

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY
ANNABA

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Année : 2016 /2017

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Appliquées



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en MATHÉMATIQUES

**RÉGULARISATION ET APPROXIMATION
NUMÉRIQUE DE QUELQUES PROBLÈMES
MAL POSÉS**

Option

Mathématiques et Applications

Présentée par:

NEGGAL BILEL

DIRECTEUR DE THÈSE : REBBANI Faouzia Prof E.S.T.I. ANNABA
CO-DIRECTEUR DE THÈSE: BOUSSETILA Nadjib Prof UNIV. GUELMA

Devant le jury :

PRESIDENT : CHORFI Lahcene Prof. U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : ALEM Leila M.C.A U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : ZOUYED Fairouz M.C.A U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : NOUAR Ahmed M.C.A UNIV. SKIKDA

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

T H È S E

En vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat en MATHÉMATIQUES

Présentée et soutenue par

Bilel NEGGAL

**REGULARISATION ET APPROXIMATION
NUMERIQUE DE QUELQUES PROBLEMES MAL
POSES**

Directeur de Thèse : Prof. Faouzia REBBANI ESTI. Annaba
Co-Directeur de Thèse : Prof. Nadjib BOUSSETILA U. Guelma

Jury :

Président : Prof. Lahcene CHORFI U. Annaba
Examineurs : Dr. Leila ALEM U. Annaba
Dr. Fairouz ZOUYED U. Annaba
Dr. Ahmed NOUAR U. Skikda

Année 2017

Remerciements



Tout d'abord Je tiens à remercier en premier lieu Allah pour tout ce que m'a été donné de force, courage et surtout de connaissances.

Je tiens à remercier mes deux directeurs de thèse, Professeur Boussetila Nadjib et Professeur Rebbani Faouzia. Si j'ai mené cette thèse à terme, c'est grâce à eux. Ils ont su me transmettre leur motivations et leur intérêt pour la recherche mathématique. J'ai beaucoup appris d'eux. Ils ont été à l'origine de mes progrès pendant ces cinq dernières années. Pendant cette période de recherche ils n'ont pas cessé de me pousser à aller de l'avant montrant une grande rigueur dans tout ce qu'ils entreprenaient. Ce fut un réel plaisir de travailler avec eux. Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance pour leur aide, leur soutien, leurs conseils ainsi que la confiance qu'ils m'ont fait en acceptant de me diriger dans mes recherches.

Je remercie également le Professeur Yves DERMENJIAN pour son aide, ses conseils précieux, sa disponibilité lors de mes séjours au sein de son laboratoire. Ainsi que le Professeur Abderrazek KAROUI qui m'a aidé pendant le séjours au niveau de la faculté des sciences de Bizerte en Tunisie.

Je voudrai aussi remercier monsieur Ahmed Nouar pour avoir accepté de faire partie du jury et de m'a avoir consacré une partie de son temps malgré un emploi du temps chargé.

Je tiens également à remercier Le professeur Lahcene CHORFI qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi que les Docteurs Fairouz ZOUYED et Leila ALEM pour avoir accepté de faire partie du jury et d'avoir consacré une partie de leurs temps dans l'étude de ma thèse.





Je remercie mon père *Houcine* qui a tout donné pour que je sois un homme de valeur, ma mère *Nadjet* qui n'a pas arrêté de prier pour que je puisse finaliser mes études et obtenir le doctorat, mon frère *Ismaïl* et ma sœur *Imen* pour leurs encouragements. Je remercie également tous les membres de ma famille qui ont toujours été à mes côtés avec leurs encouragements, leur soutien moral et scientifique pour que je puisse mener ce travail à terme.

Je remercie tous mes amis d'enfance *Amine*, *Yazid*, *Salim*, *Lamine*; et d'université *Abdellah*, *Fateh*, *Abdelghani*, *Hamida*; mes collègues d'études *Walid*, *Jaafar*, *Hamdi*, *Amar*, *Hamza*, et les autres camarades du Doctorat Mathématiques et Applications et les membres du laboratoire *L.M.A* (Chercheurs et Personnels), ainsi que mes enseignants et le personnel administratif du département de Mathématiques de l'université Badji Mokhtar Annaba.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.





*Ce travail est dédié à celle que j'aime et que j'aimerai
pour l'éternité*

ma chère défunte Grand Mère ♡



ملخص

نهدف من خلال هذه الأطروحة إلى دراسة التقريب الإسقاطي المدعم بتعديل تخونوف من أجل إنشاء حلول متزنة للمعادلات التكاملية من نمط فريدهولم من الصنف الأول و المتميز بالطبيعة المعتلة. نبرز في هذه الدراسة مشروعية الطرح النظري لمثل هذه التقريبات مشفوعة بالنتائج العددية المبينة لتقارب الحلول التقريبية نحو الحلول الأصلية و هذا مع معطيات صحيحة و كذلك مع معطيات مشوشة.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التكاملية من نمط فريدهولم من الصنف الأول. التقريب الإسقاطي . تعديل تخونوف.

Résumé

Dans cette thèse, on développe deux approches d'approximation numérique pour une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce. La stratégie adoptée repose essentiellement sur la régularisation de Tikhonov et les projections orthogonale. On donne le cadre théorique qui montre la convergence de ces approches, ainsi que une série d'expérimentation numérique justifiant les résultats théoriques obtenus et aussi l'exactitude des solutions approchée.

Mots clés : Equations intégrale de Fredholm de première espèce, régularisation de Tikhonov, méthode spectrale de collocation-Legendre, méthodes de projection.

Abstract

This study looks at applying spectral methods and projected methods combined with Tikhonov regularization to Fredholm integral equations of the first Kind. We focus on the theoretical analysis and numerical aspects of these approaches, where the convergence and error estimates of these approaches are established under some regularity assumptions of the original solution. Numerical results are included to confirm the efficiency and accuracy of the method.

Key words : Fredholm integral equations of the first Kind, Tikhonov regularization, Legendre-Collocation spectral method, projection methods.

RESEARCH

Open Access



Projected Tikhonov regularization method for Fredholm integral equations of the first kind

Billel Neggal¹, Nadjib Boussetila^{1,2*} and Faouzia Rebbani¹

*Correspondence: n.boussetila@gmail.com
¹Applied Mathematics Laboratory, Badji Maokhtar University Annaba, Annaba 23000, P.O. Box 12, Annaba, Algeria
²Department of Mathematics, University 8 Mai 1945 Guelma, Guelma 24000, P.O. Box 401, Guelma, Algeria

Abstract

In this paper, we consider a variant of projected Tikhonov regularization method for solving Fredholm integral equations of the first kind. We give a theoretical analysis of this method in the Hilbert space $L^2(a, b)$ setting and establish some convergence rates under certain regularity assumption on the exact solution and the kernel $k(\cdot, \cdot)$. Some numerical results are also presented.

Keywords: ill-posed problems; integral equation of the first kind; projected Tikhonov regularization method

1 Introduction

Let $H = L^2((a, b); \mathbb{R})$ and consider the Fredholm integral equation of the first kind

$$\int_a^b k(t, s)f(s) ds = g(t), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

where $k(\cdot, \cdot)$ and g are known functions, and f is the unknown function to be determined. The equation can be written as an operator equation

$$K : H \longrightarrow H, \quad f \longmapsto g = Kf. \quad (2)$$

Many inverse problems in applied science and engineering (see, e.g., [1–3] and references therein) lead to the solution of Fredholm integral equations of the first kind (1).

Several numerical methods are available in the literature to solve linear integral equations of the first kind; we can cite, for example, multiscale methods [4–8], spectral-collocation methods [9, 10], reproducing kernel Hilbert space methods [11, 12], eigenvalue approximation methods [13–17], quadrature-based collocation methods [18, 19], projections methods [20–28], and other interesting methods quite exposed in the books [13, 29–36].

In the regularizing procedures, several authors have studied finite-dimensional approximations obtained by projecting regularized approximations into finite-dimensional subspaces. Such methods may be called regularization projection methods.

Table des matières

Introduction	1
1. Thème de recherche	1
2. Contenu de la thèse	2
Chapitre 1. Résultats préliminaires et notations	3
1. Equations intégrales	3
2. Problèmes inverses et problèmes mal posés	10
3. Intégration numérique et formules de quadratures	20
4. Polynômes de Legendre	22
Chapitre 2. Méthode de Legendre-Collocation régularisée pour une équation intégrale de Fredholm de première espèce	27
1. Position du problème	27
2. Méthode de Legendre-Collocation régularisée	28
Chapitre 3. Régularisation de Tikhonov projetée pour une équation intégrale de Fredholm de première espèce	31
1. Position du problème	31
2. Résultats préliminaires et notations	31
3. Méthode de régularisation de Tikhonov projetée	32
4. Analyse de convergence	38
5. Stratégie a posteriori du choix du paramètre de régularisation	42
Chapitre 4. Tests numériques	44
1. Résultats numériques obtenus par la méthode de Legendre Collocation régularisée	45
2. Résultats numériques obtenus par la méthode de regularisation de Tikhonov projetée	63
Commentaires	81
Conclusion et perspectives	82

Table des matières	6
Bibliographie	83

1. Thème de recherche

Plusieurs problèmes inverses en sciences et technologie définis sur un espace unidimensionnel, peuvent être modélisés par des équations intégrales de Fredholm de première espèce, i.e., des équations de la forme :

$$\mathbf{K}f(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds = g(t), \quad (\text{IEFK})$$

où $k(.,.) \in L^2((a,b) \times (a,b); \mathbb{R})$ est le noyau, qui est en général non dégénéré, $g \in L^2(a,b)$ est la donnée et $f \in L^2(a,b)$ est l'inconnue recherchée.

Ces problèmes sont mal posés au sens de Hadamard, et leur traitement numérique pose un problème très délicat¹.

La théorie des problèmes inverses et en particulier leurs méthodes de traitement numérique sont d'une grande importance pour les sciences appliquées et la technologie. Elles sont cruciales pour le développement des techniques de mesure et de diagnostique pour des systèmes complexes et partiellement accessibles.

Les équations intégrales de Fredholm de première espèce sont impliquées dans de nombreuses applications scientifiques. Cette catégorie de problèmes englobe plusieurs formulations inverses de certains modèles physiques, comme la radiographie, la spectroscopie, le rayonnement, le transfert radiatif et le traitement d'images [30].

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes numériques ont été développées pour traiter cette catégorie de problèmes instables [1, 36].

1. Les problèmes mal-posés sont les plus contraignants d'un point de vue pratique mais les plus attrayants d'un point de vue mathématique

Parmi ces méthodes, on distingue deux variétés les plus utilisées : les méthodes de *collocation* (méthodes de Nyström) qui sont basées sur l'approximation numérique des intégrales par des sommes pondérées supportées sur un ensemble de points (noeuds). La seconde variété est connue sous le nom *méthode de Galerkin* (méthodes de projection, méthodes spectrales) qui consiste à projeter l'équation sur un sous-espace de dimension finie, où la solution recherchée s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de la base de cet espace [1, 36].

2. Contenu de la thèse

Le présent travail porte sur l'étude numérique d'une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce.

La thèse est composée de quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré au vocabulaire lié à cette thématique. Les trois autres chapitres constituent la contribution principale de la problématique étudiée dans ce document de recherche.

Dans le Chapitre 1, on rappelle quelques résultats de la théorie de Riesz Fredholm pour les opérateurs compacts, et les théorèmes de diagonalisation.

On donne aussi un aperçu sur les problèmes inverses et les problèmes mal posés pour faciliter la lecture et comprendre le caractère mal posé des équations intégrales de première espèce.

Le chapitre 2 traite une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce. La stratégie de régularisation repose sur la méthode de Tikhonov et la méthode spectrale de Collocation-Legendre. Dans ce volet, on donne la description numérique de la méthode et une série de tests numériques.

Quant au chapitre trois, en s'inspirant des travaux de Rajan (2004) et de Thamban (2012), on y développe une nouvelle méthode, dite méthode de Tikhonov projetée, pour approcher numériquement une équation intégrale de Fredholm de première espèce. Dans ce travail, la méthode est totalement différente de celle utilisée dans le chapitre deux. L'idée de base relève des projecteurs spectraux sur des sous espaces propres (connue dans la thématique de régularisation sous le nom : filtrage spectral). Cette méthode nous permet de construire une famille régularisante de rang fini qui converge (lorsque le paramètre de régularisation tend vers zéro et la taille de l'espace de projection N tend vers l'infini).

Le chapitre 4 résume tous les tests numériques effectués pour les deux méthodes d'approximation utilisées dans le cadre de cette thèse, ainsi qu'une étude comparative des résultats numériques obtenus.

Résultats préliminaires et notations

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux références suivantes :

- J. Chevalier, COURS d'Analyse fonctionnelle appliquée : Théorie Spectrale et Applications, Université de Liege (1998).
- H. Brezis ; Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson (1993).

1. Equations intégrales

1.1. Opérateurs compacts et théorie de Riesz-Fredholm. On se place dans un cadre normé $(E_1 \rightarrow E_2)$, où E_1 et E_2 sont deux espaces de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , les normes sont notées respectivement par $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$.

DÉFINITION 1.1. Un opérateur linéaire est une application $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E_1 \rightarrow E_2$ linéaire, où $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A , qui est un sous-espace vectoriel de E_1 , que l'on suppose en général dense dans E_1 . L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E_1 \rightarrow E_2$ est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup \left\{ \|Au\|_{E_2}, u \in \mathcal{D}(A), \|u\|_{E_1} = 1 \right\}$$

est finie. Dans ce cas A est une application linéaire continue sur $\mathcal{D}(A)$, et lorsque $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E_1 , A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur E_1 .

Notations. On note par $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$ si $E = E_1 = E_2$) l'espace vectoriel des *applications (opérateurs) linéaires continues* de E_1 dans E_2 (resp. des *endomorphismes continus* de E), que l'on munit de la norme (**de la convergence uniforme**) définie par :

$$A \in \mathcal{L}(E_1, E_2), \quad \|A\| = \sup_{0 \neq u \in E_1} \frac{\|Au\|_{E_2}}{\|u\|_{E_1}}.$$

On vérifie que, si E_2 est un espace de Banach (complet), alors $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ est un espace de Banach.

• Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $E_1 \times E_2$ défini par $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), v \in \mathcal{D}(A)\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E_1 \longrightarrow E_2$, on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \{h \in \mathcal{D}(A), Ah = 0\} \text{ (noyau de } A), \quad \mathbf{R}(A) = \{h_2 = Ah_1, h_1 \in \mathcal{D}(A)\} \text{ (image de } A).$$

DÉFINITION 1.2. Soient E et F deux espaces de Banach. Une application $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite **compacte** si l'image $T(B_E(0, 1))$ par l'application T de la boule unité de E est relativement compacte, i.e., $\overline{T(B_E(0, 1))}$ est un ensemble compact pour la topologie forte de $F \iff$ Pour toute suite bornée (x_n) de E , la suite (Tx_n) admet une sous-suite qui converge dans F .

On note $\mathcal{K}(E, F)$ (resp. $\mathcal{K}(E)$ si $E = F$) l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F .

Si $\dim(\mathbf{R}(T))$ est finie, on dit alors que T est de rang fini. On note $\mathcal{K}_0(E, F)$ (resp. $\mathcal{K}_0(E)$ si $E = F$) l'ensemble des applications linéaires de rang fini de E dans F .

Remarque 1.1. Il est clair que tout opérateur T de rang fini est compact. En effet, l'ensemble $T(B_E(0, 1))$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie, donc il est relativement compact (tous e.v.n de dimension finie est localement compact).

La proposition suivante donne des propriétés fondamentales de stabilité des opérateurs compacts.

PROPOSITION 1.1. Soient E et F deux espaces de Banach. Alors :

- (i) $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.
- (ii) Soient E, F et G des espaces de Banach, $S \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, G)$. Si S ou T est compacte alors TS est compacte. En particulier, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

PROPOSITION 1.2. Soit T un opérateur continu de l'espace de Hilbert H_1 dans l'espace de Hilbert H_2 . Les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (i) T est compact.
- (ii) Pour toute suite $(x_n) \subset H_1$, on a $x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx$.

THÉORÈME 1.1. Soit T un opérateur continu de l'espace de Hilbert H_1 dans l'espace de Hilbert H_2 . Les deux énoncés suivants sont équivalents :

- (i) T est compact.
- (ii) Pour toute suite orthonormale $(e_n) \subset H_1$, on a $Te_n \rightarrow 0$.

PROPOSITION 1.3. Soit T un opérateur borné de l'espace de Hilbert H_1 vers l'espace de Hilbert H_2 . Alors T est compact si et seulement si T^* est compact.

THÉORÈME 1.2. $\mathcal{K}(H) = \overline{\mathcal{K}_0(H)}$, i.e., pour tout $T \in \mathcal{K}(H)$ il existe une suite $(T_n) \subset \mathcal{K}_0(H)$ telle que $\|T - T_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

1.2. Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts.

THÉORÈME 1.3. [Alternative de Fredholm : V1] Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. On a les propriétés suivantes :

- (i) $\mathbf{N}(T) = \mathbf{R}(T^*)^\perp$.
- (ii) $\mathbf{N}(T^*) = \mathbf{R}(T)^\perp$.
- (iii) $\overline{\mathbf{R}(T)} = \mathbf{N}(T^*)^\perp$.
- (iv) $\overline{\mathbf{R}(T^*)} = \mathbf{N}(T)^\perp$.

THÉORÈME 1.4. [Alternative de Fredholm : V2] Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact et $\lambda \neq 0$. On a

- (i) $\mathbf{N}(T - \lambda I)$ est de dimension finie et $\dim(\mathbf{N}(T - \lambda I)) = \dim(\mathbf{N}(T^* - \bar{\lambda}I))$.
- (ii) $\mathbf{R}(T - \lambda I)$ est sous-espace fermé dans H .
- (iii) $\mathbf{R}(T - \lambda I) = \overline{\mathbf{R}(T - \lambda I)} = \mathbf{N}(T^* - \bar{\lambda}I)^\perp$.
- (iv) $H = \mathbf{R}(T - \lambda I) \iff \mathbf{N}(T^* - \bar{\lambda}I) = \{0\} \iff \mathbf{N}(T - \lambda I) = \{0\} \iff \mathbf{R}(T^* - \bar{\lambda}I) = H$.

THÉORÈME 1.5. Soit $K \in \mathcal{K}(E)$ avec $\dim(E) = \infty$. Alors on a :

- (a) $0 \in \sigma(K)$,
- (b) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$,
- (c) l'une des situations suivantes :
 - . ou bien $\sigma(K) = \{0\}$,
 - . ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est fini,
 - . ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

THÉORÈME 1.6. Soit H un espace de Hilbert séparable et $A \in \mathcal{K}(H)$. Si A est hermitien (auto-adjoint), il existe un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{C}$ qui est fini ou dénombrable avec 0 comme unique valeur d'adhérence et des projections orthogonales P_λ sur des espaces vectoriels fermés N_λ deux à deux orthogonaux, de dimension finie sauf éventuellement pour $\lambda = 0$, tels que

$$A = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P_\lambda, \quad (1.1)$$

En fait, $\Lambda = \sigma(A)$, $N_\lambda = \mathbf{N}(A - \lambda I)$ et $H = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda}$. En particulier, A a une valeur propre de module $\|A\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|$.

Ce résultat vaut encore si A est normal lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

L'équation (1.1) signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\Lambda_1 \subset \Lambda$ fini tel que $\left\| A - \sum_{\lambda \in \Lambda_1} \lambda p_\lambda \right\| < \varepsilon$.

THÉORÈME 1.7. *On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T :*

$$\forall x \in H, \quad x = x_0 + \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k, \quad x_0 \in \mathbf{N}(T), \quad Tx = \sum_{k \geq 1} \lambda_k (x, e_k) e_k.$$

• Considérons maintenant un opérateur compact $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, où H_1, H_2 sont deux espaces de Hilbert séparables. Une des approches les plus pratiques pour étudier le problème inverse $Th_1 = h_2$, consiste à utiliser la décomposition en valeurs singulières (SVD)¹ de l'opérateur T . Cette représentation propose des bases pour les espaces de Hilbert H_1 et H_2 permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.

DÉFINITION 1.3. Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. On appelle valeur singulière de l'opérateur T , le réel positif $s = \sqrt{\lambda}$, où λ est une valeur propre de l'opérateur $K = T^*T : H_1 \rightarrow H_1$.

THÉORÈME 1.8. [Décomposition en valeurs singulières (SVD)] *Soit $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ et Pr_0 la projection orthogonale sur $\mathbf{N}(T)$. Alors il existe une suite de valeurs singulières (s_n) et deux systèmes orthonormés $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H_1, \{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset H_2$ tels que :*

- (i) (s_n) est décroissante, $s_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.
- (ii) $T\varphi_k = s_k\psi_k, \quad T^*\psi_k = s_k\varphi_k$.
- (iii) $\forall h \in H_1, \quad h = \sum_{k \geq 1} (h, \varphi_k)\varphi_k + \text{Pr}_0 h$.
- (iv) $\forall h \in H_1, \quad Th = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \varphi_k)\psi_k$.
- (v) $\forall h \in H_2, \quad T^*h = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \psi_k)\varphi_k$.

Le système $\{(s_k; \varphi_k, \psi_k)\}_{k \geq 1}$ est appelé le **système singulier** de T .

La famille (φ_n) est une base hilbertienne de $\mathbf{N}(T)^\perp$, la famille (ψ_n) est une base hilbertienne de $\overline{\mathbf{R}(T)}$.

1.2.1. *Equations opérationnelles et Alternative de Fredholm.* On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact donné par sa décomposition spectrale :

$$\forall h \in H, \quad h = h_0 + \sum_{k \geq 1} (h, e_k) e_k, \quad h_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Th = \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k.$$

1. La notion de *valeurs singulières* généralise la notion de valeurs propres liée aux opérateurs auto-adjoints.

Considérons l'équation

$$(T - \lambda I)f = g, \quad (1.2)$$

où $f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n$, $g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n e_n$ sont deux vecteurs de H donnés.

- Si $\lambda \notin \sigma(A)$, la solution de l'équation (1.2) est donnée par :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda}. \quad (1.3)$$

- Si $\lambda = \lambda_s \neq 0$, l'équation (1.2) n'a de solution que si $g_s = 0$ ($\iff g \in \mathbf{N}(T - \lambda_s I)^\perp$) et dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n \neq s}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda_s} \right] + G_s, \quad (1.4)$$

où G_s est un élément arbitraire de $\mathbf{N}(T - \lambda_s I)$.

- Si $\lambda = 0$, pour que l'équation $Tf = g$ ait une solution il faut et il suffit que

$$g_0 = 0 \iff f \in \mathbf{N}(T)^\perp = \overline{\mathbf{R}(T)}$$

et que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|^2}{\lambda_n^2} \quad (1.5)$$

soit convergente. Dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n \right] + G_0, \quad (1.6)$$

où G_0 est un élément arbitraire de $\mathbf{N}(T)$.

1.3. Equations intégrales de première espèce. J. Chevalier, COURS d'Analyse fonctionnelle appliquée : Théorie Spectrale et Applications, Université de Liege (1998).

DÉFINITION 1.4. [Opérateurs de Hilbert-Schmidt] Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (on note $T \in \mathcal{L}_{hs}(H)$:= ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt définis sur H s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de H telle que $\sum_{n=1}^{n=\infty} \|T e_n\|^2 < \infty$. On note cette quantité par $\|T\|_{hs}$.

THÉORÈME 1.9. Soient H un espace de Hilbert séparable, et $T \in \mathcal{L}_{hs}(H)$. On a :

- (i) Si $(f_m)_{m \geq 1}$ est une autre base hilbertienne de H , alors

$$\mathbf{a}: \sum_{n=1}^{n=\infty} \|Te_n\| = \sum_{m=1}^{m=\infty} \|T^*f_m\|.$$

$$\mathbf{b}: \text{Pour toute base hilbertienne } (\hat{e}_m)_{m \geq 1} \text{ de } H, \sum_{n=1}^{n=\infty} \|Te_n\| = \sum_{m=1}^{m=\infty} \|T\hat{e}_m\|.$$

(ii) T est compact.

(iii) On suppose que $H = L^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N . Soit $k(.,.) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction $L^2(\Omega \times \Omega)$. Alors l'opérateur intégral défini par :

$$\mathbf{K}u(x) = \int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy$$

est compact.

(iv) Tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $H = L^2(\Omega)$ s'écrit de manière unique sous la forme \mathbf{K} .

Considérons l'équation intégrale de Fredholm de première espèce (resp. de seconde espèce)

$$\int_a^b k(x, y)f(y)dy = g(x), \quad (1.7)$$

$$\int_a^b k(x, y)f(y)dy - \lambda f(x) = g(x), \quad (1.8)$$

où le noyau $k \in L^2(]a, b[\times]a, b[)$, le second membre $g \in L^2(a, b)$ et le multiplicateur $\lambda \in \mathbb{C}$ sont donnés. Notre but est d'étudier l'existence d'une solution $f \in L^2(a, b)$ à ces équations et, si possible, de la représenter.

On sait que, sous la condition $k \in L^2(]a, b[\times]a, b[)$, l'opérateur \mathbf{K} défini dans $H := L^2(a, b)$ par :

$$\mathbf{K}f(x) := \int_a^b k(x, y)f(y)dy, \quad x \in [a, b]$$

est du type Hilbert-Schmidt (donc compact) et nous réduirons les équations intégrales envisagées aux formes abstraites

$$\mathbf{K}f = g, \quad (\mathbf{K} - \lambda I)f = g, \quad (1.9)$$

avec \mathbf{K} compact dans un espace de Hilbert H .

Pour toutes fonctions f et $g \in L^2(a, b)$ une application du théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K}f, g \rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b k(x, y) f(y) dy \right) \overline{g(x)} dx = \int_a^b f(y) dy \left(\int_a^b k(x, y) \overline{g(x)} dx \right) dx = \\ &= \int_a^b f(y) dy \overline{\left(\int_a^b k(x, y) g(x) dx \right)} dx = \langle f, \mathbf{K}^*g \rangle, \end{aligned}$$

si bien que l'adjoint \mathbf{K}^* est défini par $\mathbf{K}^*g(x) = \int_a^b \overline{k(y, x)} g(y) dy$ et l'opérateur \mathbf{K} est auto-adjoint ssi $\overline{k(y, x)} = k(x, y)$ p.p. dans $]a, b[\times]a, b[$.

Une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|\mathbf{K}\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |k(x, y)| dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = \|k\|_{\text{hs}}.$$

Les solutions de l'équation intégrale de première espèce (resp. deuxième espèce) (1.9) sont données par les formules (1.3), (1.4) et (1.6)

Considérons maintenant l'équation de première espèce sous sa forme abstraite $\mathbf{K}f = g$, avec \mathbf{K} opérateur compact dans H séparable. Cette équation n'admet une solution que si $g \in R(\mathbf{K})$.

PROPOSITION 1.4. *On suppose que $g \in \overline{R(\mathbf{K})} = N(\mathbf{K}^*)^\perp$, alors on a*

$$\mathbf{K}f = g \iff \mathbf{K}^*\mathbf{K}f = \mathbf{K}^*g. \quad (\text{GS})$$

Preuve. En effet, il est immédiat que $\mathbf{K}f = g \implies \mathbf{K}^*\mathbf{K}f = \mathbf{K}^*g$ et pour l'implication inverse, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^*\mathbf{K}f = \mathbf{K}^*g &\implies \langle \mathbf{K}^*\mathbf{K}f, h \rangle = \langle \mathbf{K}^*g, h \rangle, \quad \forall h \in H \\ &\implies \langle \mathbf{K}f, \mathbf{K}h \rangle = \langle g, \mathbf{K}h \rangle, \quad \forall h \in H \\ &\implies \langle \mathbf{K}f, \hat{h} \rangle = \langle g, \hat{h} \rangle, \quad \forall \hat{h} \in \overline{R(\mathbf{K})} \\ &\implies \langle \mathbf{K}f - g, \hat{h} \rangle = 0, \quad \forall \hat{h} \in \overline{R(\mathbf{K})}. \end{aligned}$$

$g \in \overline{R(\mathbf{K})}$ par hypothèse et $\mathbf{K}f \in R(\mathbf{K})$, donc $\mathbf{K}f - g \in \overline{R(\mathbf{K})}$. Puisque l'égalité $\langle \mathbf{K}f - g, \hat{h} \rangle = 0$ est vraie pour tout $\hat{h} \in \overline{R(\mathbf{K})}$, en particulier pour $\hat{h} = \mathbf{K}f - g$, il vient donc $\langle \mathbf{K}f - g, \mathbf{K}f - g \rangle = 0$, d'où $\mathbf{K}f - g = 0 \implies \mathbf{K}f = g$.

PROPOSITION 1.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors $N(T^*T) = N(T)$ et $N(TT^*) = N(T^*)$.*

Preuve. $v \in N(T) \implies Tv = 0 \implies T^*Tv = 0 \implies v \in N(T^*T) \implies N(T) \subseteq N(T^*T)$. Pour l'autre inclusion on a $T^*Tv = 0 \implies \langle T^*Tv, v \rangle = 0 = \langle Tv, Tv \rangle = \|Tv\|^2 \implies Tv = 0 \implies v \in N(T)$.

Pour la deuxième égalité, il suffit de remplacer T par T^* et d'utiliser l'égalité $T^{**} = T$.

THÉORÈME 1.10. [de PICARD] *On suppose que H est un espace de Hilbert séparable. Soient $\mathbf{K} \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact et $\{(\varphi_n, \psi_n, \sigma_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ son système singulier. Alors l'équation $\mathbf{K}h = g$ admet une solution si et seulement si*

$$(i) \quad g \in N(\mathbf{K}^*)^\perp = \overline{R(\mathbf{K})}.$$

$$(ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle g, \psi_n \rangle|^2 < \infty.$$

- Si $N(\mathbf{K}) = \{0\}$, cette solution est unique et elle est donnée par :

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n. \quad (S1)$$

- Si $N(\mathbf{K}) \neq \{0\}$, i.e., 0 est une valeur propre \mathbf{K} , alors la solution générale est donnée par :

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + g_0, \quad g_0 \in N(\mathbf{K}). \quad (S2)$$

2. Problèmes inverses et problèmes mal posés

En 1923, le mathématicien français J. Hadamard a écrit son livre célèbre sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique². Cet ouvrage fût le point de départ au développement du concept de problème bien posé en physique mathématique. Il s'agit d'un problème dont la solution existe, est unique et dépend continûment des données (stabilité). Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels les données et la solution sont considérées. Dans ce même livre Hadamard laissait entendre (et c'était aussi une opinion partagée avec I.G. Petrovsky³) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique. La physique mathématique a longtemps ignoré les problèmes mal posés, les considérant, soit dénués de sens physique, soit reflétant une modélisation inadéquate. La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes pratiques est reconnu et motive de nombreuses recherches en mathématiques [21, 30].

L'étude des phénomènes dans la nature nous permet de calculer des quantités ou des propriétés physiques d'un modèle donné. On distingue alors deux types de problèmes : les problèmes directs et les problèmes inverses.

2. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in linear PDEs*, Yale University Press, New Haven (1923).

3. I.G. PTEROVSKY, *Lecture on Partial Differential Equations*, New York : International Publishers (1954).

De manière schématique, un problème inverse peut être formulé comme étant une relation fonctionnelle (Input, Système, Output), où l'objectif d'étude est d'identifier des causes connaissant des effets. D'après J.B. Keller⁴, deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause.

Exemple 2.1. Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.10)$$

où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. On vérifie aisément que $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sinh(y/\varepsilon) \sin(x/\varepsilon)$ est une solution du problème (1.10). On remarque que $(\varphi_\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0)$ mais $(u_\varepsilon(x, y) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0)$ pour tout $x > 0$ fixé. Ce qui prouve que les solutions de (1.10) ne dépendent pas continûment des données initiales.

Exemple 2.2. Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur. Trouver $u(x, 0) = u_0(x)$ (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température $u(x, t)$ vérifié :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (BCP)$$

où $\psi \in L_2(0, \pi)$ est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (BCP) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x),$$

où ψ_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de ψ :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \psi(x) \sin(nx) dx, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit $\varphi(x) = u_0(x, 0)$ la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2 T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (BCP) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} e_k(x).$$

4. J. B. KELLER, *Inverse problems*, Amer. Math. Monthly, **83** (1976), 107-118.

On remarque que $\|\psi_k - \psi\| = \frac{1}{k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$ mais $\|u(\psi_k; 0) - u(\psi; 0)\| = \frac{1}{k} e^{k^2 T} \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow +\infty$. On voit très clair que le problème (BCP) est instable donc mal posé. C'est pour cela, qu'on dit que les phénomènes de la chaleur sont **irréversibles**.

La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initial $u(x, 0) = \varphi(x) \in L_2(0, \pi)$ est donnée par la formule :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \varphi_n e_n(x) = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(nx) \sin(n\xi) \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

Ainsi, u est solution du problème (BCP) ssi φ satisfait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\mathcal{K}\varphi = \psi, \quad u(x, T) = \int_0^{\pi} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\text{où } K(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \sin(nx) \sin(n\xi).$$

L'opérateur intégral \mathcal{K} est du type Hilbert-Schmidt (donc compact), d'où \mathcal{K}^{-1} n'est pas borné. Ce qui montre le caractère mal posé du problème (BCP).

Exemple 2.3. Problème de Dirichlet pour l'équation des ondes. Dans le rectangle $D = \{0 \leq t \leq T = \alpha\pi, 0 \leq x \leq \pi\}$, on considère le problème hyperbolique suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u(x, \alpha\pi) = g(x). \end{cases} \quad (\text{HP})$$

Notons $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, $D(A) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi)$. On sait que A est un opérateur auto-adjoint, positif et à résolvante compacte (\implies diagonalisable). Les couples propres de A sont

$$\lambda_n = n^2, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Par la méthode de Fourier, la solution formelle du problème (HP) est donnée par la formule

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\sin(\alpha n\pi)} f_n e_n(x).$$

Soit $\gamma(s) := \sin(\alpha\pi\sqrt{s})$, $s \in \mathbb{R}$ et

$$Z(\gamma) := \{s \in \mathbb{R} : \gamma(s) = 0\} = \left\{ s_k = \left(\frac{k}{\alpha}\right)^2, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si

$$\sigma_p(A) \cap Z(\gamma) = \emptyset \iff \forall (k, n) \in \mathbb{N}_* \times \mathbb{N}_*, \frac{k}{\alpha} \neq n \iff \alpha \neq \frac{k}{n} \iff \alpha \text{ irrationnel,}$$

alors la solution est unique. Inversement, si α est un nombre rationnel positif, alors la solution du problème (HP) **n'est pas unique**. Cependant, le problème (HP) est mal posé au sens d'HADAMARD : $s \mapsto \frac{1}{\sin(s)}$ n'est pas bornée au voisinage de $n\pi$.

