.45)$$

L'expression de la fréquence naturelle sera de la forme :

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.46)$$

III.5 Fréquences et modes de vibration pour les conditions aux limites simples

Les différentes conditions aux limites des poutres utilisées dans ce chapitre sont appuis simple-simple, encastrement-libre, encastrement-encastrement et encastrement-simple, comme indiqués dans la fig. 3.5.

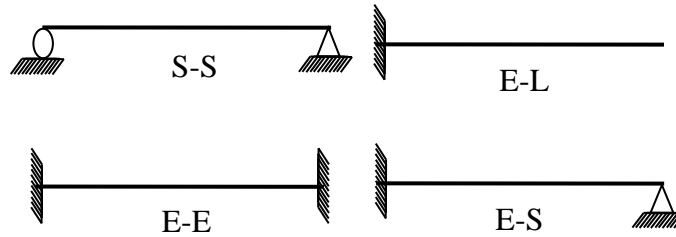


Fig. 3.5 Différentes conditions aux limites simples de la poutre

Appuyé - Appuyé

Équation caractéristique (3.39) :

$$\sin(\lambda L) \times sh(\lambda L) = 0$$

d'où

$$\lambda_i l = i \pi$$

et les modes propres sont comme suit :

$$N_i(x) = \sin(\lambda_i x) = \sin\left(\frac{i \times \pi}{l} x\right)$$

Encastré – Libre

Équation caractéristique :

$$\cos \lambda l \cosh \lambda l + 1 = 0$$

d'où

$$\lambda_1 l = 1.87510 \quad \lambda_2 l = 4.69409 \quad \lambda_3 l = 7.85473 \text{ pour } i > 3 \quad \lambda_i l \cong (2i - 1) \frac{\pi}{2}$$

les modes propres sont

$$N_i(x) = \cos \lambda_i x - ch \lambda_i x - \frac{\cos \lambda_i x + ch \lambda_i x}{\sin \lambda_i x + sh \lambda_i x} (\sin \lambda_i x - sh \lambda_i x)$$

Encastré – Encastré

Équation caractéristique :

$$\cos \lambda l \cosh \lambda l - 1 = 0$$

d'où

$$\lambda_1 l = 4.73004 \quad \lambda_2 l = 7.85320 \quad \text{pour } i > 2 \quad \lambda_i l \cong (2i + 1) \frac{\pi}{2}$$

les modes propres sont

$$N_i(x) = \cos \lambda_i x + ch \lambda_i x - \frac{\cos \lambda_i x - ch \lambda_i x}{\sin \lambda_i x - sh \lambda_i x} (\sin \lambda_i x - sh \lambda_i x)$$

Appuyé - Encastré

Équation caractéristique :

$$\tan \lambda l - th \lambda l = 0$$

d'où

$$\lambda_1 l = 3.9266 \quad \lambda_2 l = 7.0686 \quad \text{pour } i > 2 \quad \lambda_i l \cong \frac{\pi}{4} + i\pi$$

les modes propres sont

$$N_i(x) = \cos \lambda_i x - ch \lambda_i x - \frac{\cos \lambda_i x - ch \lambda_i x}{\sin \lambda_i x - sh \lambda_i x} (\sin \lambda_i x - sh \lambda_i x)$$

Après résolution, on obtient les fonctions modales transversales récapitulées dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Fonctions modales transversales de la poutre [42]

Conditions aux limites	Fonction admissible transversale	$\lambda_1 l$	$\lambda_2 l$	$\lambda_3 l$	$\lambda_i l$
Appuyé - Appuyé	$\sin(\lambda_i x)$	π	2π	3π	$i\pi$
Encastré – Libre	$\cos \lambda_i x - ch \lambda_i x - \frac{\cos \lambda_i x + ch \lambda_i x}{\sin \lambda_i x + sh \lambda_i x} (\sin \lambda_i x - sh \lambda_i x)$	1.88	4.69	7.86	$(2i - 1) \frac{\pi}{2}$
Encastré – Encastré	$\cos \lambda_i x + ch \lambda_i x - \frac{\cos \lambda_i x - ch \lambda_i x}{\sin \lambda_i x - sh \lambda_i x} (\sin \lambda_i x - sh \lambda_i x)$	4.73	7.85	11.0	$(2i + 1) \frac{\pi}{2}$
Appuyé – Encastré	$\cos \lambda_i x - ch \lambda_i x - \frac{\cos \lambda_i x - ch \lambda_i x}{\sin \lambda_i x - sh \lambda_i x} (\sin \lambda_i x - sh \lambda_i x)$	3.92	7.07	10.2	$(4i + 1) \frac{\pi}{4}$

III.6 Application

L'application se porte sur l'analyse des vibrations libres de poutres sur deux appuis simples renforcées par couches composites Fig.3.3. Deux modèles de poutres sandwichs ont été utilisés avec $L = 4\text{m}$, $b = 0.2\text{ m}$, $H = 0.2\text{ m}$, et $L/H = 20$.

Le premier modèle ayant un cœur en matériau isotrope (acier) et les peaux en composite verre/époxyde, cependant le second modèle est constitué d'une poutre en acier renforcée par matériau composite en carbone/époxyde.

Données Numériques (valeur expérimentale)

Fraction volumique des fibres $V_{\text{fibre}} = 0.6$

D'après l'équation (3.18), on obtient :

$$V_{\text{matrice}} = 1 - V_{\text{fibre}} = 0.4$$

Résine époxyde SR1500/SD2505 (matrice époxyde)

$$\text{Module de Young } E_{matrice} = 3.45 \text{ GPa}$$

$$\text{Coefficient de Poisson } \nu_{matrice} = 0.1$$

$$\text{Masse volumique } \rho_{matrice} = 1200 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{D'après l'équation (3.17) on aura : } G_{matrice} = 1.57 \text{ GPa}$$

Composite Verre/Epoxyde

Fibre Epoxyde de verre

$$\text{Module de Young } E_{fibre} = 73 \times 10^9 \text{ Pa} = 73 \text{ GPa}$$

$$\text{Coefficient de Poisson } \nu_{fibre} = 0.22$$

$$\text{Masse volumique } \rho_{fibre} = 2600 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{D'après l'équation (3.16) on aura : } G_{fibre_V} = 76 \text{ GPa}$$

Composite Carbone/époxyde

Fibre Epoxyde de carbone

$$\text{Module de Young } E_{fibre} = 160 \times 10^9 \text{ Pa} = 160 \text{ GPa}$$

$$\text{Coefficient de Poisson } \nu_{fibre} = 0.2$$

$$\text{Masse volumique } \mu_{fibre} = 1800 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{D'après l'équation (3.16) on aura : } G_{fibre_C} = 4.14 \text{ GPa}$$

Les propriétés mécaniques du composite unidirectionnel sont calculées en utilisant la loi de mélange (3.19), (3.20), (3.21), et (3.22) et les densités équivalentes sont calculées à l'aide de l'équation (3.27). Les résultats numériques obtenus pour le composite verre/époxyde et carbone/époxyde sont énumérés dans le tableau 3.2.

Tableau 3.2. Modules élastiques du matériau composite unidirectionnel avec $V_{fibre} = 0,6$

Modules élastiques	Carbone/époxyde	Verre/Epoxyde
E_{11} (GPa)	177	38.6
E_{22} (GPa)	10.8	8.27
G_{12} (GPa)	76	4.14
ν_{12}	0.207	0.260
ρ (kg/m ³)	1600	1759

Les propriétés mécaniques de l'acier sont données dans le tableau 3.3.

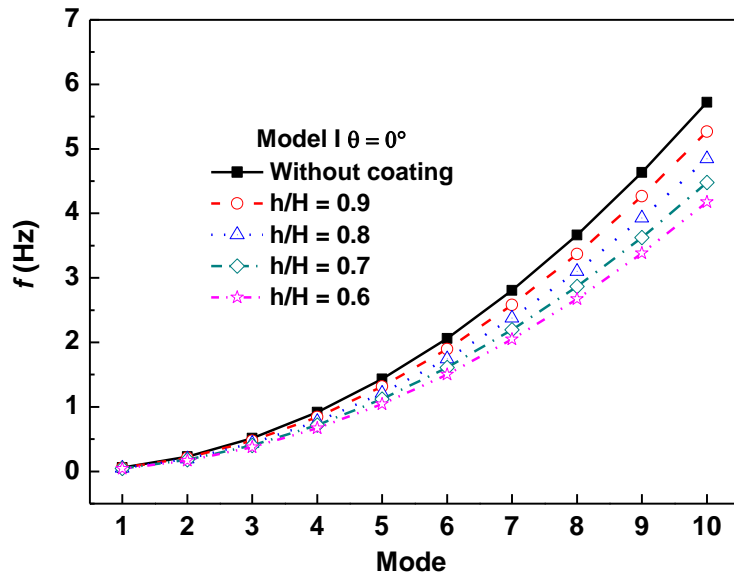
Tableau 3.3 Propriétés mécaniques de l'acier

ρ (kg/m ³)	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
7850	200	200	77	0.29

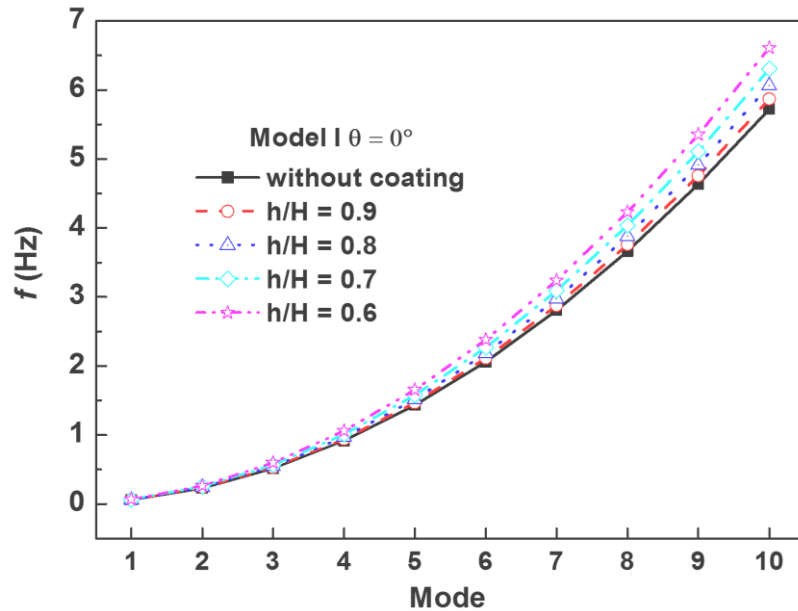
L'objectif ici est de calculer les pulsations propres et les modes propres des deux modèles I et II de la poutre. Les modes prédominants lors du mouvement de vibration des systèmes mécaniques étant les premiers, on obtient une bonne approximation de l'équation de mouvement en ne sommant que les 5 ou 6 premiers modes propres.

Plus les fonctions modales choisies seront proches du mouvement réel et plus le nombre de mode utilisé sera grand, alors, plus la méthode sera efficace et se rapprochera du comportement réel. Cependant, le temps de calcul augmentant rapidement avec le nombre de modes, nous avons cherché à connaître le nombre de mode optimal à choisir. Le critère de convergence retenu pour cette étude était la stabilité des 5 premières fréquences naturelles du système. L'écart relatif des fréquences obtenues avec n et $n+1$ modes devait être inférieur à 0.001%. Pour notre cas on va prendre les 10 premiers modes propres des poutres.

Les figures 3.6a et 3.6b montrent les dix premières fréquences propres de la poutre renforcée en fonction de la variation du rapport d'épaisseur de 0.6 à 1 ($h/H = 1$ correspondant à la poutre sans renforcement) et avec un angle d'orientation de fibre, $\theta = 0^\circ$, pour le model I et le model II.



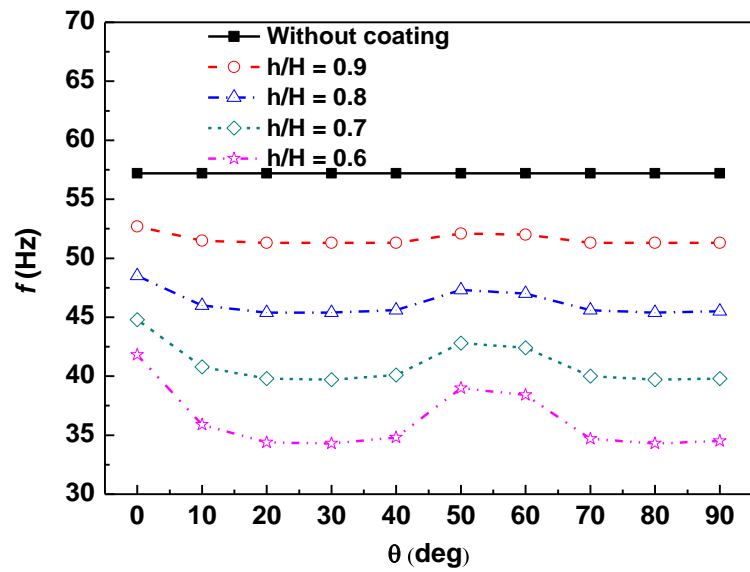
(a) Model I



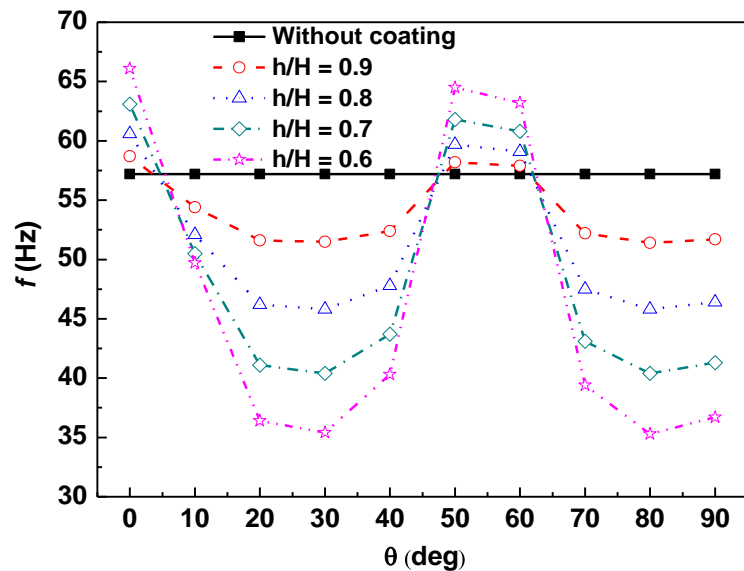
(b) Model II

Fig. 3.6 Fréquences propres de la poutre pour différents modes et pour des rapports d'épaisseur h/H variant de 0.6 à 1.0.

On remarque dans les figures 3.7a et 3.7b que les fréquences propres sont directement proportionnelles au nombre de mode pour les deux modèles I et II. Cependant l'effet du rapport d'épaisseur h/H sur les fréquences pour les premières modes peut être négligeable pour les deux modèles I et II.



