

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY
ANNABA

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Année : 2017

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire de Modélisation Mathématiques et Simulation Numérique



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en MATHÉMATIQUES

**ETUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DE
QUELQUES PROBLÈMES
DES MILIEUX POREUX**

Option

EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET APPLICATIONS- Calcul Scientifique

Présentée par:

DJEDAIDI Noura

DIRECTEUR DE THÈSE : NOURI Fatma Zohra Prof U.B.M. ANNABA

Devant le jury :

PRÉSIDENT :	HAIOUR Mohamed	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	HANI Azzedine	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	GUESMIA Amar	M.C.A	UNIV. SKIKDA
EXAMINATEUR :	NISSE Lamine	Prof.	UNIV. ELOUED

Remerciements

Tout d’abord, je tiens à remercier ma directrice de thèse **Pr. Fatma Zohra Nouri**, pour la confiance qu’elle m’a accordée, ainsi que pour sa disponibilité et sa patience, pour ses qualités humaines et scientifiques. Je ne pourrai jamais oublier son esprit de recherche et ses commentaires efficaces. Un grand merci de m’avoir donné la chance de réaliser ce modeste travail.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation LMD.

Je tiens à remercier **Pr. M. Haiour**, pour l’honneur qu’il me fait en présidant de jury.

Je remercie vivement **Pr. A. Hani**, **Mr. A. Guesmia** et **Pr. L. Nisse** pour l’honneur qu’ils m’ont fait de bien vouloir accepter d’examiner le travail de cette thèse pour mieux valoriser les résultats obtenus.

Un très grand merci à mes parents pour leur soutien, leur patience et pour leur encouragement tout au long de ces années.

Mes remerciement vont également à mes soeurs Bochra et Hana, mon frère Mohamed qui m’ont toujours soutenu dans les moments difficiles.

A tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à ce que cette thèse soit réalisée se dirigent ma gratitude et mes pensées.

دراسة نظرية ورقمية لبعض المشاكل بالأوساط المسامية

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو الدراسة النظرية و العددية لمسألة تعالج ظاهرة تسرب المياه المالحة في طبقات المياه الجوفية الساحلية.

نعمد في البداية هذه المسألة، والتي تصف التفاعل بين المياه العذبة والمياه المالحة، مع واجهة صلبة أين السوائل لا تمتزج، وذلك باعتبار جملة معادلات ببيضاوية. قطع مكافئ منحل. نبرهن نتائج نظرية لوجود ووحداية الحل ونقترح مخطط عددي من نوع الأحجام المنتهية من أجل تفريدها. بعض التجارب الرقمية التي تؤكد صحة نتائجنا ستكون مقدمة.

نهتم فيما بعد بدراسة مسألتنا باعتبار ظاهرة انتشار الملح. هذه الأخيرة موصوفة بنظام مزدوج من معادلتين نافير - ستوكس مع وجود الجاذبية كقوة خارجية، مقرونة مع معادلة انتشار الحمل الحراري من أجل التركيز. نقترح طريقة العناصر المنتهية المستطيلة من أجل تفريدها ونقوم ببرهنة استقرار النموذج العددي المتحصل عليه. نختم بتقديم بعض النتائج الرقمية.

الكلمات المفتاحية: ديناميكا الموائع، وسط مسامي، العناصر المحدودة، الأحجام المنتهية، استقرار.

Etude Théorique et Numérique de quelques Problèmes des Milieux Poreux

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier théoriquement et numériquement un problème d'intrusion saline dans les aquifères côtiers.

On commence par adopter ce problème, qui décrit l'interaction entre l'eau douce et l'eau salée, avec une interface abrupte où les fluides sont immiscibles tout en considérant un système d'équations elliptiques-paraboliques dégénérées. On démontre des résultats théoriques d'existence et d'unicité de la solution et on propose un schéma numérique de type volumes finis pour le discrétiser. Des simulations numériques confirmant nos résultats sont présentées.

On s'intéresse ensuite à étudier notre problème avec une diffusion du sel. Ce dernier est décrit par un système d'équations couplant les équations de Navier-Stokes avec la gravité en tant que force externe, avec une équation de convection-diffusion pour la concentration. On propose une méthode des éléments finis rectangulaires pour l'approcher, et on prouve un résultat de stabilité pour le schéma numérique obtenu. On termine par donner quelques résultats numériques.

Mots-clés : Dynamique des Fluides, Milieux poreux, Eléments finis, Volumes finis, Stabilité.

Theoretical and Numerical Study of some Problems in Porous Medium

Abstract

The aim of this thesis is a mathematical and a numerical study of a seawater intrusion problem in coastal aquifers.

Firstly, we adopt this problem, which describes the interaction between fresh and salt water, with an abrupt interface where the fluids are immiscible, by considering a system of degenerate elliptic-parabolic equations. We prove a theoretical results of the existence and uniqueness of the solution and we propose a finite volume scheme to discretize it. Some numerical simulations that confirmed our results are presented.

We are next interested in studying this problem with salt diffusion. This model is described by a system of equations, coupling the standard Navier-Stokes equations with the gravity as an external force, with a convective-diffusion equation for the concentration. We propose a rectangular finite element method to approximate it and we show a stability result for our resulting numerical scheme. We complete by presenting some numerical results.

Keywords : Fluid Dynamics, Porous media, Finite Element, Finite Volume, Stability.

Table des matières

Introduction	1
1 Modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogènes	3
1.1 Histoire de l'hydrogéologie	3
1.2 Les milieux poreux hétérogènes	6
1.2.1 Définition d'un aquifère	6
1.2.2 Caractéristiques des milieux poreux	7
1.3 Ecoulement en milieu poreux	9
1.3.1 Loi de Darcy	9
1.3.2 Equation de continuité	12
1.4 Ecoulement d'eau souterraine	12
1.4.1 Zone saturée	13
1.4.2 Zone non saturée	13
1.5 Problème d'intrusion saline	13
2 Préliminaires et notions de base	15
2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$	15
2.2 Les espaces de Hilbert	17
2.3 Les espaces de Sobolev	19
2.3.1 Espaces $H^m(\Omega)$	19
2.3.2 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$	22
2.4 Espace $H(\text{div}, \Omega)$	23
2.5 Espaces de Sobolev avec poids	24

2.6	Méthode des volumes finis	26
2.6.1	Maillage admissible	26
2.6.2	Discrétisation	27
2.7	Méthode des éléments finis	28
2.7.1	Eléments finis triangulaire	29
2.7.2	Eléments finis rectangulaire	33
3	Etude d'un problème de deux fluides immiscibles	35
3.1	Approximation de Ghyben-Herzberg	35
3.2	Modèle d'intrusion saline $3D$	36
3.2.1	Hypothèses sur l'étude du notre problème	37
3.2.2	Equations d'écoulement	38
3.2.3	Equation de l'interface séparant les deux fluides	39
3.3	Modèle d'interface abrupte $2D$	40
3.4	Les conditions initiales et aux bords	44
3.5	Modèle simplifié	45
3.6	Existence et unicité de la solution	45
3.7	Approximation du problème par volumes finis	53
3.7.1	Notations	53
3.7.2	Discrétisation de la première équation	53
3.7.3	Discrétisation de la deuxième équation	57
3.8	Analyse de stabilité	59
3.9	Quelques résultats numériques	60
3.10	Conclusion	65
4	Etude d'un problème de deux fluides miscibles	66
4.1	Modèles avec diffusion du sel	66
4.2	Modèle mathématique	68
4.2.1	Equations adimensionnelles	69
4.2.2	Conditions initiales et aux limites	72

4.2.3	Formulation variationnelle	74
4.3	Discrétisation numérique	76
4.3.1	Approximation par des éléments finis rectangulaire	76
4.3.2	Analyse de stabilité	77
4.4	Mise en oeuvre numérique	80
4.4.1	Algorithme	80
4.4.2	Résultats numériques et commentaires	81
4.5	Conclusion	85
Conclusion générale et perspectives		86
Bibliographie		88

Table des figures

1.1.1 Cycle de l'eau et existence de réservoirs souterrains d'après Aristote [31] . .	4
1.2.1 Types d'aquifères.	7
1.3.1 Le dispositif expérimentale de Darcy[19].	10
1.3.2 Schéma représentatif de la loi de Darcy [40].	11
1.4.1 Cycle de l'eau	12
2.6.1 Volumes de contrôle admissibles d'un maillage volume finis	26
2.6.2 Condition d'admissibilité du maillage	27
2.7.1 Exemple de maillage triangulaire en dimension $N = 2$	30
3.1.1 Schéma d'un aquifère côtier selon la relation de Ghyben-Herzberg.	36
3.2.1 Représentation du domaine dans l'hypothèse d'une interface abrupte [6]. .	37
3.3.1 Domaine d'aquifère 3D[35].	41
3.5.1 Aquifère confiné	45
3.7.1 Cellule diamant	54
3.9.1 Saturation de l'eau douce pour $t = 0, 69, 100$ et $136s$	60
3.9.2 Saturation de l'eau salée pour $t = 0, 69, 100$ et $136s$	61
3.9.3 Pression de l'eau douce pour $t = 0, 69, 100$ et $136s$	62
3.9.4 Pression de l'eau salée pour $t = 0, 69, 100$ et $136s$	63
3.9.5 La profondeur de l'interface pour $T = 0, 5$ et $10s$	64
4.2.1 Le domaine Ω et les conditions aux bords.	74
4.4.1 Concentration pour $t = 0.1, 1, 3, 5, 10$ et $15s$	82

4.4.2 Composante de vitesse u pour $t= 0.1, 1, 3, 5, 10$ et $15s$	83
4.4.3 Composante de vitesse v pour $t= 0.1, 1, 3, 5, 10$ et $15s$	84

Introduction

L'étude des écoulements multiphasiques en milieu poreux hétérogène a attiré l'attention de nombreux chercheurs, en particulier en hydrogéologie pour l'exploitation des eaux souterraines. Il faut souligner que les eaux souterraines sont la principale source d'eau potable dans de nombreuses régions du monde ; malheureusement dans les zones côtières son extraction provoque des problèmes d'intrusion d'eau salée.

En général, les échanges hydrauliques entre l'eau douce souterraine et l'eau salée sont lents dans des conditions naturelles, ils peuvent alors être remplacés par un quasi-équilibre entre les 2 zones. Cela correspond à l'approximation de Ghyben-Herzberg. Plusieurs modèles analytiques dérivent de cette approche [48]. Cependant ces solutions analytiques se limitent à des géométries très simples et à des situations où l'hypothèse de Ghyben - Herzberg est satisfaite ; elles sont donc essentiellement utilisées comme cas test pour valider des codes numériques. Supposons que la zone d'eau salée est immobile, le pompage d'eau douce provoque une baisse dans le niveau de la nappe phréatique ce qui entraîne une intrusion saline dans l'aquifère. L'eau salée est plus dense que l'eau douce et glisse en dessous de cette dernière et envahit l'aquifère sous forme d'un biseau salé.

Dans ce travail, On s'intéresse à la modélisation du problème d'intrusion saline dans les aquifères côtiers du point de vue théorique et numérique. Plusieurs références concernant cette dernière existent dans la littérature ([11],[12] et [13]). Ils existent plusieurs modèles décrivant le problème d'intrusion saline qui sont peut classer en 2 catégories. Celle qui considère l'eau douce et l'eau salée sont immiscibles, donc les domaines occupés par chaque fluide sont séparés par une interface abrupte. Cette approche ne décrit pas la nature et le

comportement de la zone de transition mais ne donne des informations sur le mouvement du front d'eau salée. Cette information est importante pour le contrôle de l'intrusion marine et pour l'exploitation optimale de l'eau douce souterraine. La seconde catégorie consiste à prendre l'eau douce et l'eau salée comme deux fluides miscibles, c'est-à-dire une zone de transition se produit causée par la dispersion hydrodynamique.

Cette thèse est composée de quatre chapitres, le premier est une synthèse bibliographique sur les problèmes de l'hydrogéologie et des milieux poreux en passant de leur histoire vers leur modélisation et applications.

Le deuxième chapitre comporte quelques notions fonctionnelles utiles tout au long de ce travail, telles que les espaces de Hilbert, les espaces de Sobolev, les espaces de Sobolev avec poids, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis qui sont utilisés en théorie de l'approximation.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude théorique du problème où on a prouvé un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le problème d'intrusion saline avec interface abrupte qui est modélisé par un système de type elliptique-parabolique dégénérée dans un aquifère confiné. Ensuite, on a proposé un schéma de type volumes finis sur des maillages non structurés pour résoudre le système couplé. A cette fin on a utilisé une méthode dite des "cellules diamants" pour l'approximation du gradient. On a donné des tests numériques pour ce schéma.

Le quatrième chapitre présente un schéma basé sur des éléments finis de type rectangulaire pour un problème des fluides miscibles dans les milieux poreux où on a montré un résultat de stabilité pour notre schéma. Enfin, quelques tests numériques seront présentés.

Modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogènes

Ce chapitre est un aperçu historique sur l’hydrogéologie et les milieux poreux hétérogènes [21], [31], [38] et [39] ; à partir des travaux de quelques grands noms dans ces domaines.

1.1 Histoire de l’hydrogéologie

C’est le grec **Thalès** qui a imaginé en 650 av. J.C que l’eau de la mer, poussée par les vents, pénètre dans le sous-sol des continents ; la pression des roches provoque son ascension dans le flanc des montagnes pour engendrer les sources.

Le romain **Lucrèce** (98-55 av. J. C) a donné une description complète du cycle de l’eau comprenant l’évaporation, la formation des nuages et de la pluie ainsi que l’infiltration.

Aristote (384-322 av. J. C) a pensé qu’après l’évaporation sur la mer, les nuages forment la pluie qui est à l’origine des rivières, par l’intermédiaire de réservoirs souterrains.

Platon (428-348 av. J. C) a imaginé qu’un immense gouffre, le Tartare, reçoit tous les cours d’eau et alimente les mers, les lacs, les fleuves et les sources.

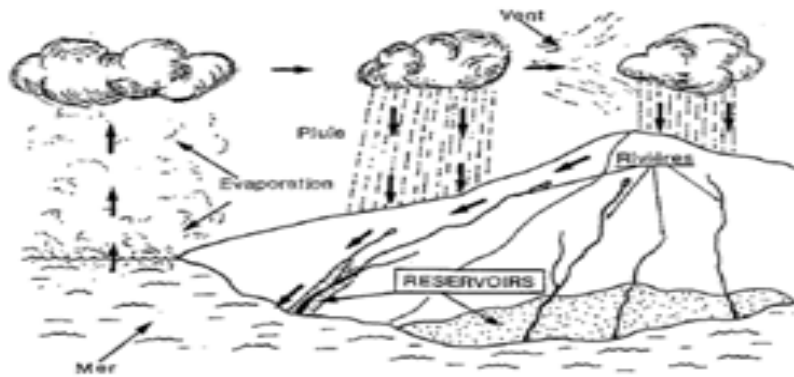


Figure 1.1.1 – Cycle de l'eau et existence de réservoirs souterrains d'après Aristote [31]

Cette théorie, a été avancée dès le premier siècle av. J. C par l'architecte **Vitruve** qui a décrit la formation des sources par la pénétration dans le sol des eaux de pluie et de fonte des neiges, jusqu'à leur interception par une couche d'argile ou de pierre.

En se basant sur les travaux d'Aristote, **Sénèque** (4-65) qui a proposé que les eaux souterraines proviennent de condensations dans le sous-sol.

On doit à **Léonard de Vinci** (1452-1519) au XVème siècle l'idée de précision de cette théorie, où il a reconnu l'importance des aquifères des formations géologiques des Alpes.

Le premier qui a exposé une vision juste sur les eaux souterraines est le mathématicien **Jacques Besson** dans son ouvrage "L'art et science de trouver les eaux et les fontaines cachées sous terre" en 1569. Puis, en 1580, **Bernard Palissy** (1510-1590) a démontré que l'eau des sources a pour origine les pluies infiltrées dans les fissures et abîmes du sous-sol, dans son livre "Discours admirables de la nature des eaux et fontaines, tant naturelles qu'artificielles".

Au XVIIème siècle, **Jean François** a précisé à son tour dans son ouvrage "La Science des eaux" (Rennes 1655) le premier principe d'hydrogéologie en distinguant trois types de terres aquifères dans le sol (libre, captif et semi-captif).

Ensuite, en 1674, le véritable fondateur français de la pensée moderne en hydrologie quantitative **Pierre Perrault** (1611-1680) dans son mémoire "De l'origine des fontaines

”a établi le premier bilan d'un bassin versant, et il a prouvé par des mesures précises dans le haut bassin de la Seine que les précipitations sont à elles seules suffisantes pour assurer le débit des cours d'eau et des sources.

Quelques années plus tard, le physicien **Edmé Mariotte** (1620-1684) a confirmé les résultats de Pierre Perrault dans son livre “Traité du mouvement des eaux et des fluides ”, qui a été publié après sa mort, en 1686, par **Phillipe de la Hire**.

Puis, l'astronome britannique **Edmund Halley** (1656-1742) qui a été motivé par les expériences de Perrault et Mariotte, a quantifié l'évaporation en constatant qu'elle est égale aux précipitations.

Dans la première moitié du XIXème siècle, une première application de la géologie à l'étude des eaux souterraines, a été proposée en 1827 par le fondateur de la stratigraphie, l'anglais **William Smith** (1769-1839).

Après, les études et les travaux des géologues et des ingénieurs qui ont abouti à une véritable explosion des sciences et des techniques de l'eau en France.

En 1856, l'ingénieur français **Henry Darcy** (1803-1858) a établi expérimentalement à Dijon, sa loi célèbre qui porte son nom qui a été la base fondamentale de l'hydrodynamique souterraine dans son livre “Les fontaines publiques de la ville de Dijon ”.

Au début du XXème siècle, **Auguste Daubrée** (1814-1896) a relié en 1887 les structures géologiques et le mouvement des eaux souterraines. Dans son livre “l'Essai d'hydrogéologie ” édité en 1930, **E. Imbeaux** a établi les bases de la géologie appliquée aux eaux souterraines, pour lui ' l'hydrogéologie est la fille de la géologie'.

L'hydrogéologie (de hydro-, eau et géologie, étude de la terre) est la science qui étudie l'eau souterraine; elle s'occupe de la distribution et de la circulation de l'eau souterraine dans le sol et les roches, en tenant compte de leurs interactions avec les conditions géologiques et l'eau de surface.

Son domaine d'étude repose essentiellement sur deux branches des sciences de la terre, la géologie et l'hydrologie, mais aussi sur de nombreuses autres branches comme la physique, la chimie, la biologie, l'analyse numérique ainsi que des techniques de modélisation. A cet effet, l'hydrogéologie est devenue une science interdisciplinaire.

1.2 Les milieux poreux hétérogènes

Nous nous intéressons dans cette étude aux milieux poreux hétérogènes et en particulier aux aquifères.

Un milieu poreux est constitué d'une partie solide et des espaces vides appelés pores. Le pourcentage de vide d'un milieu poreux définit sa porosité totale. Ces vides peuvent être occupés par l'eau, l'air ou d'autres fluides.

1.2.1 Définition d'un aquifère

Un aquifère est une formation géologique saturée pouvant transmettre et capter des quantités significatives d'eau souterraine sous des gradients hydrauliques ordinaires (faibles) ou une unité géologique qui permet de fournir des quantités d'eau économiquement avantageuses. On distingue deux importants types d'aquifères (voir Figure 1.2.1)

Aquifère libre

C'est un aquifère dans lequel une nappe libre (surface phréatique) sert de limite supérieure, la pression exercée sur le toit de cette nappe est égale à la pression atmosphérique.

Aquifère confiné

C'est un aquifère qui contient une nappe captive entre deux formations imperméables. L'eau contenue dans cette nappe est soumise à une pression supérieure à celle de la nappe, correspondant à la surface piézométrique qui est située au-dessus de la limite supérieure de l'aquifère.

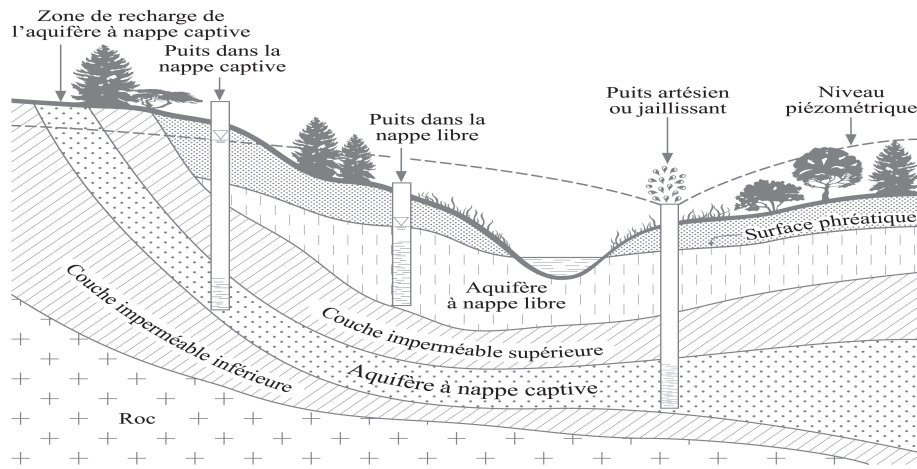


Figure 1.2.1 – Types d'aquifères.

1.2.2 Caractéristiques des milieux poreux

Les grandeurs physiques suivantes sont les plus couramment utilisées pour caractériser un milieu poreux.

La porosité

Elle est définie comme le rapport entre le volume des pores et le volume total dans un volume élémentaire représentatif du milieu

$$\phi = \frac{V_p}{V_0} = \frac{\text{Volume des pores}}{\text{Volume totale de l'échantillon}} \quad (1.2.1)$$

elle varie donc entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide).

Conductivité hydraulique

La conductivité hydraulique est une mesure de la capacité du milieu à laisser circuler l'eau. Elle dépend des caractéristiques du milieu, via la perméabilité intrinsèque k , ainsi que des caractéristiques du fluide

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} \quad (1.2.2)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide, ρ est la masse volumique du fluide et g est l'accélération de la pesanteur.

Dans le cas anisotrope, elle est définie par un tenseur symétrique de la forme :

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{pmatrix}$$

Hauteur piézométrique

Dans un milieu poreux, l'eau est caractérisé par son état d'énergie. L'énergie d'une particule du fluide en mouvement est donc considéré comme son énergie potentielle car l'énergie cinétique est si réduite qu'elle est négligée. l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$h = z + \int_0^P \frac{dp}{\rho \cdot g}$$

où h est le potentiel (ou hauteur piézométrique), ρ la masse volumique de l'eau, P la pression d'eau, z est le potentiel gravitaire. Si le fluide est incompressible, la hauteur piézométrique s'écrit :

$$h = z + \frac{P}{\rho \cdot g}, \text{ avec } P = (h - z)\rho g \quad (1.2.3)$$

où g est l'accélération de la gravité.

Charge hydraulique

La charge hydraulique dans un fluide incompressible, correspond à l'énergie mécanique totale du fluide, elle est définie par :

$$\Phi = z + \frac{P}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} \quad (1.2.4)$$

avec v la vitesse réelle du fluide. En milieu poreux, l'écoulement est généralement lent, ainsi on néglige le terme cinétique $\frac{v^2}{2g}$, par conséquent la hauteur piézométrique et la charge hydraulique peuvent être confondues.

Coefficient d'emmagasinement

C'est le rapport du volume d'eau libéré ou emmagasiné par unité de surface de l'aquifère, sur la variation de charge hydraulique correspondante. Il conditionne l'emmagasinement de l'eau souterraine mobile dans les vides du réservoir.