Exemple 2.4. Problème d'identification de paramètres. Ce problème consiste à la détermination du paramètre $a(t)$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1.11)$$

On suppose que $a(t)$ est positive et continue, $\forall t \geq 0$.

La solution unique de ce problème est donnée par

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 \int_0^t a(\tau) d\tau} \sin(\pi x). \quad (1.12)$$

Considérons le problème inverse suivant : Pour une mesure interne de la température au point $x = 1/2$ ($u(1/2, t) = h(t)$) déterminer $a(t)$?

De la formule (1.12), on peut écrire

$$\begin{aligned} h(t) = e^{-\pi^2 \int_0^t a(\tau) d\tau} &\implies \ln(h(t)) = -\pi^2 \int_0^t a(\tau) d\tau \implies \\ a(t) &= \frac{-1}{\pi^2} \frac{h'(t)}{h(t)}. \end{aligned} \quad (S2)$$

Ce problème inverse admet une solution **unique** mais il est **mal posé (instable)** car la dans formule (S2) intervient un opérateur de dérivation ($h'(t)$) qui est instable. En effet, Supposons que :

$$d_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ -2n^5(t-1)^3 + 3n^2(t-1)^2, & 1 < t \leq 1 + \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{n}, & 1 + \frac{1}{n^2} < t. \end{cases}$$

et

$$h_n(t) = h(t) + d_n(t)$$

où $h(t) = e^{-\pi^2 t}$, on trouve alors que $a(t) = 1$. De plus,

$$\|h - h_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty.$$

D'autre part, on a

$$a_n(t) = \frac{-1}{\pi^2} \left[\frac{h'_n(t)}{h_n(t)} \right] = \left[\frac{-1}{\pi^2} \frac{h'(t) + d'_n(t)}{h(t) + d_n(t)} \right]$$

avec

$$d'_n(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ -6n^5(t-1)^2 + 6n^2(t-1) & , \quad 1 < t < 1 + \frac{1}{n^2} \\ 0 & , \quad 1 + \frac{1}{n^2} < t \end{cases}$$

Un calcul direct de $a_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)$ donne

$$\begin{aligned} a_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) &= \frac{-1}{\pi^2} \left[\frac{h'\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) + d'_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)}{h\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) + d_n\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} \right] \\ &= \frac{4n^2}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2 e^{-\pi^2\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} + 3 - \frac{3}{2}n}{4n^2 e^{-\pi^2\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right)} + 3 - n} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \end{aligned}$$

Donc $a_n(t)$ ne converge pas vers $a(t) = 1$.

► On remarque d'après les exemples donnés, qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

1 La non unicité. Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité.

2 L'instabilité. Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique. Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergent et stable quel que soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on régularise par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de mal position (Pour une bonne référence sur les méthodes de régularisation, on cite le livre de H.W. Engel [21]).

2.1. Définitions et terminologie des problèmes mal posés. On peut schématiser un problème inverse comme suit :



INPUT = vecteur, données initiales, conditions aux limites, paramètres, géométrie du domaine...

OUTPUT = solution = état du système physique, quantité matérielle, propriétés qualitatives

Problème direct : $\text{OUTPUT} = \text{solution} = \text{Modèle}(\text{INPUT})$

Problème inverse : $\text{INPUT} = \text{Modèle}^{-1}(\text{OUTPUT})$

□ **Formulation abstraite**

On peut toujours écrire un problème inverse sous une formulation vectorielle abstraite (input-output).

DÉFINITION 2.1. [Hadamard 1923] Soient X, Y deux espaces de Banach, et $A : X \supseteq D(A) \rightarrow Y$ un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème inverse $Ax = y$ est **bien posé** au sens de Hadamard si

Existence : Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $Ax = y$.

Unicité : Pour tout $y \in Y$, il y a au plus une solution $x \in X$.

Stabilité : La solution x dépend continûment de la donnée y .

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit **mal posé**. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Le choix des espaces de départ et d'arrivée X et Y est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.

Remarque 2.1. La définition donnée par Hadamard est très contraignante dans la pratique. Il faut donc relaxer la définition d'un problème bien posé.

DÉFINITION 2.2. [Lavrentiev 1959] (Stabilité conditionnelle) Soit $A : X \supseteq D(A) \rightarrow Y$ un opérateur fermé et à domaine de définition dense. On dit que le problème $Ax = y$ est **conditionnellement stable** (ou **correct** au sens de Tikhonov) sur $M \subset D(A)$ s'il existe une fonction

$$\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue en } 0 \text{ avec } \omega(0) = 0,$$

telle que l'on ait

$$\|x_2 - x_1\| \leq \omega\left(\|Ax_2 - Ax_1\|\right), \quad \forall x_2, x_1 \in M.$$

L'ensemble M est appelée ensemble des contraintes (ou ensemble des informations a priori). L'appartenance de u à M signifie certaine régularité ou certaine bornitude vérifiée par la solution u .

2.2. Outils d'analyse des problèmes mal posés. Dans l'étude des équations de la forme :

$$B : D(B) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2, u \longmapsto Bu = v,$$

la fermeture de $\mathbf{R}(B)$ est une propriété cruciale, pour que l'inverse de B soit borné. Le Théorème de Banach nous fournit une caractérisation topologique sur cette question :

THÉORÈME 2.1. [Théorème de Banach sur l'inversion bornée] *On suppose que B est injectif. Alors $B^{-1} : \mathbf{R}(B) \longrightarrow H_1$ est borné ssi $\mathbf{R}(B)$ est fermée.*

Remarque 2.2. Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fournir des renseignements sur le caractère mal posé d'un problème donné.

► Afin de proposer une stratégie de régularisation efficace, on doit mesurer tout d'abord la complexité du problème posé. En général, on ne dispose pas d'un cadre théorique permettant de donner des réponses à ce type de questions, mais dans des cas particuliers, on a des critères qui caractérisent que tels problèmes sont fortement mal posés ou faiblement mal posés.

► Pour les opérateurs compacts, on utilise le critère suivant :

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables, $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, et soit le problème inverse :

$$T : H_1 \longrightarrow H_2, u \longrightarrow Tu = v. \tag{E}$$

DÉFINITION 2.3. On dit que le problème (E) est *faiblement* mal posé (resp. *fortement* mal posé), si les valeurs singulières s_n de $K = T^*T$ sont équivalentes à $\frac{C}{n^p}$ (resp. Ce^{-n^p}), où C et p sont des constantes positives.

2.3. Méthodes de régularisation. La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à Tikhonov [73], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (*quasi-solution, solution approchée, ...*), de façon que la "solution régularisée" obtenue par "inversion régularisée" dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre "proche dans un sens" du premier et qui est bien posé.

Considérons un opérateur inverse $Kh_1 = h_2$ où $K : H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur compact injectif.⁵ On suppose que $h_2 \in \mathbf{R}(K)$, i.e., le problème inverse possède une solution unique.⁶

DÉFINITION 2.4. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : H_2 \rightarrow H_1$, ($\alpha > 0$) est dite "*famille régularisante*" pour l'opérateur K si

$$\forall h_1 \in H_1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R_\alpha K)h_1 = h_1, \text{ i.e., } R_\alpha K \rightarrow I \text{ simplement.}$$

Remarque 2.3. Si R_α est une famille régularisante pour l'opérateur $K : H_1 \rightarrow H_2$, où H_1 est de dimension infinie, alors les opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés, i.e., il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty$.

La donnée initiale $h_2 \in H_2$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons h_2^δ la donnée perturbée où le nombre $\delta > 0$ est le niveau du bruit, i.e., $|h_2 - h_2^\delta| \leq \delta$.

Notons $h_1^{\alpha, \delta} = R_\alpha h_2^\delta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kh_1 = h_2$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $|h_1 - h_1^{\alpha, \delta}|$ on obtient

$$|h_1 - h_1^{\alpha, \delta}| = |(h_1 - R_\alpha h_2) + (R_\alpha h_2 - h_1^{\alpha, \delta})| \leq \delta \|R_\alpha\| + |(h_1 - R_\alpha h_2)|. \quad (1.13)$$

Le premier terme de droite de l'équation (1.13) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Par la Remarque (2.3), nous avons vu que $\|R_\alpha\| \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow 0$. Il ne faut donc pas choisir α **trop petit** sinon l'erreur peut devenir **très grande**. Par contre le second terme de droite de (1.13) tend vers 0 quand α tend vers 0 par définition de R_α . Nous allons faire tendre le niveau de bruit δ vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution h_1 .

DÉFINITION 2.5. Une stratégie de régularisation $\delta \mapsto \alpha(\delta)$ est **admissible** si pour tout $h_1 \in H_1$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \text{ et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{h_2^\delta \in H_2} \{ |R_{\alpha(\delta)} h_2^\delta - h_1| \text{ tel que } |Kh_1 - h_2^\delta| \leq \delta \} \right) = 0. \quad (1.14)$$

Les stratégies de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon son degré de complexité, pour plus de détails (cf. [6, 21, 22, 57]). Parmi les méthodes les plus connues en problèmes inverses et en calcul matriciel mal conditionné, on a la méthode de Tikhonov et la méthode de la troncature spectrale.

5. Le fait de choisir K injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace H_1 au complément orthogonal de $\mathbf{N}(K)$, où \mathbf{N} désigne le noyau.

6. Il faut noter que notre problème $Kh_1 = h_2$ inverse est toujours mal posé à cause de la non continuité de K^{-1} .

► Le principe de la régularisation de Tikhonov pour stabiliser le problème inverse mal posé $Kf = g$ est de choisir comme solution l'élément f_α qui minimise la fonctionnelle

$$|Kf - g|^2 + \alpha|f|^2, \quad \alpha > 0. \quad (1.15)$$

L'existence et l'unicité du minimum est assurée grâce à la **coercivité** et la **stricte convexité** de $f \mapsto |f|^2$. Le paramètre α est appelé le paramètre de régularisation et le terme $|f|^2$ est appelé le terme de correction. Le choix du paramètre α est basé sur un critère d'équilibre entre l'erreur due au terme de correction et le gain de la stabilité.

On a le Théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. Soit $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors la fonctionnelle de Tikhonov admet un unique minimum f_α . L'élément f_α est la solution de l'équation normale

$$S_\alpha f_\alpha = (\alpha I + K^*K)f_\alpha = K^*g. \quad (1.16)$$

La famille d'opérateurs $R_\alpha = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^* : H_2 \rightarrow H_1$ ⁷ est appelée famille régularisante de Tikhonov. On a $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ et tout choix de $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ avec $\delta^2\alpha(\delta) \rightarrow 0$ est admissible.

Pour les résultats de la vitesse de convergence, on peut consulter les références [21, 57] pour plus de détails.

► Le paramètre de régularisation $\alpha > 0$ est choisi via le *principe d'écart* (en anglais : *discrepancy principle*) de Morozov [21, 57, 61], ce principe consiste à fixer le paramètre α tel que la solution correspondante ait une erreur égale au niveau de bruit cf. [21, 57].

Le choix optimal est extrêmement difficile et les critères qui existent sont d'application délicate, et nécessitent des méthodes itératives pour être mis en oeuvre^{8 9 10}

► Dans la pratique nous supposons qu'un paramètre α est valable si l'erreur appartient à un petit intervalle contenant la valeur du niveau de bruit $\delta > 0$ (cf. [57], page 172).

Méthodes a priori : utilisent l'information sur le niveau d'erreur δ et sur l'opérateur K .

Méthodes a posteriori : utilisent aussi les données g_δ .

$$\alpha_{opt} := \max \left\{ \alpha : |Kf_\alpha - g_\delta| \leq \delta \right\}, \text{ où } f_\alpha = \inf_f \left\{ |Kf - g_\delta|^2 + \alpha|f|^2 \right\}.$$

► Dans la pratique nous supposons qu'un paramètre α est valable si l'erreur appartient à un petit intervalle contenant la valeur du niveau de bruit $\delta > 0$

7. $(S_\alpha = S_\alpha^*, \langle S_\alpha h, h \rangle = |Sh|^2 + \alpha|h|^2 \geq \alpha|h|^2, \forall h \in H_1) \implies (\sigma(S_\alpha) \subset [\alpha, \|S_\alpha\|] \implies 0 \in \rho(S_\alpha))$, i.e., S_α^{-1} existe et $S_\alpha^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$.

8. P. Olivier, Méthode de régularisation entropique et application au calcul de la fonction de distribution des ondes, Thèse de Doctorat, Université d'Orléans (2005).

9. **Méthodes a priori :** utilisent l'information sur le niveau d'erreur δ et sur l'opérateur K .

10. **Méthodes a posteriori :** utilisent aussi les données g_δ .

$$\alpha_{opt} := \max \left\{ \alpha : |Kf_\alpha - g_\delta| \leq \delta \right\}, \text{ où } f_\alpha = \inf_f \left\{ |Kf - g_\delta|^2 + \alpha|f|^2 \right\}.$$

$$\|KR_\alpha g_\delta - g_\delta\| = \tau\delta, \quad \tau \geq 1.$$

Principe de Morozov(cf. [81]) Pour calculer $\alpha(\delta)$, on résout l'équation non-linéaire

$$\varphi(\delta) = \|Kx_{\alpha(\delta)} - f_\delta\|^2 - \delta^2 = 0. \quad (1.17)$$

Si on choisit la méthode de Newton comme méthode de résolution numérique, on obtient alors le schéma itératif :

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{\varphi(\alpha_j)}{\varphi'(\alpha_j)}, \quad \alpha_0 = \text{initialisation}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

$$\varphi'(\alpha) = 2\langle -K(\alpha I + K^*K)^{-2}K^*f_\delta, K(\alpha I + K^*K)^{-1}K^*f_\delta - f_\delta \rangle$$

3. Intégration numérique et formules de quadratures

Soit f une fonction réelle intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Le calcul explicite de l'intégrale définie

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

peut être difficile, voire impossible.

On appelle formule de quadrature ou formule d'intégration numérique toute formule permettant de calculer une approximation de $I(f)$.¹¹

Une possibilité consiste à remplacer f par une approximation f_n , où n est un entier positif, et calculer $I(f_n)$ au lieu de $I(f)$. En posant $I_n(f) = I(f_n)$, on a

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x)dx, \quad n \geq 0.$$

Si $f \in C^0([a, b])$, l'erreur de quadrature $E_n(f) = I(f) - I_n(f)$ satisfait

$$|E_n(f)| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq (b-a) \|f - f_n\|_\infty.$$

Donc, si pour un certain n , $\|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon$, alors $|E_n(f)| \leq \epsilon(b-a)$.

L'approximation f_n doit être facilement intégrable, ce qui est le cas si, par exemple, $f_n \in P_n$.

En général la formule de quadratures est donnée par

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i).$$

Cette formule est une somme pondérée des valeurs de f aux points x_i , pour $i = 0, \dots, n$. On dit que ces points sont les noeuds de la formule de quadrature, et que les nombres $\alpha_i \in \mathbb{R}$ sont ses coefficients ou encore ses poids. Les poids et les noeuds dépendent en général de n .

3.1. La méthode des rectangles à gauche. En prenant les points x_i équidistants dans $[a, b]$; c'est-à-dire

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \dots, n,$$

11. Pour un exposé exhaustif sur les méthodes d'intégration numérique, on peut consulter le livre : P.K. Kythe, M.R. Schaferkotter, Handbook of computational methods for integration, Champan & Hall/CRC Press (2005).

et les coefficients α_i tous égaux à $\frac{(b-a)}{n}$, pour i compris entre 0 et $n-1$, le coefficient α_i étant nul, on obtient la formule des rectangles à gauche :

$$I_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ et n un entier naturel non nul, alors :

$$\|E_n(f)\|_\infty \leq \frac{\|f^{(1)}\|_\infty (b-a)^2}{2n}.$$

3.2. La méthodes des points milieux. Cette méthode consiste à utiliser les sommes de Riemann avec le point milieu $\epsilon_i = \frac{(x_i + x_{i+1})}{2}$, la formule des points milieux est donnée par

$$I_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{(x_i + x_{i+1})}{2}\right).$$

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ et n un entier naturel non nul, alors :

$$\|E_n(f)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f^{(2)}\|_\infty.$$

3.3. Méthode de Simpson. On remplace f , sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ par son polynome d'interpolation P_i de Lagrange de degré 2 ayant les mêmes valeurs que f aux bornes de l'intervalle et en son milieu.

La valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode de Simpson est donnée par

$$I_n(f) = \frac{(b-a)}{6n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \right).$$

Si f est de classe C^3 sur $[a, b]$, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$\|E_n(f)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^4}{192n^3} \|f^{(3)}\|_\infty.$$

3.4. Méthode des trapèzes. Principe :

On remplace la courbe représentative de f , sur chaque segment de la subdivision, par le segment qui joint $(x_i, f(x_i))$ à $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ Cela revient donc à interpoler la fonction f sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par le polynome de Lagrange de degré 1 aux points x_i et x_{i+1} .

PROPOSITION 3.1. *La valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode des trapèzes est alors donnée par*

$$I_n(f) = \frac{(b-a)}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right).$$

Evaluation de l'erreur :

PROPOSITION 3.2. Si f est de classe C^2 sur $[a, b]$, alors on a, pour tout entier n non nul

$$\|E_n(f)\|_\infty \leq (b-a)^3 \frac{\|f^{(2)}\|_\infty}{12n}$$

On en déduit que $I_n(f)$ converge vers $I(f)$.

4. Polynômes de Legendre

Dans ce paragraphe, on rappelle plusieurs propriétés importantes des polynômes de Legendre qui seront utiles par la suite. On se réfère à [13, 47] pour des résultats beaucoup plus complets dans cette direction.¹²

On désigne par I l'intervalle $[-1; 1]$, et on note $\mathbb{P}_N(I)$ l'espace des polynômes de degré $\leq N$.

DÉFINITION 4.1. On appelle famille de polynômes de Legendre la famille $(L_n)_n$ de polynômes sur I , deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2(I)$ et tels que, pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme L_n vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) L_n' \right) + n(n+1) L_n = 0 \quad (1.19)$$

avec la condition initiale : $L_n(1) = 1$.

De plus, le polynôme L_n est donné par la Formule de Rodrigues suivante :

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\frac{d^n}{dx^n} \left((1-x^2)^n \right) \right) \quad (1.20)$$

Formule de récurrence

La famille $(L_n)_n$ vérifie la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$\begin{cases} (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), & n \geq 1 \\ L_0(x) = 1 & \text{et} & L_1(x) = x \end{cases} \quad (1.21)$$

Orthogonalité des polynômes de Legendre

Pour tout entiers $n, m \geq 0$, le polynôme de Legendre vérifie

$$\int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases} \quad (1.22)$$

12. Ce rappel est extrait du livre de Christine Bernadi et le cours de Mejd Azaiez *et al* : Mejd, A, Monique, D, Yvon, M : Méthodes Spectrales et des Eléments Spectraux, Cours de DEA intensif décentralisé, Nantes (1993).
Bernardi, C, Yvon, M, Francesca, R : Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2004).

Ainsi donc les L_n forment une base orthogonale de $L^2(I)$. Les polynômes de Legendre normalisés \hat{L}_n sont donnés par :

$$\hat{L}_n = \frac{L_n}{\|L_n\|_{L^2(I)}} = \sqrt{n + \frac{1}{2}} L_n \quad (1.23)$$

forment une base orthonormale de $L^2(I)$.

Soit L_n le polynôme de Legendre de degré n sur I , le polynôme de Legendre L_n translaté sur l'intervalle $[a, b]$ est donné par :

$$L_n^{[a,b]}(x) = L_n\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}\right), \quad x \in [a; b], \quad j \in \mathbb{N}$$

De plus, le polynôme de Legendre normalisés \hat{L}_n translaté sur l'intervalle $[a, b]$ est défini par :

$$\hat{L}_n^{[a,b]}(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sqrt{n + \frac{1}{2}} L_n\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}\right), \quad x \in [a; b], \quad j \in \mathbb{N}$$

Le projecteur π_N

Pour $N \in \mathbb{N}$, π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(I)$ sur $\mathbb{P}_N(I)$ est donné par :

$$\pi_N u = \sum_{n=0}^N a_n \hat{L}_n \quad (1.24)$$

où :

$$a_n = \langle u, \hat{L}_n \rangle_{L^2(I)} = \int_{-1}^1 u(x) \hat{L}_n(x) dx$$

DÉFINITION 4.2. Soit $s \in \mathbb{N}$. On note par $H^s(I)$ l'espace des fonctions u dans $L^2(I)$ telles que leurs dérivées jusqu'à l'ordre s appartiennent à $L^2(I)$, il est muni de la semi-norme

$$|u|_{H^s(I)} = \|d_x^s u\|_{L^2(I)}$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^s(I)} = \left(\sum_{l=0}^s \|d_x^l u\|_{L^2(I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La famille $(\hat{L}_n)_n$ forme une base de l'espace de Sobolev $H^s(I)$. La qualité d'approximation dans $H^s(I)$ par les polynômes de Legendre est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. cf. [13]

Pour tout entier $s \geq 0$, il existe une constante c positive ne dépendant que de s telle que, pour toute fonction u de $H^s(I)$, on ait :

$$\|u - \pi_N u\|_{L^2(I)} \leq cN^{-s} \|u\|_{H^s(I)} \quad (1.25)$$

Les polynômes de Legendre jouent un rôle important dans la méthode de quadrature de Gauss. C'est l'objet du paragraphe suivant.

4.1. Formules de quadrature. Il est bien connu que les zéros des polynômes de Legendre (ou autre famille de polynômes orthogonaux) servent à la construction de formules de quadrature numérique de grande précision, telle la formule de Gauss-Legendre donnée par :

PROPOSITION 4.1. cf. [13, 47]

Soit N un entier positif fixé. Il existe un unique ensemble de N points ζ_j de I , $1 \leq j \leq N$, et un unique ensemble de N réels w_j , $1 \leq j \leq N$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme Φ de $\mathbb{P}_{2N-1}(I)$

$$\int_{-1}^1 \Phi(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^N \Phi(\zeta_j) w_j \quad (1.26)$$

Les noeuds ζ_j , $1 \leq j \leq N$, sont les zéros du polynôme L_n . Les poids w_j , $1 \leq j \leq N$, sont positifs.

4.2. Calcul des noeuds et des poids de la méthode de Gauss-Legendre cf. [47]. Les noeuds de Gauss-Legendre sont les n racines du polynôme L_n dans $[-1, 1]$. Pour les calculer la première idée consiste à résoudre justement l'équation définie par $L_N(x) = 0$, par exemple en utilisant la méthode de Newton-Raphson. L'expérience montre qu'en plus du coût élevé quand N devient grand (≥ 20 environ), un problème de précision se pose. D'où l'importance de l'algorithme ci-dessous.

Rappelons la formule de récurrence vérifiée par les polynômes de Legendre. On a :

$$\begin{cases} L_0(\zeta) = 1 & \text{et} & L_1(\zeta) = \zeta \\ (n+1)L_{n+1}(\zeta) = (2n+1)\zeta L_n(\zeta) - nL_{n-1}(\zeta), & n \geq 1 \end{cases}$$

A partir de cette relation de récurrence, on peut en réécrire une équivalence pour les polynômes de Legendre normés $\hat{L}_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}} L_n$

$$\zeta \hat{L}_n(\zeta) = \beta_{n+1} \hat{L}_{n+1}(\zeta) + \beta_n \hat{L}_{n-1}(\zeta) \quad (1.27)$$

avec

$$\beta_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 - 1}} \quad (1.28)$$

Cette relation de récurrence écrite pour tout $n > 0$ est équivalente à

$$\zeta \begin{pmatrix} \hat{L}_0 \\ \hat{L}_1 \\ \cdot \\ \hat{L}_{N-2} \\ \hat{L}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{L}_0 \\ \hat{L}_1 \\ \cdot \\ \hat{L}_{N-2} \\ \hat{L}_{N-1} \end{pmatrix} + \beta_N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \hat{L}_N \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Les noeuds de Gauss-Legendre ζ_j sont donc les valeurs propres de la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

cette matrice M est de façon évidente tridiagonale symétrique et à diagonale nulle.

Pour le calcul des poids w_j , $1 \leq j \leq N$, nous allons utiliser la formule de Christoffel-Darboux suivante (dont la démonstration se fait par récurrence).

Pour tout $n \geq 0$, $\forall \zeta \in I$, $\forall \mu \in I$

$$\hat{L}_0(\zeta)\hat{L}_0(\mu) + \dots + \hat{L}_n(\zeta)\hat{L}_n(\mu) = \frac{k_n^*}{k_{n+1}^*} \frac{\hat{L}_{n+1}(\zeta)\hat{L}_n(\mu) - \hat{L}_{n+1}(\mu)\hat{L}_n(\zeta)}{\zeta - \mu} \quad (1.31)$$

où k_n^* désigne le coefficient du monôme de degré n de $\hat{L}_n(\zeta)$. En particulier pour $\mu = \zeta_j$ et $n = N - 1$ on a :

$$\hat{L}_0(\zeta)\hat{L}_0(\mu) + \dots + \hat{L}_{N-1}(\zeta)\hat{L}_{N-1}(\mu) = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} \frac{\hat{L}_N(\zeta)\hat{L}_{N-1}(\zeta_j)}{\zeta - \zeta_j} \quad (1.32)$$

Cette relation une fois intégrée nous donne

$$1 = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} \hat{L}_{N-1}(\zeta_j) \int_{-1}^1 \frac{\hat{L}_N(\zeta)}{\zeta - \zeta_j} d\zeta \quad (1.33)$$

En remarquant que $(\zeta - \zeta_j)_N^{-1} \hat{L}_N(\zeta)$ est dans $\mathbb{P}_{N-1}(I)$, on peut calculer cette intégrale par la formule de quadrature et on obtient :

$$1 = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} \hat{L}_{N-1}(\zeta_j) \hat{L}'_N(\zeta_j) w_j \quad (1.34)$$

En faisant tendre dans (1.32) ζ vers ζ_j et en identifiant avec (1.34) on trouve

$$w_j = \frac{1}{\hat{L}_0^2(\zeta_j) + \dots + \hat{L}_{N-1}^2(\zeta_j)} \quad (1.35)$$

on remarque que (1.35) s'écrit aussi de la façon simple suivante :

$$w_j = \frac{2}{NL'_N(\zeta_j)L_{N-1}(\zeta_j)} \quad (1.36)$$

4.3. Quelques exemples numériques : le tableau ci-dessous contient les valeurs numériques des noeuds et des poids du polynôme de Legendre pour différentes valeurs de

$N = 3$	noeuds ζ_j	0.11270	0.50000	0.88729						
	poids w_j	0.27777	0.44444	0.27777						
$N = 5$	noeuds ζ_j	0.04691	0.23076	0.50000	0.76923	0.95308				
	poids w_j	0.11846	0.23931	0.28444	0.23931	0.11846				
$N = 10$	noeuds ζ_j	0.01304	0.06746	0.16029	0.28330	0.42556	0.57443	0.71669		
	poids w_j	0.03333	0.07472	0.10954	0.13463	0.14776	0.14776	0.13463		
	noeuds ζ_j	0.83970	0.93253	0.98695						
	poids w_j	0.10954	0.07472	0.03333						
$N = 15$	noeuds ζ_j	0.00600	0.03136	0.07589	0.13779	0.21451	0.30292	0.39940	0.50000	
	poids w_j	0.01537	0.03518	0.05357	0.06978	0.08313	0.09308	0.09921	0.10128	
	noeuds ζ_j	0.60059	0.69707	0.78548	0.86220	0.92410	0.96863	0.99399		
	poids w_j	0.09921	0.09308	0.08313	0.06978	0.05357	0.03518	0.01537		

Méthode de Legendre-Collocation régularisée pour une équation intégrale de Fredholm de première espèce

Ce chapitre est consacré à la résolution numérique d'une équation intégrale de première espèce, où la procédure numérique est basée sur un schéma de discrétisation de type collocation régularisée.

Notre objectif ici est de développer une méthode numérique d'ordre de précision très élevé, dont l'approche utilisée repose essentiellement sur la méthode de Legendre-collocation, où la solution est projetée sur un sous-espace engendré par des polynômes orthogonaux de Legendre. Cette méthode est combinée avec une procédure de régularisation de type Tikhonov. On montre la convergence de cette approche, et on donne le bilan d'erreur justifié par des expérimentations numériques.

1. Position du problème

Dans l'espace de Hilbert $H = L^2(a, b)$, on considère l'équation intégrale de Fredholm de première espèce :

$$\int_a^b k(t, s)f(s)ds = g(t) \quad a \leq t \leq b, \quad (2.1)$$

où le noyau $k(.,.)$ est non-dégénéré.¹

Le problème (2.1) peut s'écrire sous la forme

$$Kf = g, \quad (2.2)$$

où K est un opérateur intégral donné par son noyau $k(.,.)$, f est la solution recherchée et g est la donnée.

1. On dit que le noyau $k(t, s)$ est dégénéré si $k(t, s) = \sum_{i=1}^m x_i(t)y_i(s)$.

On suppose que l'opérateur K est injectif et $g \in \mathbf{R}(K)$, i.e., le problème (2.1) est résoluble sur la classe admissible $\mathbf{R}(K)$.

2. Méthode de Legendre-Collocation régularisée

Puisque le problème (2.1) est mal posé, on ne peut pas donc le résoudre directement. Pour pallier cette pathologie, on utilise la méthode de régularisation de Tikhonov pour obtenir le problème régularisé suivant :

$$\left[(\alpha I + K^* K) f_\alpha^\delta \right] (x) = K^* g^\delta (x), \quad x \in [a, b] \quad (2.3)$$

où α est le paramètre de régularisation. Ici g^δ est la donnée expérimentale, i.e., la donnée g entachée du bruit, δ est le niveau du bruit et $\|g - g^\delta\| \leq \delta$.

En utilisant une approximation basée sur les polynômes de Legendre normalisés, on transforme le problème continu (2.3) en un problème en dimension finie. Cette étape fait intervenir les opérations suivantes :

On commence tout d'abord par une approximation de la solution régularisée $f_\alpha^\delta(x)$ comme suit :

$$f_\alpha^\delta(x) \approx \pi_N(f_\alpha^\delta)(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \hat{L}_n(x). \quad (2.4)$$

En substituant l'expression (2.4) dans l'équation (2.3), on obtient deux expressions

$$\left[(\alpha I + K^* K) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \hat{L}_n \right] (x) \approx K^* g^\delta (x), \quad x \in [a, b], \quad (2.5)$$

et

$$R_\alpha^{N,\delta}(x) = \left[(\alpha I + K^* K) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \hat{L}_n(x) \right] - K^* g^\delta (x), \quad (2.6)$$

où $R_\alpha^{N,\delta}(\cdot)$ est la fonction résiduelle.

Pour résoudre l'équation intégrale (2.5), on emploie une méthode de collocation standard, comme dans le calcul des intégrales. On fixe donc un ensemble de points de collocations $\{x_i\} \subset [a, b]$, puis on calcule les valeurs de la fonction recherchée aux points de collocation. On suppose que la fonction résiduelle s'annule sur les points de collocation :

$$R_\alpha^{N,\delta}(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

où les points de collocations $\{x_i\}_{i=1}^N$ sont les zéros du polynôme de Legendre L_N .

Donc

$$\left[(\alpha I + K^* K) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \hat{L}_n \right] (x_i) = K^* g^\delta (x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

Cette équation se traduit par l'écriture matricielle :

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \left[\alpha \hat{L}_n (x_i) + \int_a^b \int_a^b k(\tau, x_i) k(\tau, t) \hat{L}_n (t) dt d\tau \right] = \int_a^b k(\tau, x_i) g^\delta (\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.9)$$

Ainsi, l'équation (2.5) prend une nouvelle écriture matricielle :

$$A_N X_N = b_N \quad (2.10)$$

où

$$A_N = \left[\alpha \hat{L}_n (x_i) + \int_a^b \int_a^b k(\tau, x_i) k(\tau, t) \hat{L}_n (t) dt d\tau \right]_{\substack{i=1, \dots, N \\ n=0, \dots, N-1}} \quad (2.11)$$

$$X_N^T = [a_n]_{n=0}^{N-1} \quad (2.12)$$

et

$$b_N = [K^* g^\delta (x_i)], \quad i = 1, \dots, N \quad (2.13)$$

En utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre donnée par la proposition (4.1), on peut évaluer les éléments de la matrice A_N comme suit :

On a

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b k(\tau, x_i) k(\tau, t) \hat{L}_n (t) dt d\tau &= \int_a^b k(\tau, x_i) \left[\int_a^b k(\tau, t) \hat{L}_n (t) dt \right] d\tau \\ &\approx \int_a^b k(\tau, x_i) \left[\sum_{j=1}^N k(\tau, t_j) \hat{L}_n (t_j) w_j \right] d\tau. \end{aligned}$$

Les noeuds t_j , $1 \leq j \leq N$, sont les zéros du polynôme L_N , les w_j , $1 \leq j \leq N$, sont les poids associés.

Il vient

$$\int_a^b k(\tau, x_i) \left[\sum_{j=1}^N k(\tau, t_j) \hat{L}_n (t_j) w_j \right] d\tau \approx \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^N k(\tau_s, x_i) k(\tau_s, t_j) \hat{L}_n (t_j) w_j w_s, \quad (2.14)$$

les τ_s , $1 \leq s \leq N$, sont les zéros du polynôme L_N , et w_s , $1 \leq s \leq N$, sont les poids associés.

On trouve donc

$$A_N \approx \left[\alpha \hat{L}_n(x_i) + \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^N k(\tau_s, x_i) k(\tau_s, t_j) \hat{L}_n(t_j) w_j w_s \right]_{\substack{i=1, \dots, N \\ n=0, \dots, N-1}} \quad (2.15)$$

De même, pour le vecteur b_N , on trouve

$$\begin{aligned} K^* g^\delta(x_i) &= \int_a^b k(\tau, x_i) g^\delta(\tau) d\tau \\ &\approx \sum_{s=1}^N k(\tau_s, x_i) g^\delta(\tau_s) w_s, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

i.e.

$$b_N = \left[\sum_{s=1}^N k(\tau_s, x_i) g^\delta(\tau_s) w_s \right], \quad i = 1, \dots, N \quad (2.16)$$

Régularisation de Tikhonov projetée pour une équation intégrale de Fredholm de première espèce

1. Position du problème

Soit $H = L^2((a, b); \mathbb{R})$ et on considère l'équation intégrale de Fredholm de première espèce :

$$\int_a^b k(t, s)f(s)ds = g(t) \quad t \in [a, b]. \quad (3.1)$$

Où $k(.,.) \in L^2((a, b) \times (a, b); \mathbb{R})$ est le noyau, qui est en général non dégénéré, g est la donnée et f est l'inconnu recherché.