(a) Model I



(b) Model II

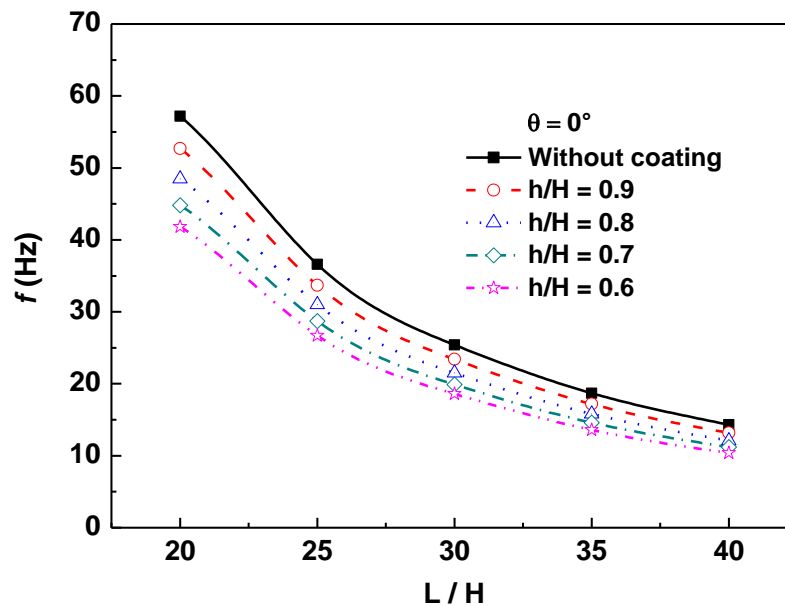
Fig. 3.7 Fréquences propres de la poutre pour différents angle des fibres et pour des rapports d'épaisseur h/H variant de 0.6 à 1.0

La fréquence propre de la poutre pour des différents rapports d'épaisseur h/H et différents angles d'orientation des fibres des faces composites pour les deux modèles I et II sont montrés dans les figures 3.8a et 3.8b, respectivement. L'angle d'orientation des fibres des deux couches composites varient de 0° à 90° avec un incrément de 10° .

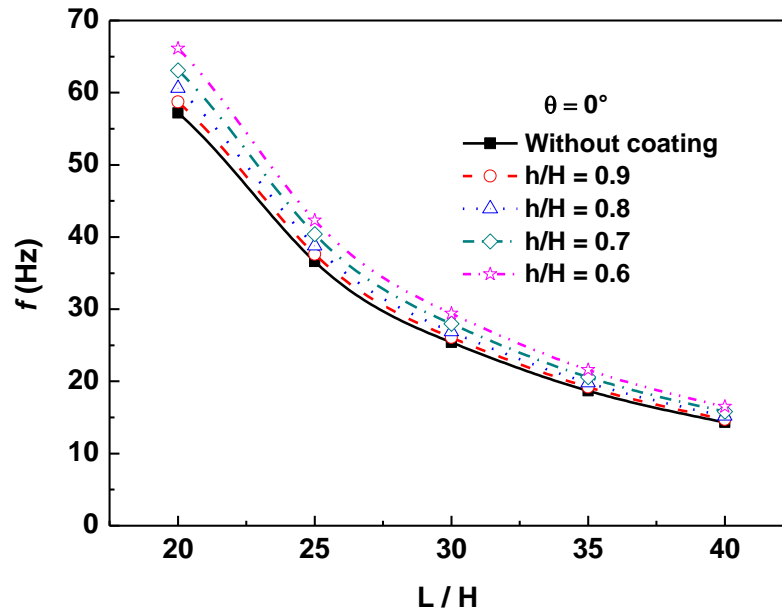
La figure 3.8a montre que la fréquence propre diminue avec la réduction du rapport d'épaisseur pour le modèle I. La figure 3.8b montre que la fréquence propre du modèle II diminue généralement avec la réduction du rapport d'épaisseur, sauf pour $\theta = 0^\circ$, 50° et 60° , nous avons le cas contraire c.-à-d. l'augmentation de la fréquence avec la diminution du rapport d'épaisseur h/H .

On note aussi que la fréquence propre de la poutre en acier sans renforcement est plus élevée que celles des poutres renforcées des deux modèles I et II. Par contre la fréquence propre diminue en général avec l'augmentation de l'angle d'orientation de fibre sauf pour les angles entre 40° et 70° . Le taux de cette diminution est plus visible pour les angles compris entre 0° et 20° pour les deux modèles I et II et en particulier pour le modèle II.

Les Figures 3.8a et 3.8b, montrent que le rapport longueur/épaisseur (L/H) varie de 20 à 40 avec un incrément de 5. Elles montrent aussi que la variation de la première fréquence propre des poutres sandwichs renforcées par matériau composite des deux modèles I et II en fonction des différents rapports d'épaisseur h/H .



(a) Model I



(b) Model II

Fig. 3.8 Fréquences propres de la poutre pour différents L/H et pour des rapports d'épaisseur h/H variant de 0.6 à 1.0

La fréquence propre des poutres diminue avec l'augmentation du rapport longueur/épaisseur (L/H) pour les deux modèles I et II montré dans les figures 3.9a et 3.9b, respectivement. On constate aussi que le rapport de longueur/épaisseur (L/H) a une grande influence sur les fréquences des poutres renforcées par matériau composite d'une manière semblable à celle de la poutre en acier non renforcée.

La première fréquence propre du modèle I (fig. 3.9a) diminue avec la diminution du rapport d'épaisseur (h/H), par contre elle augmente avec diminution du rapport d'épaisseur (h/H) pour le modèle II (fig. 3.9b). Donc le rapport d'épaisseur h/H a un effet sur la fréquence propre des poutres renforcées par matériau composite. Cependant cet effet est plus important pour les rapports plus élevés.

Les modes propres sont représentés par la déflexion normale de la poutre. Les cinq premiers modes pour la poutre en l'acier sans renforcement sont montrés dans la fig. 3.9.

Lorsque le rapport épaisseur augmente, à savoir, la couche composite diminue, la rigidité de la poutre augmente, et par conséquent l'amplitude diminue.

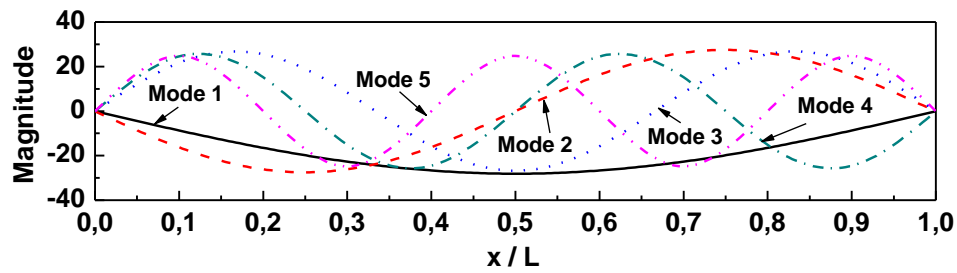
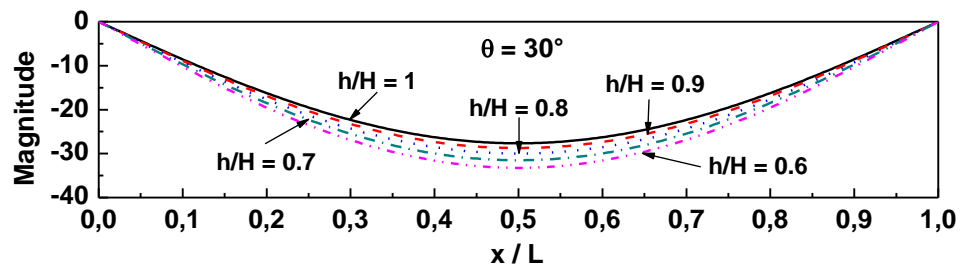


Fig. 3.9 Modes propres de la poutre sans renforcement

La fig. 3.10 montre le premier mode de la poutre renforcée par matériau composite du model I avec un angle d'orientation des fibres ($\theta = 30^\circ$) et des rapports d'épaisseur variant de 0 à 1. Quand le rapport d'épaisseur augmente, c'est à dire, la couche composite diminue, la rigidité de la poutre augmente, et l'amplitude diminue.

Fig. 3.10 Modes propres de la poutre pour différents h/H et pour des rapports d'épaisseur h/H variant de 0.6 à 1.0

III.7 Conclusions

L'analyse des vibrations libres des poutres renforcées par des matériaux composites a été réalisée par une méthode analytique. Les conclusions tirées de la présente étude sont :

- (1) les fréquences propres sont directement proportionnelles au nombre de mode pour les deux modèles I et II.
- (2) la fréquence propre diminue généralement avec la réduction du rapport d'épaisseur.
- (3) la poutre en acier sans renforcement a une fréquence supérieure aux fréquences des deux modèles (model I et II).
- (4) la fréquence propre diminue avec l'augmentation de l'angle d'orientation de fibre.
- (5) la fréquence diminue avec l'augmentation du rapport de longueur/épaisseur.

CHAPITRE IV

Vibration libre des Poutres composites par la MEF

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre la modélisation de poutres renforcée par matériaux composites tient nécessairement compte des aspects de l'analyse dynamique linéaire, de loi de comportement élastique pour matériaux homogènes et isotropes. Dans cette étude, la vibration libre de poutres renforcées par couches composites a été étudiée par l'utilisation de la méthode des éléments finis (FEM).

La poutre est modélisée par des éléments de poutre à 2 nœuds et 4 degrés de liberté. La théorie de poutre d'Euler-Bernoulli est employée pour constituer les matrices d'éléments finis (matrice de rigidité et de masse). A cet effet, un code informatique est développé en utilisant Matlab pour effectuer l'analyse par éléments finis de vibration.

L'analyse paramétrique est réalisée pour étudier les effets de la variation des différents paramètres tels que l'épaisseur des faces, l'épaisseur de l'âme et l'orientation des fibres et le type de matériau isotrope noyau (acier et de mousse) sur les fréquences naturelles de la poutre sont examinés avec différentes conditions aux limites imposées à la poutre.

IV. 2 Equations fondamentales

IV.2.1. Formulation élément poutre d'Euler - Bernoulli

Beaucoup de théories ont été proposées pour l'analyse des poutres stratifiées et sandwiches Fig. 4.1, la théorie la plus simple est celle proposée par d'Euler - Bernoulli.

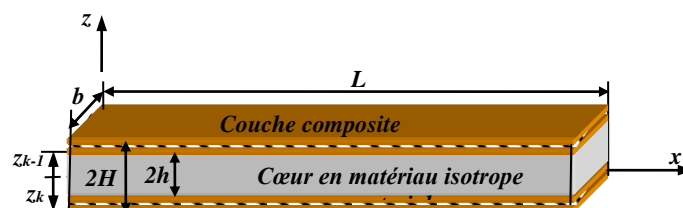


Figure. 4.1 Géométrie de la poutre revêtue en composite

Dans cette théorie, le déplacement en un point arbitraire le long de la poutre peut être exprimé par un déplacement transversal $w(x)$ suivant l'axe z et rotation $\gamma_x(x)$ caractérisant la

rotation autour de l'axe y . Cette approximation simple peut être appliquée aux poutres homogènes et aux poutres multicouches.

Considérons l'élément poutre d'Euler - Bernoulli à deux nœuds (Fig. 4.2).

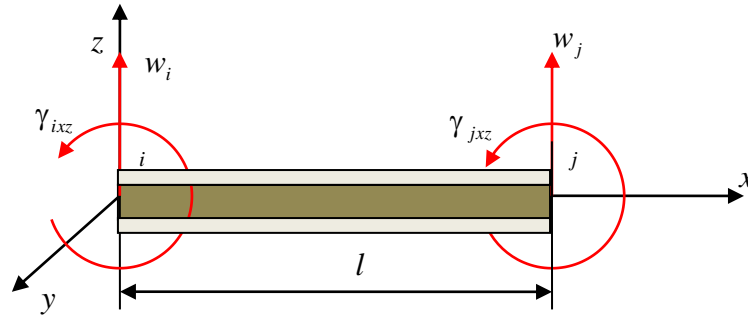


Fig. 4.2 Élément poutre d'Euler - Bernoulli à deux nœuds en coordonnées globales

Les vecteurs déplacements des nœuds gauche et droit sont :

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \gamma_{ixz} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{U_j\} = \begin{Bmatrix} w_j \\ \gamma_{jxz} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

où $w_{i,j}$ = déplacement vertical dans la direction z , et $\gamma_{xz,i,j}$ = rotation autour de l'axe y .

Le vecteur déplacement de l'élément est donné par

$$\{U\}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \gamma_i \\ w_j \\ \gamma_j \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Les forces nodales sont

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ m_i \\ f_j \\ m_j \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

où $f_{i,j}$ et $m_{i,j}$ sont respectivement les forces et moments nodaux.

Le déplacement $w(x, t)$ peut être exprimé par une séparation de variables [41]:

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^n N_j(x)u_j(t), \quad (4.4)$$

Les déplacements de l'élément de poutre représenté à la Fig. 4.2 peuvent être exprimés sous la forme:

$$w^{(e)}(x,t) = N_1 w_i + N_2 \gamma_i + N_3 w_j + N_4 \gamma_j, \quad (4.5)$$

Où N est la matrice des fonctions d'interpolation.

Elle s'exprime en coordonnées globales comme suit[41] :

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, \\ N_2 &= x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \\ N_3 &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, \\ N_4 &= -\frac{x^3}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

Où l est la longueur de l'élément.

L'approximation des déplacements le long de l'élément fini en coordonnées locales (Fig. 4.3) est donnée par la formule :

$$w(\xi,t) = \sum_{j=1}^n N_j(\xi)u_j(t), \quad (4.7)$$

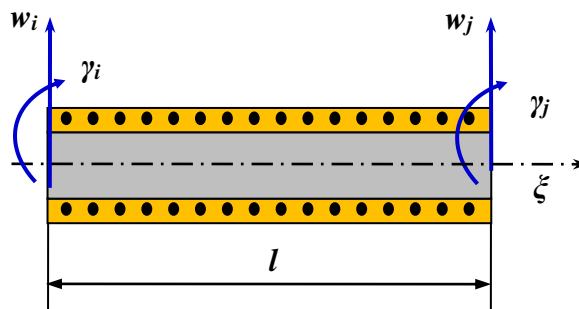


Fig. 4.3 Élément poutre d'Euler Bernoulli en coordonnées locales

Les polynômes de Hermite pour un élément de longueur l en coordonnées locales sont donnés par [38] :

$$\begin{aligned}
 N_w^i &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \\
 N_\theta^i &= \frac{l}{8}(1-\xi)^2(1+\xi) \\
 N_w^j &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \\
 N_\theta^j &= \frac{l}{8}(1+\xi)^2(\xi-1)
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Ces fonctions sont représentées sur la Fig. 4.4.

Les fonctions d'interpolation sont construites sur des éléments de référence. Un élément de référence est un élément de forme géométrique simple (frontière rectiligne), pour lequel l'approximation nodale est construite en suivant la démarche analytique précédente.