Ce coefficient peut s'exprimer en fonction de la porosité, du coefficient de compressibilité du fluide, noté par α_P , résultant de la variation de la densité du fluide par rapport à celle

de la pression et du coefficient de compressibilité du sol, noté par β_P , dû à la variation de la porosité par rapport à celle de la pression. Ils sont définis par :

$$\alpha_P = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \quad (1.2.5)$$

$$\beta_P = \frac{1}{(1 - \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial P} \quad (1.2.6)$$

1.3 Ecoulement en milieu poreux

L'écoulement d'un fluide à travers les milieux poreux est gouverné par deux types de lois de la physique qui sont utilisées pour résoudre un problème, une loi de comportement qui est la loi de Darcy et une loi de conservation de la masse qui définit le principe de continuité.

1.3.1 Loi de Darcy

L'étude fondatrice des écoulements dans les milieux poreux a été réalisée par l'ingénieur Darcy en 1856 avec un "Mémoire sur les fontaines publiques de la ville de Dijon". Il a mis en évidence une relation linéaire entre la vitesse et le gradient de pression appliqué de part et d'autre du matériau poreux.

La loi de Darcy s'applique à un milieu poreux homogène et isotrope parcouru par un écoulement à faible vitesse.

A cet effet, l'auteur a tenté d'améliorer la qualité des filtres à sable utiles à la purification des eaux d'alimentation de la ville de Dijon, il a établi expérimentalement la relation entre le débit d'écoulement à travers un matériau poreux et la perte de charge qui lui est associée comme indiqué dans la Figure 1.3.1 .

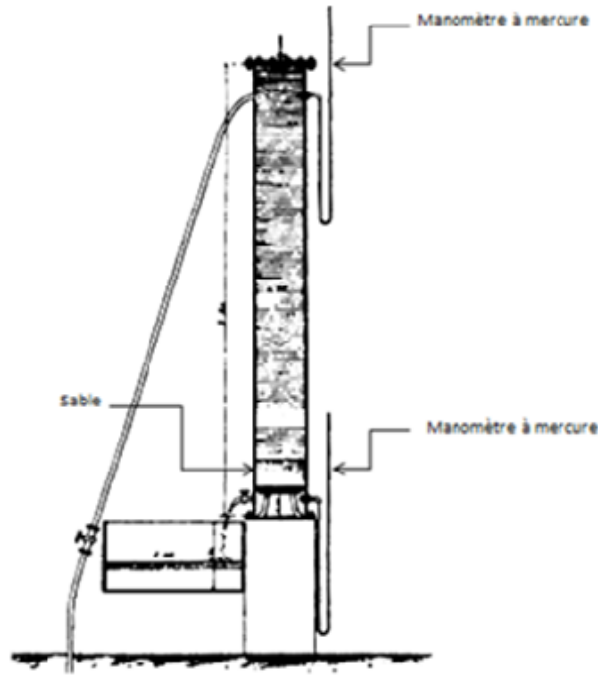


Figure 1.3.1 – Le dispositif expérimentale de Darcy[19].

De cette expérience, Darcy a déduit que le débit total Q transitant au travers de la colonne peut se calculer [19],[40].

$$Q = KA \frac{\Delta h}{L} \quad (1.3.1)$$

où

Q : débit d'écoulement total mesuré à la sortie.

K : coefficient de conductivité hydraulique.

A : section de l'échantillon normale à la direction de l'écoulement.

h : la perte de charge de l'eau entre le sommet et la base de l'échantillon.

L : longueur de l'échantillon.

En notant par $i = \frac{\Delta h}{L}$ (appelé le gradient hydraulique) et en divisant les deux membres de la loi par A ; nous obtenons la vitesse de filtration $U = \frac{Q}{A}$ appelée vitesse de Darcy.

La loi s'écrit alors sous la forme

$$U = Ki \quad (1.3.2)$$

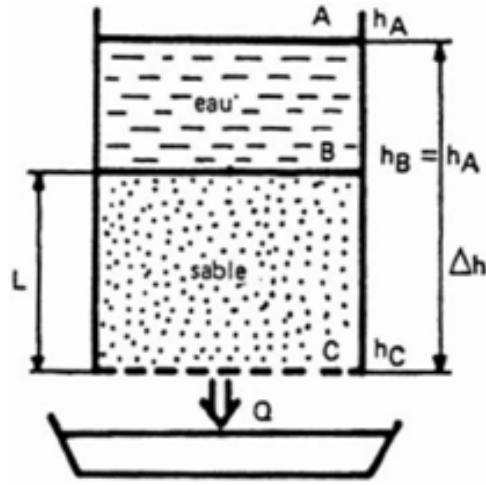


Figure 1.3.2 – Schéma représentatif de la loi de Darcy [40].

La loi de Darcy doit donc s'exprimer sous la forme générale

$$U = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \quad (1.3.3)$$

Ici, ρ est la masse volumique du fluide, g la gravité et z est le potentiel gravitaire. Pour établir la relation entre la perméabilité intrinsèque k et le coefficient de perméabilité K utilisé par les hydrogéologues, il faut exprimer le débit en fonction du gradient de charge hydraulique $\frac{\Delta h}{L} = -\nabla h$. En supposant le fluide incompressible, nous pouvons écrire

$$U = -\frac{k}{\mu} \nabla (p + \rho g z) \quad (1.3.4)$$

En négligeant la variation spatiale de la masse volumique, la loi de Darcy se simplifie de la façon suivante :

$$U = -\frac{k\rho g}{\mu} \nabla \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) = -K \nabla h \quad (1.3.5)$$

où,

$h = \left(\frac{p}{\rho g} + z \right)$: représente le potentiel hydraulique ou la charge piézométrique, $[L]$;

$K = \frac{k\rho g}{\mu}$: est le coefficient de conductivité hydraulique ou de perméabilité, $[LT^{-1}]$.

1.3.2 Equation de continuité

L'équation de continuité de l'écoulement en milieux poreux est basée sur le principe de conservation de masse et s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho q) = \rho R \quad (1.3.6)$$

où R est le terme source volumique.

1.4 Ecoulement d'eau souterraine

L'eau peut être momentanément stockée dans les océans et les lacs (sous forme d'eau liquide), dans les calottes polaires et les glaciers (sous forme de glace), et dans le sous-sol (sous forme d'eaux souterraines). Les écoulements souterrains constituent la partie cachée du cycle de l'eau (voir Figure 1.4.1) et l'idée selon laquelle les débits dans les rivières étaient principalement constitués d'eau provenant des écoulements de surface a été dominante pendant des décennies.

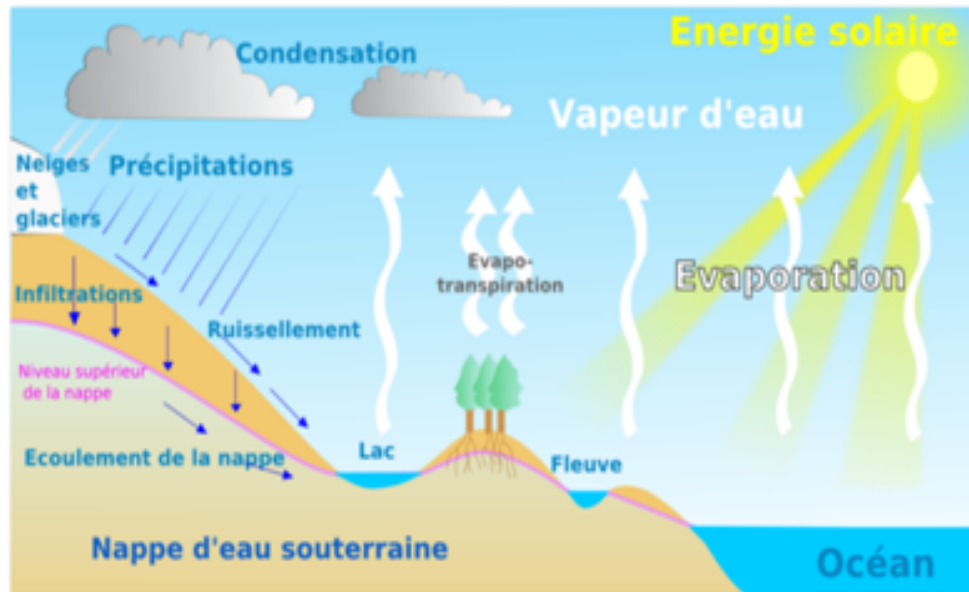


Figure 1.4.1 – Cycle de l'eau

Le mouvement de l'eau dans le sous-sol est très lent par rapport aux vitesses de ruissellement en surface, ce qui implique un long temps dans le sous-sol et de faibles flux. On distingue deux grands types de zones [19]

1.4.1 Zone saturée

La zone saturée correspond à la partie du sol située sous la nappe phréatique (surface libre des aquifères) où les pores sont complètement remplis d'eau, avec une pression d'eau positive.

1.4.2 Zone non saturée

La zone non saturée correspond à la partie située entre la surface du sol et la surface phréatique des aquifères. Elle est constituée simultanément, au moins pour une période de temps donnée, d'air et d'eau dans les pores. Son épaisseur est très petite voire nulle dans les sols humides, et estimée à plusieurs centaines de mètres dans les sols arides, ou secs. On distingue aussi :

Zone Vadose

La zone vadose est la partie du sol qui se trouve au dessus de la nappe phréatique, où les pores sont partiellement saturés en eau (zone radiculaire, vadose, intermédiaire), et saturée en eau (zone capillaire). Dans ce cas l'eau est sous pression négative.

Zone capillaire

La zone capillaire est la partie du sol située au dessus de la nappe phréatique et au dessous de la limite de la remontée capillaire, elle est caractérisée par une pression d'eau négative.

1.5 Problème d'intrusion saline

Dans les zones côtières, la forte densité de population et la surélévation du niveau de la mer provoque une baisse du niveau de la nappe phréatique et une intrusion de l'eau

saline dans les nappes d'eau douce. L'eau salée, plus dense que l'eau douce, glisse en dessous de cette dernière et envahit l'aquifère sous forme d'un biseau salé. Cela permet de produire une interface ou zone de transition entre les deux fluides. On distingue trois types d'interfaces

Interface abrupte

Les deux fluides sont considérés non miscibles, sans diffusion de sel. Dans le modèle d'interface abrupte, on considère un écoulement défini par deux zones fluides de densités distinctes.

Interface diffuse

Cette approche consiste à supposer que les eaux douce et salée sont miscibles et qu'il existe entre ces deux fluides une zone de transition qui n'est ni salée ni douce.

Sans interface

Il s'agit d'un modèle à deux fluides miscibles.

Préliminaires et notions de base

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats utiles sur les espaces fonctionnels [3], [8], [16] et [20], puis nous introduisons la méthode des volumes finis [26], [4] et [5] et celle des éléments finis [8] et [44].

2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Dans ce chapitre, on considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et pour $1 \leq p < \infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions u mesurables, définies sur Ω , telles que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty, \quad (2.1.1)$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 2.1.1 *L'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions bornées*

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \, u \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\} \quad (2.1.2)$$

cette espace est muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; \, |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

Notation 2.1.1 Soit $1 < p < \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Théorème 2.1.1 (Inégalité de Hölder)[3, 20] Soit $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| \, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}, \quad (2.1.3)$$

Théorème 2.1.2 (Inégalité de Minkowski)[3] Si $1 \leq p < \infty$, alors

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.1.4)$$

Théorème 2.1.3 [3, 20] $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 2.1.4 (Densité)[20] L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Théorème 2.1.5 [3, 20] L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Corollaire 2.1.1 [3] L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Théorème 2.1.6 [3, 20] L'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

En particulier, si $p = 2$ on note $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions définies sur Ω à valeurs réelles de carré intégrable sur Ω pour la mesure de Lebesgue telle que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx < \infty$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 2.1.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit u et v deux fonctions de $L^2(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.1.5)$$

2.2 Les espaces de Hilbert

Définition 2.2.1 Soit V un espace vectoriel, un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$, symétrique et définie positive.

Définition 2.2.2 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme associée au produit scalaire (u, v) et notée par $\|u\| = (u, u)^{1/2}$.

Exemple 2.2.1 $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx \quad (2.2.1)$$

Proposition 2.2.1 [20] V est uniformément convexe et donc réflexif.

Théorème 2.2.1 (Projection sur un convexe fermé)[20]

Soit $C \subset V$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $f \in V$, il existe $u \in C$ unique tel que

$$|f - u| = \min_{v \in C} |f - v| \quad (2.2.2)$$

De plus u est caractérisé par la propriété :

$$u \in C \quad (2.2.3)$$

$$(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in C$$

On note $u = P_C f$ projection de f sur C (P_C est l'opérateur de projection)

Proposition 2.2.2 [20] Sous les hypothèses du théorème (2.1.1) on a

$$|P_C f_1 - P_C f_2| \leq |f_1 - f_2| \quad \forall f_1, f_2 \in V \quad (2.2.4)$$

Théorème 2.2.2 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)[20]

Etant donné $\varphi \in V'$ (dual de l'espace de Hilbert V) il existe $f \in V$ unique tel que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (2.2.5)$$

De plus on a

$$|f| = \|\varphi\|_{V'}$$

Définition 2.2.3 On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est

(i) **continue** s'il existe une constante α telle que

$$|a(u, v)| \leq \alpha |u| |v| \quad \forall u, v \in V, \quad (2.2.6)$$

(ii) **coercive** s'il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \beta |v|^2 \quad \forall v \in V \quad (2.2.7)$$

Théorème 2.2.3 (Stampacchia)[20]

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit C un convexe, fermé non vide.

Etant donné $\varphi \in V'$ il existe $u \in C$ unique tel que

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad \forall v \in C \quad (2.2.8)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in C \quad (2.2.9)$$

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in C} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

Théorème 2.2.4 (Théorème de point fixe de Banach)[20]

Soit X un espace métrique complet et soit $S : X \longrightarrow X$ une application telle que

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq l d(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X \quad \text{avec } l < 1 \quad (2.2.10)$$

Alors S admet un point fixe unique, $u = Su$.

Corollaire 2.2.1 (Lax-Milgram)[20]

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in V'$ il existe $u \in V$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in V \quad (2.2.11)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par :

$$u \in V \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}, \quad \forall \varphi \in V' \quad (2.2.12)$$

Les détails des preuves des résultats des propositions 2.2.1 et 2.2.2, théorèmes 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 et 2.2.4 sont dans [20].

2.3 Les espaces de Sobolev

2.3.1 Espaces $H^m(\Omega)$

Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ (espace des fonctions indéfiniment continues) et à support compact dans Ω . Son espace dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ est appelé l'espace des distributions.

Si φ est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ et si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, on pose

$$\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.3.1)$$

avec $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Si T est une distribution sur Ω et si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est un multi-entier quelconque, on définit la dérivée au sens des distributions $\partial^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ de T par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

Définition 2.3.1 Pour un entier $m \geq 1$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall 0 \leq |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\} \quad (2.3.2)$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 2.3.1 L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) \, dx$$

Théorème 2.3.2 Pour tout entier positif m , la semi-norme

$$|u|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur l'espace $H_0^m(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$.

Théorème 2.3.3 L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace séparable.

Théorème 2.3.4 Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^m , ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, alors $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.

Définition 2.3.2 Soit m un entier positif. On note $H^{-m}(\Omega)$ le dual de l'espace $H_0^m(\Omega)$, et on le munit de la norme duale

$$\|f\|_{H^{-m}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^m(\Omega), v \neq 0} \frac{\langle f, v \rangle}{\|v\|_{H^m(\Omega)}}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit de dualité entre $H_0^m(\Omega)$ et son dual.

Théorème 2.3.5 (de trace) Soit Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1 . On définit l'application γ_1

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: H^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C(\bar{\partial\Omega}) \\ v &\longrightarrow \gamma_1(v) = \left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\partial\Omega} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

avec $\frac{\partial v}{\partial \eta} = \nabla v \cdot \eta$. Cette application γ_1 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^2(\Omega)$, on a

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^2(\Omega)}$$

Théorème 2.3.6 (Formule de Green) Soit Ω est un ouvert borné régulier de classe C^2 , si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) v(x) \, ds \quad (2.3.4)$$

En particulier, si $m = 1$ on note $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev telle que

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, n\}\} \quad (2.3.5)$$

Cet espace est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u(x) v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) \, dx$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 2.3.3 On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v|_{\Gamma} = 0\} \quad (2.3.6)$$

Proposition 2.3.1 L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 2.3.7 Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$, i.e.

$$H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n). \quad (2.3.7)$$

Théorème 2.3.8 (Inégalité de Poincaré) Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.8)$$

Théorème 2.3.9 (de trace) On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ . Alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et l'application

$$\begin{aligned} \gamma_0 & : \quad \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^0(\Gamma) \\ v & \longrightarrow \gamma_0 v = v|_{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

se prolonge par continuité en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ qu'on note par γ_0 .

Théorème 2.3.10 (Formule de Green) Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 . Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) \, dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \cdot \eta_i(x) \, ds. \quad (2.3.10)$$

où $\eta = (\eta_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

2.3.2 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Plus généralement, on peut définir des espaces $W^{m,p}(\Omega)$ pour un entier $m \geq 0$ et pour un réel $1 \leq p \leq +\infty$. nous pouvons donc donner la définition suivante.

Définition 2.3.4 *Pour un entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq m\} \quad (2.3.11)$$

où $\partial^\alpha v$ est la dérivée au sens des distributions.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach.

Si Ω un ouvert de classe C^1 , ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, alors

Corollaire 2.3.1 *(Injections de Sobolev $n \geq 2$)*

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On a

$$\begin{aligned} \text{si } 1 \leq p < n, & \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \quad \text{où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \\ \text{si } p = n, & \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[, \\ \text{si } p > n, & \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

avec injections continues.

De plus, si $p > n$ on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} |x - y|^\alpha \quad p.p. \ x, y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ et C dépend seulement de Ω, p et n . En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Remarque 2.3.1 *Pour $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.*

Théorème 2.3.11 *On suppose Ω de $\mathbb{R}^n$ borné de classe C^1 . On a*

$$\begin{aligned} \text{si } p < n, & \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*[\text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \\ \text{si } p = n, & \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[, \\ \text{si } p > n, & \quad \text{alors } W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \end{aligned}$$

avec injections compactes.

Lemme 2.3.1 *(Formule de Leibniz) Soit I l'intégrale définie par*

$$I(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(x, t) \, dx \quad \text{avec } h, g, f \in C^1(\mathbb{R}),$$

Alors

$$\frac{dI}{dt} = \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx + f(h(t), t) \frac{\partial h(t)}{\partial t} - f(g(t), t) \frac{\partial g(t)}{\partial t},$$

d'où

$$\int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx = \frac{dI}{dt} - f(h(t), t) \frac{\partial h(t)}{\partial t} + f(g(t), t) \frac{\partial g(t)}{\partial t}. \quad (2.3.12)$$

2.4 Espace $H(\text{div}, \Omega)$

On introduit un autre espace, intermédiaire entre $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$, pour les fonctions à valeurs vectorielles.

Définition 2.4.1 *L'espace $H(\text{div}, \Omega)$ est défini par*

$$H(\text{div}, \Omega) = \{\sigma \in (L^2(\Omega))^n \text{ tel que } \text{div} \sigma \in L^2(\Omega)\} \quad (2.4.1)$$

où $\text{div} \sigma$ est la divergence faible de σ .

Cet espace est muni du produit scalaire

$$(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} (\sigma(x) \cdot \tau(x) + \text{div} \sigma(x) \text{div} \tau(x)) dx,$$

et la norme associée

$$\|\sigma\|_{H(\text{div}, \Omega)} = \sqrt{(\sigma, \sigma)},$$

Proposition 2.4.1 *L'espace $H(\text{div}, \Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(\dots)$.*

Théorème 2.4.1 *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1 , ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, alors $C_c^\infty(\overline{\Omega})^n$ est dense dans $H(\text{div}, \Omega)$.*

Théorème 2.4.2 (Formule de divergence) *Soit Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1 . On définit l'application 'trace normale' γ_η*

$$\begin{aligned} H(\text{div}, \Omega) \cap C(\overline{\Omega}) &\longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega}) \\ \sigma &= (\sigma_i)_{1 \leq i \leq n} \longrightarrow \gamma_\eta(\sigma) = \sigma \cdot \eta|_{\partial\Omega} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

où $\eta = (\eta_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$. Cette application γ_η se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H(\text{div}, \Omega)$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. De plus, si $\sigma \in H(\text{div}, \Omega)$ et $\phi \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \text{div} \sigma \cdot \phi \, dx + \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \phi \, dx = \langle \sigma \cdot \eta, \gamma_0(\phi) \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

Définition 2.4.2 *On désigne par $H_0(\text{div}, \Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H(\text{div}, \Omega)$.*

$$H_0(\text{div}, \Omega) = \{\sigma \in H(\text{div}, \Omega) \text{ tel que } \sigma \cdot \eta|_{\Gamma} = 0\} \quad (2.4.3)$$

Proposition 2.4.2 *L'espace $H_0(\text{div}, \Omega)$ est un espace de Hilbert.*

2.5 Espaces de Sobolev avec poids

Nous allons à présent introduire une nouvelle famille d'espaces avec poids.

On désigne Ω l'intervalle ouvert $] -1, 1[$, et on y définit le poids

$$\forall \zeta \in \Omega, \quad \rho_\omega(\zeta) = (1 - \zeta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

On note que cette fonction est positive et intégrable sur Ω . On introduit l'espace des fonctions de carré intégrables pour la mesure $\rho_\omega(\zeta) \, d\zeta$:

$$L_\omega^2(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_{-1}^1 \varphi^2(\zeta) \rho_\omega(\zeta) \, d\zeta < \infty\}. \quad (2.5.1)$$

Puis, pour tout entier positif m , on désigne par

$$H_\omega^m(\Omega) = \{ \varphi \in L_\omega^2(\Omega); \forall k = 1, \dots, m, \frac{d^k \varphi}{dx^k} \in L_\omega^2(\Omega) \}, \quad (2.5.2)$$

que l'on munit de la norme

$$\|\varphi\|_{H_\omega^m(\Omega)} = \left(\int_{-1}^1 \sum_{k=0}^m \left(\frac{d^k \varphi}{d\zeta^k} \right)^2(\zeta) \rho_\omega(\zeta) d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'espace $H_{\omega,0}^m(\Omega)$ comme l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H_\omega^m(\Omega)$, et l'espace $H_\omega^{-m}(\Omega)$ comme son dual. La semi-norme

$$|\varphi|_{H_\omega^m(\Omega)} = \left(\int_{-1}^1 \left(\frac{d^m \varphi}{d\zeta^m} \right)^2(\zeta) \rho_\omega(\zeta) d\zeta \right)^{\frac{1}{2}},$$

est sur $H_{\omega,0}^m(\Omega)$ une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H_\omega^m(\Omega)}$.

En conclusion, on remarque que, le poids ρ_ω étant supérieur à 1, l'espace $L_\omega^2(\Omega)$ est inclus avec injection continue dans l'espace $L^2(\Omega)$; de même, pour tout entier positif m fixé, l'espace $H_\omega^m(\Omega)$ est inclus avec injection continue dans l'espace $H^m(\Omega)$.

