

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar
Annaba

Badji Mokhtar University -
Annaba



جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences
Option : Équations Différentielles, Fonctions Spéciales et Contrôle.

**Contribution à l'analyse des systèmes Dynamiques
distribués :
Application à l'optimisation de la thermique en Aciérie**

Par

KHENNICHE Ghania

Sous la direction de

SISSAOUI Hocine

Devant le jury

PRESIDENT	Khoudja Ibrahim	Prof	U.B.M. Annaba
RAPPORTEUR	Sissaoui Hocine	Prof	U.B.M. Annaba
CO-RAPPORTEUR	Bouhouche Salah	D.R	C.R.T.I. Cheraga Alger
EXAMINATEUR	Ghanem Radouane	Prof	U. B.M. Annaba
EXAMINATEUR	Benkheda Younes	Prof	U. S.D. Blida 1
EXAMINATEUR	Nouar Ahmed	M.C. A	U. 20 Aout 1955. Skikda
INVITE	Spiteri Pierre	Prof	IRIT-INP-ENSEEIH Toulouse

Année : 2016 – 2017

A l'âme de mon père

A ma mère

A mes sœurs Souad et Wafa

A mes frères Amar et Yacine

Je remercie très vivement mon directeur, Monsieur H. Sissaoui professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba qui a proposé et accepté de diriger ce travail ainsi par son expérience, son aide et sa confiance ont été précieuses dans les moments de doutes. Je le remercie également pour sa relecture de ce document. Son engagement personnel m'a permis de surmonter les démarches administratives, il m'a apporté toute facilité pour favoriser mon déplacement à Toulouse.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur S. Bouhouche, mon co-directeur Directeur de recherche à C.R.T.I centre de recherche en technologie industriel Cherega Alger qui a proposé et accepté aussi de diriger ce travail. Il m'a fait découvrir le domaine industriel ses modélisations et applications en mathématiques.

Je tiens à exprimer ma très profonde reconnaissance à Monsieur le professeur P. Spiteri. En m'accueillant au sein de son laboratoire IRT-ENSEEIS7 Toulouse, il m'a permis de trouver un environnement exceptionnel pour le développement de mes recherches par ses encouragements, ses conseils et son aide, il m'a fait profiter de ses grandes qualités scientifiques de sa grande expérience dans le domaine de programmation, ces travaux sur les méthodes numériques ont eu une grande influence sur cette thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude et remerciement à Monsieur T. Garcia Maître de Conférences en informatique laboratoire L3-IRAD Université PARIS SACLAY Versailles, France pour son aide, sa grande expérience en implantation des programmes parallèles.

Je tiens à remercier M. B. Khodja d'avoir accepté de présider le jury de thèse. M. A. Nouar M. R. Ghanem, M. V. Benkhada d'avoir accepté de faire partie de ce jury. J'adresse mes remerciements à toute l'équipe du laboratoire IRT-ENSEEIS7 Toulouse qui m'ont entouré durant mon long stage 18 mois à Toulouse. Une mention particulier pour professeur Philippe Marton de l'IRT-ENSEEIS7 Toulouse et Professeur Hacene Boutabia Université Badji Mokhtar Annaba pour leurs encouragements sans oublier Salih, Kahina, Aziddine et Sawssane.

J'adresse amicalement mes remerciements à mes amies et collègues. J'adresse mes remerciement profondes à mes meilleurs amies et collègues Nassima, Nesrine, Leila, Wassila et Melouka qui m'ont apportés leur aide. Une pensée particulier pour ne pas oublier personne je remercie tous les personnes qui auraient pu m'aider et qui ne l'ont pas fait.

Je voudrais remercier du fond du cœur toute ma famille surtout Yacine qui m'a soutenu et qui était à côté de moi.

Résumé

La présente étude traite de la modélisation mathématique et de la simulation numérique du problème de solidification de l'acier en coulée continue. On considère une semi-discrétisation par rapport au temps du problème d'évolution étudié. Nous avons à résoudre une suite de problèmes stationnaires. Ainsi, du fait que la température est positive ou nulle et après reformulation des problèmes en problèmes d'obstacle, nous donnons les inéquations variationnelles correspondantes. Nous étudions, sous des hypothèses appropriées, l'existence et l'unicité de la solution des problèmes stationnaires avec contrainte d'inégalité. Nous considérons également une formulation multivoque des mêmes problèmes et l'analyse du comportement de l'algorithme itératif de relaxation utilisé pour la résolution des problèmes discrétisés. Enfin, les expériences numériques sont présentées.

Mots-clés : coulée continue, solidification de l'acier, systèmes non linéaires, méthode de relaxation.

Abstract

The present study deals with the mathematical modelisation and the numerical simulation of the solidification of steel in continuous casting. We consider a semi-discretization with respect to time of the studied evolution problem. We then have to solve a sequence of stationary coupled problems. So, due to the fact that the temperature is positive and after reformulation of the problem into a variational inequality, we study, under appropriate assumptions, the existence and uniqueness of the solution of the stationary coupled problems. We also consider a multivalued formulation of the same problem and the analyze of the behavior of the iterative relaxation algorithms used for the solution of the discretized problems. Finally the numerical experiments are presented.

Key words : continuous casting, solidification of steel, sparse nonlinear systems, relaxation method.

ملخص

الدراسة الحالية تتناول النمذجة الرياضية و المحاكاة العددية لمسألة تصليب الفولاذ في آلة صب المستمر.

نعتبر التجزئة الجزئية للزمن لمسألة انتشار الحرارة المطلوب دراستها الهدف منها حل سلسلة من المسائل الثابتة. نظرا لكون درجة الحرارة موجبة أو معدومة وبعد اعادة صياغة المسائل ذات قيود نعطي المتراجحات التغيرااتية. ندرس في ظل فرضيات مناسبة، وجود و وحدانية الحل للمسائل الثابتة ذات قيود من صنف متراجحة.

أيضا نعتبر صياغة مختلفة لنفس المسائل. تحليل الخوارزمية التكرارية للاسترخاء المستخدمة لحل المسائل العددية. أخيرا التجارب العددية تم عرضها.

مفتاح الكلمات: آلة صب المستمر، تصليب الفولاذ، جملة معادلات غير خطية، تكرارية الاسترخاء.

Table des matières

Introduction	15
1 Problème physique	18
1.1 La coulée continue : description de la machine et du procédé	18
1.2 Description du modèle	21
1.2.1 Mode de transfert thermique	21
1.2.2 Problème thermique	24
1.2.3 Conditions aux limites	25
2 Modélisation mathématique	29
2.1 Le problème continu sans contrainte	30
2.1.1 Problème bidimensionnel	30
2.1.2 Problème tridimensionnel	34
2.2 Le problème continu avec contrainte	38
2.3 Formulation variationnelle	43
2.3.1 Formulation variationnelle bidimensionnelle	43
2.3.2 Existence et unicité du problème stationnaire bidimensionnel .	48
2.3.3 Formulation variationnelle tridimensionnelle	58
2.4 Formulation multivoque des inéquations variationnelles stationnaires	68
2.4.1 Rappels	68
2.4.2 Formulation multivoque des inéquations variationnelles sta- tionnaires bidimensionnelles	70
2.4.3 Formulation multivoque des inéquations variationnelles sta- tionnaires tridimensionnelles	71

3	Discrétisation spatio-temporelle	74
3.1	Problème sans contrainte	74
3.1.1	Discrétisation bidimensionnelle	75
3.1.2	Discrétisation tridimensionnelle	88
3.2	Problème avec contrainte	91
3.3	Solution numérique du problème modèle	93
3.3.1	Algorithme séquentiel	93
3.3.2	Algorithme de résolution du problème discretisé	94
3.3.3	Etude de la convergence par des techniques de contraction	95
3.4	Un modèle de calcul parallèle asynchrone	98
3.4.1	Formulation des itérations parallèles asynchrones	99
3.4.2	Théorèmes de convergence	101
3.4.3	Méthode alternée de Schwarz	103
3.5	Application pour la résolution du problème de la coulée continue	105
3.5.1	Analyse de convergence asynchrone parallèle avec recouvrement	105
4	Résultats numériques en 2D et 3D	108
4.1	Paramètres Physiques	109
4.2	Résultats numériques	111
4.3	Simulations parallèles	125
4.3.1	Performances sur clusters	125
4.3.2	Performances sur grille	128
	Conclusion générale	133
	A Problème avec conditions aux limites mêlées	134
	B Majoration de $\Pi = \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} P_{\mathcal{I},4}^2(u_{\mathcal{I}}) \right)^{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{I} = 2, 3$.	137
	Bibliographie	140

Liste des tableaux

4.1	Paramètres physiques dans chaque sous-domaine. . .	109
4.2	Approximation linéaire par morceaux de la conductivité thermique . .	109
4.3	Points de discrétisation dans le domaine Ω et chaque sous domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ en $2D$ et $3D$	111
4.4	Performance de la procédure numérique en $2D$ et $3D$ - cas les para- metres physiques constants.	111
4.5	Performance de la procédure numérique en $2D$ et $3D$ - cas où le coef- ficient de conductivité thermique dépend de la température.	118
4.6	Différentes tailles du domaine.	126
4.7	Temps d'exécution (sec) sur grisou et parasilo avec algorithme séquen- tiel et $\epsilon = 10^{-3}$	126
4.8	Temps d'exécution (sec), relaxation, communication, accélération et efficacité sur cluster grisou avec algorithme parallèle et $\epsilon = 10^{-3}$	127
4.9	Temps d'exécution (sec), relaxation et communication sur clusters gri- sou et parasilo avec algorithmes parallèles synchrones et $\epsilon = 10^{-3}$. . .	129
4.10	Temps d'exécution (sec), relaxation et communication sur clusters gri- sou et parasilo avec algorithmes parallèles asynchrones et $\epsilon = 10^{-3}$. .	130

Table des figures

1.1	Coupe 2D d'une machine de coulée continue verticale avec cintrage [Duflot,2004]	19
1.2	Les formats du métal; billettes et blooms	19
1.3	Représentation globale du domaine et des frontières.	26
2.1	Comportement du matériau en fonction de son état.	30
2.2	Représentation globale du domaine et des frontières en 2D.	31
2.3	Répartition des conditions aux limites sur Ω_1	32
2.4	Répartition des conditions aux limites sur Ω_2	33
2.5	Répartition des conditions aux limites sur Ω_3	34
2.6	Représentation du domaine Ω_1 et des frontières.	36
2.7	Représentation du domaine Ω_2 et des frontières.	37
2.8	Représentation du domaine Ω_3 et des frontières.	38
2.9	Représentation graphique de la condition de convection et de rayonnement.	39
2.10	Sous-différentiel de la fonction $\chi_{\mathcal{K}}$	73
3.1	Discrétisation des conditions aux limites	76
3.2	Structure de la matrice A_{2D}^n en 2D	81
3.3	Discrétisation du domaine Ω_1	85
3.4	Discrétisation du domaine Ω_2	86
3.5	Discrétisation du domaine Ω_3	87
3.6	Approximation linéaire par morceaux de la conductivité thermique	87
3.7	Structure de la matrice A_{3D}^n en 3D	90
3.8	Itérations parallèles asynchrones.	99
3.9	Itérations parallèles synchrones.	99
4.1	Evolution de la température en 2D à l'itération 35	112

4.2	Evolution de la température en 2D à l'itération 70	112
4.3	Erreurs, $\text{abs}(U_{it70} - U_{it35})$	113
4.4	Evolution de la température en 2D à l'itération 50	113
4.5	Evolution de la température en 2D à l'itération 100	114
4.6	Erreurs, $\text{abs}(U_{it100} - U_{it50})$	114
4.7	Evolution de la température en 3D à l'itération 35	115
4.8	Evolution de la température en 3D à l'itération 70	115
4.9	Erreurs, $\text{abs}(U_{it70} - U_{it35})$	116
4.10	Evolution de la température en 3D à l'itération 50	116
4.11	Evolution de la température en 3D à l'itération 100	117
4.12	Erreurs, $\text{abs}(U_{it100} - U_{it50})$	117
4.13	Evolution de la température en 2D à l'itération 35	118
4.14	Evolution de la température en 2D à l'itération 70	119
4.15	Erreurs, $\text{abs}(U_{it70} - U_{it35})$	119
4.16	Evolution de la température en 2D à l'itération 50	120
4.17	Evolution de la température en 2D à l'itération 100	120
4.18	Erreurs, $\text{abs}(U_{it100} - U_{it50})$	121
4.19	Evolution de la température en 3D à l'itération 35	121
4.20	Evolution de la température en 3D à l'itération 70	122
4.21	Erreurs, $\text{abs}(U_{it70} - U_{it35})$	122
4.22	Evolution de la température en 3D à l'itération 50	123
4.23	Evolution de la température en 3D à l'itération 100	123
4.24	Erreurs, $\text{abs}(U_{it100} - U_{it50})$	124
4.25	Architecture Grid'5000.	125
4.26	Comparison entre le temps d'exécution en mode séquentiel et syn- chrone sur cluster.	128
4.27	Comparison entre le temps d'exécution en mode synchrone et en mode asynchrone sur grille.	130
4.28	Evolution de τ	131
4.29	Pourcentage de communications et synchronisations.	132
A.1	Répartition des conditions aux limites	134

Symboles

Liste des symboles utilisés

Symbole	Définition
\mathcal{I}	Indice des sous domaines
x, y, z	Cordonnées de \mathbb{R}^d , $d=2,3$
(i, j, k)	Indice des composantes dans chaque directions
n	Numéro de pas de temps
t_{final}	Temps final
ρ_{eff}	Chaleur spécifique effective
$\rho_{\mathcal{I}}$	Chaleur spécifique
$c_{\mathcal{I}}$	Masse volumique
L	Chaleur latente massique
f_l	Fraction massique
$\lambda_{\mathcal{I}}$	Conductivité thermique
\vec{n}	Normale orientée vers l'extérieur
∇	Opérateur nabla
div	Divergence
δq	Quantité de chaleur
\vec{J}	Flux locale
Φ_{imp}	Flux
S	Surface d'échange
\vec{dS}	Elément de surface
$H(w)$	Enthalpie massique
$h_{cv, \mathcal{I}}$	Coefficient de transfert par convection
ζ	Emissivité du matériau de type corps noir
δ	Constante de Stefan-Boltzman
$w_{\mathcal{I}}$	Température
$u_{\mathcal{I}}$	Solution approchée

u_{ext}	Température extérieure
R	Résistance thermique de contact
u_{cst}	Température constante
u_{imp}	Température imposée
$\Omega_{\mathcal{I}}$	Domaine spatial $\Omega_{\mathcal{I}} \subset \mathbb{R}^d$, $d = \{2, 3\}$
$\partial\Omega$	Frontière du domaine Ω
$\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$	Ensemble convexe décrivant les contraintes
χ	Fonction indicatrice
$\partial\chi_{\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}$	Sous-différentiel de la fonction indicatrice du convexe $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$
Γ	Frontière entre sous-domaines (Ω_1, Ω_2) et (Ω_2, Ω_3)
$C_{L.}$	Constante état liquide
$C_{P.}$	Constante état pâteux
$C_{S.}$	Constante état solide
$\underline{\lambda}_{\mathcal{I}}$	Constante
$\bar{\lambda}_{\mathcal{I}}$	Constante
$\Psi_{\mathcal{I}}(\cdot)$	Fonction convection rayonnement
$\Upsilon_{\mathcal{I}}(\cdot)$	Fonction interface
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire
$\ \cdot \ $	Norme dans $L^2(\Omega_{\mathcal{I}})$
$H^1(\Omega_{\mathcal{I}})$	Espace de Sobolev
Δt	Pas temporel
h	Pas spatial
\mathbb{A}	Matrice de discrétisation
\mathcal{J}	Matrice de Jacobi de \mathbb{A}
τ	Rayon spectral de \mathcal{J}
ϑ	Vecteur propre de \mathcal{J}

Introduction

Dans l'industrie sidérurgique, la coulée continue est le procédé qui se situe entre l'élaboration de l'acier et le laminage. Ce procédé est caractérisé par un régime stationnaire permanent. Cela signifie, par exemple, qu'en un point donné, l'interface liquide pâteux et pâteux solide ne bouge pas au cours du temps. C'est grâce à cette caractérisation qu'on peut assurer la continuité du procédé. Le matériau est découpé à une longueur désirée au fur et à mesure de la sortie de la machine. Dans le même temps, on alimente en permanence la machine en acier liquide par une rotation des poches de coulée en provenance de l'acier.

Cette technique, du point de vue physique et mécanique, est décrite de la manière suivante : l'acier en fusion contenu dans une poche est coulé dans une lingotière sans fond maintenu à basse température par un système de refroidissement, en général hydraulique. Au contact avec la lingotière, l'acier va se solidifier et une peau solide commence à se former, on parle du refroidissement primaire. Sous la lingotière sont disposés des rouleaux extracteurs dont le rôle est d'avancer le produit dans la machine à une vitesse constante. Entre ces rouleaux, il existe un deuxième système de refroidissement qui est assuré par un jet d'eau. Ce phénomène décrit un problème thermomécanique, pour plus de détails voir [12], [13], [20], [21], [25], [30]. Selon la description précédente, la température satisfait à l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites appropriées décrivant le phénomène physique (flux, convection, rayonnement) dans chaque zone notamment liquide, pâteuse et solide. Pour plus de détails voir [12], [20].

Dans cette thèse, nous nous intéressons au calcul numérique de la température des procédés thermiques dans chaque zone ; ces procédés thermiques sont décrits par des modèles dynamiques distribués modélisés par des équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires avec un ensemble de conditions aux limites résultant des interactions avec l'extérieur. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet, Neumann ou Fourier. En outre, le phénomène de rayonnement décrit par la loi de Stefan

existe sur des parties spécifiques de la frontière ; un tel phénomène conduit à une forte non-linéarité. La simulation numérique des procédés de transformation des matériaux est un domaine de recherche vaste et multidisciplinaire : il met en jeu essentiellement la thermomécanique des milieux continus, la science des matériaux et l'analyse numérique. De nombreux travaux scientifiques sur ces applications industrielles ont été consacrés à ce sujet (voir [5], [11], [12], [13], [21], [30], [33]). Grâce à ces études, il est possible d'établir une classification de ces travaux, selon la nature des méthodes utilisées pour l'analyse du processus ; selon le degré de difficulté des problèmes, diverses études numériques et expérimentales ont été développées. Cependant, la théorie associée à ces études n'est pas suffisamment développée due à la difficulté du problème considéré. Quelques études sont néanmoins une généralisation formelle de la théorie développée dans le cas linéaire [20]. En effet, la solution analytique est très difficile à obtenir et, d'autre part, en raison de la spécificité des équations, l'existence et l'unicité des solutions n'ont pas été prouvées compte tenu de la difficulté du problème.

Dans la présente étude, nous allons établir de nouveaux résultats théoriques concernant ce problème, très utiles pour la réalisation de la simulation numérique. Les problèmes aux limites précédents sont fonctions du temps, la résolution numérique repose sur une discrétisation implicite par rapport au temps. Ainsi, à chaque pas de temps, nous avons à résoudre une suite de problèmes stationnaires. Par rapport au travail développé dans [11], [12], [13], [30], [33], nous considérons l'hypothèse réaliste que la température est positive ou nulle. Cette contrainte, nous amène à résoudre une suite d'inéquations stationnaires au lieu d'un problème aux limites. En tenant compte du phénomène de Stefan sur une partie de la frontière, nous avons à résoudre des suites de problèmes fortement non linéaires. Sous des hypothèses appropriées et grâce à l'utilisation du théorème de Stampacchia, on obtient un résultat original concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème continu stationnaire. En outre, nous pouvons également envisager une formulation classique multivoque du problème avec contrainte (voir [1]) très utile pour l'analyse du comportement des algorithmes itératifs utilisés pour la solution du problème discrétisé.

Cette formulation est obtenue en perturbant le problème initial par le sous-différentiel de la fonction indicatrice des ensembles convexes fermés définissant les contraintes sur la solution. Après discrétisation spatiale, du fait que, d'une part, la matrice de discrétisation pour la partie linéaire est une M-matrice [40] et, que d'autre part, le système affine est perturbé par un opérateur décrivant la condition de Stefan et par le sous-différentiel de la fonction indicatrice étant tous les deux monotones, on peut montrer la convergence de la méthode de relaxation projetée séquentielle ou parallèle

utilisée pour résoudre les systèmes discrétisés (voir [8], [36], [37] et [55]).

Cette thèse est organisée comme suit : dans le premier chapitre, on décrit la coulée continue, les différentes parties de cette dernière et les étapes de la transformation de l'acier liquide en acier solide. On donne les équations et les conditions modélisant ce phénomène, en prenant en compte principalement les aspects thermiques et en négligeant les aspects mécaniques. Dans le deuxième chapitre, on donne le modèle mathématique en $2D$ et $3D$. Sous des hypothèses réalistes, on reformule le problème avec contrainte. Enfin, le modèle mathématique obtenu après semi-discrétisation implicite en temps est constitué par une suite de problèmes stationnaires avec contraintes. L'étude d'une suite d'inéquations variationnelles, sous des hypothèses appropriées, permet d'obtenir le résultat d'existence et d'unicité. On présente ensuite une formulation classique multivoque du problème avec contrainte. Dans le chapitre trois, on discrétise en espace le problème avec et sans contrainte et on effectue l'analyse et la convergence des algorithmes itératifs utilisés pour déterminer la solution approchée. Le dernier chapitre présente la simulation numérique du problème en $2D$ et $3D$.

Chapitre 1

Problème physique

1.1 La coulée continue : description de la machine et du procédé

Depuis 1950, la coulée continue est le procédé le plus répandu pour la production et l'exploitation de l'acier. Elle permet de transformer le métal liquide en métal solide de façon continue. Ce procédé industriel est de loin le plus efficace pour solidifier de grandes quantités de métal.

Les formats classiques du métal sont la brame de section rectangulaire, typiquement de dimension $2\text{ m} \times 0.25\text{ m}$, la billette et le bloom : deux produits de section généralement carrée parfois rectangulaire ou circulaire ; la billette est limitée à 155 mm de côté. Les produits de section plus grande sont des blooms. Il existe plusieurs types de machines de coulée continue. Pour l'acier, ce sont le plus souvent des machines courbes qui sont utilisées, en raison d'un puits de solidification plus profond de faible conductivité. La figure 1.1 représente une coupe de cette machine. Elle décrit le procédé de la coulée continue de l'acier, ainsi que les différentes parties de la machine.

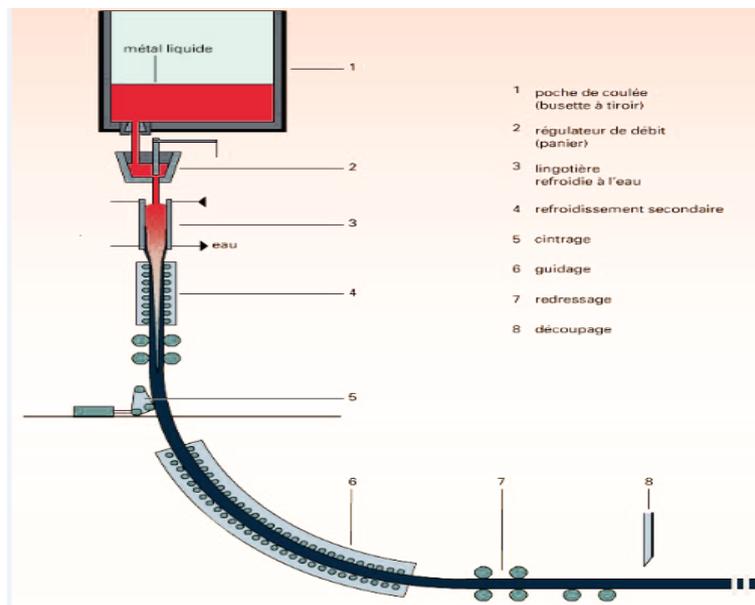


FIGURE 1.1 – Coupe 2D d’une machine de coulée continue verticale avec cintrage [DufLOT,2004]

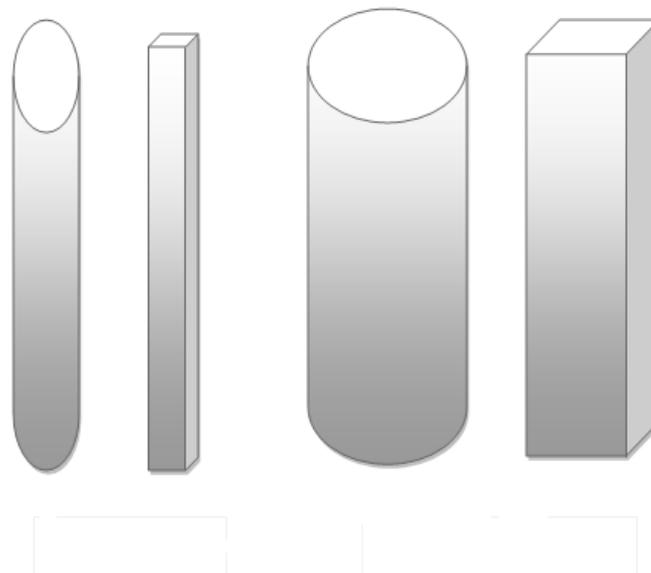


FIGURE 1.2 – Les formats du métal ; billettes et blooms

Nous décrivons dans la figure 1.1, les éléments principaux d’une machine de coulée continue :

La poche de coulée : elle est de capacité variable, et peut contenir environ 150

tonnes de métal en fusion. Elle permet l'alimentation du répartiteur.

Le répartiteur : il permet d'injecter l'acier liquide vers une ou plusieurs lingotière à un débit contrôlé. Il assure la continuité de l'alimentation de la lingotière lors d'un changement de poche.

La busette : est un long tube terminé par deux ou trois ouïes. La busette est située entre le répartiteur et la lingotière. Elle permet l'injection d'acier liquide dans la lingotière en continue.

La lingotière : elle a pour fonction d'assurer le refroidissement primaire. C'est un moule sans fond en cuivre, maintenu à basse température par un système de refroidissement, en général hydraulique.

Le refroidissement secondaire : c'est la partie de la machine que traverse le produit lorsqu'il est extrait de la lingotière. Il est constitué d'une part, d'un système mécanique de soutien et de guidage du produit par rouleaux, et d'autre part, d'un système de refroidissement constitué de jets d'eau permettant la maîtrise de la température de surface du produit jusqu'à sa complète solidification.

Le guidage : il est formé de rouleaux dont certains sont motorisés, c'est à dire qu'il assure la descente du produit à vitesse constante dans la machine.

L'oxycoupage : c'est l'outil qui permet la coupe du produit solidifié à longueur désirée et son identification avant son évacuation.