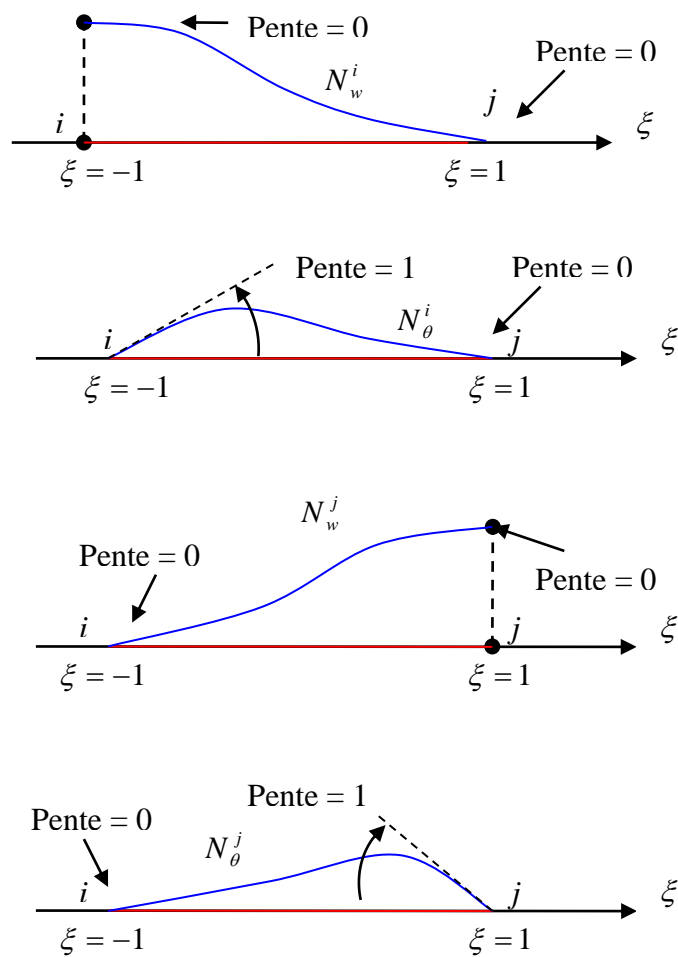


Fig. 4.4 Fonctions de forme pour l'élément poutre à deux nœuds [42]

Ainsi les dérivés des fonctions d'Hermite en coordonnées locales sont:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_w^i}{\partial \xi} &= \frac{3}{4}(\xi^2 - 1) \\
 \frac{\partial N_\theta^i}{\partial \xi} &= \frac{l}{8}(3\xi^2 - 2\xi - 1) \\
 \frac{\partial N_w^j}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(-3\xi^2 + 3) \\
 \frac{\partial N_\theta^j}{\partial \xi} &= \frac{l}{8}(3\xi^2 + 2\xi - 1)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

IV.2.2. Transformation des opérateurs de dérivations:

En connaissant les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées de l'élément de référence, nous pouvons exprimer les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées de l'élément réel [43].

Posons :

$$\frac{\partial N(\xi)}{\partial \xi} = [J] \cdot \frac{\partial N(x)}{\partial x} \tag{4.10}$$

et

$$\frac{\partial^2 N(\xi)}{\partial \xi^2} = [J]^2 \cdot \frac{\partial^2 N(x)}{\partial x^2} \tag{4.11}$$

[J] est la matrice Jacobienne de transformation.

La singularité de [J] en un point de l'élément de référence implique une transformation qui n'est pas Bijective, cette singularité apparaît lorsque l'on déforme beaucoup l'élément de référence.

IV.2.3. Détermination de la matrice de rigidité

L'équation différentielle de vibration libre est donnée par l'équation (3.10) :

$$\rho_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(bD_{II} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \tag{4.12}$$

Dans les expressions (4.12), les coefficients de rigidité de la poutre D_{ij} sont calculés en utilisant [19]

$$D_{11} = b \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K A_{11}^{(k)} [z_k^3 - z_{k-1}^3] \quad (4.13)$$

Où b est la largeur de la poutre et z_{k-1} l'ordonnée de la $k^{\text{ième}}$ couche.

Etant donné que les déformations de la poutre ne sont pas limitées dans les directions transversales, le coefficient de rigidité $A_{ij}^{(k)}$ des couches peut être exprimé par l'ingénieur en tenant compte que les constantes élastiques comme suit :

$$A_{11}^{(k)} = E_x^{(k)} \quad (4.14)$$

$E_x^{(k)}$ est le module de Young de la $k^{\text{ième}}$ couche dans la direction de l'axe de la poutre et ρ_s , sont les densités massiques généralisées du matériau de la poutre.

Dans le cas d'une poutre stratifiée, elles sont données par les formules [3]:

$$\rho_0 = b \sum_{k=1}^K \rho_k [z_k - z_{k-1}] \quad (4.15)$$

où ρ_k est la masse volumique de la couche k .

L'équation (4.12) devient :

$$\ell(U) + f_{ext} = \rho_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(b D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad , \quad (4.16)$$

En vibration libre la force extérieure est nulle $f_{ext} = 0$ d'où

$$\ell(U) = \rho_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(b D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = R(u) = 0 \quad (4.17)$$

où $\rho_s = \rho A$. Si la solution numérique par la méthode des éléments finis est exacte alors le résidu $R(u)$ (reste) est nul.

En utilisant la formulation intégrale de la méthode des résidus pondéré son obtient [43]:

$$W(x) = \int_V \langle \psi \rangle \left(\rho_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(bD_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) dv = 0 \quad (4.18)$$

où $\langle \psi \rangle$ est le coefficient de pondération.

En appliquant la méthode de Galerkin où le coefficient de pondération $\langle \psi \rangle = \langle N \rangle$, alors (4.18) devient :

$$W(x) = \int_0^L bD_{11} \langle N \rangle \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right) dx - m_l \int_0^L \langle N \rangle \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right) dx = 0 \quad (4.19)$$

Substituons l'équation (4.2) dans l'équation (4.19), on obtient :

$$w(x) = \left[\int_0^L \begin{Bmatrix} N_w^i \\ N_\theta^i \\ N_w^j \\ N_\theta^j \end{Bmatrix} bD_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \langle N_w^i \quad N_\theta^i \quad N_w^j \quad N_\theta^j \rangle dx \right] \begin{Bmatrix} w_i \\ \gamma_i \\ w_j \\ \gamma_j \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

$$- \left[m_l \int_0^L \langle N \rangle (N) dx \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} w_i \\ \gamma_i \\ w_j \\ \gamma_j \end{Bmatrix} = 0$$

D'où la matrice de rigidité élémentaire en coordonnées globales est comme suit :

$$k_{ij} = \int_0^L \begin{Bmatrix} N_w^i \\ N_\theta^i \\ N_w^j \\ N_\theta^j \end{Bmatrix} bD_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \langle N_w^i \quad N_\theta^i \quad N_w^j \quad N_\theta^j \rangle dx \quad (4.21)$$

D'où

$$k_{ij} = \int_0^L N_i bD_{11} \frac{\partial^4 N_j}{\partial x^4} dx \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.22)$$

En coordonnées locales :

$$k_{ij} = [J]^{-3} \int_{-1}^1 N''(\xi) [bD_{11}] N''(\xi) d\xi \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.23)$$

Par Intégration numérique, on obtient :

$$k_{ij} = [J]^{-3} \int_{-1}^1 N''(\xi) bD_{11} N''(\xi) d\xi = [J]^{-3} \sum_{i=1}^{NGP} \delta_i N''(\xi_i) bD_{11} N''(\xi_i) \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.24)$$

où ξ et δ sont les coordonnées et poids d'intégration de Gauss, respectivement. Ces valeurs de ces paramètres sont données dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1: Coordonnées et poids d'intégration de Gauss [42]

NGP	ξ	δ
1	0	2
2	$1/\sqrt{3} \quad -1/\sqrt{3}$	1 1
3	$0 \quad \sqrt{3/5} \quad \sqrt{3/5}$	5/9 8/9 5/9
4	-0.8611 -0.339 0.339 0.8611	0.6521 0.6521 0.347 0.347

De cette dernière expression, on peut facilement obtenir l'expression de la matrice de rigidité de l'élément sous forme matricielle [43]:

$$[k]^e = \frac{bD_{11}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

La matrice de masse se déduit alors simplement de la relation (4.20) et s'écrit:

$$m_{ij} = - \int_0^L N_i m_l N_j dx \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.26)$$

D'où on peut tirer l'expression de la matrice de masse en coordonnées locales :

$$m_{ij} = \int_{-1}^1 N_i(\xi)(m_l)N_j(\xi).J d\xi \quad (4.27)$$

A l'aide de l'intégration numérique de Gauss, on obtient :

$$m_{ij} = \sum_{i=1}^{NGP} \delta_i N_i(\xi_i) \left(\frac{m_l l}{2} \right) N_j(\xi_i) \quad (4.28)$$

d'où la matrice de masse élémentaire m^e sous forme matricielle est comme suit [43]:

$$m^e = \frac{m_l l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Après avoir calculé les matrices de rigidité k^e et de masse m^e de tous les éléments de la poutre il est nécessaire de les assembler afin d'obtenir les matrices globales de rigidité K et de masse M de toute la poutre :

$$K = \sum_{e=1}^{N_e} k^e \quad (4.30)$$

$$M = \sum_{e=1}^{N_e} m^e \quad (4.31)$$

Où N_e est le nombre total des éléments de la poutre.

L'équation de la vibration libre non amortie de poutres renforcées par composites peut être exprimée comme suit:

$$M \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + K u_j = 0. \quad (4.32)$$

Si le système vibre dans un mode normal, on obtient un problème de valeur propre en tant que [40]:

$$[[K] - \omega_j^2 [M]] \{\phi\} = \{0\} \quad (4.33)$$

où ω_j est la j -ième fréquence naturelle et ϕ les déplacements nodaux correspondants.

En multipliant l'équation (4.33) par $[M]^{-1}$ on obtient :

$$[[K] \times [M]^{-1} - \omega_j^2 [M] \times [M]^{-1}] \{\phi\} = \{0\} \quad (4.34)$$

Où $[K] \times [M]^{-1} = [A]$ s'appelle noyau du système.

Le vecteur déplacement recherché est sous forme [41]

$$\{\phi(t)\} = q \times \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.35)$$

$$[[A] - \omega_j^2 [I]] q \times \cos(\omega t - \varphi) = \{0\} \quad (4.36)$$

En adoptant la convention d'écriture $\lambda = \omega^2$ on obtient :

$$[[A] - \lambda [I]] q = 0 \quad (4.37)$$

Il s'agit d'un système d'équations homogènes qui admet des solutions non nulles si son déterminant est nul :

$$\det[[A] - \lambda [I]] = 0 \quad (4.38)$$

Après développement [43]

$$\begin{bmatrix} [a_{11} - \lambda] & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nn} - \lambda] \end{bmatrix} = 0 \quad (4.39)$$

Les scalaires $\lambda = \omega^2$ sont ainsi les valeurs propres de la matrice noyau A

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 \lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (4.40)$$

Les racines de l'équation (4.40) sont les valeurs caractéristiques, qui sont égaux aux carrés des fréquences naturelles.

IV.3. Conditions aux limites

Pour étudier l'influence des conditions aux limites de la poutre sur les premières fréquences naturelles, quatre différentes conditions aux limites ont été imposées à la poutre (Fig.3.5): simplement appuyée-simplement appuyée (S-S), encadrée-encadrée (E-E), encadrée -libre (E-L), et encadrée - simplement appuyée (E-S). La prise en compte des conditions aux limites de la poutre dans la méthode des éléments finis est plus simple. Si on suppose que notre poutre est discrétisée en quatre éléments finis ($n_e = 4$) à deux nœuds et deux degré de liberté par nœud (w_i, γ_i) les conditions aux limites sont introduites selon les degrés de liberté de la structures comme indiqué dans la figure 4.5.

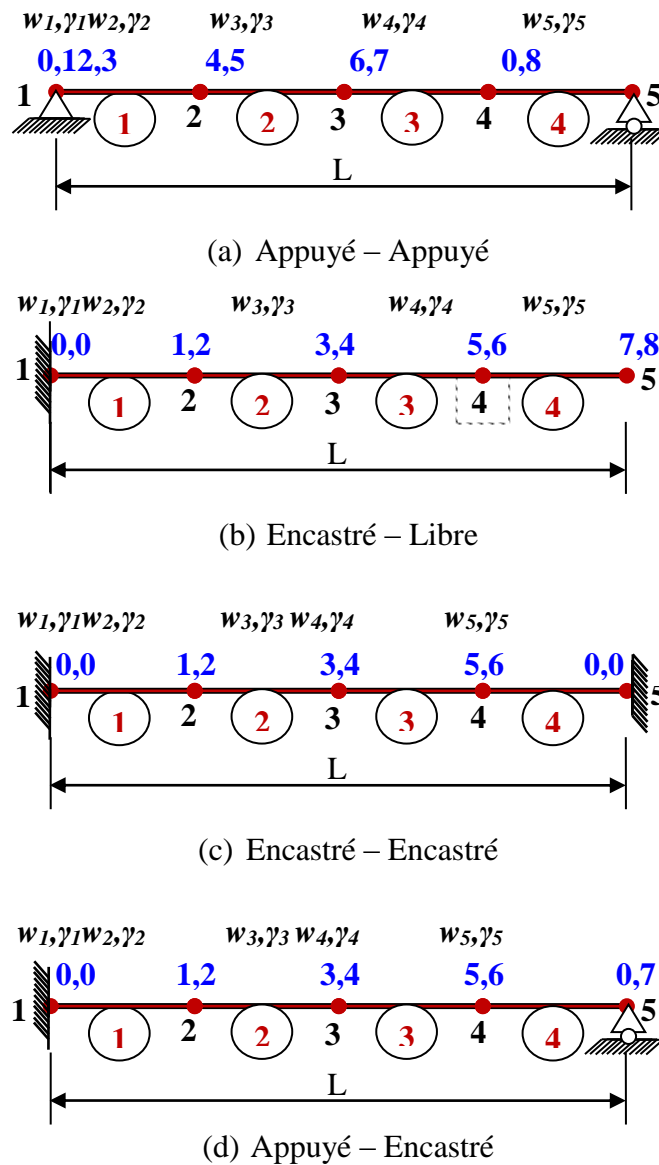


Fig. 4.5 Discretisation en quatre éléments finis à deux nœuds.

IV.4 Application Numérique

Un code numérique a été développé en utilisant MATLAB afin de calculer les fréquences naturelles et les modes propres d'une poutre non amortie renforcée par des couches en composites. Les dimensions de la poutre sont: la longueur, $L = 500$ mm, la largeur $b = 25$ mm, et l'épaisseur $H = 4$ mm. Les propriétés physiques des matériaux pour les couches de renforcement en composite et l'âme sont données dans le tableau 4.2.

Deux modèles de poutres sont utilisés dans cette l'étude, le premier modèle I avec un noyau en acier et le second modèle II avec comme noyau, la mousse de Divinycell H200. Les couches de renforcement (faces) sont faites d'un matériau composite verre / époxy pour les deux modèles.

Tableau 4.2. Propriétés physiques des deux modèles de poutres I et II

Modèle	Couche	Matériau	P [kg/m ³]	E_{11} [GPa]	E_{22} [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}
I	Cœur I	Acier	7850	200	200	77	0.3
II	Cœur II	Mousse	200	0.277	0.277	0.11	0.33
	Face	Verre/Epoxyde	1759	38.6	8.27	4.14	0.26

Des tests de validation sont réalisés en comparant les fréquences naturelles calculées par la méthode analytique et celles trouvées par la méthode numérique (Méthode des éléments finis) pour la poutre sandwich sur deux appuis simples. Les fréquences propres sont calculées analytiquement par l'équation (3.41) :

$$\omega_i = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E_{xx}I}{m_i}} \cong \frac{i^2\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho_s}} \quad i = 1,2,3\dots \quad (4.41)$$

Dans le premier test de validation, la poutre est considérée avec $h/H = 0$ et $\theta = 0^\circ$ et pour les dix premiers modes. A partir de la Fig. 4.6, on peut constater que les fréquences naturelles trouvées par la méthode des éléments finis coïncident bien avec ceux de l'analytique pour un nombre d'éléments supérieur à 50.