Si on considère le carré $\Omega =]-1, 1[^2$, on introduit

$$\forall \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \quad \varpi(\mathbf{x}) = \rho_\omega(x) \rho_\omega(y).$$

De même, on définit

$$L_\omega^2(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega); \int_\Omega v^2(\zeta) \varpi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty \}. \quad (2.5.3)$$

$$H_\omega^m(\Omega) = \{ v \in L_\omega^2(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L_\omega^2(\Omega) \}, m > 0 \quad (2.5.4)$$

On munit ce dernier espace de la norme

$$\|v\|_{H_\omega^m(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha v)^2(\mathbf{x}) \varpi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}},$$

et de la semi-norme

$$|v|_{H_\omega^m(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} (\partial^\alpha v)^2(\mathbf{x}) \varpi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.6 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation pour les problèmes elliptiques, paraboliques ou hyperboliques. C'est une méthode bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation, elle est ainsi très utilisée en mécanique des fluides. Elle consiste à intégrer sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, et soit f une fonction donnée dans l'espace $L^2(\Omega)$, on considère le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.6.1)$$

2.6.1 Maillage admissible

On définit un maillage $\mathcal{T}$ de Ω par des volumes de contrôle vérifiant les conditions suivantes

1. La fermeture de l'union de tous les volumes de contrôle est $\overline{\Omega}$;
2. Si K et L sont deux volumes adjacents, le segment de droite qui lie les deux centres de K et L est perpendiculaire à l'arête e commune ($e = K \mid L$), (voir 2.6.1)

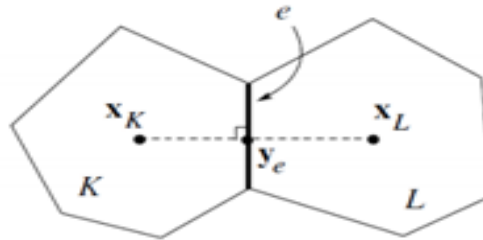


Figure 2.6.1 – Volumes de contrôle admissibles d'un maillage volume finis

3. Si $e \in \partial\Omega$ la droite passant par le centre de K est perpendiculaire à l'arête e , intersecte e (voir 2.6.2).

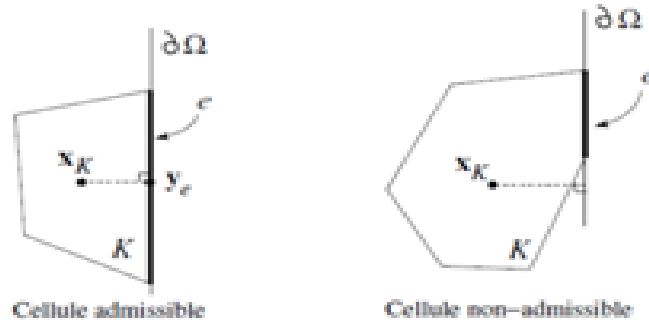


Figure 2.6.2 – Condition d'admissibilité du maillage

2.6.2 Discrétisation

On intègre la première équation de (2.6.1) sur une cellule K , on obtient

$$-\int_K \Delta u(x) \, dx = \int_K f(x) \, dx$$

d'où

$$-\int_K \nabla u(x) \cdot \eta_K \, d\sigma = |K| f_K \quad (2.6.2)$$

Ici, η_K est la normale unitaire dirigée à l'extérieur de K , et

$$f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f(x) \, dx$$

On peut décomposer K en des arêtes, la relation (2.6.2) s'écrit

$$\sum_{e \in \varepsilon_K} -\int_e \nabla u \cdot \eta_{K,e} \, d\sigma = |K| f_K$$

où ε_K est l'ensemble des arêtes de K .

On peut approcher le flux $-\nabla u \cdot \eta_{K,e}$ en utilisant une approximation de différence finie centrée

$$-\nabla u \cdot \eta_{K,e} = \frac{u_L - u_K}{d_{K|L}}$$

où $d_{K|L}$ est la distance entre le centre des cellules K et L .

d'où

$$F_{K,e} = - \int_e \nabla u \cdot \eta_{K,e} d\sigma = - |e| \frac{u_L - u_K}{d_{K|L}}$$

Donc, le schéma volume finis s'écrit

$$\sum_{e \in \varepsilon_K} F_{K,e} = |K| f_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}$$

Si $e \subset \partial\Omega$ et $e \in \varepsilon_K$, le flux $-\nabla u \cdot \eta_{K,e}$ est approximé par

$$F_{K,e} = - |e| \frac{u_K}{d_{K,e}}$$

Définition 2.6.1 (Conservativité) On dit que le schéma volumes finis est conservatif si flux numérique entrant dans un volume de contrôle est égal à celui sortant de l'autre.

Définition 2.6.2 (Consistance) On dit que le schéma volumes finis est consistant si l'ordre de l'approximation numérique choisi pour le flux soit supérieur ou égale à 1.

Définition 2.6.3 (Volumes Finis) On dit qu'un schéma numérique de type volumes finis est convergent, si les flux numériques approchés sont conservatifs et consistants.

2.7 Méthode des éléments finis

Dans cette section, on va présenter la méthode des éléments finis qui est l'une des méthodes les plus efficace pour résoudre des problèmes aux limites. Le principe de cette méthode est basé sur la formulation variationnelle (ou formulation faible) de ces problèmes. L'idée de base de la méthode des éléments finis est d'approcher l'espace de Hilbert V sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous-espace V_h de dimension finie. Le problème approché posé sur V_h se ramène à la résolution d'un système linéaire, dont la matrice est appelée matrice de rigidité. Par ailleurs, on peut choisir le mode de construction de V_h de manière à ce que le sous-espace V_h soit une bonne approximation de V et que la solution u_h dans V_h de la formulation faible discrète soit proche de la solution exacte u dans V .

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) de frontière $\partial\Omega$ assez régulière et soit f une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$, on considère le problème modèle de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.7.1)$$

dont nous savons qu'il admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$.

Le principe variationnel appliqué à (2.7.1) conduit à la formulation faible suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.7.2)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \quad \text{et} \quad l(v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_N)$$

On vérifie facilement que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue et coercive et que la forme linéaire $l(.)$ est continue et par suite, par application du théorème de Lax-Milgram, on en déduit que le problème (2.7.2) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$.

La construction de l'espace de dimension finie exige un maillage de Ω qui satisfait certaines règles. On suppose que Ω est polyédrique (polygonal si $N = 2$), c'est-à-dire le maillage de Ω est formé par des tétraèdres (des triangles, des rectangles si $N = 2$)

2.7.1 Éléments finis triangulaire

Pour décrire la méthode des éléments finis triangulaire, on regroupe les triangles (les tétraèdres en 3D) dans une famille des N -simplexes. Un N -simplexe N_s de $\mathbb{R}^N$ est l'enveloppe convexe de $(N + 1)$ points $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ de $\mathbb{R}^N$.

On note $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq N}$ les coordonnées du vecteur a_j . Le N -simplexe est non-dégénéré si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

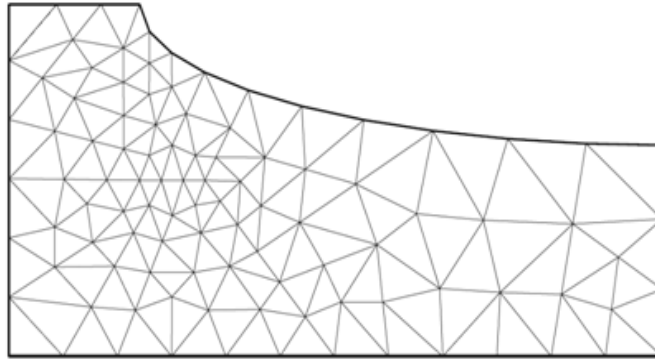


Figure 2.7.1 – Exemple de maillage triangulaire en dimension $N = 2$

Définition 2.7.1 On appelle **une triangulation** de $\overline{\Omega}$ l'ensemble $\mathcal{T}_h$ de N -simplexes (non dégénérés) $(N_{s_i})_{1 \leq i \leq n}$ qui vérifient

1. $N_{s_i} \subset \overline{\Omega}$ et $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^n N_{s_i}$,
2. en dimension $N = 2$, l'intersection $N_{s_i} \cap N_{s_j}$ de deux triangles distincts est soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit à une arête commune entière (en dimension $N = 3$, l'intersection est soit vide, soit un sommet commun, soit une face commune entière, soit une arête commune entière).

On note $h = \max_{N_{s_i} \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(N_{s_i}), \forall i = \{1, \dots, n\}$.

On définit $\mathbb{P}_k$ comme l'ensemble des polynômes à coefficients réels de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égale à k , c'est-à-dire que pour tout $p \in \mathbb{P}_k$ s'écrit sous la forme

$$p(x) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_N \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_N \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N} \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_N). \quad (2.7.3)$$

On peut utiliser les coordonnées barycentriques au lieu des coordonnées cartésiennes. Si N_s est N -simplexe non-dégénéré de sommets $(a_j)_{1 \leq j \leq N+1}$, les coordonnées barycentriques $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq N+1}$ de $x \in \mathbb{R}^N$ sont définies par

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j = 1 \\ \sum_{j=1}^{N+1} a_{i,j} \lambda_j = x_i \text{ pour } 1 \leq i \leq N \end{cases} \quad (2.7.4)$$

qui admet une solution car la matrice A est inversible.

Définition 2.7.2 *Etant donné un maillage $\mathcal{T}_h$ d'un ouvert Ω , la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_k$, ou éléments finis triangulaire de Lagrange d'ordre k , associée à ce maillage, est définie par l'espace discret*

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{N_{s_i}} \in \mathbb{P}_k \text{ pour tout } N_{s_i} \in \mathcal{T}_h\} \quad (2.7.5)$$

On appelle **degré de liberté** d'une fonction $v \in V_h$ l'ensemble des valeurs de v en ces noeuds $(\widehat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$, où n_{dl} est le nombre de degré de liberté de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_k$. On définit aussi le sous-espace V_{0h} par

$$V_{0h} = \{v \in V_h \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (2.7.6)$$

Proposition 2.7.1 *L'espace V_h est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont la dimension est le nombre de degrés de liberté, et il existe une base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ de V_h définie par*

$$\phi_i(\widehat{a}_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n_{dl},$$

telle que

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} v(\widehat{a}_i) \phi_i(x).$$

On résout le problème modèle (2.7.1) par la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_k$. Le problème discret est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_{0h} \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_{0h}. \end{cases} \quad (2.7.7)$$

où

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx \quad \text{et} \quad l(v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx$$

On décompose u_h sur la base des $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n_{dl}}$ et on prend $v_h = \phi_i$ ce qui donne

$$\sum_{j=1}^{n_{dl}} u_h(\widehat{a}_j) \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx.$$

En notant $U_h = (u_h(\widehat{a}_j))_{1 \leq j \leq n_{dl}}$, $b_h = (\int_{\Omega} f(x) \phi_i(x) dx)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$, et en introduisant la matrice de rigidité

$$A_h = \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx \right)_{1 \leq i, j \leq n_{dl}},$$

La formulation variationnelle est équivalente au système linéaire

$$A_h U_h = b_h$$

En général, l'intersection des supports de ϕ_j et ϕ_i est vide et la plupart des coefficients de A_h sont nuls. La matrice de rigidité A_h est donc creuse.

Convergence et estimation d'erreur

Nous démontrons la convergence des méthodes des éléments finis pour le problème de Dirichlet (2.7.1).

Définition 2.7.3 Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillage de Ω . On dit qu'il s'agit d'une suite de **maillages réguliers** si

1. la suite $h = \max_{N_{s_i} \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(N_{s_i})$ tend vers 0,

2. il existe une constante C telle que, pour tout $h > 0$ et tout $N_s \in \mathcal{T}_h$,

$$\frac{\text{diam}(N_s)}{\rho(N_s)} \leq C,$$

$$\text{où } \text{diam}(N_s) = \max_{x,y \in N_s} \|x - y\|, \rho(N_s) = \max_{B_r \subset N_s} (2r).$$

Théorème 2.7.1 Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages réguliers de Ω . Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, la solution du problème de Dirichlet (2.7.1), et $u_h \in V_{0h}$, celle de son approximation (2.7.7) par la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_k$. Alors la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_k$ converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

De plus, si $u \in H^{k+1}(\Omega)$ et si $k + 1 > N/2$, alors on a l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)},$$

où C est une constante indépendante de h et de u .

2.7.2 Eléments finis rectangulaire

Si le domaine Ω est de type rectangulaire, on peut aussi faire un recouvrement par des N -rectangles et utiliser la méthode des éléments finis de type Lagrange, dits éléments finis $\mathbb{Q}_k$.

Un N -rectangle N_r de $\mathbb{R}^N$ est défini comme le pavé (non dégénéré) $\Pi_{i=1}^N [l_i, L_i]$ avec $-\infty < l_i < L_i < +\infty$. On note $(a_j)_{1 \leq j \leq 2N}$ les sommets de N_r .

Définition 2.7.4 Un **maillage rectangulaire** de $\overline{\Omega}$ est un ensemble $\mathcal{T}_h$ de N -rectangles (non dégénérés) $(N_{r_i})_{1 \leq i \leq n}$ qui vérifient

1. $N_{r_i} \subset \overline{\Omega}$ et $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^n N_{r_i}$,
2. en dimension $N = 2$, l'intersection $N_{r_i} \cap N_{r_j}$ de deux rectangles distincts est soit vide, soit un sommet commun, soit une face commune entière.

On note $h = \max_{N_{r_i} \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(N_{r_i}), \forall i = \{1, \dots, n\}$.

On définit $\mathbb{Q}_k$ comme l'ensemble des polynômes à coefficients réels de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égale à k par rapport à chaque variable, c'est-à-dire que pour tout $p \in \mathbb{Q}_k$ s'écrit sous la forme

$$p(x) = \sum_{0 \leq i_1 \leq k, \dots, 0 \leq i_N \leq k} \alpha_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N} \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_N).$$

Exemple 2.7.1 Si $k = 1$ et $N = 2$, $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 x_2$.

Définition 2.7.5 Etant donné un maillage rectangulaire $\mathcal{T}_h$ d'un ouvert Ω , la méthode des éléments finis $\mathbb{Q}_k$ est définie par l'espace discret

$$W_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) \text{ tel que } v|_{N_{r_i}} \in \mathbb{Q}_k \text{ pour tout } N_{r_i} \in \mathcal{T}_h\}$$

On appelle noeuds des **degrés de liberté** l'ensemble des points $(\widehat{a}_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$, où n_{dl} des treillis d'ordre k de chacun des N -rectangles $N_{r_i} \in \mathcal{T}_h$.

Proposition 2.7.2 L'espace W_h est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont la dimension est le nombre de degrés de liberté n_{dl} . De plus, il existe une base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n_{dl}}$ de W_h définie par

$$\phi_i(\widehat{a}_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n_{dl},$$

telle que

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n_{dl}} v(\widehat{a}_i) \phi_i(x).$$

On a les mêmes résultats de convergence que pour les éléments finis triangulaires.

Théorème 2.7.2 Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages rectangulaires réguliers de Ω . Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, la solution du problème de Dirichlet (2.7.1), et $u_h \in V_{0h}$, la solution approchée par la méthode des éléments finis $\mathbb{Q}_k$. Alors la méthode des éléments finis $\mathbb{Q}_k$ converge, c'est-à-dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

De plus, si $u \in H^{k+1}(\Omega)$ et si $k+1 > N/2$, alors on a l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)},$$

où C est une constante indépendante de h et de u .

Etude d'un problème de deux fluides immiscibles

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter un système d'équations pour décrire le problème d'intrusion saline avec une interface abrupte dans un aquifère confiné. Ensuite, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution. Enfin, nous proposons un schéma volume finis et montrons un résultats de stabilité pour notre schéma ainsi que donner quelques résultats numériques.

3.1 Approximation de Ghyben-Herzberg

Le problème d'intrusion saline dans les aquifères côtiers a été analysé sous tous ses angles depuis que W. Badon-Ghyben(1888) et A. Herzberg (1901). Ils ont développé une méthode simple et utile afin d'estimer la profondeur de l'interface eau douce-eau salée dans le cas stationnaire. Cette méthode est connue par le principe de Ghyben-Herzberg, voir par exemple [15, 48]. Leur analyse a été fondée sur le principe de l'hydrostatique et tient compte des hypothèses suivantes :

- l'eau salée et l'eau douce sont immiscibles (interface abrupte) ;
- le biseau d'eau salée est considérée comme quasi-hydrostatique ;
- la nappe d'eau douce est supposée verticalement hydrostatique (écoulements plans).

Le principe de Ghyben-Herzberg permet d'obtenir une relation entre la hauteur piézométrique d'eau douce (h_f) au-dessus du niveau moyen de la mer et la profondeur (h_s) de l'interface eau douce-eau salée sous le niveau de la mer (Figure 3.1.1). Ce qui se traduit par la relation suivante

$$h_s = \frac{\rho_f}{\rho_s - \rho_f} h_f = \delta h_f \quad (3.1.1)$$

où $\rho_s = 1.025 \text{ g/cm}^3$ et $\rho_f = 1.000 \text{ g/cm}^3$.

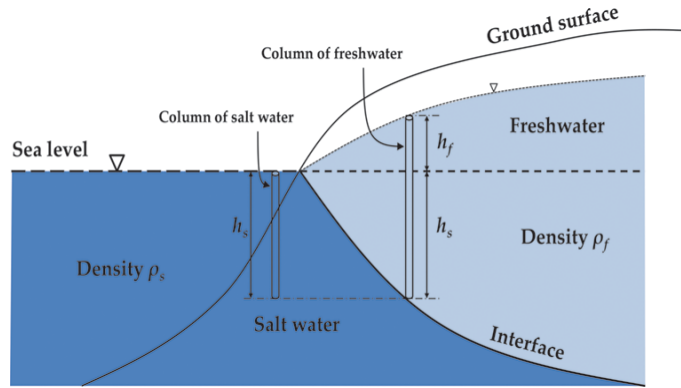


Figure 3.1.1 – Schéma d'un aquifère côtier selon la relation de Ghyben-Herzberg.

Pour ces valeurs de densité, la profondeur de l'interface sous le niveau de la mer s'écrit sous la forme :

$$h_s = 40h_f \quad (3.1.2)$$

3.2 Modèle d'intrusion saline 3D

Dans notre étude, nous considérons un modèle d'interface abrupte qui consiste à supposer que l'eau salée et l'eau douce sont immiscibles et que donc les zones occupées par chaque fluide sont séparées par une interface **abrupte**, voir Figure 3.2.1 .

Cette interface est en réalité une zone de transition (car ces deux fluides sont en fait miscibles), mais dans ce modèle, on suppose que l'épaisseur de cette zone est très petite comparée aux dimensions horizontales de l'aquifère.

Il s'agit donc d'un modèle à deux fluides non miscibles, sans diffusion de sel.

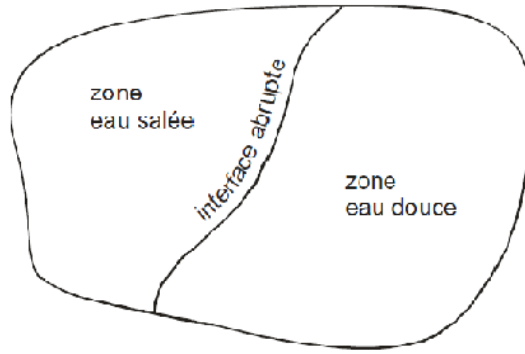


Figure 3.2.1 – Représentation du domaine dans l'hypothèse d'une interface abrupte [6].

3.2.1 Hypothèses sur l'étude du notre problème

Compressibilité du fluide

Nous allons considérer des fluides faiblement compressibles, c.à.d $\alpha_P \ll 1$. Nous allons exploiter ce fait une première fois combiné à la faible mobilité d'un fluide en milieu poreux, pour simplifier l'équation de Darcy à :

$$q = -\frac{k\rho_0 g}{\mu} \nabla \Phi$$

Compressibilité du sol

Nous allons supposer que le sol est faiblement compressible donc le coefficient de compressibilité β_P est petit

Hypothèse de Bear

Cette hypothèse formulée par Bear, consiste à négliger la variation de densité dans la direction de l'écoulement, c'est à dire $\nabla \rho \cdot q \ll 1$. Donc

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q) = \rho Q \Leftrightarrow \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot q + \rho \nabla \cdot q = \rho Q \quad (3.2.1)$$

D'après (1.2.5) et (1.2.6) on déduit que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \alpha_P \frac{\partial P}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = (1 - \phi) \beta_P \frac{\partial P}{\partial t}.$$

En substituant ces valeurs dans (3.2.1), on obtient

$$\rho(1 - \phi) \beta_P \frac{\partial P}{\partial t} + \phi \rho \alpha_P \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \nabla \cdot q = \rho Q$$

d'où

$$\rho((1 - \phi) \beta_P + \phi \alpha_P) \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \nabla \cdot q = \rho Q$$

puisque

$$q = -\frac{k \rho_0 g}{\mu} \nabla \Phi \text{ et } P = \rho_0 g \Phi - \rho_0 g z$$

on obtient après simplifications ($\rho \neq 0$), l'équation

$$\rho_0 g((1 - \phi) \beta_P + \phi \alpha_P) \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \nabla \cdot (K \nabla \Phi) = Q \quad (3.2.2)$$

où $S_0 = \rho_0 g((1 - \phi) \beta_P + \phi \alpha_P)$ est le coefficient d'emmagasinement en eau du sol.

3.2.2 Equations d'écoulement

On considère un écoulement en milieu poreux saturé, tant pour le fluide "eau douce" que pour le fluide "eau salée". Dans chaque domaine, nous avons une équation de conservation de la masse spécifique à chaque milieu.

Dans la zone d'eau douce, nous avons :

$$S_f \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} + \nabla \cdot q_f = Q_f, \quad (3.2.3)$$

et dans la zone d'eau de mer, nous avons :

$$S_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} + \nabla \cdot q_s = Q_s, \quad (3.2.4)$$

où S_f (resp. S_s) est le coefficient d'emmagasinement en eau dans le domaine d'eau douce

(resp. dans le domaine salé), ρ_f , ρ_s sont les densités de référence de l'eau douce et celle de l'eau salée, Φ_f , Φ_s sont les charges hydrauliques dans la zone d'eau douce et dans la

zone salée, q_f , q_s sont les flux de Darcy dans la zone d'eau douce et dans celle d'eau salée et enfin Q_f , Q_s sont des termes sources. On rappelle que :

$$S_f = \rho_f g((1 - \phi)\beta_P + \phi\alpha_P), \quad q_f = -K_f \nabla \Phi_f, \quad K_f = \frac{k\rho_f g}{\mu_f},$$

$$S_s = \rho_s g((1 - \phi)\beta_P + \phi\alpha_P), \quad q_s = -K_s \nabla \Phi_s, \quad K_s = \frac{k\rho_s g}{\mu_s}.$$

3.2.3 Equation de l'interface séparant les deux fluides

L'interface abrupte est une surface qui peut être représentée par une équation de la forme générale :

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

En désignant z , l'élévation du point sur l'interface par $h = h(x, y, t)$, la relation de F devient

$$z = h(x, y, t) \text{ où } F = z - h(x, y, t) = 0. \quad (3.2.5)$$

Les pressions dans chaque zone sont égales à l'interface $z = h$ et à partir des définitions de Φ_f et Φ_s , nous avons

$$\rho_f(\Phi_f - h) = \rho_s(\Phi_s - h)$$

où

$$\begin{aligned} h(x, y, t) &= \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho_f} \Phi_s - \frac{\rho_f}{\rho_s - \rho_f} \Phi_f \\ &= (1 + \delta) \Phi_s - \delta \Phi_f \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

avec $\delta = \frac{\rho_f}{\rho_s - \rho_f}$.

Par conséquent, l'équation d'interface devient

$$F = z - (1 + \delta) \Phi_s + \delta \Phi_f = 0 \quad (3.2.7)$$

On suppose qu'il ya aucune diffusion à travers l'interface entre l'eau douce et l'eau salée c.à.d

$$\left(\frac{q_f}{\phi} - v\right) \cdot n = \left(\frac{q_s}{\phi} - v\right) \cdot n = 0 \quad (3.2.8)$$

où v désigne la vitesse de l'interface, n le vecteur normal à l'interface et ϕ la porosité du support.