L'acier en fusion contenu dans la poche est introduit dans le régulateur qui permet de contrôler le débit de l'acier injecté dans la lingotière par l'intermédiaire de la busette. Le répartiteur peut éventuellement alimenter en parallèle plusieurs lingotières. L'acier liquide commence à se solidifier dans la lingotière. C'est le refroidissement primaire. Sous la lingotière sont disposés des rouleaux extracteurs qui font avancer le produit dans la machine à une vitesse donnée. Entre ces rouleaux, existe un second système de refroidissement réalisé grâce à un jet d'eau : c'est le refroidissement secondaire. Une fois que l'acier est totalement solidifié, le produit est découpé. Excepté lors de l'initialisation du procédé, la coulée continue est définie par un régime stationnaire permanent. Cela signifie qu'en un point donné, l'interface liquide-solide ne bouge pas

au cours du temps. C'est grâce à cette propriété qu'on peut assurer la continuité du procédé. La rotation des poches de coulée permet d'alimenter en permanence la machine en acier liquide.

Le phénomène décrit ci-dessus est un problème thermomécanique. Au cours de ce refroidissement, l'acier passe donc de l'état liquide à l'état solide en passant par une zone pâteuse intermédiaire. La peau d'acier solidifié est soumise à de fortes contraintes et déformations.

1.2 Description du modèle

On considère une tranche d'acier évoluant transversalement dans le sens de la coulée et se déplaçant à la vitesse de la coulée. Ceci permet de prendre en compte le refroidissement primaire et secondaire mais aussi de calculer l'évolution thermique de l'acier coulé.

1.2.1 Mode de transfert thermique

Il est du à plusieurs phénomènes physiques décrits ci-dessous

Description des échanges thermiques

Le transfert d'une quantité de chaleur δq pendant un intervalle de temps δt correspond à un flux de chaleur $\Phi = \frac{\delta q}{\delta t}$. Ce flux de chaleur équivaut à une puissance échangée par un système à travers sa frontière. Les flux de chaleur Φ se mesurent en watts. Comme le flux de chaleur n'est pas nécessairement uniforme sur toute la surface d'échange S , on introduit la notion de densité de flux locale \vec{J} (en $W m^{-2}$). Le flux Φ est alors l'intégrale de la densité de flux sur la surface d'échange S , soit $\Phi = \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$ où \vec{dS} représente un élément de surface orienté de telle sorte que le flux est sortant si $\vec{J} \cdot \vec{dS} > 0$ et entrant si $\vec{J} \cdot \vec{dS} < 0$.

On distingue trois modes de transmission de la chaleur qui sont la conduction, la convection et le rayonnement. Ces trois modes s'effectuent la plupart du temps en parallèle.

1- Conduction thermique

La conduction est un processus physique de transmission de la chaleur qui s'appuie sur un milieu matériel (solide, liquide, gaz), sans mouvement de matière, et qui

fait passer la chaleur des zones chaudes aux zones froides à l'aide de mécanismes appropriés tels que les vibrations atomiques ou moléculaires, diffusion électronique,..... La conduction est le seul mécanisme qui permet à la chaleur d'être transmise dans un solide. Par contre, si un fluide est soumis à un fort gradient thermique, la conduction devient rapidement négligeable devant la convection naturelle.

Loi de Fourier

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$. Soit $w(\mathbf{x}, t)$ la température au point M de coordonnées

$$\mathbf{x} \equiv \begin{cases} (x, y) & \text{en } 2D \\ (x, y, z) & \text{en } 3D \end{cases} ,$$

à l'instant t . Si la température dépend du temps, on dit que le régime thermique est variable ou transitoire ; dans le cas contraire, on dit qu'il est permanent ou stationnaire. Considérons un point M et un élément de surface dS infiniment petit ; soit \vec{n} un vecteur unitaire et normal orienté vers l'extérieur à dS . La puissance thermique qui traverse dS dans le sens de \vec{n} est égale à

$$d\Phi = \vec{n} \cdot (-\lambda(w, \mathbf{x}, t) \cdot \vec{\nabla} w) dS \quad (1.1)$$

où λ est le coefficient de conductivité thermique du milieu de transmission ($Wm^{-1}K^{-1}$), $\vec{\nabla} w$ représente le gradient local de température c'est-à-dire le taux de variation spatial de la température au point considéré.

Conductivité thermique

La conductivité thermique est une grandeur physique caractérisant le comportement des matériaux lors du transfert thermique par conduction. Notée λ , cette grandeur apparaît par exemple dans la loi de Fourier.

Les conductivités thermiques varient de façon considérable d'un matériau à un autre, de sorte que l'on distingue, en général, les matériaux conducteurs de la chaleur et des matériaux isolants suivant l'ordre de grandeur de leur conductivité thermique. La conductivité dépend également de la température. Elle dépend aussi de l'état du matériau considéré solide, liquide pâteux ou gaz. La quantité de chaleur notée $d\Phi$ s'exprime en joule et Φ correspond au flux thermique en M à travers dS qui s'ex-

prime en watt.

Équation de la conservation de l'énergie

On écrit l'équation de la conservation d'énergie en enthalpie (voir par exemple [Rappaz et al., 1998]), sur chaque sous-domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, où Ω_1 correspond à l'état liquide, Ω_2 à l'état pâteux et Ω_3 à l'état solide, en tenant compte de la solidification du matériau :

$$c(w) \frac{dH}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.2)$$

où $c(w)$ est la masse volumique. L'enthalpie massique $H(w)$ est donnée par la relation :

$$H(w) = \int_{w_0}^w \rho(\tau) d\tau + f_l(w)L$$

où w_0 est une température de référence, f_l la fraction massique du liquide et L la chaleur latente massique. On introduit la chaleur spécifique effective ρ_{eff} par :

$$\rho_{eff} = \frac{dH}{dw} = \rho(w) + L \frac{d}{dw} f_l(w)$$

et on peut alors écrire dans (1.2) :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dw} \frac{dw}{dt} = \rho_{eff} \frac{dw}{dt} \quad (1.3)$$

On applique d'autre part, la loi de Fourier pour évaluer le flux \vec{J} . En supposant la conductivité thermique isotrope, et fonction de la température, on a :

$$\vec{J} = -\lambda(w, \mathbf{x}, t) \cdot \vec{\nabla} w \quad (1.4)$$

En substituant (1.3) et (1.4) dans (1.2), on obtient l'équation de la chaleur :

$$\rho_{eff}(w, \mathbf{x}, t) c(w, \mathbf{x}, t) \frac{dw(\mathbf{x}, t)}{dt} - \text{div}(\lambda(w, \mathbf{x}, t) \nabla w(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (1.5)$$

2- Échange de chaleur par convection

La convection est le processus physique de transmission de la chaleur qui s'ap-

plique sur un milieu matériel avec mouvement de matière. On ne peut donc avoir de la convection que dans les liquides et les gaz. On distingue deux types de convection :

- la convection naturelle (libre) : ce type de convection découle des variations de masse volumique de fluide dues aux échanges de chaleur
- la convection forcée qui provient du mouvement du fluide imposé par des actions mécaniques extérieures. Si la température est mesurée loin de la paroi, le flux de chaleur s'écrit comme suit

$$\Phi = h_{cv}(w - u_{ext}) \quad (1.6)$$

où h_{cv} représente le coefficient d'échange par convection exprimé en $W/(m^2 \cdot K)$ et u_{ext} est la température ambiante extérieure. Cette équation (1.6) est appelée loi de Newton.

3- Échange de chaleur par rayonnement

On entend par rayonnement thermique, l'émission d'énergie susceptible de se transmettre dans le vide. Dans la pratique, le rayonnement s'effectue en présence d'un gaz. Si un corps rayonne, il émet de l'énergie thermique et sa température doit baisser. Cependant, un corps n'est jamais isolé. Il est en équilibre avec le milieu qui l'entoure. D'après la loi de Stéfan, le flux de chaleur échangé entre la surface S et le milieu ambiant s'écrit

$$\Phi = \xi \delta (w^4 - u_{ext}^4) \quad (1.7)$$

où ξ est l'émissivité du matériau, supposé ici de type corps gris et vérifiant $\xi < 1$, δ est la constante de Stefan-Boltzman avec $\delta = 5.67 \cdot 10^{-8} w \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$

1.2.2 Problème thermique

Le problème général thermique est donc défini par l'équation suivante :

$$\rho_{eff}(w)c(w)\frac{\partial w(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - div(\lambda(w)\nabla w(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad [0, t_{final}] \times \Omega \quad (1.8)$$

où c est la masse volumique du matériau ($Kg \cdot m^{-3}$), ρ_{eff} est la chaleur spécifique ($J \cdot Kg^{-1} \cdot K^{-1}$) et λ est la conductivité thermique ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$).

Dans ce qui suit, on note $\rho \equiv \rho_{eff}$, pour schématiser le procédé de coulée qu'on peut décrire de la manière suivante.

Dans chaque zone liquide, pâteuse ou solide, on considèrera donc, en référence à l'équation générale de la thermique (1.8), les modèles suivants :

Dans le domaine Ω_1 occupé par la phase liquide, la température w_1 vérifie

$$\rho_1(w_1)c_1(w_1)\frac{\partial w_1}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_1(w_1)\nabla w_1) = 0, \quad [0, t_{final}] \times \Omega_1 \quad (1.9)$$

où ρ_1, c_1 et λ_1 sont les coefficients physiques de la zone liquide.

Au fur et à mesure que l'acier en fusion progresse dans la machine, l'épaisseur de la couche solidifiée augmente et inversement l'acier liquide tend à disparaître pour aboutir finalement à un produit complètement solidifié. L'équation à résoudre dans le domaine Ω_3 occupé par la phase solide s'écrit donc comme suit :

$$\rho_3(w_3)c_3(w_3)\frac{\partial w_3}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_3(w_3)\nabla w_3) = 0, \quad [0, t_{final}] \times \Omega_3 \quad (1.10)$$

où ρ_3, c_3 et λ_3 sont les coefficients physiques de la zone solide.

La transformation de l'acier de la phase liquide à la phase solide se produit dans une zone intermédiaire appelée zone pâteuse, où la température w_2 vérifie

$$\rho_2(w_2)c_2(w_2)\frac{\partial w_2}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_2(w_2)\nabla w_2) = 0, \quad [0, t_{final}] \times \Omega_2 \quad (1.11)$$

où ρ_2, c_2 et λ_2 sont les coefficients physiques de la zone pâteuse.

1.2.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites des problèmes thermiques modélisés sont très classiques ; température imposée, un flux de chaleur imposé, des conditions de convection avec coefficient de transfert thermique, des conditions de rayonnement.

Au cours de son évolution dans la machine, l'acier va être refroidi soit lors de son contact avec la lingotière, soit par le jet d'eau, soit par les deux phénomènes combinés mais aussi par le contact thermique avec les rouleaux (cylindres).

Pour décrire cette opération, on suppose que l'échange de chaleur est uniforme. On distingue deux modes de transmission de la chaleur qui sont la convection et/ou le rayonnement et sont modélisés par une condition de type Neumann . Il est d'usage de considérer que les surfaces de contact avec l'air ambiant sont soumises à des conditions de même type i.e convection et/ou rayonnement. L'échange thermique qui se produit entre les sous domaines est à son tour modélisé par une condition aux interfaces

de type Neumann, voir Figure 1.3 ; cette figure est une représentation globale des trois sous-domaines et de toutes les conditions aux limites qui sont réparties sur les frontières.

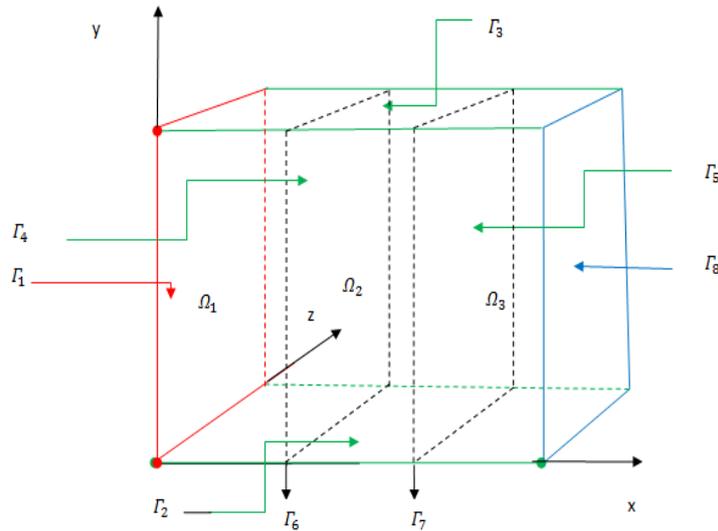


FIGURE 1.3 – Représentation globale du domaine et des frontières.

Les problèmes (1.9), (1.10) et (1.11) sont complétés par les conditions suivantes :

-1- Condition initiale en température

$$w_{\mathcal{I}}(\mathbf{x}, t = 0) = w_{\mathcal{I},0}(\mathbf{x}) \quad \mathcal{I} = 1, 2, 3 \quad (1.12)$$

Les conditions aux limites pour chaque problème décrivent les interactions avec l'extérieur ; elles sont de plusieurs types, en fonction de considérations physique précédentes.

-2- Condition de type flux imposé

$$-\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \Phi_{imp}, \text{ sur } \Gamma_1 \quad (1.13)$$

où Φ_{imp} est la température du fluide .

-3- Condition de type convection et / ou rayonnement avec l'extérieur

On utilise cette condition aux limites pour représenter le refroidissement primaire et secondaire, ainsi que pour les frontières en contact avec l'air ambiant :

$$-\vec{n} \cdot (\lambda_{\mathcal{I}} \nabla w_{\mathcal{I}}) = h_{cv, \mathcal{I}}(w_{\mathcal{I}} - u_{ext}) + \xi \delta (w_{\mathcal{I}}^4 - u_{ext}^4), \quad \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{\mathcal{I}, r}, \quad (1.14)$$

$$\mathcal{I} = 1, 2, 3$$

-4- Échange thermique entre sous domaines

C'est la relation qui correspond à une condition de continuité aux interfaces entre Ω_1 et Ω_2 , on a

$$-\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \frac{1}{R}(w_1 - u_{cst}), \quad \text{sur } \Gamma_6 \quad (1.15)$$

et entre Ω_2 et Ω_3 , on a

$$-\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = \frac{1}{R}(w_2 - u_{cst}), \quad \text{sur } \Gamma_7 \quad (1.16)$$

où $\frac{1}{R}$ est le coefficient de transfert entre les sous domaines mesuré en $(w.m^{-2}.K^{-1})$. R est la résistance thermique de contact et u_{cst} est la température de surface du sous domaine.

-5- Condition de type température imposée (condition de Dirichlet)

Entre Ω_1 et Ω_2 , on a une température imposée donnée par

$$w_2 = w_1|_{\Gamma_6}, \quad \text{sur } \Gamma_6 \quad (1.17)$$

où $\Gamma_{1,2}$ est la zone intermédiaire entre Ω_1 et Ω_2 .

Entre Ω_2 et Ω_3 , on a une autre température imposée décrite par

$$w_3 = w_2|_{\Gamma_7}, \quad \text{sur } \Gamma_7 \quad (1.18)$$

où $\Gamma_{2,3}$ est la zone intermédiaire entre Ω_2 et Ω_3 ,

et

$$w_3 = w_{imp}, \quad \text{sur } \Gamma_8 \quad (1.19)$$

où w_{imp} est la température imposée sur la frontière de Ω_3

Chapitre 2

Modélisation mathématique

Ce chapitre consiste, d'abord, à établir un résultat théorique concernant le problème d'existence et d'unicité de la solution et, ensuite, à donner une nouvelle formulation du problème d'obstacle qui servira dans les chapitres suivants.

Le chapitre est organisé comme suit. Tout d'abord, on présentera un modèle mathématique intermédiaire qui ne sera pas le modèle définitif retenu ; on appellera ce modèle le problème sans contrainte. Puis, après semi-discrétisation implicite en temps, nous donnons le modèle mathématique avec contrainte et la reformulation des problèmes avec contrainte sous forme problèmes d'obstacle stationnaires dans chaque sous-domaine. On associe à chaque problème stationnaire avec contrainte, la formulation variationnelle et on effectue l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions. On termine par formuler ces mêmes problèmes sous forme de problèmes multivoques dans chaque sous-domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ respectivement dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel.

La transformation de l'acier peut être décrite par trois zones, liquide, pâteuse et solide (voir Figure 2.1), notées par $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$. Ces zones doivent tenir compte des variations des différents coefficients physiques ainsi que de la température calculée. Le matériau subit des dilatations thermiques importantes et non négligeables en particulier à l'état solide.

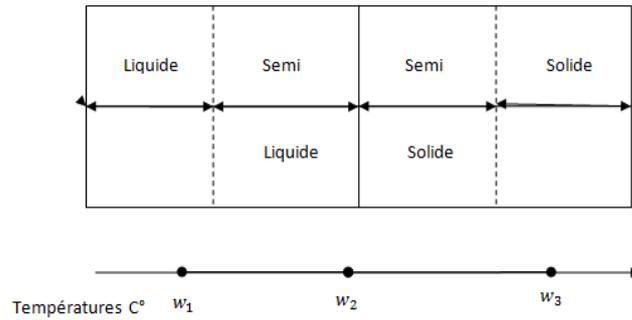


FIGURE 2.1 – Comportement du matériau en fonction de son état.

2.1 Le problème continu sans contrainte

2.1.1 Problème bidimensionnel

Dans le cas bidimensionnel, soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$. On considère que $\Omega = \bigcup_{\mathcal{I}=1}^3 \Omega_{\mathcal{I}}$, où Ω_1 est la zone liquide, Ω_2 la zone pâteuse et Ω_3 la zone solide (voir Figure 2.2). On pose $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, où

$$\Gamma_1 = \{x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\Gamma_2 = \{y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\Gamma_4 = \{x = 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Γ_5 et Γ_6) sont respectivement les interfaces entre Ω_1 et Ω_2 et entre Ω_2 et Ω_3 . Γ_5 et Γ_6 sont définis par

$$\Gamma_5 = \{0 \leq y \leq 1, x = \frac{1}{3}\}$$

$$\Gamma_6 = \{0 \leq y \leq 1, x = \frac{2}{3}\}$$

Pour $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, on note par $\Gamma_{\mathcal{I},r} = \Gamma_r \cap \Omega_{\mathcal{I}}$, $r = 2, 3$, tels que

$$\Gamma_{\mathcal{I},2} = \left\{ y = 0, \frac{\mathcal{I} - 1}{3} < x < \frac{\mathcal{I}}{3} \right\},$$

$$\Gamma_{\mathcal{I},3} = \left\{ y = 1, \frac{\mathcal{I} - 1}{3} < x < \frac{\mathcal{I}}{3} \right\}.$$

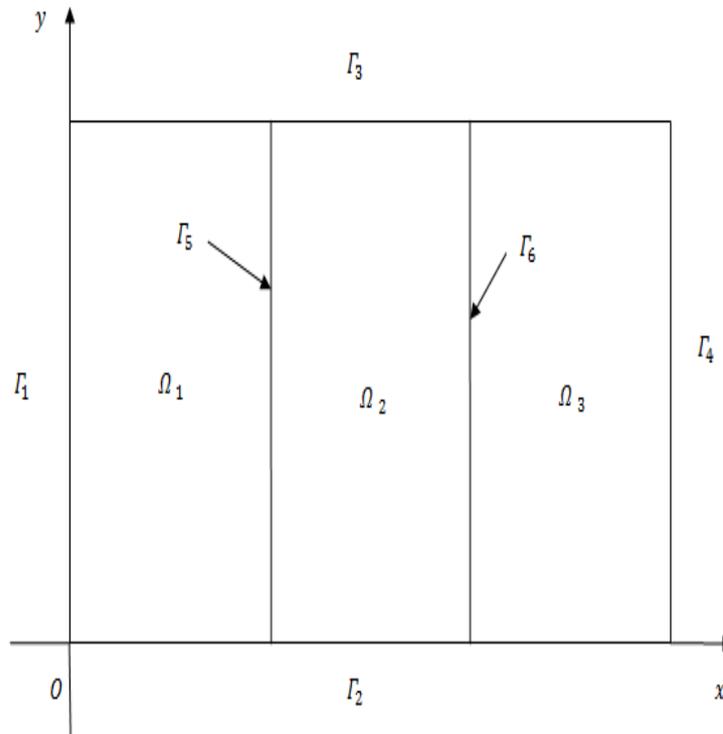


FIGURE 2.2 – Représentation globale du domaine et des frontières en $2D$.

Récapitulons, ci-dessous, les équations régissant le problème thermique. Ces équations ont été établies au chapitre précédent, les conditions aux limites et la condition initiale ayant été également précisées. Le problème de refroidissement sans contrainte sur la solution confinée à la coulée continue est modélisé par :

1– dans le domaine Ω_1 occupé par la phase liquide (voir Figure 2.3), on pose $\Gamma_{1,2} = \Gamma_2 \cap \Omega_1$ et $\Gamma_{1,3} = \Gamma_3 \cap \Omega_1$. Le comportement de l'acier dans cette zone est décrit ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_1 \nabla w_1) = 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_1 \\ w_1(x, y, t = 0) = w_{1,0}(x, y), & C.I. \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \Phi_{imp}, & \text{sur } \Gamma_1 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = h_{cv,1}(w_1 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_1^4 - u_{ext}^4), & \text{sur } \Gamma_{1,2} \cup \Gamma_{1,3} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \frac{1}{R}(w_1 - u_{cst}), & \text{sur } \Gamma_5 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où $C.I.$ est la condition initiale donnée.

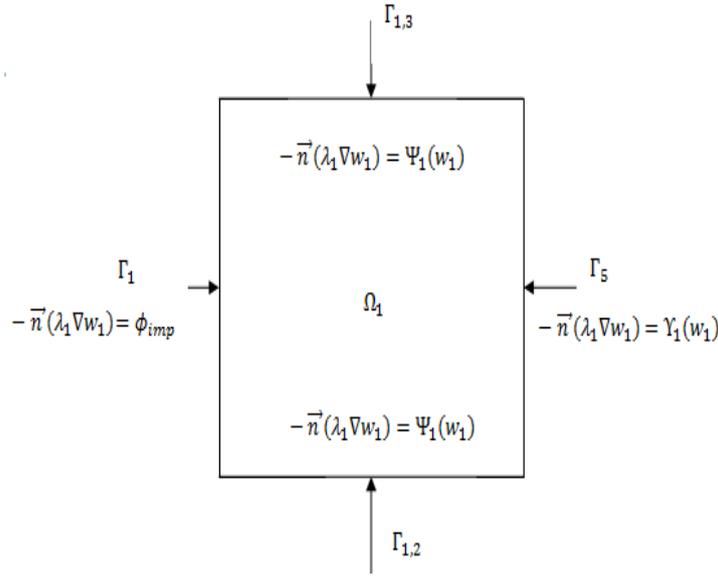
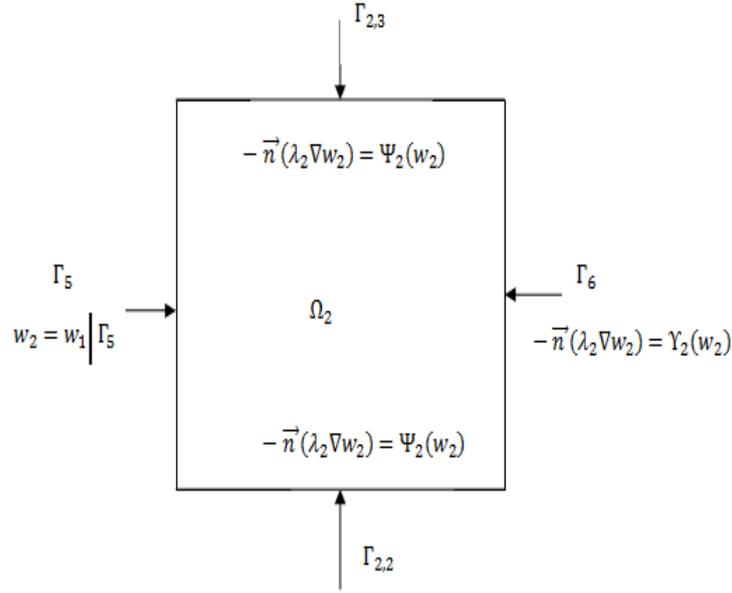


FIGURE 2.3 – Répartition des conditions aux limites sur Ω_1 .

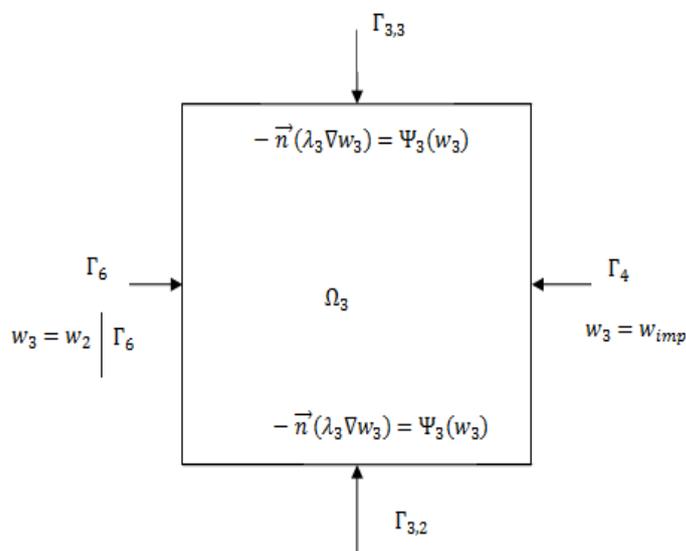
2– Dans le domaine Ω_2 occupé par la phase pâteuse (voir Figure 2.4), on pose $\Gamma_{2,2} = \Gamma_2 \cap \Omega_2$ et $\Gamma_{2,3} = \Gamma_3 \cap \Omega_2$. Le comportement de l'acier dans cette zone est modélisé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_2 c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_2 \nabla w_2) = 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_2 \\ w_2(x, y, t = 0) = w_{2,0}(x, y), & C.I. \\ w_2 = w_1|_{\Gamma_5}, & \text{sur } \Gamma_5 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = h_{cv,2}(w_2 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_2^4 - u_{ext}^4), & \text{sur } \Gamma_{2,2} \cup \Gamma_{2,3} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = \frac{1}{R}(w_2 - u_{cst}), & \text{sur } \Gamma_6. \end{array} \right. \quad (2.2)$$


 FIGURE 2.4 – Répartition des conditions aux limites sur Ω_2 .

3– Dans le domaine Ω_3 occupé par la phase solide (voir Figure 2.5), on pose $\Gamma_{3,2} = \Gamma_2 \cap \Omega_3$ et $\Gamma_{3,3} = \Gamma_3 \cap \Omega_3$. Le comportement de l’acier dans cette zone est décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_3 c_3 \frac{\partial w_3}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_3 \nabla w_3) = 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_3 \\ w_3(x, y, t = 0) = w_{3,0}(x, y), & C.I. \\ w_3 = w_2|_{\Gamma_6}, & \text{sur } \Gamma_6 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_3 \nabla w_3) = h_{cv,3}(w_3 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_3^4 - u_{ext}^4), & \text{sur } \Gamma_{3,2} \cup \Gamma_{3,3} \\ w_3 = w_{imp}, & \text{sur } \Gamma_4 \end{array} \right. \quad (2.3)$$


 FIGURE 2.5 – Répartition des conditions aux limites sur Ω_3 .