L'équation peut être écrite comme suit :

$$K : H \rightarrow H, \quad f \rightarrow g = Kf. \quad (3.2)$$

Pour établir les principaux résultats de notre travail, on introduit les hypothèses suivantes :

(H 1) L'opérateur K est injectif, i.e., $N(K) = \{0\}$.

(H 2) $g \in R(K)$.

(H 3) le noyau $k(.,.) \in C^r([a, b] \times [a, b]; \mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$.

(H 4) L'opérateur K^* est injectif ($\iff \overline{R(K)} = H$).

2. Résultats préliminaires et notations

Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Rappelons que pour $v \in H_2$, l'équation

$$Tu = v \quad (3.3)$$

admet une solution si et seulement si $v \in R(T)$.

■ Si $R(T)$ est de dimension infinie et T est injective, alors $T^{-1} : R(T) \rightarrow H_1$ est borné si et seulement si $R(T)$ est fermée.

■ Si $v \notin R(T)$, alors nous cherchons un élément $\hat{u} \in H_1$ tel que $T\hat{u}$ est "proche de" v dans le sens où \hat{u} minimise la fonction $\|Tu - v\|_{H_2}$.

DÉFINITION 2.1. Soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. On appelle $\hat{u} \in H_1$ LRN Solution (least residual norm solution) pour (3.3) si

$$\|T\hat{u} - v\|_{H_2} = \inf_{u \in H_1} \|Tu - v\|_{H_2}.$$

DÉFINITION 2.2. Pour $v \in G = R(T) \oplus R(T)^\perp$, on note l'ensemble des LRN Solution de (3.3) par :

$$S_v = \left\{ \hat{u} \in H_1 : \|T\hat{u} - v\|_{H_2} = \inf_{u \in H_1} \|Tu - v\|_{H_2} \right\}$$

DÉFINITION 2.3. Soit $v \in G = R(T) \oplus R(T)^\perp$, $u^\dagger \in S_v$ est appelée meilleure solution au sens des moindres carrés (solution généralisée) de (3.3) si $\|u^\dagger\|_{H_1} = \inf_{\hat{u} \in S_v} \|\hat{u}\|$.

THÉORÈME 2.1. Soit $v \in G = R(T) \oplus R(T)^\perp$. Alors il existe un unique $u^\dagger \in S_v$ tel que :

$$\|u^\dagger\|_{H_1} = \inf_{\hat{u} \in S_v} \|\hat{u}\|.$$

et

$$u^\dagger \in N(T)^\perp, u^\dagger = P\hat{u}_0$$

où $P : H_1 \rightarrow N(T)^\perp$ est l'opérateur de projection orthogonale sur $N(T)^\perp$ et \hat{u}_0 est un élément de S_v .

DÉFINITION 2.4. L'inverse généralisé $T^\dagger : D(T^\dagger) \rightarrow H_1$ de T est défini sur le domaine dense $= D(T^\dagger) = R(T) \oplus R(T)^\perp$ par $T^\dagger v = u^\dagger$.

Remarque 2.1. 1) $T^\dagger = T^{-1}$ si $R(T)^\perp = \{0\}$ et $N(T) = \{0\}$.

2) T^\dagger est continue si et seulement si $R(T)$ est un sous-espace fermé de H_2 .

THÉORÈME 2.2. Soient E et F deux espaces de Banach, et $(T_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$. Alors, $T_n \rightarrow T \in \mathcal{L}(E, F)$ ponctuelle (i.e., $\forall x \in E, T_n x \rightarrow Tx$) ssi la suite (T_n) est uniformément bornée et $T_n x \rightarrow Tx$ pour tout $x \in D$ où $D \subset E$ est un sous-espace dense de E .

3. Méthode de régularisation de Tikhonov projetée

Soit $H_n = \text{span}\{\hat{L}_j, j = 0, 1, \dots, n\}$ une suite de sous-espaces engendrée par les polynômes Legendre de degré $\leq n$, et soit $\Pi_n : H \rightarrow H_n$ l'opérateur de projection orthogonale défini par :

$$\Pi_n h = \sum_{j=0}^n c_j(h) \hat{L}_j, \quad h \in H \quad (3.4)$$

Nous citons quelques propriétés essentielles de Π_n (cf. [11], page 283-287, [17]).

LEMME 3.1. Soit Π_n l'opérateur de projection orthogonale défini par (3.4). Alors on a

$$\forall u \in H, \|(I - \Pi_n)h\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

$$\forall u \in C^r([a,b];\mathbb{R}), \quad \|(I - \Pi_n)h\|_{L^2(a,b)} \leq cn^{-r} \|u^{(r)}\|_{L^2(a,b)}, \quad (3.6)$$

$$\forall u \in C^r([a,b];\mathbb{R}), \quad \|(I - \Pi_n)h\|_{\infty} \leq cn^{\frac{3}{2}-r} \|u^{(r)}\|_{L^2(a,b)}, \quad (3.7)$$

où c est une constante positive indépendante de n et r est un entier positif.

Remarque 3.1. Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et $r \in \mathbb{N}$.

1) Si $k(\cdot, \cdot) \in C^r([a,b] \times [a,b]; \mathbb{R})$, alors $R(K) \subset C^r([a,b] \times [a,b]; \mathbb{R})$, de plus

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{notons } D_{i,j}k(t,s) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial s^j} k(t,s), \text{ on a} \\ \|D_{i,j}k\|_{r,\infty} = \sup_{0 \leq i+j \leq r} \|D_{i,j}k\|_{\infty} \\ = \sup_{0 \leq i+j \leq r} \left\{ \sup_{(t,s) \in [a,b] \times [a,b]} |D_{i,j}k(t,s)| \right\} \\ = \sup_{0 \leq i+j \leq r} M_{i,j} = M_r < \infty \end{array} \right. \quad (3.8)$$

2) Si $f \in L^2((a,b); \mathbb{R})$ et $k(\cdot, \cdot) \in C^r([a,b] \times [a,b]; \mathbb{R})$, alors on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned} |D_i(Kf)(t)| &= \left| \frac{d^i}{dt^i} (Kf)(t) \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial^i}{\partial t^i} k(t,s) f(s) ds \right| \\ &\leq M_{i,0} \int_a^b |f(s)| ds \leq M_{i,0} \sqrt{(b-a)} \|f\|_{L^2((a,b))}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

ce qui conduit à

$$\|D_i(Kf)\|_{L^2(a,b)} \leq M_{i,0} (b-a) \|f\|_{L^2(a,b)}, \quad i = 0, 1, \dots, r, \quad (3.10)$$

$$\|D_i(Kf)\|_{\infty} \leq M_{i,0} \sqrt{(b-a)} \|f\|_{L^2(a,b)}, \quad i = 0, 1, \dots, r. \quad (3.11)$$

Dans la pratique, les problèmes mal posés comme les équations intégrales de première espèce peuvent être approchées par des problèmes en dimension finie, dont la solution peut être facilement calculée en utilisant des logiciels de calcul numérique.

Dans ce travail, on remplace le problème original $Kf = g$ par un système algébrique $K_n f^n = g_n$ posé sur \mathbb{R}^{n+1} , où l'opérateur pseudo-inverse (inverse généralisé) K_n^\dagger est défini pour toutes données $g_n \in \mathbb{R}^{n+1}$.

On définit l'opérateur linéaire

$$\mathcal{Q}_n : H = L^2(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} :$$

$$\forall f = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f) \hat{L}_j \in H, \quad \mathcal{Q}_n f = (c_0(f), c_1(f), c_2(f), \dots, c_n(f))^T \quad (3.12)$$

L'équation (3.2) est remplacée par une équation dans \mathbb{R}^{n+1} , qui peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$K_n : H \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad K_n f = (\mathcal{Q}_n K) f = \mathcal{Q}_n g = g_n. \quad (3.13)$$

THÉORÈME 3.1. Soit $K_n : H = L^2((a, b); \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ donné par la formule (3.13). Alors, K_n est un opérateur borné, et l'opérateur adjoint $K_n^* : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow H = L^2((a, b); \mathbb{R})$ est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall f \in H, \forall \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \langle K_n f, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle f, K_n^* \mathbf{x} \rangle_H \\ (K_n^* \mathbf{x})(t) = \sum_{j=0}^n x_j (K^* \hat{L}_j)(t), \end{array} \right. \quad (3.14)$$

où K^* est l'opérateur adjoint de K :

$$(K^* u)(t) = \int_a^b k^*(t, s) u(s) ds = \int_a^b k(s, t) u(s) ds.$$

Preuve 1) Pour tout $f \in H$, on a :

$$\begin{aligned} \|K_n f\|_{\mathbb{R}^{n+1}}^2 &= \sum_{j=0}^n |c_j(Kf)|^2 \\ &= \sum_{j=0}^n |\langle Kf, \hat{L}_j \rangle_H|^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\langle Kf, \hat{L}_j \rangle_H|^2 = \|Kf\|_H^2 \\ &\leq \kappa^2 \|f\|_H^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ce qui implique $K_n \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^{n+1})$ et $\|K_n\| \leq \kappa = \left(\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}}$.

2) Par définition de $\mathcal{Q}_n : L^2(a,b) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, il est facile de vérifier que $\mathcal{Q}_n \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^{n+1})$. Ainsi, on peut définir son opérateur adjoint $\mathcal{Q}_n^* : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow H = L^2(a,b)$.

maintenant, pour

$$\mathcal{Q}_n f = \left(\langle f, \hat{L}_0 \rangle_{L^2(a,b)}, \langle f, \hat{L}_1 \rangle_{L^2(a,b)}, \dots, \langle f, \hat{L}_n \rangle_{L^2(a,b)} \right)^\perp \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)^\perp \in \mathbb{R}^{n+1},$$

et de l'identité

$$\langle \mathcal{Q}_n f, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \sum_{j=0}^n x_j \langle f, \hat{L}_j \rangle_{L^2(a,b)} = \left\langle f, \sum_{j=0}^n x_j \hat{L}_j \right\rangle_{L^2(a,b)} = \langle f, \mathcal{Q}_n^* \mathbf{x} \rangle_{L^2(a,b)},$$

On a

$$\mathcal{Q}_n^* \mathbf{x} = \sum_{j=0}^n x_j \hat{L}_j, \quad (3.16)$$

$$K_n^* \mathbf{x} = (\mathcal{Q}_n K)^* \mathbf{x} = K^* \mathcal{Q}_n^* \mathbf{x} = \sum_{j=0}^n x_j K^* \hat{L}_j, \quad (3.17)$$

et

$$(K_n^* K_n) f = \sum_{j=0}^n \langle K f, \hat{L}_j \rangle_{L^2(a,b)} K^* \hat{L}_j. \quad (3.18)$$

Remarque 3.2. L'expression $K_n^* \mathbf{x} = \sum_{j=0}^n x_j (K^* \hat{L}_j)(t)$, nous permet de conclure que

$$R(K_n^*) = \text{span} \{ K^* \hat{L}_j, j = 0, 1, \dots, n \}, \quad \dim(R(K_n^*)) \leq n + 1. \quad (3.19)$$

Puisque K_n^* est de rang fini, alors H se décompose comme suit :

$$H = L^2(a,b) = \overline{R(K_n^*)} \oplus N(K_n) = R(K_n^*) \oplus N(K_n). \quad (3.20)$$

Notation. Pour plus de simplicité, on note par A (resp. A_n) l'opérateur $A = K^* K$ (resp. $A_n = K_n^* K_n$). Notez que K^* et $K^* K$ sont définis par :

$$(K^* u)(t) = \int_a^b k^*(t,s) u(s) ds, \quad \text{text} \quad k^*(t,s) = \overline{k(t,s)} = k(s,t)$$

$$(K^*Ku)(t) = \int_a^b \int_a^b k(\tau, t)k(\tau, s)u(s)d\tau$$

Maintenant, nous donnons la démonstration de nos principaux résultats. Nous montrons la convergence de A_n vers A , et d'autres propriétés de A_n .

THÉORÈME 3.2. *Soit $A = K^*K$ et $A_n = K_n^*K_n$ donné par l'expression (3.18). Alors, sous l'hypothèse $k(.,.) \in L^2((a, b) \times (a, b); \mathbb{R})$. On a :*

$$\forall h \in H, \|Ah - A_n h\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

De plus, si $k(.,.) \in C^r([a, b] \times [a, b]; \mathbb{R})$, $r \geq 1$. Alors, on a

$$\|A - A_n\| \leq \varepsilon(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.22)$$

Preuve On a

$$\begin{aligned} \|(K^*K - K_n^*K_n)h\|_{L^2(a,b)} &= \left\| K^*Kh - \sum_{j=0}^n c_j(Kh)(K^*\hat{L}_j) \right\|_{L^2(a,b)} \\ &= \left\| K^* \left(Kh - \sum_{j=0}^n c_j(Kh)\hat{L}_j \right) \right\|_{L^2(a,b)} \\ &= \|K^*(Kh - \Pi_n Kh)\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \|K^*\| \|Kh - \Pi_n Kh\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.23)$$

En vertu du Lemme (3.1), on peut écrire

$$\begin{aligned} \|(K^*K - K_n^*K_n)h\|_{L^2(a,b)} &= \left\| K^*Kh - \sum_{j=0}^n c_j(Kh)(K^*\hat{L}_j) \right\|_{L^2(a,b)} \\ &= \left\| K^* \left(Kh - \sum_{j=0}^n c_j(Kh)\hat{L}_j \right) \right\|_{L^2(a,b)} \\ &= \|K^*(Kh - \Pi_n Kh)\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \|K^*\| \|Kh - \Pi_n Kh\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \|K\| (cn^{-r}) \|(Kh)^{(r)}\|_{L^2(a,b)} \end{aligned}$$

$$\leq \|K\| (cn^{-r})(b-a) M_{r,0} \|h\|_{L^2(a,b)} = \varepsilon(n) \|h\|_{L^2(a,b)}. \quad (3.24)$$

Ce qui implique que

$$\|A - A_n\| \leq \|K\| (cn^{-r})(b-a) M_{r,0} = \varepsilon(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.25)$$

LEMME 3.2. Soit $\alpha > 0$, $\mathbb{R}_n(\alpha) = (\alpha I + A_n)^{-1} A_n$ et $\mathbb{R}(\alpha) = (\alpha I + A)^{-1} A$. Alors

$$\forall h \in H = L^2(a,b), \quad \|\mathbb{R}_n(\alpha)h - \mathbb{R}(\alpha)h\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.26)$$

Preuve

Avant d'entamer la preuve, nous rappelons le résultat suivant.

Remarque 3.3. Si K est un opérateur injective borné, alors on a :

$$N(K) = N(K^*K) = \{0\} \text{ et } \overline{R(K^*K)} = N(K^*K)^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

En vue du théorème(2.2) et la remarque (3.3), pour montrer le résultat de convergence (3.26),il est suffit d'établir le résultat pour $h \in R(K^*K)$. Avant d'entamer la preuve, on introduit les propositions suivantes.

PROPOSITION 3.1. Pour tout $h \in H$, on a

$$\|(\alpha I + A)^{-1} Ah - h\|_H \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (3.27)$$

Preuve Si $h = \sum_{i=1}^{\infty} h_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h_i, e_i \rangle e_i$, alors

$$\|(\alpha I + A)^{-1} Ah - h\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha \lambda_i}{\alpha + \lambda_i} \right)^2 |h_i|^2.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=N+1}^{\infty} |h_i|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda_i} \right)^2 |h_i|^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda_i} \right)^2 |h_i|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda_i} \right)^2 |h_i|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda_i} \right)^2 |h_i|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha}{\lambda_i} \right)^2 |h_i|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha^2 \frac{1}{\lambda_N^2} \|h\|_H^2.$$

Si on choisit le paramètre α tel que $\alpha^2 \frac{1}{\lambda_N^2} \|h\|_H^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$, on obtient alors la convergence souhaitée.

PROPOSITION 3.2. *On a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\| (\alpha I + A_n)^{-1} A_n \right\|_H = \sup_{\lambda \in [0, \|A_n\|]} \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \leq 1 \quad (3.28)$$

c'est-à-dire, la suite $\mathbb{R}_n(\alpha)$ est uniformément bornée par rapport à n .

Revenons maintenant à la démonstration du Lemme (3.2). On a

$$\begin{aligned} \|\mathbb{R}_n(\alpha)h - \mathbb{R}(\alpha)h\|_{L^2(a,b)} &= \left\| (\alpha I + A_n)^{-1} [(\alpha I + A_n)A - A_n(\alpha I + A)] (\alpha I + A)^{-1} h \right\|_{L^2(a,b)} \\ &= \left\| \alpha (\alpha I + A_n)^{-1} (A - A_n) (\alpha I + A)^{-1} h \right\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \alpha \left\| (\alpha I + A_n)^{-1} \right\| \left\| (A - A_n) (\alpha I + A)^{-1} h \right\|_{L^2(a,b)} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\alpha \left\| (\alpha I + A_n)^{-1} \right\| \leq 1$, on déduit que

$$\|\mathbb{R}_n(\alpha)h - \mathbb{R}(\alpha)h\|_{L^2(a,b)} \leq \left\| (A - A_n) (\alpha I + A)^{-1} h \right\|_{L^2(a,b)} \quad (3.29)$$

et de (3.21), (3.27), on conclut que cette dernière inégalité tend vers 0 pour tous $h \in R(A)$.

4. Analyse de convergence

L'opérateur linéaire $\mathcal{R}(\alpha) = (\alpha I + K^*K)^{-1} K^* \in \mathcal{L}(H)$ (resp. $(\alpha I + K_n^*K_n)^{-1} K_n^*$) est l'opérateur régularisant de K (resp. de K_n). Pour établir les résultats de convergence de cette méthode, on introduit les résultats suivants

$$\left\| (\alpha I + K_n^*K_n)^{-1} K_n^* \right\| = \left\| (\alpha I + K^*K)^{-1} K^* \right\| = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \quad (3.30)$$

Si $f \in H$, alors

$$\|f - f_\alpha\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (3.31)$$

de plus, si $f = Au \in R(A)$, alors

$$\|f - f_\alpha\|_{L^2(a,b)} \leq \alpha \|u\|_{L^2(a,b)}. \quad (3.32)$$

On suppose que g_δ sont des données perturbées de g telles que

$$\|g - g_\delta\|_{L^2(a,b)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|c_j(g - g_\delta)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta, \quad (3.33)$$

Avec un niveau de bruit donné $\delta > 0$. Alors, on a

$$\|g_n - g_n^\delta\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq \|g - g^\delta\|_{L^2(a,b)} \leq \delta. \quad (3.34)$$

On considère les équations suivantes :

$$K_n f^n = g_n. \quad (3.35)$$

$$K_n f^{\delta,n} = g_n^\delta. \quad (3.36)$$

$$(\alpha I + K^* K) f = K^* g \quad (3.37)$$

$$(\alpha I + K^* K) f = K^* g^\delta. \quad (3.38)$$

Comme notre problème initial ($Kf = g$) est mal posé, alors la solution généralisée $f^{\dagger,\delta,n} = K_n^\dagger g_n^\delta \in N(K_n)^\perp$ du problème (3.35) avec des données perturbées g_n^δ est instable. On régularisons cette équation par la méthode de régularisation Tikhonov, on obtien :

$$(\alpha I + K_n^* K_n) f = K_n^* g_n \quad (3.39)$$

$$(\alpha I + K_n^* K_n) f = K_n^* g_n^\delta \quad (3.40)$$

Notons par $f = K^{-1}g$ la solution exacte du problème (3.2) et par f_α (resp. f_α^δ) la solution régularisée du problème (3.37) (resp. du (3.38)) et f_α^n (resp. $f_\alpha^{n,\delta}$) la solution régularisée du (3.39) (resp. (3.40)).

DÉFINITION 4.1. On note par f_α (resp f_α^δ) la solution régularisée du problème (3.2) pour la donnée exacte g (resp. la donnée perturbée g_δ) :

$$f_\alpha = \mathcal{R}(\alpha)g = (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* g, \quad (3.41)$$

$$f_\alpha^\delta = \mathcal{R}(\alpha)g_\delta = (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* g_\delta. \quad (3.42)$$

DÉFINITION 4.2. Pour toute $\alpha > 0$, la solution unique $f_\alpha^{n,\delta}$ du problème (3.2) est considérée comme une solution régularisée du $f^{\dagger,\delta,n}$.

Remarque 4.1. On peut supposer que $\dim(R(K_n^*)) = n + 1$. Par exemple, sous la condition (H4), les vecteurs $K^* \hat{L}_j$, $j = 0, 1, \dots, n$ sont linéairement indépendants, et par conséquent $\dim(R(K_n^*)) = n + 1$.

Puisque $f_\alpha^{n,\delta} \in R(K_n^* K_n) = R(K_n^*) = \text{span}\{K^* \hat{L}_j, j = 0, 1, \dots, n\}$ (voir (3.19)), $f_\alpha^{n,\delta}$ peut être développée sous la forme

$$f_\alpha^{n,\delta} = \sum_{j=0}^n a_j K^* \hat{L}_j. \quad (3.43)$$

Alors, l'équation (3.40) prend la forme

$$\sum_{j=0}^n \left(\alpha a_j + a_j \sum_{i=0}^n \langle KK^* \hat{L}_i, \hat{L}_j \rangle_{L^2(a,b)} \right) K^* \hat{L}_j = \sum_{j=0}^n \langle g^\delta, \hat{L}_j \rangle_{L^2(a,b)} K^* \hat{L}_j. \quad (3.44)$$

Pour la simplicité de la notation, on note

$$\vec{a} = (a_0, \dots, a_n)^\perp \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (3.45)$$

$$\vec{g}_n^\delta = \left(\int_a^b g^\delta(t) \hat{L}_0(t) dt, \dots, \int_a^b g^\delta(t) \hat{L}_n(t) dt \right)^\perp \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (3.46)$$

$$b_{ij} = \langle KK^* \hat{L}_i, \hat{L}_j \rangle_{L^2(a,b)} = \int_a^b \int_a^b \int_a^b k(s,t) k(t,\tau) \hat{L}_i(s) \hat{L}_j(t) ds dt d\tau, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (3.47)$$

$$B = (b_{ij}) \in M_{n+1}(\mathbb{R}), \quad A_n(\alpha) = \alpha I_{n+1} + B. \quad (3.48)$$

Maintenant, pour déterminer les coefficients $(a_j)_{j=0}^n$, nous devons résoudre le système algébrique linéaire

$$A_n(\alpha) \vec{a} = \vec{g}_n^\delta. \quad (3.49)$$

PROPOSITION 4.1. *Le système linéaire (3.49) admet une unique solution $\vec{a}_\alpha^{n,\delta}$ pour chaque $\vec{g}_n^\delta \in \mathbb{R}^{n+1}$.*

Preuve Soit

$$S(f, g) = \langle K^* K f, g \rangle_{L^2(a,b)}, \quad f, g \in L^2(a, b).$$

on a

$$S(f, g) = \langle K^* K f, g \rangle_{L^2(a,b)} = \langle f, K^* K g \rangle_{L^2(a,b)} = \langle K^* K g, f \rangle_{L^2(a,b)} = S(g, f),$$

et

$$S(f, g) = \langle K^* f, K^* g \rangle_{L^2(a,b)} \geq 0,$$

i.e., $S(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. D'où, $B = (b_{ij})_{0 \leq i, j \leq n} = (S(\hat{L}_i, \hat{L}_j))_{0 \leq i, j \leq n}$ est une matrice symétrique positive, et pour toute $\alpha > 0$ la matrice $A_n(\alpha)$ du système (3.49) est inversible. Donc, ce système admet une unique solution.

Cette partie est consacrée à l'analyse de convergence de la méthode de régularisation Tikhonov projetée appliquée à notre équation intégrale de première espèce. Pour établir le résultat de convergence on divise l'erreur en trois parties :

$$(f_\alpha^{n,\delta} - f) = (f_\alpha^{n,\delta} - f_\alpha^n) + (f_\alpha^\delta - f) + (f_\alpha^n - f_\alpha^\delta).$$

En utilisant (3.30), (3.34) et l'inégalité triangulaire, on peut écrire

$$\Delta_1 = \|f_\alpha^{n,\delta} - f^n\|_{L^2(a,b)} = \left\| (\alpha I + K_n^* K_n)^{-1} K_n^* (g_n^\delta - g_n) \right\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \|f_\alpha^\delta - f\|_{L^2(a,b)} \leq \|f_\alpha^\delta - f_\alpha\|_{L^2(a,b)} + \|f_\alpha - f\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \left\| (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* (g^\delta - g) \right\|_{L^2(a,b)} + \|f - f_\alpha\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \|f_\alpha - f\|_{L^2(a,b)}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \|f_\alpha^n - f_\alpha^\delta\|_{L^2(a,b)} \leq \|f_\alpha^n - f_\alpha\|_{L^2(a,b)} + \|f_\alpha - f_\alpha^\delta\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \|f_\alpha^n - f_\alpha\|_{L^2(a,b)}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Maintenant, par (3.29) la quantité $\|f_\alpha^n - f_\alpha\|_{L^2(a,b)}$ peut être estimée comme suit

$$\begin{aligned} \|f_\alpha^n - f_\alpha\|_{L^2(a,b)} &= \left\| (\alpha I + K_n^* K_n)^{-1} K_n^* g_n - (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* g \right\|_{L^2(a,b)} \\ &= \left\| (\alpha I + K_n^* K_n)^{-1} K_n^* K_n f - (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* K f \right\|_{L^2(a,b)} \\ &= \|\mathbb{R}_n(\alpha) f - \mathbb{R}(\alpha) f\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \|(A - A_n)(\alpha I + A)^{-1} f\|_{L^2(a,b)} \end{aligned} \quad (3.53)$$

En combinant (3.50), (3.51), (3.52) et (3.53), on obtient

$$\|f_\alpha^{n,\delta} - f\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{3\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \|(A - A_n)(\alpha I + A)^{-1} f\|_{L^2(a,b)} + \|f - f_\alpha\|_{L^2(a,b)}. \quad (3.54)$$

Par conséquent, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. *On suppose que $f = Au \in R(A)$. Alors, sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3) nous avons l'estimation*

$$\|f_\alpha^{n,\delta} - f\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{3\delta}{2\sqrt{\alpha}} + (\epsilon(n) + \alpha) \|u\|_{L^2(a,b)}, \quad (3.55)$$

où

$$\epsilon(n) = \frac{c}{n^r} \|k\| (b-a) M_{r,0}.$$

5. Stratégie a posteriori du choix du paramètre de régularisation

Dans cette section, on s'intéresse à la détermination de $\alpha(\delta)$ par le principe d'écart de Morozov. Le principe d'écart (DP) propose le calcul de $\alpha(\delta)$ tel que

$$\|K f_{\alpha}^{n,\delta} - g^{\delta}\|_{L^2(a,b)} = \delta \quad (3.56)$$

Dans ce travail, on considère une version plus générale du principe Morozov amorti donné par

$$\|K f_{\alpha}^{n,\delta} - g^{\delta}\|_{L^2(a,b)}^2 + \alpha^{\eta} \|f_{\alpha}^{n,\delta}\|_{L^2(a,b)}^2 = \delta^2, \quad (3.57)$$

où $\eta \in [1, \infty]$. Le principe classique de Morozov est un cas particulier du cas amorti (le cas $\eta = \infty$).

Dans [80, 82] les auteurs proposent un algorithme de convergence cubique pour choisir le paramètre de régularisation. Cet algorithme se résume comme suit.

Algorithme : Cubically Morozov Discrepancy Principle (CMDP)

Step 1. input $\alpha_0 > 0, \delta > 0, \epsilon$ (tolerance) $> 0, l_{\max}$, set $l := 0$;

Step 2. compute $f_{\alpha_l}^{n,\delta}, \frac{d}{d\alpha} f_{\alpha_l}^{n,\delta}$ and $\frac{d^2}{d\alpha^2} f_{\alpha_l}^{n,\delta}$;

Step 3. compute $\Phi(\alpha_l), \Phi'(\alpha_l)$ and $\Phi''(\alpha_l)$ from formulas (3.58).

Step 4. solve for α_{l+1} from iterative formula (3.58),(3.63); and (3.64).

Step 5. if $|\alpha_{l+1} - \alpha_l| \leq \epsilon$ or $l = l_{\max}$, STOP; otherwise, set $l = l + 1$, GOTO step 2.

$$\Phi(\alpha) = \|K f_{\alpha}^{n,\delta} - g^{\delta}\|_{L^2(a,b)}^2 + \alpha^{\eta} \|f_{\alpha}^{n,\delta}\|_{L^2(a,b)}^2 - \delta^2 \quad (3.58)$$

et

$$\alpha_{l+1} = \alpha_l - \frac{2\Phi(\alpha_l)}{\Phi'(\alpha_l) + \left(\Phi'(\alpha_l)^2 - 2\Phi(\alpha_l)\Phi''(\alpha_l)\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.59)$$

Maintenant, nous présentons une autre façon de calculer $\Phi'(\alpha)$ et $\Phi''(\alpha)$ dans l'algorithme (CMDP). Soit $G(\alpha)$ la fonction

$$G(\alpha) = \|K f_{\alpha}^{n,\delta} - g^{\delta}\|_{L^2(a,b)}^2 + \alpha \|f_{\alpha}^{n,\delta}\|_{L^2(a,b)}^2 = \psi(\alpha) + \alpha\varphi(\alpha) \quad (3.60)$$

Où

$$\psi(\alpha) = \|K f_{\alpha}^{n,\delta} - g^{\delta}\|_{L^2(a,b)}^2, \varphi(\alpha) = \|f_{\alpha}^{n,\delta}\|_{L^2(a,b)}^2. \quad (5.1)$$

La première dérivée de $G(\alpha)$ est donnée par

$$G'(\alpha) = \varphi(\alpha). \quad (3.61)$$

En utilisant (3.60) et (3.61), on a

$$G'(\alpha) = \varphi(\alpha) = \psi'(\alpha) + \varphi(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha)$$

ce qui implique que

$$\psi'(\alpha) = -\alpha\varphi'(\alpha) \quad (3.62)$$

et

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} (\psi(\alpha) + \alpha^\eta \varphi(\alpha) - \delta^2) \\ &= \psi'(\alpha) + \eta\alpha^{\eta-1}\varphi(\alpha) + \alpha^\eta\varphi'(\alpha) \\ &= -\alpha\varphi'(\alpha) + \eta\alpha^{\eta-1}\varphi(\alpha) + \alpha^\eta\varphi'(\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\Phi'(\alpha) = (\alpha^\eta - \alpha)\varphi'(\alpha) + \eta\alpha^{\eta-1}\varphi(\alpha), \quad (3.63)$$

et

$$\Phi''(\alpha) = (\alpha^\eta - \alpha)\varphi''(\alpha) + (2\eta\alpha^{\eta-1} - 1)\varphi'(\alpha) + \eta(\eta - 1)\alpha^{\eta-2}\varphi(\alpha), \quad (3.64)$$

où

$$\varphi'(\alpha) = 2 \left\langle \frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta}, f_\alpha^{n,\delta} \right\rangle_{L^2(a,b)},$$

et

$$\varphi''(\alpha) = 2 \left(\left\langle \frac{d^2}{d\alpha^2} f_\alpha^{n,\delta}, f_\alpha^{n,\delta} \right\rangle_{L^2(a,b)} + \left\| \frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{L^2(a,b)}^2 \right).$$

Dans notre cas, en utilisant (3.43), on peut écrire

$$\frac{d^m}{d\alpha^m} f_\alpha^{n,\delta} = \sum_{j=0}^n \frac{d^m}{d\alpha^m} a_j(\alpha) K^* \hat{L}_j = \left\langle \frac{d^m}{d\alpha^m} \overrightarrow{a}(\alpha), \overrightarrow{Y} \right\rangle, m \geq 1, \quad (3.65)$$

où

$$\frac{d^m}{d\alpha^m} \overrightarrow{a}(\alpha) = \left(\frac{d^m}{d\alpha^m} a_0(\alpha), \frac{d^m}{d\alpha^m} a_1(\alpha), \dots, \frac{d^m}{d\alpha^m} a_n(\alpha) \right)^\perp, \quad \overrightarrow{Y} = (K^* \hat{L}_0, K^* \hat{L}_1, \dots, K^* \hat{L}_n)^\perp. \quad (3.66)$$

On peut vérifier que

$$A_n(\alpha) \frac{d^m}{d\alpha^m} \overrightarrow{a}(\alpha) = -m \frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}} \overrightarrow{a}(\alpha), m \geq 1, \quad (3.67)$$

où la matrice $A_n(\alpha)$ est donnée par (3.48).

Remarque 5.1. On note que la formule (3.67) nous fournit une méthode pratique pour calculer l'expression (3.65).

Le but de cette dernière section est pour valider les résultats théoriques par des exemples numériques. Les expériences numériques sont faites à l'aide du logiciel MATLAB.

Exemple1. Considérons l'équation intégrale :

$$\int_0^1 e^{s^2 t} f(t) dt = \frac{e^{s^2+1} - 1}{s^2 + 1},$$

avec la solution exacte

$$f(t) = e^t \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1.$$

Exemple2.

Considérons l'équation intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(s^2 + 3t + 1) f(t) dt = \frac{1}{6} \cos(s^2 + 2) - \frac{\pi}{4} \sin(s^2),$$

avec la solution exacte

$$f(t) = \sin(3t + 1) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

1. Résultats numériques obtenus par la méthode de Legendre Collocation régularisée

1.1. Exemple 1.

1.1.1. Cas exact.

- ▷ On génère une donnée exacte (voir Fig 1) pour calculer la solution approchée avec différentes valeurs de N . Le calcul de l'erreur relative et l'erreur absolue sont indiquées dans les tableaux.