Les composantes normales de la vitesse à l'interface sont égales dans chaque zone ce qui correspond au fait que l'on suppose aucun transfert de masse à travers de l'interface. Ainsi on a

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla F = 0$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{q_f}{\phi} \cdot \nabla F = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{q_s}{\phi} \cdot \nabla F = 0 \quad (3.2.9)$$

En combinant (3.2.7) avec (3.2.9) on obtient

$$\phi \delta \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} - \phi(1 + \delta) \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} - K_f \{ \nabla z - (1 + \delta) \nabla \Phi_s + \delta \nabla \Phi_f \} \cdot \nabla \Phi_f = 0 \quad (3.2.10)$$

$$\phi \delta \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} - \phi(1 + \delta) \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} - K_s \{ \nabla z - (1 + \delta) \nabla \Phi_s + \delta \nabla \Phi_f \} \cdot \nabla \Phi_s = 0 \quad (3.2.11)$$

3.3 Modèle d'interface abrupte 2D

L'écoulement dans un milieu poreux est en général tridimensionnel. On suppose que l'écoulement est horizontal à l'intérieur de l'aquifère. C'est l'hypothèse de Dupuit, valable puisque les épaisseurs des aquifères sont relativement petites devant leurs dimensions horizontales. Cela permet de simplifier le problème par intégration des équations d'écoulement selon la direction verticale pour obtenir un problème 2D ([11], [12], [14], [13]).

L'aquifère est schématisé par un domaine 3D. De plus, la côte de substratum sera notée h_2 , la côte de l'interface eau douce-eau salée sera notée h et la côte du toit de l'aquifère sera notée h_1 (voir Figure 3.3.1).

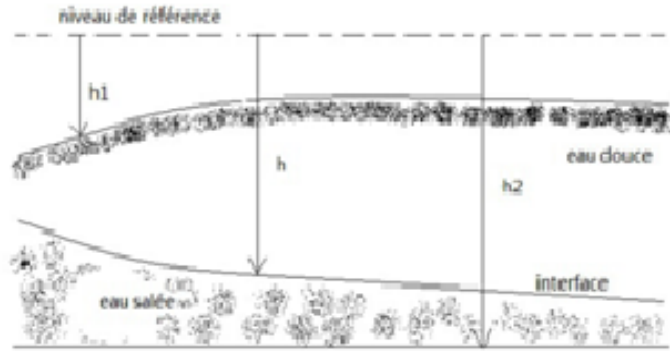


Figure 3.3.1 – Domaine d'aquifère 3D[35].

Intégration verticale dans le domaine d'eau douce

On intégrant l'équation (3.2.3) entre la profondeur de l'interface h et la surface supérieure h_1 , on trouve

$$\int_h^{h_1} \left(S_f \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} + \nabla \cdot q_f \right) dz = 0$$

En appliquant la formule de Leibniz (2.3.12) au premier terme

$$\int_h^{h_1} S_f \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} dz = S_f \frac{\partial}{\partial t} \int_h^{h_1} \Phi_f dz + S_f \Phi_f(h) \frac{\partial h}{\partial t} - S_f \Phi_f(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial t}$$

ici $B_f = h_1 - h$ est l'épaisseur de la zone d'eau douce. On pose $\widetilde{\Phi}_f$ est la moyenne verticale de Φ_f

$$\widetilde{\Phi}_f = \frac{1}{B_f} \int_h^{h_1} \Phi_f dz$$

et on a donc

$$\begin{aligned} \int_h^{h_1} S_f \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} dz &= S_f \frac{\partial}{\partial t} \left(B_f \widetilde{\Phi}_f \right) - S_f \Phi_f(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial t} + S_f \Phi_f(h) \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= S_f B_f \frac{\partial \widetilde{\Phi}_f}{\partial t} + S_f \widetilde{\Phi}_f \frac{\partial B_f}{\partial t} - S_f \Phi_f(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial t} + S_f \Phi_f(h) \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned}$$

d'où

$$\int_h^{h_1} S_f \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} dz = S_f B_f \frac{\partial \widetilde{\Phi}_f}{\partial t} + S_f \left(\widetilde{\Phi}_f - \Phi_f(h_1) \right) \frac{\partial h_1}{\partial t} - S_f \left(\widetilde{\Phi}_f - \Phi_f(h) \right) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.3.1)$$

De même d'après la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}
 \int_h^{h_1} \nabla \cdot q_f dz &= \int_h^{h_1} \operatorname{div}_{x,y} q_{f_{x,y}} dz + \int_h^{h_1} \partial_z q_{f_z} dz \\
 &= \operatorname{div}_{x,y} \left(\int_h^{h_1} q_{f_{x,y}} dz \right) - q_{f_{x,y}}(h_1) \cdot \nabla h_1 + q_{f_{x,y}}(h) \cdot \nabla h + \int_h^{h_1} \partial_z q_{f_z} dz \\
 &= \operatorname{div}(B_f \tilde{q}_f) - q_{f_{x,y}}(h_1) \cdot \nabla h_1 + q_{f_{x,y}}(h) \cdot \nabla h + \int_h^{h_1} \partial_z q_{f_z} dz
 \end{aligned}$$

où

$$\tilde{q}_f = \frac{1}{B_f} \int_h^{h_1} q_{f_{x,y}} dz \quad \text{et} \quad \int_h^{h_1} \partial_z q_{f_z} dz = q_{f_z}(h_1) - q_{f_z}(h)$$

Alors

$$\int_h^{h_1} \nabla \cdot q_f dz = \operatorname{div}(B_f \tilde{q}_f) - q_f(h_1) \cdot (\nabla h_1 - \nabla z) + q_f(h) \cdot (\nabla h - \nabla z)$$

Donc

$$\int_h^{h_1} \nabla \cdot q_f dz = \operatorname{div}(B_f \tilde{q}_f) + q_f(h_1) \cdot (\nabla z - \nabla h_1) - q_f(h) \cdot (\nabla z - \nabla h) \quad (3.3.2)$$

En faisant la somme de (3.3.1) et (3.3.2) on obtient

$$\begin{aligned}
 S_f B_f \frac{\partial \tilde{\Phi}_f}{\partial t} + \operatorname{div}(B_f \tilde{q}_f) + S_f \left(\tilde{\Phi}_f - \Phi_f(h_1) \right) \frac{\partial h_1}{\partial t} - S_f \left(\tilde{\Phi}_f - \Phi_f(h) \right) \frac{\partial h}{\partial t} \\
 + q_f(h_1) \cdot (\nabla z - \nabla h_1) - q_f(h) \cdot (\nabla z - \nabla h) = 0
 \end{aligned}$$

Comme Φ_f , K_f et B_f sont indépendants de z , on a

$$\begin{aligned}
 \tilde{q}_f &= \frac{1}{B_f} \int_h^{h_1} q_{f_{x,y}} dz \\
 &= \frac{1}{B_f} \int_h^{h_1} (-K_f \Phi_f) dz
 \end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{q}_f = -\tilde{K}_f \nabla \tilde{\Phi}_f$$

Puisque Φ_f est indépendant de z , alors $\Phi_f = \tilde{\Phi}_f = \tilde{\Phi}_f(h) = \Phi_f(h)$. En effet

$$\tilde{\Phi}_f = \frac{1}{B_f} \int_h^{h_1} \Phi_f dz = \Phi_f$$

Ainsi, l'intégration verticale de l'équation (3.2.3) s'écrit

$$S_f B_f \frac{\partial \widetilde{\Phi}_f}{\partial t} = \nabla \cdot (B_f \widetilde{K}_f \nabla \widetilde{\Phi}_f) - q_f|_{h_1} \cdot \nabla(z - h_1) + q_f|_h \cdot \nabla(z - h). \quad (3.3.3)$$

Intégration verticale dans le domaine d'eau salée

De même, on intégrant l'équation (3.2.4) entre la côte du substratum h_2 et celle de l'interface h , on obtient

$$S_s B_s \frac{\partial \widetilde{\Phi}_s}{\partial t} = \nabla \cdot (B_s \widetilde{K}_s \nabla \widetilde{\Phi}_s) - q_s|_h \cdot \nabla(z - h) + q_s|_{h_2} \cdot \nabla(z - h_2). \quad (3.3.4)$$

où

$B_s = h - h_2$ est l'épaisseur de la zone d'eau salée,

$\widetilde{\Phi}_s = \frac{1}{B_s} \int_{h_2}^h \Phi_s dz$ est la moyenne de Φ_s sur la verticale ;

$\widetilde{K}_s = \frac{1}{B_s} \int_{h_2}^h K_s dz$ est la moyenne de chaque élément du tenseur K_s sur la verticale.

Continuité des flux aux interfaces

1. Calcul du flux $q_f|_{z=h} \cdot \nabla(z - h)$

En utilisant l'équation qui régit le déplacement de l'interface (3.2.9) et en combinant avec la continuité de la composante normale de la vitesse, on obtient

$$q_f|_{z=h} \cdot \nabla(z - h) = q_s|_{z=h} \cdot \nabla(z - h) = \phi \frac{\partial h}{\partial t}.$$

2. Calcul du flux $q_f|_{z=h_1} \cdot \nabla(z - h_1)$

Dans notre cas, on utilise un aquifère confiné dont la couche supérieure est imperméable, i.e pas de flux entre la zone d'eau douce et le toit $z = h_1$, on a

$$q_f|_{z=h_1} \cdot \nabla(z - h_1) = 0.$$

3. Calcul du flux $q_s|_{z=h_2} \cdot \nabla(z - h_2)$

Comme la couche inférieure de l'aquifère est imperméable, i.e pas de flux entre la zone d'eau salée et le fond $z = h_2$, on a

$$q_s|_{z=h_2} \cdot \nabla(z - h_2) = 0.$$

D'après l'étude précédente, notre modèle est régi par le système suivant où (Φ_f, Φ_s) sont les inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (K(x) B_f(\Phi_f, \Phi_s) \nabla \Phi_f) = Q_f, \text{ sur } \Omega, \\ \phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot ((1 + \alpha) K(x) B_s(\Phi_f, \Phi_s) \nabla \Phi_s) = Q_s, \text{ sur } \Omega, \\ B_f(\Phi_f, \Phi_s) = h_1 - h, \\ B_s(\Phi_f, \Phi_s) = h - h_2, \\ h = (1 + \delta) \Phi_s - \delta \Phi_f \end{array} \right. \quad (3.3.5)$$

Ce système peut être écrit sous une forme équivalente si nous prenons la charge hydraulique de l'eau douce et la profondeur de l'interface comme inconnues. On a :

$$\Phi_s = \frac{\rho_f}{\rho_s} \Phi_f + \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_s} h = \frac{1}{1 + \alpha} \Phi_f + \frac{\alpha}{1 + \alpha} h.$$

Donc,

$$\phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (K(h_1 - h) \nabla \Phi_f) = Q_f,$$

et

$$\phi \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha K(h - h_2) \nabla h) + \nabla \cdot (K(h_1 - h) \nabla \Phi_f) - \nabla \cdot (K(h_1 - h_2) \nabla \Phi_f) = Q_s,$$

En sommant ces deux équations on obtient :

$$-\nabla \cdot (K(h_2 - h_1) \nabla \Phi_f) + \nabla \cdot (\alpha K(h_2 - h) \nabla h) = Q_f + Q_s.$$

D'où, notre système est

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (K(h_2 - h) \nabla \Phi_f) - \nabla \cdot (\alpha K(h_2 - h) \nabla h) = -Q_s \\ -\nabla \cdot (K(h_2 - h_1) \nabla \Phi_f) + \nabla \cdot (\alpha K(h_2 - h) \nabla h) = Q_f + Q_s. \end{array} \right. \quad (3.3.6)$$

3.4 Les conditions initiales et aux bords

Pour compléter ce modèle, nous ajoutons les conditions initiales et aux limites, telles que

$$h = h_D, \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (3.4.1)$$

$$\Phi_f = \Phi_{f,D}, \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (3.4.2)$$

La condition initiale de la profondeur de l'interface est donnée par

$$h(x, 0) = h^0(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.4.3)$$

3.5 Modèle simplifié

Dans l'aquifère confiné (Figure 3.5.1), on suppose que l'eau douce est quasi-statique pour donner un système elliptique-parabolique dégénéré. Par conséquent, le système devient

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(K(x)T_s(h)\nabla h) + \operatorname{div}(K(x)T_s(h)\nabla \Phi_f) = -I_s \quad \text{in } \Omega \quad (3.5.1)$$

$$- \operatorname{div}(K(x)H_2\nabla \Phi_f) + \operatorname{div}(K(x)T_s(h)\nabla h) = I_s + I_f \quad \text{in } \Omega \quad (3.5.2)$$

$$h = h_D, \quad \Phi_f = \Phi_{f,D} \quad \text{sur } \Gamma \times [0, T] \quad (3.5.3)$$

$$h(x, 0) = h_0(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.5.4)$$

où H_2 est l'épaisseur de l'aquifère et $T_s(h) = H_2 - h$, l'épaisseur de la zone d'eau salée.

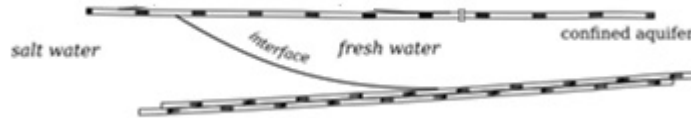


Figure 3.5.1 – Aquifère confiné

3.6 Existence et unicité de la solution

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ or 3), avec des bords Lipschiziens Γ . Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution faible, dans notre cas, on commence par introduire les hypothèses suivantes :

1. $K(x) \in L^\infty(\Omega)$, tel que

$$K_- \leq K(x) \leq K_+ \text{ p.p. dans } \Omega$$

avec $K_- = \min(K(x))$ and $K_+ = \max(K(x))$

2. $T_s(h) \in L^\infty(\Omega, (0, T))$, tel que

$$T_- \leq T_s(h) \leq T_+ \text{ p.p. dans } \Omega \times (0, T)$$

avec $T_- = \min(T_s(h))$ and $T_+ = \max(T_s(h))$

3. $h \in L^\infty(\Omega, (0, T))$, tel que

$$\delta \leq h(x, t) \leq H_2 \text{ p.p. dans } \Omega \times (0, T)$$

où δ est un petit réel positif. On note que p. p. signifie presque partout.

Afin d'écrire la formulation variationnelle, on doit spécifier d'abord les espaces fonctionnels des solutions faibles.

$$V_\varphi = \{v \in H^1(\Omega), v = \varphi \text{ on } \Gamma\}$$

avec $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev.

Considérons maintenant une fonction test $v_1 \in V_0$ et multiplions (3.5.1) par v_1 pour obtenir

$$\left(n_e \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(K(x)T_s(h)\nabla h) + \operatorname{div}(K(x)T_s(h)\nabla \Phi_f) \right) \cdot v_1 = -I_s \cdot v_1$$

En intégrant cette équation sur Ω , on trouve

$$\int_{\Omega} n_e \frac{\partial h}{\partial t} v_1 - \int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x)T_s(h)\nabla h) v_1 + \int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x)T_s(h)\nabla \Phi_f) v_1 = - \int_{\Omega} I_s v_1$$

Par l'utilisation du formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} n_e \frac{\partial h}{\partial t} v_1 + \int_{\Omega} K(x)T_s(h)\nabla h \cdot \nabla v_1 - \int_{\Gamma} K(x)T_s(h)\nabla h \cdot v_1 \eta$$

$$- \int_{\Omega} K(x) T_s(h) \nabla \Phi_f \nabla v_1 + \int_{\Gamma} K(x) T_s(h) \nabla \Phi_f v_1 \eta = - \int_{\Omega} I_s v_1$$

Comme $v_1 \in V_0$, d'où

$$\int_{\Omega} n_e \frac{\partial h}{\partial t} v_1 + \int_{\Omega} K(x) T_s(h) \nabla h \nabla v_1 - \int_{\Omega} K(x) T_s(h) \nabla \Phi_f \nabla v_1 = - \int_{\Omega} I_s v_1$$

De même, multiplions l'équation (3.5.2) par $v_2 \in V_0$, on trouve

$$(-\operatorname{div}(K(x) H_2 \nabla \Phi_f) + \operatorname{div}(K(x) T_s(h) \nabla h)) \cdot v_2 = (I_s + I_f) \cdot v_2$$

et intégrons sur Ω pour obtenir

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(K(x) H_2 \nabla \Phi_f) v_2 + \int_{\Omega} \operatorname{div}(K(x) T_s(h) \nabla h) v_2 = \int_{\Omega} (I_s + I_f) v_2$$

En utilisant la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K(x) H_2 \nabla \Phi_f \nabla v_2 - \int_{\Gamma} K(x) H_2 \nabla \Phi_f v_2 \eta - \int_{\Omega} K(x) T_s(h) \nabla h \nabla v_2 \\ + \int_{\Gamma} K(x) T_s(h) \nabla h v_2 \eta = \int_{\Omega} (I_s + I_f) v_2 \end{aligned}$$

Comme $v_2 \in V_0$, d'où

$$\int_{\Omega} K(x) H_2 \nabla \Phi_f \nabla v_2 - \int_{\Omega} K(x) T_s(h) \nabla h \nabla v_2 = \int_{\Omega} (I_s + I_f) v_2$$

La formulation faible du problème ((3.5.1) – (3.5.4)) est écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } (h, \Phi_f) \in V_{h_D} \times V_{f_D} \\ \int_{\Omega} n_e \frac{\partial h}{\partial t} v_1 + \int_{\Omega} K(x) T_s(h) \nabla h \nabla v_1 - \int_{\Omega} K(x) T_s(h) \nabla \Phi_f \nabla v_1 \\ \qquad \qquad \qquad = - \int_{\Omega} I_s v_1, \quad \forall v_1 \in V_0 \\ \int_{\Omega} K(x) H_2 \nabla \Phi_f \nabla v_2 - \int_{\Omega} K(x) T_s(h) \nabla h \nabla v_2 \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\Omega} (I_s + I_f) v_2, \quad \forall v_2 \in V_0 \end{array} \right. \quad (3.6.1)$$

Proposition 3.6.1 *Sous les hypothèses (1. – 3.), problème (3.6.1) admet une solution unique $(h, \Phi_f) \in V_{h_D} \times V_{\Phi_{f,D}}$.*

Preuve. Pour prouver ce résultat, en utilisant la formulation variationnelle du système (3.6.1) on peut écrit en forme simplifiée comme suit :

$$\begin{aligned} \left(n_e \frac{\partial h}{\partial t}, v_1 \right) + (K(x)T_s(h)\nabla h, \nabla v_1) - (K(x)T_s(h)\nabla \Phi_f, \nabla v_1) &= (-I_s, v_1), \\ (K(x)H_2\nabla \Phi_f, \nabla v_2) - (K(x)T_s(h)\nabla h, \nabla v_2) &= (I_s + I_f, v_2). \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Si on prend $\nabla v_1 = H_2$ et $\nabla v_2 = T_s(h)$ on a

$$\int_{\Omega} n_e \frac{\partial h}{\partial t} v_1 + \int_{\Omega} K(x)T_s(h) (H_2 - T_s(h)) \nabla h = \int_{\Omega} -I_s v_1 + (I_s + I_f) v_2.$$

On déduit que

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} v_1 + K(x)T_s(h) h \nabla h = -I_s v_1 + (I_s + I_f) v_2 \text{ a.e in } \Omega \quad (3.6.3)$$

dans le sens des distributions. Alors on va introduire une nouvelle inconnue W tel que

$$W = K(x)T_s(h) h \nabla h,$$

pour obtenir

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} v_1 + W = -I_s v_1 + (I_s + I_f) v_2, \quad (3.6.4)$$

et

$$W = K(x)T_s(h)h\nabla h. \quad (3.6.5)$$

En utilisant le théorème de Lax-Milgram deux fois : la première pour déterminer h de (3.6.5) en supposant W est connu, et la deuxième pour déterminer W de (3.6.4).

On va supposer que l'inconnue $W \in L^2(\Omega, (0, T))$ est connue et on va essayer de trouver $h \in V_{h_D}(\Omega, (0, T))$ à partir de l'équation (3.6.5).

Multiplions cette equation par une fonction test $v \in V_{h_D}$ et intégrons sur Ω , on obtient

$$\int_{\Omega} K(x)T_s(h)h\nabla h.v = \int_{\Omega} W.v$$

On écrit

$$a(h, v) = l(v) \quad (3.6.6)$$

où

$$a(h, v) = (K(x)T_s(h) \ h \ \nabla h, v) \quad (3.6.7)$$

$$l(v) = (W, v) \quad (3.6.8)$$

Le problème a une solution unique h dans $V_{h_D}(\Omega, (0, T))$. Premièrement, on démontre la continuité et la coercivité de $a(., .)$:

– Continuité de $a(., .)$: on écrit

$$|a(h, v)| = \left| \int_{\Omega} K(x)T_s(h) \ h \ \nabla h \ v \cdot dx \right|,$$

selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$|a(h, v)| \leq \max |K(x)T_s(h) \ h| \left(\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \ dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \ dx \right)^{1/2},$$

et d'après les conditions (1. – 3.), on obtient

$$|a(h, v)| \leq K_+ \cdot T_+ \cdot H_2 \cdot \|\nabla h\|_{L^2(\Omega, (0, T))} \|v\|_{L^2(\Omega, (0, T))},$$

Cela implique

$$|a(h, v)| \leq C \|h\|_{V(\Omega)} \|v\|_{V(\Omega)}, \quad C = K_+ T_+ H_2.$$

– Coercivité de $a(., .)$: on écrit

$$a(v, v) = \int_{\Omega} K(x)T_s(h) \ h \ \nabla v \ v \cdot dx,$$

Le fait de l'inégalité d'ellipticité uniforme, nous avons

$$a(v, v) \geq \min |K(x)T_s(h) \ h| \varepsilon \int_{\Omega} v^2 \cdot dx,$$

et d'après les conditions (1. – 3.), on obtient

$$a(v, v) \geq \varepsilon K_- \delta \|v\|_{L^2(\Omega, (0, T))}^2 \geq \varepsilon K_- \delta \|v\|_{V(\Omega)}^2.$$

Par conséquent

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{V(\Omega)}^2, \quad \alpha = \varepsilon K_- \delta.$$

En appliquant le théorème de représentation de Riesz sur la forme linéaire continu $l(\cdot)$, il existe un vecteur $W \in V'$ tel que

$$\forall v \in V, l(v) = \langle W, v \rangle.$$

D'autre part, par application de ce même théorème au forme bilinéaire continue $a(\cdot, \cdot)$, il existe $Ah \in V'$, où V' est le dual de V tel que

$$\forall v \in V, a(h, v) = \langle Ah, v \rangle. \quad (3.6.9)$$

où $A \in \mathcal{L}(V, V')$.

Finalement, le problème variationnel (3.6.6) est équivalent à :

$$\text{Trouver } h \in V \text{ tel que } Ah = W \quad (3.6.10)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de h , il faut donc montrer que l'opérateur A est un isomorphisme de V dans V' et que son inverse est continu.

On a $Au + Av = A(u + v)$ et $A(\lambda u) = \lambda Au$. Ainsi A est une application linéaire.