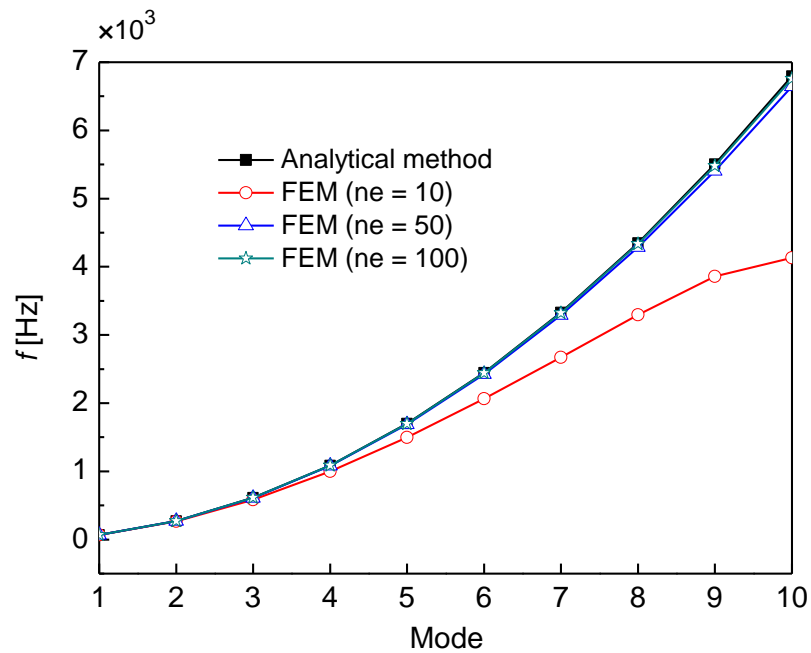


Fig. 4.6 Comparaison des résultats de la MEF et de la méthode analytique pour les dix premiers modes

Une deuxième vérification est réalisée pour le modèle I avec h/H variant de 0 à 1, $\theta = 0^\circ$, et $ne = 100$ (Fig.4.7). On constate une parfaite correspondance entre les résultats numériques et analytiques. Lorsque le nombre d'éléments est assez important, les résultats numériques convergent vers des solutions exactes. Ainsi, le nombre d'éléments finis utilisés dans l'analyse des vibrations sera $ne = 100$.

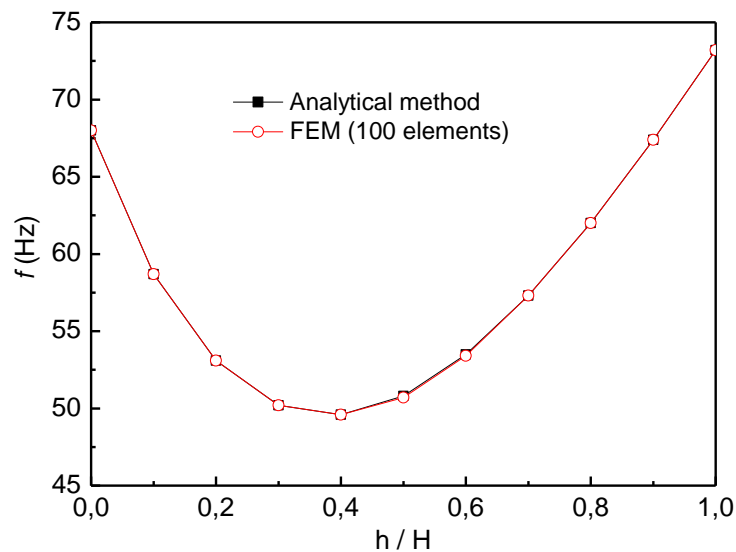
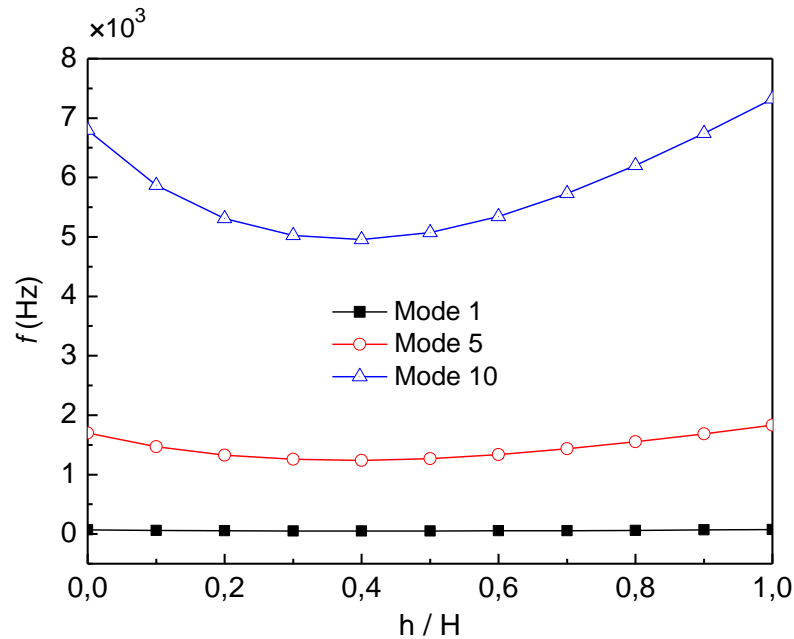


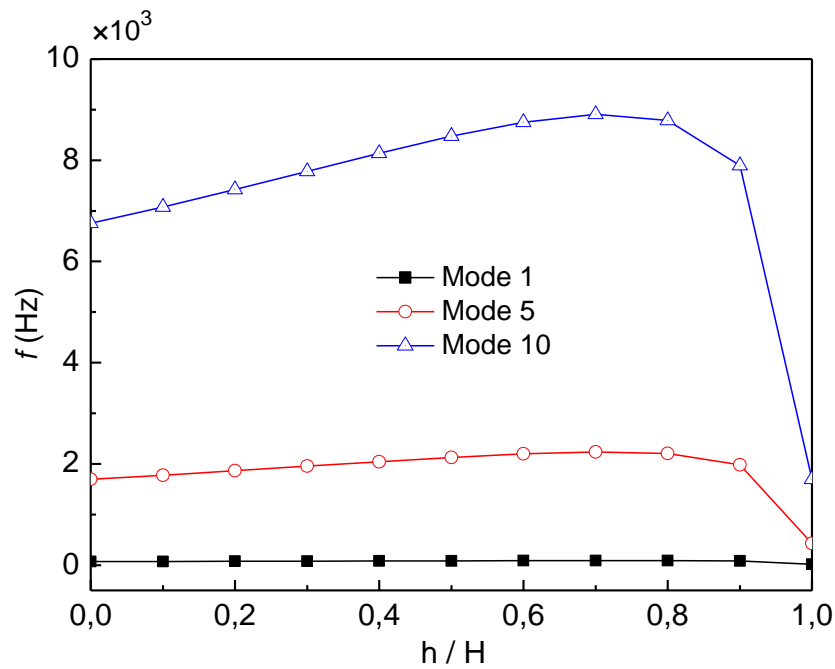
Fig. 4.7 Comparaison des résultats de la MEF et de la méthode analytique pour différents h/H

Les fréquences propres correspondant au mode 1, 5 et 10 sont représentées sur les Fig. 4.8a et 4.8b, pour les deux modèles I et II avec $\theta = 0^\circ$. Comme on peut le voir à partir de des figures 4.8a et 4.8b que les fréquences naturelles sont en fonction du rapport d'épaisseur. Cependant, pour le mode 1, la courbe de fréquence est à peu près horizontale, la fréquence est indépendante du rapport d'épaisseur, relativement par rapport aux modes 5 et 10.

Selon Fig.4.8a, nous constatons que les fréquences naturelles de la poutre entièrement en acier sont presque identiques à celles de la poutre entièrement en composite et ceci pour le mode 1, cependant, pour les modes 5 et 10, il y a une légère différence. Tandis que, une grande différence est constatée entre les fréquences naturelles de la poutre en acier et la poutre de mousse (Fig.4.8b) et ceci est dû à des différences de rigidité des deux matériaux.



(a) Modèle I



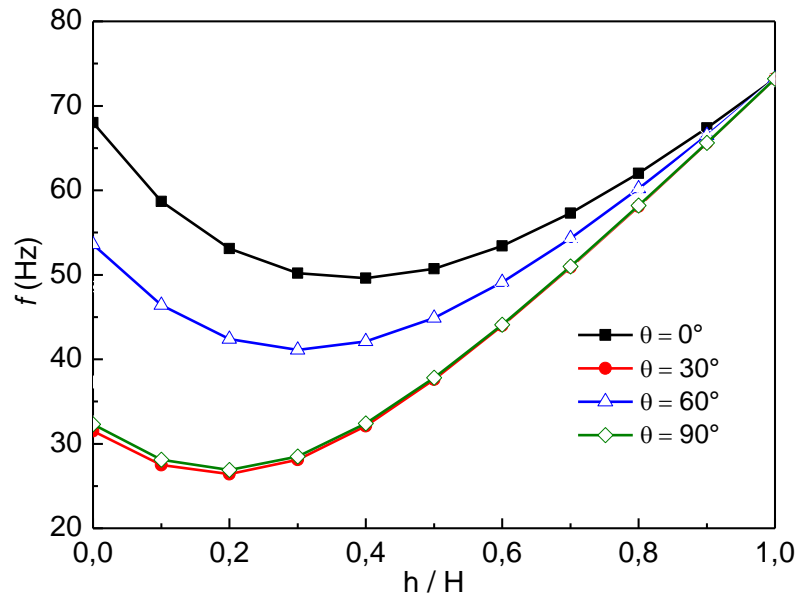
(b) Modèle II

Fig. 4.8 Fréquence naturelle en fonction de (h/H) et (θ)

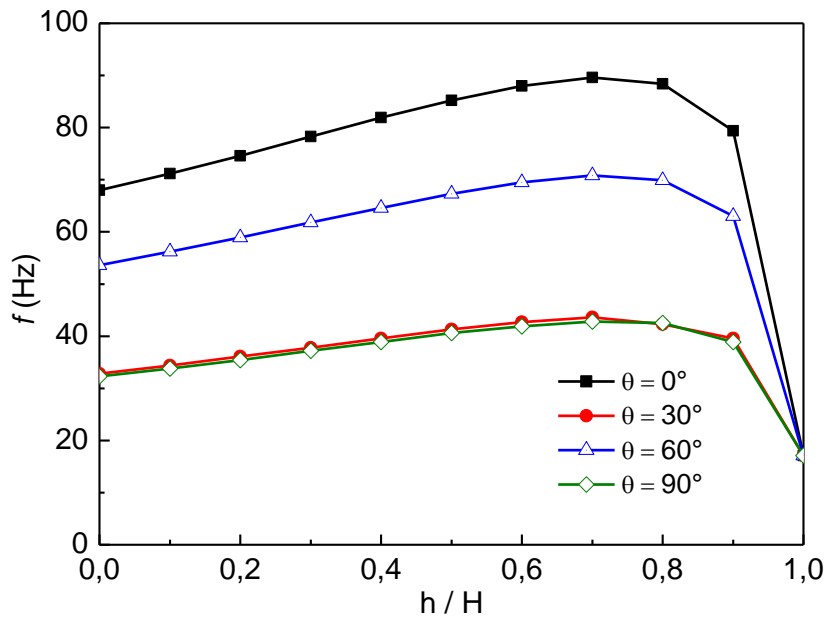
Pour l'analyse qui suit, nous avons supposé que l'angle des fibres de la couche composite varie de 0° à 90° avec un incrément de 30° . Les figures 4.9a et 4.9b montrent que la variation de la première fréquence naturelle de la poutre sandwich en fonction du rapport d'épaisseur (h/H) et l'orientation des fibres (θ).

Une relation linéaire est observée entre la fréquence et le rapport d'épaisseur, pour le modèle I, la relation linéaire est entre $h/H = 0.5$ et 1.0 , et pour le modèle II la relation linéaire est entre $h/H = 0.5$ à 0.7 .

D'autre part, la fréquence augmente avec l'augmentation du rapport d'épaisseur dans ces domaines linéaires. La fréquence maximale est atteinte avec $\theta = 0^\circ$ pour les deux modèles et avec $h/H = 0.2$ et 0.7 pour le modèle I et II, respectivement.



(a) Modèle I



(b) Modèle II

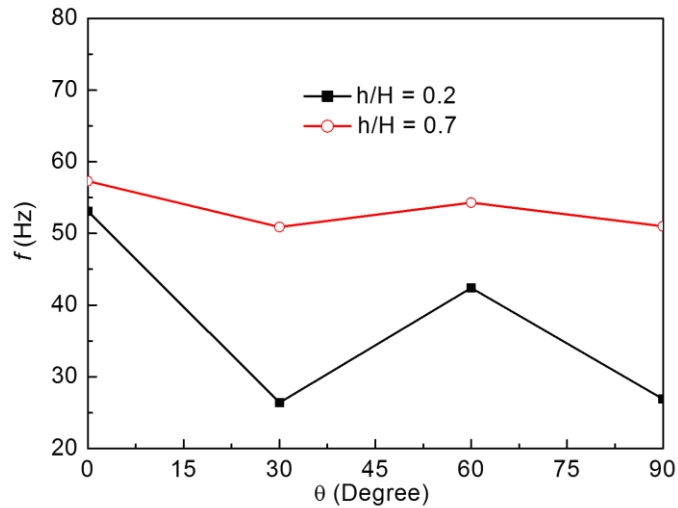
Fig. 4.9 Première fréquence en fonction du (h/H)

La première fréquence naturelle du sandwich pour les deux cas $h/H = 0.2$ et 0.7 , est donnée en fonction de l'angle d'orientation des fibres (θ) pour les deux modèles I et II dans les figures 4.10a et 4.10b, respectivement.

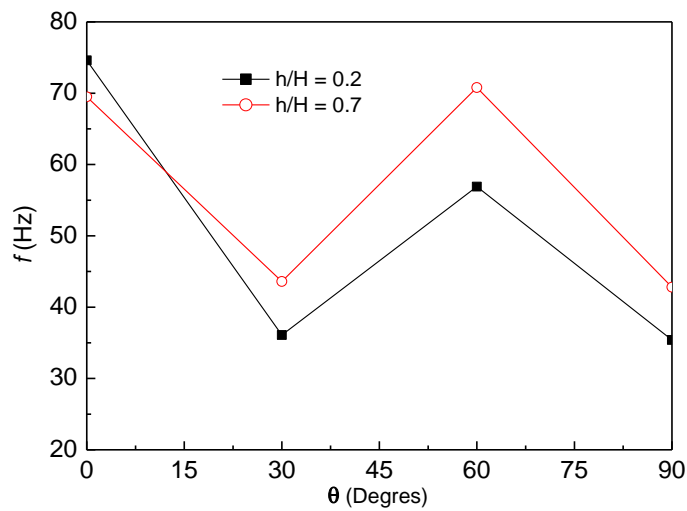
Pour le modèle I (Fig. 4.10a) avec un renforcement de l'ordre de 30% ($h/H = 0.7$), l'effet de l'orientation des fibres sur la fréquence naturelle est faible, cela est dû à la

domination du noyau lourd (l'acier), par contre pour le modèle II (fig. 4.10b), la couche composite est dominant par rapport à la couche centrale (mousse).

Pour la poutre en sandwich avec un rapport épaisseur $h/H = 0,2$, l'effet de l'orientation des fibres sur la fréquence naturelle est plus grand par rapport aux autres valeurs du rapport d'épaisseur (h/H) et cela pour les deux modèles I et II.



(a) Modèle I



(b) Modèle II

Fig. 4.10 Fréquence naturelle en fonction de θ

Les premières fréquences propres de la poutre avec un composite de revêtement ($h/H = 0,25$ et $0,75$) sont calculées et présentées dans le tableau 4.3 pour les deux modèles I et II avec différentes orientations des fibres.