2.1.2 Problème tridimensionnel

Dans le cas tridimensionnel, soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\Omega = \bigcup_{\mathcal{I}=1}^3 \Omega_{\mathcal{I}}$, un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$. On pose $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_8$ où

$$\Gamma_1 = \{x = 0, 0 \leq y, z \leq 1\}$$

$$\Gamma_2 = \{z = 0, 0 \leq x, y \leq 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{y = 0, 0 \leq x, z \leq 1\}$$

$$\Gamma_4 = \{z = 1, 0 \leq x, y \leq 1\}$$

$$\Gamma_5 = \{y = 1, 0 \leq x, z \leq 1\}$$

$$\Gamma_6 = \{0 \leq y, z \leq 1, x = \frac{1}{3}\}$$

$$\Gamma_7 = \{0 \leq y, z \leq 1, x = \frac{2}{3}\}$$

$$\Gamma_8 = \{0 \leq y, z \leq 1, x = 1\}$$

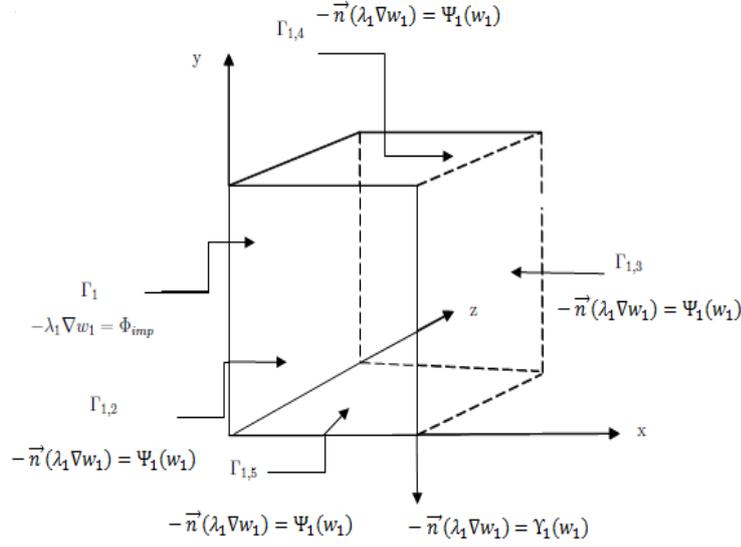
Pour $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, on note par $\Gamma_{\mathcal{I},r} = \Gamma_r \cap \Omega_{\mathcal{I}}$, $r = 2, 3, 4, 5$, tels que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{I},2} &= \{z = 0, 0 \leq y \leq 1, \frac{\mathcal{I}-1}{3} < x < \frac{\mathcal{I}}{3}\}, \Gamma_{\mathcal{I},3} = \{y = 0, 0 \leq z \leq 1, \frac{\mathcal{I}-1}{3} < x < \frac{\mathcal{I}}{3}\}, \\ \Gamma_{\mathcal{I},4} &= \{z = 1, 0 \leq y \leq 1, \frac{\mathcal{I}-1}{3} < x < \frac{\mathcal{I}}{3}\}, \Gamma_{\mathcal{I},5} = \{y = 1, 0 \leq z \leq 1, \frac{\mathcal{I}-1}{3} < x < \frac{\mathcal{I}}{3}\}. \end{aligned}$$

Dans la figure 1.3, les plans Γ_6 et Γ_7 sont respectivement les interfaces entre Ω_1 et Ω_2 et entre Ω_2 et Ω_3 . Avec des notations analogues à celles utilisées dans la sous section 2.1.1 le modèle mathématique sur chaque zone est donné par :

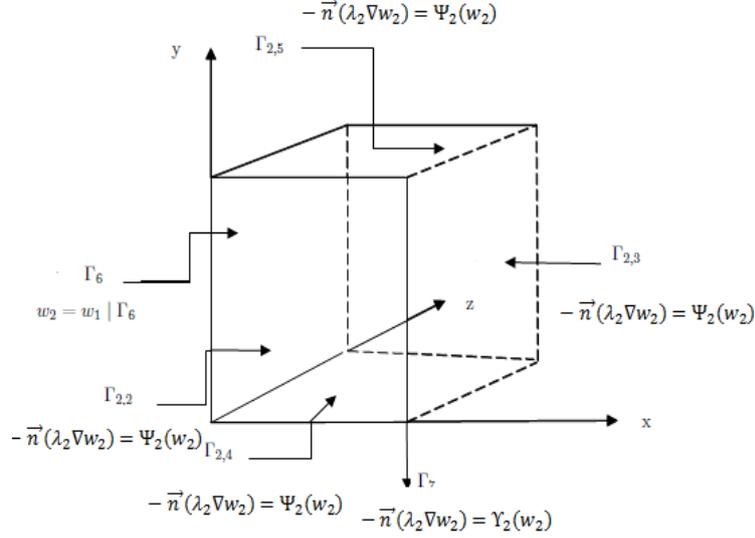
1– Dans le domaine Ω_1 occupé par la phase liquide (voir Figure 2.6), on pose $\Gamma_{1,2} = \Gamma_2 \cap \Omega_1$, $\Gamma_{1,3} = \Gamma_3 \cap \Omega_1$, $\Gamma_{1,4} = \Gamma_4 \cap \Omega_1$ et $\Gamma_{1,5} = \Gamma_5 \cap \Omega_1$; alors, dans Ω_1 on a la modélisation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} - \text{div}(\lambda_1 \nabla w_1) = 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_1 \\ w_1(x, y, z, t = 0) = w_{1,0}(x, y, z), & C.I. \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \Phi_{imp}, & \text{sur } \Gamma_1 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = h_{cv,1}(w_1 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_1^4 - u_{ext}^4), & \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{1,r} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \frac{1}{R}(w_1 - u_{cst}), & \text{sur } \Gamma_6 \end{array} \right. \quad (2.4)$$


 FIGURE 2.6 – Représentation du domaine Ω_1 et des frontières.

2– Dans le domaine Ω_2 occupé par la phase pâteuse (voir Figure 2.7), on pose $\Gamma_{2,2} = \Gamma_2 \cap \Omega_2$, $\Gamma_{2,3} = \Gamma_3 \cap \Omega_2$, $\Gamma_{2,4} = \Gamma_4 \cap \Omega_2$ et $\Gamma_{2,5} = \Gamma_5 \cap \Omega_2$; dans cette zone le modèle mathématique est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_2 c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} - \text{div}(\lambda_2 \nabla w_2) = 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_2 \\ w_2(x, y, z, t = 0) = w_{2,0}(x, y, z), & C.I. \\ w_2 = w_1 |_{\Gamma_6}, & \text{sur } \Gamma_6 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = h_{cv,2}(w_2 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_2^4 - u_{ext}^4), & \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{2,r} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = \frac{1}{R}(w_2 - u_{cst}), & \text{sur } \Gamma_7 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

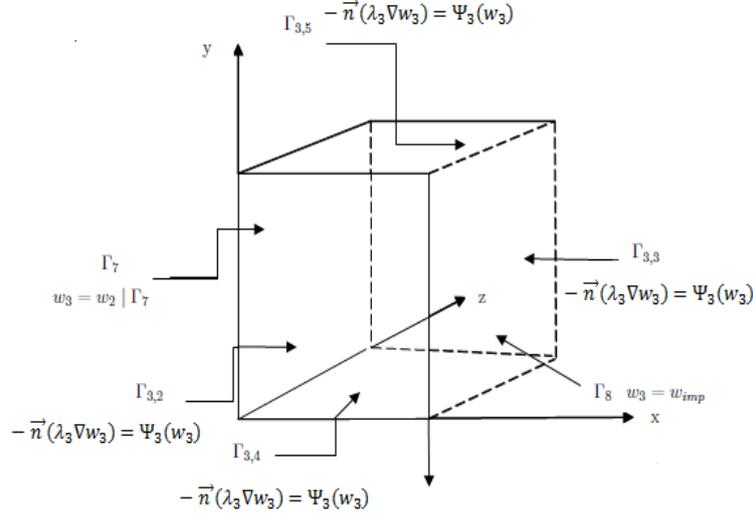

 FIGURE 2.7 – Représentation du domaine Ω_2 et des frontières.

3– Dans le domaine Ω_3 occupé par la phase solide (voir Figure 2.8), on pose $\Gamma_{3,2} = \Gamma_2 \cap \Omega_3$, $\Gamma_{3,3} = \Gamma_3 \cap \Omega_3$, $\Gamma_{3,4} = \Gamma_4 \cap \Omega_3$ et $\Gamma_{3,5} = \Gamma_5 \cap \Omega_3$; on a la modélisation mathématique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_3 c_3 \frac{\partial w_3}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_3 \nabla w_3) = 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_3 \\ w_3(x, y, z, t = 0) = w_{3,0}(x, y, z), & C.I. \\ w_3 = w_2 |_{\Gamma_7}, & \text{sur } \Gamma_7 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_3 \nabla w_3) = h_{cv,3}(w_3 - u_{ext}) + \zeta \delta (w_3^4 - u_{ext}^4), & \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{3,r} \\ w_3 = w_{imp}, & \text{sur } \Gamma_8 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

avec $h_{cv,\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, ζ , δ et R sont des constantes positives.

On considère dans la suite deux situations distinctes où la conductivité thermique $\lambda_{\mathcal{I}}$ est, d'une part, constante et, d'autre part, fonction de la température; dans ce dernier cas $\lambda_{\mathcal{I}} = \lambda_{\mathcal{I}}(\cdot, t, w_{\mathcal{I}})$ avec $\rho_{\mathcal{I}}$ et $c_{\mathcal{I}}$ constants, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$. Une troisième situation plus générale correspondra au cas où les coefficients physiques $\lambda_{\mathcal{I}}$, $\rho_{\mathcal{I}}$ et $c_{\mathcal{I}}$ dépendent de la solution $w_{\mathcal{I}}(\cdot, t)$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$.

FIGURE 2.8 – Représentation du domaine Ω_3 et des frontières.

Le problème sans contrainte à résoudre sur chaque zone est non linéaire. Cette dernière propriété provient, d'une part, des coefficients physiques et, d'autre part, des conditions aux limites ; la prise en compte des effets de rayonnement du matériau vers un milieu extérieur est modélisé par des coefficients d'échange variant de façon fortement non linéaire en fonction de la température. En effet, ces non linéarités plus particulièrement la condition de rayonnement sont à la base de plusieurs difficultés telle l'impossibilité de déterminer la solution analytique. La non linéarité va donc devoir être prise en compte au niveau de la résolution numérique.

2.2 Le problème continu avec contrainte

Dans cette section, nous nous intéressons au problème continu avec contrainte. Pour tenir compte de la réalité physique des problèmes à coulée continue, on considère l'hypothèse réaliste que les températures $w_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ sont des fonctions strictement positives ou nulles, i.e. $w_{\mathcal{I}}(\mathbf{x}) \geq 0$; cette condition est évidemment vérifiée sur chaque sous domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$ $\mathcal{I} = 1, 2, 3$. Dans ce cas, on a à résoudre, non pas une équation aux dérivées partielles mais une inéquation. La solution du problème précédent est alors caractérisée par diverses formulations. Il s'agit, en fait, d'un problème d'obstacle [14]. Pour chaque zone $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, la condition au limite de type convection et rayon-

nement $\Psi_{\mathcal{I}}(w_{\mathcal{I}}) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ où $\Psi_{\mathcal{I}}(w_{\mathcal{I}})$ est donnée par

$$\Psi_{\mathcal{I}}(w_{\mathcal{I}}) = h_{cv,\mathcal{I}}(w_{\mathcal{I}} - u_{ext}) + \zeta\delta(w_{\mathcal{I}}^4 - u_{ext}^4), \quad \mathcal{I} = 1, 2, 3$$

comme $w_{\mathcal{I}} \geq 0$, $\Psi_{\mathcal{I}}(w_{\mathcal{I}})$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, est une application croissante (voir Figure 2.9).

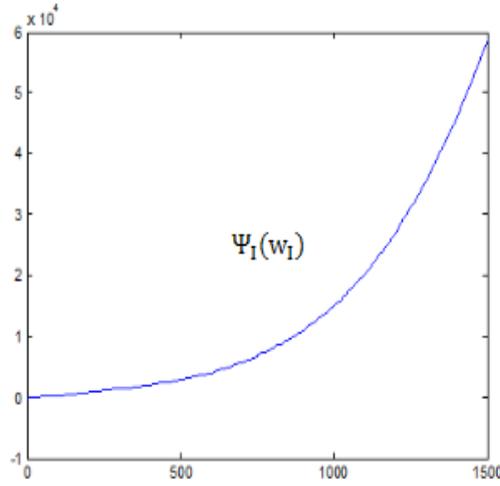


FIGURE 2.9 – Représentation graphique de la condition de convection et de rayonnement.

Ainsi grâce à cette propriété de croissance, chaque problème aux limites est perturbé par un opérateur monotone maximal [14], [34]. Par conséquent, chaque problème défini dans $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ s'écrit classiquement [14], [34] comme suit :

Dans la **zone liquide** Ω_1

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} - \text{div}(\lambda_1 \nabla w_1) \geq 0, & w_1 \geq 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_1 \\ (\rho_1 c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} - \text{div}(\lambda_1 \nabla w_1)) w_1 = 0, & & [0, t_{final}] \times \Omega_1 \\ w_1(x, y, t = 0) = w_{1,0}(x, y), & & C.I. \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \Phi_{imp}, & & \text{sur } \Gamma_1 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = h_{cv,1}(w_1 - u_{ext}) + \zeta\delta(w_1^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \Gamma_{1,2} \cup \Gamma_{1,3} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \frac{1}{R}(w_1 - u_{cst}), & & \text{sur } \Gamma_5 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Dans la **zone pâteuse** Ω_2

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_2 c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} - \text{div}(\lambda_2 \nabla w_2) \geq 0, & w_2 \geq 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_2 \\ (\rho_2 c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} - \text{div}(\lambda_2 \nabla w_2)) w_2 = 0, & & [0, t_{final}] \times \Omega_2 \\ w_2(x, y, t = 0) = w_{2,0}(x, y), & & C.I. \\ w_2 = w_1|_{\Gamma_5}, & & \text{sur } \Gamma_5 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = h_{cv,2}(w_2 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_2^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \Gamma_{2,2} \cup \Gamma_{2,3} \\ -\vec{n}_2 \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = \frac{1}{R}(w_2 - u_{cst}), & & \text{sur } \Gamma_6 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

et dans la **zone solide** Ω_3

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_3 c_3 \frac{\partial w_3}{\partial t} - \text{div}(\lambda_3 \nabla w_3) \geq 0, & w_3 \geq 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_3 \\ (\rho_3 c_3 \frac{\partial w_3}{\partial t} - \text{div}(\lambda_3 \nabla w_3)) w_3 = 0, & & [0, t_{final}] \times \Omega_3 \\ w_3(x, y, t = 0) = w_{3,0}(x, y), & & C.I. \\ w_3 = w_2|_{\Gamma_6}, & & \text{sur } \Gamma_6 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_3 \nabla w_3) = h_{cv,3}(w_3 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_3^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \Gamma_{3,2} \cup \Gamma_{3,3} \\ w_3 = w_{imp}, & & \text{sur } \Gamma_4 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Dans (2.7), (2.8) et (2.9), la seconde équation en ce que l'on appelle la condition de complémentation qui signifie que l'un des fonctions du produit est au moins nul.

Dans la suite, on considérera une semi-discretisation avec soit un schéma implicite soit un schéma semi-implicite en temps, la partie spatiale restant continue. Donc reformulons respectivement les problèmes continus avec contrainte type paraboliques (2.7), (2.8) et (2.9) en une suite de problèmes stationnaires avec contraintes. On écrit alors ces problèmes stationnaires non linéaires comme suit :

Dans le domaine Ω_1

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{div}(\lambda_1 \nabla w_1) + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} w_1 - g_1 \geq 0, & w_1 \geq 0, & p.p \text{ sur } \Omega_1 \\ (-\text{div}(\lambda_1 \nabla w_1) + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} w_1 - g_1) w_1 = 0, & & p.p \text{ sur } \Omega_1 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \Phi_{imp}, & & \text{sur } \Gamma_1 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = h_{cv,1}(w_1 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_1^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \Gamma_{1,2} \cup \Gamma_{1,3} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \frac{1}{R}(w_1 - u_{cst}), & & \text{sur } \Gamma_5 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Dans le domaine Ω_2

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div(\lambda_2 \nabla w_2) + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} w_2 - g_2 \geq 0, & w_2 \geq 0, & p.p \text{ sur } \Omega_2 \\ (-div(\lambda_2 \nabla w_2) + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} w_2 - g_2) w_2 = 0, & & p.p \text{ sur } \Omega_2 \\ w_2 = w_1|_{\Gamma_5}, & & \text{sur } \Gamma_5 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = h_{cv,2}(w_2 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_2^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \Gamma_{2,2} \cup \Gamma_{2,3} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = \frac{1}{R}(w_2 - u_{cst}), & & \text{sur } \Gamma_6 \end{array} \right. \quad (2.11)$$

et dans le domaine Ω_3

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div(\lambda_3 \nabla w_3) + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} w_3 - g_3 \geq 0, & w_3 \geq 0, & p.p \text{ sur } \Omega_3 \\ (-div(\lambda_3 \nabla w_3) + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} w_3 - g_3) w_3 = 0, & & p.p \text{ sur } \Omega_3 \\ w_3 = w_2|_{\Gamma_6}, & & \text{sur } \Gamma_6 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_3 \nabla w_3) = h_{cv,3}(w_3 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_3^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \Gamma_{3,2} \cup \Gamma_{3,3} \\ w_3 = w_{imp}, & & \text{sur } \Gamma_4 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

où Δt est le pas de discrétisation temporelle et pour $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, $g_{\mathcal{I}} = \frac{\rho_{\mathcal{I}} c_{\mathcal{I}}}{\Delta t} w_{\mathcal{I}}^{prec}$ où $w_{\mathcal{I}}^{prec}$ sont les solutions calculées au pas de temps précédent.

Cas tridimensionnel

En dimension 3, les problèmes continus avec contraintes sur chaque zone s'écrivent de manière analogue :

Dans le domaine Ω_1

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} - div(\lambda_1 \nabla w_1) \geq 0, & w_1 \geq 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_1 \\ (\rho_1 c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} - div(\lambda_1 \nabla w_1)) w_1 = 0, & & [0, t_{final}] \times \Omega_1 \\ w_1(x, y, z, t = 0) = w_{1,0}(x, y, z), & & C.I. \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \Phi_{imp}, & & \text{sur } \Gamma_1 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = h_{cv,1}(w_1 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_1^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{1,r} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \frac{1}{R}(w_1 - u_{cst}), & & \text{sur } \Gamma_6 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Dans le domaine Ω_2

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_2 c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_2 \nabla w_2) \geq 0, & w_2 \geq 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_2 \\ (\rho_2 c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_2 \nabla w_2)) w_2 = 0, & & [0, t_{final}] \times \Omega_2 \\ w_2(x, y, z, t = 0) = w_{2,0}(x, y, z), & & C.I. \\ w_2 = w_1|_{\Gamma_6}, & & \text{sur } \Gamma_6 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = h_{cv,2}(w_2 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_2^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{2,r} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = \frac{1}{R}(w_2 - u_{cst}), & & \text{sur } \Gamma_7 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

et dans le domaine Ω_3

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_3 c_3 \frac{\partial w_3}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_3 \nabla w_3) \geq 0, & w_3 \geq 0, & [0, t_{final}] \times \Omega_3 \\ (\rho_3 c_3 \frac{\partial w_3}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_3 \nabla w_3)) w_3 = 0, & & [0, t_{final}] \times \Omega_3 \\ w_3(x, y, z, t = 0) = w_{3,0}(x, y, z), & & C.I. \\ w_3 = w_2|_{\Gamma_7}, & & \text{sur } \Gamma_7 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_3 \nabla w_3) = h_{cv,3}(w_3 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_3^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{3,r} \\ w_3 = w_{imp}, & & \text{sur } \Gamma_8 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Après reformulation en une suite de problèmes aux inéquations stationnaires, on obtient :

Dans le domaine Ω_1

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\lambda_1 \nabla w_1) + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} w_1 - g_1 \geq 0, & w_1 \geq 0, & p.p \text{ sur } \Omega_1 \\ (-\operatorname{div}(\lambda_1 \nabla w_1) + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} w_1) w_1 = 0, & & p.p \text{ sur } \Omega_1 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \Phi_{imp}, & & \text{sur } \Gamma_1 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = h_{cv,1}(w_1 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_1^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{1,r} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla w_1) = \frac{1}{R}(w_1 - u_{cst}), & & \text{sur } \Gamma_6 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Dans le domaine Ω_2

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\lambda_2 \nabla w_2) + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} w_2 - g_2 \geq 0, & w_2 \geq 0, & p.p \text{ sur } \Omega_2 \\ (-\operatorname{div}(\lambda_2 \nabla w_2) + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} w_2) w_2 = 0, & & p.p \text{ sur } \Omega_2 \\ w_2 = w_1|_{\Gamma_6}, & & \text{sur } \Gamma_6 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = h_{cv,2}(w_2 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_2^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{2,r} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla w_2) = \frac{1}{R}(w_2 - u_{cst}), & & \text{sur } \Gamma_7 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

et dans le domaine Ω_3

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\lambda_3 \nabla w_3) + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} w_3 - g_3 \geq 0, & w_3 \geq 0, & p.p \text{ sur } \Omega_3 \\ (-\operatorname{div}(\lambda_3 \nabla w_3) + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} w_3) w_3 = 0, & & p.p \text{ sur } \Omega_3 \\ w_2 = w_2|_{\Gamma_7}, & & \text{sur } \Gamma_7 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_3 \nabla w_3) = h_{cv,3}(w_3 - u_{ext}) + \zeta \delta(w_3^4 - u_{ext}^4), & & \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{2,r} \\ w_3 = w_{imp}, & & \text{sur } \Gamma_8 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

2.3 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous nous concentrons principalement sur la formulation variationnelle associée au problème stationnaire avec contrainte. L'analyse mathématique de ce problème est délicate, compte tenu des non linéarités sur une partie de la frontière. Nous renvoyons au livre de Duvaut- Lions [14], où ce type de non linéarité sur les frontières ainsi que des contraintes sur la solution $w_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, sont présentés.

Dans ce qui suit, notons pour $\mathcal{I} = 1, 2, 3$:

$$\gamma_{\mathcal{I}} \equiv \begin{cases} \Gamma_{\mathcal{I},2} \cup \Gamma_{\mathcal{I},3} & \text{en } 2D \\ \Gamma_{\mathcal{I},2} \cup \Gamma_{\mathcal{I},3} \cup \Gamma_{\mathcal{I},4} \cup \Gamma_{\mathcal{I},5} & \text{en } 3D \end{cases}$$

2.3.1 Formulation variationnelle bidimensionnelle

Transformation du problème bidimensionnel pour le cas sans contrainte.

Zone liquide : L'espace de travail est $W_1 = \mathcal{H}^1(\Omega_1)$ et on prend $w_1 = u_1$.

En multipliant l'équation définie dans le domaine Ω_1 par une fonction test $v_1 \in W_1$ et en intégrant sur le domaine Ω_1 , on obtient, par l'application de la formule de Green, et compte tenu des conditions aux limites, la formulation variationnelle du problème stationnaire sans contrainte associé au problème (2.1) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } u_1 \in W_1 \text{ tel que} \\ a_1(u_1, v_1) = L_1(v_1), \forall v_1 \in W_1 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

où

$$a_1(u_1, v_1) = \int_{\Omega_1} \left(\lambda_1 \nabla u_1 \nabla v_1 + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} u_1 v_1 \right) d\Omega_1 + \oint_{\gamma_1} (h_{cv,1} u_1 + \zeta \sigma u_1^4) v_1 ds_1 \\ + \oint_{\Gamma_5} \frac{1}{R} u_1 v_1 ds_1$$

et

$$L_1(v_1) = \int_{\Omega_1} \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} u_1^{pres} v_1 d\Omega_1 + \oint_{\gamma_1} (h_{cv,1} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) v_1 ds_1 + \oint_{\Gamma_5} \frac{1}{R} u_{cst} v_1 ds_1 \\ - \oint_{\Gamma_1} \Phi_{imp} v_1 ds_1$$

$W_1 = \mathcal{H}^1(\Omega_1)$ est un espace de Hilbert pour la norme définie par $\| \cdot \|_{1,\Omega_1}$

où $\| u_1 \|_{1,\Omega_1} = \left(\int_{\Omega_1} (|\nabla u_1|^2 + u_1^2) d\Omega_1 \right)^{\frac{1}{2}}$. Pour tenir compte de la contrainte $u_1 \geq 0$, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{K}_1 = \{ u_1 \in \mathcal{H}^1(\Omega_1) / u_1 \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega_1 \} \quad (2.20)$$

Classiquement \mathcal{K}_1 est un ensemble convexe fermé. Alors, la résolution du problème stationnaire (2.10) se ramène à la résolution d'une inéquation variationnelle suivante

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_1 \in \mathcal{K}_1 & \text{tel que} \\ a_1(u_1, v_1 - u_1) \geq L_1(v_1 - u_1), \forall v_1 \in \mathcal{K}_1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Zone pâteuse : Les conditions aux limites sont de type Neumann et de type Dirichlet non homogènes. Classiquement, la valeur imposée de u_2 uniquement sur la frontière Γ_5 constitue une condition aux limites essentielle qui peut être relevée (voir annexe A). On choisit alors

$$W_2 = \{ v_2 | v_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega_2), v_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_5 \}$$

avec

$$V_2 = \{ v_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega_2), v_2 = w_1 | \Gamma_5 \}$$

et la formulation variationnelle du problème stationnaire sans contrainte associé au

problème (2.2) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } w_2 \in W_2 \text{ tel que} \\ a_2(w_2, v_2) = L_2(v_2), \forall v_2 \in W_2 \end{cases} \quad (2.22)$$

où

$$\begin{aligned} a_2(w_2, v_2) &= \int_{\Omega_2} \left(\lambda_2 \nabla w_2 \nabla v_2 + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} w_2 v_2 \right) d\Omega_2 + \oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} w_2 + \zeta \delta w_2^4) v_2 ds_2 \\ &+ \oint_{\Gamma_6} \frac{1}{R} w_2 v_2 ds_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_2(v_2) &= \int_{\Omega_2} \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} w_2^{pres} v_2 d\Omega_2 + \oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) v_2 ds_2 \\ &+ \oint_{\Gamma_6} \frac{1}{R} u_{cst} v_2 ds_2, \end{aligned}$$

En effet, on décompose la fonction recherchée w_2 en une somme $u_2 + \tilde{u}_1$ où $u_2 \in W_2$ et $\tilde{u}_1 = w_1|_{\Gamma_5}$. On a,

$$w_2^4 = (u_2 + \tilde{u}_1)^4 = \underbrace{u_2^4 + 4\tilde{u}_1 u_2^3 + 6\tilde{u}_1^2 u_2^2 + 4\tilde{u}_1^3 u_2 + \tilde{u}_1^4}_{P_{2,4}(u_2)} \quad (2.23)$$