Par conséquent, nous avons

$$a(v, v) = \langle Av, v \rangle \geq \alpha \|v\|^2$$

et

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = a(v, Av) \leq c \|v\| \|Av\|$$

d'où

$$\|Av\| \leq c \|v\|,$$

A l'aide de la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle Av, v \rangle \leq \|Av\| \|v\|$$

ce qui donne

$$\|Av\| \geq \alpha \|v\|.$$

Soit C une partie convexe fermée de V et soit $h \in C$, on peut écrire

$$a(h, v - h) \geq l(v - h), \quad \forall v \in C,$$

de sorte que

$$\langle Ah, v - h \rangle \geq \langle f, v - h \rangle, \quad \forall v \in C, \quad (3.6.11)$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle f, v - h \rangle - \langle Ah, v - h \rangle &\leq 0, \forall v \in C \\ \langle f - Ah, v - h \rangle &\leq 0, \forall v \in C \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

Si $\rho > 0$, alors (3.6.12) devient

$$\langle \rho f + (1 - \rho)f - \rho Ah - (1 - \rho)Ah, v - h \rangle \leq 0, \forall v \in C$$

ce qui donne

$$\langle \rho f - \rho Ah + (1 - \rho)(f - Ah), v - h \rangle \leq 0, \forall v \in C$$

et comme $Ah = f$, ceci est équivalent à trouver $h \in C$ tel que

$$\langle \rho f - \rho Ah + h - h, v - h \rangle \leq 0, \quad \forall v \in C.$$

Si on note l'opérateur de projection par P_C , et utiliser le théorème de projection sur un convexe fermé C , on a

$$h = P_C(\rho f - \rho Ah + h).$$

Par conséquent, nous sommes maintenant à la recherche d'un point fixe de l'application continue $F : C \rightarrow C$, est définie par

$$F(v) = P_C(\rho f - \rho Av + v).$$

Pour cela, choisissons ρ de telle façon que F soit une application contractante. Si $v_1, v_2 \in C$, nous avons

$$\|F(v_1) - F(v_2)\| = \|P_C(\rho f - \rho Av_1 + v_1) - P_C(\rho f - \rho Av_2 + v_2)\|.$$

Comme l'opérateur de projection P_C est Lipschitzien de rapport 1, on a

$$\|P_C(\rho f - \rho Av_1 + v_1) - P_C(\rho f - \rho Av_2 + v_2)\| \leq \|v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2)\|$$

ce qui donne

$$\|F(v_1) - F(v_2)\| \leq \|v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2)\|.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \|F(v_1) - F(v_2)\|^2 &= \|P_C(v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2))\|^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2)\|^2 \\ &= \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho \langle v_1 - v_2, A(v_1 - v_2) \rangle + \rho^2 \|A(v_1 - v_2)\|^2 \\ &\leq (1 - 2\alpha\rho + \rho^2 c^2) \|v_1 - v_2\|^2 \end{aligned}$$

Si on choisit ρ tel que $0 < \rho < \frac{2\alpha}{c^2}$ (c et α sont les constantes de continuité et de coercivité, respectivement), par ailleurs,

$$1 - 2\alpha\rho + \rho^2 c^2 < 1.$$

Cela dès que

$$\|F(v_1) - F(v_2)\| \leq \|v_1 - v_2\|.$$

Donc F est une contraction et a un unique point fixe h dans $C \subset V$. Etudions maintenant l'équation (3.6.4) :

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} v_1 + W = -I_s v_1 + (I_s + I_f) v_2.$$

De (3.6.10), on obtient

$$h = A^{-1}W,$$

On multiplie l'équation (3.6.4) par une fonction test $v \in V$ et intégrons sur Ω , on trouve

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (A^{-1}W) v - \int_{\Omega} \frac{W v}{n_e} = \int_{\Omega} \frac{(-I_s v_1 + (I_s + I_f) v_2) v}{n_e}$$

Si on définit la norme $((.,.))$ sur Ω par $((W, v)) = \int_{\Omega} A^{-1}(W) v$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ((W, v)) - \int_{\Omega} \frac{W v}{n_e} &= \int_{\Omega} \frac{(-I_s v_1 + (I_s + I_f) v_2) v}{n_e}, \\ W(0) &= W_0 \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

Ce problème admet une solution unique W dans $L^2(\Omega, (0, T)) \cap L^\infty((0, T), V')$. ■

3.7 Approximation du problème par volumes finis

Dans cette section, nous proposons un schéma de volumes finis pour approcher les solutions du problème ((3.5.1)-(3.5.4)). Le domaine temporel $[0, T[$ est subdivisé en sous-intervalles $[t_n, t_{n+1}[$ de longueur Δt_n , $n = 0, \dots, M$ avec $t_0 = 0$ et $t_M = T$. Le domaine spatial (l'aquifère confiné Ω) discrétisé à l'aide d'un maillage non structuré T_h .

3.7.1 Notations

Pour une discrétisation en volumes finis, on introduit les notations suivantes :

- $|K|$ désigne l'aire de la cellule K , $N(K)$ désigne l'ensemble de triangles ayant un côté commun avec la cellule K .
- Soit $e_{K,L}$ le côté commun aux triangles K et L , $\vec{\eta}_{K,L}$ est la normale dirigée de K vers L .
- $\vec{\eta}_{e_i}$ est la normale extérieure correspondant à la partie e_i du bord Γ .
- Soit S_h l'ensemble des arêtes du maillage T_h et S_h^* l'ensemble des arêtes intérieures.
- Pour une arête donnée e :
 - * S et N désignent ses extrémités,
 - * W et E désignent les deux triangles tels que $e = \bar{W} \cap \bar{E}$;
- χ_e est la cellule diamant associée à e obtenue en connectant les centres de gravités des cellules W et E aux extrémités N et S de e (voir Figure 3.7.1).
- $((\varepsilon_i)_{i=1,4})$ sont les quatre segments formant la frontière de χ_e .
- $\vec{\eta}_\varepsilon = \frac{1}{|\varepsilon_i|} (\mu_{x_i}, \mu_{y_i})$ est la normale à ε_i sortante de χ_e .
- Pour un noeud donné, $V(N)$ désigne l'ensemble des triangles l'ayant en commun.

Pour la résolution numérique du problème ((3.5.1)-(3.5.4)), on décritise les deux équations séparément.

3.7.2 Discrétisation de la première équation

La première équation s'écrit :

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(K(x)T_s(h)\nabla h) + \operatorname{div}(K(x)T_s(h)\nabla \Phi_f) = -I_s$$

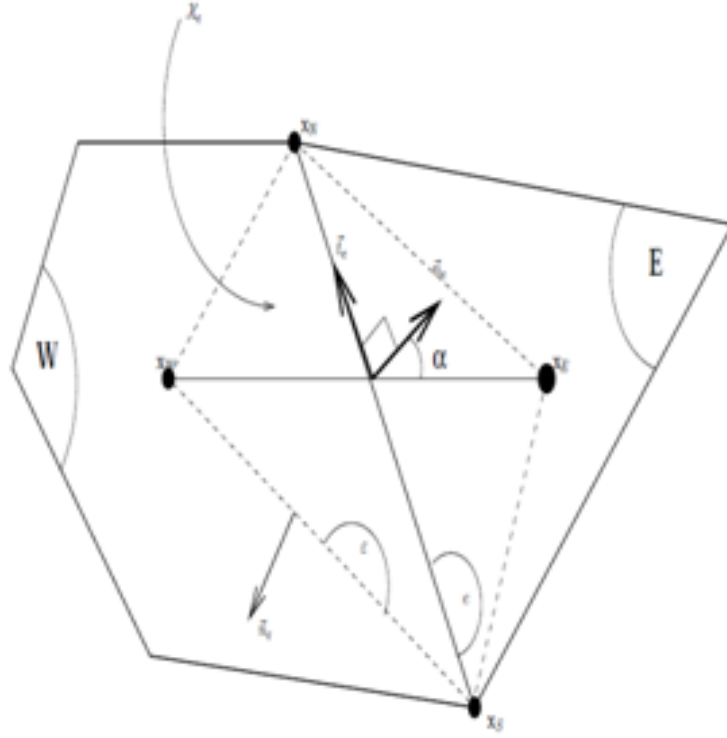


Figure 3.7.1 – Cellule diament

Soit C une cellule du maillage T_h , on intègre sur C à l'instant $t = t_n$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{n_e}{\Delta t} \int_C (h^{n+1} - h^n) dx - \int_{\partial C} K(x) T_s^n(h) \nabla h^n \eta_C dx \\ + \int_{\partial C} K(x) T_s^n(h) \nabla \Phi_f^n \eta_C dx = \int_C -I_s^n dx \end{aligned}$$

∂C peut décomposé en arêtes e , donc on obtient

$$\begin{aligned} \frac{n_e}{\Delta t} \int_C (h^{n+1} - h^n) dx - \sum_{e \in N(C)} \int_e K(x) T_s^n(h) \nabla h^n \eta_e dx \\ + \sum_{e \in N(C)} \int_e K(x) T_s^n(h) \nabla \Phi_f^n \eta_e dx = \int_C -I_s^n dx \end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{|C| n_e}{\Delta t} (h_C^{n+1} - h_C^n) - \sum_{e \in N(C)} \int_e K(x) T_s^n(h) \nabla h^n \eta_e dx$$

$$+ \sum_{e \in N(C)} \int_e K(x) T_s^n(h) \nabla \Phi_f^n \eta_e dx = -|C| I_{s,C}^n \quad (3.7.1)$$

Ce qui implique que

$$\frac{|C| n_e}{\Delta t} (h_C^{n+1} - h_C^n) - \sum_{e \in N(C)} F_{C,e}^n + \sum_{e \in N(C)} G_{C,e}^n = -|C| I_{s,C}^n \quad (3.7.2)$$

tel que $F_{C,e}^n$ et $G_{C,e}^n$ sont les flux numériques qui sont donnés par

$$\begin{aligned} F_{C,e}^n &= \int_e K(x) T_s^n(h) \nabla h^n \eta_e dx \\ G_{C,e}^n &= \int_e K(x) T_s^n(h) \nabla \Phi_f^n \eta_e dx \end{aligned}$$

La conservation des flux numériques est définie par l'égalité entre le flux entrant et le flux sortant à travers une interface du maillage.

La consistance du flux numérique est définie tel que l'ordre de l'approximation numérique choisi pour le flux soit supérieur ou égale à 1.

Ces flux sont approximatés par

$$F_{C,e}^n = K_e T_{s,e}^n \nabla_e h^n |e| \quad (3.7.3)$$

$$G_{C,e}^n = K_e T_{s,e}^n \nabla_e \Phi_f^n |e| \quad (3.7.4)$$

où e une arête du maillage, $\vec{\eta}_{C,e}$ est la normale à e sortante de C , K_e et $T_{s,e}^n$ désignent les interpolations respectives des fonctions K et T_s sur e , tandis que $\nabla_e \Phi_f^n$ est l'approximation du gradient de charge hydraulique sur l'arête e . La construction du gradient approché sur e se fait par une méthode dite de Green-Gauss.

Elle consiste à approcher le gradient par sa moyenne sur un co-volume en forme de diamant construit autour de l'arête e . On écrit

$$T_{s,e}^n = T_s(h_e^n) \quad (3.7.5)$$

et

$$\nabla_e \Phi_f = \frac{1}{|\chi_e|} \sum_{\varepsilon \in \partial \chi_e} \frac{1}{2} (\Phi_{f,N_1(\varepsilon)} + \Phi_{f,N_2(\varepsilon)}) |\varepsilon| \vec{\eta}_e \quad (3.7.6)$$

où χ_e est la cellule diamant associée à e , et $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ sont les extrémités de ε , un des quatre segments formant $\partial\chi_e$ la frontière de χ_e et $\vec{\eta}_e$ sa normale unitaire sortante. Les valeurs de Φ_f aux centres W et E sont $\Phi_{f,W}$ et $\Phi_{f,E}$, tandis que les valeurs aux noeuds N et S sont interpolées aux bords et notées $\Phi_{f,N}$ et $\Phi_{f,S}$.

Pour un noeud N on a

$$\Phi_{f,N} = \sum_{K \in V(N)} y_K(N) \Phi_{f,K} \quad (3.7.7)$$

où $V(N)$ est l'ensemble des triangles ayant en commun le noeud N , $\Phi_{f,K}$ la valeur de Φ_f au centre de la cellule K et $y_K(N)$ les poids d'interpolation. Ces poids sont choisis comme suit (voir [22])

$$y_K(N) = \frac{1 + \lambda_x(x_K - x_N) + \lambda_y(y_K - y_N)}{n_N + \lambda_x R_x + \lambda_y R_y}$$

où

$$\begin{aligned} n_N &= \text{card}(V(N)) \\ R_x &= \sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N) \\ R_y &= \sum_{K \in V(N)} (y_K - y_N) \\ \lambda_x &= \frac{R_y \sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N)(y_K - y_N) - R_x \sum_{K \in V(N)} (y_K - y_N)^2}{\sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N)^2 \sum_{K \in V(N)} (y_K - y_N)^2} \\ \lambda_y &= \frac{R_x \sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N)(y_K - y_N) - R_y \sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N)^2}{\sum_{K \in V(N)} (x_K - x_N)^2 \sum_{K \in V(N)} (y_K - y_N)^2} \end{aligned}$$

Alors, en combinant ces relations, on obtient la formule du gradient de charge hydraulique $\Phi_{f,W}$ et $\Phi_{f,E}$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \Phi_f^n}{\partial x} \right|_e &= \frac{1}{2|\chi_e|} \left((\mu_{x_1} + \mu_{x_2}) \Phi_{f,W}^n + (\mu_{x_3} + \mu_{x_4}) \Phi_{f,E}^n \right) + \\
 &\quad \frac{1}{2|\chi_e|} \left((\mu_{x_1} + \mu_{x_4}) \sum_{L \in V(N)} y_{L(N)}^n \Phi_{f,L}^n + (\mu_{x_2} + \mu_{x_3}) \sum_{L \in V(N)} y_{L(N)} \Phi_{f,L}^n \right) \\
 \left. \frac{\partial \Phi_f^n}{\partial y} \right|_e &= \frac{1}{2|\chi_e|} \left((\mu_{y_1} + \mu_{y_2}) \Phi_{f,W}^n + (\mu_{y_3} + \mu_{y_4}) \Phi_{f,E}^n \right) + \\
 &\quad \frac{1}{2|\chi_e|} \left((\mu_{y_1} + \mu_{y_4}) \sum_{L \in V(N)} y_{L(N)} \Phi_{f,L}^n + (\mu_{y_2} + \mu_{y_3}) \sum_{L \in V(N)} y_{L(N)} \Phi_{f,L}^n \right)
 \end{aligned}$$

De même, le gradient du profondeur de l'interface est donné par

$$\nabla_e h = \frac{1}{|\chi_e|} \sum_{\varepsilon \in \partial \chi_e} \frac{1}{2} (h_{N_1(\varepsilon)} + h_{N_2(\varepsilon)}) |\varepsilon| \vec{\eta}_e \quad (3.7.8)$$

tel que

$$h_N = \sum_{K \in V(N)} y_K(N) h_K \quad (3.7.9)$$

3.7.3 Discrétisation de la deuxième équation

Cette équation s'écrit :

$$-\operatorname{div}(K(x) H_2 \nabla \Phi_f) + \operatorname{div}(K(x) T_s(h) \nabla h) = I_s + I_f$$

De la même façon, en l'intégrant sur C à l'instant t_n on trouve

$$- \int_{\partial C} H_2 K(x) \nabla \Phi_f^n \eta_C dx + \int_{\partial C} K(x) T_s^n(h) \nabla h^n \eta_C dx = \int_C (I_{s,C}^n + I_{f,C}^n) dx$$

Alors

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{e \in N(C)} \int_e H_2 K(x) \nabla \Phi_f^n \eta_e dx + \sum_{e \in N(C)} \int_e K(x) T_s^n(h) \nabla h^n \eta_e dx \\
 &= \int_C (I_{s,C}^n + I_{f,C}^n) dx \quad (3.7.10)
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$- \sum_{e \in N(C)} F_{D,e}^n + \sum_{e \in N(C)} G_{D,e}^n = |C| (I_{s,C}^n + I_{f,C}^n) \quad (3.7.11)$$

tel que $F_{D,e}^n$ et $G_{D,e}^n$ sont les flux numériques donnés par

$$\begin{aligned} F_{D,e}^n &= - \int_e K(x) T_s^n(h) \nabla h^n \eta_e dx \\ G_{D,e}^n &= - \int_e H_2 K(x) \nabla \Phi_f^n \eta_e dx \end{aligned}$$

et approximés par

$$F_{D,e}^n \approx -K_e T_{s,e}^n \nabla_e h^n |e| \quad (3.7.12)$$

$$G_{D,e}^n \approx -H_2 K_e \nabla_e \Phi_f^n |e| \quad (3.7.13)$$

où e est une arête du maillage qui limite la cellule C , $\nabla_e \Phi_f^n$ est donné par les relations ((3.7.6)-(3.7.7)), et $\nabla_e h^n$ est donné par les relations ((3.7.8)-(3.7.9)).

Ainsi, l'addition des deux équations (3.7.2) et (3.7.11) donne cette schéma

$$\frac{|C| n_e}{\Delta t} (h_C^{n+1} - h_C^n) + \sum_{e \in N(C)} K_e h_e^n \nabla_e \Phi_f^n |e| = |C| I_{f,C}^n \quad (3.7.14)$$

Définition 3.7.1 (*Conservativité*) On dira que les flux approchés $F_{C,e}^n$ et $G_{C,e}^n$ sont conservatifs au sens des volumes finis, si on a une conservation locale

$$F_{C,e}^n + F_{D,e}^n = 0, \quad \text{et} \quad G_{C,e}^n + G_{D,e}^n = 0, \quad (3.7.15)$$

plus une conservation globale

$$\sum_{e \in N(C)} F_{C,e}^n = \int_e K(x) T_s^n(h) \nabla h^n \eta_e ds \quad \text{et} \quad \sum_{e \in N(C)} G_{C,e}^n = \int_e K(x) T_s^n(h) \nabla \Phi_f^n \eta_e ds \quad (3.7.16)$$

Définition 3.7.2 (*Consistance*) On dira que les flux approchés $F_{C,e}^n$ et $G_{C,e}^n$ sont consistants au sens des volumes finis, si on a

$$F_{C,e}^n(v, v) = \pm K(x) T_s^n(v) \nabla v \eta_e \quad \text{et} \quad G_{C,e}^n(v) = \pm H_2 K(x) \nabla v^n \eta_e + \theta(h) \quad (3.7.17)$$

pour tout v assez régulière,

où $|\theta(h)| \leq Ch$, ($C \in \mathbb{R}^+$, qui ne dépend que de v).

Définition 3.7.3 (*Volumes Finis*) On dira qu'un schéma numérique pour le problème (3.5.1-3.5.4) est de type volumes finis, si les flux numériques approchés sont conservatifs et consistants au sens des définitions 3.7.1 et 3.7.2.

3.8 Analyse de stabilité

Dans cette section, on présente un résultat de stabilité pour le schéma de volumes finis proposé dans la section 3.7.

Définition 3.8.1 (*Stabilité L^∞*) On dira que la solution approchée (h_C^n) est L^∞ stable sur Ω , si on a

$$\|h^n\|_\infty = \sup_C |h_C^n| \leq M \text{ pour tout } n = 1, \dots, N \quad (3.8.1)$$

où M est une constante indépendante de h et Δt .

Soit α définie par

$$\alpha = \sup_C \left(\sum_{e \in N(C)} \frac{h K_e \nabla_e \Phi_f^n |e|}{|C| n_e} \right) < \infty \quad (3.8.2)$$

Proposition 3.8.1 Sous les hypothèses (1.-3.), et la condition

$$C_S = \frac{\Delta t}{h} \alpha \leq 1 \quad (3.8.3)$$

le schéma explicite (3.7.14) est L^∞ stable. De plus, la solution approchée (h_C^n) définie par (3.7.14) satisfait $\delta \leq h_C^n \leq H_2$.

Preuve. Le schéma (3.7.14) peut s'écrire sous la forme

$$h_C^{n+1} = h_C^n - \frac{\Delta t}{|C| n_e} \sum_{e \in N(C)} K_e \nabla_e \Phi_f^n |e| h_e^n + \frac{\Delta t}{n_e} I_{f,C}^n \quad (3.8.4)$$

alors en utilisant la condition C_S (3.8.3), on a

$$\begin{aligned} |h_C^{n+1}| &\leq |h_C^n| + \left(\frac{\Delta t}{|C| n_e} \sum_{e \in N(C)} K_e \nabla_e \Phi_f^n |e| \right) |h_e^n| + \frac{\Delta t}{n_e} |I_{f,C}^n| \\ &\leq \max(\sup |h_C^n|, \sup |h_e^n|) \leq M. \end{aligned}$$

d'où la stabilité. ■

3.9 Quelques résultats numériques

Les simulations numériques ont été obtenus en utilisant le simulateur gratuit et open source pour les processus de flux et de transport dans les milieux poreux, en fonction de l'environnement distribué et unified Numerics DUNE (voir [25]).

Ces tests sont faits pour un aquifère confiné homogène et isotrope qui est considéré comme un rectangle $\Omega =]0, 300[\times]0, 60[$, discretisé avec un maillage formé de 3000 cellule. les paramètres sont $K = 10^{-7}$, $n_e = 0.3$ et $\Delta t = 10s$.

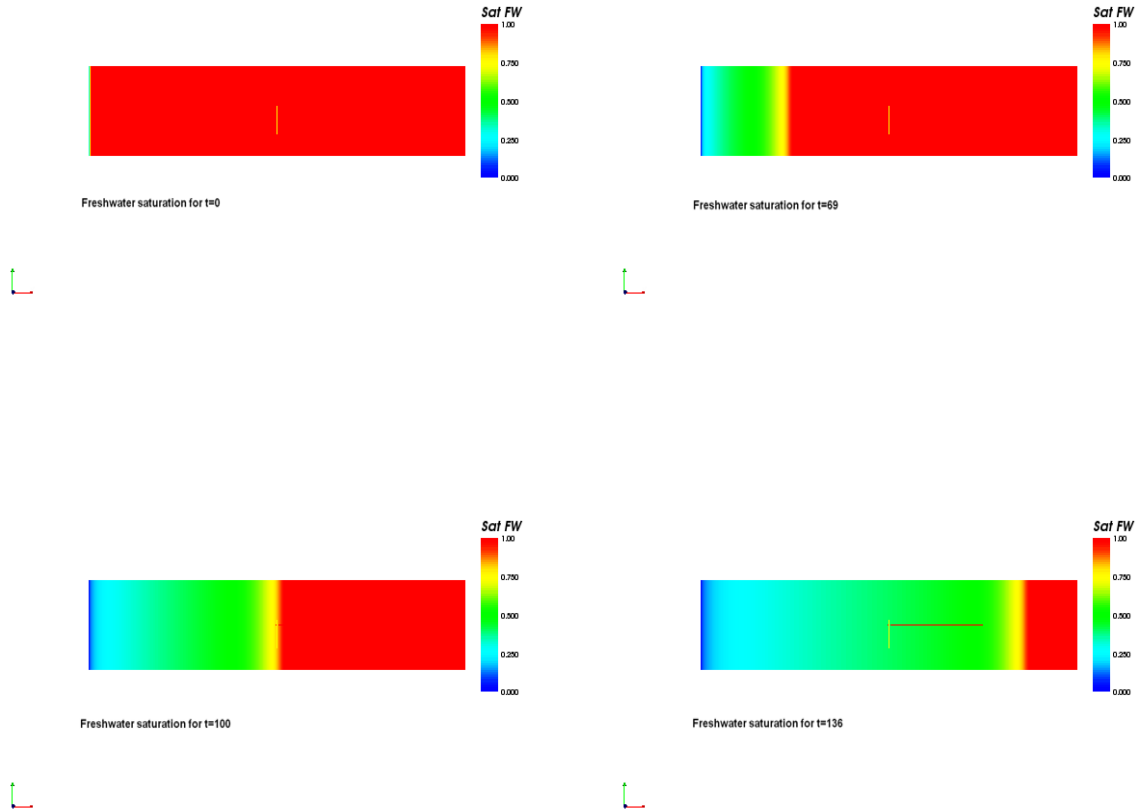


Figure 3.9.1 – Saturation de l'eau douce pour $t= 0, 69, 100$ et $136s$.