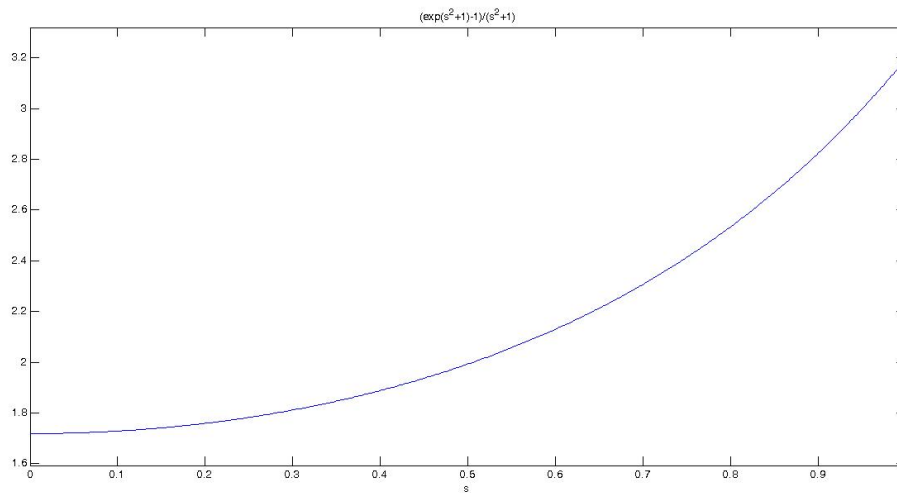
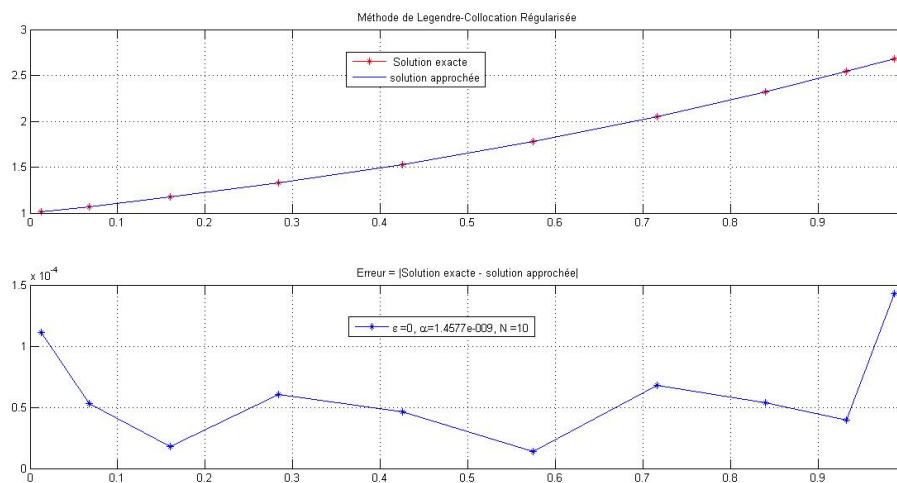


FIGURE 1. Données exactes.

FIGURE 2. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données exactes, $N = 10$.

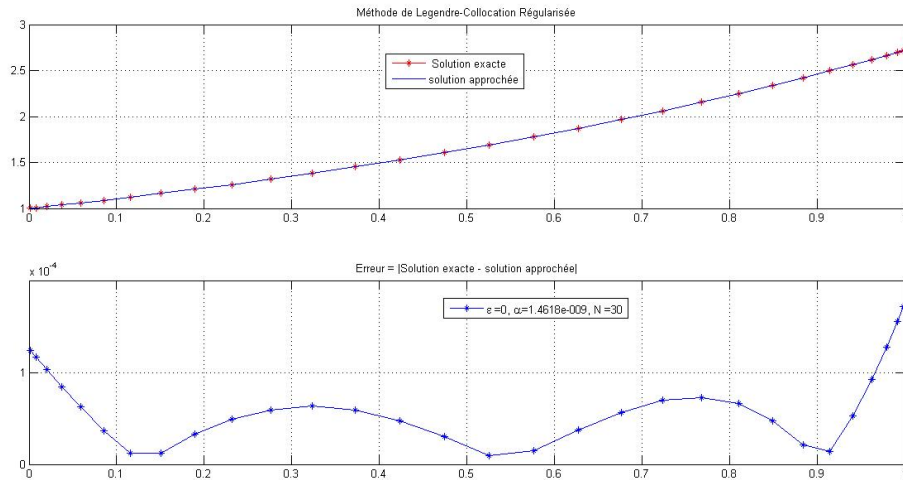


FIGURE 3. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données exactes, $N = 30$.

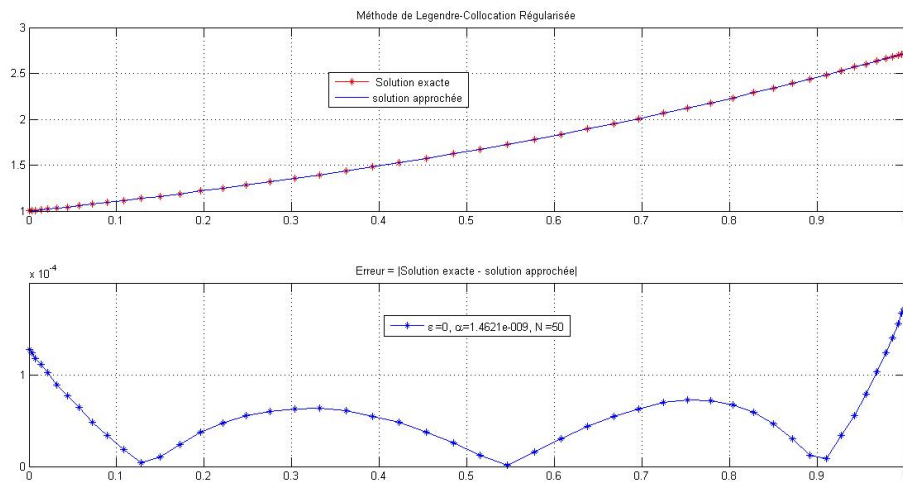


FIGURE 4. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données exactes, $N = 50$.

TABLE 1. Legendre-Collocation régularisée. Erreur relative pour des données exactes.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$9,7335 \times 1.0e - 6$
30	$5,6135 \times 1.0e - 6$
50	$4,3427 \times 1.0e - 6$
100	$3,0690 \times 1.0e - 6$

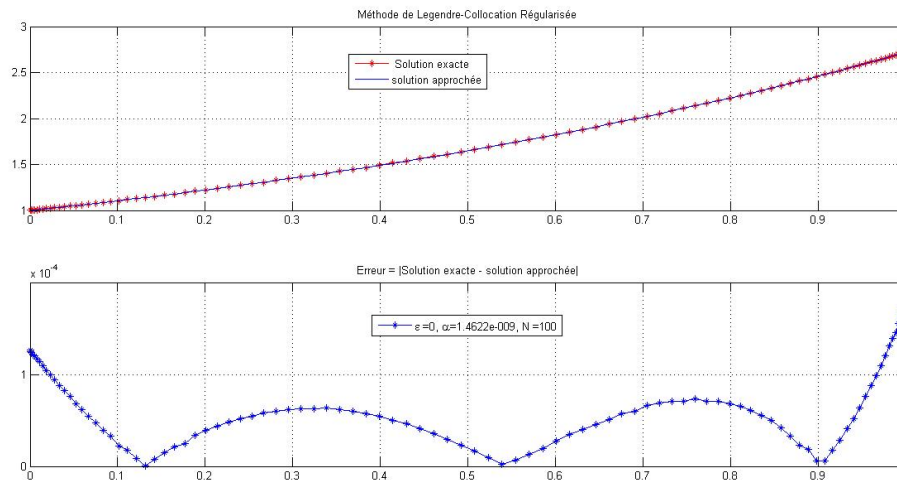


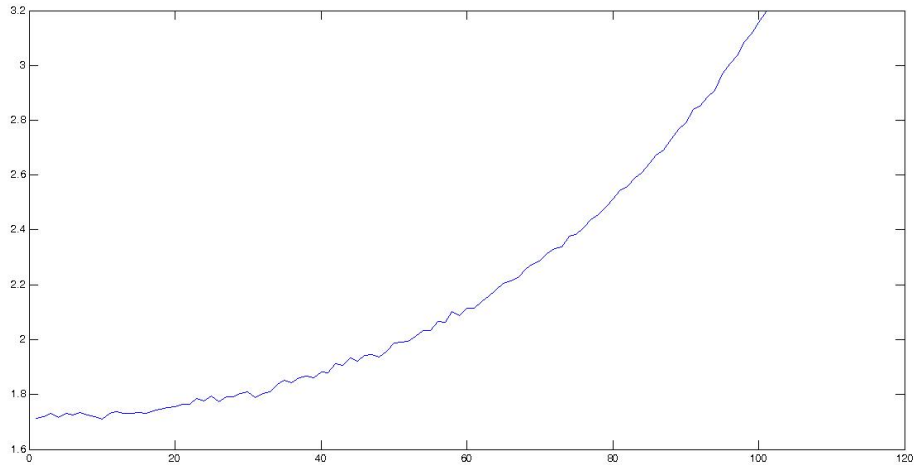
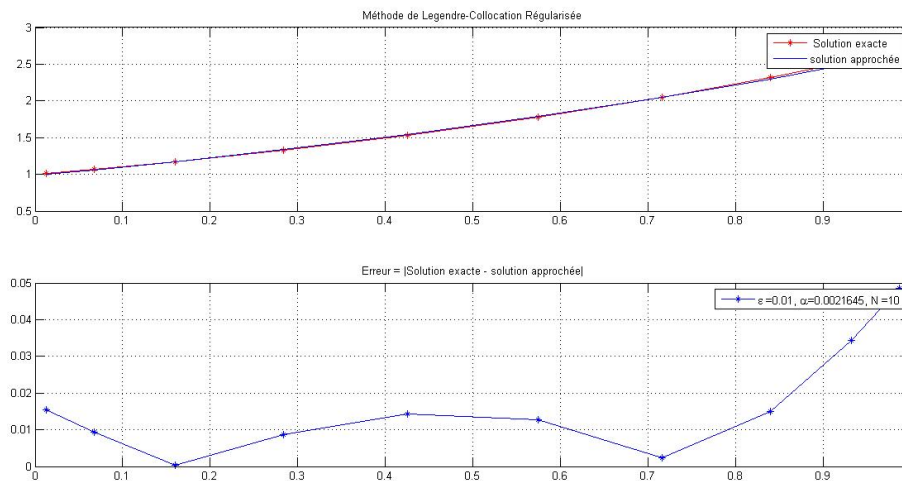
FIGURE 5. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données exactes, $N = 100$.

TABLE 2. Legendre-Collocation régularisée. Erreur absolue pour des données exactes.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$5,6771 \times 1.0e - 5$
30	$5,6933 \times 1.0e - 5$
50	$5,6904 \times 1.0e - 5$
100	$5,6902 \times 1.0e - 5$

1.1.2. Cas bruité.

▷ On génère une donnée bruitée (voir Fig 6) avec le niveau de bruit $\delta = 10^{-2}$. On calcule la solution approchée pour différentes valeurs de N . Les tableaux suivants indiquent l'erreur relative et absolue.

FIGURE 6. Données bruitées $\delta = 10^{-2}$.FIGURE 7. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 10$, $\delta = 10^{-2}$.

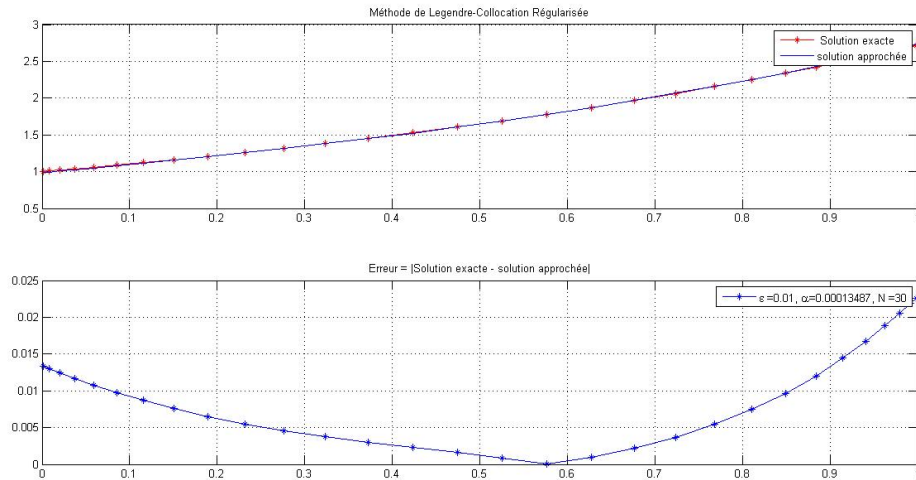


FIGURE 8. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 30, \delta = 10^{-2}$.

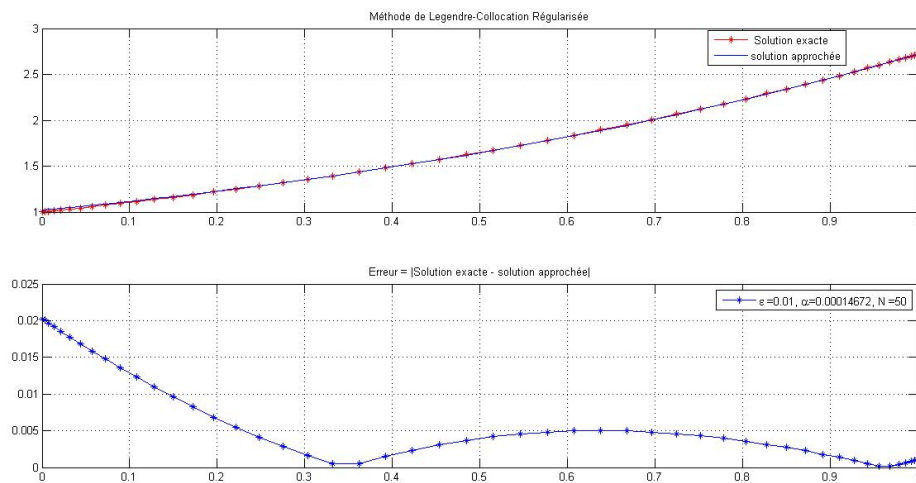


FIGURE 9. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 50, \delta = 10^{-2}$.

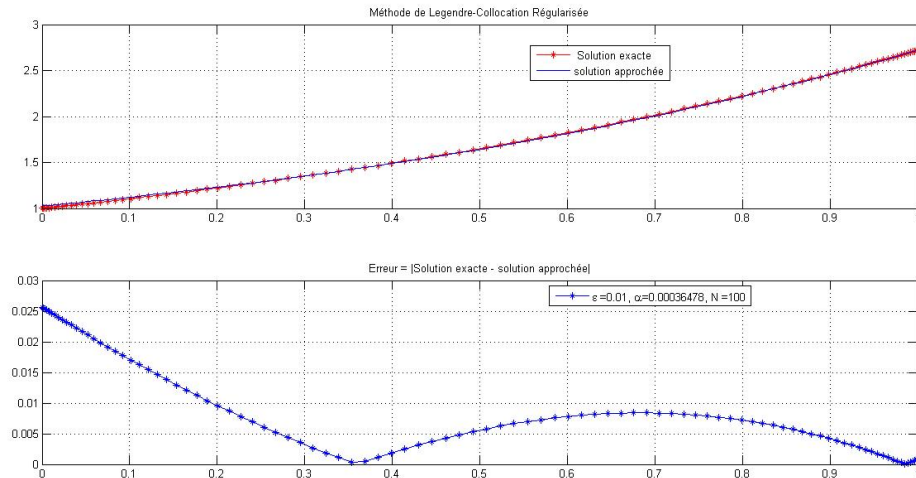


FIGURE 10. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 100, \delta = 10^{-2}$.

TABLE 3. Legendre-Collocation régularisée. Erreur relative pour des données bruitées $\delta = 10^{-2}$.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$2,8170 \times 1.0e - 3$
30	$8,1106 \times 1.0e - 4$
50	$5,2457 \times 1.0e - 4$
100	$5,1785 \times 1.0e - 4$

TABLE 4. Legendre-Collocation régularisée. Erreur absolue pour des données bruitées $\delta = 10^{-2}$.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$1,6430 \times 1.0e - 2$
30	$8,2258 \times 1.0e - 3$
50	$6,8736 \times 1.0e - 3$
100	$9,6015 \times 1.0e - 3$

▷ On génère une donnée bruitée (voir Fig 11) avec le niveau du bruit $\delta = 10^{-3}$. On calcule la solution approchée pour différentes valeurs de N . Les tableaux suivant indiquent l'erreur relative et absolue.

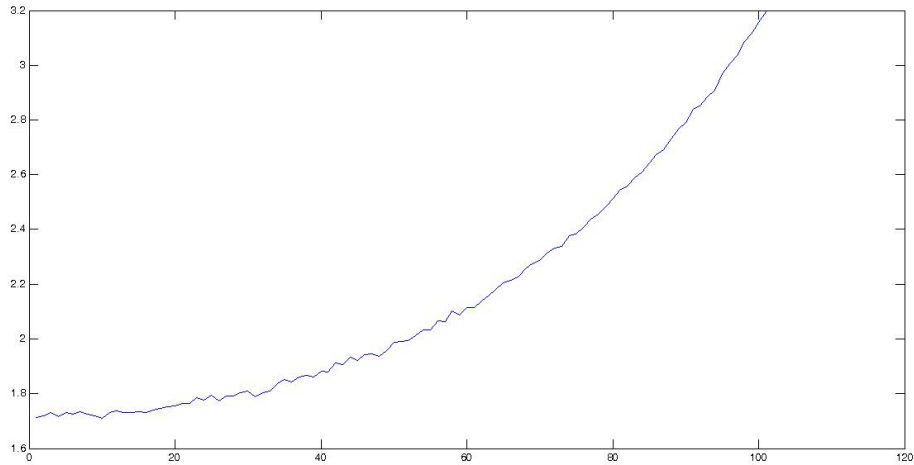


FIGURE 11. Données bruitées $\delta = 10^{-3}$.

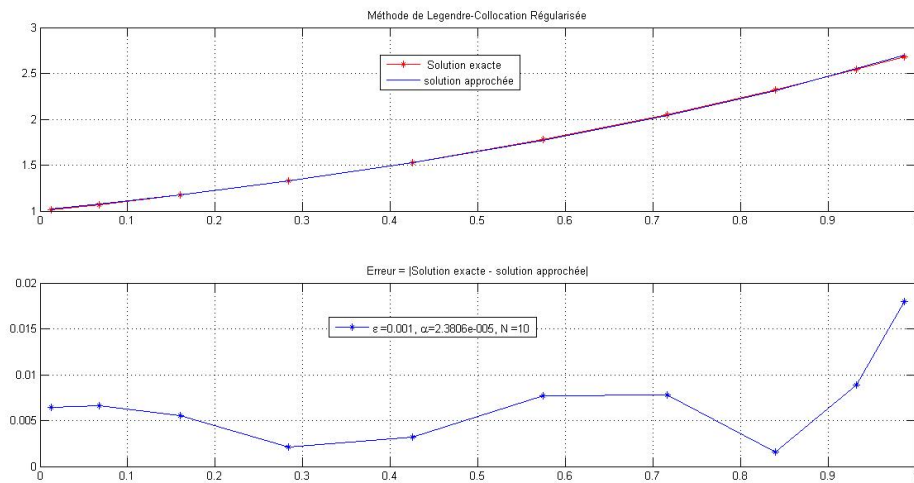


FIGURE 12. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 10$, $\delta = 10^{-3}$.

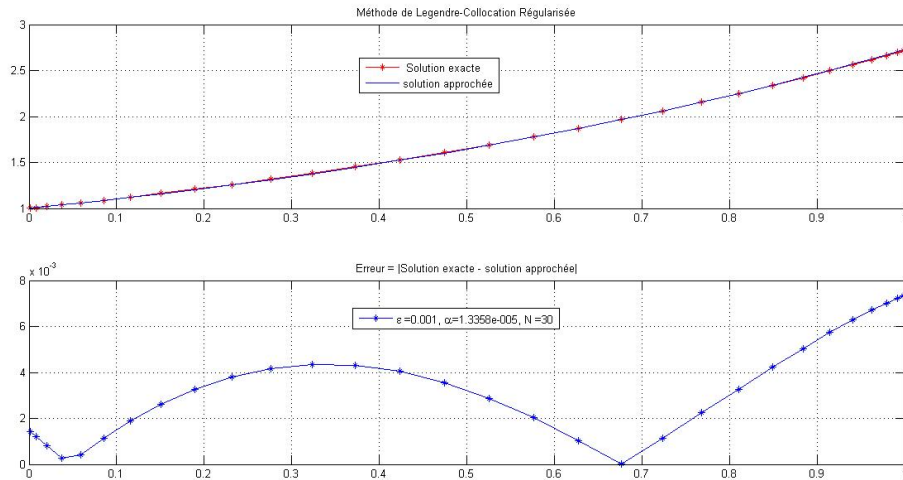


FIGURE 13. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 30$, $\delta = 10^{-3}$.

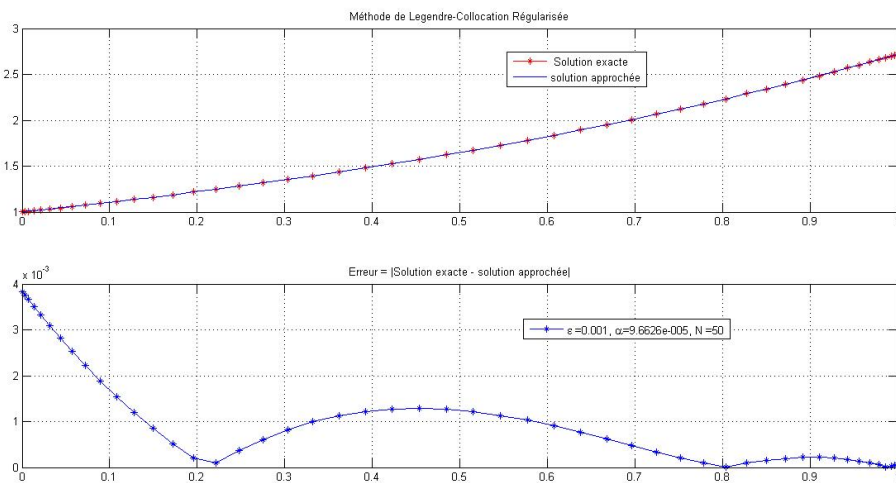


FIGURE 14. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 50$, $\delta = 10^{-3}$.

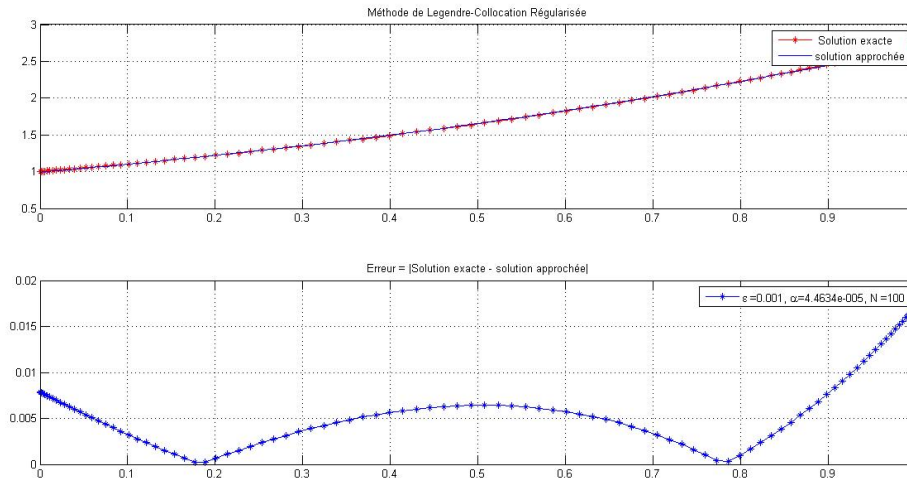


FIGURE 15. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 100, \delta = 10^{-3}$.

TABLE 5. Legendre-Collocation régularisée. Erreur relative avec des données bruitées $\delta = 10^{-3}$.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$1,1356 \times 1.0e - 3$
30	$3,5110 \times 1.0e - 4$
50	$8,8749 \times 1.0e - 5$
100	$3,1572 \times 1.0e - 4$

TABLE 6. Legendre-Collocation régularisée. Erreur absolue avec des données bruitées $\delta = 10^{-3}$.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$6,6235 \times 1.0e - 3$
30	$3,5609 \times 1.0e - 3$
50	$1,1629 \times 1.0e - 3$
100	$5,8538 \times 1.0e - 3$

1.2. Exemple 2.

1.2.1. Cas exacte.

- ▷ On génère une donnée exacte (voir Fig 16) pour calculer la solution approchée pour différentes valeurs de N . Le calcul de l'erreur relative et l'erreur absolue sont indiquées dans les tableaux suivants.

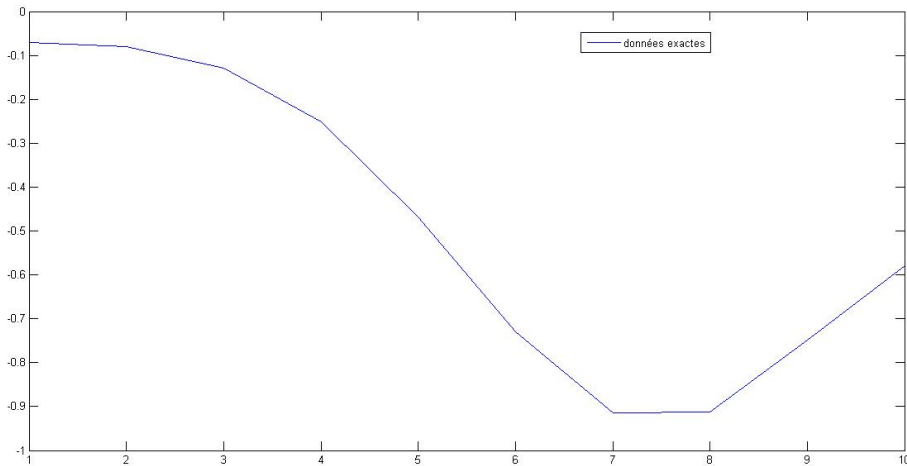


FIGURE 16. Données exactes.

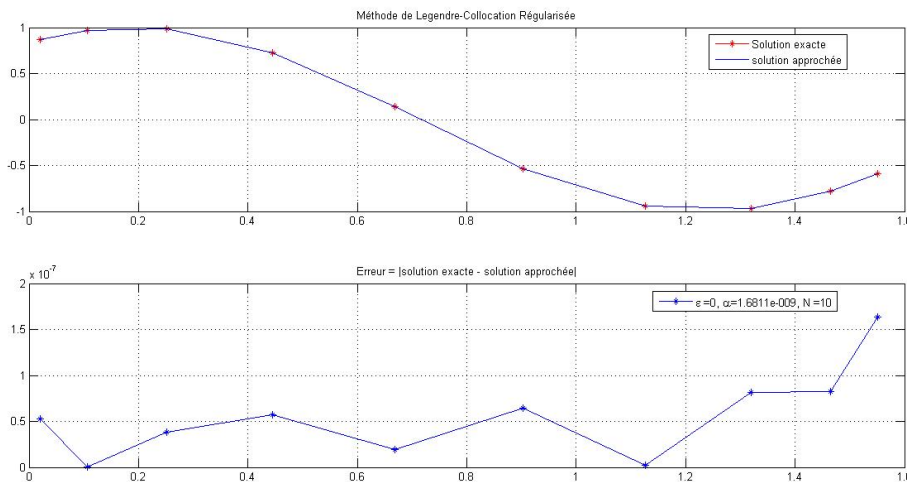


FIGURE 17. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données exactes, $N = 10$.

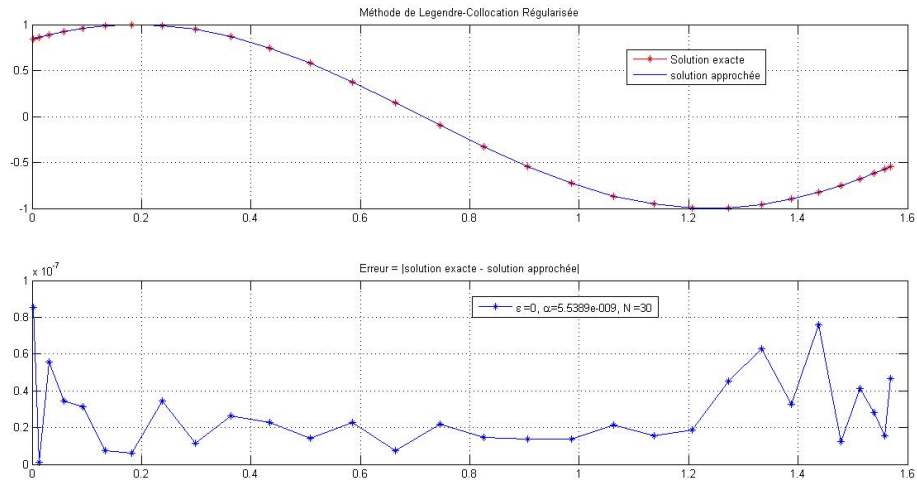


FIGURE 18. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données exactes, $N = 30$.

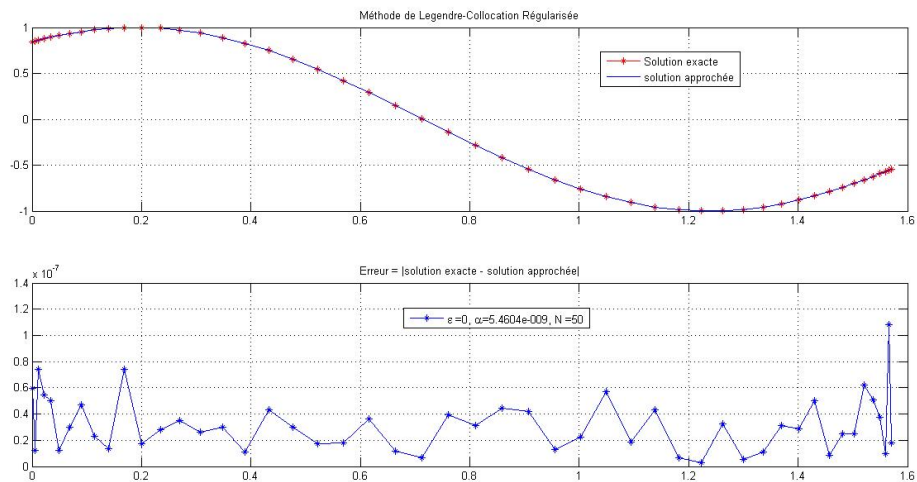


FIGURE 19. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données exactes, $N = 50$.

TABLE 7. Legendre-Collocation régularisée. Erreur relative avec des données exactes.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$2,9550 \times 1.0e - 8$
30	$8,4754 \times 1.0e - 9$
50	$7,4396 \times 1.0e - 9$
100	$1,2992 \times 1.0e - 8$

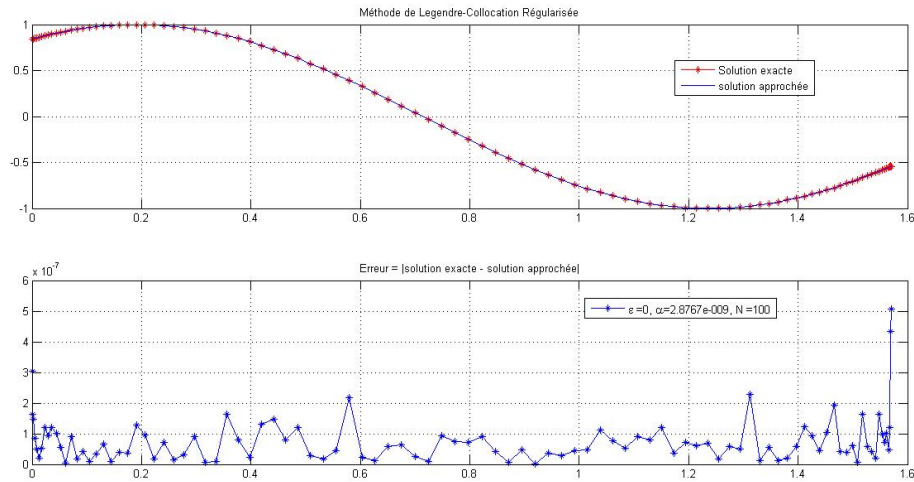


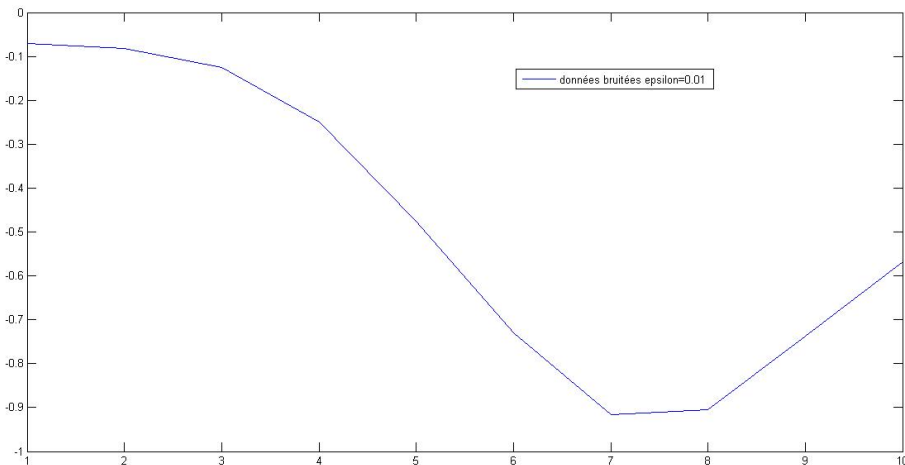
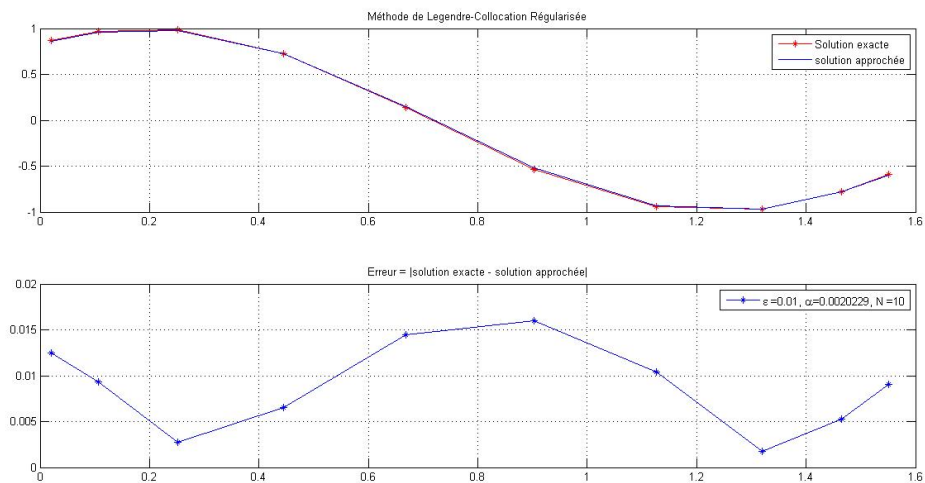
FIGURE 20. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données exactes, $N = 100$.