Alors, le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_2 \in W_2 \text{ tel que} \\ a_2(u_2, v_2) = L_2(v_2), \forall v_2 \in W_2 \end{cases} \quad (2.24)$$

où

$$\begin{aligned} a_2(u_2, v_2) &= \int_{\Omega_2} \left(\lambda_2 \nabla u_2 \nabla v_2 + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} u_2 v_2 \right) d\Omega_2 + \oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} u_2 v_2 + \zeta \sigma P_{2,4}(u_2)) v_2 ds_2 \\ &+ \oint_{\Gamma_6} \frac{1}{R} u_2 v_2 ds_2 \end{aligned}$$

et

$$L_2(v_2) = \tilde{L}_2(v_2) - \tilde{a}_2(\tilde{u}_1, v_2)$$

avec

$$\tilde{L}_2(v_2) = \int_{\Omega_2} \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} u_2^{pres} v_2 d\Omega_2 + \oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) v_2 ds_2 + \oint_{\Gamma_6} \frac{1}{R} u_{cst} v_2 ds_2$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2(\tilde{u}_1, v_2) &= \int_{\Omega_2} \left(\lambda_2 \nabla \tilde{u}_1 \nabla v_2 + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} \tilde{u}_1 \right) v_2 d\Omega_2 + \oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} \tilde{u}_1 + \zeta \delta \tilde{u}_1^4) v_2 ds_2 \\ &+ \oint_{\Gamma_6} \frac{1}{R} \tilde{u}_1 v_2 ds_2 \end{aligned}$$

Soit \mathcal{K}_2 l'ensemble convexe fermé

$$\mathcal{K}_2 = \{u_2 \in W_2 / u_2 \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega_2\} \quad (2.25)$$

Alors, l'inéquation variationnelle correspondant au problème stationnaire avec la contrainte $u_2 \geq 0$ associé à (2.11) s'écrit

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_2 \in \mathcal{K}_2 \text{ tel que} \\ a_2(u_2, v_2 - u_2) \geq L_2(v_2 - u_2), \forall v_2 \in \mathcal{K}_2 \end{cases} \quad (2.26)$$

Zone solide : Par un raisonnement analogue à celui effectué dans la zone pâteuse, on choisit

$$W_3 = \{v_3 | v_3 \in \mathcal{H}^1(\Omega_3) \quad v_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_4 \text{ et } \Gamma_6\}$$

avec

$$V_3 = \{v_3 \in \mathcal{H}^1(\Omega_3) \quad v_3 = w_2 | \Gamma_6 \text{ et } v_3 = w_{imp} \text{ sur } \Gamma_4\}.$$

Alors, la formulation variationnelle associée au problème stationnaire sans contrainte correspondant à (2.3) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } w_3 \in W_3 \text{ tel que} \\ a_3(w_3, v_3) = L_3(v_3), \forall v_3 \in W_3 \end{cases} \quad (2.27)$$

où

$$a_3(w_3, v_3) = \int_{\Omega_3} \left(\lambda_3 \nabla w_3 \nabla v_3 + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} w_3 v_3 \right) d\Omega_3 + \oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} w_3 + \zeta \sigma w_3^4) v_3 ds$$

et

$$L_3(v_3) = \int_{\Omega_3} \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} w_3^{pres} v_3 d\Omega_3 + \oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) v_3 ds,$$

On pose, alors comme précédemment $w_3 = u_3 + \tilde{u}$ avec $u_3 \in W_3$ et

$$\tilde{u} = \begin{cases} \tilde{u}_1 = w_2|_{\Gamma_6} \\ \tilde{u}_2 = w_{imp}|_{\Gamma_4} \end{cases}$$

On a,

$$w_3^4 = (u_3 + \tilde{u})^4 = \underbrace{u_3^4 + 4\tilde{u}u_3^3 + 6\tilde{u}^2u_3^2 + 4\tilde{u}^3u_3 + \tilde{u}^4}_{P_{3,4}(u_3)} \quad (2.28)$$

alors le problème sans contrainte (2.3) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_3 \in W_3 \text{ tel que} \\ a_3(u_3, v_3) = L_3(v_3), \forall v_3 \in W_3 \end{cases} \quad (2.29)$$

où

$$a_3(u_3, v_3) = \int_{\Omega_3} \left(\lambda_3 \nabla u_3 \nabla v_3 + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} u_3 v_3 \right) d\Omega_3 + \oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} u_3 + \zeta \sigma P_{3,4}(u_3)) v_3 ds_3$$

et

$$L_3(v_3) = \tilde{L}_3(v_3) - \tilde{a}_3(\tilde{u}, v_3)$$

avec

$$\tilde{L}_3(v_3) = \int_{\Omega_3} \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} w_3^{pres} v_3 d\Omega_3 + \oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) v_3 ds_3$$

$$\tilde{a}_3(\tilde{u}, v_3) = \int_{\Omega_3} \left(\lambda_3 \nabla \tilde{u} \nabla v_3 + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} \tilde{u} v_3 \right) d\Omega_3 + \oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} \tilde{u} + \zeta \delta \tilde{u}^4) v_3 ds_3$$

Soit \mathcal{K}_3 l'ensemble convexe fermé

$$\mathcal{K}_3 = \{u_3 \in W_3 / u_3 \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega_3\}, \quad (2.30)$$

la résolution du problème avec contrainte $u_3 \geq 0$ correspondant à (2.12) dans la zone

solide se ramène classiquement à la résolution de l'inéquation variationnelle suivante

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_3 \in \mathcal{K}_3 \text{ tel que} \\ a_3(u_3, v_3 - u_3) \geq L_3(v_3 - u_3), \forall v_3 \in \mathcal{K}_3 \end{cases} \quad (2.31)$$

Remarque 2.1. *L'expression $a_{\mathcal{I}}(u_{\mathcal{I}}, v_{\mathcal{I}})$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ est la somme d'une forme bilinéaire où $\lambda_{\mathcal{I}}, \mathcal{I} = 1, 2, 3$ dépend de la valeur $u_{\mathcal{I}}$ au pas de temps précédent et d'un terme non linéaire résultant de la condition de rayonnement (condition de Stefan).*

2.3.2 Existence et unicité du problème stationnaire bidimensionnel

Cette sous-section est consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité du problème modèle sur chaque zone. Cette étude est difficile notamment à cause des non linéarités. Bien que la théorie des problèmes non linéaires soit beaucoup plus complexe, nous nous limitons à une généralisation formelle de la théorie développée dans le cas linéaire [20].

La réalité physique du problème de solidification au niveau de la coulée continue prédit que les conditions aux limites sont classiques mais difficiles à préciser, parce que les lingots se déplacent à la vitesse de la coulée et sont coupés parfois plus que court que prévue. Donc, il est évident que toute condition au limite ne pouvait être seulement qu'une approximation [47].

De ce fait, la condition au limite non linéaire de type rayonnement définie par la loi de Stefan dominante sur la frontière $\gamma_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, $\zeta\delta(u_{\mathcal{I}}^4 - u_{ext}^4)$ est juste approximée lors du contact avec l'aire par une condition au limite linéaire [47].

La linéarisation de la condition de rayonnement autour d'une température constante conduit à une condition au limite linéaire de la forme suivante :

$$\zeta\delta(u_{\mathcal{I}}^4 - u_{ext}^4) \approx \zeta\delta(u_{\mathcal{I}} - u_{ext})(w_m + u_{ext})(w_m^2 + u_{ext}^2)$$

où w_m température extérieure du moule.

Grâce à cette approximation les expressions $a_{\mathcal{I}}(\cdot, \cdot)$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, sont des formes bilinéaires.

Par ailleurs, une hypothèse supplémentaire sur $\|u_{\mathcal{I}}^{\beta}\|_{0, \gamma_{\mathcal{I}}}$ avec $1 < \beta \leq 8$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ est nécessaire pour tenir compte de la non-linéarité ; cette hypothèse permet de prouver la continuité de la forme $a_{\mathcal{I}}(\cdot, \cdot)$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$.

En effet, on peut toujours trouver une constante $C_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, suffisamment grande telle que l'inégalité

$$\left\| u_{\mathcal{I}}^{\beta} \right\|_{0, \gamma_{\mathcal{I}}} \leq C_{\mathcal{I}} \|u_{\mathcal{I}}\|_{0, \gamma_{\mathcal{I}}}, \quad \forall u_{\mathcal{I}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}} \quad 1 < \beta \leq 8 \quad \mathcal{I} = 1, 2, 3 \quad (2.32)$$

soit vérifiée et où $\|\cdot\|_{0, \gamma_{\mathcal{I}}}$ est la norme dans $L^2(\gamma_{\mathcal{I}})$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$.

D'autre part, le coefficient de conductivité $\lambda_{\mathcal{I}}(\cdot, u_{\mathcal{I}})$ dépend de la solution $u_{\mathcal{I}}$ au pas de temps précédent ; nous supposons qu'il est borné inférieurement et supérieurement par deux constantes $\underline{\lambda}_{\mathcal{I}} > 0$ et $\bar{\lambda}_{\mathcal{I}}$, i.e.,

$$\underline{\lambda}_{\mathcal{I}} \leq \lambda_{\mathcal{I}}(\cdot, u_{\mathcal{I}}) \leq \bar{\lambda}_{\mathcal{I}}, \quad \mathcal{I} = 1, 2, 3. \quad (2.33)$$

Rappelons le théorème de Stampacchia qui est nécessaire et utile pour la suite.

Théorème 2.1. [14] Soient

- W un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
- \mathcal{K} une partie convexe fermée non vide de W ,
- $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire vérifiant les hypothèses de
 - 1- Continuité sur $W \times W : \exists M > 0 \forall u, v \in W$

$$a(u, v) \leq M \|u\| \|v\|.$$

- 2- Coercivité sur $W : \exists \alpha > 0 \forall v \in W$

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2.$$

- $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur W .

Sous ces hypothèses, il existe un unique $u \in \mathcal{K}$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{K}, \quad a(u, v - u) \geq L(v - u).$$

Si de plus, la forme $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est l'unique élément de \mathcal{K} qui minimise la fonctionnelle $J : W \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ pour tout v de \mathcal{K} , en particulier :

$$\exists! u \in \mathcal{K} \quad J(u) = \min_{v \in \mathcal{K}} J(v)$$

Classiquement $W_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ muni de la norme $\|u_{\mathcal{I}}\|_{1, \Omega_{\mathcal{I}}}^2 =$

($\| \nabla u_{\mathcal{I}} \|_{0, \Omega_{\mathcal{I}}}^2 + \| u_{\mathcal{I}} \|_{0, \Omega_{\mathcal{I}}}^2$) sont des espaces de Hilbert où $\| u_{\mathcal{I}} \|_{0, \Omega_{\mathcal{I}}}^2$ est la norme dans $L^2(\Omega_{\mathcal{I}})$ et $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ sont des ensembles convexes fermés.

Assurons nous que sur chaque sous domaine les hypothèses du théorème de Stampacchia sont satisfaites :

1- Dans la zone liquide

1- Prouvons la **coercivité** de $a_1(., .)$; compte-tenu de la définition de l'ensemble \mathcal{K}_1 et de la relation (2.33), on a :

$$a_1(v_1, v_1) = \int_{\Omega_1} \left(\lambda_1 |\nabla v_1|^2 + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} v_1^2 \right) d\Omega_1 + \oint_{\gamma_1} (h_{cv,1} v_1^2 + \zeta \sigma v_1^5) ds_1 + \oint_{\Gamma_5} \frac{1}{R} v_1^2 ds_1$$

comme

$$v_1 \geq 0, \text{ on a } \oint_{\gamma_1} (h_{cv,1} v_1^2 + \zeta \sigma v_1^5) ds_1 \geq 0, \quad \oint_{\Gamma_5} \frac{1}{R} v_1^2 ds_1 \geq 0 \text{ et } R > 0$$

et on obtient alors, de manière évidente

$$a_1(v_1, v_1) \geq \int_{\Omega_1} (\underline{\lambda}_1 |\nabla v_1|^2 + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} |v_1|^2) d\Omega_1 \geq C_{L,1} \|v_1\|_{1, \Omega_1}^2 \quad (2.34)$$

où

$$C_{L,1} = \inf(\underline{\lambda}_1, \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t})$$

où $C_{L,1}$ est une constante positive.

2- La continuité de $a_1(., .)$

$$\begin{aligned} |a_1(u_1, v_1)| &\leq \left| \int_{\Omega_1} \left(\lambda_1 |\nabla u_1 \nabla v_1 + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} u_1 v_1 \right) d\Omega_1 \right| + \left| \oint_{\gamma_1} h_{cv,1} u_1 v_1 ds_1 \right| \\ &\quad + \left| \oint_{\gamma_1} \zeta \sigma u_1^4 v_1 ds_1 \right| + \left| \oint_{\Gamma_5} \frac{1}{R} u_1 v_1 ds_1 \right| \end{aligned}$$

D'une part, d'après l'inégalité de Holder-Minkowski et, d'autre part, par applica-

tion de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
 |a_1(u_1, v_1)| &\leq \bar{\lambda}_1 \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 d\Omega_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_1} |\nabla v_1|^2 d\Omega_1 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} \left(\int_{\Omega_1} |u_1|^2 d\Omega_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \left(\int_{\Omega_1} |v_1|^2 d\Omega_1 \right)^{\frac{1}{2}} + h_{cv,1} \left(\oint_{\gamma_1} |u_1|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\oint_{\gamma_1} |v_1|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \zeta \sigma \left(\oint_{\gamma_1} |u_1^4|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\oint_{\gamma_1} |v_1|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{R} \left(\oint_{\Gamma_5} |u_1|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\oint_{\Gamma_5} |v_1|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |a_1(u_1, v_1)| &\leq \max\left(\bar{\lambda}_1, \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t}\right) \underbrace{\left(\|\nabla u_1\|_{0,\Omega_1}^2 + \|u_1\|_{0\Omega_1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|u_1\|_{1,\Omega_1}} \underbrace{\left(\|\nabla v_1\|_{0,\Omega_1}^2 + \|v_1\|_{0\Omega_1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_1\|_{1,\Omega_1}} \\
 &\quad + h_{cv,1} \|u_1\|_{0,\gamma_1} \|v_1\|_{0,\gamma_1} + \zeta \sigma \|u_1^4\|_{0,\gamma_1} \|v_1\|_{0,\gamma_1} + \frac{1}{R} \|u_1\|_{0,\Gamma_5} \|v_1\|_{0,\Gamma_5}
 \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (2.32), on a

$$\|u_1^4\|_{0,\gamma_1} \|v_1\|_{0,\gamma_1} \leq C_1 \|u_1\|_{0,\gamma_1} \|v_1\|_{0,\gamma_1} \leq C_1 \|u_1\|_{0,\partial\Omega_1} \|v_1\|_{0,\partial\Omega_1}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
 |a_1(u_1, v_1)| &\leq \max\left(\bar{\lambda}_1, \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t}\right) \|u_1\|_{1,\Omega_1} \|v_1\|_{1,\Omega_1} + (h_{cv,1} + C_1 \zeta \sigma) \|u_1\|_{0,\partial\Omega_1} \|v_1\|_{0,\partial\Omega_1} \\
 &\quad + \frac{1}{R} \|u_1\|_{0,\partial\Omega_1} \|v_1\|_{0,\partial\Omega_1}
 \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de trace [14], il existe une constante positive $C_{L,2}(\Omega_1)$ et alors on a :

$$\begin{aligned}
 |a_1(u_1, v_1)| &\leq \max\left(\bar{\lambda}_1, \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t}\right) \|u_1\|_{1,\Omega_1} \|v_1\|_{1,\Omega_1} \\
 &\quad + C_{L,2}^2(\Omega_1) (h_{cv,1} + C_1 \zeta \sigma + \frac{1}{R}) \|u_1\|_{1,\Omega_1} \|v_1\|_{1,\Omega_1}.
 \end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire :

$$|a_1(u_1, v_1)| \leq C_{L,3} \|u_1\|_{1,\Omega_1} \|v_1\|_{1,\Omega_1}$$

où

$$C_{L,3} = \max(\bar{\lambda}_1, \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t}) + C_{L,2}^2(\Omega_1)(h_{cv,1} + C_1 \zeta \sigma + \frac{1}{R}),$$

$C_{L,2}(\Omega_1)$ est une constante positive.

3- $L_1(\cdot)$ est une forme linéaire **continue**.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} |L_1(v_1)| &\leq \left(\int_{\Omega_1} \left| \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} u_1^{pres} \right|^2 d\Omega_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_1} |v_1|^2 d\Omega_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \underbrace{\left(\int_{\Gamma_1} |h_{cv,1} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{L,5}} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_1} |v_1|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_1\|_{0,\Gamma_1}} \\ &\quad + \underbrace{\left(\int_{\Gamma_5} \left| \frac{1}{R} u_{cst} \right|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{L,6}} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_5} |v_1|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_1\|_{0,\Gamma_5}} \\ &\quad + \underbrace{\left(\int_{\Gamma_1} |\Phi_{imp}|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{L,7}} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_1} |v_1|^2 ds_1 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_1\|_{0,\Gamma_1}} \end{aligned}$$

ceci implique

$$|L_1(v_1)| \leq C_{L,4} \|v_1\|_{1,\Omega_1} + (C_{L,5} + C_{L,6} + C_{L,7}) \|v_1\|_{0,\partial\Omega_1}$$

On utilise de nouveau le théorème de trace et on a alors :

$$\begin{aligned} |L_1(v_1)| &\leq (C_{L,4} + C_{L,2}(\Omega_1)(C_{L,5} + C_{L,6} + C_{L,7})) \|v_1\|_{1,\Omega_1} \\ &\leq C_{L,8} \|v_1\|_{1,\Omega_1} \end{aligned}$$

où

$$C_{L,8} = C_{L,4} + C_{L,2}(\Omega_1)(C_{L,5} + C_{L,6} + C_{L,7}), \quad C_{L,4} = \left(\int_{\Omega_1} \left| \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} u_1^{pres} \right|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

sont des constantes positives.

2- Dans la zone pâteuse

En effet, par un raisonnement analogue à celui effectué dans le cas de la zone liquide, on a :

1- La coercivité de $a_2(.,.)$ est vérifiée. On a

$$a_2(v_2, v_2) = \int_{\Omega_2} (\lambda_2 \nabla v_2^2 + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} v_2^2) d\Omega_2 + \oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} v_2^2 + \zeta \sigma P_{2,4}(v_2) \cdot v_2) ds_2 + \oint_{\Gamma_6} \frac{1}{R} v_2^2 ds_2$$

et comme

$$\oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} v_2^2 + \zeta \sigma P_{2,4}(v_2) \cdot v_2) ds_2 \geq 0, \quad \oint_{\Gamma_6} \frac{1}{R} v_2^2 ds_2 \geq 0, \quad \text{puisque } v_2 \geq 0 \text{ et } R > 0$$

et compte tenu de la relation (2.33), on aboutit à

$$a_2(v_2, v_2) \geq \int_{\Omega_2} (\underline{\lambda}_2 |\nabla v_2|^2 + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} |v_2|^2) d\Omega_2 \geq C_{P,1} \|v_2\|_{1,\Omega_2}^2 \quad (2.35)$$

où $C_{P,1} = \inf(\underline{\lambda}_2, \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t})$ est une constante positive.

Dans ce qui suit, on donne un lemme qui est important pour montrer la continuité de la forme $a_{\mathcal{I}}(.,.)$, $\mathcal{I} = 2, 3$.

Lemme 2.1. *Soit $P_{\mathcal{I},4}(u_{\mathcal{I}})$, $u_{\mathcal{I}} \geq 0$, $\mathcal{I} = 2, 3$, un polynôme de degré 4. Si l'hypothèse (2.32) est vérifiée aussi bien en 2D qu'en 3D, alors*

$$\left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |P_{\mathcal{I},4}(u_{\mathcal{I}})|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \Theta_{\mathcal{I}}^{\frac{1}{2}} \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}}$$

avec $\Theta_{\mathcal{I}} = C_{\mathcal{I}} \left(\text{mes}(\gamma_{\mathcal{I}}) + 8\tilde{C}_1 + 28\tilde{C}_2 + 56\tilde{C}_3 + 68\tilde{C}_4 + 48\tilde{C}_5 + 16\tilde{C}_6 \right)$ et \tilde{C} sont des constantes positives.

Preuve. Voir Annexe B.

2- La forme $a_2(\cdot, \cdot)$ est **continu**.

En effet, comme précédemment, on applique l'inégalité de Holder-Minkovski, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; il vient alors :

$$|a_2(u_2, v_2)| \leq \max(\bar{\lambda}_2, \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t}) \|u_2\|_{1, \Omega_2} \|v_2\|_{1, \Omega_2} + h_{cv,2} \|u_2\|_{0, \gamma_2} \|v_2\|_{0, \gamma_2} \\ + \frac{1}{R} \|u_2\|_{0, \Gamma_6} \|v_2\|_{0, \Gamma_6} + \zeta \sigma \left(\oint_{\gamma_2} |P_{2,4}(u_2)|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\oint_{\gamma_2} |v_2|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'après le lemme 2.1, on a

$$\left(\oint_{\gamma_2} |P_{2,4}(u_2)|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\gamma_2} |v_2|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \Theta_2^{\frac{1}{2}} \|u_2\|_{0, \gamma_2} \|v_2\|_{0, \gamma_2} \\ \leq \Theta_2^{\frac{1}{2}} \|u_2\|_{0, \partial \Omega_2} \|v_2\|_{0, \partial \Omega_2}.$$

En appliquant le théorème de trace, il existe une constante positive $C_{P,2}^2(\Omega_2)$ telle qu'on aboutit à :

$$|a_2(u_2, v_2)| \leq \left(\max(\bar{\lambda}_2, \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t}) + C_{P,2}^2(\Omega_2) (h_{cv,2} + \Theta_2^{\frac{1}{2}} \zeta \sigma + \frac{1}{R}) \right) \|u_2\|_{1, \Omega_2} \|v_2\|_{1, \Omega_2} \\ \leq C_{P,3} \|u_2\|_{1, \Omega_2} \|v_2\|_{1, \Omega_2}$$

où $C_{P,3} = \max(\bar{\lambda}_2, \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t}) + C_{P,2}^2(\Omega_2) (h_{cv,2} + \Theta_2^{\frac{1}{2}} \zeta \sigma + \frac{1}{R})$ est une constante positive.

3- $L_2(\cdot)$ est une forme linéaire **continu**.

En effet, d'une part, on a :

$$|\tilde{L}_2(v_2)| \leq \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} \left| \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} u_2^{pres} \right|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,4}} \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} |v_2|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_2\|_{1, \Omega_2}} \\ + \underbrace{\left(\int_{\gamma_2} |h_{cv,2} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,5}} \underbrace{\left(\int_{\gamma_2} |v_2|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_2\|_{0, \gamma_2}}$$

$$+ \underbrace{\left(\int_{\Gamma_6} \left| \frac{1}{R} u_{cst} \right|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,6}} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_6} |v_2|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_2\|_{0,\Gamma_6}}$$

Ceci implique

$$\left| \tilde{L}_2(v_2) \right| \leq C_{P,4} \|v_2\|_{1,\Omega_2} + (C_{P,5} + C_{P,6}) \|v_2\|_{0,\partial\Omega_2}.$$

Grâce au théorème de trace, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \left| \tilde{L}_2(v_2) \right| &\leq (C_{P,4} + C_{P,2}(\Omega_2)(C_{P,5} + C_{P,6})) \|v_2\|_{1,\Omega_2} \\ &\leq C_{P,7} \|v_2\|_{1,\Omega_2} \end{aligned}$$

où $C_{P,7} = C_{P,4} + C_{P,2}(\Omega_2)(C_{P,5} + C_{P,6})$ est une constante positive .

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_2(\tilde{u}_1, v_2)| &\leq \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} |\lambda_2 \nabla \tilde{u}_1|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,8}} \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} |\nabla v_2|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,9}} + \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} \left| \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} \tilde{u}_1 \right|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,9}} \\ &\quad \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} |v_2|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,10}} + \underbrace{\left(\int_{\gamma_2} |h_{cv,2} \tilde{u}_1 + \zeta \delta \tilde{u}_1|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,10}} \underbrace{\left(\int_{\gamma_2} |v_2|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,10}} \\ &\quad + \underbrace{\left(\int_{\Gamma_6} \left| \frac{1}{R} \tilde{u}_1 \right|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,11}} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_6} |v_2|^2 ds_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,11}}. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$|\tilde{a}_2(\tilde{u}_1, v_2)| \leq C_{P,8} \|v_2\|_{1,\Omega_2} + C_{P,9} \|v_2\|_{1,\Omega_2} + C_{P,10} \|v_2\|_{0,\partial\Omega_2} + C_{P,11} \|v_2\|_{0,\partial\Omega_2}.$$

En appliquant le théorème de trace, on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_2(\tilde{u}_1, v_2)| &\leq (C_{P,8} + C_{P,9} + C_{P,2}(\Omega_2)(C_{P,10} + C_{P,11})) \|v_2\|_{1,\Omega_2} \\ &\leq C_{P,12} \|v_2\|_{1,\Omega_2} \end{aligned}$$

où $C_{P,12} = C_{P,8} + C_{P,9} + C_{P,2}(\Omega_2)(C_{P,10} + C_{P,11})$ est une constante positive.
Finalement :

$$L_2(v_2) \leq (C_{P,7} + C_{P,12}) \|v_2\|_{1,\Omega_2}$$

3-Dans la zone solide

Comme précédemment, on a les résultats suivants :

1- La coercivité de $a_3(.,.)$:

Tenant compte de la relation (2.33), on a :

$$a_3(v_3, v_3) \geq \int_{\Omega_3} (\underline{\lambda}_3 |\nabla v_3|^2 + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} |v_3|^2) d\Omega_3 \geq C_{S,1} \|v_3\|_{1,\Omega_3}^2 \quad (2.36)$$

où $C_{S,1} = \inf(\underline{\lambda}_3, \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t})$ est une constante positive.

La coercivité provient du fait que $\oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} v_3^2 + \zeta \sigma P_{3,4}(v_3) v_3) ds_3 \geq 0$ car $v_3 \geq 0$.

2- La forme $a_3(.,.)$ est continue :

En effet, par un raisonnement analogue à celui de la zone pâteuse, on a :

$$\begin{aligned} |a_3(u_3, v_3)| &\leq \max(\bar{\lambda}_3, \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t}) \|u_3\|_{1,\Omega_3} \|v_3\|_{1,\Omega_3} + h_{cv,3} \|u_3\|_{0,\partial\Omega_3} \|v_3\|_{0,\partial\Omega_3} \\ &\quad + \Theta_3^{\frac{1}{2}} \zeta \sigma \|u_3\|_{0,\partial\Omega_3} \|v_3\|_{0,\partial\Omega_3} \end{aligned}$$

Compte tenue du théorème de trace, il exist une constante $C_{S,2}(\Omega_3)$ tel que

$$\begin{aligned} |a_3(u_3, v_3)| &\leq (\max(\bar{\lambda}_3, \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t}) + C_{S,2}^2(\Omega_3)(h_{cv,3} + \Theta_3^{\frac{1}{2}} \zeta \sigma)) \|u_3\|_{1,\Omega_3} \|v_3\|_{1,\Omega_3} \\ &\leq C_{S,3} \|u_3\|_{1,\Omega_3} \|v_3\|_{1,\Omega_3} \end{aligned}$$

où $C_{S,3} = \max(\bar{\lambda}_3, \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t}) + C_{S,2}^2(\Omega_3)(h_{cv,3} + \Theta_3^{\frac{1}{2}} \zeta \sigma)$ est une constante positive.