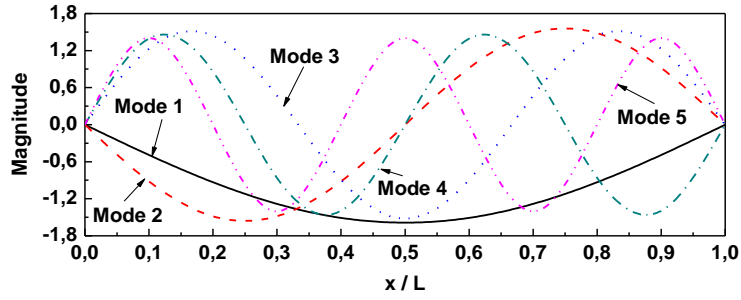
Pour les deux modèles I et II, on peut indiquer que la fréquence de la poutre en sandwich avec l'orientation des fibres $\theta = 0^\circ$ est relativement élevée par rapport aux autres cas. Ceci est expliqué par le fait que l'orientation des fibres à 0° (direction x) fournit une rigidité maximale de la poutre en sandwich. En outre, la valeur maximale de la fréquence naturelle est atteinte aux conditions aux limites encastree-encastree (E-E), et cela est évident.

En comparant les fréquences naturelles de la poutre avec un revêtement composite de $h/H = 0,25$ et $0,75$, on peut conclure que la fréquence maximale est de 201,4 Hz, pour la poutre en sandwich avec une épaisseur rapport $h / H = 0,75$.

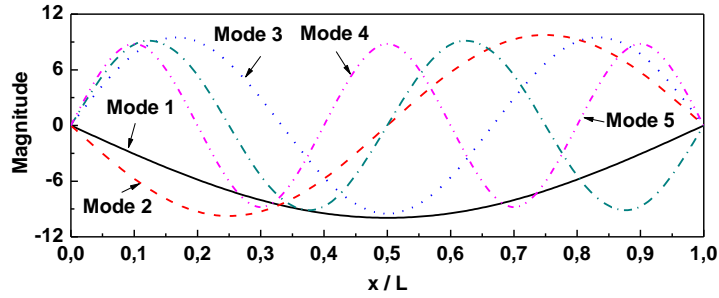
Tableau 4.3.Première fréquence(Hz) de la poutre avec et sans revêtement (renforcement)

Modèle	C.A.L.	Sans renf.	Avec renforcement							
			h/H =0.25				h/H =0.75			
			0°	30°	60°	90°	0°	30°	60°	90°
I	S-S	72.8	51.4	26.9	41.5	27.4	59.2	54.2	56.9	54.2
	E-E	164.8	116.4	61.	94.	62.1	134.1	122.6	128.7	122.8
	E-F	26.1	18.3	9.6	14.8	9.8	21.3	19.4	20.4	19.5
	E-S	113.6	80.2	42.	64.8	42.8	92.4	84.5	88.7	84.6
II	S-S	17.0	76.4	35.4	60.3	36.3	89.	41.6	70.3	42.6
	E-E	38.4	173.3	80.3	136.8	82.3	201.4	94.2	159.2	96.5
	E-L	6.1	27.2	12.6	21.5	12.9	31.9	14.9	25.2	15.3
	E-S	26.5	119.4	55.4	94.3	56.7	138.8	65.	109.8	66.5

Les cinq premières modes de la poutre sans renforcement sont présentés sur les Fig. 4.11 et 4.12 pour les deux modèles I et II. Les figures 4.13 et 4.14 montrent les modes des poutres avec des conditions aux limites simplement appuyée-simplement appuyée (S-S) et encastree-encastree (E-E), respectivement. Étant donné que le modèle II est plus souple que le modèle I, il produit les plus grandes amplitudes.

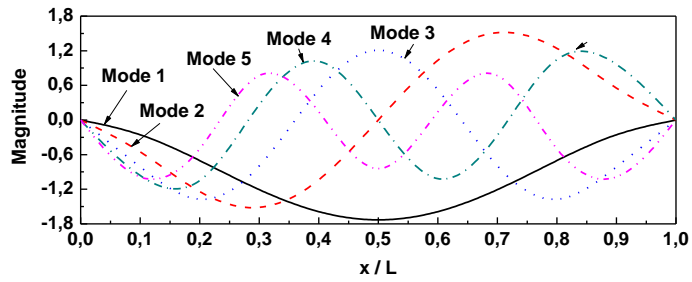


(a) Modèle I

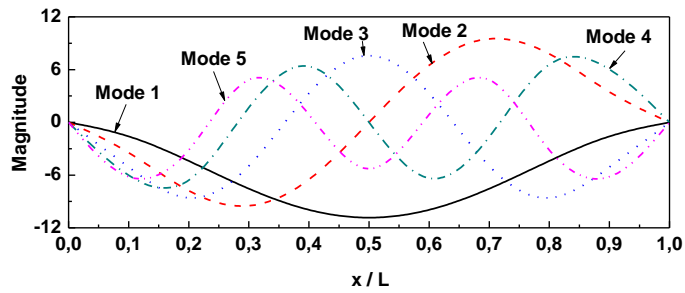


(b) Modèle II

Figure. 4.11 Cinq premiers modes de la poutre C.A.L. S-S



(a) Modèle I

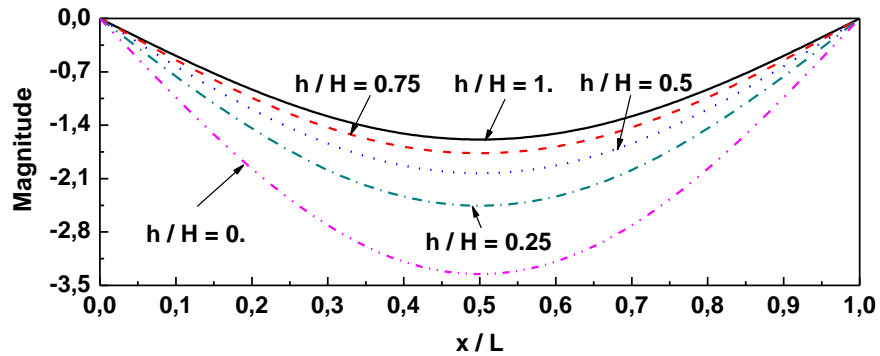


(b) Modèle II

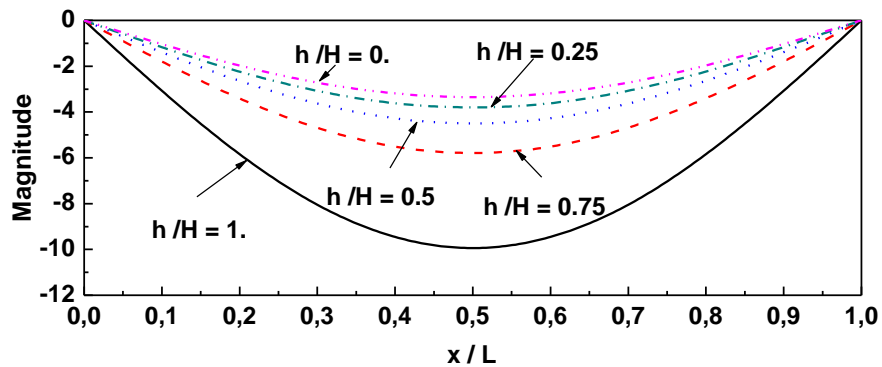
Figure. 4.12 Cinq premiers modes de la poutre C.A.L.E-E

Le premier mode du modèle I et II (S-S) avec et sans revêtement composite (angle de fibres, $\theta = 0^\circ$) avec différentes épaisseurs de la couche composite verre/époxy sont représentés

sur les Fig. 4.12. Pour le modèle I (fig. 4.13a) on constate que lorsque le rapport d'épaisseur augmente (l'épaisseur de la couche composite diminue), à savoir la rigidité du sandwich augmente, et donc l'amplitude diminue. Cela est dû au fait que dans le modèle I, la raideur de la couche d'âme est supérieure à celle de la couche de revêtement. Cependant, pour le modèle II (fig. 4.13b), il se trouve que l'effet inverse se produit parce que la rigidité du sandwich diminue avec le taux d'augmentation d'épaisseur.



(a) Modèle II



(b) Modèle II

Fig. 4.13 Modes propres de la poutre renforcée par matériaux composites

Comme on le voit d'après les résultats, il est évident que le mode et la fréquence des formes naturelles de la poutre avec la couche composite de revêtement peut être contrôlée en choisissant l'orientation des fibres proprement, l'épaisseur du stratifié et les conditions aux limites imposées à la poutre en sandwich.

IV.5. Conclusions

Grâce au développement rapide de l'informatique, la simulation numérique par la méthode des éléments finis des poutres renforcées par matériaux composites de propriétés complexes, est

devenue un outil indispensable. Dans cette étude, l'analyse des vibrations libres de la poutre renforcée par matériau composite a été étudiée numériquement par la méthode des éléments finis et vérifiée la méthode analytique du chapitre 3.

Les résultats de ce chapitre mènent aux conclusions suivantes :

- La méthode de la puissance utilisée dans la méthode des éléments finis pour le calcul des pulsations et modes propres, donne de très bons résultats par rapport à la méthode analytique.
- la fréquence naturelle augmente généralement avec l'augmentation du rapport d'épaisseur,
- lorsque la rigidité des couches de surface est supérieure à celle de la couche de base, une relation linéaire est observée entre la fréquence et le rapport entre l'épaisseur et l'amplitude du mode augmente lorsque le rapport d'épaisseur augmente,
- les fréquences sont plus grandes avec une orientation des fibres de 0° , et ceci pour toute épaisseur de la couche de renfort, Ceci est expliqué par le fait que les fibres sont de la direction de la poutre en sandwich,
- les conditions aux limites encastées- encastée (E-E) donnent la valeur maximale de la fréquence naturelle.

CHAPITRE V

Vibration des poutres renforcées sous sollicitations dynamiques

V.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une étude analytique du comportement dynamique d'une poutre sur deux appuis simple, excitée par une force ponctuelle constante en mouvement. La résolution de l'équation différentielle du mouvement est obtenue, utiliser la méthode modale et l'intégrale de Duhamel. L'objectif de ce chapitre est de déterminer les différents paramètres dynamiques de la poutre et d'étudier l'influence de la vitesse et du type de chargement sur ces paramètres.

V.2 Modèle théorique

La poutre sandwich est formée par un noyau en aluminium (matériau isotrope) et des peaux en matériau composite de carbone-époxy (matériau anisotrope) (Fig. 5.1). Les dimensions sont la longueur (L), la largeur (b), l'épaisseur ($2H$), et les deux feuilles de composite ont une épaisseur de ($H - h$). La poutre simplement supportée est soumise à l'action d'une force $F(x, t)$ ponctuelle mobile avec une vitesse v .

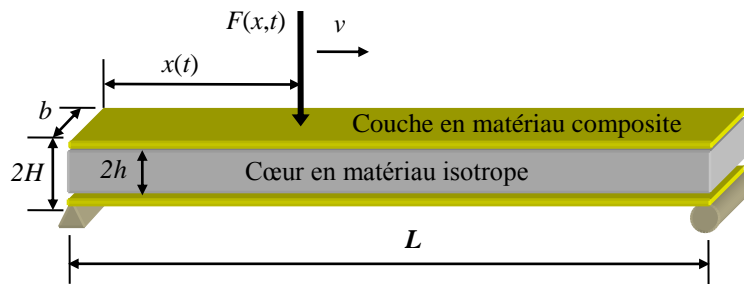


Fig.5.1 Poutre sur deux appuis simples, excitée par une force en mouvement.

L'équation différentielle régissant la vibration des poutres avec des couches composites est représentée comme suit [8]:

$$(E_{xx}I)_{\acute{e}q} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_l)_{\acute{e}q} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t), \quad (5.1)$$

où $w(x, t)$ représente le déplacement transversal de la poutre, $(E_{xx}I)_{\acute{e}q}$ la rigidité équivalente, donnée par l'équation (3.13), $(m_l)_{\acute{e}q}$ est la masse équivalente par unité de longueur donnée par l'équation (3.26).

La force appliquée sur la poutre sandwich est sous la forme [8]:

$$F(x, t) = F_0 \delta(x - \bar{x}) \quad (5.2)$$

F_0 est la force qui se déplace à une vitesse v constante le long de la poutre et δ est la fonction de Dirac :

$$\delta(x - \bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \bar{x} \\ 1 & \text{si } x = \bar{x} \end{cases} \quad 0 \leq \bar{x} \leq L$$

Pour résoudre l'équation (5.1), nous avons utilisé la méthode modale. Cette méthode est basée sur les résultats de l'analyse linéaire modale qui consiste à exprimer la réponse dynamique sous forme de séries de modes propres. L'efficacité de cette méthode est bonne pour autant que les modes fondamentaux soient dominants dans la réponse. La réponse dynamique est exprimée par une série de modes propres [31] :

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j(x) q_j(t) \quad (5.3)$$

La relation (5.1) s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^{\infty} (E_{xx} I)_{\text{éq}} \frac{\partial^4 N_j}{\partial x^4} q_j + (m_l)_{\text{éq}} N_j \frac{\partial^2 q_j}{\partial t^2} = F \delta(x - \bar{x}) \quad (5.4)$$

L'orthogonalité des modes conduit à:

$$\frac{\partial^2 q_j}{\partial t^2} + \omega_j^2 q_j = F \times \delta(x - \bar{x}) = F \times N_j(\bar{x}) = P_j(t) \quad (5.5)$$

Si le système possède un amortissement, l'équation (5.5) peut se mettre sous la forme [2] :

$$\frac{\partial^2 q_j}{\partial t^2} + 2\xi_j \omega_j \frac{\partial q_j}{\partial t} + \omega_j^2 q_j = P_j(t) \quad \forall t \quad (5.6)$$

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_j\dot{q} + \omega_j^2q = p(\tau) \quad \forall t \geq \tau \quad (5.7)$$

$\tau = L/v$ (Temps nécessaire pour parcourir toute la poutre)

Avec les conditions initiales $t = 0$

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_j\dot{q} + \omega_j^2q = 0 \quad (5.8)$$

Cette équation possède la solution suivante [5] :

$$q_1(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[q_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\dot{q}_0 + q_0 \xi \omega_n}{\omega_D} \right) \sin(\omega_D t) \right] \quad (5.9)$$

avec

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (5.10)$$

La solution de (5.7) s'écrit [5] :

$$q_2(t) = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \quad (5.11)$$

ou encore :

$$q_2(t) = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{\xi\omega_n \tau} (\sin(\omega_D t) \cos(\omega_D \tau) - \cos(\omega_D t) \sin(\omega_D \tau)) d\tau \quad (5.13)$$

Cette intégrale est connue sous le nom de l'intégrale de Convolution ou de Duhamel.