TABLE 8. Legendre-Collocation régularisée. Erreur absolue avec des données exactes.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$1,2992 \times 1.0e - 8$
30	$3,6640 \times 1.0e - 8$
50	$4,1492 \times 1.0e - 8$
100	$1,0242 \times 1.0e - 7$

1.2.2. Cas bruité.

▷ On génère une donnée bruitée (voir Fig 21) avec le niveau du bruit $\delta = 10^{-2}$. On calcule la solution approchée pour différentes valeurs de N . Les tableaux suivants indiquent l'erreur relative et absolue.

FIGURE 21. Données bruitées $\delta = 10^{-2}$.FIGURE 22. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 10$, $\delta = 10^{-2}$.

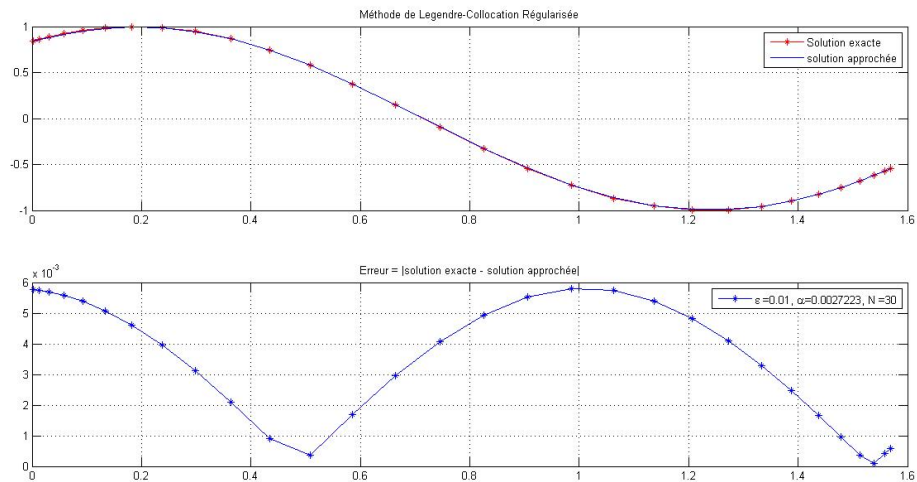


FIGURE 23. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 30$, $\delta = 10^{-2}$.

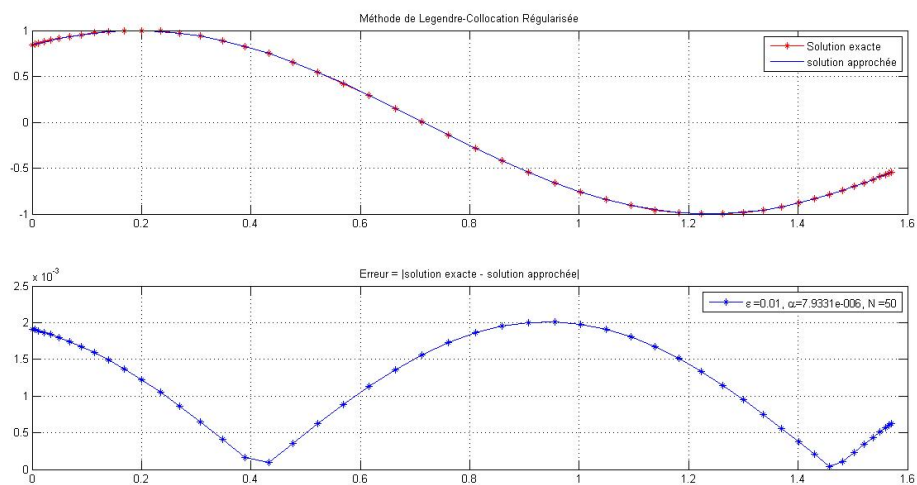


FIGURE 24. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 50$, $\delta = 10^{-2}$.

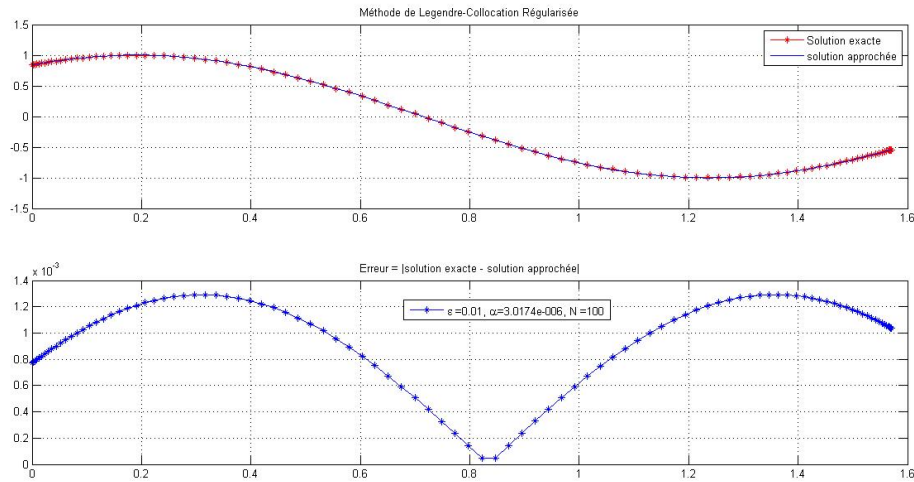


FIGURE 25. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 100$, $\delta = 10^{-2}$.

TABLE 9. Legendre-Collocation régularisée. Erreur relative pour des données bruitées $\delta = 10^{-2}$.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$3,4262 \times 1.0e - 4$
30	$1,3559 \times 1.0e - 4$
50	$2,5017 \times 1.0e - 5$
100	$2,6386 \times 1.0e - 5$

TABLE 10. Legendre-Collocation régularisée. Erreur absolue pour des données bruitées $\delta = 10^{-2}$.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$8,5844 \times 1.0e - 4$
30	$5,8616 \times 1.0e - 4$
50	$1,3953 \times 1.0e - 4$
100	$2,0801 \times 1.0e - 4$

▷ On génère une donnée bruitée (voir Fig 26) avec le niveau du bruit $\delta = 10^{-3}$. On calcule la solution approchée pour différentes valeurs de N . Les tableaux suivants indiquent l'erreur relative et absolue.

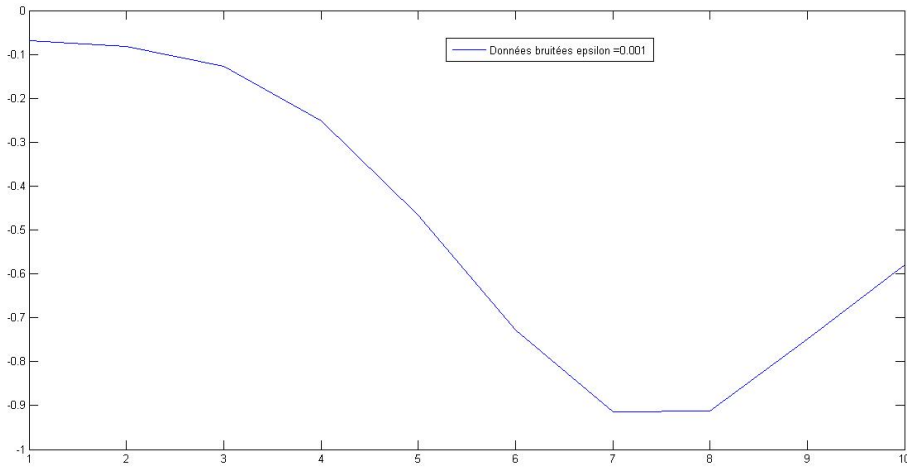


FIGURE 26. Données bruitées $\delta = 10^{-3}$.

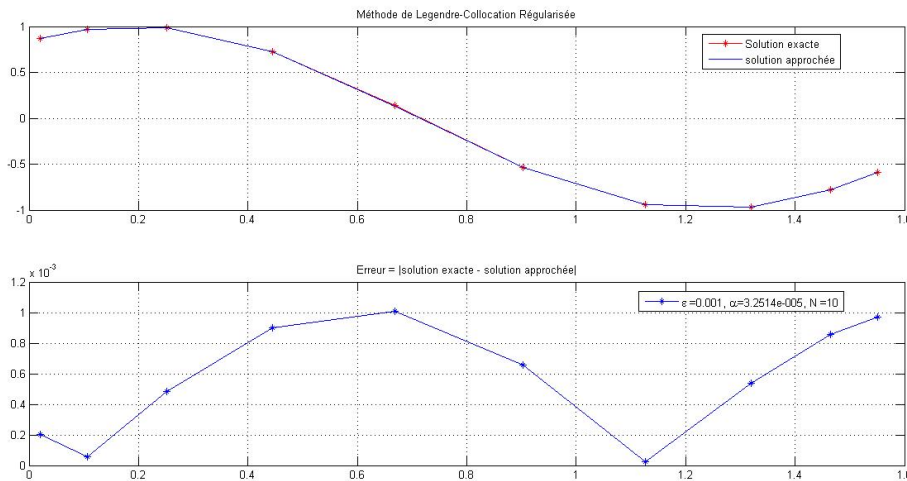


FIGURE 27. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 10$, $\delta = 10^{-3}$.

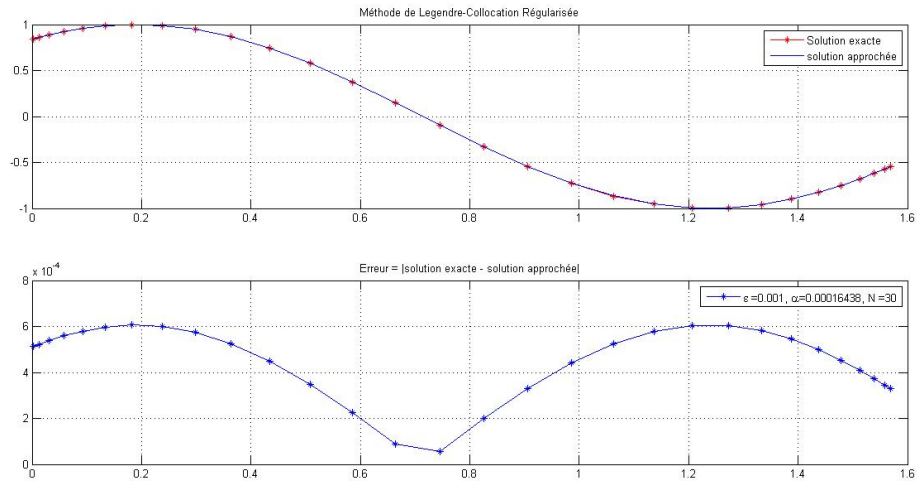


FIGURE 28. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 30, \delta = 10^{-3}$.

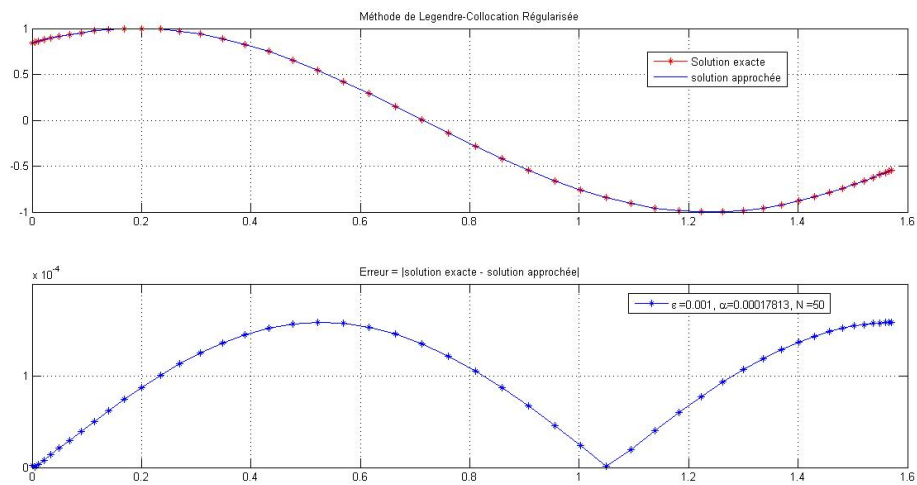


FIGURE 29. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 50, \delta = 10^{-3}$.

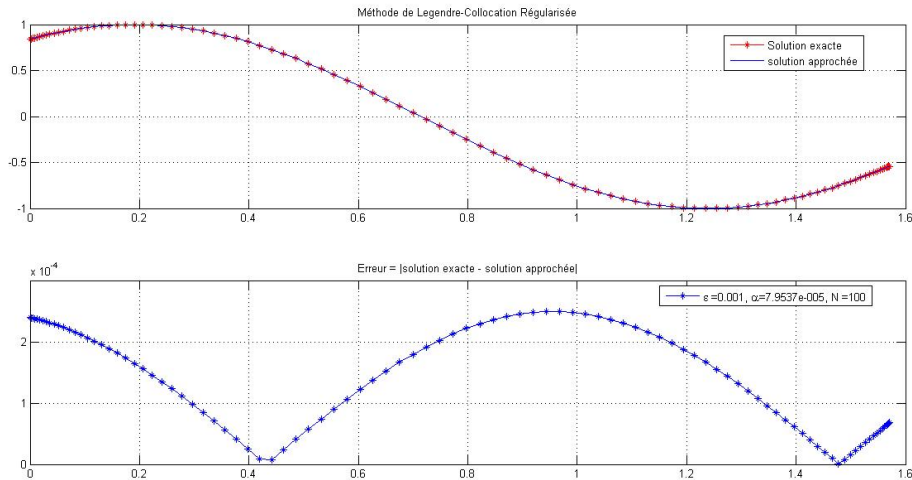


FIGURE 30. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de Legendre-Collocation régularisée, données bruitées, $N = 100, \delta = 10^{-3}$.

TABLE 11. Legendre-Collocation régularisée. Erreur relative pour des données bruitées $\delta = 10^{-3}$.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$5,1662 \times 1.0e - 3$
30	$1,1636 \times 1.0e - 3$
50	$2,9912 \times 1.0e - 4$
100	$1,5932 \times 1.0e - 4$

TABLE 12. Legendre-Collocation régularisée. Erreur absolue pour des données bruitées $\delta = 10^{-3}$.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
10	$1,2944 \times 1.0e - 2$
30	$5,0304 \times 1.0e - 3$
50	$1,6683 \times 1.0e - 3$
100	$1,2560 \times 1.0e - 3$

2. Résultats numériques obtenus par la méthode de régularisation de Tikhonov projetée

2.1. Exemple 1.

2.1.1. Cas exacte.

▷ On génère une donnée exacte (voir Fig 1) pour calculer la solution approchée avec différentes valeurs de N . Le calcul de l'erreur relative et l'erreur absolue sont indiquées dans les tableaux.

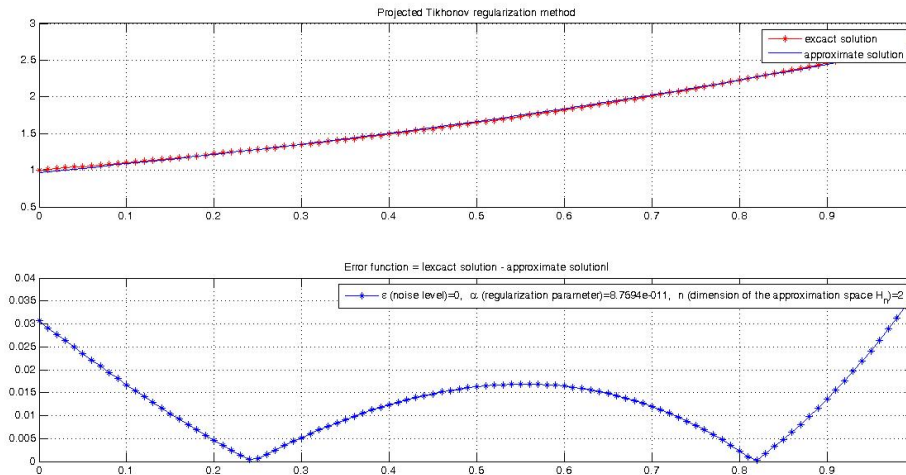


FIGURE 31. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données exactes, $N = 2$.

TABLE 13. Regularisation de Tikhonov projetée. Erreur relative pour des données exactes.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$1.50 \times 1.0e - 2$
3	$6.95 \times 1.0e - 4$
5	$8.07 \times 1.0e - 4$
10	$9.57 \times 1.0e - 4$

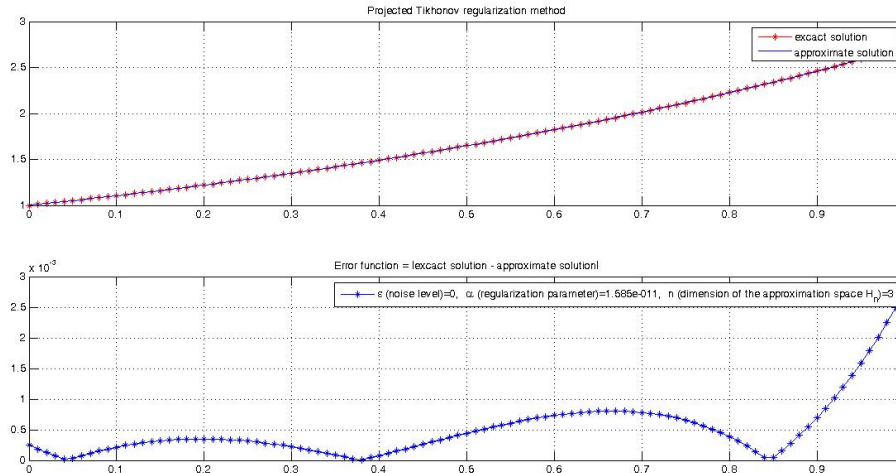


FIGURE 32. Solution approchée, solution exacte, courbe d’erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données exactes, $N = 3$.

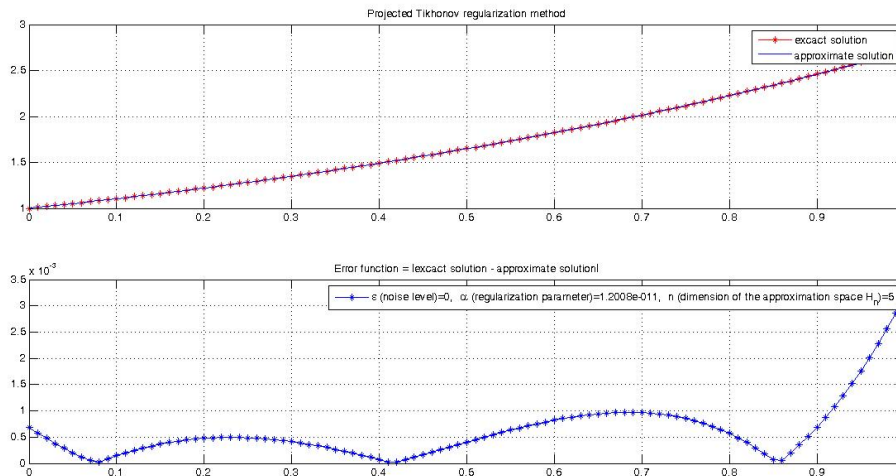


FIGURE 33. Solution approchée, solution exacte, courbe d’erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données exactes, $N = 5$.

TABLE 14. Regularisation de Tikhonov projetée. Erreur absolue pour des données exactes.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$8.34 \times 1.0e - 4$
3	$3.86 \times 1.0e - 5$
5	$4.48 \times 1.0e - 5$
10	$5.32 \times 1.0e - 5$

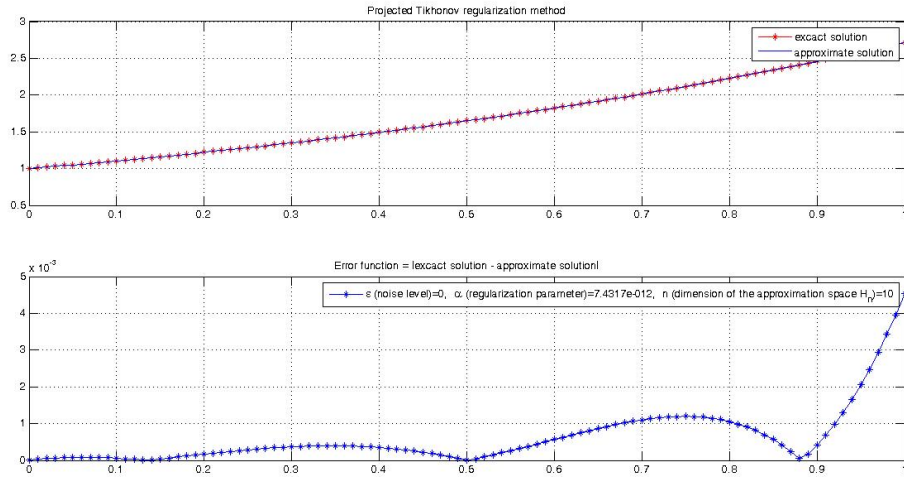


FIGURE 34. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données exactes, $N = 10$.

2.1.2. Cas bruité.

▷ On génère une donnée bruitée (voir Fig 6) avec le niveau de bruit $\delta = 10^{-2}$. On calcule la solution approchée pour différentes valeurs de N . Les tableaux suivants indiquent l'erreur relative et absolue.

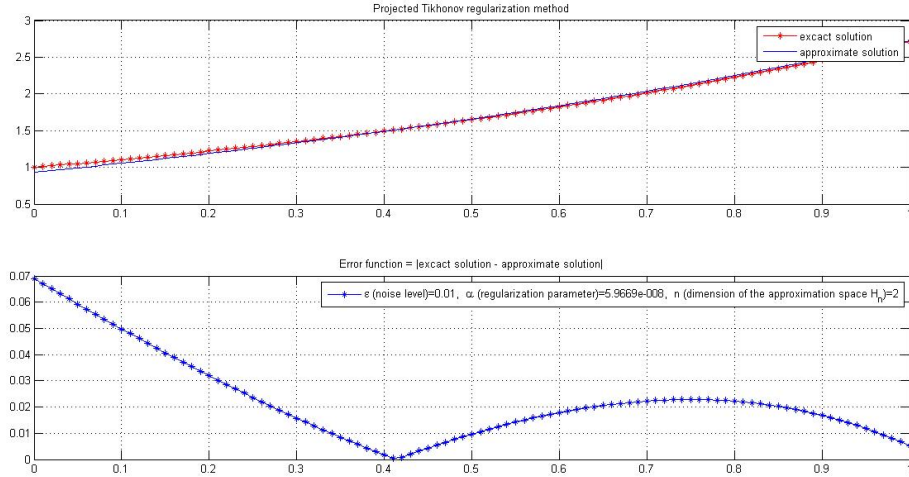


FIGURE 35. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 2, \delta = 10^{-2}$.

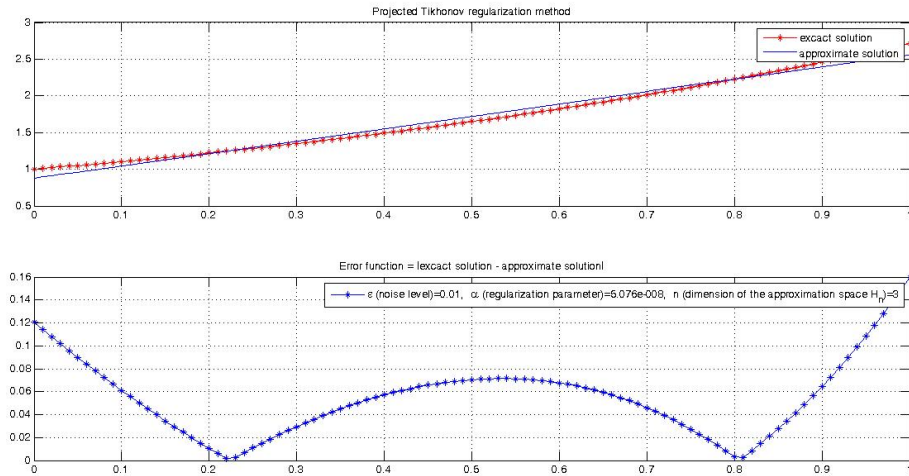


FIGURE 36. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 3, \delta = 10^{-2}$.

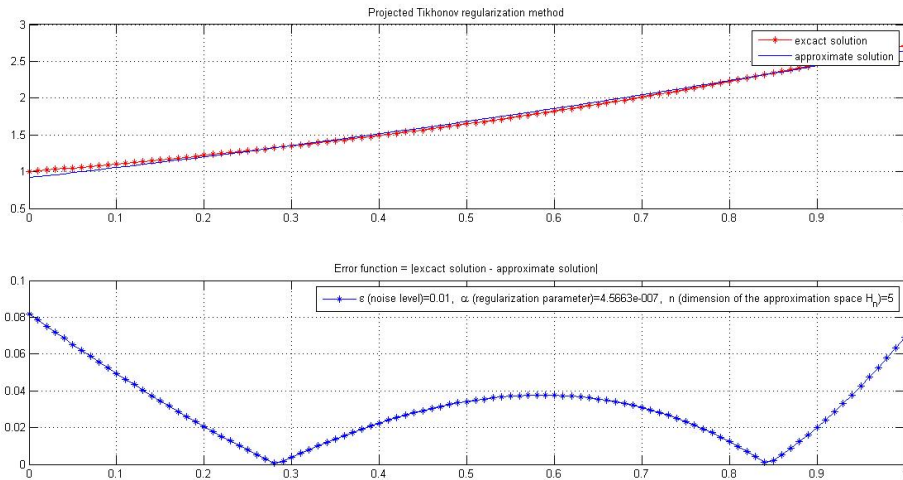


FIGURE 37. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 5, \delta = 10^{-2}$.

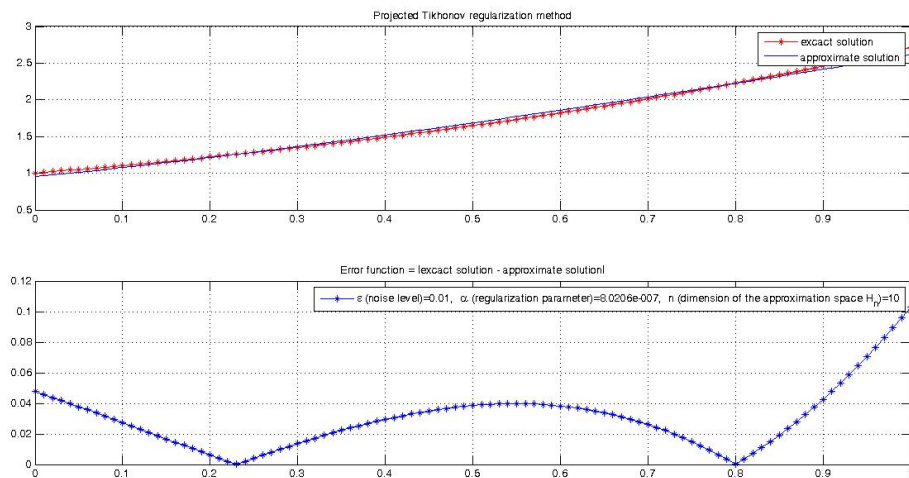


FIGURE 38. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 10, \delta = 10^{-2}$.

TABLE 15. Régularisation de Tikhonov projetée. Erreur relative pour des données bruitées $\delta = 10^{-2}$.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$1.53 \times 1.0e - 3$
3	$6.30 \times 1.0e - 2$
5	$1.93 \times 1.0e - 3$
10	$3.52 \times 1.0e - 2$

TABLE 16. Régularisation de Tikhonov projetée. Erreur absolue pour des données bruitées $\delta = 10^{-2}$.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$2.76 \times 1.0e - 2$
3	$3.50 \times 1.0e - 3$
5	$3.48 \times 1.0e - 2$
10	$1.96 \times 1.0e - 3$

▷ On génère une donnée bruitée (voir Fig 11) avec le niveau du bruit $\delta = 10^{-3}$. On calcule la solution approchée pour différentes valeurs de N . Les tableaux suivant indiquent l'erreur relative et absolue.

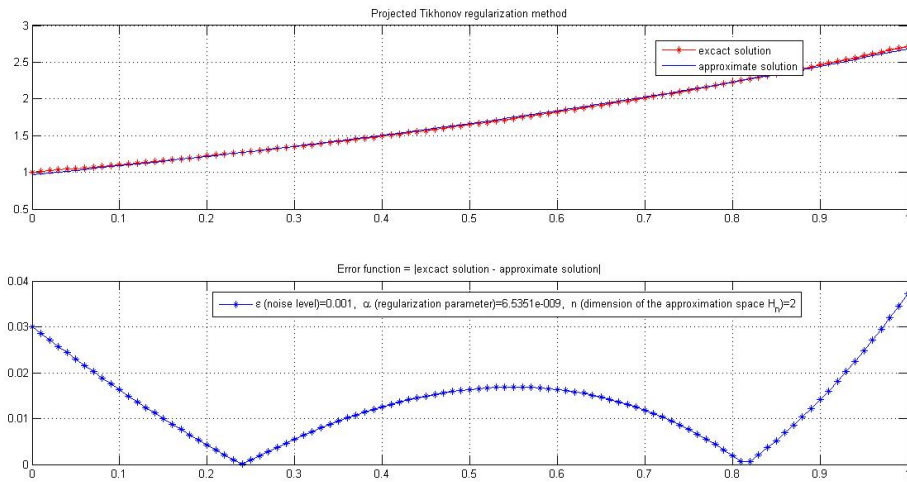


FIGURE 39. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 2, \delta = 10^{-3}$.

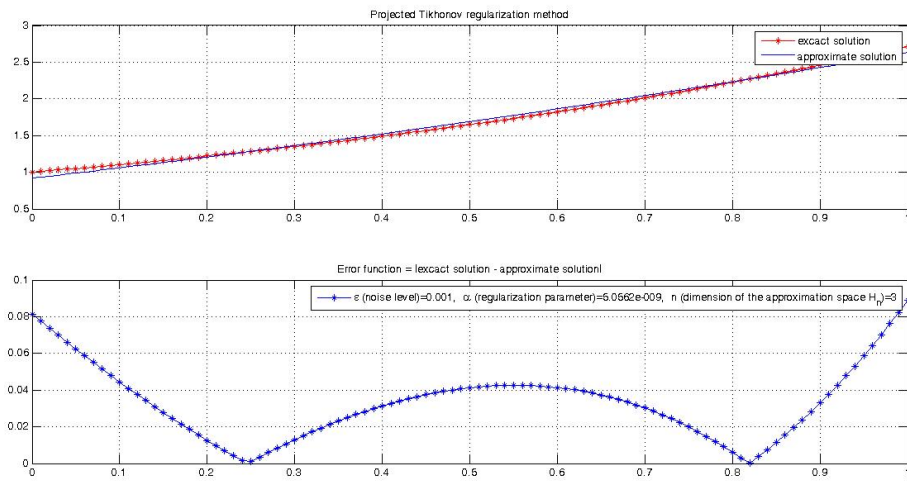


FIGURE 40. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 3, \delta = 10^{-3}$.

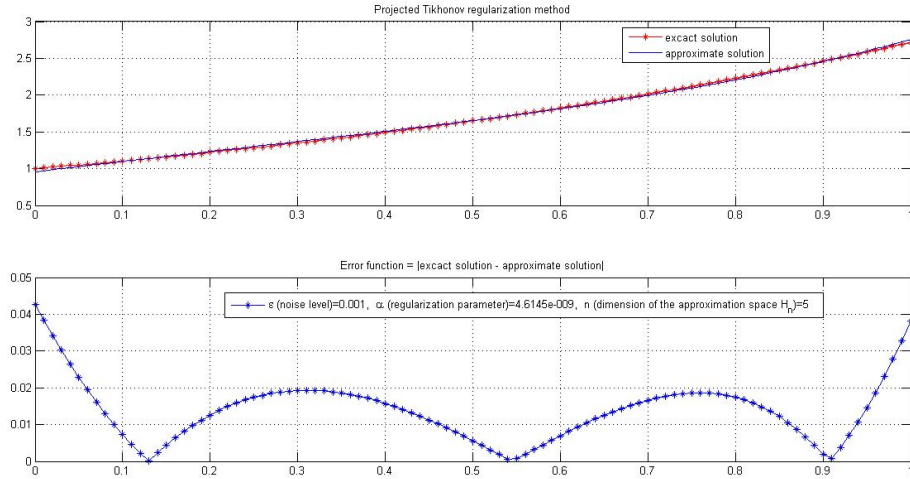


FIGURE 41. Solution approchée, solution exacte, courbe d’erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 5, \delta = 10^{-3}$.

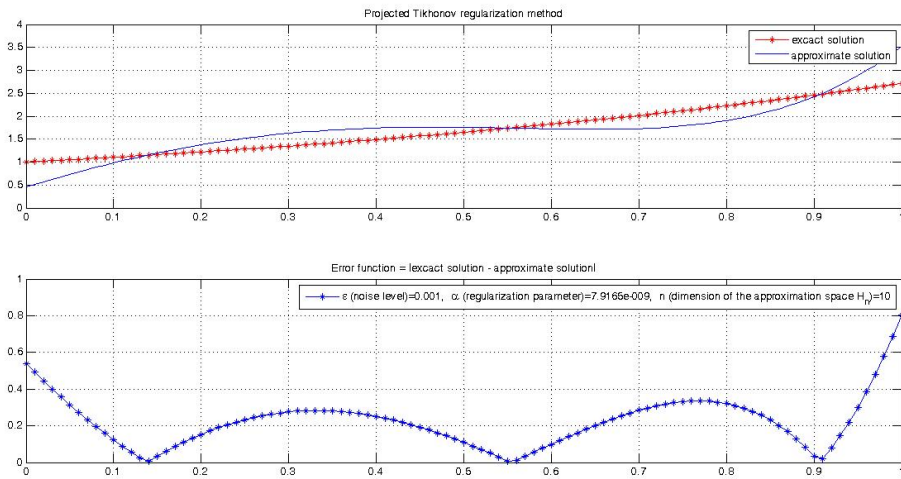


FIGURE 42. Solution approchée, solution exacte, courbe d’erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 10, \delta = 10^{-3}$.