3- $L_3(.)$ est une forme linéaire continue :

En effet, on a :

$$\left| \int_{\Omega_3} \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} u_3^{pres} v_3 d\Omega_3 \right| \leq C_{S,4} \|v_3\|_{0,\Omega_3} \leq C_{S,4} \|v_3\|_{1,\Omega_3}$$

de plus

$$\left| \oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) v_3 ds_3 \right| \leq C_{S,5} \|v_3\|_{0,\gamma_3} \leq C_{S,5} \|v_3\|_{0,\partial\Omega_3}$$

En appliquant le théorème de trace, on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \tilde{L}_3(v_3) \right| &\leq (C_{S,4} + C_{S,2}(\Omega_3) C_{S,5}) \|v_3\|_{1,\Omega_3} \\ &\leq C_{S,6} \|v_3\|_{1,\Omega_2} \end{aligned}$$

où $C_{S,6} = C_{S,4} + C_{S,2}(\Omega_3) C_{S,5}$ est une constante positive.

Aussi, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_3(\tilde{u}, v_3)| &\leq \bar{\lambda}_3 \left(\int_{\Omega_3} |\nabla \tilde{u}|^2 d\Omega_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_3} |\nabla v_3|^2 d\Omega_3 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega_3} \left| \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} \tilde{u} \right|^2 d\Omega_3 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(\int_{\Omega_3} |v_3|^2 d\Omega_3 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\gamma_3} |h_{cv,3} \tilde{u} + \zeta \delta \tilde{u}^4|^2 ds_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\gamma_3} |v_3|^2 ds_3 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$|\tilde{a}_3(\tilde{u}, v_3)| \leq C_{S,7} \|v_3\|_{1,\Omega_3} + C_{S,8} \|v_3\|_{0,\Omega_3} + C_{S,9} \|v_3\|_{0,\partial\Omega_3}$$

Finalement en appliquant le théorème de trace, on aboutit à :

$$|\tilde{a}_3(\tilde{u}, v_3)| \leq C_{S,10} \|v_3\|_{1,\Omega_3}$$

où $C_{S,10} = C_{S,7} + C_{S,8} + C_{S,2}(\Omega_3) C_{S,9}$, $C_{S,7} = \bar{\lambda}_3 \left(\int_{\Omega_3} |\nabla \tilde{u}|^2 d\Omega_3 \right)^{\frac{1}{2}}$,

$C_{S,8} = \left(\int_{\Omega_3} \left| \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} \tilde{u} \right|^2 d\Omega_3 \right)^{\frac{1}{2}}$ et $C_{S,9} = \left(\int_{\gamma_3} |h_{cv,3} \tilde{u} + \zeta \delta \tilde{u}^4|^2 ds_3 \right)^{\frac{1}{2}}$ sont des constantes

positives.

Alors, on a :

$$L_3(v_3) \leq (C_{S,6} + C_{S,10}) \|v_3\|_{1,\Omega_3}$$

Proposition 2.1. *Soient les inéquations variationnelles stationnaires suivantes*

$$a_{\mathcal{I}}(u_{\mathcal{I}}, v_{\mathcal{I}} - u_{\mathcal{I}}) \geq L_{\mathcal{I}}(v_{\mathcal{I}} - u_{\mathcal{I}}), \quad v_{\mathcal{I}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}}, \quad \mathcal{I} = 1, 2, 3, \quad (2.37)$$

supposons que les hypothèses (2.32) et (2.33) soient vérifiées. Alors, pour $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, il existe une solution unique de (2.37).

Preuve. *En effet, pour $\mathcal{I} = 1, 2, 3$*

- les espaces $W_{\mathcal{I}}$ munis de la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega_{\mathcal{I}}}$ sont des espaces de Hilbert et $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$ sont des ensembles convexes fermés de $W_{\mathcal{I}}$,

- toutes les applications $(u_{\mathcal{I}}, v_{\mathcal{I}}) \rightarrow a_{\mathcal{I}}(u_{\mathcal{I}}, v_{\mathcal{I}})$ sont des formes continues et coercives,

- toutes les applications $v_{\mathcal{I}} \rightarrow L_{\mathcal{I}}(v_{\mathcal{I}})$ sont des formes linéaires continues.

Par application du théorème de Stampacchia [14], on conclut au résultat.

2.3.3 Formulation variationnelle tridimensionnelle

Le problème de refroidissement de la coulée continue tridimensionnelle est donnée respectivement sur chaque zone, la seule différence est que les conditions de convection et de rayonnement sont réparties sur quatre faces de chaque sous domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$ $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ (voir Figures 2.6, 2.7, 2.8). L'espace de travail ainsi que la formulation variationnelle correspondante sont présentés, de manière analogue que dans le cas bidimensionnel. Nous vérifierons que les formes $a_{\mathcal{I}}(\cdot, \cdot)$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ sont continues, coercives et les formes linéaires $L_{\mathcal{I}}(\cdot)$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ sont continues.

Zone liquide :

Rappelons qu' en 3D $\gamma_{\mathcal{I}} \equiv \Gamma_{\mathcal{I},2} \cup \Gamma_{\mathcal{I},3} \cup \Gamma_{\mathcal{I},4} \cup \Gamma_{\mathcal{I},5}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, on prend $w_1 = u_1$. Mis sous formulation variationnelle, le problème thermique stationnaire sans contrainte associé au problème (2.4) est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_1 \in W_1 \text{ tel que} \\ a_1(u_1, v_1) = L_1(v_1), \forall v_1 \in W_1 \end{cases} \quad (2.38)$$

où

$$a_1(u_1, v_1) = \int_{\Omega_1} \left(\lambda_1 \nabla u_1 \nabla v_1 + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} u_1 v_1 \right) d\Omega_1 + \oint_{\gamma_1} (h_{cv,1} u_1 + \zeta \sigma u_1^4) v_1 d\vartheta_1 \\ + \oint_{\Gamma_6} \frac{1}{R} u_1 v_1 d\vartheta_1$$

et

$$L_1(v_1) = \int_{\Omega_1} \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} u_1^{pres} v_1 d\Omega_1 + \oint_{\gamma_1} (h_{cv,1} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) v_1 d\vartheta_1 \\ + \oint_{\Gamma_6} \frac{1}{R} u_{cst} v_1 d\vartheta_1 - \oint_{\Gamma_1} \Phi_{imp} v_1 d\vartheta_1$$

avec $W_1 = \mathcal{H}^1(\Omega_1)$.

Introduisons l'ensemble \mathcal{K}_1 , qui est un ensemble convexe fermé

$$\mathcal{K}_1 = \{u_1 \in \mathcal{H}^1(\Omega_1) / u_1 \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega_1, \} \quad (2.39)$$

alors, l'inéquation variationnelle associé au problème avec la contrainte $u_1 \geq 0$ correspondant à (2.16) s'écrit

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_1 \in \mathcal{K}_1 & \text{tel que} \\ a_1(u_1, v_1 - u_1) \geq L_1(v_1 - u_1), \forall v_1 \in \mathcal{K}_1 \end{cases} \quad (2.40)$$

1- Coercivité de $a_1(.,.)$; on a

$$a_1(v_1, v_1) \geq \int_{\Omega_1} (\underline{\lambda}_1 |\nabla v_1|^2 + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} |v_1|^2) d\Omega_1 \geq C_{L,1} \|v_1\|_{1,\Omega_1}^2 \quad (2.41)$$

où $C_{L,1} = \inf(\underline{\lambda}_1, \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t})$ est une constante.

Tenant compte de (2.33) et sachant que, pour $v_1 \geq 0$, on a $\oint_{\gamma_1} (h_{cv,1} v_1^2 + \zeta \sigma v_1^5) d\vartheta_1 \geq 0$, $\oint_{\Gamma_6} \frac{1}{R} v_1^2 d\vartheta_1 \geq 0$ avec $R > 0$, on obtient la coercivité.

2- Continuité de $a_1(.,.)$

Comme précédemment, on applique l'inégalité de Cauchy- Schwarz, tout en utilisant aussi l'inégalité de Holder-Minkowski, l'hypothèse (2.32) et le fait que λ_1 est borné supérieurement par $\bar{\lambda}_1$, pour obtenir

$$|a_1(u_1, v_1)| \leq \max(\bar{\lambda}_1, \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t}) \|u_1\|_{1, \Omega_1} \|v_1\|_{1, \Omega_1} + (h_{cv,1} + C_1 \zeta \sigma) \|u_1\|_{0, \gamma_1} \|v_1\|_{0, \gamma_1} \\ + \frac{1}{R} \|u_1\|_{0, \Gamma_6} \|v_1\|_{0, \Gamma_6}.$$

On a aussi

$$|a_1(u_1, v_1)| \leq \max(\bar{\lambda}_1, \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t}) \|u_1\|_{1, \Omega_1} \|v_1\|_{1, \Omega_1} \\ + (h_{cv,1} + C_1 \zeta \sigma + \frac{1}{R}) \|u_1\|_{0, \partial \Omega_1} \|v_1\|_{0, \partial \Omega_1}.$$

A l'aide du théorème de trace, il existe une constante $C_{L,2}(\Omega_1)$ tel que

$$|a_1(u_1, v_1)| \leq C_{L,3} \|u_1\|_{1, \Omega_1} \|v_1\|_{1, \Omega_1}$$

où $C_{L,3} = \max(\bar{\lambda}_1, \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t}) + C_{L,2}^2(\Omega_1)(h_{cv,1} + C_1 \zeta \sigma + \frac{1}{R})$ est une constante positive.

3- $L_1(\cdot)$ forme linéaire continue, on a :

$$|L_1(v_1)| \leq \underbrace{\left(\int_{\Omega_1} \left| \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} u_1^{pres} \right|^2 d\Omega_1 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{L,4}} \left(\int_{\Omega_1} |v_1|^2 d\Omega_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \underbrace{\left(\int_{\gamma_1} |h_{cv,1} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4|^2 d\vartheta_1 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{L,5}} \left(\int_{\gamma_1} |v_1|^2 d\vartheta_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \underbrace{\left(\int_{\Gamma_6} \left| \frac{1}{R} u_{cst} \right|^2 d\vartheta_1 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{L,6}} \left(\int_{\Gamma_6} |v_1|^2 d\vartheta_1 \right)^{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\int_{\Gamma_1} |\Phi_{imp}|^2 d\vartheta_1 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{L,7}} \left(\int_{\Gamma_1} |v_1|^2 d\vartheta_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Or, d'après le théorème de trace, on a

$$\|v_1\|_{0, \partial \Omega_1} \leq C_{L,2}(\Omega_1) \|v_1\|_{1, \Omega_1}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} |L_1(v_1)| &\leq (C_{L,4} + C_{L,2}(\Omega_1)(C_{L,5} + C_{L,6} + C_{L,7})) \|v_1\|_{1,\Omega_1} \\ &\leq C_{L,8} \|v_1\|_{1,\Omega_1} \end{aligned}$$

où $C_{L,8} = C_{L,4} + C_{L,2}(\Omega_1)(C_{L,5} + C_{L,6} + C_{L,7})$ est une constante positive.

Zone pâteuse

Dans la zone pâteuse, la formulation variationnelle associée au problème stationnaire sans contrainte correspondant au problème (2.5) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } w_2 \in W_2 \text{ tel que} \\ a_2(w_2, v_2) = L_2(v_2), \forall v_2 \in W_2 \end{cases} \quad (2.42)$$

où

$$\begin{aligned} a_2(w_2, v_2) &= \int_{\Omega_2} \left(\lambda_2 \nabla w_2 \nabla v_2 + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} w_2 v_2 \right) d\Omega_2 + \oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} w_2 + \zeta \delta w_2^4) v_2 d\vartheta_2 \\ &\quad + \oint_{\Gamma_7} \frac{1}{R} w_2 v_2 d\vartheta_2 \end{aligned}$$

et

$$L_2(v_2) = \int_{\Omega_2} \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} w_2^{pres} v_2 d\Omega_2 + \oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) v_2 d\vartheta_2 + \oint_{\Gamma_7} \frac{1}{R} u_{cst} v_2 d\vartheta_2$$

avec

$$W_2 = \{v_2/v_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega_2), v_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_6\}$$

et

$$V_2 = \{v_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega_2), v_2 = w_1|_{\Gamma_6}\}$$

sont les espaces de fonctions test convenablement choisis.

En effet, on utilise la technique de relèvement qui consiste à poser w_2 comme une somme $u_2 + \tilde{u}_1$ où $u_2 \in W_2$ et $\tilde{u}_1 = w_1|_{\Gamma_6}$. On a le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_2 \in W_2 \text{ tel que} \\ a_2(u_2, v_2) = L_2(v_2), \forall v_2 \in W_2 \end{cases} \quad (2.43)$$

où

$$a_2(u_2, v_2) = \int_{\Omega_2} \left(\lambda_2 \nabla u_2 \nabla v_2 + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} u_2 v_2 \right) d\Omega_2 + \oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} u_2 + \zeta \delta P_{2,4}(u_2)) v_2 d\vartheta_2 \\ + \oint_{\Gamma_7} \frac{1}{R} u_2 v_2 d\vartheta_2$$

et

$$L_2(v_2) = \tilde{L}_2(v_2) - \tilde{a}_2(u_1, v_2)$$

avec

$$\tilde{L}_2(v_2) = \int_{\Omega_2} \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} u_2^{pres} v_2 d\Omega_2 + \oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) v_2 d\vartheta_2 \\ + \oint_{\Gamma_7} \frac{1}{R} u_{cst} v_2 d\vartheta_2,$$

$$\tilde{a}_2(\tilde{u}_1, v_2) = \int_{\Omega_2} \lambda_2 \nabla \tilde{u}_1 \nabla v_2 d\Omega_2 + \int_{\Omega_2} \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} \tilde{u}_1 v_2 d\Omega_2 + \oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} \tilde{u}_1 + \zeta \delta \tilde{u}_1^4) v_2 d\vartheta_2 \\ + \oint_{\Gamma_7} \frac{1}{R} \tilde{u}_1 v_2 d\vartheta_2$$

$P_{2,4}(u_2)$ est un polynôme de degré 4 défini par (2.23). Soit l'ensemble convexe fermé défini par

$$\mathcal{K}_2 = \{u_2 \in W_2 / u_2 \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega_2\} \quad (2.44)$$

Classiquement la résolution du problème avec contrainte sur $u_2 \geq 0$ correspondant à (2.17) se ramène donc à la résolution de l'inéquation variationnelle suivante

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_2 \in \mathcal{K}_2 \text{ tel que} \\ a_2(u_2, v_2 - u_2) \geq L_2(v_2 - u_2), \forall v_2 \in \mathcal{K}_2 \end{cases} \quad (2.45)$$

1- Coercivité de $a_2(.,.)$

On a

$$a_2(v_2, v_2) \geq \int_{\Omega_2} (\lambda_2 |\nabla v_2|^2 + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} |v_2|^2) d\Omega_2 \geq C_{P,1} \|v_2\|_{1,\Omega_2}^2 \quad (2.46)$$

où $C_{P,1} = \inf(\lambda_2, \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t})$ est une constante positive,

et $\oint_{\gamma_2} (h_{cv,2} v_2^2 + \zeta \sigma P_{2,4}(v_2) v_2) d\vartheta_2 \geq 0$, $\oint_{\Gamma_7} \frac{1}{R} v_2^2 d\vartheta_2 \geq 0$, car $v_2 \geq 0$, $R > 0$.

2- Continuité de $a_2(.,.)$

A l'aide de l'inégalité de Holder-Minkovski, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 2.1 ; on a :

$$|a_2(u_2, v_2)| \leq \max(\bar{\lambda}_2, \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t}) \|u_2\|_{1, \Omega_2} \|u_2\|_{1, \Omega_2} + (h_{cv,2} + \Theta_2^{\frac{1}{2}} \zeta \sigma) \|u_2\|_{0, \gamma_2} \|v_2\|_{0, \gamma_2} + \frac{1}{R} \|u_2\|_{0, \Gamma_7} \|v_2\|_{0, \Gamma_7} .$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \|u_2\|_{0, \gamma_2} \|v_2\|_{0, \gamma_2} &\leq \|u_2\|_{0, \partial \Omega_2} \|v_2\|_{0, \partial \Omega_2} \\ \|u_2\|_{0, \Gamma_7} \|v_2\|_{0, \Gamma_7} &\leq \|u_2\|_{0, \partial \Omega_2} \|v_2\|_{0, \partial \Omega_2} \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de trace, il existe une constante $C_{P,2}(\Omega_2)$ tel que

$$|a_2(u_2, v_2)| \leq C_{P,3} \|u_2\|_{1, \Omega_2} \|v_2\|_{1, \Omega_2}$$

où

$$C_{P,3} = \max(\bar{\lambda}_2, \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t}) + C_{P,2}^2(\Omega_2)(h_{cv,2} + \Theta_2^{\frac{1}{2}} \zeta \sigma + \frac{1}{R})$$

$\Theta_2^{\frac{1}{2}}$ est calculé comme dans le cas bidimensionnel (voir Annexe B).

3- $L_2(.)$ forme linéaire continue

On a

$$\begin{aligned} |\tilde{L}_2(v_2)| &\leq \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} \left| \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} u_2^{pres} \right|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,4}} \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} |v_2|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_2\|_{1, \Omega_2}} \\ &+ \underbrace{\left(\int_{\gamma_2} |h_{cv,2} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4|^2 d\vartheta_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,5}} \underbrace{\left(\int_{\gamma_2} |v_2|^2 d\vartheta_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_2\|_{0, \gamma_2}} \\ &+ \underbrace{\left(\int_{\Gamma_7} \left| \frac{1}{R} u_{cst} \right|^2 d\vartheta_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,6}} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_7} |v_2|^2 d\vartheta_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_2\|_{0, \Gamma_7}} \end{aligned}$$

A l'aide du théorème de trace, on a :

$$\begin{aligned} \left| \tilde{L}_2(v_2) \right| &\leq C_{P,4} \|v\|_{1,\Omega_2} + C_{P,2}(\Omega_2)(C_{P,5} + C_{P,6}) \|v_2\|_{1,\Omega_2} \\ &\leq C_{P,7} \|v_2\|_{1,\Omega_2} \end{aligned}$$

où $C_{P,7} = C_{P,4} + C_{P,2}(\Omega_2)(C_{P,5} + C_{P,6})$ est une constante positive, et

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_2(\tilde{u}_1, v_2)| &\leq \underbrace{\bar{\lambda}_2 \left(\int_{\Omega_2} |\nabla \tilde{u}_1|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,8}} \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} |\nabla v_2|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_2\|_{1,\Omega_2}} \\ &+ \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} \left| \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} \tilde{u}_1 \right|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,9}} \underbrace{\left(\int_{\Omega_2} |v_2|^2 d\Omega_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_2\|_{1,\Omega_2}} \\ &+ \underbrace{\left(\int_{\gamma_2} |h_{cv,2} \tilde{u}_1 + \zeta \delta \tilde{u}_1^4|^2 d\vartheta_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,10}} \underbrace{\left(\int_{\gamma_2} |v_2|^2 d\vartheta_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_2\|_{0,\gamma_2}} \\ &+ \underbrace{\left(\int_{\Gamma_7} \left| \frac{1}{R} \tilde{u}_1 \right|^2 d\vartheta_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{C_{P,11}} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_7} |v_2|^2 d\vartheta_2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\|v_2\|_{0,\Gamma_7}}, \end{aligned}$$

en appliquant de nouveau le théorème de trace, il existe une constante positive $C_{P,2}(\Omega_2)$ tel que

$$|\tilde{a}_2(\tilde{u}_1 v_2)| \leq C_{P,12} \|v_2\|_{1,\Omega_2}$$

où $C_{P,12} = C_{P,8} + C_{P,9} + C_{P,2}(\Omega_2)(C_{P,10} + C_{P,11})$ est une constante positive. Enfin, on a :

$$|L_2(v_2)| \leq (C_{P,7} + C_{P,12}) \|v_2\|_{1,\Omega_2}$$

Zone solide

On a :

$$W_3 = \{v_3 | v_3 \in \mathcal{H}^1(\Omega_3), v_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_7 \text{ et } \Gamma_8\}$$

avec

$$V_3 = \{v_3 \in \mathcal{H}^1(\Omega_3), v_3 = u_2 | \Gamma_7 \text{ et } v_3 = u_{imp} \text{ sur } \Gamma_8\}$$

Donc, la formulation variationnelle du problème stationnaire sans contrainte correspondent à (2.6) est la suivante :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } w_3 \in W_3 \text{ tel que} \\ a_3(w_3, v_3) = L_3(v_3), \forall v_3 \in W_3 \end{cases} \quad (2.47)$$

où

$$a_3(w_3, v_3) = \int_{\Omega_3} \left(\lambda_3 \nabla w_3 \cdot \nabla v_3 + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} w_3 v_3 \right) d\Omega_3 + \oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} w_3 + \zeta \sigma w_3^4) v_3 d\vartheta_3$$

et

$$L_3(v_3) = \int_{\Omega_3} \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} u_3^{pres} v_3 d\Omega_3 + \oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) v_3 d\vartheta_3$$

comme précédemment, on pose $w_3 = u_3 + \tilde{u}$ avec $u_3 \in W_3$ et

$$\tilde{u} = \begin{cases} \tilde{u}_1 = u_2 & \text{sur } \Gamma_7 \\ \tilde{u}_2 = u_{imp} & \text{sur } \Gamma_8. \end{cases}$$

Alors, le problème est donné par

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_3 \in W_3 \text{ tel que} \\ a_3(u_3, v_3) = L_3(v_3), \forall v_3 \in W_3 \end{cases} \quad (2.48)$$

où

$$a_3(u_3, v_3) = \int_{\Omega_3} \left(\lambda_3 \nabla u_3 \cdot \nabla v_3 + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} u_3 v_3 \right) d\Omega_3 + \oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} u_3 + \zeta \sigma P_{3,4}(u_3) v_3) d\vartheta_3$$

et

$$L_3(v_3) = \tilde{L}_3(v_3) - \tilde{a}_3(\tilde{u}, v_3)$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{L}_3(v_3) &= \int_{\Omega_3} \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} u_3^{pres} v_3 d\Omega_3 + \oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) v_3 d\vartheta_3, \\ \bar{a}_3(\tilde{u}, v_3) &= \int_{\Omega_3} \lambda_3 \nabla \tilde{u} \nabla v_3 d\Omega_3 + \int_{\Omega_3} \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} \tilde{u} v_3 d\Omega_3 + \oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} \tilde{u} + \zeta \delta \tilde{u}^4) v_3 d\vartheta_3\end{aligned}$$

où $P_{3,4}(\tilde{u}_3)$ est un polynôme de degré 4 défini par la relation (2.28). Soit l'ensemble convexe fermé \mathcal{K}_3

$$\mathcal{K}_3 = \{u_3 \in W_3 / u_3 \geq 0 \text{ p.p dans } \Omega_3\} \quad (2.49)$$

La formulation associé au problème avec la contrainte $u_3 \geq 0$ correspondant à (2.18) s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_3 \in \mathcal{K}_3 \text{ tel que} \\ a_3(u_3, v_3 - u_3) \geq L_3(v_3 - u_3), \forall v_3 \in \mathcal{K}_3 \end{cases} \quad (2.50)$$

1- Coercivité

On a

$$a_3(v_3, v_3) \geq \int_{\Omega_3} (\underline{\lambda}_3 |\nabla v_3|^2 + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} |v_3|^2) d\Omega_3 \geq C_{S,1} \|v_3\|_{1,\Omega_3}^2 \quad (2.51)$$

où

$$C_{S,1} = \inf(\underline{\lambda}_3, \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t})$$

Sachant que, pour $v_3 \geq 0$, on a $\oint_{\gamma_3} (h_{cv,3} v_3^2 + \zeta \sigma P_{3,4}(v_3) v_3) d\vartheta_3 \geq 0$.

2- Continuité $a_3(\cdot, \cdot)$

De manière analogue à celle de la zone pâteuse , on a :

$$\begin{aligned}|a_3(u_3, v_3)| &\leq \max(\bar{\lambda}_3, \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t}) (\|u_3\|_{1,\Omega_3} \|v_3\|_{1,\Omega_3} \\ &\quad + h_{cv,3} \|u_3\|_{0,\gamma_3} \|v_3\|_{0,\gamma_3} + \Theta^{\frac{1}{2}} \zeta \sigma \|u_3\|_{0,\gamma_3} \|v_3\|_{0,\gamma_3} .\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}|a_3(u_3, v_3)| &\leq \max(\bar{\lambda}_3, \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t}) \|u_3\|_{1,\Omega_3} \|v_3\|_{1,\Omega_3} \\ &\quad + (h_{cv,3} + \Theta^{\frac{1}{2}} \zeta \sigma) \|u_3\|_{0,\partial\Omega_3} \|v_3\|_{0,\partial\Omega_3} .\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de trace, il existe une constante $C_{S,2}^2(\Omega_3)$ tel que

$$|a_3(u_3, v_3)| \leq C_{S,3} \|u_3\|_{1,\Omega_3} \|v_3\|_{1,\Omega_3}$$

où

$$C_{S,3} = \max(\bar{\lambda}_3, \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t}) + C_{S,2}^2(\Omega_3)(h_{cv,3} + \Theta_3^{\frac{1}{2}} \zeta \sigma)$$

est une constante positive.

3- $L_3(\cdot)$ forme linéaire continue ; on a

$$\begin{aligned} |\tilde{L}_3(v_3)| &\leq C_{S,4} \|v_3\|_{1,\Omega_3} + C_{S,2}(\Omega_3) C_{S,5} \|v_3\|_{1,\Omega_3} \\ &\leq C_{S,6} \|v_3\|_{1,\Omega_3} \end{aligned}$$

où $C_{S,6} = C_{S,4} + C_{S,2}(\Omega_3) C_{S,5}$; $C_{S,6}$ est une constante positive, $C_{S,4} = \left(\int_{\Omega_3} |\frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} u_3^{pres}|^2 d\Omega_3 \right)^{\frac{1}{2}}$,

$C_{S,5} = \left(\int_{\gamma_3} |h_{cv,3} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4|^2 d\vartheta_3 \right)^{\frac{1}{2}}$ et $C_{S,2}(\Omega_3)$ est la constante obtenue par l'utilisation du théorème de trace sur la frontière γ_3 .

on a aussi

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_3(\tilde{u}, v_3)| &\leq C_{S,7} \|v_3\|_{1,\Omega_3} + C_{S,8} \|v_3\|_{1,\Omega_3} + C_{S,2}(\Omega_3) C_{S,9} \|v_3\|_{1,\Omega_3} \\ &\leq C_{S,10} \|v_3\|_{1,\Omega_3} \end{aligned}$$

où $C_{S,10} = C_{S,7} + C_{S,8} + C_{S,2}(\Omega_3) C_{S,9}$, $C_{S,7} = \bar{\lambda}_3 \left(\int_{\Omega_3} |\nabla \tilde{u}|^2 d\Omega_3 \right)^{\frac{1}{2}}$ et

$$C_{S,8} = \left(\int_{\Omega_3} |\frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} \tilde{u}|^2 d\Omega_3 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ainsi que $C_{S,9} = \left(\int_{\gamma_3} |h_{cv,3} \tilde{u} + \zeta \delta \tilde{u}^4|^2 d\vartheta_3 \right)^{\frac{1}{2}}$ qui sont alors des constantes positives.