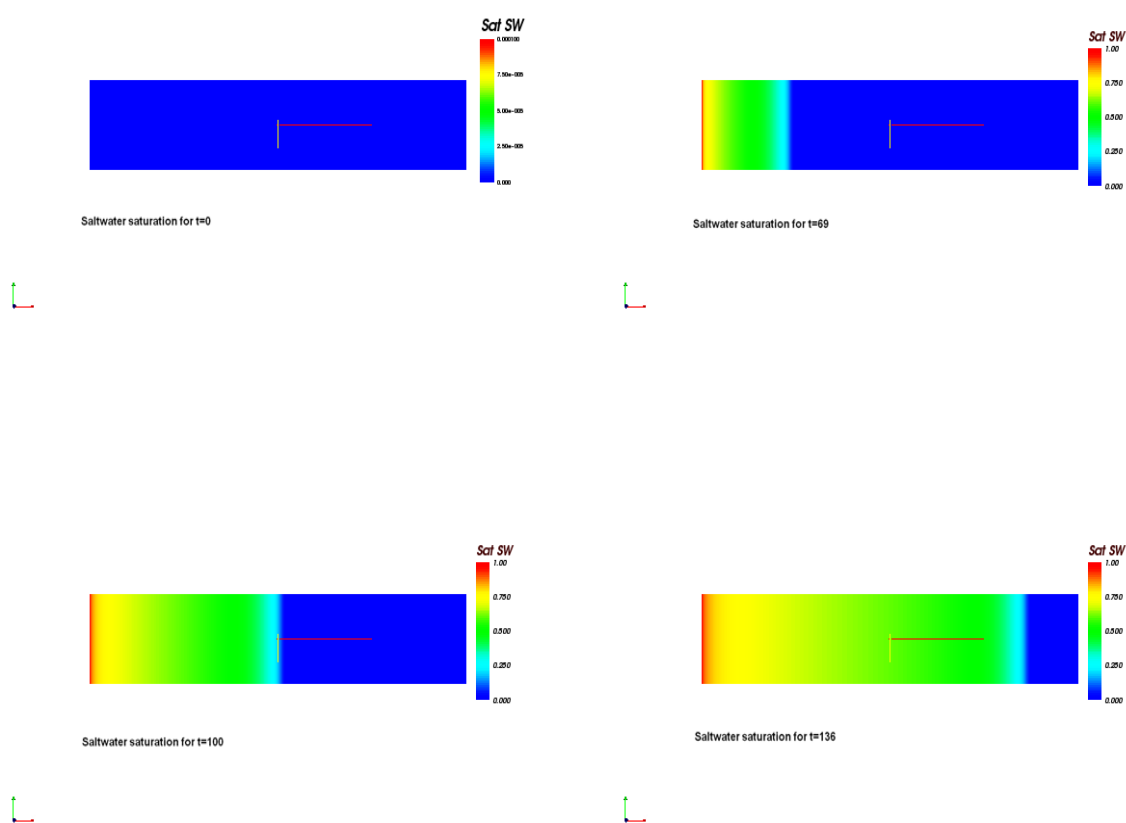


Figure 3.9.2 – Saturation de l'eau salée pour $t= 0, 69, 100$ et 136 s.

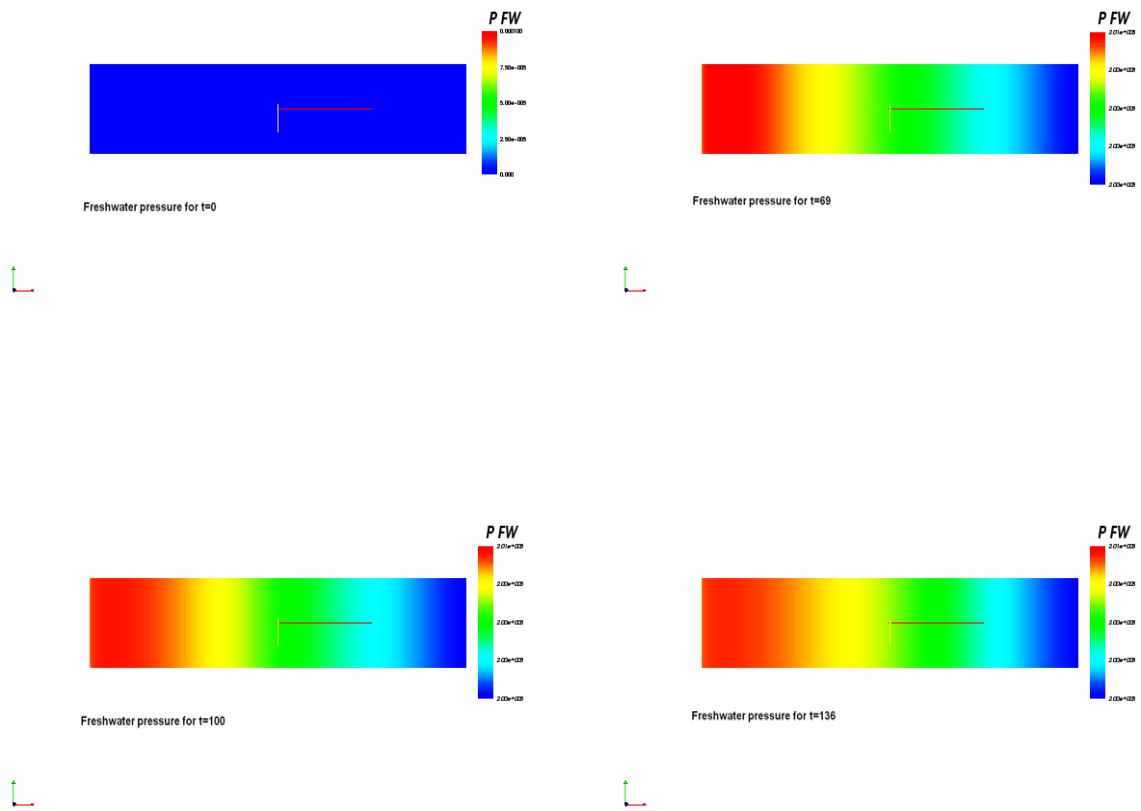


Figure 3.9.3 – Pression de l'eau douce pour $t= 0, 69, 100$ et 136 s.

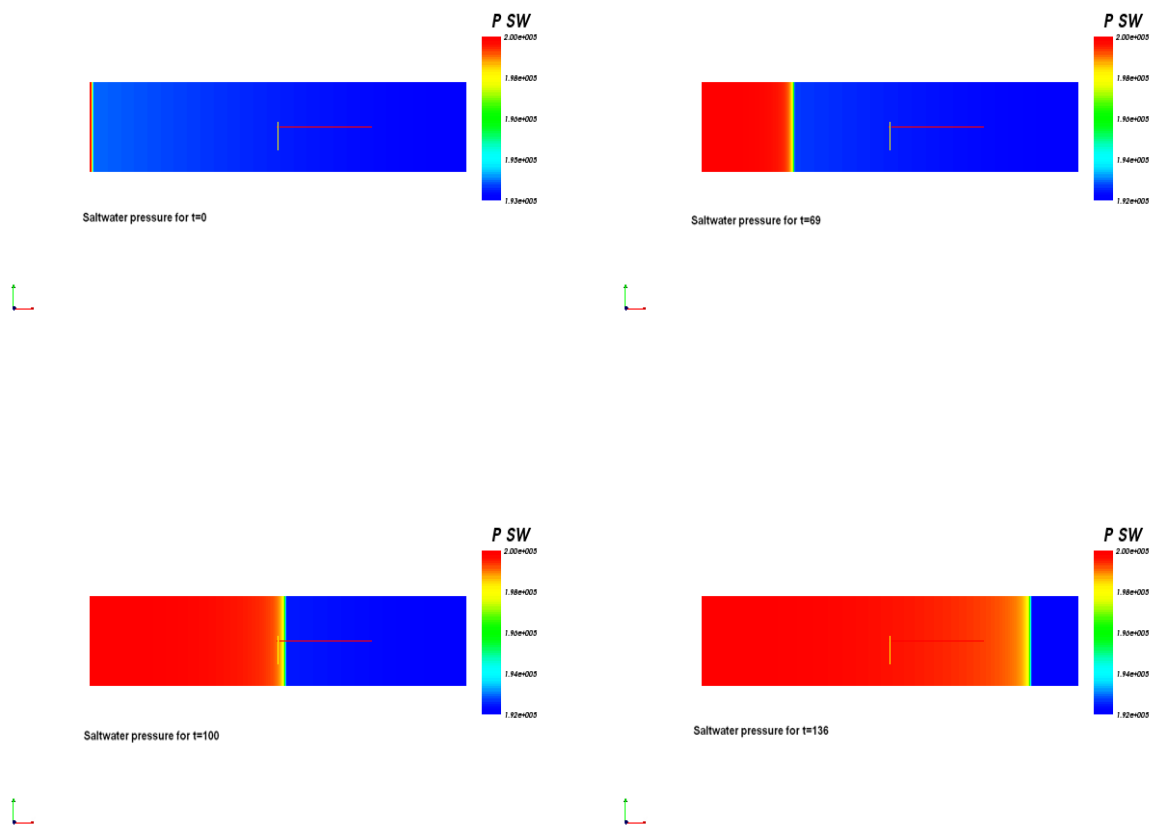


Figure 3.9.4 – Pression de l'eau salée pour $t= 0, 69, 100$ et 136 s.

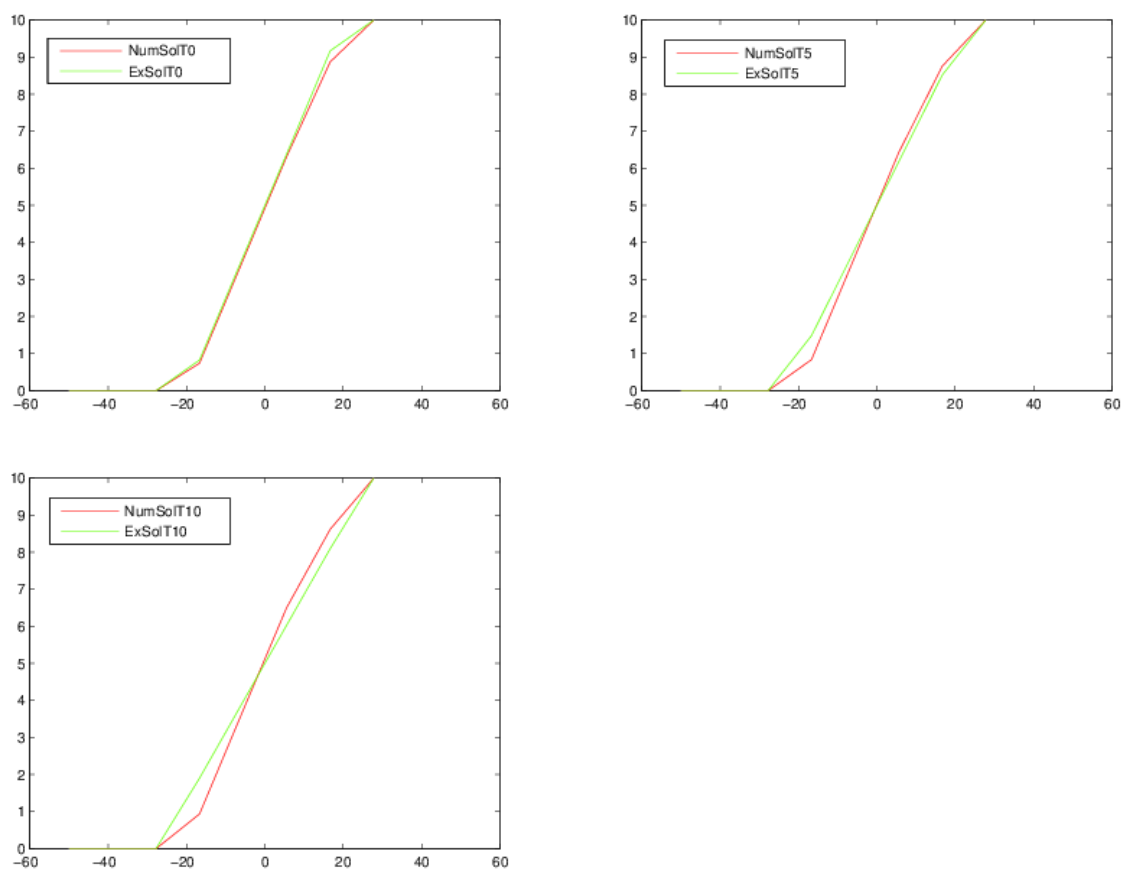


Figure 3.9.5 – La profondeur de l'interface pour $T=0, 5$ et $10s$.

3.10 Conclusion

Une analyse mathématique et numérique d'un problème de deux fluides immiscibles dans les aquifères côtiers a été faite dans la chronologie suivante :

- Un résultat d'existence et d'unicité de la solution a été prouvé pour le problème d'intrusion saline, afin d'avoir l'avantage de découpler le calcul de la profondeur à celui de la charge hydraulique.
- Ce problème a été étudié en deux étapes, la détermination de la profondeur de l'interface h en supposant que W est connu, puis le calcul de W .
- Un schéma explicite de volumes finis de type "cellules diamants" a été proposé pour approcher le gradient.
- Des expériences numériques ont été présentées pour confirmer l'importance et l'utilité de nos résultats théoriques au sens que l'immiscibilité est clairement montrée ; autrement dit, ces résultats donnent des informations sur le mouvement du front d'eau salée. Ainsi, cette information est importante pour le contrôle de l'intrusion d'eau de mer, l'utilisation optimale des eaux souterraines et la quantification de l'évolution de l'interface quand le temps augmente. Ces tests numériques ont été effectués par les deux logiciels libres Dumux et Matlab.

Etude d'un problème de deux fluides miscibles

Dans ce chapitre, nous intéressons à étudier la dynamique des fluides miscibles dans les milieux poreux. Nous commençons par formuler notre modèle et dérivons les équations adimensionnelles. Ensuite, nous proposons un schéma basé sur la méthode des éléments finis rectangulaire et prouvons un résultat de stabilité pour notre schéma. Enfin, nous présentons quelques résultats numériques.

4.1 Modèles avec diffusion du sel

Ce modèle consiste à supposer que l'eau salée et l'eau douce sont deux fluides miscibles, avec diffusion du sel.

Equation de transport en milieux poreux

Les modèles mathématiques du transport de sels dans les milieux poreux sont basés sur les travaux de Henry (1959) et Bear (1972, 1979). L'approche consiste à coupler l'équation d'écoulement et de transport à l'aide d'une équation d'état qui relie la densité du soluté à la concentration du soluté dans la solution [6].

L'équation de conservation de masse de soluté est donnée par :

$$\frac{\partial(\phi\rho C)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\phi VC) + \nabla \cdot (\rho\phi D\nabla C) + \rho QC_s \quad (4.1.1)$$

où V est le vecteur de vitesse effective, D le tenseur de dispersion(ou de diffusion), C_s est la concentration des termes sources et Q est le flux des termes sources.

En développant cette équation on obtient :

$$\phi\rho\frac{\partial C}{\partial t} + C\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = -C\nabla\cdot(\rho\phi V) - \rho\phi V\nabla C + \nabla\cdot(\rho\phi D\nabla C) + C_s\rho Q \quad (4.1.2)$$

On multiplie l'équation de conservation de masse de l'écoulement par C :

$$C\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = -C\nabla\cdot(\rho q) + C\rho Q \quad (4.1.3)$$

Ainsi on soustrait l'équation (4.1.3) de l'équation (4.1.2) :

$$\phi\rho\frac{\partial C}{\partial t} = -\rho\phi V\nabla C + \nabla\cdot(\rho\phi D\nabla C) + \rho Q(C_s - C) \quad (4.1.4)$$

Couplage de l'équation d'écoulement et de transport

Le couplage se fait à l'aide d'une équation d'état qui relie la densité à la concentration et une équation constitutive qui relie la viscosité à la concentration.

Les équations d'état sont les relations entre les variables d'état d'un système à l'équilibre thermodynamique. La densité est exprimée en fonction de la concentration (à température constante). Henry (1964), Frind (1982), Huyakorn et al.(1987) et Voss et Souza (1987) donnent la densité ρ en fonction linéaire d'une densité de référence ρ_0 et de la concentration C :

$$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon c) \quad (4.1.5)$$

où,

ρ_0 est la densité de l'eau douce,

$\varepsilon = \frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_0}$ est le contraste de densité ;

ρ_s est la densité à concentration maximale ;

$c = \frac{C}{C_{max}}$ est la concentration normalisée .

Kolditz et al. (1996) proposent d'utiliser une loi exponentielle qui permet d'obtenir :

$$\rho(c) = \rho_0 e^{\beta_c(c-c_0)} \quad (4.1.6)$$

où $\beta_c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}$ est un coefficient qui introduit l'effet des changements de concentration sur la densité du fluide.

4.2 Modèle mathématique

Nous supposons d'abord que le fluide est faiblement compressible, de sorte que nous gardons la supposition de divergence nulle sur la vitesse, avec une densité qui dépend de la concentration $\rho = \rho_c$ et satisfaisant $\frac{\partial \rho}{\partial C} < 0$, c'est-à-dire que le fluide est plus léger ou plus lourd selon la concentration d'une "substance" (sel, produit chimique, etc.). Nous gardons cette dépendance même si les variations de densité sont faibles. Le fluide est supposé être newtonien, l'équation de moment donne alors les équations Navier-Stokes standard avec la gravité g comme force externe. L'équation de diffusion convective est valable pour une concentration diluée dans le fluide ; puisque la concentration est diluée ; La viscosité du fluide total ne change pas et le flux n'est pas affecté par la concentration du matériau dilué. Les objectifs de notre étude sont axés sur les situations avec des mélangeurs passifs (c'est-à-dire sans mélange mécanique) à faible nombre de Reynolds. Des géométries spéciales sont nécessaires pour que cela soit efficace. Le mélange est amélioré avec l'augmentation du nombre de Reynolds pour les géométries qui induisent des tourbillons basées sur des effets inertiels.

Avec ces hypothèses, si l'on considère deux liquides miscibles dans des milieux poreux, avec c_p la concentration à pression constante et la densité de fluide est approximée par une constante ρ_0 , le modèle décrivant l'interaction entre ces fluides est donné par le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \rho_0 c_p \cdot \frac{\partial C}{\partial t} + \rho_0 c_p \cdot \mathbf{u} \cdot \nabla C = d \Delta C, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\mu}{K} \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot F(C), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Où les inconnus $\mathbf{u} = (u, v)$, p et C sont le vecteur vitesse, la pression et la concentration, respectivement. Les coefficients d , μ et K sont respectivement le coefficient de diffusion de masse, la viscosité dynamique et la perméabilité du milieu. Le gradient, la divergence et l'opérateur de Laplace sont respectivement définis par

$$\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right), \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \Delta v = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$$

Notons que $\nabla.F(C)$ est la divergence du tenseur des contraintes défini par

$$\nabla.F(C) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

tel que

$$F_{11} = k\left(\frac{\partial C}{\partial x_2}\right)^2, F_{22} = k\left(\frac{\partial C}{\partial x_1}\right)^2 \text{ et } F_{12} = F_{21} = -k\left(\frac{\partial C}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial x_2}\right)$$

avec k une constante positive. (Les détails sur ce système peuvent être trouvés dans [34]).

On note que le deuxième terme de la première équation de (4.2.1) remplace l'équation de diffusion convective $\rho_0 c_p \nabla(\mathbf{u}.C)$ car on suppose que le flux et le mélange se produisent lentement. Pour étudier ce phénomène, nous remplaçons la deuxième équation de (4.2.1) par l'équation de Navier-Stokes avec le stress de Korteweg, i.e. nous remplaçons $\frac{\mu}{K} \mathbf{u}$ par $-\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u}.\nabla \mathbf{u}$. Par conséquent, le système (4.2.1) devient

$$\begin{cases} \rho_0 c_p \frac{\partial C}{\partial t} + \rho_0 c_p \mathbf{u}.\nabla C - \nabla.(d\nabla C) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u}.\nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_c} \nabla p + g, \\ \nabla.\mathbf{u} = 0; \end{cases} \quad (4.2.3)$$

où g est la gravité et ν est la viscosité cinématique. Considérant la dépendance de la densité ρ_c sur la concentration C qui peut être approximée dans la première équation de (4.2.3) par ρ_0 supposée constante alors que le coefficient de diffusion d n'est pas, c'est-à-dire une fonction de x .

4.2.1 Equations adimensionnelles

Il est toujours intéressant de dériver des équations adimensionnelles pour l'analyse de paramètres et l'étude de solutions. Considérons l'indice 0 pour les constantes dimensionnelles et le symbole $*$ pour les variables dimensionnelles et écrivons

$$t^* = \frac{t}{T_0}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_0}, \quad C^* = \frac{C}{C_0}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad \nu^* = \frac{\nu}{\nu_0},$$

$$g^* = \frac{g}{g_0}, \quad d^* = \frac{d}{d_0}, \quad \rho_c^* = \frac{\rho_c}{\rho_0}, \quad \nabla^* = L_0 \nabla \text{ et } \Delta^* = L_0^2 \Delta. \quad (4.2.4)$$

En appliquant le changement de variable (4.2.4) au première équation du problème (4.2.3), on trouve

$$\rho_0 c_p \frac{\partial(C_0 C^*)}{\partial(T_0 t^*)} + \rho_0 c_p (U_0 \mathbf{u}^*) \cdot \frac{1}{L_0} \nabla^* (C_0 C^*) - \frac{1}{L_0} \nabla^* \cdot (d_0 d^* \frac{1}{L_0} \nabla^* (C_0 C^*)) = 0,$$

d'où

$$\rho_0 c_p \frac{C_0}{T_0} \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \rho_0 c_p \frac{U_0 C_0}{L_0} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* C^* - \frac{d_0 C_0}{L_0^2} \nabla^* \cdot (d^* \nabla^* C^*) = 0,$$

Si on choisit $T_0 = \frac{L_0}{U_0}$, on obtient

$$\rho_0 c_p \frac{U_0 C_0}{L_0} \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \rho_0 c_p \frac{U_0 C_0}{L_0} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* C^* - \frac{d_0 C_0}{L_0^2} \nabla^* \cdot (d^* \nabla^* C^*) = 0,$$

d'où

$$\rho_0 c_p \frac{U_0 C_0}{L_0} \left(\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* C^* - \frac{d_0}{\rho_0 c_p L_0 U_0} \nabla^* \cdot (d^* \nabla^* C^*) \right) = 0$$

puisque $\rho_0 c_p \frac{U_0 C_0}{L_0} \neq 0$, alors

$$\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* C^* - \frac{d_0}{\rho_0 c_p L_0 U_0} \nabla^* \cdot (d^* \nabla^* C^*) = 0$$

Ainsi,

$$\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* C^* - \frac{d_0}{\rho_0 L_0 U_0 c_p} \nabla^* \cdot (d^* \nabla^* C^*) = 0 \quad (4.2.5)$$

De même façon, la deuxième équation du problème (4.2.3) devient

$$\frac{\partial(U_0 \mathbf{u}^*)}{\partial(T_0 t^*)} - (\nu_0 \nu^*) \frac{1}{L_0^2} \Delta^* (U_0 \mathbf{u}^*) + (U_0 \mathbf{u}^*) \cdot \frac{1}{L_0} \nabla^* (U_0 \mathbf{u}^*) = -\frac{1}{\rho_0 \rho_c^*} \frac{1}{L_0} \nabla^* (p_0 p^*) + (g_0 g^*),$$

d'où

$$\frac{U_0}{T_0} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \frac{\nu_0 U_0}{L_0^2} \nu^* \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{U_0^2}{L_0} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{p_0}{\rho_0 L_0} \frac{1}{\rho_c^*} \nabla^* p^* + g_0 g^*$$

Prenons $T_0 = \frac{L_0}{U_0}$ et $p_0 = \rho_0 U_0^2$, on obtient

$$\frac{U_0^2}{L_0} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \frac{\nu_0 U_0}{L_0^2} \nu^* \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{U_0^2}{L_0} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{U_0^2}{L_0} \frac{1}{\rho_c^*} \nabla^* p^* + g_0 g^*$$

Alors

$$\frac{U_0^2}{L_0} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \frac{\nu_0}{L_0 U_0} \nu^* \Delta^* \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* \right) = \frac{U_0^2}{L_0} \left(-\frac{1}{\rho_c^*} \nabla^* p^* + \frac{L_0}{U_0^2} g_0 g^* \right)$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \frac{\nu_0}{L_0 U_0} \nu^* \Delta^* \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho_c^*} \nabla^* p^* + \frac{L_0}{U_0^2} g_0 g^*$$

Il y a trois grandeurs sans dimension. Le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{L_0 U_0}{\nu_0}$$

implique l'échelle spatiale, la vitesse du fluide et la viscosité cinématique. Le nombre de Prandtl associé à c_p

$$Pr = \frac{\mu_0 c_p}{d_0}$$

montre l'importance de l'effet de concentration par rapport aux autres effets. Enfin, le rapport

$$\frac{L_0 g_0}{U_0^2}$$

donne l'importance du stress Korteweg (terme source) par rapport à l'échelle spatiale et à l'échelle de vitesse. Si on considère $g_0 = \frac{U_0^2}{L_0}$, on peut écrire

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \frac{\nu_0}{L_0 U_0} \nu^* \Delta^* \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho_c^*} \nabla^* p^* + g^* \quad (4.2.6)$$

De la même manière, la troisième équation du problème (4.2.3) s'écrit

$$\frac{1}{L_0} \nabla^* \cdot (U_0 \mathbf{u}^*) = 0,$$

d'où

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (4.2.7)$$

Par conséquent, les équations (4.2.5), (4.2.6) et (4.2.7) donne le système adimensionnelle suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* C^* - \frac{d_0}{\rho_0 L_0 U_0 c_p} \nabla^* \cdot (d^* \nabla^* C^*) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} - \frac{\nu_0}{L_0 U_0} \nu^* \Delta^* \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho_c^*} \nabla^* p^* + g^*, \\ \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

On omet le symbole * dans (4.2.8) pour simplifier, nous écrivons nos équations adimensionnelles sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \nabla \cdot (d \nabla C) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_C} \nabla p = g, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \end{cases} \quad (4.2.9)$$

ou sous la forme Lagrangienne comme

$$\begin{cases} \frac{DC}{Dt} - \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \nabla \cdot (d \nabla C) = 0, \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_C} \nabla p = g, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (4.2.10)$$

où $\frac{D}{Dt}$ désigne la dérivée totale.