La solution finale est obtenue par superposition des solutions :

$$q(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[q_0 \cos(\omega_D t) + \frac{\dot{q}_0 + q_0 \xi \omega_n}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right] + \frac{1}{\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{\xi\omega_n \tau} (\sin(\omega_D t) \cos(\omega_D \tau) - \cos(\omega_D t) \sin(\omega_D \tau)) d\tau \quad (5.14)$$

Dans le cas d'une poutre sur deux appuis non amortie, la force nodale est :

$$P_j(t) = F \times N_j(\bar{x}) = F \sqrt{\frac{2}{(m_l)_{\acute{e}q} L}} \sin\left(\frac{j\pi\bar{x}}{L}\right) = F \sqrt{\frac{2}{(m_l)_{\acute{e}q} L}} \sin\left(\frac{j\pi.v.t}{L}\right) \quad (5.15)$$

$$\text{où } \Omega_j = \frac{j\pi.v}{L} \text{ et } \Omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right).v$$

Dans le cas de résonance $\omega_1 = \Omega_1$ alors la vitesse critique est comme suit :

$$v_{cr} = \left(\frac{\pi}{L}\right) \sqrt{\frac{(E_{xx}I)_{\acute{e}q}}{(m_l)_{\acute{e}q}}} \quad (5.16)$$

L'équation modale (5.5) devient :

$$\frac{\partial^2 q_j}{\partial t^2} + \omega_j^2 q_j = F \sqrt{\frac{2}{(m_l)_{\acute{e}q} L}} \sin(\Omega_j t) \quad (5.17)$$

En substituant $\xi_j = 0$ dans l'équation (5.14) on obtient :

$$q_j(t) = \underbrace{\frac{1}{\omega_j} \int_0^t p(\tau) \sin(\omega_j(t-\tau)) d\tau}_{q_{1j}} + \underbrace{\left[q_{j0} \cos(\omega_j t) + \left(\frac{\dot{q}_{j0}}{\omega_j}\right) \sin(\omega_j t) \right]}_{q_{2j}}$$

Où

$$q_{1j}(t) = \frac{1}{\omega_j} \int_0^t p(\tau) \sin(\omega_j(t-\tau)) d\tau = \frac{1}{\omega_j} F \sqrt{\frac{2}{(m_l)_{\acute{e}q} L}} \int_0^t \sin(\Omega_j \tau) \sin(\omega_j(t-\tau)) d\tau$$

En développant cette intégrale [1] on aura :

$$\int_0^t \sin(\Omega_j \tau) \sin(\omega_j(t-\tau)) d\tau = \frac{1}{(\omega_j^2 - \Omega_j^2)} \left[\omega_j \sin(\Omega_j t) - \Omega_j \sin(\omega_j t) \right]$$

donc

$$q_{1j}(t) = F \sqrt{\frac{2}{(m_l)_{\acute{e}q}} L} \frac{1}{(\omega_j^2 - \Omega_j^2)} \left[\sin(\Omega_j t) - \frac{\Omega_j}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \quad (5.18)$$

d'où

$$q_j(t) = F \sqrt{\frac{2}{(m_l)_{\acute{e}q}} L} \frac{1}{(\omega_j^2 - \Omega_j^2)} \left[\sin(\Omega_j t) - \frac{\Omega_j}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] + \left[q_{j0} \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{q}_{j0}}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \quad (5.19)$$

Si on considère que la poutre est initialement au repos : $q_{j0} = \dot{q}_{j0} = 0$,

Pour $0 \leq t \leq \frac{L}{v} = \tau$:

$$q_j(t) = \sqrt{\frac{2}{(m_l)_{\acute{e}q}} L} \frac{F}{(\omega_j^2 - \Omega_j^2)} \left[\sin(\Omega_j t) - \frac{\Omega_j}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \quad (5.20)$$

En substituant dans (3.48), les équations (3.44) et (3.69) on obtient l'expression du déplacement :

$$w(x, t) = \frac{2F}{(m_l)_{\acute{e}q}} L \sum_{j=1}^N \frac{1}{(\omega_j^2 - \Omega_j^2)} \left[\sin(\Omega_j t) - \frac{\Omega_j}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (5.21)$$

Pour $t \geq \frac{L}{v} = \tau$:

$$q_j(t) = \left[q_j(\tau) \cos(\omega_j(t - \tau)) + \left(\frac{\dot{q}_j(\tau)}{\omega_j}\right) \sin(\omega_j(t - \tau)) \right] \quad (5.22)$$

d'où

$$w(x, t) = \sqrt{\frac{2}{(m_l)_{\acute{e}q}} L} \sum_{j=1}^N \left[q_j(\tau) \cos(\omega_j(t - \tau)) + \left(\frac{\dot{q}_j(\tau)}{\omega_j}\right) \sin(\omega_j(t - \tau)) \right] \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (5.23a)$$

Avec

$$q_j(\tau) = \sqrt{\frac{2}{(m_l)_{\acute{e}q} L}} \cdot \frac{F}{(\omega_j^2 - \Omega_j^2)} \left[\sin(\Omega_j \tau) - \frac{\Omega_j}{\omega_j} \sin(\omega_j \tau) \right]$$

$$\dot{q}_j(\tau) = \sqrt{\frac{2}{(m_l)_{\acute{e}q} L}} \frac{F \Omega_j}{(\omega_j^2 - \Omega_j^2)} [\cos(\Omega_j \tau) - \cos(\omega_j \tau)]$$

on obtient :

$$w(x, t) = \frac{2F}{(m_l)_{\acute{e}q} L} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_j (\omega_j^2 - \Omega_j^2)} \left[(\omega_j \sin(\Omega_j \tau) - \Omega_j \sin(\omega_j \tau)) \cos(\omega_j (t - \tau)) \right. \\ \left. + (\Omega_j \cos(\Omega_j \tau) - \omega_j \cos(\omega_j \tau)) \sin(\omega_j (t - \tau)) \right] \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (5.23b)$$

V.3 Facteur d'Amplification Dynamique (FAD):

Nous considérons que la poutre non amortie sur appuis simples soumise à la sollicitation d'une force constante ponctuelle mobile, le facteur d'amplification dynamique est donné par :

$$FAD = w_{DY} / w_{ST}, \quad (5.24)$$

où w_{DY} et w_{ST} sont les flèches dynamique et statique.

La flèche statique maximale est donnée par [7] :

$$w_{ST} = \frac{F_0 l^3}{48 D_{11}}$$

La flèche dynamique correspondant à un seul mode au centre de la poutre $x = L/2$, donnée par :

$$w_1(L/2, t) = \frac{2F}{(m_l)_{\acute{e}q} L} \frac{1}{(\omega_1^2 - \Omega_1^2)} \left[\sin(\Omega_1 t) - \frac{\Omega_1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] \quad (5.25)$$

d'où

$$F.A.D = \frac{\frac{2F}{(m_1)_{\acute{e}q}} \frac{1}{L (\omega_1^2 - \Omega_1^2)} \left[\sin(\Omega_1 t) - \frac{\Omega_1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right]}{FL^3 / 48(E_{xx} I)_{\acute{e}q}} \quad (5.26)$$

V.4 Application numérique

Un code informatique a été développé en utilisant MATLAB afin de calculer la réponse dynamique de la poutre renforcée par couches composites sous des charges en mouvement.

Les dimensions utilisées du modèle de poutre sont tels que: longueur $L = 0.5$ m, largeur $b = 0.025$ m, l'épaisseur $H = 0.004$ m, avec les propriétés mécaniques de l'aluminium: module d'élasticité $E_c = 70$ GPa, la masse volumique, $\rho_c = 2800$ kg/m³, et le coefficient de Poisson, $\nu = 0.29$. Les propriétés mécaniques du carbone-époxy sont les suivants: $E_{11} = 147$ GPa, $E_{22} = 9$ GPa, $G_{12} = 5$ GPa, $\rho_f = 1580$ kg/m³ et $\nu = 0.3$.

Cinq configurations de la poutre sont considérés dans cette étude, une poutre complètement en aluminium, trois poutres renforcées avec différents rapport d'épaisseur et une poutre complètement en composite. Ainsi, l'épaisseur de l'âme en aluminium prend la valeur de $h=4, 3, 2, 1$ et 0 mm.

V.4.1 Vibration libre

Dans la vibration libre, le taux d'amortissement et de la force sont nulles. Le tableau 5.1 correspond à la première fréquence naturelle et à la vitesse critique de la poutre avec des configurations différentes, le rapport entre l'épaisseur varie (h / H), de 0.0 à 1.0 .

La poutre renforcée avec une épaisseur rapport $h / H = 0,75$ donne la plus petite fréquence naturelle. La fréquence naturelle augmente avec l'augmentation de l'épaisseur de la couche composite. On peut voir que la vitesse critique de la poutre avec un rapport d'épaisseur de $0,75, 0,50$ et $0,25$, a une augmentation d'environ $35,4, 58,5$ et $75,8\%$, respectivement par rapport à celui de l'aluminium. Pour la poutre en composite l'incrément de vitesse est d'environ $92,91\%$.

Tableau 5.1 Premières fréquences naturelles et vitesse critique pour différentes h/H

Configuration de la poutre	Rapport d'épaisseur h/H	Fréquence naturelle (Hz)	Vitesse critique (m/s)
Poutre en aluminium	1.0	72.6	36.30
Poutre renforcée avec $\theta = 0^\circ$	0.75	98.3	49.15
	0.50	115	57.50
	0.25	128	64.00
Poutre en composite $\theta = 0^\circ$	0.0	140	70.00

Les fréquences naturelles et les vitesses critiques de la poutre renforcée avec un rapport d'épaisseur, $h / H = 0,75$ et l'orientation des fibres de la couche composite varie de $\theta = 0^\circ$ à 90° avec un incrément de 30° sont calculées dans le tableau 5.2. On peut voir que la fréquence propre dépend de l'orientation des fibres. L'orientation des fibres à 0° donne la plus grande fréquence naturelle impliquant que la poutre est moins flexible.

Tableau 5.2 Première fréquence naturelle et vitesse critique de la poutre pour différents θ

Configuration de la poutre	Orientation des fibres	Fréquence naturelle (Hz)	Vitesse critique (m/s)
Poutre renforcée $h/H = 0.75$	0°	98.3	49.15
	30°	54.2	27.1
	60°	67.9	33.95
	90°	54.5	27.25

Le tableau 5.3 présente la première fréquence naturelle et la vitesse critique de la poutre pour différent rapport longueur-épaisseur L/H . La fréquence naturelle de la poutre renforcée avec $L/H=150$ est le plus petit que les autres. On voit que, pour la poutre renforcée, la vitesse critique et la fréquence propre diminue avec l'augmentation du rapport L/H . Il est évident que, la flexibilité augmente avec l'augmentation de la longueur de la poutre renforcée.

Tableau 5.3 Première fréquence naturelle et vitesse critique de la poutre pour différents L/H

Configuration de la poutre	Rapport L/H	Fréquence naturelle (Hz)	Vitesse critique (m/s)
Poutre avec $\theta = 0^\circ$ $h/H = 0.75$	75	273	81.90
	100	154	61.60
	125	98.3	49.15
	150	68.3	40.98

V.4.2 Vibration forcée

Le processus de calcul est fait par trois boucles imbriquées :

- La première boucle est celle des pas de temps Δt , le choix du pas du temps est important pour la convergence des calculs.
- La deuxième boucle est pour les Δx et enfin
- la troisième boucle pour les différents modes.

Les résultats présentés dans cette étude, converge pour un nombre de mode inférieur à dix avec une tolérance de 1.10^{-3} .

Le critère de la convergence utilisé est le suivant :

$$\frac{\max(|w_j - w_{j-1}|)}{\max(|w_j|)} \leq \varepsilon \quad (5.27)$$

où w_j vecteur déplacement de la poutre au pas du temps courant.

V.4.2.1 Influence de la vitesse

Pour la vibration forcée, la poutre est sous l'action de la force en mouvement, $F = 100$ N à une vitesse constante. La flèche dynamique de la poutre renforcée est calculée au centre de la poutre. Dans la Fig. 5.2 les déplacements dynamiques sont en fonction des différentes vitesses de déplacement de la forces, et avec un rapport d'épaisseur, $h/H = 0.75$ et une orientation des fibres, $\theta=0^\circ$. Il est clair que la vitesse de la charge mobile a un effet significatif sur la réponse dynamique de la poutre renforcée.

En vibration libre la réponse dynamique non amorti ($\xi = 0$) a une forme d'oscillation avec une amplitude constante. La période d'oscillation est égale à la première période naturelle de la poutre, à savoir pour $v=30$ m/s, on obtient $v/v_{cr}=30/49.15= 0.6$, cette valeur se trouve dans Fig.5.2.

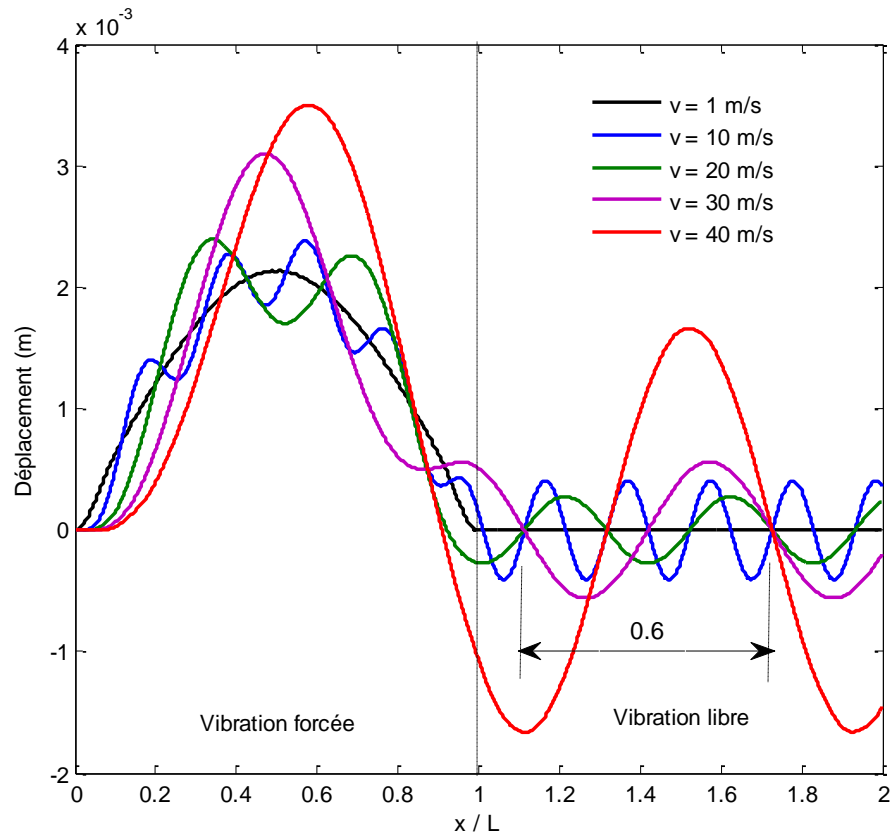


Fig. 5.2 Déplacement dynamique en fonction de la position de la charge et pour différentes vitesses de la charge roulante

V.4.2.2 Influence de l'amortissement

La Figure 5.3 illustre la réponse de la déflexion amortie de la poutre renforcée pour la vitesse de la charge $v=20$ m/s. Le déplacement dynamique de la poutre est calculé pour différents taux d'amortissement $\xi = 0, 0.02, 0.04$ et 0.06 . Il est évident que les déplacements dynamiques diminuent avec l'augmentation du coefficient d'amortissement.