Enfin, on a :

$$|L_3(v_3)| \leq (C_{S,6} + C_{S,10}) \|v_3\|_{1,\Omega_3}$$

Proposition 2.2. *Les hypothèses (2.32) et (2.33) pour $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, étant vérifiées, alors $\exists! u_{\mathcal{I}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, dans le convexe fermé $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ solution de chaque inéquation variationnelle stationnaire du problème tridimensionnel.*

Preuve. Voir preuve du théorème 2.1.

2.4 Formulation multivoque des inéquations variationnelles stationnaires

2.4.1 Rappels

Dans cette section, nous rappelons la formulation multivoque associée à chaque inéquation variationnelle stationnaire. Nous renvoyons pour plus de détails à [1], [14]. Donnons pour commencer quelques définitions et propriétés nécessaires et utiles pour la suite.

Définition 2.1. Soient χ une fonction convexe dans W et μ un point de W ; on note par $\partial\chi(\mu)$ l'ensemble des $\mu' \in W'$ tel que

$$\chi(v) \geq \chi(\mu) + \langle v - \mu, \mu' \rangle, \text{ pour tout } v \in W$$

où \langle, \rangle est le produit de dualité entre W et W' et W' est l'espace topologique dual de W . Un tel élément μ' est appelé le sous-gradient de χ en μ et $\partial\chi(\mu)$ est le sous-différentiel de χ en μ .

Remarque 2.2. Le produit de dualité de W et W' est une application bilinéaire de $W \times W'$ dans \mathbb{R} . Si W est un espace de Hilbert, alors \langle, \rangle est le produit scalaire de W .

Remarque 2.3. Soit χ une application convexe différentiable (Gâteaux différentiable ou Fréchet différentiable) en μ ; alors, $\partial\chi(\mu)$ est un opérateur univoque qui coïncide avec la différentielle (au sens de Gâteaux ou de Fréchet) de χ en μ [1]. On montre que $\partial\chi(\mu)$ est un ensemble convexe fermé (éventuellement vide [1]).

Dans la suite nous allons utiliser une formulation multivoque du problème avec contrainte.

Lemme 2.2. $\mu \in W$ est tel que $\chi(\mu) = \min_{v \in W} (\chi(v))$ si et seulement si $0 \in \partial\chi(\mu)$.

Preuve. Soit $\mu \in W$ est tel que $\chi(\mu) = \min_{v \in W} (\chi(v))$; nous avons alors trivialement $\chi(v) \geq \chi(\mu) + \langle v - \mu, 0 \rangle$, ce qui est équivalent à $0 \in \partial\chi(\mu)$.

Lemme 2.3. *Le sous-différentiel $\partial\chi(\mu)$ est un opérateur monotone (en général multivoque) de W dans W' .*

Preuve. *Soit $w' \in \partial\chi(\mu)$, alors $\chi(v) \geq \chi(w) + \langle v - w, w' \rangle, \forall v \in W$. Soit encore $\mu' \in \partial\chi(\mu)$, alors $\chi(v) \geq \chi(\mu) + \langle v - \mu, \mu' \rangle, \forall v \in W$.*

On considère la première équation pour $v = \mu$ et la seconde pour $v = w$. En additionnant terme à terme, on obtient alors $\langle w - \mu, w' - \mu' \rangle \geq 0$.

Définition 2.2. *Une fonction $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $\mu_0 \in \mathbb{R}^n$ si,*

$$\forall \xi > 0, \exists \sigma > 0 / \chi(\mu) \geq \chi(\mu_0) - \xi, \text{ dès que } \|\mu - \mu_0\| \leq \sigma.$$

χ est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) en μ_0 si $-\chi$ est s.c.i. en μ_0 .

χ est continue en μ_0 ssi elle est à la fois s.c.i. et s.c.s. en μ_0 .

Enfin, on dit que χ est s.c.i. si elle est s.c.i. en tout point $\mu \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 2.4. *On peut remplacer \mathbb{R}^n dans la définition 2.2 par un sous-ensemble quelconque $D \subset \mathbb{R}^n$.*

Définition 2.3. *Soit \mathcal{K} un sous ensemble convexe fermé de W . On appelle fonction indicatrice de \mathcal{K} la fonctionnelle $\chi_{\mathcal{K}}$ définie par :*

$$\chi_{\mathcal{K}}(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mu \in \mathcal{K} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.52)$$

Corollaire 2.1. *Un sous-ensemble $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si sa fonction indicatrice $\chi_{\mathcal{K}}(u)$ est semi continue inférieurement.*

Dans notre application, notons pour $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, $W = W_{\mathcal{I}}$ sont des espaces de Hilbert et $W'_{\mathcal{I}}$ leurs duaux tels que $W'_{\mathcal{I}}$ sont identifiés à $W_{\mathcal{I}}$. La norme des espaces $W_{\mathcal{I}}$ est définie par $\|\cdot\|_{1, \Omega_{\mathcal{I}}}$. Les applications $(u_{\mathcal{I}}, v_{\mathcal{I}}) \rightarrow a_{\mathcal{I}}(u_{\mathcal{I}}, v_{\mathcal{I}})$ sont continues et $L_{\mathcal{I}}(v_{\mathcal{I}})$ sont des formes linéaires continues. Les hypothèses du théorème de représentation de Riesz [14] étant vérifiées, il existe alors un unique élément noté $\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{I}} \in W'_{\mathcal{I}}$, $\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{I}}$ application linéaire continue de $W_{\mathcal{I}} \rightarrow W'_{\mathcal{I}}$ tel que

$$a_{\mathcal{I}}(u_{\mathcal{I}}, v_{\mathcal{I}}) = \langle \bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{I}} u_{\mathcal{I}}, v_{\mathcal{I}} \rangle_{W'_{\mathcal{I}} \times W_{\mathcal{I}}} \quad \forall v_{\mathcal{I}} \in W_{\mathcal{I}} \quad \mathcal{I} = 1, 2, 3 \quad (2.53)$$

où $\bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{I}}$ est un opérateur linéaire par rapport à $u_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$. Nous renvoyons à [14], pour plus de détails. De même, il existe un élément unique noté $\bar{g}_{\mathcal{I}} \in W'_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 2, 3$

tel que

$$L_{\mathcal{I}}(v_{\mathcal{I}}) = \langle \bar{g}_{\mathcal{I}}, v_{\mathcal{I}} \rangle_{W'_{\mathcal{I}} \times W_{\mathcal{I}}} \quad \forall v_{\mathcal{I}} \in W_{\mathcal{I}}$$

Alors, les inéquations variationnelles stationnaires peuvent être écrites aussi bien en $2D$ qu'en $3D$ comme suit pour $\mathcal{I} = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_{\mathcal{I}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}} \text{ tel que} \\ \langle v_{\mathcal{I}} - u_{\mathcal{I}}, \bar{\mathcal{A}}_{\mathcal{I}} u_{\mathcal{I}} - \bar{g}_{\mathcal{I}} \rangle_{W_{\mathcal{I}} \times W'_{\mathcal{I}}} \geq 0, \forall v_{\mathcal{I}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}}, \quad \mathcal{I} = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.54)$$

Alors, classiquement le problème (2.54) peut être reformulé en un problème multivoque dans chaque sous domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, en $2D$ et en $3D$. Pour plus de détails, nous renvoyons à [14] et [22].

2.4.2 Formulation multivoque des inéquations variationnelles stationnaires bidimensionnelles

Dans la **zone liquide** Ω_1

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_1 \in W_1, \text{ tel que} \\ -\text{div}(\lambda_1 \nabla u_1) + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} u_1 - \bar{g}_1 + \partial \chi_{\mathcal{K}_1} \ni 0 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla u_1) = \Phi_{imp}, & \text{sur } \Gamma_1 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla u_1) = h_{cv,1}(u_1 - u_{ext}) + \zeta \delta(u_1^4 - u_{ext}^4), & \text{sur } \Gamma_{1,2} \cup \Gamma_{1,3} \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla u_1) = \frac{1}{R}(u_1 - u_{cst}), & \text{sur } \Gamma_6 \end{cases} \quad (2.55)$$

Dans la **zone pâteuse** Ω_2

$$\begin{cases} \text{Déterminer } u_2 \in W_2, \text{ tel que} \\ -\text{div}(\lambda_2 \nabla u_2) + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} u_2 - \bar{g}_2 + \partial \chi_{\mathcal{K}_2} \ni 0 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla u_2) = h_{cv,2}(u_2 - u_{ext}) + \zeta \delta(u_2^4 - u_{ext}^4), & \text{sur } \Gamma_{2,2} \cup \Gamma_{2,3} \\ u_2 = 0, & \text{sur } \Gamma_5 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla u_2) = \frac{1}{R}(u_2 + u_1 - u_{cst}), & \text{sur } \Gamma_6 \end{cases} \quad (2.56)$$

Dans la **zone solide** Ω_3

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } u_3 \in W_3, \quad \text{tel que} \\ -\text{div}(\lambda_3 \nabla u_3) + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} u_3 - \bar{g}_3 + \partial \chi_{\mathcal{K}_3} \ni 0 \\ u_3 = 0, \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_3 \nabla u_3) = h_{cv,3}(u_3 - u_{ext}) + \zeta \delta(u_3^4 - u_{ext}^4), \\ u_3 = 0, \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_6 \\ \text{sur } \Gamma_{3,2} \cup \Gamma_{3,3} \\ \text{sur } \Gamma_4 \end{array} \quad (2.57)$$

où $u_{\mathcal{I}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}}$ et $\partial \chi_{\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}$ sont les sous-différentiels des fonctions indicatrices des sous ensembles convexes $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}, \mathcal{I} = 1, 2, 3$.

2.4.3 Formulation multivoque des inéquations variationnelles stationnaires tridimensionnelles

Dans la **zone liquide** Ω_1

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } u_1 \in W_1, \quad \text{tel que} \\ -\text{div}(\lambda_1 \nabla u_1) + \frac{\rho_1 c_1}{\Delta t} u_1 - \bar{g}_1 + \partial \chi_{\mathcal{K}_1} \ni 0 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla u_1) = \Phi_{imp}, \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla u_1) = h_{cv,1}(u_1 - u_{ext}) + \zeta \delta(u_1^4 - u_{ext}^4), \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_1 \nabla u_1) = \frac{1}{R}(u_1 - u_{cst}), \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_1 \\ \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{1,r} \\ \text{sur } \Gamma_5 \end{array} \quad (2.58)$$

Dans la **zone pâteuse** Ω_2

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } u_2 \in W_2, \quad \text{tel que} \\ -\text{div}(\lambda_2 \nabla u_2) + \frac{\rho_2 c_2}{\Delta t} u_2 - \bar{g}_2 + \partial \chi_{\mathcal{K}_\epsilon} \ni 0 \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla u_2) = h_{cv,2}(u_2 - u_{ext}) + \zeta \delta(\tilde{u}_2^4 - u_{ext}^4), \\ u_2 = 0, \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_2 \nabla u_2) = \frac{1}{R}(u_2 - u_{cst}), \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{2,r} \\ \text{sur } \Gamma_6 \\ \text{sur } \Gamma_7 \end{array} \quad (2.59)$$

Dans la zone solide Ω_3

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } u_3 \in W_3, \quad \text{tel que} \\ -\text{div}(\lambda_3 \nabla u_3) + \frac{\rho_3 c_3}{\Delta t} u_3 - \bar{g}_3 + \partial \chi_{\mathcal{K}_3} \ni 0 \\ u_3 = 0, \\ -\vec{n} \cdot (\lambda_3 \nabla u_3) = h_{cv,3}(u_3 - u_{ext}) + \zeta \delta(u_3^4 - u_{ext}^4), \\ u_3 = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_7 \\ \text{sur } \bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{3,r} \\ \text{sur } \Gamma_8 \end{array} \quad (2.60)$$

où $u_{\mathcal{I}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}}$ et $\partial \chi_{\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}$ sont les sous-différentiels des fonctions indicatrices des sous ensembles convexes $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$.

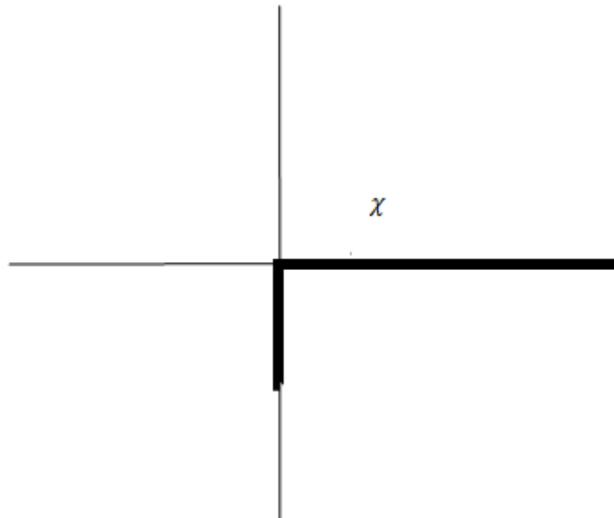
Les fonctions indicatrices $\chi_{\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}$ définies par

$$\chi_{\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}(u_{\mathcal{I}}) = \begin{cases} 0, & \text{si } u_{\mathcal{I}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

sont convexes et semi continues inférieurement .

Le graphe correspondant à $\partial \chi_{\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}(u_i)$ est donné par la figure 2.10.

Remarque 2.5. Dans (2.55) - (2.57) , (respectivement (2.58) - (2.60)), les projections sur les ensembles convexes $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ sont formulées par la perturbation des opérateurs continus qui sont des opérateurs multivoques diagonaux monotones. Alors, dans la suite, nous allons principalement utiliser ces formulations multivoques (2.55) - (2.57) , (respectivement (2.58) - (2.60)) des problèmes modèles que ce soit en 2D (ou 3D) afin d'analyser le comportement des algorithmes itératifs utilisés pour la solution de ces problèmes dans le chapitre suivant.

FIGURE 2.10 – Sous-différentiel de la fonction χ_κ

Chapitre 3

Discrétisation spatio-temporelle

L'objectif de ce chapitre est la discrétisation par la méthode des différences finies des problèmes décrits dans le chapitre précédent.

Le plan du chapitre est le suivant. On commence par la discrétisation de chaque problème ainsi que les conditions aux limites associées.

La section suivante est consacrée à la résolution numérique du problème avec contrainte conduisant ainsi à la résolution numérique d'un problème multivoque. On établit que les matrices de discrétisation obtenues sont des M-matrices à diagonales strictement dominantes. Le sous-différentiel de la fonction indicatrice est un opérateur diagonal monotone et l'opérateur traduisant la condition de convection et de rayonnement est une application diagonale monotone croissante dans chaque sous domaine.

Enfin, pour résoudre les problèmes discrétisés en chaque sous domaine, on considère l'algorithme itératif de relaxation projeté par point pour calculer les solutions en les points intérieurs des domaines $\Omega_I, \mathcal{I} = 1, 2, 3$ et l'algorithme de Newton projeté pour calculer les solutions en les points sur les frontières où figure la condition de convection rayonnement. On établit la convergence des algorithmes soit par la technique de contraction en norme vectorielle [36] soit par la propriété de contraction pour la norme scalaire [36].

3.1 Problème sans contrainte

Cette section est consacrée à la discrétisation du problème sur chaque sous domaine $\Omega_{\mathcal{I}}, \mathcal{I} = 1, 2, 3$; ceci consiste à remplacer, par un schéma approprié, le problème

continu par un système algébrique. L'approximation s'effectue en deux étapes successives. La première étape consiste à discrétiser le domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$. La seconde étape consiste à discrétiser les opérateurs (discrétisation spatio-temporelle).

Pour simplifier l'étude soient

$$\mathbf{x} \equiv \begin{cases} (x, y) & \text{dans } 2D, \\ (x, y, z) & \text{dans } 3D, \end{cases}$$

$$w = w(\mathbf{x}, t); w = (w_1, w_2, w_3), \lambda = \lambda(\mathbf{x}, t, w); \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t, w); \rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3), c = c(\mathbf{x}, t, w); c = (c_1, c_2, c_3),$$

$$\Psi(w) = (\Psi_1(w_1), \Psi_2(w_2), \Psi_3(w_3)), \Psi(w) = h_{cv}(w - u_{ext}) + \xi\delta(w^4 - u_{ext}^4),$$

$$h_{cv} = (h_{cv,1}, h_{cv,2}, h_{cv,3}), \Upsilon(w) = (\Upsilon_1(w_1), \Upsilon_2(w_2)) \text{ et } \Upsilon(w) = \frac{1}{R}(w - u_{cst}).$$

3.1.1 Discrétisation bidimensionnelle

1- Discrétisation du domaine Ω

Pour établir le schéma d'approximation correspondant aux problèmes de cou-
lée continue, nous commençons par discrétiser le domaine $\Omega = [0, 1]^d, d \in \{2, 3\}$.

Rappelons que $\Omega = \bigcup_{\mathcal{I}=1}^3 \Omega_{\mathcal{I}}$ et que chaque $\Omega_{\mathcal{I}}$ est défini et choisi comme suit $\Omega_{\mathcal{I}} = [\frac{\mathcal{I}-1}{3}, \frac{\mathcal{I}}{3}] \times [0, 1]^{d-1}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$. Soient m, p, q et N des nombres entiers strictement positifs donnés. On subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en $(m + p + q + 1)$ parties de longueur h tel que $h = \frac{1}{m+p+q}$, le pas de discrétisation dans les deux directions x et y , c.à.d. qu'on définit un maillage de points $M_{i,j}$ sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées défini respectivement par les nombres réels $x_i = ih$, $y_j = jh$ où $i = 1, \dots, m + p + q + 1$ et $j = 1, \dots, N + 2$ où $N = m + p + q - 1$.

Le maillage est donc constitué par l'intersection des droites d'équations $x = x_i$ et $y = y_j$, $1 \leq i \leq m + p + q + 1$, $1 \leq j \leq N + 2$, (voir Figure 3.1)

Soit \mathbf{s} un nombre entier donné strictement positif. On subdivise alors l'intervalle de temps $[0, t_{final}]$ en \mathbf{s} sous intervalles de temps tel que $\Delta t = (t_{final}/\mathbf{s})$ est le pas de discrétisation temporelle.

Notre objectif est de chercher une approximation de $w(\mathbf{x}, t)$ aux points du maillage contenus dans Ω .

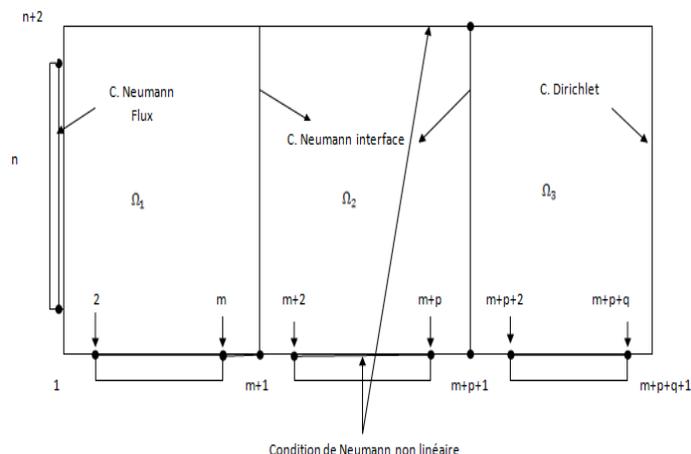


FIGURE 3.1 – Discrétisation des conditions aux limites

2- Discrétisation temporelle

La dérivée par rapport au temps est approchée par un schéma de type différences finies implicite ; la dérivée temporelle étant discrétisée par

$$\frac{\partial w(x_i, y_j, t_n)}{\partial t} = \frac{w(x_i, y_j, t_{n+1}) - w(x_i, y_j, t_n)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.1)$$

3- Discrétisation spatiale

Supposons que $w \in C^4(\Omega)$ et que le coefficient $\lambda(\mathbf{x}, w)$ soit continu et suffisamment différentiable, ρ et c étant constant. La discrétisation de l'opérateur $div(\lambda \nabla w)$ consiste à remplacer la dérivée par le quotient différentiel faisant intervenir les valeurs de la fonction inconnue $w(x, y)$ aux points $M_{i,j}$ du maillage. Pour établir le schéma de discrétisation des opérateurs définissant le problème, deux schémas sont pris en compte, le schéma **Forward-Backward** et le schéma **Backward-Forward** [9], [6] puis on procède avec la moyenne de ces deux schémas. On prend les pas de discrétisation dans les deux directions comme étant égaux, i.e, $\Delta x = \Delta y = h$.

Étape 1 : on fixe y et on pose $v(x, y) = \lambda(x, y, w) \nabla w$.

Forward-Backward : utilisons le développement limité en série de Taylor de v

autour du point $(x + h, y)$

$$v(x + h, y) = v(x, y) + \frac{h}{1!} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^3) \quad (3.2)$$

D'où

$$\frac{\partial v(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{v(x_{i+1}, y_j) - v(x_i, y_j)}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 v(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (3.3)$$

Substituant $v(x, y) = \lambda(x, y, w) \nabla w$ dans (3.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x_i, y_j)}{\partial x} &= \frac{1}{h} \left(\lambda(w_{i+1, j}) \frac{w(x_{i+1}, y_j) - w(x_i, y_j)}{h} \right) \\ &\quad - \frac{1}{h} \left(\lambda(w_{i, j}) \frac{w(x_i, y_j) - w(x_{i-1}, y_j)}{h} \right) + \xi_x^F(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où $\xi_x^F(x_i, y_j)$ est l'erreur de troncature donnée par

$$\xi_x^F(x_i, y_j) = -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda(w_{i, j})}{\partial x^2} \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{\partial \lambda(w_{i, j})}{\partial x} \frac{\partial^2 w(x_i, y_j)}{\partial x^2} \right) + \mathcal{O}(h^2)$$

Pour des raisons de simplicité, on note par $\lambda_{i, j} \equiv \lambda(w_{i, j})$ et $w_{i, j} \simeq w(x_i, y_j)$, i.e, $w_{i, j}$ étant approximation de $w(x_i, y_j)$).

Le schéma numérique de discrétisation **Forward-Backward** s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{i, j} \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial x} \right) &= \frac{1}{h^2} (\lambda_{i+1, j} w_{i+1, j} - (\lambda_{i, j} + \lambda_{i+1, j}) w_{i, j} + \lambda_{i, j} w_{i-1, j}) \\ &\quad + \xi_x^F(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Backward-Forward : à l'aide du développement de Taylor de v autour du point $(x - h, y)$, on a

$$v(x - h, y) = v(x, y) - \frac{h}{1!} \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(h^3) \quad (3.6)$$

On effectue alors les mêmes calculs que ci-dessus pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x_i, y_j)}{\partial x} &= \frac{1}{h} \left(\lambda_{i,j} \frac{w(x_{i+1}, y_j) - w(x_i, y_j)}{h} \right) \\ &\quad - \frac{1}{h} \left(\lambda_{i-1,j} \frac{w(x_i, y_j) - w(x_{i-1}, y_j)}{h} \right) + \xi_x^B(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $\xi_x^B(x_i, y_j)$ est l'erreur de troncature donnée par

$$\xi_x^B(x_i, y_j) = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_{i,j}}{\partial x^2} \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial^2 w(x_i, y_j)}{\partial x^2} \right) + O(h^2)$$

Pour le schéma Backward-Forward, on aboutit alors au schéma de discretisation suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{i,j} \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial x} \right) &= \frac{1}{h^2} (\lambda_{i,j} w_{i+1,j} - (\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j}) w_{i,j} + \lambda_{i-1,j} w_{i-1,j}) \\ &\quad + \xi_x^B(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (3.8)$$

On considère maintenant la moyenne des schémas (3.5) et (3.8) et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{i,j} \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial x} \right) &= \frac{1}{2h^2} (\lambda_{i+1,j} + \lambda_{i,j}) w_{i+1,j} - (\lambda_{i+1,j} + 2\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j}) w_{i,j} \\ &\quad + (\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j}) w_{i-1,j} + \Xi \end{aligned} \quad (3.9)$$

où

$$\Xi = \frac{1}{2} (\xi_x^F(x_i, y_j) + \xi_x^B(x_i, y_j)) = O(h^2)$$

Étape 2 : on procède de façon analogue pour discrétiser l'opérateur $\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \right)$.
On fixe x

Forward-Backward : le schéma de discretisation est le suivant :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{i,j} \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial y} \right) = \frac{1}{h^2} (\lambda_{i,j+1} w_{i,j+1} - (\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j+1}) w_{i,j} + \lambda_{i,j} w_{i,j-1}) + \xi_y^F(x_i, y_j) \quad (3.10)$$

où $\xi_y^F(x_i, y_j)$ est l'erreur de troncature donnée par

$$\xi_y^F(x_i, y_j) = -\frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_{i,j}}{\partial y^2} \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial^2 w(x_i, y_j)}{\partial y^2} \right) + \mathcal{O}(h^2)$$

Backward-Forward : de manière similaire, on obtient le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{i,j} \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial y} \right) &= \frac{1}{h^2} (\lambda_{i,j} w_{i,j+1} - (\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1}) w_{i,j} + \lambda_{i,j-1} w_{i,j-1}) \\ &+ \xi_y^B(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $\xi_y^B(x_i, y_j)$ est l'erreur de troncature donnée par

$$\xi_y^B(x_i, y_j) = \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_{i,j}}{\partial y^2} \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial^2 w(x_i, y_j)}{\partial y^2} \right) + \mathcal{O}(h^2)$$

En prenant la moyenne des deux expressions précédentes (3.10) et (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{i,j} \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2h^2} ((\lambda_{i,j+1} + \lambda_{i,j}) w_{i,j+1} - (\lambda_{i,j+1} + 2\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1}) w_{i,j} \\ &+ (\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1}) w_{i,j-1}) + \Xi \end{aligned} \quad (3.12)$$

où

$$\Xi = \frac{1}{2} (\xi_y^F(x_i, y_j) + \xi_y^B(x_i, y_j)) = \mathcal{O}(h^2)$$

Soit Π l'approximation de $-div(\lambda(x, y, w) \nabla w(x, y))$. Le schéma global issu de la discrétisation de l'opérateur $(-div(\lambda(x, y, w) \nabla w(x, y)))$ en $2D$ est donné par

$$\Pi = B_{i+1,j} w_{i+1,j} + B_{i,j+1} w_{i,j+1} - B_{i,j} w_{i,j} + B_{i-1,j} w_{i-1,j} + B_{i,j-1} w_{i,j-1} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\begin{cases} 2 \leq i \leq m & \text{dans } \Omega_1, \\ m+2 \leq i \leq m+p & \text{dans } \Omega_2, \\ m+p+2 \leq i \leq m+p+q & \text{dans } \Omega_3, \\ 2 \leq j \leq N+1, & \end{cases}$$

où

$$B_{i+1,j} = -\frac{1}{2h^2}(\lambda_{i+1,j} + \lambda_{i,j}); \quad B_{i,j+1} = -\frac{1}{2h^2}(\lambda_{i,j+1} + \lambda_{i,j}),$$

$$B_{i,j} = -\frac{1}{2h^2}(\lambda_{i+1,j} + \lambda_{i,j+1} + 4\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j} + \lambda_{i,j-1}),$$

$$B_{i-1,j} = -\frac{1}{2h^2}(\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j}); \quad B_{i,j-1} = -\frac{1}{2h^2}(\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1}).$$

Alors, le schéma implicite en temps est donné par

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\Delta t}{\rho c} B_{i,j}^n\right) w_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho c} (B_{i+1,j}^n w_{i+1,j}^{n+1} + B_{i,j+1}^n w_{i,j+1}^{n+1} \\ & + B_{i-1,j}^n w_{i-1,j}^{n+1} + B_{i,j-1}^n w_{i,j-1}^{n+1}) = w_{i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

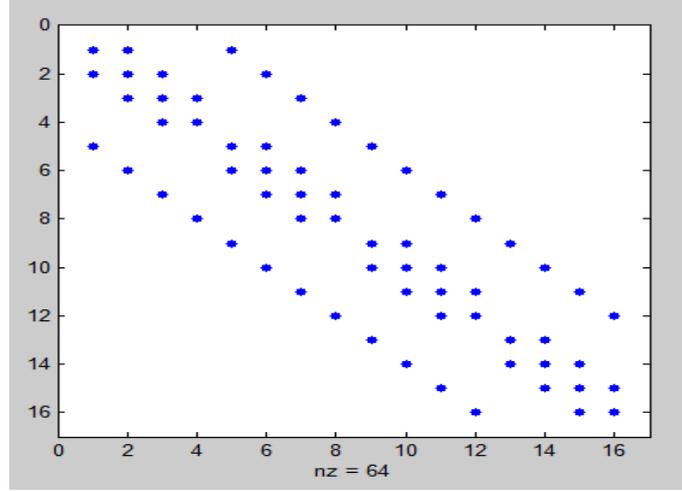
Le système algébrique résultant de la discrétisation du problème est de la forme

$$A_{i,j}^n U^{n+1} = F^n, \quad n \geq 1 \quad (3.14)$$

où $A_{i,j}^n$ est une matrice penta-diagonale (voir Figure 3.2).