4.2.2 Conditions initiales et aux limites

Nous sommes intéressés par des fluides avec des densités différentes s'écoulant dans un conduit avec une paroi perméable. Le domaine de calcul est un rectangle Ω de longueurs L_x et L_y , respectivement. Les quatre côtés (limites) de Ω sont définis comme Γ_{in} , Γ_{out} , Γ_{Top} et Γ_{Bot} (voir **Figure 4.2.1**).

Conditions sur Γ_{in} (bord gauche) On suppose une concentration constante et un profil de vitesse d'écoulement Poiseuille en régime permanent. Soit

$$C = C_{in}$$

et

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{in}$$

Conditions sur Γ_{out} (bord droite) Des conditions limites homogènes de Neumann sont imposées à la fois pour la vitesse et la concentration. Soit

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} = 0$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = 0$$

Conditions sur Γ_{Top} (bord supérieur) Au frontière imperméable, on suppose une concentration constante nulle et une condition limite sans glissement avec une vitesse nulle. Soit

$$\frac{\partial C}{\partial \eta} = 0$$

et

$$\mathbf{u} = 0$$

Conditions sur Γ_{Bot} (bord inférieur) Au frontière imperméable, on impose une condition limite sans glissement pour la vitesse et une concentration constante non nulle qui fournit un changement de concentration dans le mélange fluide. Soit

$$\mathbf{u} = 0$$

et

$$d\frac{\partial C}{\partial \eta} = \Phi$$

Condition initiale On suppose que la vitesse à l'instant $t = 0$ est connue

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_{in}$$

dans Ω .

et la concentration à l'instant $t = 0$ est donné par

$$C(0, x) = C_{in}$$

dans Ω .

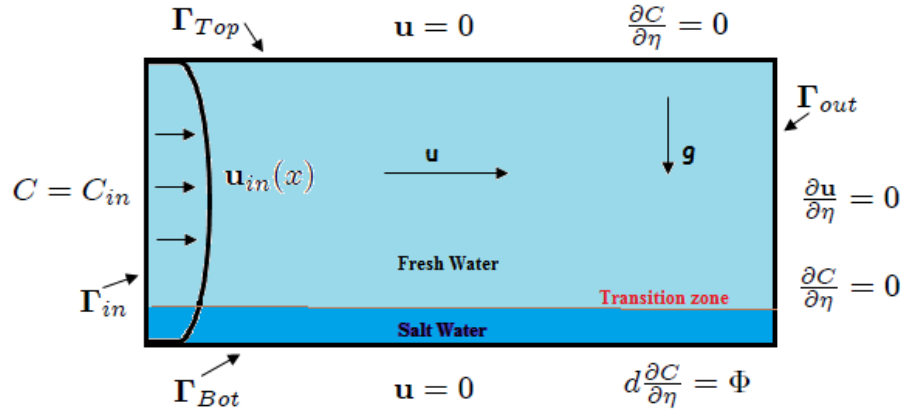


Figure 4.2.1 – Le domaine Ω et les conditions aux bords.

Pour la compatibilité entre les conditions initiales et l'afflux, on considère les conditions initiales pour que la vitesse et la concentration soient égales aux conditions d'afflux.

Par conséquent, nous résumons notre problème mathématique de valeurs initiales et aux limites comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{DC}{Dt} - \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \nabla \cdot (d\nabla C) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_C} \nabla p = g \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_{in} \text{ et } C(0, x) = C_{in} \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_{in} \text{ et } C = C_{in} \quad \text{sur } \Gamma_{in} \times [0, T[, \\ \frac{\partial C}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_{Top} \cup \Gamma_{out}) \times]0, T[, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{out} \times]0, T[, \\ d\frac{\partial C}{\partial \eta} = \Phi \quad \text{sur } \Gamma_{Bot} \times]0, T[, \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_{Top} \cup \Gamma_{Bot}) \times]0, T[. \end{array} \right. \quad (4.2.11)$$

Ici $\frac{\partial}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale.

4.2.3 Formulation variationnelle

Soit l'espace de vitesse V_u spécifiée par

$$V_u = \{ \mathbf{u} \in H(div; \Omega) \text{ s.t. } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \eta = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

et l'espace de concentration par

$$V_f = \{C \in H^1(\Omega) \quad s.t. \quad C = f \text{ sur } \Gamma_{in}\},$$

où $H^s(\Omega)$ est l'espace de Sobolev standard.

Considérons maintenant une fonction test $C_{test} \in V_{C_{in}}$ et multiplions la première équation du (4.2.11) par C_{test} pour obtenir

$$\left(\frac{DC}{Dt} - \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \nabla \cdot (d\nabla C) \right) \cdot C_{test} = 0$$

En intégrant cette équation sur Ω , on trouve

$$\int_{\Omega} \frac{DC}{Dt} \cdot C_{test} - \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \nabla \cdot (d\nabla C) \cdot C_{test} = 0$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{DC}{Dt} \cdot C_{test} + \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \int_{\Omega} d\nabla C \cdot \nabla C_{test} = 0$$

De même, multiplions la deuxième équation du (4.2.11) par $\mathbf{u}_{test} \in V_u$, on trouve

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \mathbf{u}_{test} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_{test} + \frac{1}{\rho_c} \nabla p \cdot \mathbf{u}_{test} = g \cdot \mathbf{u}_{test}$$

et intégrons sur Ω pour obtenir

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \mathbf{u}_{test} - \int_{\Omega} \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_{test} + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho_c} \nabla p \cdot \mathbf{u}_{test} = \int_{\Omega} g \cdot \mathbf{u}_{test}$$

En utilisant la formule de Green, on trouve

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \mathbf{u}_{test} + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_{test} + \frac{1}{\rho_c} \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u}_{test} = \int_{\Omega} g \cdot \mathbf{u}_{test}$$

La formulation variationnelle de (4.2.11) est écrit comme suit :

Pour tout $C_{test} \in V_{C_{in}}$ et $\mathbf{u}_{test} \in V_u$, trouver $C \in V_{C_{in}}$ et $\mathbf{u} \in V_u$ tel que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{DC}{Dt}, C_{test} \right) + \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} (d\nabla C, \nabla C_{test}) = 0, \\ & \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \mathbf{u}_{test} \right) + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}_{test}) + \frac{1}{\rho_c} (\nabla p, \mathbf{u}_{test}) - (g, \mathbf{u}_{test}) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 4.2.1 On le montre facilement que C et $\mathbf{u}$ sont bornés dans $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ et $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$, respectivement; alors que $\frac{\partial C}{\partial t}$ et $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ sont bornés dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$. (pour plus de détails voir [7])

4.3 Discrétisation numérique

Dans cette section, nous considérons une approximation numérique du système (4.2.11). D'abord, les équations différentielles partielles sont discrétisées dans le temps. Les dérivées totales $\frac{D}{Dt}$ sont discrétisées par la méthode des caractéristiques. Le terme non linéaire est discrétisé par une formule semi-implicite tandis que les termes linéaires sont discrétisés implicitement :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1}(x) - \mathbf{u}^n \circ \chi(x)}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{\rho_C} \nabla p^{n+1} = g^{n+1}, \quad \text{avec } \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_{in} \text{ dans } \Omega$$

$$\frac{C^{n+1}(x) - C^n \circ \chi(x)}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \nabla \cdot (d \nabla C^{n+1}) = 0, \quad \text{avec } C(0, x) = C_{in} \text{ dans } \Omega$$

Par conséquent, nous avons les problèmes suivants :

trouver $C^{n+1} \in V_{C_{in}}$ tel que pour tout $C_{test} \in V_{C_{in}}$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{C^{n+1}(x) - C^n \circ \chi(x)}{\Delta t} C_{test} \, dx + \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \int_{\Omega} d \nabla C^{n+1} \nabla C_{test} \, dx \\ - \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \int_{\Gamma_{Bot}} \Phi^{n+1} C_{test} \, d\sigma = 0, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

et trouver $\mathbf{u}^{n+1} \in V_u$ tel que pour tout $\mathbf{u}_{test} \in V_0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^{n+1}(x) - \mathbf{u}^n \circ \chi(x)}{\Delta t} \mathbf{u}_{test} \, dx - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u}^{n+1} \mathbf{u}_{test} \, dx \\ + \frac{1}{\rho_C} \int_{\Omega} \nabla p^{n+1} \mathbf{u}_{test} \, dx = \int_{\Omega} g^{n+1} \mathbf{u}_{test} \, dx. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Les dérivées spatiales sont discrétisées par un schéma d'éléments finis de type rectangulaire comme suit.

4.3.1 Approximation par des éléments finis rectangulaire

Nous définissons un maillage rectangulaire $\mathcal{T}_h$ de Ω satisfait les conditions suivantes

- Pour chaque paramètre discret h , $\bar{\Omega}$ est l'union de tous les éléments de $\mathcal{T}_h$,
- soit N_1 et N_2 deux entiers, si on pose $h_1 = \frac{1}{N_1+1}$ et $h_2 = \frac{1}{N_2+1}$, on peut définir l'élément K comme

$$K = \{(x_1, x_2); ih_1 \leq x_1 \leq (i+1)h_1|_{i=1}^{N_1}, jh_2 \leq x_2 \leq (j+1)h_2|_{j=1}^{N_2}\}$$
- les éléments sont des rectangles des côtés h_1 et h_2 , parallèle aux axes des coordonnées,
- le nombre de rectangles est $N_T = (N_1 + 1)(N_2 + 1)$ éléments,
- le pas de maillage h de tout élément K de $\mathcal{T}_h$ est défini par $h = \max(h_1, h_2)$.

On introduit les espaces discrets V_h et M_h de la concentration et de la vitesse, respectivement de la manière suivante

$$V_h = \{v_h \in V_{C_{in}}; \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{h|K} \in \mathbb{Q}_1(K) \text{ or } \mathbb{Q}_2(K)\}$$

$$M_h = \{w_h \in V_u; \forall K \in \mathcal{T}_h, w_{h|K} \in \mathbb{Q}_1(K) \text{ or } \mathbb{Q}_2(K)\}$$

où $\mathbb{Q}_s(K)$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à s . Alors, on considère le problème suivant :

Trouver $(C_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in V_h \times M_h \times W_h$ tel que $\forall v_h \in V_h, \forall \mathbf{w}_h \in M_h$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{C_h^{n+1}(x) - C_h^n \circ \chi(x)}{\Delta t} v_h dx + \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \int_{\Omega} d\nabla C_h^{n+1} \nabla v_h dx + \\ - \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \int_{\Gamma_{Bot}} \Phi^{n+1} v_h d\sigma = 0, \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}_h^{n+1}(x) - \mathbf{u}_h^n \circ \chi(x)}{\Delta t} \cdot \mathbf{w}_h dx + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} \nabla \mathbf{w}_h dx + \\ + \frac{1}{\rho_C} \int_{\Omega} \nabla p_h^{n+1} \mathbf{w}_h dx = \int_{\Omega} g^{n+1} \mathbf{w}_h dx, \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

avec $p_h \in W_h = \{p_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, p_{h|K} \in \mathbb{Q}_1(K)\}$.

4.3.2 Analyse de stabilité

Dans cette section, nous prouvons un résultat sur la compatibilité du schéma utilisé, c'est-à-dire une condition de stabilité numérique. Ici, il faut noter que le fluide est faiblement compressible, donc on suppose que $\nabla \cdot \mathbf{u}$ est exactement nul.

En prenant $v_h = C_h^{n+1}$ et $\mathbf{w}_h = \mathbf{u}_h^{n+1}$ dans (4.3.3) et (4.3.4), on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{C_h^{n+1}(x) - C_h^n \circ \chi(x)}{\Delta t}, C_h^{n+1} \right)_\Omega + \frac{d}{Re \, Pr} (\nabla C_h^{n+1}, \nabla C_h^{n+1})_\Omega - \frac{1}{Re \, Pr} (\Phi^{n+1}, C_h^{n+1})_{\Gamma_{Bot}} \\ & + \left(\frac{\mathbf{u}_h^{n+1}(x) - \mathbf{u}_h^n \circ \chi(x)}{\Delta t}, \mathbf{u}_h^{n+1} \right)_\Omega + \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{u}_h^{n+1})_\Omega = (g^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1})_\Omega \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & (C_h^{n+1}, C_h^{n+1})_\Omega - (C_h^n \circ \chi(x), C_h^{n+1})_\Omega + \frac{d\Delta t}{Re \, Pr} (\nabla C_h^{n+1}, \nabla C_h^{n+1})_\Omega - \frac{\Delta t}{Re \, Pr} (\Phi^{n+1}, C_h^{n+1})_{\Gamma_{Bot}} \\ & + (\mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1})_\Omega - (\mathbf{u}_h^n \circ \chi(x), \mathbf{u}_h^{n+1})_\Omega + \frac{\Delta t}{Re} (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{u}_h^{n+1})_\Omega = \Delta t (g^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1})_\Omega \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \|C_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{d\Delta t}{Re \, Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{\Delta t}{Re} \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 - (C_h^n \circ \chi(x), C_h^{n+1})_\Omega \\ & - (\mathbf{u}_h^n \circ \chi(x), \mathbf{u}_h^{n+1})_\Omega - \frac{\Delta t}{Re \, Pr} (\Phi^{n+1}, C_h^{n+1})_{\Gamma_{Bot}} = \Delta t (g^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1})_\Omega \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} & \|C_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{d\Delta t}{Re \, Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{\Delta t}{Re} \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 = \frac{\Delta t}{Re \, Pr} (\Phi^{n+1}, C_h^{n+1})_{\Gamma_{Bot}} \\ & + \Delta t (g^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1})_\Omega + (C_h^n \circ \chi(x), C_h^{n+1})_\Omega + (\mathbf{u}_h^n \circ \chi(x), \mathbf{u}_h^{n+1})_\Omega \end{aligned}$$

Notez que $\|\cdot\|_0^2$ est la norme L^2 sur Ω . Par inégalité de Cauchy Schwartz, on trouve

$$\begin{aligned} & \|C_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{d\Delta t}{Re \, Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{\Delta t}{Re} \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 \leq \frac{\Delta t}{Re \, Pr} (\Phi^{n+1}, C_h^{n+1})_{\Gamma_{Bot}} \\ & + (\Delta t \|g^{n+1}\|_0 + \|\mathbf{u}_h^n \circ \chi(x)\|_0) \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0 + \|C_h^n \circ \chi(x)\|_0 \|C_h^{n+1}\|_0 \end{aligned}$$

Si

$$\frac{\Delta t}{Re \, Pr} (\Phi^{n+1}, C_h^{n+1})_{\Gamma_{Bot}} \leq \frac{\Delta t}{Re \, Pr} \|\Phi^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_{Bot})} \|C_h^{n+1}\|_0$$

Notez que $g^{n+1} = \nabla \cdot F(C^{n+1})$ (ici on suppose que g c'est la gravité), d'où

$$\begin{aligned} \|C_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{d\Delta t}{Re \, Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{\Delta t}{Re} \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 &\leq (\Delta t \|g^{n+1}\|_0 + \|\mathbf{u}_h^n \circ \chi(x)\|_0) \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0 \\ &+ \left(\frac{\Delta t}{Re \, Pr} \|\Phi^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_{Bot})} + \|C_h^n \circ \chi(x)\|_0 \right) \|C_h^{n+1}\|_0. \end{aligned}$$

Or, pour toute fonction ϕ définie et intégrable dans Ω , on posant un changement de variable $y = \chi(x)$,

$$\int_{\Omega} \phi \circ \chi(x) \, dx = \int_{\Omega} \phi(y) \, \det(\nabla \chi)^{-1} dy = \int_{\Omega} \phi(y) \, dy \quad (4.3.5)$$

car $\det(\nabla \chi) = 1$ p.p dans Ω . En appliquant (4.3.5) avec $\phi(x) = |u_h^n(x)|^2$ et $\phi(x) = |C_h^n(x)|^2$, on obtient

$$\|\mathbf{u}_h^n \circ \chi(x)\|_0 = \|\mathbf{u}_h^n\|_0 \quad , \quad \|C_h^n \circ \chi(x)\|_0 = \|C_h^n\|_0, \quad (4.3.6)$$

pour plus de détails, voir [43]. Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \|C_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{d\Delta t}{Re \, Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{\Delta t}{Re} \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 &\leq (\Delta t \|g^{n+1}\|_0 + \|\mathbf{u}_h^n\|_0) \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0 \\ &+ \left(\frac{\Delta t}{Re \, Pr} \|\Phi^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_{Bot})} + \|C_h^n\|_0 \right) \|C_h^{n+1}\|_0. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré et de Young, on trouve

$$\begin{aligned} \|C_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{d\Delta t}{Re \, Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{\Delta t}{Re} \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 &\leq A_1(\Omega) \Delta t \|g^{n+1}\|_0 \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0 \\ + \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{u}_h^n\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 \right) + A_2(\Omega) \frac{\Delta t}{Re \, Pr} \|\Phi^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_{Bot})} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0 &+ \frac{1}{2} \left(\|C_h^n\|_0^2 + \|C_h^{n+1}\|_0^2 \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 2 \|C_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{2d\Delta t}{Re \, Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + 2 \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{2\Delta t}{Re} \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 &\leq 2A_1 \Delta t \|g^{n+1}\|_0 \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0 \\ + \frac{2A_2 \Delta t}{Re \, Pr} \|\Phi^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_{Bot})} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0 + \|\mathbf{u}_h^n\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 &+ \|C_h^n\|_0^2 + \|C_h^{n+1}\|_0^2. \end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Young sur le premier et deuxième terme du membre de droite, on a

$$2 \|C_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{2d\Delta t}{Re Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + 2 \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{2\Delta t}{Re} \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 \leq A_1 \Delta t \|g^{n+1}\|_0^2 + A_1 \Delta t \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 \\ + \frac{A_2 \Delta t}{Re Pr} \|\Phi^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_{Bot})}^2 + \frac{A_2 \Delta t}{Re Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^n\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \|C_h^n\|_0^2 + \|C_h^{n+1}\|_0^2.$$

où A_1 et A_2 sont constants. Soit encore

$$\|C_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{2d\Delta t}{Re Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{2\Delta t}{Re} \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 \leq A_1 \Delta t \|g^{n+1}\|_0^2 + A_1 \Delta t \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 \\ + \|\mathbf{u}_h^n\|_0^2 + \frac{A_2 \Delta t}{Re Pr} \|\Phi^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_{Bot})}^2 + \frac{A_2 \Delta t}{Re Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + \|C_h^n\|_0^2$$

En prenant $A_1 = \frac{1}{Re}$ et $A_2 = d$, on obtient

$$\|C_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{d\Delta t}{Re Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{\Delta t}{Re} \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 \leq \frac{\Delta t}{Re} \|g^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^n\|_0^2 \\ + \frac{d\Delta t}{Re Pr} \|\Phi^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_{Bot})}^2 + \|C_h^n\|_0^2$$

La stabilité du schéma est ainsi établie.

Proposition 4.3.1 *Le schéma défini par ((4.3.3)-(4.3.4)) est stable et satisfait*

$$\|C_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{d\Delta t}{Re Pr} \|\nabla C_h^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \frac{\Delta t}{Re} \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_0^2 \leq \frac{\Delta t}{Re} \|g^{n+1}\|_0^2 + \|\mathbf{u}_h^n\|_0^2 \\ + \frac{d\Delta t}{Re Pr} \|\Phi^{n+1}\|_{L^2(\Gamma_{Bot})}^2 + \|C_h^n\|_0^2$$

4.4 Mise en oeuvre numérique

Pour appliquer ce schéma numérique pour résoudre le système ((4.3.1)-(4.3.2)), nous décrivons l'algorithme suivant.

4.4.1 Algorithme

Pour résoudre le système ((4.3.1)-(4.3.2)), nous adaptons ces étapes suivantes :

1. Initialisation : saisissez le nombre de Reynolds Re , la densité ρ_0 , la concentration c_p , le coefficient de diffusion d , la perméabilité K , le pas de temps Δt , le temps final T et les conditions initiales et limites pour C et $\mathbf{u}$.

2. Résoudre (4.3.1) pour la concentration C
3. Calculer ρ_C à partir de la concentration C (mise à jour ρ_C)
4. Résoudre (4.3.2) pour le vecteur vitesse en utilisant ρ_C .
5. Répétez les étapes 2 à 4 jusqu'à le temps final T .

4.4.2 Résultats numériques et commentaires

Nous étudions la simulation numérique d'un modèle, pour lequel des résultats de modélisation numérique sont disponibles. Nous supposons que le fluide est faiblement compressible avec une densité qui dépend de la concentration C , en prenant en compte la gravité g comme force externe. Le système d'équations qui en résulte est résolu dans l'espace par un schéma d'éléments finis de type rectangulaire et dans le temps selon les formules de différenciation; où le choix des paramètres de discrétisation dépend de la condition de stabilité définie dans la proposition 4.3.1. De tels schémas d'intégration temporelle sont connus pour produire des résultats précis. Ces méthodes sont adaptées aux géométries physiques complexes, aux flux dépendants de la densité et au transport à travers des milieux poreux saturés et non saturés. Les résultats de la simulation pour le cas d'un aquifère confiné sont présentés et facilement comparés aux solutions déjà publiées [36] pour évaluer la performance du nouveau modèle de calcul proposé.