TABLE 17. Régularisation de Tikhonov projetée. Erreur relative pour des données bruitées $\delta = 10^{-3}$.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$8.35 \times 1.0e - 4$
3	$3.81 \times 1.0e - 2$
5	$8.78 \times 1.0e - 4$
10	$4.12 \times 1.0e - 2$

TABLE 18. Régularisation de Tikhonov projetée. Erreur absolue pour des données bruitées $\delta = 10^{-3}$.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$1.50 \times 1.0e - 2$
3	$2.12 \times 1.0e - 3$
5	$4.26 \times 1.0e - 2$
10	$2.29 \times 1.0e - 3$

2.2. Exemple 2.

2.2.1. Cas exact.

▷ On génère une donnée exacte (voir Fig 16) pour calculer la solution approchée pour différentes valeurs de N . Le calcul de l'erreur relative et l'erreur absolue sont indiquées dans les tableaux suivants.

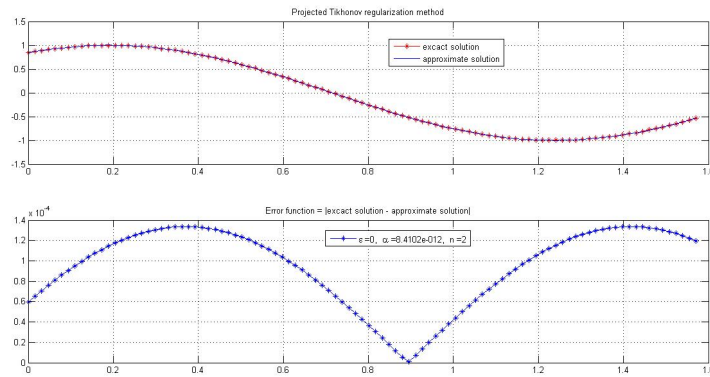


FIGURE 43. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données exactes, $N = 2$.

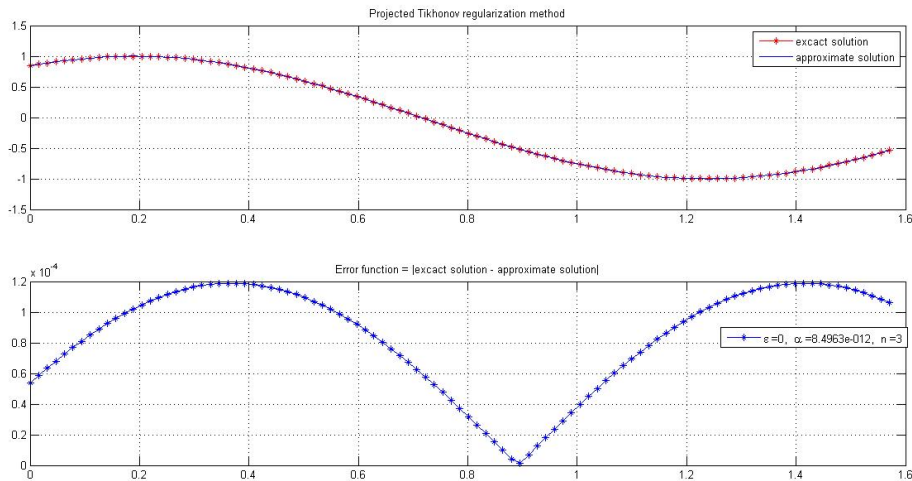


FIGURE 44. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données exactes, $N = 3$.

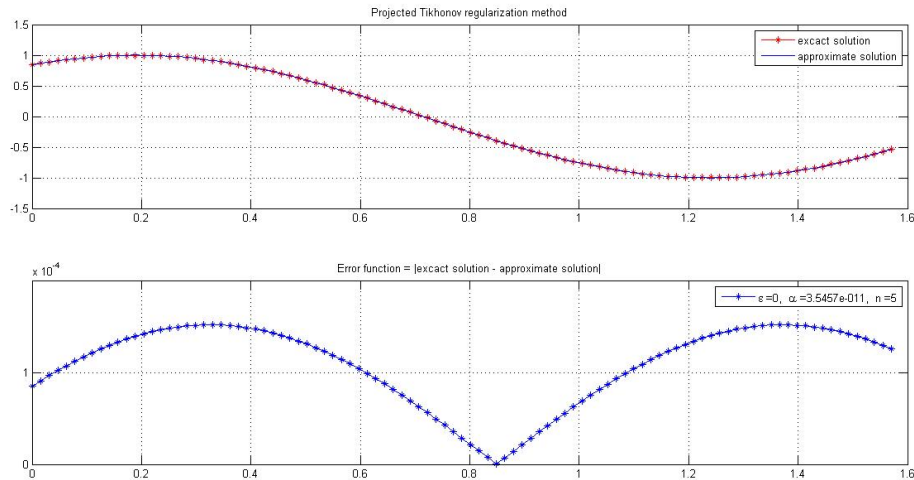


FIGURE 45. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données exactes, $N = 5$.

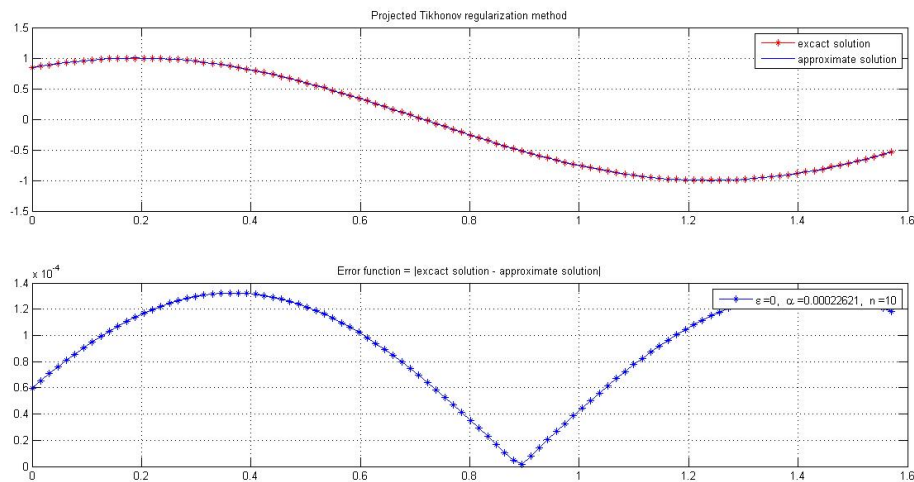


FIGURE 46. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données exactes, $N = 10$.

TABLE 19. Regularisation de Tikhonov projetée. Erreur relative pour des données exactes.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$1.50 \times 1.0e - 2$
3	$6.95 \times 1.0e - 4$
5	$8.07 \times 1.0e - 4$
10	$9.57 \times 1.0e - 4$

TABLE 20. Régularisation de Tikhonov projetée. Erreur absolue pour des données exactes.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$8.34 \times 1.0e - 4$
3	$3.86 \times 1.0e - 5$
5	$4.48 \times 1.0e - 5$
10	$5.32 \times 1.0e - 5$

2.2.2. Cas bruité.

▷ On génère une donnée bruitée (voir Fig 21) avec le niveau du bruit $\delta = 10^{-2}$. On calcule la solution approchée pour différentes valeurs de N . Les tableaux suivants indiquent l'erreur relative et absolue.

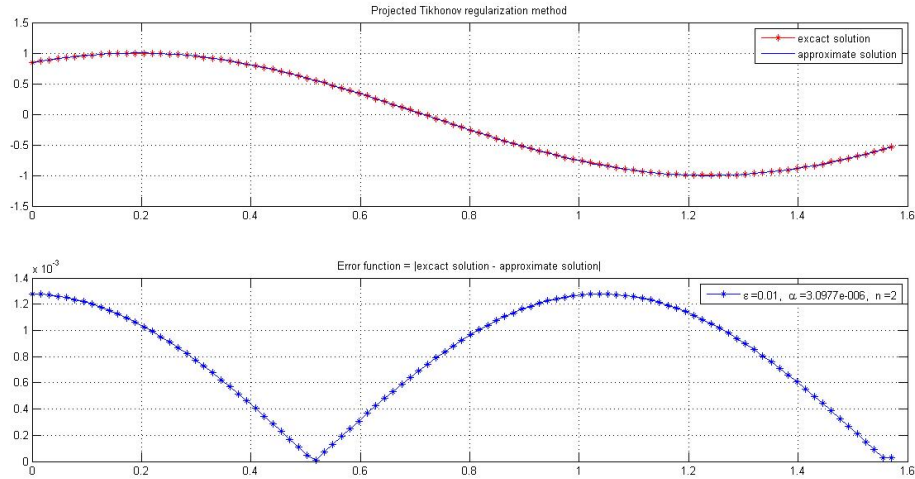


FIGURE 47. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 2, \delta = 10^{-2}$.

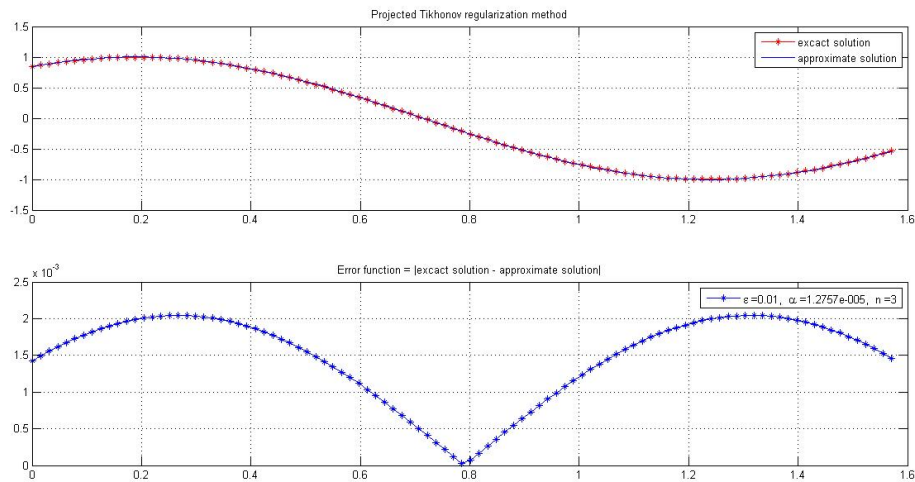


FIGURE 48. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 3, \delta = 10^{-2}$.

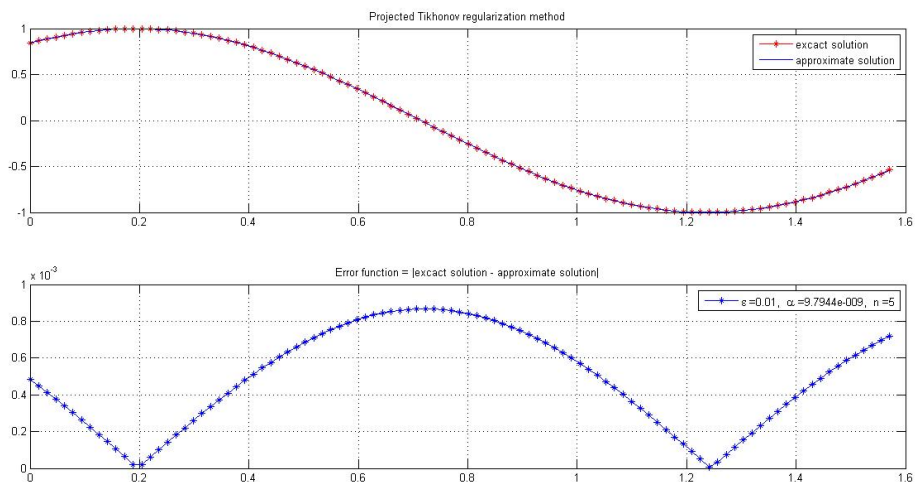


FIGURE 49. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 5, \delta = 10^{-2}$.

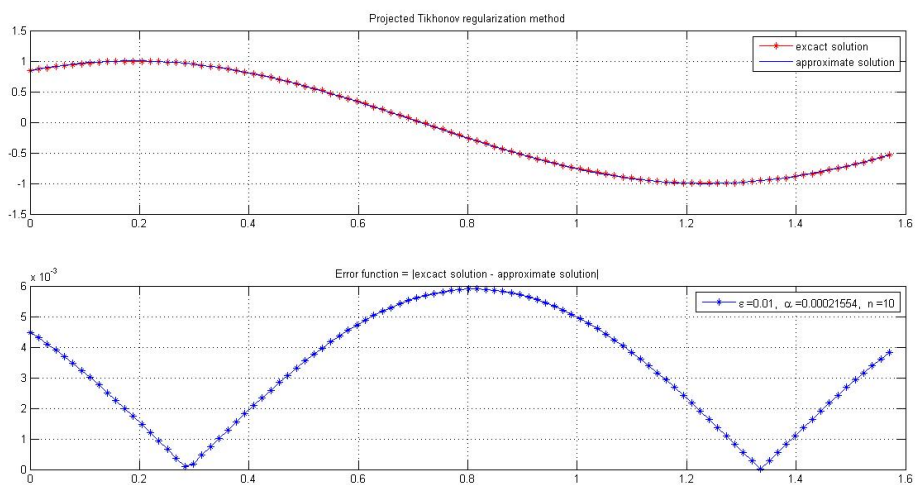


FIGURE 50. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 10, \delta = 10^{-2}$.

TABLE 21. Régularisation de Tikhonov projetée. Erreur relative pour des données bruitées $\delta = 10^{-2}$.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$1.53 \times 1.0e - 3$
3	$6.30 \times 1.0e - 2$
5	$1.93 \times 1.0e - 3$
10	$3.52 \times 1.0e - 2$

TABLE 22. Régularisation de Tikhonov projetée. Erreur absolue pour des données bruitées $\delta = 10^{-2}$.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$2.76 \times 1.0e - 2$
3	$3.50 \times 1.0e - 3$
5	$3.48 \times 1.0e - 2$
10	$1.96 \times 1.0e - 3$

▷ On génère une donnée bruitée (voir Fig 26) avec le niveau du bruit $\delta = 10^{-3}$. On calcule la solution approchée pour différentes valeurs de N . Les tableaux suivants indiquent l'erreur relative et absolue.

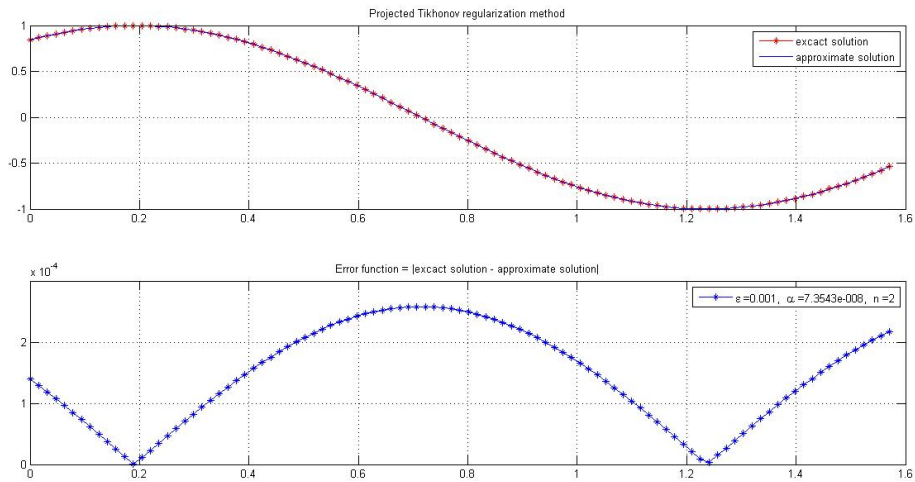


FIGURE 51. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 2, \delta = 10^{-3}$.

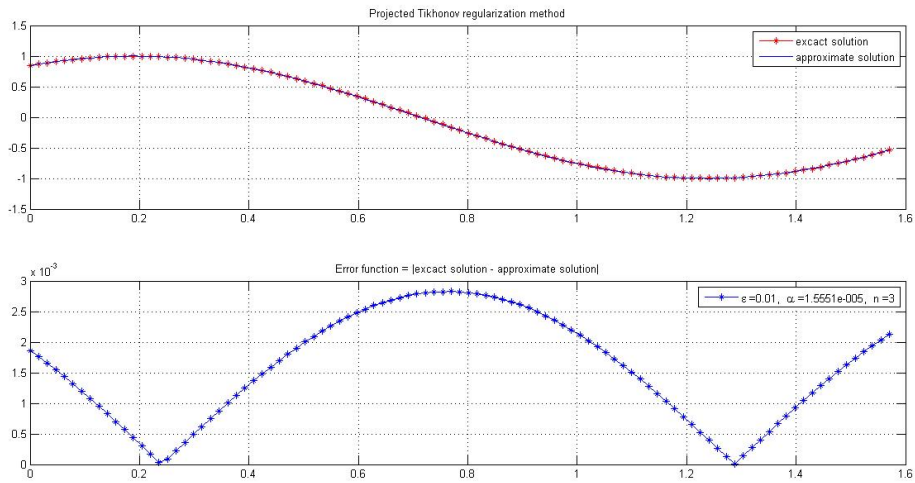


FIGURE 52. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 3, \delta = 10^{-3}$.

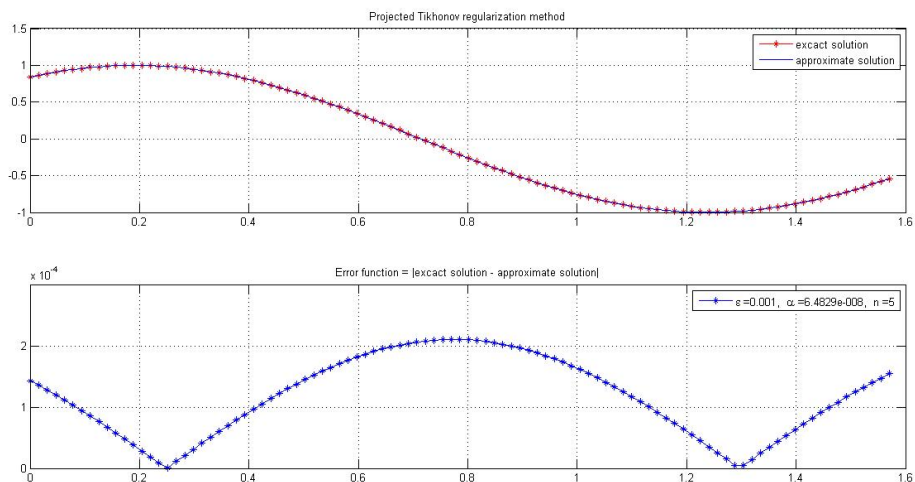


FIGURE 53. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 5$, $\delta = 10^{-3}$.

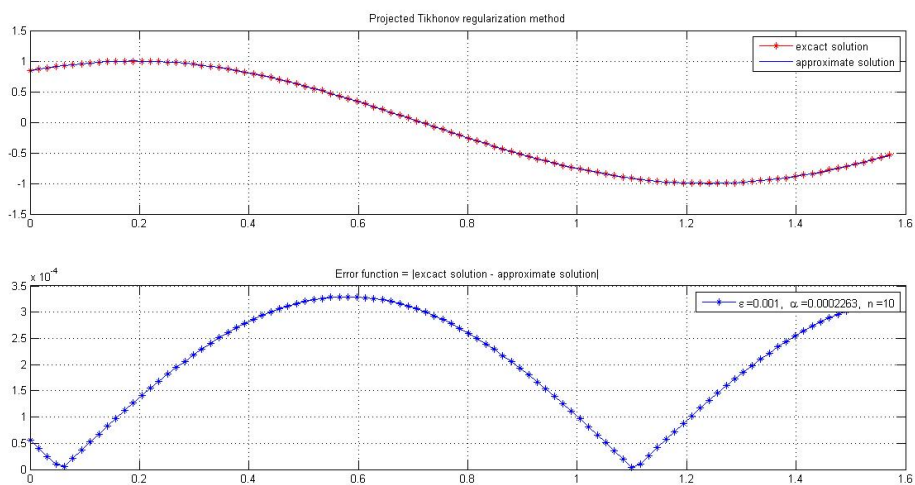


FIGURE 54. Solution approchée, solution exacte, courbe d'erreur : méthode de régularisation de Tikhonov projetée, données bruitées, $N = 10$, $\delta = 10^{-3}$.

TABLE 23. Régularisation de Tikhonov projetée. Erreur relative pour des données bruitées $\delta = 10^{-3}$.

Erreur relatif $Er(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$8.35 \times 1.0e - 4$
3	$3.81 \times 1.0e - 2$
5	$8.78 \times 1.0e - 4$
10	$4.12 \times 1.0e - 2$

TABLE 24. Régularisation de Tikhonov projetée. Erreur absolue pour des données bruitées $\delta = 10^{-3}$.

Erreur absolue $Abs(f)$	
$N =$	$Er(f)$
2	$1.50 \times 1.0e - 2$
3	$2.12 \times 1.0e - 3$
5	$4.26 \times 1.0e - 2$
10	$2.29 \times 1.0e - 3$

Commentaires

Méthode de Legendre-Collocation régularisée.

Remarque. Ici N représente l'indice de troncature de la série de Fourier-Legendre.

- Niveau du bruit élevé $\delta = \frac{1}{100}$. On remarque ici que la méthode donne des bons résultats pour $N \in [30, 100]$. A partir de $N = 100$ la méthode est stable et l'algorithme est saturé.
- Niveau du bruit faible $\delta = \frac{1}{1000}$. On remarque ici que la méthode donne des bons résultats pour $N \in [30, 100]$. A partir de $N = 100$ la méthode est stable et l'algorithme est saturé, mais l'erreur relative est meilleure par rapport au premier cas.

Méthode de régularisation de Tikhonov projetée.

Remarque. Ici N représente la dimension de l'espace de projection pour construire des opérateurs de rang finis.

Pour cette méthode, on remarque que le domaine de convergence est $N \in [2, 5]$ avec une différence remarquable pour le cas d'un bruit faible. A partir de $N \geq 10$ la méthode devient instable. Ce phénomène est bien connu même pour les problèmes directs. Mais, on doit apprécier l'avantage de la méthode qui donne des bons résultats pour des dimensions réduites ($N = 2, 3, 4, 5$) pour des problèmes numériquement classés fortement instables.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a traité deux méthodes d'approximation numérique pour une classe d'équations intégrales de première espèce. On a donné une justification théorique et numérique de l'approche du calcul adoptée dans cette thèse. Les résultats numériques obtenus pour les deux exemples sont satisfaisants.

Pour la première méthode de Legendre-Collocation, la convergence est justifiée numériquement. Cette convergence est prévisible d'après les schémas numériques de collocation qui sont bien étudiés dans la littérature. Néanmoins, l'estimation d'erreur n'a pas été abordée dans cette thèse pour des difficultés techniques et théoriques.

Comme perspective, on projette d'étudier la méthode de Tikhonov régularisée en dimension deux, et de tester d'autres bases de polynômes orthogonaux pour voir l'effet de chaque choix. On souhaite aussi faire une extension de la méthode pour des équations posées sur l'axe réel tout entier ou le demi-axe positif en utilisant d'autres techniques d'approximation avancées.

Bibliographie

- [1] K.E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press (1997).
- [2] M. Ahues, A. Largillier, B.V. Limaye, : *Spectral Computations for Bounded Operators*, Chapman and Hall-CRC, New York (2001)
- [3] Abramovitz, A : *A Trigonometrical Approach for Some Projection Methods*, *Acta Applicandae Mathematicae* **56** : 99-117 (1999)
- [4] H. Adibi, P. Assari : *Chebyshev Wavelet Method for Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind*, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2010, Article ID 138408, 17 pages, doi :10.1155/2010/138408
- [5] H. Ben Aouicha, *Computation of the spectra of some integral operators and application to the numerical solution of some linear integral equations*, *Applied Mathematics and Computation* **218** (2011), 3217-3229.
- [6] A. Ben-Israel and N.E. Greville Thomas ; **Generalized inverses**, Springer-Verlag (2003).
- [7] E. Babolian, T. Lotfi, M. Paripour, *Wavelet moment method for solving Fredholm integral equations of the first kind*, *Applied Mathematics and Computation* **186** (2007) 1467-1471.
- [8] A. Babaaghaie, H. Mesgarani : *Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of First Kind by Two-Dimensional Trigonometric Wavelets in Holder Space $C^\alpha([a, b])$* , *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Vol. **52**, No. 4, 601-614 (2012)
- [9] A. Bakushinsky, M.Y. Kokurin, A. Smirnova : *Iterative Methods for Ill-posed Problems*, *Inverse and Ill-Posed Problems Series* 54, De Gruyter (2011)
- [10] F. Chatelin : *Spectral Approximation of Linear Operators*, Academic Press, New York (1983)
- [11] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang : *Spectral Methods*, Springer-Verlag (2006)
- [12] Z. Chen, C.A. Micchelli, Y. Xu : *Multiscale Methods for Fredholm Integral Equations*, Cambridge University Press (2015)
- [13] Christine, B, Yvon, M, Francesca, R : *Discretisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2004)
- [14] Z. Chen, Y. Xu, and H. Yang, *Fast collocation methods for solving ill-posed integral equations of the first kind*, *Inverse Problems* **24** (2008) 065007 (21pp).
- [15] V. I. Dmitriev and Zh. Ingtem, *Solving an Integral Equation of the First Kind by Spline Approximation*, *Computational Mathematics and Modeling*, Vol. **15**, No. 2, (2004), 99-104.

Bibliographie

- [16] V.I. Dmitriev, Zh. Ingtem : Solving an integral equation of the first kind by spline approximation, Computational Mathematics and Modeling, Vol. 15, No. 2, (2004)
- [17] P. Das, M.M. Sahani, G. Nelakanti : Convergence analysis of Legendre spectral projection methods for Hammerstein integral equations of mixed type, J. Appl. Math. Comput., 49, 529-555 (2015)
- [18] P. Das, M.M. Sahani, G. Nelakanti, G. Long : Legendre Spectral Projection Methods for Fredholm-Hammerstein Integral Equations, J Sci Comput, DOI 10.1007/s10915-015-0135-z (2015)
- [19] W.A. Essah, L.M. Delves : The numerical solution of first kind integral equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 27, 363-387 (1989)
- [20] H.W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer : Regularization of Inverse Problems, Kluwer Academic Publisher (1996)
- [21] H.W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer, Regularization of Inverse Problems, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1996).
- [22] C. W. Groetsch; STABLE APPROXIMATE EVALUATION OF UNBOUNDED OPERATORS, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007).
- [23] C.W. Groetsch, Tikhonov regularization for integral equations of the first kind, Pitman (1984).
- [24] CW. Groetsch, A. Neubauer : Regularization of Ill-Posed Problems : Optimal Parameter Choice in Finite Dimensions, Journal of Approximation Theory 58, 184-200 (1989)
- [25] D. Hong, C. Minggen : Representation of the exact solution and a stability analysis on the Fredholm integral equation of the first kind in reproducing kernel space, Applied Mathematics and Computation 182, 1608-1614 (2006)
- [26] D. Hong, C. Minggen : Approximate solution of the Fredholm integral equation of the first kind in a reproducing kernel Hilbert space, Applied Mathematics Letters 21, 617-623 (2008)
- [27] C. Huang : Spectral collocation method for compact integral operators, PHD.Thesis, Wayne State University (2011)
- [28] W. Jin, W. Ting : Regularized solution to the fredholm integral equation of the first kind with noisy data, J. Appl. Math. & Informatics Vol. 29, No. 1-2, pp. 23-37 (2011)
- [29] J.T. King, A. Neubauer : A Variant of Finite-Dimensional Tikhonov Regularization with A-Posteriori Parameter Choice, Computing 40, 91-109 (1988)
- [30] A. Kirsch : An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, Springer-Verlag (1996)
- [31] K. Kunisch, J. Zou : Iterative choices of regularization parameters in linear inverse problems, Inverse Problems 14, 1247-1264 (1998)
- [32] B. Kaltenbacher, J. Offtermatt : A Convergence Analysis Of Regularization By Discretization In Preimage Space, Mathematics of Computation, Vol. 81, No. 280, 2049-2069 (2012)
- [33] N. Koshev, N. Beilina : An Adaptive Finite Element Method for Fredholm Integral Equations of the first kind and its verification on experimental data, CEJM, 11(8), 1489-1509 (2013)
- [34] R. Kress : Linear Integral Equations (Third Edition), Springer New York Heidelberg Dordrecht London (2014)
- [35] S. Kindermann : Projection methods for ill-posed problems revisited, iv :1507.03364v1 [math.NA] 13 Jul (2015)
- [36] R. Kress, Linear Integral Equations, Springer-Verlag, New York (1989).
- [37] S.H. Kulkarni and M. T. Nair, *A characterization of closed range operators*, Indian J. Pure Appl. Math., 31(4) (2000), 353-361.
- [38] S.H. Kulkarni, M.T. Nair and G. Ramesh, *Some properties of unbounded operators with closed range*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. 118, No. 4, (2008), 613-625.
- [39] P.K. Kythe, M.R. Schaferkotter, Handbook of computational methods for integration, Champan & Hall/CRC Press (2005).

Bibliographie

- [40] J. Lund, K.L. Bowers, *Sinc Method for Quadrature and Differential equations*, SIAM (1992).
- [41] M.A. Lukas, *Comparisons of parameter choice methods for regularization with discrete noisy data*, *Inverse Problems* **14** (1) (1998), 161-184.
- [42] Y. Lingyun, *Numerical Quadrature : Theory and Computation*, Master.C.Sc, Dalhousie University (2006).
- [43] S. Lin, F. Cao and Z. Xu, *A convergence rate for approximate solutions of Fredholm integral equations of the first kind*, *Positivity* (2011), DOI 10.1007/s11117-011-0137-5.
- [44] X. Luo, F. Li, S. Yang : A posteriori parameter choice strategy for fast multiscale methods solving ill-posed integral equations, *Adv Comput Math* **36**, 299-314 (2012)
- [45] Y. Lu, Xu. Shen, Y. Xu : Integral equation models for image restoration : high accuracy methods and fast algorithms, *Inverse Problems* **26**, 045006 (32pp)(2010)
- [46] K. Maleknejad, K. Nouri, M. Yousefi : Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations, *Applied Mathematics and Computation* **193**, 335-339 (2007)
- [47] A. Mejdj, D. Monique, M. Yvon : *Méthodes Spectrales et des Eléments Spectraux*, Cours de DEA intensif décentralisé, Nantes (1993)
- [48] M. Mori, *Discovery of the Double Exponential Transformation and Its Developments*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **41** (2005), 897-935.
- [49] K. Maleknejad, S. Sohrabi, Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using Legendre wavelets, *Appl. Math. Comput.* (2006), doi :10.1016/j.amc.2006.08.023.
- [50] K. Maleknejad, R. Mollapourasl, P. Torabi and M. Alizadeh, *Solution of First kind Fredholm Integral Equation by Sinc Function*, World Academy of Science, Engineering and Technology, (2010), **66**, 884-888.
- [51] K. Maleknejad, R. Mollapourasl and M. Alizadeh, *Convergence analysis for numerical solution of Fredholm integral equation by Sinc approximation*, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* **16** (2011), 2478-2485.
- [52] P. Mathé, S.V. Pereverzev, *Moduli of continuity for operator valued functions*, *Numer. Funct. Anal. Optim.* **23** (5-6) (2002), 623-631.
- [53] P. Mathé, S.V. Pereverzev, *Geometry of linear ill-posed problems in variable Hilbert scales*, *Inverse Problems* **19** (3) (2003), 789-803.
- [54] P. Mathé, S.V. Pereverzev, *Discretization strategy for linear ill-posed problems in variable Hilbert scales*, *Inverse Problems* **19** (6) (2003), 1263-1277.
- [55] P. Mathé, S.V. Pereverzev, *Regularization of some linear inverse problems with discretized random noisy data*, *Math. Comput.* **75** (2006), 1913-1929.
- [56] M.T. Nair, S. Pereverzev, *Regularized collocation method for Fredholm integral equations of the first kind*, *J. Complex.*, (2007) **23**(4-6), 454-467.
- [57] M.T. Nair ; *LINEAR OPERATOR EQUATIONS : APPROXIMATION AND REGULARIZATION*, World Scientific (2009).
- [58] M.T. Nair, *Quadrature based collocation methods for integral equations of the first kind*, *Adv Comput Math* (2012) **36** :315-329.
- [59] A. Neubauer : *Finite-Dimensional Approximation of Constrained Tikhonov-Regularized Solutions of Ill-Posed Linear Operator Equations*, *Mathematics of Computation*, Vol. **48**, No. 178, 565-583 (1997)
- [60] G. Nelakanti : *Superconvergence of Legendre projection methods for the eigenvalue problem of a compact integral operator*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **235**, 2380-2391 (2011)
- [61] P. Olivier, *Méthode de régularisation entropique et application au calcul de la fonction de distribution des ondes*, Thèse de Doctorat, Université d'Orléans (2005).
- [62] S.V. Pereverzev, E. Schock, *On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems*, *SIAM J. Numer. Anal.* **43** (2005), 2060-2076.