En convenant que le balayage de point s'effectue de gauche à droite, alors les termes sont :

- la sur-diagonale est constituée de $B_{i+1,j}^n$ et $B_{i,j+1}^n$
- la sous-diagonale est constituée de $B_{i-1,j}^n$ et $B_{i,j-1}^n$
- la diagonale est constituée de $(1 - \frac{\Delta t}{\rho c} B_{i,j}^n)$.

FIGURE 3.2 – Structure de la matrice A_{2D}^n en 2D

4- Discrétisation des conditions aux limites

Les conditions aux limites sont soit de type Neumann (linéaire ou non linéaire) soit de type Robin ou de Dirichlet. Elles correspondent à des phénomènes physiques différents agissant sur des portions distinctes de la frontière.

1- Condition aux limites de type Neumann

D'après la figure 3.1, discrétisons la condition non linéaire de type convection et/ou de rayonnement sur la frontière horizontale inférieure $\Gamma_{\mathcal{I},2}$ avec

$$\Psi_{\mathcal{I}}(w_{\mathcal{I}}) = h_{cv,\mathcal{I}}(w_{\mathcal{I}} - u_{ext}) + \xi \delta (w_{\mathcal{I}}^4 - u_{ext}^4), \quad \mathcal{I} = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

La dérivée normale est définie par :

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \overrightarrow{\nabla w} \cdot \vec{n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos(\overrightarrow{Ox}, \vec{n}) + \frac{\partial w}{\partial y} \sin(\overrightarrow{Ox}, \vec{n}), \quad (3.16)$$

où $\overrightarrow{\nabla w}$ est le gradient de la fonction w et \vec{n} est la normale au domaine Ω orientée vers l'extérieur. Pour un angle $\theta = \frac{3\pi}{2}$, on a

$$-\lambda \overrightarrow{\nabla w} \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.17)$$

Un développement limité en série de Taylor de $w(x, y_{i+1})$ conduit à définir le schéma aux différences finies en avant :

$$\lambda_{i,j} \frac{\partial w(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{\lambda_{i,j}}{h} (w_{i,j+1} - w_{i,j}) - \frac{h\lambda_{i,j}}{2} \frac{\partial^2 w(x_i, y_j)}{\partial y^2} + \mathcal{O}(h)$$

Ainsi, le schéma numérique correspondant à la condition de Neumann non linéaire (3.15) sur les points de la frontière $\Gamma_{\mathcal{I},2}$ est

$$\left(\frac{\lambda_{i,j}}{h} + h_{cv}\right)w_{i,j} + \xi\delta w_{i,j}^4 - \frac{\lambda_{i,j}}{h}w_{i,j+1} + (-h_{cv}u_{ext} - \xi\delta u_{ext}^4) = 0 \quad (3.18)$$

pour $j = 1$ sur $\Gamma_{\mathcal{I},2}$

$$\begin{cases} 2 \leq i \leq m & \text{dans } \Omega_1, \\ m+2 \leq i \leq m+p & \text{dans } \Omega_2, \\ m+p+2 \leq i \leq m+p+q & \text{dans } \Omega_3. \end{cases}$$

Sur la frontière horizontale supérieure $\Gamma_{\mathcal{I},3}$ correspondant à $j = N+2$, la condition de Neumann est de même type que celle sur $\Gamma_{\mathcal{I},2}$. En effet, par un raisonnement analogue, on a pour un angle $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$-\lambda \overrightarrow{\nabla} w \cdot \overrightarrow{n} = -\lambda \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.19)$$

Un développement limité en série de Taylor de $w(x, y_{i-1})$ donne le schéma de discrétisation suivant :

$$\left(\frac{\lambda_{i,j}}{h} + h_{cv}\right)w_{i,j} + \xi\delta w_{i,j}^4 - \frac{\lambda_{i,j}}{h}w_{i,j-1} + (-h_{cv}u_{ext} - \xi\delta u_{ext}^4) = 0, \quad (3.20)$$

pour $j = N+2$ sur $\Gamma_{\mathcal{I},2}$

$$\begin{cases} 2 \leq i \leq m & \text{dans } \Omega_1, \\ m+2 \leq i \leq m+p & \text{dans } \Omega_2, \\ m+p+2 \leq i \leq m+p+q & \text{dans } \Omega_3. \end{cases}$$

2- Condition aux limites de Neumann

Discrétisons la condition aux limites de Neumann sur la frontière Γ_1 ;

$$-\lambda \overrightarrow{\nabla} w \cdot \vec{n} = \Phi_{imp} \quad (3.21)$$

comme ici l'angle $\theta = \pi$, on a

$$-\lambda \overrightarrow{\nabla} w \cdot \vec{n} = \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.22)$$

Le développement en série de Taylor limité de $w(x_{i+1}, y)$ permet d' écrire le schéma de discrétisation sur la frontière Γ_1 :

$$w_{i,j} = w_{i+1,j} - \frac{h}{\lambda_{i,j}} \Phi_{imp}, \quad \text{pour } i = 1, j = 1, \dots, N + 2 \quad (3.23)$$

3- Condition aux limites de Neumann aux interfaces

Discrétisons la condition de Neumann aux interfaces entre (Ω_1, Ω_2) et (Ω_2, Ω_3) . On a

$$\Upsilon_{\mathcal{I}}(w_{\mathcal{I}}) = \frac{1}{R}(w_{\mathcal{I}} - u_{cst}), \quad \mathcal{I} = 1, 2 \quad (3.24)$$

En substituant l'angle θ dont la valeur est égale à zéro ($\theta = 0$), on obtient alors :

$$-\lambda \overrightarrow{\nabla} w \cdot \vec{n} = -\lambda \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.25)$$

Le schéma correspondant à la discrétisation de la condition aux interfaces est donné par la relation

$$\left(\frac{\lambda_{i,j}}{h} + \frac{1}{R}\right)w_{i,j} - \left(\frac{\lambda_{i,j}}{h}w_{i-1,j} + \frac{1}{R}u_{cst}\right) = 0, \quad (3.26)$$

pour

$$\begin{cases} i = m + 1, & \text{entre } (\Omega_1, \Omega_2) \\ i = m + p + 1, & \text{entre } (\Omega_2, \Omega_3) \end{cases}$$

$$j = 1, \dots, N + 2.$$

-4 Condition de Dirichlet

Sur la frontière Γ_4 , est donnée par la discrétisation de la condition $w = w_{imp}$ est

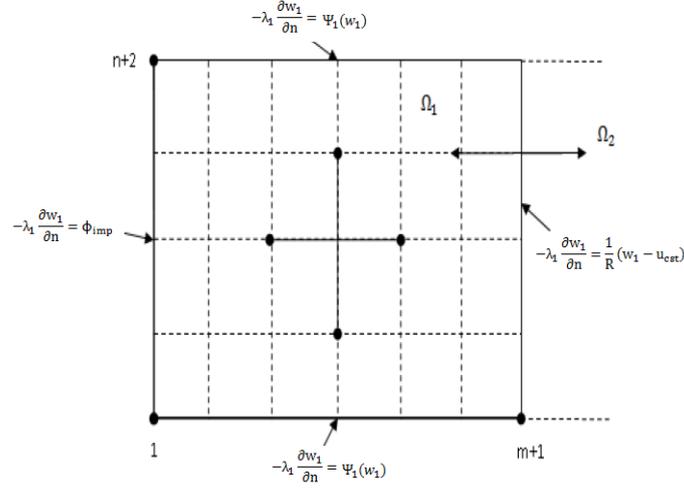
$$w_{i,j} = w_{imp} \text{ pour } i = m + p + q + 1, \quad 1 \leq j \leq N + 2. \quad (3.27)$$

Par contre sur les frontières Γ_5 et Γ_6 , on a

$$\begin{cases} w_{i,j} = w_{1i,j}|_{\Gamma_5} \text{ pour } i = m + 1, \quad 1 \leq j \leq N + 2, \\ w_{i,j} = w_{2i,j}|_{\Gamma_6} \text{ pour } i = m + p + 1, \quad 1 \leq j \leq N + 2. \end{cases} \quad (3.28)$$

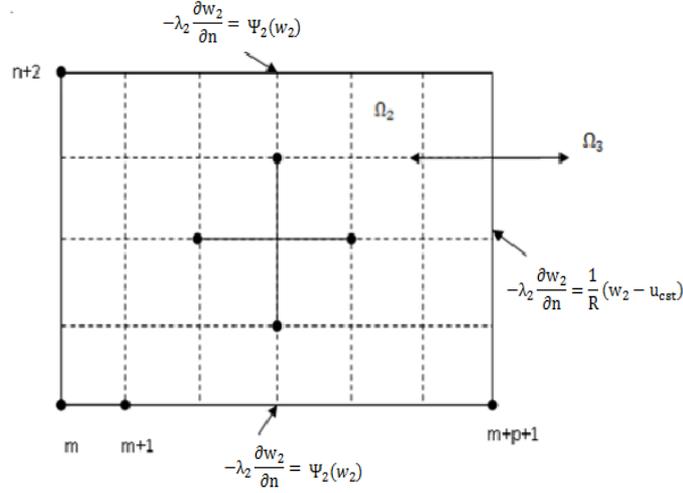
En effet, sur le domaine Ω_1 le maillage du domaine est représenté par la figure 3.3 ; l'approximation du problème discrétisé sur Ω_1 , représentant l'état liquide est donnée par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \frac{\Delta t}{\rho_1 c_1} B_{i,j}^n) w_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho_1 c_1} (B_{i+1,j}^n w_{i+1,j}^{n+1} + B_{i,j+1}^n w_{i,j+1}^{n+1} \\ + B_{i-1,j}^n w_{i-1,j}^{n+1} + B_{i,j-1}^n w_{i,j-1}^{n+1}) = w_{i,j}^n, \\ \text{pour } 2 \leq j \leq N + 1 \text{ et } 2 \leq i \leq m. \\ \\ w_{1,j}^{n+1} = w_{2,j}^{n+1} - \frac{h}{\lambda_{1,j}^n} \Phi_{imp} \text{ pour } 1 \leq j \leq N + 2, \\ \\ (\frac{\lambda_{i,1}^n}{h} + h_{cv,1}) w_{i,1}^{n+1} = -\xi \delta (w_{i,1}^{n+1})^4 + \frac{\lambda_{i,1}^n}{h} w_{i,2}^{n+1} + (h_{cv,1} u_{ext} + \xi \delta u_{ext}^4), \\ \text{pour } 2 \leq i \leq m. \\ \\ (\frac{\lambda_{i,N+2}^n}{h} + h_{cv,1}) w_{i,N+2}^{n+1} = -\xi \delta (w_{i,N+2}^{n+1})^4 + \frac{\lambda_{i,N+2}^n}{h} w_{i,N+1}^{n+1} + (h_{cv,1} u_{ext} + \xi \delta u_{ext}^4), \\ \text{pour } 2 \leq i \leq m. \\ \\ (\lambda_{m+1,j}^n h + \frac{1}{R}) w_{m+1,j}^{n+1} = \frac{\lambda_{m+1,j}^n}{h} w_{m,j}^{n+1} + \frac{1}{R} u_{cst}, \text{ pour } 1 \leq j \leq N + 2 \\ \\ \text{pour } 1 \leq n \leq s \end{array} \right. \quad (3.29)$$


 FIGURE 3.3 – Discrétisation du domaine Ω_1

Sur le domaine Ω_2 la discrétisation est représentée par la figure 3.4. Ainsi, le problème discrétisé définissant l'état pâteux est donné par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (1 - \frac{\Delta t}{\rho_2 c_2} B_{i,j}^n) w_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho_2 c_2} (B_{i+1,j}^n w_{i+1,j}^{n+1} + B_{i,j+1}^n w_{i,j+1}^{n+1} \\
 + B_{i-1,j}^n w_{i-1,j}^{n+1} + B_{i,j-1}^n w_{i,j-1}^{n+1}) = w_{i,j}^n, \\
 \text{pour } 2 \leq j \leq N+1 \text{ et } m+2 \leq i \leq m+p. \\
 \\
 w_{m+1,j}^{n+1} = w_1^{n+1}, \text{ pour } 1 \leq j \leq N+2. \\
 \\
 (\frac{\lambda_{i,1}^n}{h} + h_{cv,2}) w_{i,1}^{n+1} = -\xi \delta (w_{i,1}^{n+1})^4 + \frac{\lambda_{i,1}^n}{h} w_{i,2}^{n+1} + (h_{cv,2} u_{ext} + \xi \delta u_{ext}^4), \\
 \text{pour } m+2 \leq i \leq m+p. \\
 \\
 (\frac{\lambda_{i,N+2}^n}{h} + h_{cv,2}) w_{i,N+2}^{n+1} = -\xi \delta (w_{i,N+2}^{n+1})^4 + \frac{\lambda_{i,N+2}^n}{h} w_{i,N+1}^{n+1} + (h_{cv,2} u_{ext} + \xi \delta u_{ext}^4), \\
 \text{pour } m+2 \leq i \leq m+p. \\
 \\
 (\frac{\lambda_{m+p+1,j}^n}{h} + \frac{1}{R}) w_{m+p+1,j}^{n+1} = \frac{\lambda_{m+p+1,j}^n}{h} w_{m+p,j}^{n+1} + \frac{1}{R} u_{cst}, \text{ pour } 1 \leq j \leq N+2, \\
 \\
 \text{pour } 1 \leq n \leq s,
 \end{array} \right. \quad (3.30)$$


 FIGURE 3.4 – Discrétisation du domaine Ω_2

Enfin, sur le domaine Ω_3 le maillage du domaine est représenté par la figure 3.5.

Le problème discret représentant l'état solide est donné par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (1 - \frac{\Delta t}{\rho_3 c_3} B_{i,j}^n) w_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho_3 c_3} (B_{i+1,j}^n w_{i+1,j}^{n+1} + B_{i,j+1}^n w_{i,j+1}^{n+1} \\
 + B_{i-1,j}^n w_{i-1,j}^{n+1} + B_{i,j-1}^n w_{i,j-1}^{n+1}) = w_{i,j}^n \\
 \text{pour } 2 \leq j \leq N+1 \text{ et } m+p+2 \leq i \leq m+p+q \\
 w_{m+p+1,j}^{n+1} = w_2^{n+2}, \text{ pour } 1 \leq j \leq N+2 \\
 (\frac{\lambda_{i,1}^n}{h} + h_{cv,3}) w_{i,1} = -\xi \delta (w_{i,1}^{n+1})^4 + \frac{\lambda_{i,1}^n}{h} w_{i,2}^{n+1} + (h_{cv,3} u_{ext} + \xi \delta u_{ext}^4), \\
 \text{pour } m+p+2 \leq i \leq m+p+q \\
 (\frac{\lambda_{i,N+2}^n}{h} + h_{cv,3}) w_{i,N+2}^{n+1} = -\xi \delta (w_{i,N+2}^n)^4 + \frac{\lambda_{i,N+2}^n}{h} w_{i,N+1}^{n+1} - (h_{cv,3} u_{ext} + \xi \delta u_{ext}^4), \\
 \text{pour } m+p+2 \leq i \leq m+p+q \\
 w_{m+p+q+1,j} = w_{imp} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N+2 \\
 \text{pour } 1 \leq n \leq \wp
 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

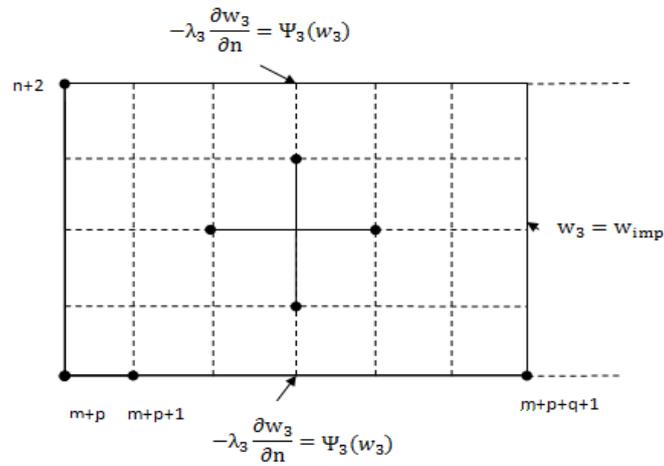


FIGURE 3.5 – Discrétisation du domaine Ω_3

Application

En réalité, les paramètres physiques dépendent de la température $w(\mathbf{x}, t)$. Une première approximation consiste à prendre les deux premiers paramètres ρ et c constants déterminés empiriquement. Par contre, le coefficient de conductivité thermique dépend de la température ; on l’approxime par une fonction linéaire par morceaux de la forme suivante :

$$\lambda_{\mathcal{I}}^p(w_{\mathcal{I}}) = a_{\mathcal{I}}^p + b_{\mathcal{I}}^p w_{\mathcal{I}} \quad \mathcal{I} = 1, 2, 3$$

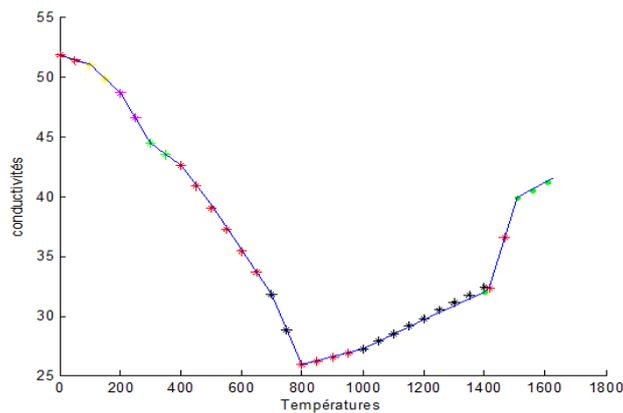


FIGURE 3.6 – Approximation linéaire par morceaux de la conductivité thermique

Cette approximation s'effectue sur des intervalles $[w^{p,min}, w^{p,max}]$ et est représentée sur la figure 3.6 où $a_{\mathcal{I}}^p, b_{\mathcal{I}}^p$ sont des constantes définies sur chaque intervalle ; nous renvoyons au chapitre 4 (Voir tableau (4.1)).

3.1.2 Discrétisation tridimensionnelle

Pour discrétiser le problème tridimensionnel, on procède de manière analogue que dans le cas bidimensionnel. On suppose que la solution $w(x, y, z)$ est quatre fois continûment différentiable par rapport à x, y, z et $\lambda(w)$ continu et suffisamment différentiable. La discrétisation en espace se fait toujours en deux étapes en combinant les schémas **backward-forward** et **forward-backward** ; puis on prend la demi somme des deux schémas obtenus.

Alors, dans la direction x , on fixe y et z , l'opérateur est approché par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{i,j,k} \frac{\partial w(x_i, y_j, z_k)}{\partial x} \right) &= \frac{1}{2h^2} \left((\lambda_{i+1,j,k} + \lambda_{i,j,k}) w_{i+1,j,k} - (\lambda_{i+1,j,k} + 2\lambda_{i,j,k} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{i-1,j,k}) w_{i,j} + (\lambda_{i,j,k} + \lambda_{i-1,j,k}) w_{i-1,j,k} \right) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dans la direction y , on fixe x et z , l'opérateur est approché par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{i,j,k} \frac{\partial w(x_i, y_j, z_k)}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2h^2} \left((\lambda_{i,j+1,k} + \lambda_{i,j,k}) w_{i,j+1,k} - (\lambda_{i,j+1,k} + 2\lambda_{i,j,k} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{i,j-1,k}) w_{i,j,k} + (\lambda_{i,j,k} + \lambda_{i-1,j,k}) w_{j,j-1,k} \right) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (3.33)$$

et, dans la direction z , on fixe x et y , l'opérateur est approché par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{i,j,k} \frac{\partial w(x_i, y_j, z_k)}{\partial z} \right) &= \frac{1}{2h^2} \left((\lambda_{i,j,k+1} + \lambda_{i,j,k}) w_{i,j,k+1} - (\lambda_{i,j,k+1} + 2\lambda_{i,j,k} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{i,j,k-1}) w_{i,j,k} + (\lambda_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k-1}) w_{j,j,k-1} \right) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Pour se ramener à une écriture standard du système algébrique sur chaque sous-domaine, on définit un indice l associé au triplet (i, j, k) comme suit tenant compte de la numérotation des points $l = (k - 1) \cdot (N + 2) \cdot (m + p + q + 1) + (j - 1) \cdot (m + p + q + 1) + i$. On pose $\eta = m + p + q$, $\mu = N + 1$ et $r = \mathcal{N} + 1$, où $\mathcal{N} = m + p + q + 1$ est un entier positif. Avec cette notation, on suppose que les points intérieurs du maillage sont de coordonnées $x_i = ih, 2 \leq i \leq \eta, y_j = jh, 2 \leq j \leq \mu$ et $z_k = kh, 2 \leq k \leq r$.

En effet, en combinant les trois schémas (3.32), (3.33) et (3.34) précédents, on obtient le

schéma pour les points intérieurs du maillage suivant :

$$\bar{B}_{i,l+\eta}w_{l+\eta} + \bar{B}_{i,l+1}w_{l+1} + \bar{B}_{i,l+\eta,\mu}w_{l+\eta\mu} - \bar{B}_{i,l}w_l + \bar{B}_{i,l-\eta}w_{l-\eta} + \bar{B}_{i,l-\eta,\mu}w_{l-\eta,\mu} + \bar{B}_{i,l-1}w_{l-1},$$

pour

$$2 \leq i \leq \eta, 2 \leq j \leq \mu, 2 \leq k \leq r.$$

Alors, pour ces points, on obtient une matrice hepta-diagonale (voir Figure 3.7) dont les coefficients diagonaux sont

$$\bar{B}_{i,l} = -\frac{\lambda_{i+1,j,k} + \lambda_{i,j+1,k} + \lambda_{i,j,k+1} + 6\lambda_{i,j,k} + \lambda_{i-1,j,k} + \lambda_{i,j-1,k} + \lambda_{i,j,k-1}}{2h^2},$$

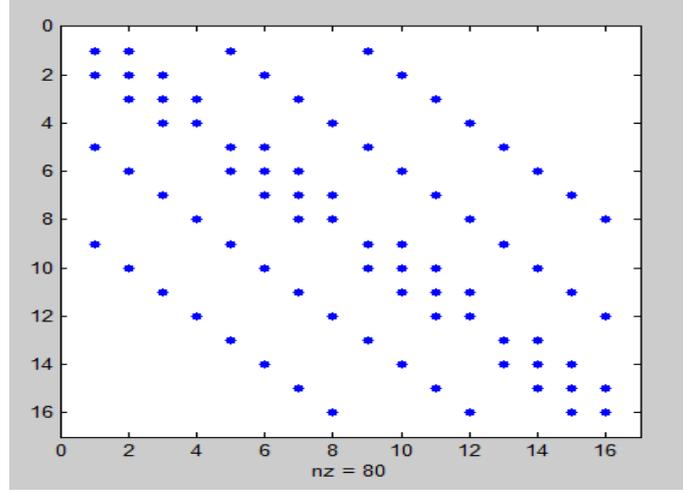
et les coefficients hors-diagonale sont donnés par

$$\bar{B}_{i,l+\eta} = -\frac{\lambda_{i,j,k} + \lambda_{i+1,j,k}}{2h^2} \quad \text{et} \quad \bar{B}_{i,l-\eta} = -\frac{\lambda_{i,j,k} + \lambda_{i-1,j,k}}{2h^2},$$

$$\bar{B}_{i,l+1} = -\frac{\lambda_{i,j,k} + \lambda_{i,j+1,k}}{2h^2} \quad \text{et} \quad \bar{B}_{i,l-1} = -\frac{\lambda_{i,j,k} + \lambda_{i,j-1,k}}{2h^2},$$

$$\bar{B}_{i,l+\eta,\mu} = -\frac{\lambda_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k+1}}{2h^2} \quad \text{et} \quad \bar{B}_{i,l-\eta,\mu} = -\frac{\lambda_{i,j,k} + \lambda_{i,j,k-1}}{2h^2}.$$

Pour les points intérieurs, la discrétisation complète en espace et en temps est


 FIGURE 3.7 – Structure de la matrice A_{3D}^n en 3D

$$\begin{aligned}
 (Id - \frac{\Delta t}{\rho c} \bar{B}_{l,l}^n) w_l^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho c} (\bar{B}_{l,l+\eta}^n w_{l+\eta}^{n+1} + \eta + \bar{B}_{l,l+1}^n w_{l+1}^{n+1} + \bar{B}_{l,l+\eta,\mu}^n w_{l+\eta\mu}^{n+1} \\
 + \bar{B}_{l,l-\eta}^n w_{l-\eta}^{n+1} + \bar{B}_{l,l-1}^n w_{l-1}^{n+1} + \bar{B}_{l,l-\eta,\mu}^n w_{l-\eta,\mu}^{n+1}) = w_l^n
 \end{aligned} \quad (3.35)$$

La discrétisation des conditions aux limites de type Neumann, Robin et Dirichlet en 3D est similaire à celle obtenue dans le cas 2D.