Pour nos expérimentations numériques, on considère un domaine rectangulaire de longueurs $L_x = 3$ et $L_y = 1$, respectivement, $Re = 100$, $c_p = 0.1$, $d_0 = 0.1$, la perméabilité $K = 1$, $u_{in} = 4y(1 - y)$, $v_{in} = 0$, $g = 9.81$, $\tau = \frac{1}{\rho_C} = B.C$, (B est constant) et le pas temporelle $\Delta t = 0.1$. Notez que ρ_C est mis à jour à chaque étape.

Par l'utilisation de schéma ci-dessus, pour résoudre le problème ((4.3.1)-(4.3.2)) pour la vitesse et la concentration, on peut remarquer que la concentration de sel devient plus pertinente quand le temps augmente. Cela veut dire qu'il existe une miscibilité des deux

fluides, comme le montre la **Figure 4.4.1** , c'est-à-dire que le déplacement de fluide plus dense envahit lentement quand le temps augmente et que le mélange devient plus lent. Ce phénomène a également été observé dans un document expérimental récent de [36]. Il aurait été plus intéressant d'utiliser des fluides à densité variable, par exemple des fluides avec des impuretés comme les produits chimiques issus de déchets industriels.

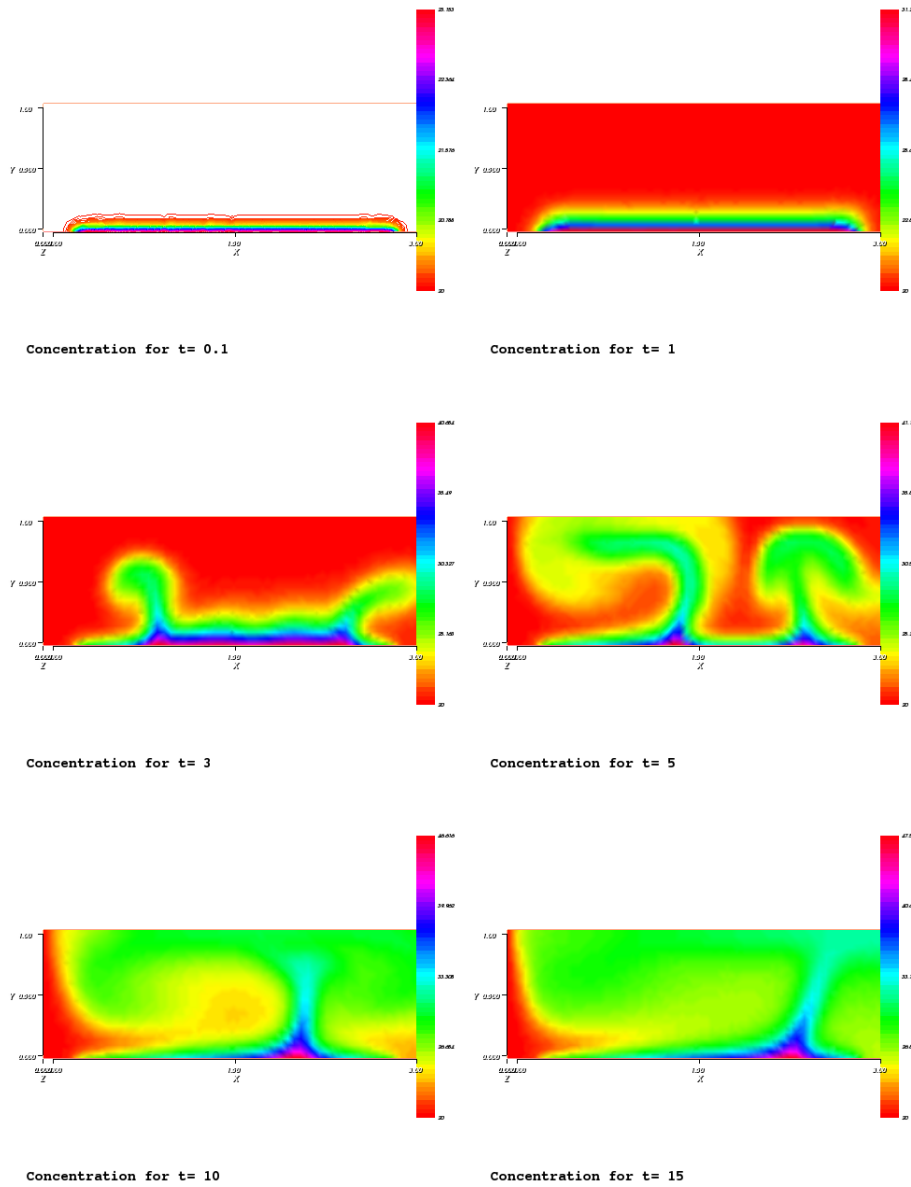


Figure 4.4.1 – Concentration pour $t = 0.1, 1, 3, 5, 10$ et 15 s.

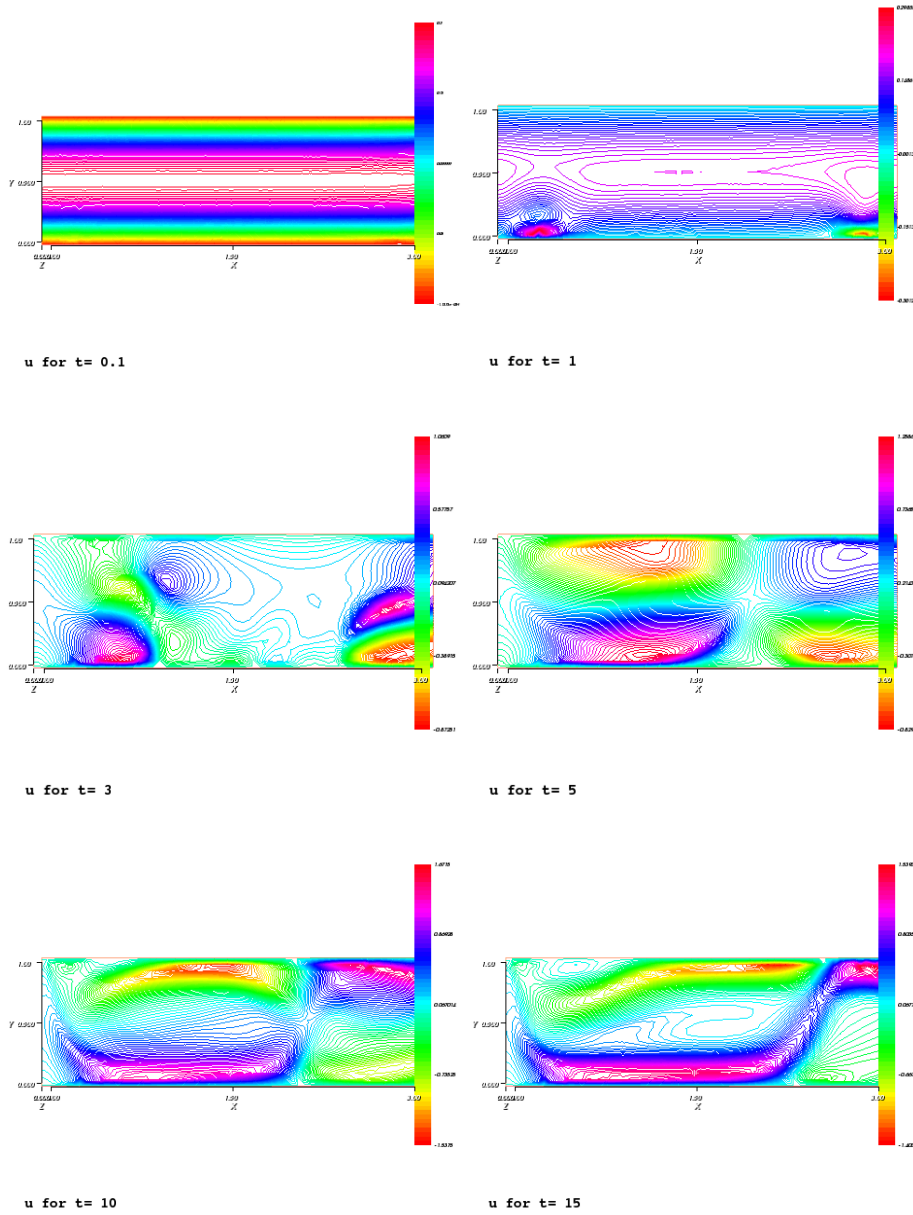


Figure 4.4.2 – Composante de vitesse u pour $t= 0.1, 1, 3, 5, 10$ et $15s$.

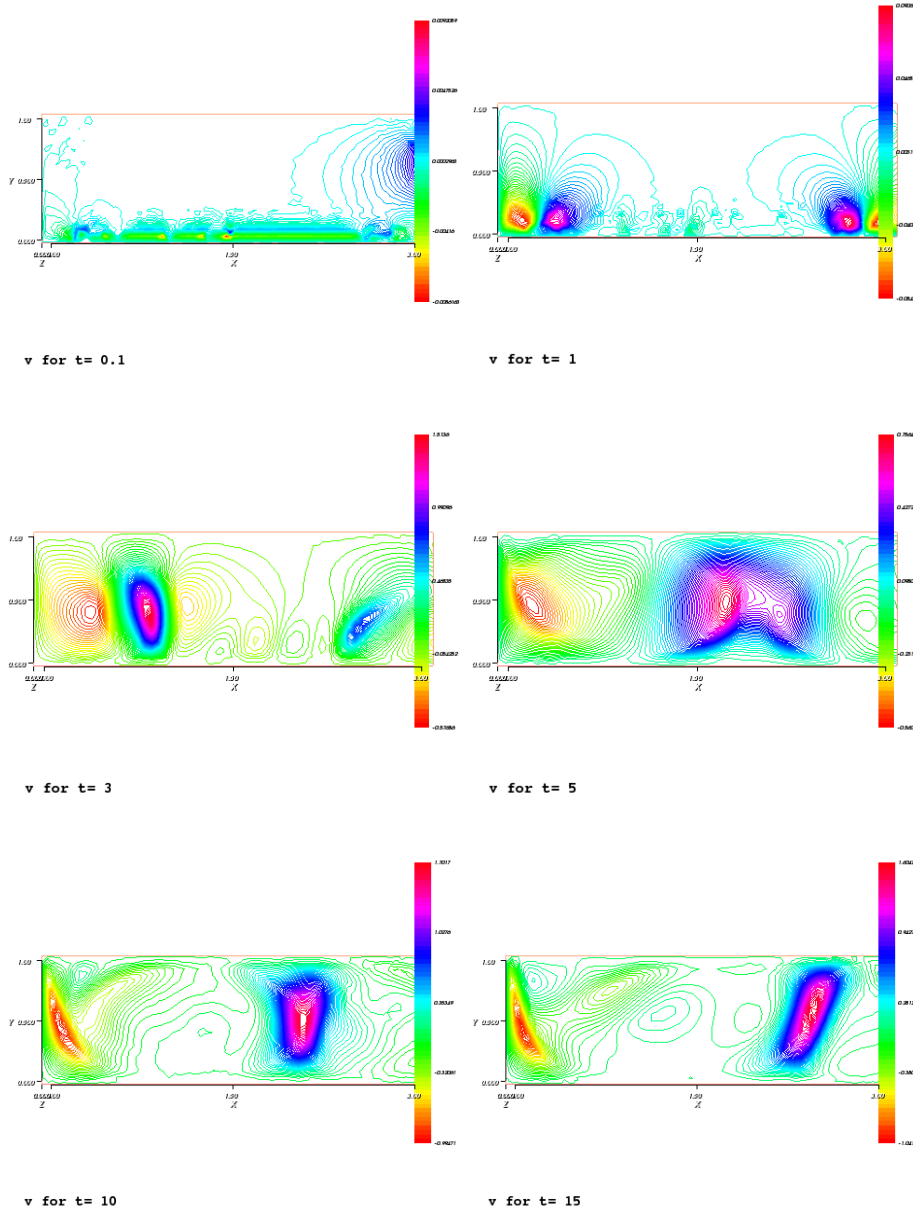


Figure 4.4.3 – Composante de vitesse v pour $t=0.1, 1, 3, 5, 10$ et 15 s.

4.5 Conclusion

Un problème issu de l'hydrogéologie considérant deux fluides miscibles avec des densités en fonction de la concentration a été étudié, où

- On a pu dériver une nouvelle formulation du problème avec des conditions nécessaires sur les inhomogénéités de la concentration et le stress de Korteweg.
- On a proposé une méthode des éléments finis de type rectangulaire avec la méthode des caractéristiques pour le discétiser et on a prouvé une condition de stabilité nécessaire pour assurer la compatibilité du schéma.
- En effectuant des expériences numériques, on a pu remarquer que la concentration de sel devient plus pertinente quand le temps augmente ; ce qui est du à la miscibilité des deux fluides. En d'autres termes, le fluide le plus dense se déplace et envahit lentement au cours de temps, et par conséquent, le mélange devient plus lent.

Ces tests numériques ont été faits au moyen du logiciel libre Freefem++.

Conclusion générale et perspectives

Notre intérêt dans cette thèse portait sur l'étude des problèmes d'hydrogéologie dans leurs aspects analytiques et numériques, pour lesquels nous avons montré des résultats d'existence et d'unicité de la solution, puis développé des schémas numériques pour leur résolution.

L'objectif de la première partie est l'étude d'un problème de deux fluides immiscibles qui a abouti à un système parabolique-elliptique non linéaire dégénéré. On a commencé par montrer l'existence et l'unicité de la solution du système obtenu. En deuxième étape, on a développé et analysé un schéma numérique de type volumes finis sur des maillages non structurés, ce qui nous a conduit à utiliser une méthode dite de "cellules diamants" pour l'approximation du gradient.

Dans la deuxième partie, un schéma d'éléments finis rectangulaire a été proposé afin d'approcher un problème de deux fluides miscibles où on a pu prouver un résultat de stabilité pour le schéma résultant, ainsi qu'une implémentation numérique des résultats obtenus.

On conclut que :

1. Un résultat d'existence et d'unicité de la solution du premier problème (chapitre 3, proposition 3.6.1) a été prouvé et a fait l'objet de plusieurs communications et d'une publication [24].

2. Des résultats numériques ont montré que les fluides restent immiscibles avec une évolution de l'interface (figures 3.9.1, 3.9.2 et 3.9.5)

3. Les test numériques sont effectués, à travers la méthode de volumes finis. En fait, nous remarquons d'après les illustrations (chapitre 3, figures 3.9.1, 3.9.2, 3.9.3, 3.9.4 et 3.9.5) que les saturations de l'eau douce et salée sont compatibles, ce qui montre l'immiscibilité des fluides ; autrement dit, ces résultats donnent des informations sur le mouvement du front d'eau salée. Concernant la pression, on aperçoit une augmentation lente de la pression au cours du temps à cause de l'incompressibilité du fluide. Ces simulations numériques assurent la stabilité du schéma présenté et confirme le résultat analytique obtenu [24].

4. Un schéma d'éléments finis de type rectangulaire pour l'espace et une formule des différences finis en arrière pour le temp ont été donnés, où on a trouvé une condition de stabilité nécessaire pour assurer la compatibilité du schéma (chapitre 4, proposition 4.3.1).

5. Des expériences numériques sont réalisés, à travers la méthode d'éléments finis. On a pu remarquer que la concentration de sel devient plus pertinente quand le temps augmente ; ce qui est dû à la miscibilité des deux fluides. En d'autres termes, le fluide le plus dense se déplace et envahit lentement au cours du temps, et par conséquent, le mélange devient plus lent (chapitre 4, figures 4.4.1, 4.4.2 et 4.4.3).

En perspective, on espère approfondir notre étude pour d'autre problèmes réels, en appliquant d'autres méthodes numériques avancées avec différents paramètres d'intérêt physique.

Bibliographie

- [1] D.S. Abrams, J. M. Prausnitz; Statistical thermodynamics of liquid mixtures : a new expression for the excess Gibbs energy of partly or completely miscible systems, AIChE Journal 21 (1975), pp. 116–128.
- [2] A. Abudawia; Analyse numérique d’une approximation élément fini pour un modèle d’intrusion saline dans les aquifères côtiers, thèse de doctorat, Université du Littoral Côte d’Opale, soutenue le 15 Décembre 2015.
- [3] R.A. Adams. Sobolev Spaces, Academic Press, New-York, 1975.
- [4] M. Afif, B. Amaziane. On convergence of finite volume schemes for one-dimensional two-phase flow in porous media. J. Comput. Appl. Math. 145, 31-48 (2002).
- [5] M. Afif and B. Amaziane. Convergence of finite volume schemes for a degenerate convection–diffusion equation arising in flow in porous media, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191, 5265–5286 (2002).
- [6] Ahmad Al Bitar. Modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogènes 2D / 3D, avec couplages surface / souterrain et densitaires, thèse de doctorat, institut national polytechnique de Toulouse, soutenue le 4 juin 2007.
- [7] K. Allali, Existence and uniqueness of solutions for Miscible Liquids Model in porous media, Electronic Journal of Differential Equations, Vol.2013 (2013), No. 254, pp. 1–7.
- [8] G. Allaire. Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, Editions école Polytechnique, 2005.

-
- [9] H.W. Alt, S. Luckauss. Quasilinear elliptic-parabolic equations, *Math. Z.* 183 (1983) pp. 311-341.
 - [10] A. Assala, M.L. Hadji & F.Z. Nouri, A posteriori error analysis for Navier–Stokes equations coupled with Darcy problem, *Calcolo* (2015) 52 : DOI 10.1007/s10092-014-0130-z, pp.559–576.
 - [11] J. Bear, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Elsevier, New York, 1972.
 - [12] J. Bear, *Hydraulics of groundwater*, McGraws-Hill, New York, 1979.
 - [13] J. Bear, A. Verruijt. *Modelling Groundwater Flow and Pollution*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1987.
 - [14] J. Bear, A. H-D. Cheng, S. Sorek, D. Ouazar, I. Herrera (Eds.), *Seawater Intrusion in Coastal Aquifers-Concepts, Methods and Practices*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1999.
 - [15] J. Bear, A.H.-D Cheng, *Modeling groundwater Flow and contaminant transport, Theory and applications of transport in porous media*, Vol. 23, Springer (2010).
 - [16] C. Bernardi, Y. Maday. *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, *Mathématiques et Appli- cations* 10, Springer-Verlag (1992).
 - [17] N. Bessonov, J.A. Pojman, V. Volpert ; *Modelling of diffuse interfaces with temperature gradients*, *Journal of engineering mathematics* 49 (2004), pp. 321–338.
 - [18] N. Bessonov, V. A. Volpert, J. A. Pojman, B. D. Zoltowski ; *Numerical simulations of convection induced by Korteweg stresses in miscible polymermonomer systems*, *MicrogravityScience and Technology* 17 (2005), pp. 8–12.
 - [19] M. S. Bir. *Ecoulements au travers les milieux poreux. Approche stochastique*. Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri-Tizi Ouzou, 2012.
 - [20] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, *Collection Mathématique Appliquées pour la Maîtrise*, Masson, Paris, 1983.
 - [21] G. Castany. *Origine et évolution des concepts des eaux souterraines*. *Travaux du Comité français d’Histoire de la Géologie*, Comité français d’Histoire de la Géologie, 1991, 3ème série (tome 5), pp.1-7.

-
- [22] Y. Courdière, J. P. Vila and P. Villedieu, Convergence rate of finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem, *Math. Mod. and Num. Anal.*, M2AN, vol. 33 (1999) 493-516.
- [23] H. Darcy. Les fontaines publiques de la ville de Dijon ; exposition et application des principes à employer dans les questions de distribuion d'eau. Ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes, au filtrage des eaux et à la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tôle et de bitume. Victor Dalmont, éditeur, Paris, 1856.
- [24] N Djedaidi & F.Z. Nouri, A study of sea water flow interactions in Heterogeneous porous media, *International Journal of Ecology & Development* Year 2016 ; Volume 31, Issue No.2 ; *Int. J. Ecol. Dev.*, pp.70-77.
- [25] [http ://www.dumux.org/](http://www.dumux.org/).
- [26] R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin. Finite volume methods, *Handbook of numerical analysis*, North Holland, P.G. Ciarlet, J.L. Lions eds, vol 7, pp 713-1020, 2000.
- [27] G. Gagneux, M. Madaune-Tort, *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière. Mathématiques Applications*, 22, Springer, 1996.
- [28] S. Gasmi and F.Z. Nouri. A Study of a Bi-Phasic Flow Problem in Porous Media, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7, 2013, no. 42, pp. 2055-2064.
- [29] S. Gasmi and F. Z. Nouri, Numerical simulation for two phase flow in a porous medium, *Boundary Value Problems* 2015, 2015 :7 doi :10.1186/s1366101402566, pp. 1-7.
- [30] F. Hecht, O. Pironneau. FreeFem++, see www.freefem.org.
- [31] Y. L'Hôte. Historique du concept de cycle de l'eau et des premières mesures hydrologiques en Europe, *Hydrol. continent.* ml. 5, no 1, 1990 : 13-27.
- [32] D. D. Joseph ; Fluid dynamics of two miscible liquids with diffusion and gradient stresses, *European journal of mechanics. B, Fluids* 9 (1990), pp. 565–596.

- [33] D. Korteweg ; Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité, Arch. Néerl Sci. Exa. Nat., Series II. 6 (1901), pp. 1–24.
- [34] I. Kostin, M. Marion, R. T. Picar and V. A. Volpertd, Modelling of miscible, liquids with the Korteweg stress, Mathematical Modelling and Numerical, Analysis, Vol. 37, No.5, 2003, pp. 741–753.
- [35] J.Li, Analyse mathématique de modèles d'intrusion marine dans les aquifères côtiers, Thèse de Doctorat, Univ du Littoral Côte d'Opale, 20.oct.2015.
- [36] R. Maes, G. Rousseaux, B. Scheid, M. Mishra, P. Colinet and A. De Wit (2010) 'Experimental study of dispersion and miscible viscous fingering of initially circular samples in Hele-Shaw cells', *Phys. Fluids* 22, 123104
- [37] M. Maouni and F.Z. Nouri, Image restoration based on P gradient, IJAMS volume 41 issue 11, (2013), pp.48-57.
- [38] J. Margat. Histoire de l'Hydrologie, Colloque International OH2 "Origines et Histoire de l'Hydrologie ", Dijon, 9-11 mai 2001.
- [39] J. Margat, D. Pennequin, J-C. Roux. Histoire de l'hydrogéologie française, Association Internationale des Hydrogéologues, 2013.
- [40] G. de Marsily. Cours d'Hydrogéologie, Université Paris VI, Septembre 2004.
- [41] K. Najib and C. Rosier. On the global existence for a degenerate elliptic-parabolic seawater intrusion problem, Mathematics and Computers in Simulation 81 (2011), pp. 2282–2295.
- [42] M. Nicolas. Ecoulement dans les milieux poreux. Université de Provence, Marseille, 2003.
- [43] O. Pironneau (1988) 'Finite element methods for fluids', *Université Pierre et Marie Curie & INRIA-Paris*.
- [44] P.A. Raviart et J.M. Thomas. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris, 1988.

- [45] C. Rosier, L. Rosier. Well posedness of a degenerate parabolic equation issuing from two-dimensional perfect fluid dynamics, *Appl. Anal.* 75 (3–4) (2000) pp. 441–465.
- [46] Z. Salloum. Etude mathématique d'écoulements de fluides viscoélastiques dans des domaines singuliers. Thèse de Doctorat, Université Paris-Est, Soutenue le 25 juin 2008.
- [47] M. Talibi, M.H. Tber. Existence of solutions for a degenerate seawater intrusion problem. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2005 (2005), No. 72, pp. 1–14.
- [48] A. Verruijt, A note on the Ghyben-Herzberg formula, *Bulletin of the International Association of Scientific Hydrology*, XIII, 1968, pp. 43-46.