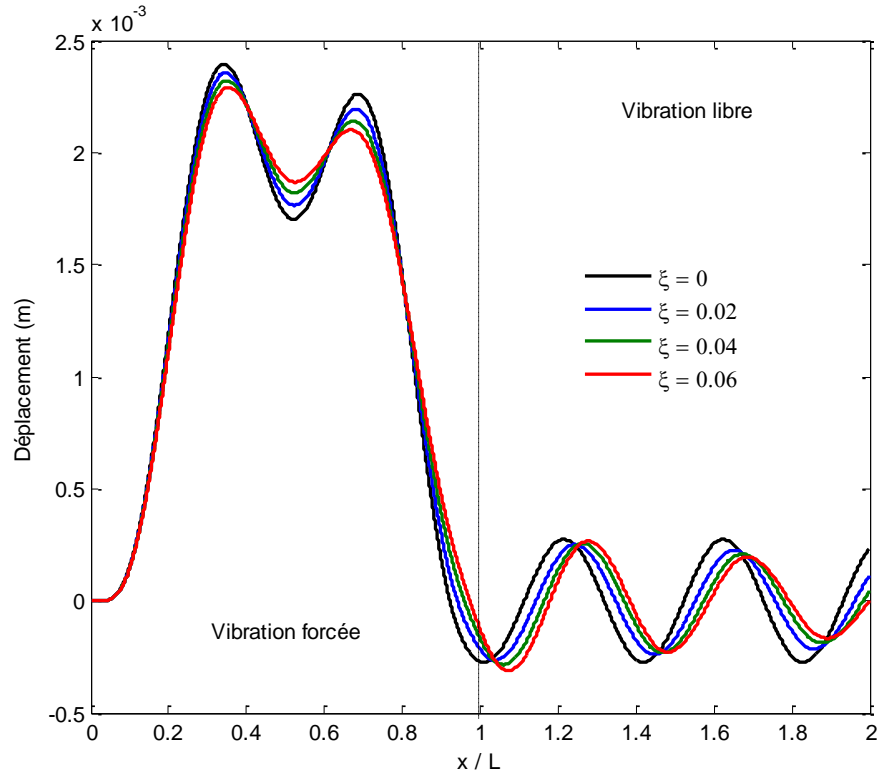


Fig. 5.3 Déplacement dynamique en fonction de la position de la charge et pour différents coefficient d'amortissement

V.4.2.3 Influence de l'orientation des fibres

Pour l'analyse de l'effet de l'orientation des fibres sur le comportement dynamique de la poutre, avec un rapport $h/H = 0,75$, et vitesse de la charge $v = 20$ m/s, l'orientation des fibres de la couche composite varie de 0° à 90° avec un incrément de 30° . Comme il ressort de la Fig. 5.4, la déformation dynamique est directement liée à l'orientation des fibres. L'orientation des fibres 0° donne le plus petit déplacement dynamique impliquant que la poutre est moins flexible. La valeur maximale du déplacement dynamique pour $x = 0.55L = 11$ mm.

La vitesse critique est la vitesse à laquelle le maximum du facteur d'amplification dynamique (FAD) est atteint. La figure 5.5 montre le facteur d'agrandissement dynamique de la poutre en fonction de la vitesse de charge avec un rapport $h/H=0.75$ pour les différentes orientations des fibres.

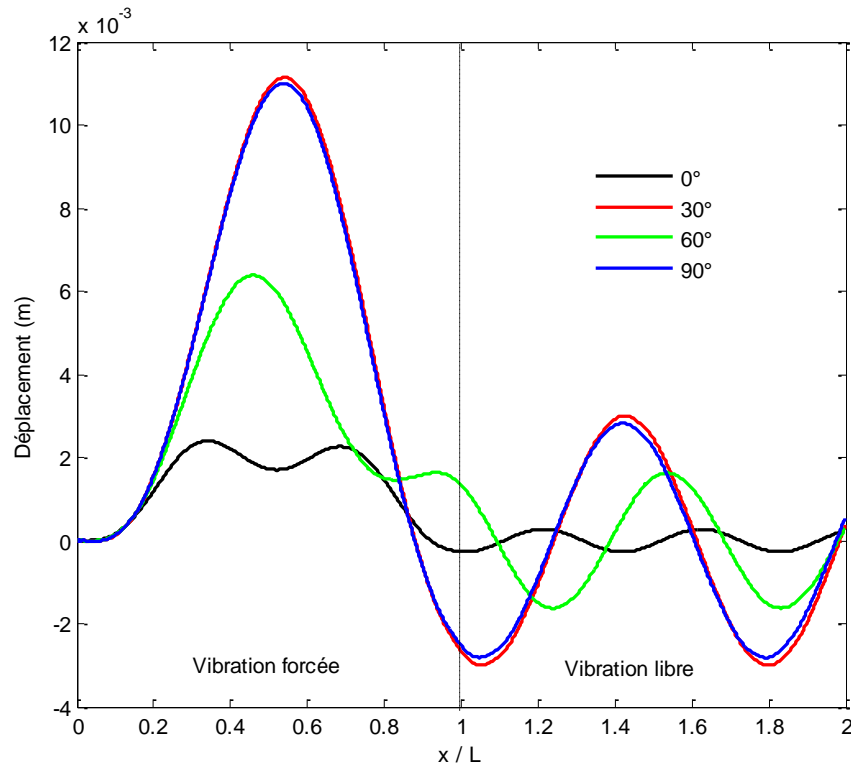


Fig. 5.4 Déplacement dynamique en fonction de la position de la charge et pour différents orientations des fibres

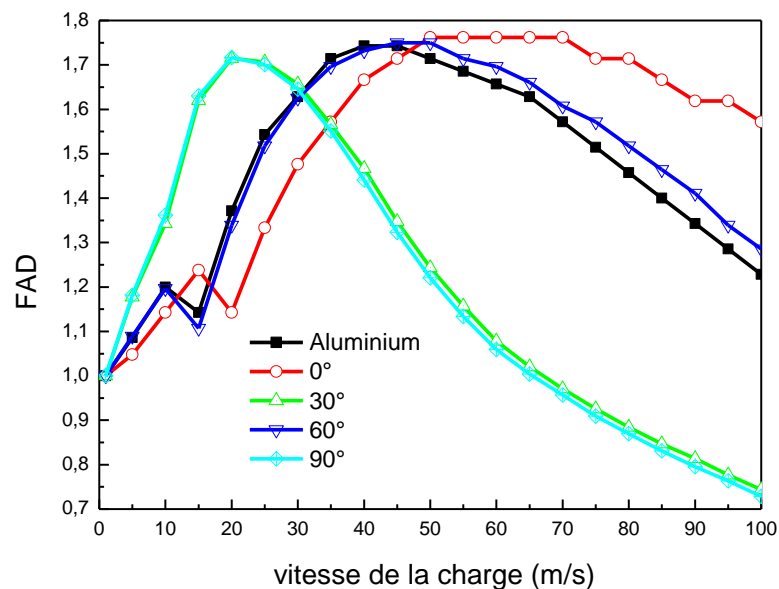


Fig. 5.5 FAD en fonction de la vitesse de la charge et pour différents orientation des fibres

Si la vitesse de charge est inférieure à la vitesse critique, le FAD augmente lorsque la vitesse de la charge augmente, mais, si $v > v_{cr}$, le FAD diminue. La poutre renforcée avec 0° , 30° , 60°

et 90° à la vitesse critique de 50, 20, 45 et 20 m/s, respectivement. La valeur maximale du facteur d'amplification dynamique est de l'ordre de 1,76 pour 0° à vitesse critique $v_{cr}=50$ m/s et la plus petite valeur de FAD est de 1,71 pour 90° et 30° à $v_{cr}=20$ m/s. Si $v > v_{cr}$, le facteur d'amplification dynamique de la poutre à 0° est plus grande que les autres.

V.4.2.4 Influence du rapport des épaisseurs h/H

Les cinq différents configurations de la poutre sont définis par le rapport d'épaisseur, poutre en aluminium, poutres renforcées en composite et poutre en composite avec l'orientation des fibres $\theta=0^\circ$ et ils sont considérés dans les figures. 5.6 et 5.7. L'effet du rapport de l'épaisseur de sur le déplacement dynamique de la poutre $v = 20$ m/s, est représentée sur la Fig. 5.6. Il est montré que la poutre la plus renforcée par couche composite, donne la plus petite déflexion dynamique ce qui donne la poutre la moins flexible.

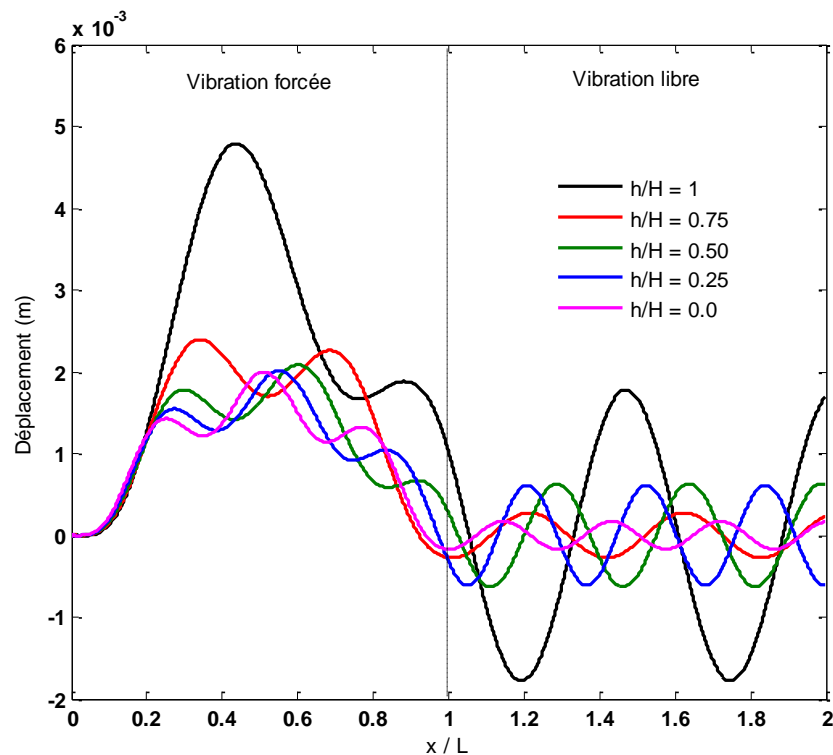


Fig. 5.6 Déplacement dynamique en fonction de la position de la charge et pour différents rapport h/H

La figure 5.7 présente la relation entre la vitesse de la charge mobile et le FAD, pour différentes valeurs du rapport de l'épaisseur h/H . On voit sur la Fig. 5.7 que la vitesse des

charges en mouvement, et le rapport d'épaisseur ont un effet important sur le FAD de la poutre. La valeur maximale du FAD est 1.76 pour la poutre renforcée avec un rapport d'épaisseur, $h/H=0.75$. Cependant, la configuration avec $h/H=0.25$ produit une valeur minimale de $FAD=1.7$. Si la vitesse de la charge est inférieure à la vitesse critique, le FAD augmente avec l'augmentation du rapport de l'épaisseur h/H , sinon, le FAD est presque constante.

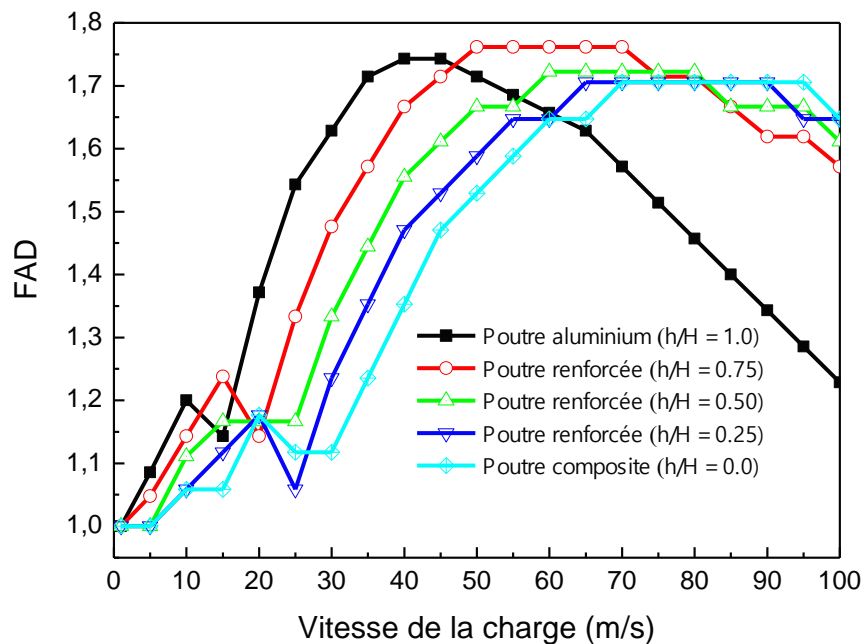


Fig. 5.7 FAD en fonction de la vitesse de la charge et pour différents rapport h/H

V.4.2.5 Influence du rapport longueur-épaisseur L/H

La poutre renforcée avec une orientation $\theta=0^\circ$, $h/H=0.75$ et une vitesse de la charge $v=20$ m/s est considérée dans la Fig. 5.8. L'analyse de l'effet du rapport L/H sur la réponse dynamique est effectuée en faisant varier le rapport L/H de 75 à 125 avec un incrément de 25. On voit que la déflexion dynamique diminue avec l'augmentation du rapport L/H . Il est évident que, la flexibilité augmente avec l'augmentation de la longueur de la poutre renforcée. La valeur maximale de la déformation dynamique (4,8 mm) se produit $L/H = 150$, et lorsque F est à $x = 0.41L$.

La Figure. 5.9 montre la relation entre la vitesse de la charge et le FAD avec une poutre avec $\theta=0^\circ$ et $h/H=0.75$, et pour différentes valeurs du rapport longueur-épaisseur. On voit sur la Fig. 5.9 que les valeurs de FAD varient avec la variation de la longueur de la poutre et la valeur maximale de l'amplification dynamique est 1,7619 pour $L/H=125$.

L'observation générale de la Fig. 5.9 indique que, pour le rapport $L/H=75, 100, 125$ et 150 ; le maximum du FAD a lieu à la vitesse critique $v_{cr} = 100, 90, 70, 55$ m / s, respectivement. Il est clair que, une poutre avec un grand rapport longueur-épaisseur a toujours une plus grande flexibilité.

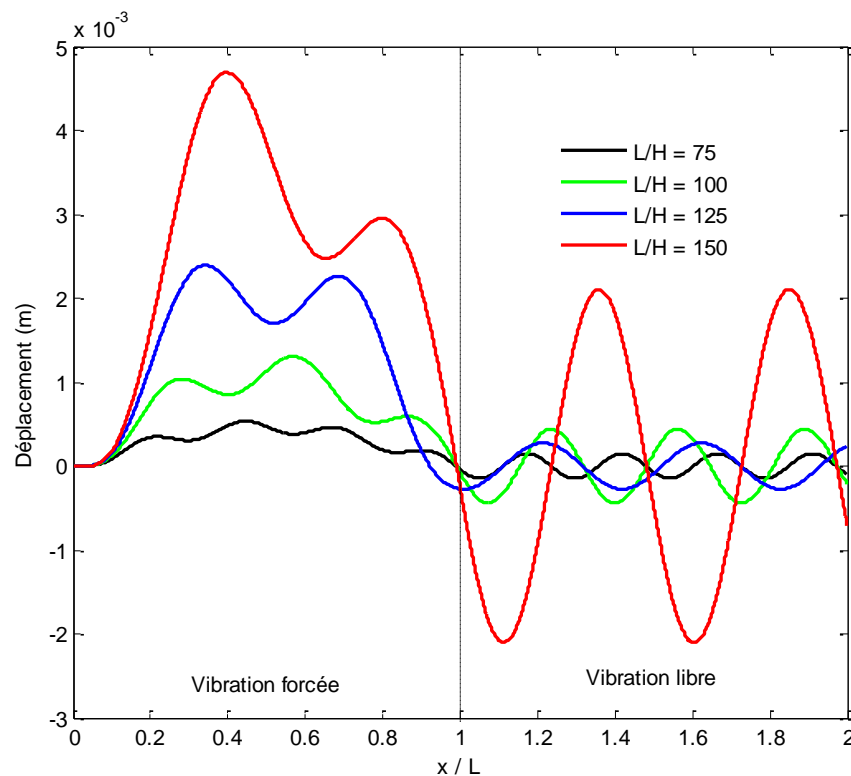


Fig. 5.8 Déplacement dynamique en fonction de la position de la charge et pour différents rapport L/H

Par conséquent, pour de faibles rapports longueur-épaisseur, les résultats montrent que la vitesse critique est grande par rapport à celle obtenue pour de grands rapports longueur-épaisseur. Si la vitesse de la charge est inférieure à la vitesse critique, le FAD augmente avec l'augmentation du rapport L/H , sinon, le FAD diminue avec l'augmentation de la L/H .