Bibliographie

- [63] S.V. Pereverzev, S. Prössdorf : On the characterization of self-regularization properties of a fully discrete projection method for symm's integral equation. *Journal of Integral Equations and Applications*, **12**(2), 113-130 (2000)
- [64] B.L. Panigrahi, G. Long, G. Nelakanti : Legendre multi-projection methods for solving eigenvalue problems for a compact integral operator, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **239**, 135-151 (2013)
- [65] F. Pelica : Spline Approximation Techniques and Regularization Methods for First Kind Integral Equations, *Analele Universităţii Bucureşti, Matematică Anul LV*, 229-236 (2006)
- [66] H.J. Reinhardt : *Analysis of Approximation Methods for Differential and Integral Equations*, Springer-Verlag New York (1985)
- [67] M.P. Rajan : Convergence analysis of a regularized approximation for solving Fredholm integral equations of the first kind, *J. Math. Anal. Appl.* **279**, 522-530 (2003)
- [68] M.P. Rajan : A Modified Convergence Analysis For Solving Fredholm Integral Equations of The First Kind, *Integr. Equ. Oper. Theory* **49**, 511-516 (2004)
- [69] F. Stenger, *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer, New York, 1993.
- [70] F. Stenger, *Handbook of Sinc Numerical Methods*, CRC Press/ Taylor & Francis Group (2011).
- [71] F. Stenger, *Matrices of Sinc methods*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **86** (1997), 297-310.
- [72] X. Shang, D. Han, *Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using linear Legendre multi-wavelets*, *Applied Mathematics and Computation* **191**, (2007) 440-444.
- [73] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin ; **Solutions to ill-posed problems**, Winston-Wiley, New York (1977).
- [74] A.N. Tikhonov, A.S. Leonov, A.G. Yagola : *Nonlinear Ill-Posed Problems*, *Appl. Math. Math. Comput.*, **14**, Chapman Hall, London (1998)
- [75] N.M. Thamban : *Linear Operator Equations : Approximation and Regularization*, World Scientific Publishing (2009)
- [76] N.M. Thamban : Quadrature based collocation methods for integral equations of the first kind, *Adv Comput Math* **36** :315-329 (2012)
- [77] N.M. Thamban, S. Pereverzev : Regularized collocation method for Fredholm integral equations of the first kind. *J. Complex.* **23**(4-6), 454-467 (2007)
- [78] G.M. Vainikko, A.Y. Veretennikov, *Iteration procedures in ill-posed problems (in Russian)*, Nauka, Moscow (1986).
- [79] G. Vainikko, U. Hämarik : Projection methods and selfregularization in ill-posed problems. *Soviet Mathematics*, **29**, 1-20 (1985, in Russian)
- [80] Y.F. Wang, T.Y. Xiao : Fast realization algorithms for determining regularization parameters in linear inverse problems, *Inverse Problems* **17**, 281-291 (2001)
- [81] M.L. Whitney : *Theoretical and Numerical Study of Tikhonov's Regularization and Morozov's Discrepancy Principle*, PHD.Thesis, Georgia State University (2009)
- [82] Y. Zou, L. Wang, R. Zhang : Cubically convergent methods for selecting the regularization parameters in linear inverse problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **356**, 355-362 (2009)
- [83] S.M. Zemyan : *The Classical Theory of Integral Equations*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London (2012)

RESEARCH

Open Access



Projected Tikhonov regularization method for Fredholm integral equations of the first kind

Billel Neggal¹, Nadjib Boussetila^{1,2*} and Faouzia Rebbani¹

*Correspondence: n.boussetila@gmail.com
¹Applied Mathematics Laboratory, Badji Maokhtar University Annaba, Annaba 23000, P.O. Box 12, Annaba, Algeria
²Department of Mathematics, University 8 Mai 1945 Guelma, Guelma 24000, P.O. Box 401, Guelma, Algeria

Abstract

In this paper, we consider a variant of projected Tikhonov regularization method for solving Fredholm integral equations of the first kind. We give a theoretical analysis of this method in the Hilbert space $L^2(a, b)$ setting and establish some convergence rates under certain regularity assumption on the exact solution and the kernel $k(\cdot, \cdot)$. Some numerical results are also presented.

Keywords: ill-posed problems; integral equation of the first kind; projected Tikhonov regularization method

1 Introduction

Let $H = L^2((a, b); \mathbb{R})$ and consider the Fredholm integral equation of the first kind

$$\int_a^b k(t, s)f(s) ds = g(t), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

where $k(\cdot, \cdot)$ and g are known functions, and f is the unknown function to be determined. The equation can be written as an operator equation

$$K : H \longrightarrow H, \quad f \longmapsto g = Kf. \quad (2)$$

Many inverse problems in applied science and engineering (see, e.g., [1–3] and references therein) lead to the solution of Fredholm integral equations of the first kind (1).

Several numerical methods are available in the literature to solve linear integral equations of the first kind; we can cite, for example, multiscale methods [4–8], spectral-collocation methods [9, 10], reproducing kernel Hilbert space methods [11, 12], eigenvalue approximation methods [13–17], quadrature-based collocation methods [18, 19], projections methods [20–28], and other interesting methods quite exposed in the books [13, 29–36].

In the regularizing procedures, several authors have studied finite-dimensional approximations obtained by projecting regularized approximations into finite-dimensional subspaces. Such methods may be called regularization projection methods.

The main idea of regularization by projection is to project the least squares minimization on a finite-dimensional subspace to obtain a well-conditioned problem and, consequently, a stabilization of the generalized inverse of the approximate operator. We can distinguish two different cases of regularization by projection. The first one is the regularization in preimage space, and the second is regularization in image space; see, for example, [21, 22, 26, 27, 33, 37].

Following the idea developed in [18, 19] and [26, 27], we analyze a variant of projected Tikhonov regularization method applied to our problem (2) in the Hilbert space $L^2(a, b)$ setting. We develop the theoretical framework of this method of approximation and give some results of convergence under certain conditions of regularity on the kernel $k(\cdot, \cdot)$ and the solution of the problem in question.

More precisely, we build a method of projection by using very simple mathematical tools, which can be concretized and implemented numerically. Moreover, we give natural conditions on the kernel $k(\cdot, \cdot)$ of the operator K , which enables us to establish the convergence results of this approach. For the subspace of projection, we use the Legendre polynomials, which are well studied in the literature compared to other classes of polynomials. This judicious choice also enables us to give a simple calculation and explicit formula of approximation of K^*K (see (25)). It is important to note that in [27], the author gives sufficient conditions on $\|A - A_n\|$ within an abstract framework to establish the convergence of this approximation, which returns an approach very limited in practice; moreover, it is not exploitable from the numerical point of view.

In this investigation, we assume that

- (A1) $k(\cdot, \cdot)$ is nondegenerate.
- (A2) $k(\cdot, \cdot) \in L^2((a, b) \times (a, b); \mathbb{R})$, that is, $\kappa^2 = \int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds < +\infty$.

It is well known that under these conditions, K is a compact (Hilbert-Schmidt) integral operator with infinite-dimensional range ($\dim(\mathcal{R}(K)) = +\infty$). In this case, $\mathcal{R}(K)$ is not closed, and problem (2) belongs to the class of ill-posed problems. The ill-posedness character means that T^\dagger (the Moore-Penrose inverse) or K^{-1} (when K is injective) are unbounded operators. Consequently, the standard numerical procedures to solve such equations are unstable and pose very serious problems when the data are not exact; that is, small perturbations of the observation data may lead to large changes on the considered solution.

To overcome this difficulty and for obtaining stable approximate solutions for ill-posed problems, regularization procedures are employed, and Tikhonov regularization is one the such procedure. This method consists in minimizing over H the so-called Tikhonov functional

$$\Phi_\alpha(f) = \|Kf - g\|_H^2 + \alpha \|f\|_H^2,$$

where $\alpha > 0$ is the regularization parameter. The regularized solution f_α is the unique minimizer of the Tikhonov functional $\Phi_\alpha(f)$. We denote this minimum by $f_\alpha = \arg \min_{f \in H} \Phi_\alpha(f)$, which is a unique solution of the normal equation

$$(\alpha I + K^*K)f = K^*g.$$

The linear operator $R(\alpha) = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^* \in \mathcal{L}(H)$ is called a regularizing operator, and we have

$$\|(\alpha I + K^*K)^{-1}K^*\|_H^2 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \tag{3}$$

$$\|f - f_\alpha\|_H^2 \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0. \tag{4}$$

To establish the main results of our work, we introduce the following assumptions:

- (H1) The operator K is injective, that is, $N(K) = \{0\}$.
- (H2) $g \in \mathcal{R}(K)$.
- (H3) The kernel $k(\cdot, \cdot) \in \mathcal{C}^r([a, b] \times [a, b]; \mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$.
- (H4) The operator K^* is injective ($\iff \overline{\mathcal{R}(K)} = H$).

2 Preliminaries and notation

In this section, we present the notation and functional setting and prepare some material, which will be used in our analysis. For more details, we refer the reader to [32, 36, 38].

Let H_1 and H_2 be two real Hilbert spaces. We denote by $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ the space of all bounded linear operators from H_1 to H_2 (and $\mathcal{L}(H)$ if $H_1 = H_2 = H$) with the operator norm

$$\|T\| = \sup_{\|u\|_{H_1} \leq 1} \|Tu\|_{H_2}, \quad T \in \mathcal{L}(H).$$

The null-space of $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ is the set $\mathcal{N}(T) = \{u \in H_1 : Tu = 0\}$, whereas the range of T is denoted by $\mathcal{R}(T) = T(H_1) = \{v = Tu, u \in H_1\}$.

Let $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Recall that, for $v \in H_2$, the linear operator equation

$$Tu = v \tag{5}$$

has a solution if and only if $v \in \mathcal{R}(T)$.

- If $\mathcal{R}(T)$ is infinite-dimensional and T is injective, then $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \rightarrow H_1$ is bounded if and only if $\mathcal{R}(T)$ is closed.
- If $v \notin \mathcal{R}(T)$, then we look for an element $\hat{u} \in H_1$ such that $T\hat{u}$ is “closest to” v in the sense that \hat{u} minimizes the functional $\|Tu - v\|_{H_2}$.

Definition 2.1 Let $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. We call $\hat{u} \in H_1$ a least residual norm solution (LRN solution) of (5) if

$$\|T\hat{u} - v\|_{H_2} = \inf_{u \in H_1} \|Tu - v\|_{H_2}.$$

Definition 2.2 For $v \in G = \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^\perp$, we denote the set of all LRN solutions of (5) by

$$S_v = \left\{ \hat{u} \in H_1 : \|T\hat{u} - v\|_{H_2} = \inf_{u \in H_1} \|Tu - v\|_{H_2} \right\}.$$

Definition 2.3 Let $v \in G = \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^\perp$. Then $u^\dagger \in S_v$ is called a best approximate solution (generalized solution) of (5) if $\|u^\dagger\|_{H_1} = \inf_{\hat{u} \in S_v} \|\hat{u}\|_{H_1}$.

Theorem 2.1 *Let $v \in G = \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^\perp$. Then there exist a unique $x^\dagger \in S_v$, such that*

$$\|u^\dagger\|_{H_1} = \inf_{\hat{u} \in S_v} \|\hat{u}\|_{H_1},$$

and

$$u^\dagger \in \mathcal{N}(A)^\perp, \quad u^\dagger = P\hat{u}_0,$$

where $P : H_1 \rightarrow \mathcal{N}(A)^\perp$ is the orthogonal projection onto $\mathcal{N}(A)^\perp$ and \hat{u}_0 is any element in S_v .

Definition 2.4 The Moore-Penrose (generalized) inverse $T^\dagger : D(T^\dagger) \rightarrow H_1$ of T defined on the dense domain $D(T^\dagger) = \mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(T)^\perp$ maps $v \in D(T^\dagger)$ to the best-approximate solution of (5), that is, $T^\dagger v = u^\dagger$.

Remark 2.1

- $T^\dagger = T^{-1}$ if $\mathcal{R}(T)^\perp = \{0\}$ and $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.
- T^\dagger is continuous if and only if $\mathcal{R}(T)$ is a closed subspace of H_2 .

Theorem 2.2 ([18], Thm. 2.7, p.31) *Let E, F be two Banach spaces, and $(T_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$. Then, $T_n \rightarrow T \in \mathcal{L}(E, F)$ pointwise (i.e., $T_n x \rightarrow Tx$ for all $x \in E$) if and only if the sequence (T_n) is uniformly bounded, and $T_n x \rightarrow Tx$ for all $x \in \mathcal{D}$, where $\mathcal{D} \subset E$ is a dense subspace of E .*

We denote by $(\lambda_i, e_i)_{i=0}^\infty$ the normalized eigensystem of the compact self-adjoint operator $A = K^*K$. Then A can be diagonalized according to the following formula:

$$h = \sum_{i=1}^\infty \langle h, e_i \rangle e_i, \quad Ah = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \langle h, e_i \rangle e_i. \tag{6}$$

The classical Legendre polynomials $(L_j)_{j \in \mathbb{N}}$ are defined on the interval $[-1, 1]$ and can be determined with the aid of the following recurrence formulae:

$$\begin{cases} L_0(x) = 1, & L_1(x) = x, \\ L_{j+1}(x) = \left(\frac{2j+1}{j+1}\right)xL_j(x) - \left(\frac{j}{j+1}\right)L_{j-1}(x), & j = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{7}$$

In order to use these polynomials on the interval $[a, b]$, we define the so-called normalized shifted Legendre polynomials of degree n as follows: Let $x \in [a, b]$; then the transformation $y = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$ transforms the interval $[a, b]$ onto $[-1, 1]$ and the normalized shifted Legendre polynomials are given by

$$\hat{L}_j(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sqrt{\frac{2j+1}{2}} L_j\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}\right), \quad x \in [a, b], j \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

The set $(\hat{L}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ is a complete orthonormal system in $H = L^2((a, b); \mathbb{R})$, namely

$$\langle \hat{L}_j, \hat{L}_i \rangle = \int_a^b \hat{L}_j(x) \hat{L}_i(x) dx = \delta_{ji}, \tag{9}$$

where δ_{ji} is the Kronecker symbol.

Thus, for any function $h \in H = L^2((a, b); \mathbb{R})$, we have the Fourier-Legendre expansion

$$h = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(h) \hat{L}_j, \tag{10}$$

where the Fourier-Legendre coefficients $c_j(h)$ are given by

$$c_j(h) = \langle h, \hat{L}_j \rangle = \int_a^b \hat{L}_j(x) h(x) dx, \quad j \in \mathbb{N}.$$

3 Projected Tikhonov regularization method

Let $H_n = \text{span}\{\hat{L}_j, j = 0, 1, \dots, n\}$ be the sequence of Legendre polynomial subspaces of degree $\leq n$, and let $\Pi_n : H \rightarrow H_n$ be the orthogonal projection defined as

$$\Pi_n h = \sum_{j=0}^n c_j(h) \hat{L}_j, \quad h \in H. \tag{11}$$

We quote some crucial properties of Π_n ([38], pp.283-287 and [39]).

Lemma 3.1 *Let Π_n be the orthogonal projection defined in (11). Then we have*

$$\forall u \in H, \quad \|(I - \Pi_n)u\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \tag{12}$$

$$\forall u \in C^r([a, b]; \mathbb{R}), \quad \|(I - \Pi_n)u\|_{L^2(a,b)} \leq cn^{-r} \|u^{(r)}\|_{L^2(a,b)}, \tag{13}$$

$$\forall u \in C^r([a, b]; \mathbb{R}), \quad \|(I - \Pi_n)u\|_{\infty} \leq cn^{\frac{3}{4}-r} \|u^{(r)}\|_{L^2(a,b)}, \tag{14}$$

where c is a positive constant independent of n , and r is a positive integer.

Remark 3.1 Let $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ and $r \in \mathbb{N}$.

1. If $k(\cdot, \cdot) \in C^r([a, b] \times [a, b]; \mathbb{R})$, then $\mathcal{R}(K) \subset C^r([a, b] \times [a, b]; \mathbb{R})$. Further, denoting $D_{ij}k(t, s) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial s^j} k(t, s)$, we have

$$\begin{aligned} \|D_{ij}k\|_{r,\infty} &= \sup_{0 \leq i+j \leq r} \|D_{ij}k\|_{\infty} \\ &= \sup_{0 \leq i+j \leq r} \left\{ \sup_{(t,s) \in [a,b] \times [a,b]} |D_{ij}k(t,s)| \right\} \\ &= \sup_{0 \leq i+j \leq r} M_{ij} = M_r < \infty. \end{aligned} \tag{15}$$

2. If $f \in L^2((a, b); \mathbb{R})$ and $k(\cdot, \cdot) \in C^r([a, b] \times [a, b]; \mathbb{R})$, then we have the following estimates

$$\begin{aligned} |D_i(Kf)(t)| &= \left| \frac{d^i}{dt^i} (Kf)(t) \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial^i}{\partial t^i} k(t,s) f(s) ds \right| \\ &\leq M_{i,0} \int_a^b |f(s)| ds \leq M_{i,0} \sqrt{(b-a)} \|f\|_{L^2(a,b)}, \end{aligned} \tag{16}$$

which leads to

$$\|D_i(Kf)\|_{L^2((a,b))} \leq M_{i,0}(b-a)\|f\|_{L^2(a,b)}, \quad i = 0, 1, \dots, r, \tag{17}$$

$$\|D_i(Kf)\|_{\infty} \leq M_{i,0}\sqrt{(b-a)}\|f\|_{L^2(a,b)}, \quad i = 0, 1, \dots, r. \tag{18}$$

In practice, ill-posed problems like integral equations of the first kind have to be approximated by a finite-dimensional problem whose solution can be easily calculated by using some numerical computation software.

In this paper, we replace the original problem $Kf = g$ by an algebraic system $K_n f^n = g_n$ posed on \mathbb{R}^{n+1} , where the Moore-Penrose generalized inverse K_n^\dagger is defined for every data $g_n \in \mathbb{R}^{n+1}$.

We define the linear operator $\mathbb{Q}_n : H = L^2(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\forall f = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f)\hat{L}_j \in H, \quad \mathbb{Q}_n f = (c_0(f), c_1(f), \dots, c_n(f))^T. \tag{19}$$

Now, the original equation (2) is replaced by an operator equation in \mathbb{R}^{n+1} , which can be written abstractly as

$$K_n : H \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad K_n f = (\mathbb{Q}_n K)f = \mathbb{Q}_n g = g_n. \tag{20}$$

Theorem 3.1 *Let $K_n : H = L^2((a, b); \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ be given by formula (20). Then, K_n is a bounded operator, and the adjoint $K_n^* : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow H = L^2((a, b); \mathbb{R})$ of K_n is given by*

$$\begin{cases} \forall f \in H, \forall X = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}, & \langle K_n f, X \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle f, K_n^* X \rangle_H, \\ (K_n^* X)(t) = \sum_{j=0}^n x_j (K^* \hat{L}_j)(t), \end{cases} \tag{21}$$

where K^* is the adjoint of K :

$$(K^* u)(t) = \int_a^b k^*(t, s)u(s) ds = \int_a^b k(s, t)u(s) ds.$$

Proof (1) For every $f \in H$, we have

$$\begin{aligned} \|K_n f\|_{\mathbb{R}^{n+1}}^2 &= \sum_{j=0}^n |c_j(Kf)|^2 \\ &= \sum_{j=0}^n |\langle Kf, \hat{L}_j \rangle_H|^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\langle Kf, \hat{L}_j \rangle_H|^2 = \|Kf\|_H^2 \\ &\leq \kappa^2 \|f\|_2^2, \end{aligned} \tag{22}$$

which implies that $K_n \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^{n+1})$ and $\|K_n\| \leq \kappa = (\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 dt ds)^{\frac{1}{2}}$.

(2) By definition of $\mathbb{Q}_n : H = L^2(a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ it is easy to check that $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^{n+1})$. Thus, we can define its adjoint operator $\mathbb{Q}_n^* : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow H = L^2(a, b)$. Now, for

$$\mathbb{Q}_n f = \left(\langle f, \hat{L}_0 \rangle_{L^2(a,b)}, \dots, \langle f, \hat{L}_n \rangle_{L^2(a,b)} \right)^\perp \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad X = (x_0, \dots, x_n)^\perp \in \mathbb{R}^{n+1},$$

from the identity

$$\langle \mathbb{Q}_n f, X \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \sum_{j=0}^n x_j \langle f, \hat{L}_j \rangle_{L^2(a,b)} = \left\langle f, \sum_{j=0}^n x_j \hat{L}_j \right\rangle_{L^2(a,b)} = \langle f, \mathbb{Q}_n^* X \rangle_{L^2(a,b)}$$

it follows that

$$\mathbb{Q}_n^* X = \sum_{j=0}^n x_j \hat{L}_j, \tag{23}$$

$$K_n^* X = (\mathbb{Q}_n K)^* X = K^* \mathbb{Q}_n^* X = \sum_{j=0}^n x_j K^* \hat{L}_j, \tag{24}$$

and

$$(K_n^* K_n) f = \sum_{j=0}^n \langle K f, \hat{L}_j \rangle_{L^2(a,b)} K^* \hat{L}_j. \tag{25}$$

□

Remark 3.2 The expression $(K_n^* X)(t) = \sum_{j=1}^n x_j (K^* \hat{L}_j)(t)$ allows us to conclude that

$$\mathcal{R}(K_n^*) = \text{span}\{K^* \hat{L}_j, j = 0, 1, \dots, n\}, \quad \dim(\mathcal{R}(K_n^*)) \leq n + 1. \tag{26}$$

Since K_n^* is of finite rank, H can be written as

$$H = L^2(a, b) = \overline{\mathcal{R}(K_n^*)} \oplus \mathcal{N}(K_n) = \mathcal{R}(K_n^*) \oplus \mathcal{N}(K_n). \tag{27}$$

Here and in what follows, we denote $A = K^* K$ and $A_n = K_n^* K_n$. Note that K^* and $K^* K$ are defined by

$$(K^* u)(t) = \int_a^b k^*(t, s) u(s) ds, \quad k^*(t, s) = \overline{k(s, t)} = k(s, t),$$

$$(K^* K u)(t) = \int_a^b \theta(t, s) u(s) ds, \quad \theta(t, s) = \int_a^b k(\tau, t) k(\tau, s) d\tau.$$

Now, we are in the position to prove our main results. In the following theorem, we show the convergence of A_n to A and also other regularizing properties of A_n .

Theorem 3.2 *Let $A = K^* K$ and $A_n = K_n^* K_n$ be given by expression (25). Then, under the assumption*

$$k(\cdot, \cdot) \in L^2((a, b) \times (a, b); \mathbb{R}), \tag{A2}$$

we have

$$\forall h \in H, \quad \|Ah - A_n h\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{28}$$

Moreover, if

$$k(\cdot, \cdot) \in C^r([a, b] \times [a, b]; \mathbb{R}), \quad r \geq 1, \tag{H3}$$

then we have

$$\|A - A_n\| \leq \varepsilon(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{29}$$

Proof We compute

$$\begin{aligned} \|(K^*K - K_n^*K_n)h\|_{L^2(a,b)} &= \left\| K^*Kh - \sum_{j=0}^n c_j(Kh)(K^*\hat{L}_j) \right\|_{L^2(a,b)} \\ &= \left\| K^* \left(Kh - \sum_{j=0}^n c_j(Kh)\hat{L}_j \right) \right\|_{L^2(a,b)} \\ &= \|K^*(Kh - \Pi_n Kh)\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \|K^*\| \| (Kh - \Pi_n Kh) \|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{30}$$

By Lemma 3.1((17)) we can write

$$\begin{aligned} \|(K^*K - K_n^*K_n)h\|_{L^2(a,b)} &= \left\| K^*Kh - \sum_{j=0}^n c_j(Kh)(K^*\hat{L}_j) \right\|_{L^2(a,b)} \\ &= \left\| K^* \left(Kh - \sum_{j=0}^n c_j(Kh)\hat{L}_j \right) \right\|_{L^2(a,b)} \\ &= \|K^*(Kh - \Pi_n Kh)\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \|K^*\| \| (Kh - \Pi_n Kh) \|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \|K\| (cn^{-r}) \| (Kh)^{(r)} \| \\ &\leq \|K\| (cn^{-r})(b-a)M_{r,0} \|h\|_{L^2(a,b)} = \varepsilon(n) \|h\|_{L^2(a,b)}, \end{aligned} \tag{31}$$

which implies that

$$\|A - A_n\| \leq \|K\| (cn^{-r})(b-a)M_{r,0} = \varepsilon(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{32}$$

□

Lemma 3.2 Let $\alpha > 0$, $\mathbb{R}_n(\alpha) = (\alpha I + A_n)^{-1}A_n$, and $\mathbb{R}(\alpha) = (\alpha I + A)^{-1}A$. Then

$$\forall h \in H = L^2(a, b), \quad \|\mathbb{R}_n(\alpha)h - \mathbb{R}(\alpha)h\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{33}$$

Proof Before starting the proof, we recall the following useful result.

Remark 3.3 If K is a bounded injective operator, then

$$\mathcal{N}(K) = \mathcal{N}(K^*K) = \{0\} \quad \text{and} \quad \overline{\mathcal{R}(K^*K)} = \mathcal{N}(K^*K)^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

In view of Theorem 2.2 and Remark 3.3, to show the convergence result (33), it suffices to establish the result for $h \in \mathcal{R}(K^*K)$. Before starting the demonstration, we introduce the following propositions.

Proposition 3.1 For all $h \in H$, we have

$$\|(\alpha I + A)^{-1}Ah - h\|_H \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0. \tag{34}$$

Proof If $h = \sum_{i=1}^\infty h_i e_i = \sum_{i=1}^\infty \langle h, e_i \rangle e_i$, then

$$\|(\alpha I + A)^{-1}Ah - h\|_H^2 = \sum_{i=1}^\infty \left(\frac{\alpha \lambda_i}{\alpha + \lambda_i} \right)^2 |h_i|^2.$$

For $\varepsilon > 0$, we choose $N \in \mathbb{N}$ such that $\sum_{i=N+1}^\infty |h_i|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Thus,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda_i} \right)^2 |h_i|^2 &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda_i} \right)^2 |h_i|^2 + \sum_{i=N+1}^\infty \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda_i} \right)^2 |h_i|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda_i} \right)^2 |h_i|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha}{\lambda_i} \right)^2 |h_i|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \alpha^2 \frac{1}{\lambda_N^2} \|h\|_H^2. \end{aligned}$$

If we choose the parameter α such that $\alpha^2 \frac{1}{\lambda_N^2} \|h\|_H^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$, then we obtain the desired convergence. □

Proposition 3.2 We have

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|(\alpha I + A_n)^{-1}A_n\| = \sup_{\lambda \in [0, \|A_n\|]} \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \leq 1, \tag{35}$$

that is, the sequence $(\mathbb{R}_n(\alpha))$ is uniformly bounded with respect to n .

We return now to the proof of Lemma (3.2). We have

$$\begin{aligned} \|\mathbb{R}_n(\alpha)h - \mathbb{R}(\alpha)h\|_{L^2(a,b)} &= \|(\alpha I + A_n)^{-1}[(\alpha I + A_n)A - A_n(\alpha I + A)](\alpha I + A)^{-1}h\|_{L^2(a,b)} \\ &= \|\alpha(\alpha I + A_n)^{-1}(A - A_n)(\alpha I + A)^{-1}h\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \alpha \|(\alpha I + A_n)^{-1}\| \| (A - A_n)(\alpha I + A)^{-1}h \|_{L^2(a,b)}. \end{aligned}$$

Using the fact that $\alpha\|(\alpha I + A_n)^{-1}\| \leq 1$, we derive

$$\|\mathbb{R}_n(\alpha)h - \mathbb{R}(\alpha)h\|_{L^2(a,b)} \leq \|(A - A_n)(\alpha I + A)^{-1}h\|_{L^2(a,b)}, \tag{36}$$

and from (30) and (34) we deduce that this last inequality tends to 0 for all $h \in \mathcal{R}(A)$. \square

4 Convergence and error analysis

We denote by $R(\alpha) = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^* \in \mathcal{L}(H)$ (resp. $(\alpha I + K_n^*K_n)^{-1}K_n^*$) the regularizing operator of K (resp. of K_n).

To establish the convergence results of this method, we point out the following results:

$$\|(\alpha I + K_n^*K_n)^{-1}K_n^*\| = \|(\alpha I + K^*K)^{-1}K^*\| = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}; \tag{37}$$

if $f \in H$, then

$$\|f - f_\alpha\|_{L^2(a,b)} \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0; \tag{38}$$

also, if $f = Au \in R(A)$, then

$$\|f - f_\alpha\|_{L^2(a,b)} \leq \alpha\|u\|_{L^2(a,b)}. \tag{39}$$

Let us assume that g_δ are observation data of g such that

$$\|g - g_\delta\|_{L^2(a,b)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|c_j(g - g_\delta)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta \tag{40}$$

with a given noise level $\delta > 0$. Then we have

$$\|g_n - g_n^\delta\|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq \|g - g^\delta\|_{L(a,b)} \leq \delta. \tag{41}$$

Let us consider the following equations:

$$K_n f^n = g_n, \tag{42}$$

$$K_n f^{\delta,n} = g_n^\delta, \tag{43}$$

$$(\alpha I + K^*K)f = K^*g, \tag{44}$$

$$(\alpha I + K^*K)f = K^*g^\delta. \tag{45}$$

Because our original problem ($Kf = g$) is ill-posed, the problem of finding the generalized solution $f^{\dagger,\delta,n} = K_n^\dagger g_n^\delta \in \mathcal{N}(K_n)^T$ of problem (42) with inexact data g_n^δ is instable. Regularizing this equation by the Tikhonov regularization method, we obtain

$$(\alpha I + K_n^*K_n)f = K_n^*g_n, \tag{46}$$

$$(\alpha I + K_n^*K_n)f = K_n^*g_n^\delta. \tag{47}$$

Denote by $f = K^{-1}g$ the exact solution of (2), by f_α (resp. f_α^δ) the regularized solution of (44) (resp. of (45)), and by f_α^n (resp. $f_\alpha^{n,\delta}$) the regularized solution of (46) (resp. of (47)).

Definition 4.1 We denote by f_α (resp. f_α^δ) the regularized solution of problem (2) for the exact data g (resp. for the inexact data g_δ):

$$f_\alpha = R(\alpha)g = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^*g, \tag{48}$$

$$f_\alpha^\delta = R(\alpha)g_\delta = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^*g_\delta. \tag{49}$$

Definition 4.2 For any $\alpha > 0$, the unique solution $f_\alpha^{\delta,n}$ of (47) is considered as a regularized solution of $f^{\dagger,n,\delta}$.

Remark 4.1 Without loss of generality, we can assume that $\dim(\mathcal{R}(K_n^*)) = n + 1$. For example, under condition (H4), the vectors $K^*\hat{L}_j, j = 0, 1, \dots, n$, are linearly independent, and consequently $\dim(\mathcal{R}(K_n^*)) = n + 1$.

Since $f_\alpha^{\delta,n} \in \mathcal{R}(K_n^*K_n) = \mathcal{R}(K_n^*) = \text{span}\{K^*\hat{L}_j, j = 0, 1, \dots, n\}$ (see (26)), $f_\alpha^{\delta,n}$ can be expanded as

$$f_\alpha^{\delta,n} = \sum_{j=0}^n a_j K^* \hat{L}_j. \tag{50}$$

Then, equation (47) takes the form

$$\sum_{j=0}^n \left(\alpha I + a_j \sum_{i=0}^n \langle KK^* \hat{L}_i, \hat{L}_j \rangle_{L^2(a,b)} \right) K^* \hat{L}_j = \sum_{j=0}^n \langle g^\delta, \hat{L}_j \rangle_{L^2(a,b)} K^* \hat{L}_j. \tag{51}$$

For notational convenience and simplicity, we denote

$$\vec{a} = (a_0, \dots, a_n)^\perp \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{52}$$

$$\vec{g}_n^\delta = \left(\int_a^b g^\delta(t) \hat{L}_0(t) dt, \dots, \int_a^b g^\delta(t) \hat{L}_n(t) dt \right)^\perp \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{53}$$

$$b_{ij} = \langle KK^* \hat{L}_i, \hat{L}_j \rangle_{L^2(a,b)} = \int_a^b \int_a^b \int_a^b k(s,t)k(t,\tau) \hat{L}_i(s) \hat{L}_i(t) ds dt d\tau, \quad i, j = 0, \dots, n, \tag{54}$$

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{A}_n(\alpha) = \alpha I_{n+1} + \mathbf{B}. \tag{55}$$

Now, to determine the unknown coefficients $(a_j)_{j=0}^n$, we must solve the linear algebraic system

$$\mathbf{A}_n(\alpha) \vec{a} = \vec{g}_n^\delta. \tag{56}$$

Proposition 4.1 The linear system (56) has a unique solution $\vec{a}_\alpha^{n,\delta}$ for every $\vec{g}_n^\delta \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Proof Let

$$S(f, g) = \langle K^*Kf, g \rangle_{L^2(a,b)}, \quad f, g \in L^2(a, b).$$

We have

$$S(f, g) = \langle K^*Kf, g \rangle_{L^2(a,b)} = \langle f, K^*Kg \rangle_{L^2(a,b)} = \langle K^*Kg, f \rangle_{L^2(a,b)} = S(g, f)$$

and

$$S(f, g) = \langle K^*f, K^*g \rangle_{L^2(a,b)} \geq 0,$$

that is, $S(\cdot, \cdot)$ is a positive symmetric bilinear form. Hence, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{0 \leq i, j \leq n} = (S(\hat{L}_i, \hat{L}_j))_{0 \leq i, j \leq n}$ is a positive symmetric matrix, and for any $\alpha > 0$, the matrix $\mathbf{A}_n(\alpha)$ of system (56) is invertible. Therefore, this system is uniquely solvable. \square

The aim of this part is to derive the convergence and error bound for $\|f - f_\alpha^{n,\delta}\|_{L^2(a,b)}$. To do this, we split the error into three parts:

$$(f_\alpha^{n,\delta} - f) = (f_\alpha^{n,\delta} - f_\alpha^n) + (f_\alpha^\delta - f) + (f_\alpha^n - f_\alpha^\delta).$$

Using (37), (41), and the triangle inequality, we can write

$$\Delta_1 = \|f_\alpha^{n,\delta} - f_\alpha^n\|_{L(a,b)} = \|(\alpha I + K_n^* K_n)^{-1} K_n^* (g_n^\delta - g_n)\|_{L(a,b)} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}, \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \|f_\alpha^\delta - f\|_{L(a,b)} \leq \|f_\alpha^\delta - f_\alpha\|_{L(a,b)} + \|f_\alpha - f\|_{L(a,b)} \\ &\leq \|(\alpha I + K^* K)^{-1} K^* (g^\delta - g)\|_{L(a,b)} + \|f_\alpha - f\|_{L(a,b)} \\ &\leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \|f - f_\alpha\|_{L(a,b)}, \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \|f_\alpha^n - f_\alpha^\delta\|_{L(a,b)} \leq \|f_\alpha^n - f_\alpha\|_{L(a,b)} + \|f_\alpha - f_\alpha^\delta\|_{L(a,b)} \\ &\leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \|f_\alpha^n - f_\alpha\|_{L(a,b)}. \end{aligned} \tag{59}$$

Now, by (36) the quantity $\|f_\alpha^n - f_\alpha\|_{L(a,b)}$ can be estimated as follows:

$$\begin{aligned} \|f_\alpha^n - f_\alpha\|_{L(a,b)} &= \|(\alpha I + K_n^* K_n)^{-1} K_n^* g_n - (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* g\|_{L(a,b)} \\ &= \|(\alpha I + K_n^* K_n)^{-1} K_n^* K_n f - (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* K f\|_{L(a,b)} \\ &= \|\mathbb{R}_n(\alpha)h - \mathbb{R}(\alpha)f\|_{L^2(a,b)} \\ &\leq \|(A - A_n)(\alpha + A)^{-1}f\|_{L^2(a,b)}. \end{aligned} \tag{60}$$

Combining (57), (58), (59), and (60), we derive

$$\|f_\alpha^{n,\delta} - f\|_{L(a,b)} \leq \frac{3\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \|(A - A_n)(\alpha + A)^{-1}f\|_{L^2(a,b)} + \|f - f_\alpha\|_{L(a,b)}. \tag{61}$$

Consequently, we have the following theorem.