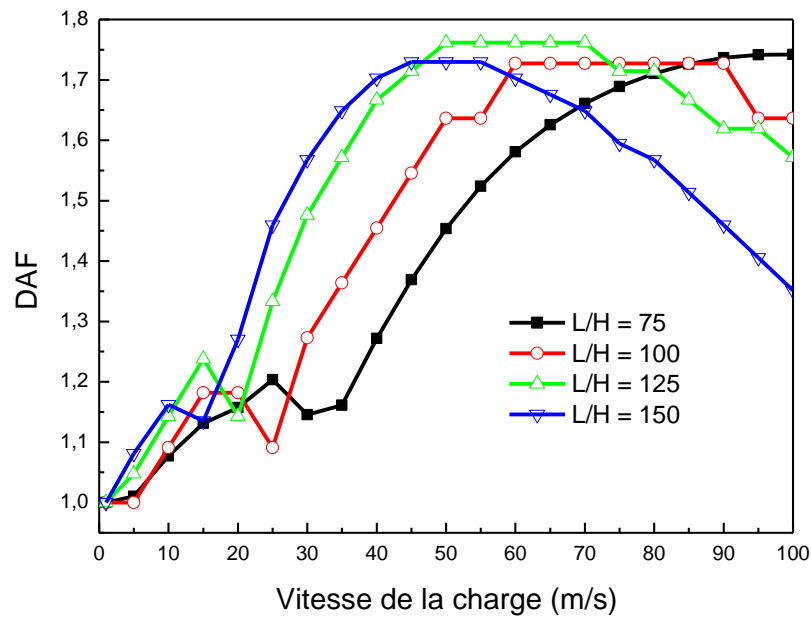


Fig. 5.9 FAD en fonction de la vitesse de la charge et différents rapport L/H

Ainsi, les résultats obtenus montrent que les poutres revêtues offrent des possibilités d'améliorer la capacité d'amortissement de la poutre en aluminium et sans changements importants dans la vitesse critique de la poutre.

V.5 Conclusion

Le comportement dynamique de la poutre simplement appuyée renforcée par couches composites soumis à une charge mobile est prédit par une méthode analytique. Les effets de la vitesse de charge en mouvement, l'orientation des fibres, le rapport longueur sur épaisseur, et le rapport épaisseur, de la fréquence naturelle, des déflexions et de FAD sont discutés en détail. Les conclusions suivantes peuvent être tirées de cette étude:

- la fréquence naturelle augmente avec l'augmentation de l'épaisseur de la couche composite;
- l'orientation des fibres à 0° donne la plus grande fréquence naturelle;
- la fréquence propre diminue avec l'augmentation du rapport de la longueur-épaisseur; pour la vitesse de charge en dessous de la vitesse critique;
- le facteur d'amplification dynamique de la poutre renforcée avec 0° est plus grand que les autres.

- l'augmentation du facteur d'amplification dynamique avec augmentation du rapport longueur-épaisseur et/ou augmentation du rapport d'épaisseur;

On peut dire que les poutres revêtues fournissent les possibilités d'améliorer les capacités d'amortissement des poutres métalliques.

Conclusion générale

Ce travail de recherche présente une étude sur le comportement dynamique des poutres renforcées par des matériaux composites. L'objectif est de déterminer les fréquences propres, les modes propres et les facteurs d'amplification dynamique qui majorent les effets statiques utilisés pour la vérification des états limites des poutres renforcées par des matériaux composites. L'étude de simulation des vibrations libres a été faite par les deux méthodes analytique et numérique (éléments finis),

L'approche numérique offre d'une part la possibilité d'effectuer de manière simple des études paramétriques et d'autre part, la liberté de définir les informations souhaitées. Par contre l'analyse des vibrations forcées a été réalisée par une méthode analytique à travers une étude paramétrique.

Les résultats obtenus et l'analyse de ces résultats, présentés dans cette thèse, nous dictent quelques grandes lignes qui sont présentées à titre de conclusion à ce travail :

- l'étude montre que le renforcement des poutres par des armatures PRF est une solution intéressante pour la diminution des flèches en service, des capacités portantes des poutres.
- les fréquences propres sont directement proportionnelles au nombre de mode.
- la fréquence propre diminue généralement avec la réduction du rapport d'épaisseur.
- la fréquence propre diminue avec l'augmentation de l'angle d'orientation de fibre.
- la fréquence diminue avec l'augmentation du rapport de longueur/épaisseur.
- la méthode de la puissance utilisée dans la méthode des éléments finis pour le calcul des pulsations et modes propres, donne de très bons résultats par rapport à la méthode analytique.
- lorsque la rigidité des couches de surface est supérieure à celle de la couche de base, une relation linéaire est observée entre la fréquence et le rapport entre l'épaisseur et l'amplitude du mode augmente lorsque le rapport d'épaisseur augmente,
 - les fréquences sont plus grandes avec une orientation des fibres de 0° , et ceci est expliqué par le fait que les fibres sont de la direction de la poutre en sandwich.
 - les conditions aux limites encastées- encastée (E-E) donnent la valeur maximale de la fréquence naturelle.
 - l'augmentation du facteur d'amplification dynamique avec augmentation du rapport longueur-épaisseur et/ou augmentation du rapport d'épaisseur;

L'ensemble de l'étude montre que le système de renforcement des poutres en fibres hautes performances renforcée par des armatures PRF est une solution intéressante pour la diminution des flèches en service, des capacités portantes des poutres.

Ce travail a montré que le domaine étudié est très vaste et qu'il peut être abordé de plusieurs manières. Afin de concentrer les efforts sur quelques aspects, il était nécessaire de limiter l'étendue de l'étude. Les diverses observations au cours de cette recherche nous permettent de formuler quelques recommandations et de proposer quelques sujets qui pourraient être abordés lors d'études ultérieures :

- étude des vibrations forcées par la méthode des éléments finis des poutres renforcées par matériaux composites.
- Des études utilisant l'analyse par éléments finis pourront être effectuées sur les plaques (2D) et structures en 3D, renforcées par matériaux composites.
- Considérer les poutres Timoshenko où les modes de la torsion de vibration sont calculées.
- le volet d'amortissement des poutres avec renforcement n'a pas été touché dans cette étude et pourrait être abordé dans des études à venir.
- Étude de l'effet de l'accélération de la charge roulante sur la réponse dynamique de poutre.
- Étude des contraintes et de déformations pour évaluer la résistance des poutres renforcées.

Références

1. Maurice Reyne, Technologies des composites, 3^e édition revue et augmentée, éditions Hermès, Paris, 1998.
2. Fibrwrap, Renforcer, avec un temps d'avance, brochure Fibrwrap Construction France, 2012.
3. Jean-Marie Berthelot, Mécanique des matériaux et structures composites, ISMANS, Institut supérieur des matériaux et mécanique avancée, Le Mans, France, 2010.
4. J.G. Teng, T. Yu, D. Fernando, Strengthening of steel structures with fiber-reinforced polymer composites, *Journal of Constructional Steel Research* 78 (2012) 131–143.
5. Fryba L., Vibration of solids and structures under moving loads, Third edition, Thomas Telford, 1999.
6. Biggs, J.M., Introduction to structural dynamics. New York (NY, USA): McGraw-Hill. 1964.
7. Clough R.W., Penzien J., Dynamics of structures, McGraw-Hill, New York, USA. 1993.
8. Abu-Hilal, M. and Zibdeh, H. S. ,Vibration Analysis of Beams With General Boundary Conditions Traversed By a Moving Force, *Journal of Sound and Vibration*, 229(2):(2000) 377–388.
9. Ichikawa M., Miyakawa Y., Matsuda A., Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass, *Journal of sound and vibration*, 230 (2000) 493-506.
10. N. F. Grace, G. A. Sayed, A. K. Soliman and K. R. Saleh, 1999, Strengthening Reinforced Concrete Beams Using Fiber Reinforced Polymer (FRP) Laminates, *Structural Journal*, Vol.96, 5, pp865-875.
11. Vishnu H. Jariwala, Paresh V. Patel, Sharadkumar P. Purohit, Strengthening of RC Beams Subjected to Combined Torsion and Bending with GFRP Composites, *Procedia Engineering*, Volume 51, 2013, Pages 282-289.
12. Shraddha B. Tibhe, Vijaykumar R. Rathi, Comparative Experimental Study on Torsional Behavior of RC Beam Using CFRP and GFRP Fabric Wrapping, *Procedia Technology*, Volume 24, 2016, Pages 140–147.
13. Shamim A. Sheikh, Performance of concrete structures retrofitted with fibre reinforced polymers, *Engineering Structures* 24 (2002) 869–879.

14. Ch. Lee, D. Liu, and X. Lu, "Static and vibration analysis of laminated composite beams with an interlaminar shear stress continuity theory," *Int. J. Numer. Meth. Struct. Eng.*, (1992).33, 409-424
15. K. Chandrashekhara, K. Krishnamurthy, and S. Roy, "Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation," *Compos. Struct.*, (1990). 14, No. 4, 269-279.
16. K. D. Maiti and P. K. Sinha, "Bending and free vibration analysis of shear deformable laminated composite beams by finite element method," *Compos. Struct.*,(1994). 29, No. 4, 421-431.
17. Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*. Script a Book Co., Washington, 1975.
18. Vinson JR, Sierakowski RL. *The behavior of structures composed of composite materials*. Dordrecht, the Netherlands: MartinusNijhoff, 1989.
19. Jean-Marie Berthelot, *Dynamic of composite materials and structures*, ISMANS, Institute for Advanced Materials and Mechanics, Le Mans, France, 2010.
20. Hajianmaleki M, Qatu MS. *Mechanics of composite beams*. In: Tesinova P, editor. *Advances in composite materials-analysis of naturally and man-made materials*. Croatia: In Tech Publishing.
21. Moy S.S.J., *Guidelines FRP Composites: Life extension and strengthening of metallic structures: ICE design and practice guide*, 2001, Thomas Telford.
22. Photiou N.K., Hollaway L.C., Chryssanthopoulos M.K., *Strengthening of an artificially degraded steel beam utilising a carbon/glass composite systems*, *Construction and Building Materials*, vol. 20, 2006, p. 11-21.
23. Si Larbi A., Ferrier E., Jurkiewicz B., Hamelin P., « Static behaviour of steel concrete beam connected by bonding, *Engineering structures*, vol. 29, 2007, p. 1034-1042.
24. Schnerch D., Dawood M., Rizkalla S., Sumner E., *Proposed design guidelines for strengthening of steel bridges with FRP materials », Construction and building materials*, vol. 21, 2007, p. 1001-1010.
25. Cadei JMC, Stratford TJ, Hollaway LC, Duckett W.G. (2004) *Strengthening metallic structures using externally bonded fibre-reinforced polymers (C595)*. CIRIA Design Guide, London, ISBN 0-86017-595-2.
26. Yail J Kim, Kent A Harries, *Modeling of timber beams strengthened with various CFRP composites*, 2011, *Engineering Structures*, Vol.32, N°10, pp 3225-3234.

27. Hui Jiao, Fidelis Mashiri, Xiao-Ling Zhao, A comparative study on fatigue behaviour of steel beams retrofitted with welding, pultruded CFRP plates and wet layup CFRP sheets, 2012, *Thin-Walled Structures*, Vol.59, pp. 144-152.
28. Ghafoori E, Motavalli M., Botsis J., Herwig A., Galli M., Fatigue strengthening of damaged steel beams using unbonded and bonded prestressed CFRP plates, *International Journal of Fatigue*, 2012, 44 , pp. 303-315.
29. Volkan Kahya, Ayman S. Mosallam. Dynamic analysis of composite sandwich beams under moving mass, *KSU. Journal of Engineering Sciences*, 2011, 14 (1).
30. Hamada A., Vibration and damping analysis of beams with composite coats, *Composite Structures*, 1995.32, pp. 33-38.
31. Zibdeh, H.S. and Abu-Hilal M., Stochastic vibration of laminated composite coated beam traversed by a random moving load, *engineering structures*, 2003. 25, pp. 397-404.
32. M. Tavakkolizadeh and H. Saadatmanesh, Fatigue strength of steel girders strengthened with carbon fiber reinforced polymer patch, *Journal of Structural Engineering*, vol. 129, no. 2, pp. 186–196, 2003.
33. J. Deng and M. M. K. Lee, Fatigue performance of metallic beam strengthened with a bonded CFRP plate, *Composite Structures*, vol. 78, no. 2, pp. 222–231, 2007.
34. Y. J. Kim and K. A. Harries, Fatigue behavior of damaged steel beams repaired with CFRP strips, *Engineering Structures*, vol. 33, no. 5, pp. 1491–1502, 2011.
35. H. Jiao, F. Mashiri, and X.-L. Zhao, “A comparative study on fatigue behaviour of steel beams retrofitted with welding, pultruded CFRP plates and wet layup CFRP sheets,” *Thin-Walled Structures*, vol. 59, pp. 144–152, 2012.
36. E. Ghafoori, A. Schumacher, and M. Motavalli, Fatigue behavior of notched steel beams reinforced with bonded CFRP plates: determination of prestressing level for crack arrest, *Engineering Structures*, vol. 45, pp. 270–283, 2012.
37. Trethewey Y. H., Trethewey M. W., Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads, *Journal of Sound and Vibration* (1990) 136:323.
38. M.W. Hyer., *Stress analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*. McGraw-Hill, 1998.
39. R.M. Jones., *Mechanics of Composite Materials*. Taylor and Francis, 2e edition, 1999.
40. Dubigeon S., *Mécanique des milieux continus*, 2^{ème} édition, Tec & Doc, 1998.

41. Zienkiewicz O.C., The finite element method, 4Th edition, 2 volumes, McGraw Hill, 1989.
42. G. Dhatt & G. Touzot, une présentation de la méthode des éléments finis. Les presses de l'université Laval - Québec, 1981.
43. Batoz J.L. & Dhatt G., Modélisation des structures par éléments finis, 3 volumes, Hermès, 1990.

Annexes

Publication Internationale N°1

S. Tekili, Y. Khadri, and B. Merzoug,

“Free Vibration Analysis of the Strengthened Beams by Composite Coats,
Advanced Materials Research Vol. 716 (2013) pp 595-599.

<http://www.ttp.net/978-3-03785-713-7/12.html>

Publication Internationale N°2

S. Tekili, Y. Khadri, B. Merzoug,

“Finite element analysis of free vibration of beams with composite coats,
Mechanics, (2015) Vol. 21, No 4 pp 290-295

<http://www.mechanika.ktu.lt/index.php/Mech/article/view/9849>

Publication Internationale N°3

S. Tekili, Y. Khadri, B. Merzoug, E. M. Daya, A. Daouadji,

Free and forced vibration of strengthened beams by composite coats
subjected to moving load,

Mechanics of Composite Materials - Springer, (2017) Vol. 52, No. 6., P.
789-798.

<http://link.springer.com/journal/11029>