Theorem 4.1 *Let us assume that $f = Au \in \mathcal{R}(A)$. Then, under assumptions (H1), (H2), and (H3), we have the estimate*

$$\|f_\alpha^{n,\delta} - f\|_{L(a,b)} \leq \frac{3\delta}{2\sqrt{\alpha}} + (\varepsilon(n) + \alpha) \|u\|_{L^2(a,b)}, \tag{62}$$

where $\varepsilon(n) = \frac{c}{n^r} \|K\| \|(b - a)M_{r,0}$.

4.1 An a posteriori parameter choice strategy

In this section, we consider the determination of $\alpha(\delta)$ from the discrepancy principle of Morozov. The discrepancy principle (DP) suggests computing $\alpha(\delta) > 0$ such that

$$\|Kf_\alpha^{n,\delta} - g^\delta\|_{L^2(a,b)} = \delta. \tag{63}$$

In this work, we consider a more general class of the damped Morozov principle given by

$$\|Kf_\alpha^{n,\delta} - g^\delta\|_{L^2(a,b)} + \alpha^\eta \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{L^2(a,b)}^2 = \delta^2, \tag{64}$$

where $\eta \in [1, \infty]$. Obviously, the classical Morozov principle (63) is a particular case of the damped case with $\eta = \infty$.

In [40, 41], the authors propose a cubically convergent algorithm for choosing a reasonable regularization parameter. This algorithm is summarized as follows.

Algorithm of the cubic Morozov discrepancy principle (CMDP)

- Step 1. Input $\alpha_0 > 0$, $\delta > 0$, ϵ (tolerance) > 0 , l_{\max} , set $l := 0$.
- Step 2. Compute $f_{\alpha_l}^{n,\delta}$, $\frac{d}{d\alpha} f_{\alpha_l}^{n,\delta}$, and $\frac{d^2}{d\alpha^2} f_{\alpha_l}^{n,\delta}$.
- Step 3. Compute $\Phi(\alpha_l)$, $\Phi'(\alpha_l)$, and $\Phi''(\alpha_l)$ from formula (65).
- Step 4. Solve for α_{l+1} from iterative formulas (65), (70), and (71).
- Step 5. If $|\alpha_{l+1} - \alpha_l| \leq \epsilon$ or $l = l_{\max}$, STOP; otherwise, set $l = l + 1$, GOTO step 2.

$$\Phi(\alpha) = \|Kf_\alpha^{n,\delta} - g^\delta\|_{L^2(a,b)} + \alpha^\eta \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{L^2(a,b)}^2 - \delta^2 \tag{65}$$

and

$$\alpha_{l+1} = \alpha_l - \frac{2\Phi(\alpha_l)}{\Phi'(\alpha_l) + (\Phi'(\alpha_l)^2 - 2\Phi(\alpha_l)\Phi''(\alpha_l))^{\frac{1}{2}}}. \tag{66}$$

Now, we present an alternate way to calculate $\Phi'(\alpha)$ and $\Phi''(\alpha)$ in algorithm (CMDP). Let $G(\alpha)$ denote the function

$$G(\alpha) = \|Kf_\alpha^{n,\delta} - g^\delta\|_{L^2(a,b)} + \alpha \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{L^2(a,b)}^2 = \psi(\alpha) + \alpha\phi(\alpha), \tag{67}$$

where

$$\psi(\alpha) = \|Kf_\alpha^{n,\delta} - g^\delta\|_{L^2(a,b)}, \quad \phi(\alpha) = \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{L^2(a,b)}^2.$$

The first derivative of $G(\alpha)$ (see [42]) is given by

$$G'(\alpha) = \phi(\alpha). \tag{68}$$

Using (67) and (68), we get

$$G'(\alpha) = \phi(\alpha) = \psi'(\alpha) + \phi(\alpha) + \alpha\phi'(\alpha),$$

which implies that

$$\psi'(\alpha) = -\alpha\phi'(\alpha) \tag{69}$$

and

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} (\psi(\alpha) + \alpha^\eta \phi(\alpha) - \delta^2) \\ &= \psi'(\alpha) + \eta\alpha^{\eta-1}\phi(\alpha) + \alpha^\eta\phi'(\alpha) \\ &= -\alpha\phi'(\alpha) + \eta\alpha^{\eta-1}\phi(\alpha) + \alpha^\eta\phi'(\alpha). \end{aligned}$$

Thus, it follows that

$$\Phi'(\alpha) = (\alpha^\eta - \alpha)\phi'(\alpha) + \eta\alpha^{\eta-1}\phi(\alpha) \tag{70}$$

and

$$\Phi''(\alpha) = (\alpha^\eta - \alpha)\phi''(\alpha) + (2\eta\alpha^{\eta-1} - 1)\phi'(\alpha) + \eta(\eta - 1)\alpha^{\eta-2}\phi(\alpha), \tag{71}$$

where

$$\phi'(\alpha) = 2 \left\langle \frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta}, f_\alpha^{n,\delta} \right\rangle_{L^2(a,b)}$$

and

$$\phi''(\alpha) = 2 \left(\left\langle \frac{d^2}{d\alpha^2} f_\alpha^{n,\delta}, f_\alpha^{n,\delta} \right\rangle_{L^2(a,b)} + \left\| \frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{L^2(a,b)}^2 \right).$$

In our case, using (50), we can write

$$\frac{d^m}{d\alpha^m} f_\alpha^{n,\delta} = \sum_{j=0}^n \frac{d^m}{d\alpha^m} a_j(\alpha) K^* \hat{L}_j = \left\langle \frac{d^m}{d\alpha^m} \overrightarrow{a(\alpha)}, \overrightarrow{Y} \right\rangle, \quad m \geq 1, \tag{72}$$

where

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{d\alpha^m} \overrightarrow{a(\alpha)} &= \left(\frac{d^m}{d\alpha^m} a_0(\alpha), \frac{d^m}{d\alpha^m} a_1(\alpha), \dots, \frac{d^m}{d\alpha^m} a_n(\alpha) \right)^\perp, \\ \overrightarrow{Y} &= (K^* \hat{L}_0, K^* \hat{L}_1, \dots, K^* \hat{L}_n)^\perp. \end{aligned} \tag{73}$$

It is easy to check that

$$\mathbf{A}_n(\alpha) \frac{d^m}{d\alpha^m} \overrightarrow{a(\alpha)} = -m \frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}} \overrightarrow{a(\alpha)}, \quad m \geq 1, \tag{74}$$

where the matrix $\mathbf{A}_n(\alpha)$ is given by (55).

Remark 4.2 We note that formula (74) provides us a practical method to calculate expression (72).

5 Numerical tests

The purpose of this final section is to illustrate this theoretical study with two numerical examples. The numerical experiments are completed with MATLAB.

Example 1

$$\int_0^1 \exp(s^2 t) f(t) dt = g(s) = (\exp(s^2 + 1) - 1) / (s^2 + 1)$$

with the exact solution

$$f(t) = \exp(t).$$

Example 2

$$\int_0^{\pi/2} \cos(s^2 + 3t + 1) f(t) dt = g(s) = (1/6) \cos(s^2 + 2) - \pi/4 \sin(s^2)$$

with the exact solution

$$f(t) = \sin(3t + 1).$$

Let $\{t_i = a + \frac{(i-1)(b-a)}{N}, i = 1, 2, \dots, N + 1\} \subset [a, b]$ the collocation points of the trapezoidal quadrature formula. The trapezoidal quadrature rule associated with these collocation points has the weights $\omega_1 = \omega_{N+1} = \frac{b-a}{2N}, \omega_i = \frac{b-a}{N}, i = 2, 3, \dots, N$.

We denote by

$$\mathbf{g} = (g(t_1), \dots, g(t_{N+1}))^\top$$

the discrete datum of g . Adding a random distributed perturbation (obtained by the Matlab command `randn`) to each data function, we obtain the vector \mathbf{g}^δ :

$$\mathbf{g}^\delta = \mathbf{g} + \varepsilon \text{randn}(\text{size}(\mathbf{g})),$$

where ε indicates the noise level of the measurement data, and the function “`randn(·)`” generates arrays of normally distributed random numbers with mean 0, variance $\sigma^2 = 1$, and standard deviation $\sigma = 1$. “`randn(size(g))`” returns an array of random entries of the same size as g . The bound on the measurement error δ can be measured in the sense of root mean square error (RMSE) according to

$$\delta = \|\mathbf{g}^\delta - \mathbf{g}\|_* = \left(\frac{1}{N + 1} \sum_{i=1}^{N+1} (g(t_i) - g^\delta(t_i))^2 \right)^{1/2}.$$

The discrete errors $\|e_n\|_\infty$ and $\|e_n\|_2$ are defined by

$$\|e_n\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N+1} |f(t_i) - f_\alpha^{n,\delta}(t_i)| \quad \text{and} \quad \|e_n\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{N+1} w_i (f(t_i) - f_\alpha^{n,\delta}(t_i))^2 \right]^{1/2}.$$

Using the trapezoid rule, we compute

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{g}_n^\delta)_j &= (g^\delta, \hat{L}_j) \approx \sum_{i=1}^{N+1} w_i \sum_{k=1}^{N+1} w_k k(s_k, t_i) \mathbf{g}^\delta(s_k) \hat{L}_j(t_i), \quad j = 0, 1, \dots, n, \\
 \mathbf{g}_n^\delta &= ((g_n^\delta)_0, (g_n^\delta)_1, \dots, (g_n^\delta)_n)^\perp,
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= \int_a^b \int_a^b \int_a^b k(s, t) k(t, \tau) \hat{L}_i(s) \hat{L}_j(t) ds dt d\tau \\
 &\approx \mathbf{b}_{ij} = \sum_{m=1}^{N+1} \omega_m \left(\sum_{r=1}^{N+1} w_r \left(\sum_{l=1}^{N+1} \omega_l k(s_l, t_r) k(t_r, \tau_m) \hat{L}_i(s_l) \hat{L}_j(t_r) \right) \right), \quad i, j = 0, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Under this notation, we obtain a discrete version of system (56) in the form

$$\mathbf{A}_n(\alpha) \mathbf{a} = \mathbf{g}_n^\delta,$$

and the approximate solution will be calculated by the formula

$$\mathbf{f}_\alpha^{n,\delta}(t_i) \approx \sum_{j=0}^n a_j(\alpha) \left(\sum_{r=1}^{N+1} \omega_r k(s_r, t_i) \hat{L}_j(s_r) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N + 1,$$

where

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij}), \quad \mathbf{A}_n(\alpha) = (\alpha \mathbf{I}_n + \mathbf{B}), \quad \mathbf{a} = (a_0(\alpha), a_1(\alpha), \dots, a_n(\alpha))^\perp.$$

Appendix: Tables: Example 1 and Example 2 (discrete data)

Figures 1-8 show the comparison between the exact solution and its computed approximation for different values of n ($n = 2, 3$).

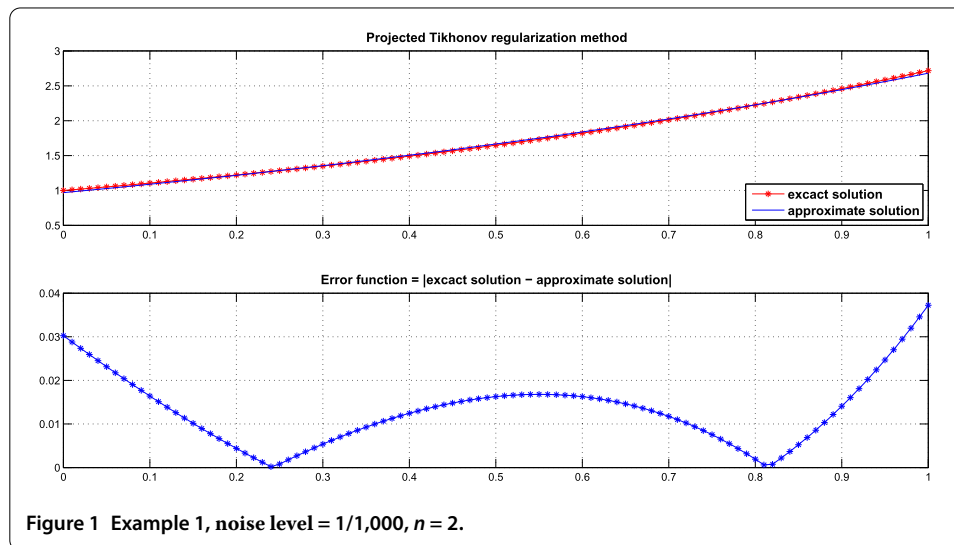
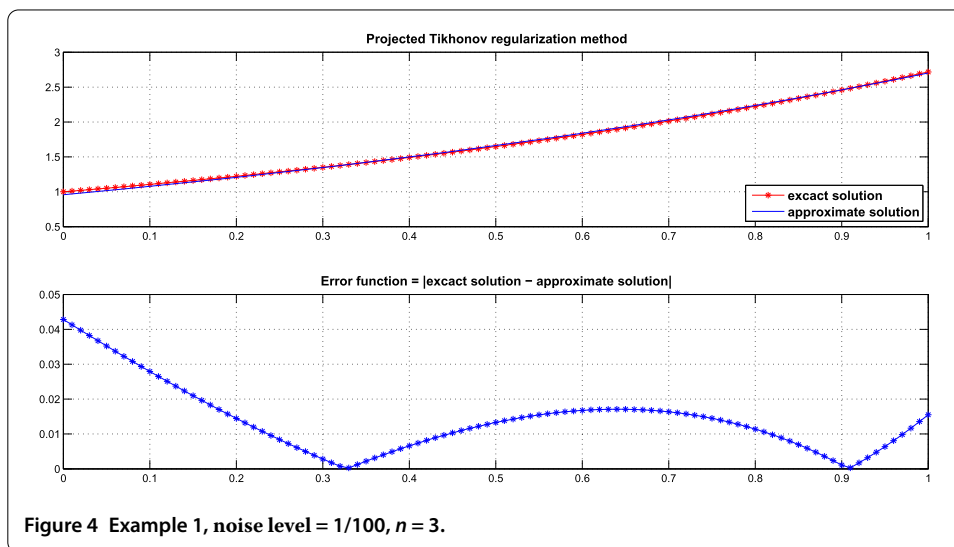
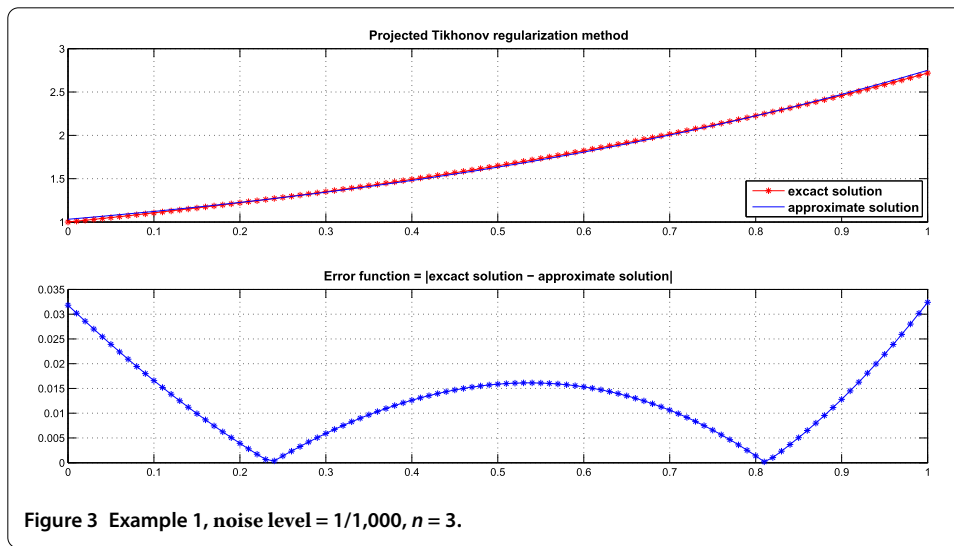
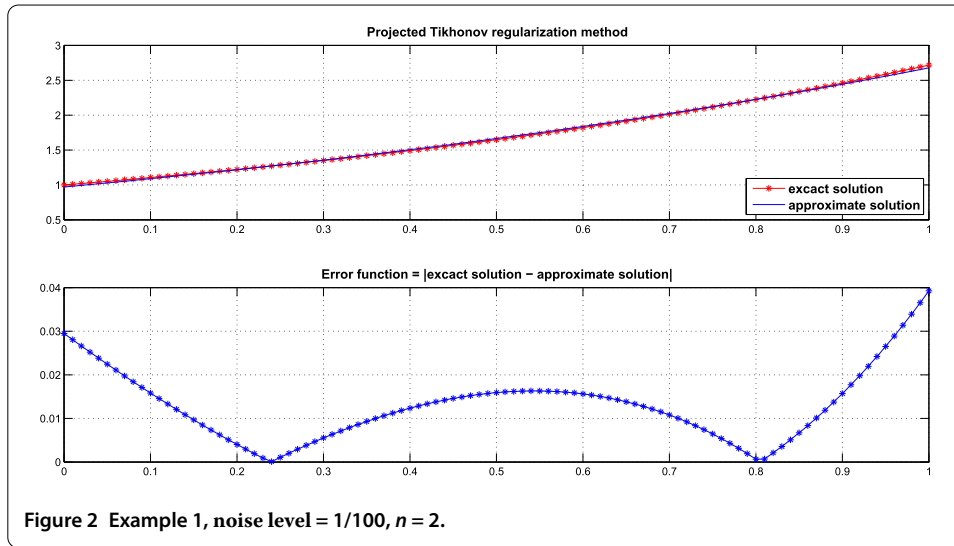
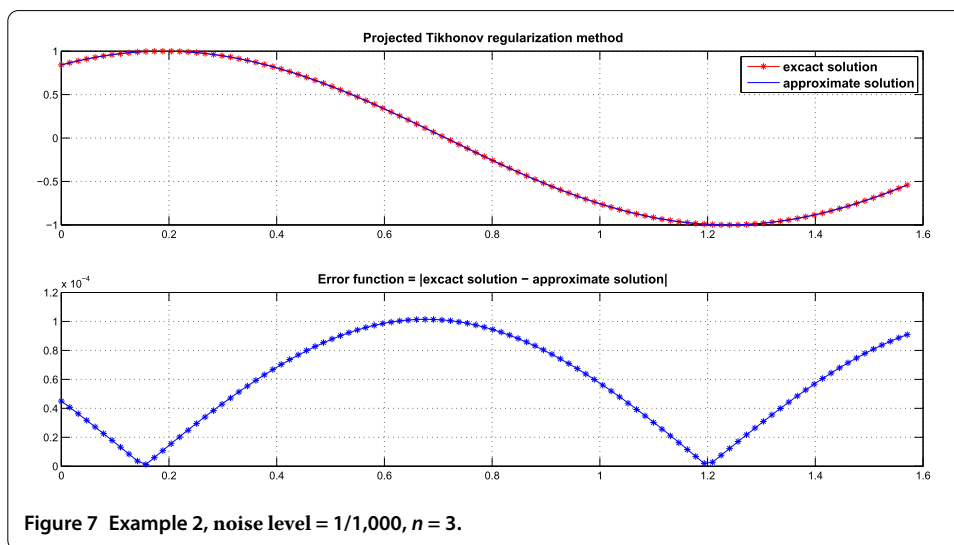
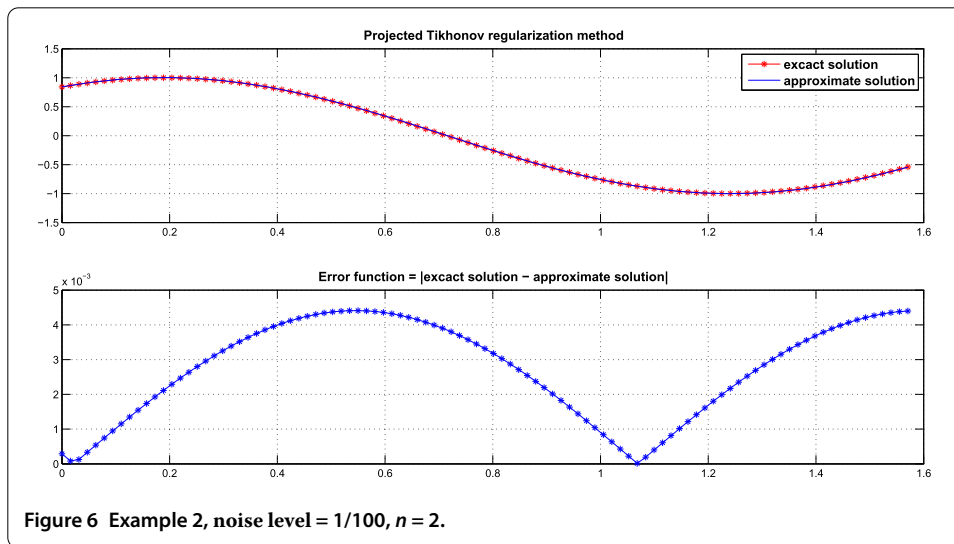
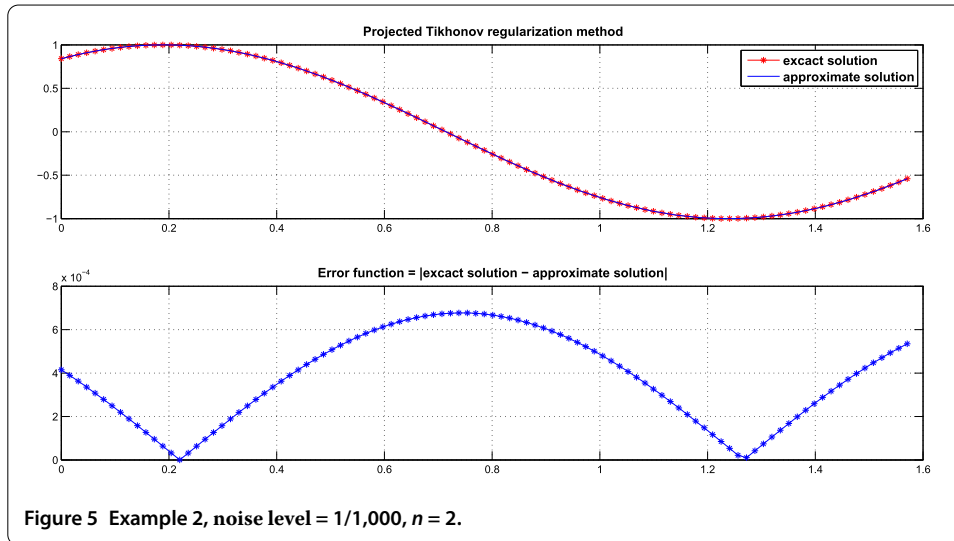


Figure 1 Example 1, noise level = 1/1,000, $n = 2$.





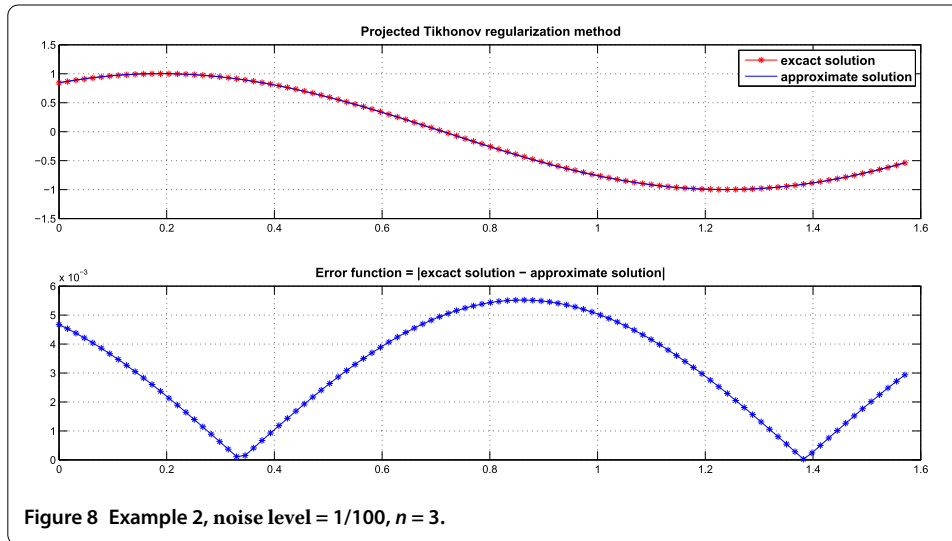


Table 1 Example 1, n = 2

ε	α	ℓ^2 -norm	ℓ^∞ -norm	re (relative error)
0.001	1.058451967635953e-010	0.015010783744725	0.035613080391689	8.343729340481704e-004
0.01	1.523132088372481e-006	0.015011143017205	0.035448296130840	8.343929041735275e-004

Table 2 Example 1, n = 3

ε	α	ℓ^2 -norm	ℓ^∞ -norm	re (relative error)
0.001	3.386965172845820e-009	0.0034717111713518	0.007531359104993	1.929747532066797e-004
0.01	4.363395697816134e-007	0.011051454981111	0.027181028421710	6.142940352019532e-004

Table 3 Example 2, n = 2

ε	α	ℓ^2 -norm	ℓ^∞ -norm	re (relative error)
0.001	4.848918710302366e-008	3.516777971379156e-004	3.637947670728225e-004	4.534822996062119e-005
0.01	6.575353855416842e-006	0.004454265966245	0.005633164279727	5.743697184950506e-004

Table 4 Example 2, n = 3

ε	α	ℓ^2 -norm	ℓ^∞ -norm	re (relative error)
0.001	5.187878275981052e-007	2.337236516213294e-004	2.682894481292331e-004	3.013825151095230e-005
0.01	1.901137499862827e-005	0.002424879642149	0.002729060667431	3.126839411925939e-004

Conclusion. From Tables 1-4 we see that the numerical results agree with the theoretical results.

The projected Tikhonov regularization method developed and used in this investigation to solve the Fredholm integral equations of the first kind is very simple and effective, owing to the fact that the dimension of the subspace of projection is very small ($n = 2, 3$); moreover, the regularized solution remains stable for a strong noise ($\varepsilon = 1/100$) and for regular data.

Competing interests

The authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions

All authors read and approved the final manuscript.

Acknowledgements

The authors thank the editor and the anonymous referees for their valuable comments and helpful suggestions that improved the quality of their article.

This work is supported by the MESRS of Algeria (CNEPRU Project B01120090003).

Received: 28 March 2016 Accepted: 28 July 2016 Published online: 11 August 2016

References

- Kirsch, A: An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Springer, Berlin (1996)
- Kress, R: Linear Integral Equations, 3rd edn. Springer, New York (2014)
- Lu, Y, Shen Xu, Y: Integral equation models for image restoration: high accuracy methods and fast algorithms. *Inverse Probl.* **26**, 045006 (2010)
- Adibi, H, Assari, P: Chebyshev wavelet method for numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind. *Math. Probl. Eng.* **2010**, Article ID 138408 (2010). doi:10.1155/2010/138408
- Babaaghaie, A, Mesgarani, H: Numerical solution of Fredholm integral equations of first kind by two-dimensional trigonometric wavelets in Hölder space $C^\alpha([a, b])$. *Comput. Math. Math. Phys.* **52**(4), 601-614 (2012)
- Chen, Z, Micchelli, CA, Xu, Y: Multiscale Methods for Fredholm Integral Equations. Cambridge University Press, Cambridge (2015)
- Luo, X, Li, F, Yang, S: A posteriori parameter choice strategy for fast multiscale methods solving ill-posed integral equations. *Adv. Comput. Math.* **36**, 299-314 (2012)
- Maleknejad, K, Sohrabi, S: Numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by using Legendre wavelets. *Appl. Math. Comput.* **186**, 836-843 (2007)
- Maleknejad, K, Nouri, K, Yousefi, M: Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equations. *Appl. Math. Comput.* **193**, 335-339 (2007)
- Maleknejad, K, Mollapourasl, R, Alizadeh, M: Convergence analysis for numerical solution of Fredholm integral equation by Sinc approximation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **16**, 2478-2485 (2011)
- Hong, D, Minggen, C: Representation of the exact solution and a stability analysis on the Fredholm integral equation of the first kind in reproducing kernel space. *Appl. Math. Comput.* **182**, 1608-1614 (2006)
- Hong, D, Minggen, C: Approximate solution of the Fredholm integral equation of the first kind in a reproducing kernel Hilbert space. *Appl. Math. Lett.* **21**, 617-623 (2008)
- Ahues, M, Largillier, A, Limaye, BV: Spectral Computations for Bounded Operators. Chapman & Hall-CRC, New York (2001)
- Ben Aouicha, H: Computation of the spectra of some integral operators and application to the numerical solution of some linear integral equations. *Appl. Math. Comput.* **218**, 3217-3229 (2011)
- Huang, C: Spectral collocation method for compact integral operators. PhD thesis, Wayne State University (2011)
- Panigrahi Nelakanti, G: Superconvergence of Legendre projection methods for the eigenvalue problem of a compact integral operator. *J. Comput. Appl. Math.* **235**, 2380-2391 (2011)
- Panigrahi, BL, Long, G, Nelakanti, G: Legendre multi-projection methods for solving eigenvalue problems for a compact integral operator. *J. Comput. Appl. Math.* **239**, 135-151 (2013)
- Thamban, NM: Quadrature based collocation methods for integral equations of the first kind. *Adv. Comput. Math.* **36**, 315-329 (2012)
- Thamban, NM, Pereverzev, S: Regularized collocation method for Fredholm integral equations of the first kind. *J. Complex.* **23**(4-6), 454-467 (2007)
- Abramovitz, A: A trigonometrical approach for some projection methods. *Acta Appl. Math.* **56**, 99-117 (1999)
- Groetsch, CW, Neubauer, A: Regularization of ill-posed problems: optimal parameter choice in finite dimensions. *J. Approx. Theory* **58**, 184-200 (1989)
- King, JT, Neubauer, A: A variant of finite-dimensional Tikhonov regularization with a-posteriori parameter choice. *Computing* **40**, 91-109 (1988)
- Kaltenbacher, B, Oftermatt, J: A convergence analysis of regularization by discretization in preimage space. *Math. Comput.* **81**(280), 2049-2069 (2012)
- Neubauer, A: Finite-dimensional approximation of constrained Tikhonov-regularized solutions of ill-posed linear operator equations. *Math. Comput.* **48**(178), 565-583 (1997)
- Pereverzev, SV, Prössdorf, S: On the characterization of self-regularization properties of a fully discrete projection method for Symm's integral equation. *J. Integral Equ. Appl.* **12**(2), 113-130 (2000)
- Rajan, MP: Convergence analysis of a regularized approximation for solving Fredholm integral equations of the first kind. *J. Math. Anal. Appl.* **279**, 522-530 (2003)
- Rajan, MP: A modified convergence analysis for solving Fredholm integral equations of the first kind. *Integral Equ. Oper. Theory* **49**, 511-516 (2004)
- Vainikko, G, Hämarik, U: Projection methods and selfregularization in ill-posed problems. *Soviet Math.* **29**, 1-20 (1985) (in Russian)
- Atkinson, KE: The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. Cambridge University Press, Cambridge (2009)
- Bakushinsky, A, Kokurin, MY, Smirnova, A: Iterative methods for ill-posed problems. In: *Inverse and Ill-Posed Problems Series*, vol. 54. de Gruyter, Berlin (2011)
- Chatelin, F: Spectral Approximation of Linear Operators. Academic Press, New York (1983)
- Engl, HW, Hanke, M, Neubauer, A: Regularization of Inverse Problems. Kluwer Academic, Dordrecht (1996)
- Groetsch, CW: Tikhonov Regularization for Integral Equations of the First Kind. Pitman, Boston (1984)
- Koshev, N, Beilina, N: An adaptive finite element method for Fredholm integral equations of the first kind and its verification on experimental data. *Cent. Eur. J. Math.* **11**(8), 1489-1509 (2013)
- Tikhonov, AN, Leonov, AS, Yagola, AG: Nonlinear Ill-Posed Problems. *Appl. Math. Math. Comput.*, vol. 14. Chapman & Hall, London (1998)
- Thamban, NM: Linear Operator Equations: Approximation and Regularization. World Scientific, Singapore (2009)

37. Kindermann, S: Projection methods for ill-posed problems revisited. arXiv:1507.03364v1 [math.NA]. Accessed 13 Jul 2015
38. Canuto, C, Hussaini, MY, Quarteroni, A, Zang, TA: Spectral Methods. Springer, Berlin (2006)
39. Das, P, Sahani, MM, Nelakanti, G: Convergence analysis of Legendre spectral projection methods for Hammerstein integral equations of mixed type. *J. Appl. Math. Comput.* **49**, 529-555 (2015)
40. Wang, YF, Xiao, TY: Fast realization algorithms for determining regularization parameters in linear inverse problems. *Inverse Probl.* **17**, 281-291 (2001)
41. Zou, Y, Wang, L, Zhang, R: Cubically convergent methods for selecting the regularization parameters in linear inverse problems. *J. Math. Anal. Appl.* **356**, 355-362 (2009)
42. Kunisch, K, Zou, J: Iterative choices of regularization parameters in linear inverse problems. *Inverse Probl.* **14**, 1247-1264 (1998)

Submit your manuscript to a SpringerOpen[®] journal and benefit from:

- ▶ Convenient online submission
- ▶ Rigorous peer review
- ▶ Immediate publication on acceptance
- ▶ Open access: articles freely available online
- ▶ High visibility within the field
- ▶ Retaining the copyright to your article

Submit your next manuscript at ▶ springeropen.com