Cependant, les conditions de convection et rayonnement sont réparties sur les faces suivantes : face basse horizontale, face haute horizontale, face avant verticale et face arrière verticale $\bigcup_{r=2}^5 \Gamma_{\mathcal{I},r}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$. Sur la face verticale arrière Γ_1 , on a la condition de Neumann, par contre aux interfaces ; liquide-pâteuse et pâteuse-solide Γ_6 et Γ_7 respectivement, on a la condition de Robin. La condition de Dirichlet est définie respectivement sur les faces verticale avant Γ_6 , Γ_7 et Γ_8 . Les schémas de discrétisation correspondant aux conditions aux limites sont donnés respectivement par

$$\left(\frac{\lambda_l^n}{h} + h_{cv} \right) w_l^{n+1} + \zeta \delta (w_l^{n+1})^4 - \frac{\lambda_l^n}{h} w_{l,l+1}^{n+1} - (h_{cv} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) = 0,$$

$$\text{pour } \begin{cases} 2 \leq i \leq p, \\ p+2 \leq i \leq p+q, \\ p+q+2 \leq i \leq \eta \\ k = 1, r, \end{cases} , j = 1, j = \mu,$$

et

$$\frac{\lambda_l^n}{h} + h_{cv} w_l^{n+1} + \zeta \delta (w_l^n)^4 - \frac{\lambda_l^{n+1}}{h} w_{l,l+\eta,\mu}^{n+1} - (h_{cv} u_{ext} + \zeta \delta u_{ext}^4) = 0,$$

$$\text{pour } \begin{cases} 2 \leq i \leq p, \\ p+2 \leq i \leq p+q \\ p+q+2 \leq i \leq \eta \\ j = 2, \mu, \end{cases}, \quad k = 1, \quad k = r,$$

Pour la condition de Neumann sur la face verticale arrière Γ_1 , on a

$$w_l^{n+1} = w_{l,l+\eta}^{n+1} + \frac{h}{\lambda_l^n} \Phi_{imp}, \quad \text{pour } i = 1, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad k = 1, \dots, r.$$

La condition de Neumann aux interfaces entre (Ω_1, Ω_2) et (Ω_2, Ω_3) est

$$w_l^{n+1} = \frac{(\frac{\lambda_l^n}{h} w_{l,l-1}^{n+1} + \frac{1}{R} u_{cst})}{(\frac{\lambda_l^n}{h} + \frac{1}{R})}; \quad \text{pour } i = p \text{ et } p+q; \quad j = 1, \dots, \mu, \quad k = 1, \dots, r,$$

$$w_l^{n+1} = w_1^{n+1}, \quad \text{pour } i = p+1; \quad 1 \leq j \leq \mu, \quad k = 1, \dots, r,$$

et

$$w_l^{n+1} = w_2, \quad \text{pour } i = p+q+1; \quad 1 \leq j \leq \mu, \quad k = 1, \dots, r.$$

Enfin, la condition de Dirichlet est donnée par

$$w_l = w_{imp} \quad \text{pour } i = \eta, \quad 1 \leq j \leq \mu, \quad 1 \leq k \leq r.$$

3.2 Problème avec contrainte

Dans cette section, considérons la résolution du problème avec contrainte. La résolution numérique du problème d'obstacle conduit à la résolution du problème multivoque (2.45) – (2.47) dans le cas $2D$ et du problème (2.48) – (2.50) dans le cas $3D$ sur chaque sous domaine.

Vue l'importance de la condition de rayonnement (voir chapitre 2) et compte tenu des discrétisations effectuées sur chaque sous domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, on aura donc à résoudre trois systèmes algébriques multivoques de la forme suivante :

$$\mathbb{A}_{\mathcal{I}}^n U_{\mathcal{I}}^{n+1} + \Psi_{\mathcal{I}}(U_{\mathcal{I}}^{n+1}) + \partial \chi_{K_{\mathcal{I}}}(U_{\mathcal{I}}^{n+1}) - \mathbf{G}_{\mathcal{I}} \ni 0, \quad \mathcal{I} = 1, 2, 3 \quad (3.36)$$

où $\mathbb{A}_{\mathcal{I}}^n = (\frac{\rho_{\mathcal{I}} c_{\mathcal{I}}}{\Delta t} Id + \Pi_{\mathcal{I}}^n) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^{8_{\mathcal{I}}})$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, est la matrice globale issue de la discrétisation

par la méthode des différences finies, avec $\Pi_{\mathcal{I}}^n$ la matrice de discrétisation spatiale. $U_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{N_{\mathcal{I}}}$, $\mathbf{G}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, le terme issu de la semi discrétisation temporelle, $\partial\chi_{\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}(U_{\mathcal{I}})$ est l'opérateur sous-différentiel de la fonction indicatrice discrétisée, où les i^{ime} composantes du sous-différentiel de la fonction indicatrice $\chi_{\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}(u_i)$ du sous-ensemble convexe $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, seront notées par

$$\partial\chi_{\mathcal{K}_{\mathcal{I}}}(u_i) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } u_i < 0, \\]-\infty, 0] & \text{si } u_i = 0, \\ 0 & \text{si } u_i > 0, \end{cases}$$

où \emptyset est l'ensemble vide.

$\Psi_{\mathcal{I}}(U_{\mathcal{I}})$ résulte de la discrétisation de la condition de convection et rayonnement.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons donner les propriétés des matrices $\mathbb{A}_{\mathcal{I}}^n$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ facilement vérifiables qui assureront l'inversibilité de la matrice $\mathbb{A}_{\mathcal{I}}^n$.

Définition 3.1. \mathbb{A} est une *M*-matrice si $a_{i,j} \leq 0$ avec $i \neq j$ et \mathbb{A} est inversible avec $\mathbb{A}^{-1} \geq 0$.

Lemme 3.1. [45]

La matrice \mathbb{A} est à diagonale dominante, si :

$$|a_{k,k}| \geq \sum_{I \neq k} |a_{kI}|, \text{ pour } 1 \leq k \leq \dim(\mathbb{A}),$$

et il existe au moins un indice k_0 tel que :

$$|a_{k_0,k_0}| > \sum_{I \neq k_0} |a_{k_0I}|$$

Théorème 3.1. [45] Soit \mathbb{A} une matrice tel que $a_{i,j} \leq 0$ si $i \neq j$. \mathbb{A} est une *M*-matrice ssi

- (1) les éléments diagonaux $a_{i,i}$ sont strictement positifs,
- (2) la matrice de Jacobi $J = I - D^{-1}\mathbb{A}$, où D la matrice diagonale de \mathbb{A} , est telle que $\rho(J) < 1$ (rayon spectral de J)

Théorème 3.2. [45] Si \mathbb{A} est une matrice à diagonale strictement dominante tel que $a_{i,j} \leq 0$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} > 0$ alors \mathbb{A} est une *M*-matrice.

Théorème 3.3. [45] Si \mathbb{A} est une *M*-matrice et \mathfrak{D} une matrice diagonale non négative alors $(\mathbb{A} + \mathfrak{D})$ est une *M*-matrice et $(\mathbb{A} + \mathfrak{D})^{-1} \leq (\mathbb{A})^{-1}$.

On deduit de ces définitions que les matrices de discrétisation

$$\mathbb{A}_{\mathcal{I}}^n, \mathcal{I} = 1, 2, 3 \text{ sont des M-matrices à diagonales strictement dominantes} \quad (3.37)$$

D'autre part, le sous différentiel de la fonction indicatrice $\partial\chi_{K_{\mathcal{I}}}(U_{\mathcal{I}})$ est un opérateur diagonal et, de plus, les applications $\Psi_{\mathcal{I}}(U_{\mathcal{I}}), \mathcal{I} = 1, 2, 3$ sont à diagonales monotones croissantes.

3.3 Solution numérique du problème modèle

Dans cette section, nous nous intéressons à des algorithmes itératifs de relaxation par points pour résoudre les systèmes d'équations non-linéaires issus de la discrétisation d'inéquations variationnelles. La convergence des algorithmes est étudiée par la technique de contraction en norme vectorielle, (J.C Miellou [36], [37],) et implique la convergence en norme scalaire uniforme avec poids adaptée à l'application de point fixe associée au problème.

3.3.1 Algorithme séquentiel

Soit \aleph un entier positif. On suppose $E = \mathbb{R}^{\aleph}$ un espace de Hilbert ; on note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de E défini par $\langle U, \check{U} \rangle = \sum_{i=1}^{\aleph} u_i \cdot \check{u}_i, \forall U, \check{U} \in E$ et soit $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

Dans la suite, on considère le problème général de point fixe

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in E \text{ tel que} \\ U = \mathcal{F}(U) \end{array} \right. \quad (3.38)$$

où $U \rightarrow \Lambda(U)$ est une application de E dans E avec

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_{\aleph})$$

et

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(u_1, u_2, \dots, u_{\aleph})$$

Pour résoudre le problème (3.38), on considère le processus itératif défini comme suit : Soit $U^0 \in E$ un vecteur initial donné ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, u^{n+1} est défini par

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} \mathcal{F}(u_1^n, \dots, \omega_j, \dots, u_{\aleph}^n) & \text{si } i \in \varrho(n) \\ u_i^n & \text{si } i \notin \varrho(n) \end{cases} \quad (3.39)$$

où

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \varrho(n) \neq \emptyset \\ \forall i \in \{1, \dots, \aleph\}, \text{ l'ensemble } \{n \in \mathbb{N} \mid i \in \varrho(n)\} \text{ est infini} \end{cases} \quad (3.40)$$

et $\varrho(n)$ est la stratégie de choix des composante relaxées.

Dans le contexte des processus iteratifs, notamment pour le choix de $\varrho(n)$, (3.39)-(3.40) sont des algorithmes séquentiels classiques. Parmi ces algorithmes, on retrouve la méthode de Jacobi, si $\forall n \in \mathbb{N}, \varrho(n) = \{1, \dots, \aleph\}$, i.e.

$$S = \{\{1, \dots, \aleph\}, \dots \{1, \dots, \aleph\}, \dots\},$$

et la méthode de Gauss-Seidel, si $\forall n \in \mathbb{N}, \varrho(n) = \{1 + n \bmod \aleph\}$, i.e.

$$S = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{\aleph\}, \dots \{1\}, \{2\}, \dots, \{\aleph\}, \dots\};$$

De plus si

$$S = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{\aleph\}, \{\aleph\}, \{\aleph - 1\}, \dots, \{1\}, \{1\}, \dots, \{\aleph\}, \{\aleph\}, \dots, \{1\}, \dots\};$$

alors (3.39)-(3.40) décrit la méthode des directions alternée implicite (ADI). Ce modèle (3.39)-(3.40) constitue un modèle plus général.

3.3.2 Algorithme de résolution du problème discretisé

Dans le présent paragraphe, nous étudions la convergence des algorithmes (3.39) et (3.40). La démarche générale peut se résumer comme suit : étant donné le système d'équations (3.36) et tenant compte de la non-linéarité due à la condition de rayonnement, une linéarisation est effectuée. En effet, on résout d'abord, les équations sur les frontières, en particulier celles correspondant aux conditions de rayonnement par la méthode de Newton projetée, puis on résout les équations associées aux points intérieurs par la méthode de relaxation par points. Nous projetons dans les convexes $\mathcal{K}_{\mathcal{I}}, \mathcal{I} = 1, 2, 3$, pour tous les points, y compris ceux des frontières au fur et à mesure que les relaxations par points sont effectuées.

Donc, pour déterminer la solution $U_{\mathcal{I}}, \mathcal{I} = 1, 2, 3$, dans chaque sous domaine, nous considérons le couplage de la méthode de Newton projetée pour les points situées sur les frontières avec la méthode de relaxation par points projetée. La convergence de ces algorithmes est assurée par des propriétés de contraction en norme vectorielle et par une norme scalaire uniforme avec poids adaptée. Cette étude est identique dans chaque sous domaine $\Omega_{\mathcal{I}}, \mathcal{I} = 1, 2, 3$, aussi bien en $2D$ qu'en $3D$.

Soit le système algébrique multivoque suivant :

$$\Psi(V) + \mathbb{A}V - \mathbf{G} + \partial\chi_{\mathcal{K}}(V) \ni 0 \quad (3.41)$$

où \mathbb{A} est une M-matrice à diagonale strictement dominante , V un vecteur, $\Psi(V)$ une application diagonale monotone croissante et $\partial\chi_{\mathcal{K}}(V)$ le sous différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble convexe fermé \mathcal{K} . Soient v_i pour $i = 1, \dots, \aleph$ les composantes du vecteur V , \bar{g}_i , $\partial\chi_i(v_i)$ et $\Psi_i(v_i)$ les composantes de G , $\partial\chi_{\mathcal{K}}(V)$ et $\Psi(V)$. L'algorithme séquentiel par points issu de la discrétisation d'un problème multivoque, peut s'écrire :

$$\Psi_i(v_i) + a_{i,i}v_i + \sum_{j \neq i} a_{i,j} v_j - \bar{g}_i + \partial(\chi_{\mathcal{K}})_i(v_i) \ni 0, \forall i \in \{1, \dots, \aleph\} \quad (3.42)$$

que l'on peut écrire aussi sous la forme

$$\Psi_i(v_i) + a_{i,i}v_i + \sum_{j \neq i} a_{i,j} v_j - \bar{g}_i + \bar{w}_i(v_i) = 0, \bar{w}_i(v_i) \in \partial(\chi_{\mathcal{K}})_i(v_i), \forall i \in \{1, \dots, \aleph\} \quad (3.43)$$

On cherche à calculer la solution du système (3.43) comme limite d'une suite de solutions approchées. Cependant, l'équation (3.43) peut être transformée en une équation de point fixe. On a alors,

$$a_{i,i}v_i + \bar{w}_i(v_i) + \Psi_i(v_i) = \left(\bar{g}_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} v_j \right) \quad (3.44)$$

$$\bar{w}_i(v_i) \in \partial(\chi_{\mathcal{K}})_i(v_i^*), \forall i \in \{1, \dots, \aleph\}$$

On peut donc associer à (3.44) une méthode de relaxation par point définie par (3.39)-(3.40).

3.3.3 Étude de la convergence par des techniques de contraction

Pour démontrer que l'algorithme converge, citons le résultat suivant qui garantit la convergence.

Proposition 3.1. *Ψ et $\partial\chi_{\mathcal{K}}$ étant des opérateurs diagonaux monotones, si \mathbb{A} est une M-matrice à diagonale strictement dominante, alors on peut associer au problème (3.41) une application point fixe contractante \mathcal{F}_n . Donc il existe un et un seul point fixe U^* unique solution du problème discrétisé (3.41). De plus, quelle que soit la condition initiales U^0 , la*

méthode de relaxation (3.39)-(3.40) converge vers U^* .

Preuve. En effet, pour tout vecteur $V \in \mathbb{R}^{\aleph}$, on définit l'application point fixe Λ_n comme suit

$$\Psi_i(v_i) + a_{i,i}v_i + \bar{w}_i(v_i) = -\sum_{j \neq i} a_{i,j} u_j + \bar{g}_i = \mathcal{F}_n(u), \quad \bar{w}_i(v_i) \in \partial(\chi_{\mathcal{K}})_i(v_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, \aleph\}, \quad (3.45)$$

On peut poser $V = \mathcal{F}_n(U)$, $\forall U \in \mathbb{R}^{\aleph}$; soit le vecteur $U' \in \mathbb{R}^{\aleph}$ et considérons la même relation précédente (3.45)

$$\Psi_i(v'_i) + a_{i,i}v'_i + \bar{w}_i(v'_i) = -\sum_{j \neq i} a_{i,j} u'_j + \bar{g}_i = \mathcal{F}_n(u'), \quad \bar{w}_i(v'_i) \in \partial(\chi_{\mathcal{K}})_i(v'_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, \aleph\}, \quad (3.46)$$

En retranchant membre à membre les équations (3.45) et (3.46), on obtient :

$$(\Psi_i(v_i) - \Psi_i(v'_i)) + a_{i,i}(v_i - v'_i) + (\bar{w}_i(v_i) - \bar{w}_i(v'_i)) = \sum_{j \neq i} -a_{i,j}(u_j - u'_j) \quad (3.47)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, \aleph\}$$

Multipliant la relation (3.47) par $(v_i - v'_i)$, on a

$$\langle \Psi_i(v_i) - \Psi_i(v'_i), v_i - v'_i \rangle + a_{i,i}(v_i - v'_i)^2 + \langle \bar{w}_i(v_i) - \bar{w}_i(v'_i), v_i - v'_i \rangle = \sum_{j \neq i} -a_{i,j}(u_j - u'_j)(v_i - v'_i)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, \aleph\}$$

Comme le sous-différentiel de la fonction indicatrice est monotone, on a

$$\langle \bar{w}_i(v_i) - \bar{w}_i(v'_i), v_i - v'_i \rangle \geq 0.$$

On a aussi

$$\langle \Psi_i(v_i) - \Psi_i(v'_i), v_i - v'_i \rangle \geq 0$$

car $\Psi_i(v_i)$ est une application diagonale et croissante donc monotone. On a donc :

$$0 \leq a_{i,i} |v_i - v'_i|^2 \leq \sum_{j \neq i} -a_{i,j} |(u_j - u'_j)| |v_i - v'_i|, \quad \forall i \in \{1, \dots, \aleph\} \quad (3.48)$$

et on obtient :

$$|v_i - v'_i| \leq \sum_{j \neq i} -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} |u_j - u'_j|, \quad \forall i \in \{1, \dots, \aleph\} \quad (3.49)$$

l'inégalité que l'on peut écrire en norme vectorielle

$$|\mathcal{F}_n(U) - \mathcal{F}_n(U')| \leq \mathcal{J} |U - U'|, \quad U, U' \in \mathbb{R}^\aleph \quad (3.50)$$

Avec \mathcal{J} la matrice $(\aleph \times \aleph)$ définie par

$$\mathcal{J} = \begin{cases} \mathcal{J}_{i,i} = 0 \\ \mathcal{J}_{i,j} = -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}, & i \neq j \end{cases}$$

où \mathcal{J} est la matrice de Jacobi associée à \mathbb{A} .

$r(\mathcal{J}) < 1$ (rayon spectral de la matrice \mathcal{J}).

Munissons l'espace E de la norme uniforme avec poids :

$$\|V\|_{\tau, \vartheta} = \max_{i \in \{1, \dots, \aleph\}} \frac{|v_i|}{\vartheta_i} \quad (3.51)$$

dans laquelle le vecteur des poids $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_\aleph) \in \mathbb{R}^\aleph$ est le vecteur propre associé au rayon spectral de la matrice de Jacobi de \mathbb{A} notée \mathcal{J} . L'existence et la non-négativité du vecteur ϑ sont établies à l'aide du théorème de Perron-Frobenius [45]. En effet, étant donné que la matrice \mathbb{A} est une M-matrice à diagonale strictement dominante, la matrice \mathcal{J} de taille $\aleph \times \aleph$ est non-négative. Ainsi, \mathcal{J} et ϑ vérifient

$$\begin{cases} \forall \tau \in [r(\mathcal{J}), 1[, \text{il existe un vecteur de } \mathbb{R}^\aleph \text{ tel que} \\ \mathcal{J}\vartheta \leq \tau\vartheta \text{ et } \vartheta > 0 \text{ composante par composante} \end{cases} \quad (3.52)$$

Donc l'inégalité (3.50) peut être écrite comme suit

$$\|V - V'\|_{\tau, \vartheta} \leq \tau \|U - U'\|_{\tau, \vartheta} \quad (3.53)$$

avec $0 < \tau < 1$. On a alors, le résultat de contraction pour la norme scalaire (3.51).

D'après l'inégalité (3.53), Λ_n est contractante et on obtient le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (3.41).

Donc, quelle que soit la condition initiale V^0 , la convergence de (3.39)-(3.40) résulte de [36]

associé à la propriété de contraction par rapport à la norme vectorielle (3.49) de l'application de point fixe Λ_n ou directement par la contraction dans le sens usuel (3.53) par application du résultat donné dans [51].

Dans le procédé de coulée continue, nous avons décrit la solidification du matériau par zone. Cependant, le champ de températures est calculé successivement, sur chaque sous-domaine par une méthode de relaxation. On fait des itérations successives jusqu'à l'obtention de la convergence sur Ω_1 , puis sur Ω_2 et enfin sur Ω_3 . La convergence des algorithmes par points dans chaque sous-domaine est vérifiée, on prend $V = U_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, vecteur solution de chaque système algébrique multivoque (3.36) associé aux problèmes multivoques (2.55)-(2.57) en 2D et (2.58)-(2.60) en 3D. Pour $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, chaque système vérifie les hypothèses de la Proposition 3.1. On peut alors conclure :

Corollaire 3.1. *Soient les systèmes algébriques multivoques (3.36) ; la méthode itérative (3.39)-(3.40) associée à la décomposition par points converge vers la solution $U_{\mathcal{I}}^*$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, quelle que soit la condition initiale $U_{\mathcal{I}}^0$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$.*

3.4 Un modèle de calcul parallèle asynchrone

Dans cette section, nous nous intéressons à des algorithmes itératifs de relaxation parallèles asynchrones pour résoudre le système d'équations non-linéaires issus de la discrétisation des problèmes (2.16)-(2.18). Les algorithmes parallèles asynchrones sont des méthodes itératives dans lesquelles les réactualisations du vecteur itéré sont effectuées sans synchronisation, ni ordre précis (voir figures 3.8). La modélisation de ces algorithmes asynchrones a été développée par D. Chazan et Miranker [10] dans le cas linéaire, J.C. Miellou [36], G. Baudet [2], D. Bertsekas [3] dans le cas non-linéaire ; citons également les travaux de F. Robert [19], [44] dans le cas synchrone. Ces algorithmes sont décrits en introduisant une stratégie de choix des composantes pour rendre compte du parallélisme ainsi qu'une notion de retard pour rendre compte de l'asynchronisme entre les processeurs. Dans la présente section, la convergence des algorithmes est étudiée par des techniques de contraction. Sous des hypothèses convenables, on établit la convergence de ces algorithmes parallèles asynchrones soit par des propriétés de contraction en norme vectorielle (voir [50]) de l'application de point fixe associée au problème, soit par des propriétés de contraction pour une norme scalaire adaptée.

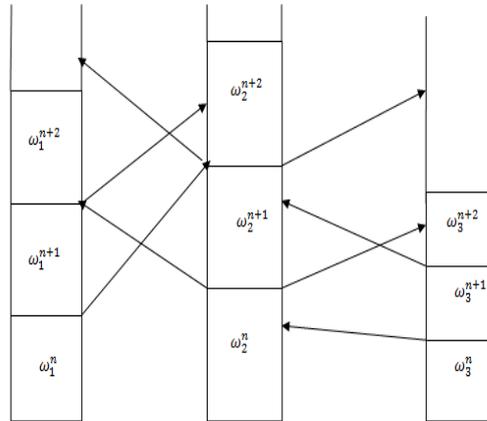


FIGURE 3.8 – Itérations parallèles asynchrones.

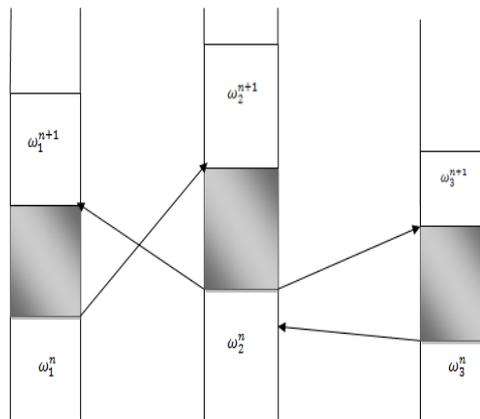


FIGURE 3.9 – Itérations parallèles synchrones.

3.4.1 Formulation des itérations parallèles asynchrones

Soit E un espace de Banach, considéré comme un produit fini d'espaces de Banach :

$$E = \prod_{i=1}^{\mathcal{M}} E_i \tag{3.54}$$

où \mathcal{M} est un entier naturel. La décomposition de tout vecteur $\mathcal{W} \in E$ s'écrit :

$$\mathcal{W} = (\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_{\mathcal{M}}) \tag{3.55}$$

où $\forall i \in \{1, \dots, \mathcal{M}\}, \omega_i \in E_i$.

Chaque espace E_i est muni d'une norme notée $|\cdot|_i$. La norme vectorielle canonique $\tilde{q}(\cdot)$

de tout $\mathcal{W} \in E$ est le vecteur non négatif de $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ défini comme suit :

$$\forall \mathcal{W} \in E, \tilde{q}(\mathcal{W}) = (|\omega_1|_1, \dots, |\omega_i|_i, \dots, |u_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{M}}). \quad (3.56)$$

Soit \mathcal{F} une application de $D(\mathcal{F}) \subset E$ à valeurs dans $D(\mathcal{F})$, telle que $D(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. On s'intéresse alors au problème de point fixe suivant :

$$\mathcal{W}^* = \mathcal{F}(\mathcal{W}^*), \quad \mathcal{W}^* \in D(\mathcal{F}). \quad (3.57)$$

Compte tenu de la décomposition de l'espace E , l'application \mathcal{F} se décompose de la manière suivante :

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}) = (\mathcal{F}_1(\mathcal{W}), \dots, \mathcal{F}_i(\mathcal{W}), \dots, \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathcal{W})). \quad (3.58)$$

Chaque composante \mathcal{F}_i est une application de $D(\mathcal{F})$ à valeurs dans $E_i \cap D(\mathcal{F})$.

Nous introduisons à présent les éléments permettant de modéliser le parallélisme ainsi que le comportement asynchrone des algorithmes étudiés.

Pour les itérations parallèles asynchrones, la stratégie est définie de façon légèrement différente par rapport à la définition (3.40). Donc, dans ce cas, nous complétons la définition de la stratégie comme suit.

Définition 3.2. (Stratégie)

Une stratégie \mathcal{S} est une suite $(\varrho(n))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \varrho(n) \subset \{1, \dots, \mathcal{M}\} \text{ et } \varrho(n) \neq \emptyset, \\ \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{M}\}, \{n \in \mathbb{N} \mid i \in \varrho(n)\} \text{ est un ensemble infini.} \end{cases} \quad (3.59)$$

Définition 3.3. (Suite de retards)

Une suite de retards \mathcal{R} est une suite $(\tilde{r}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{r}(n) = (\tilde{r}_1(n), \dots, \tilde{r}_i(n), \dots, \tilde{r}_{\mathcal{M}}(n)) \in \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \quad (3.60)$$

et telle que pour tout $i \in \{1, \dots, \mathcal{M}\}$, l'application $\tilde{h} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^{\mathcal{M}}$, de composantes $\tilde{h}_i : n \mapsto n - \tilde{r}_i(n)$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \tilde{h}_i(n) \leq n \quad (3.61)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{h}_i(n)) = +\infty. \quad (3.62)$$

Compte tenu de ces définitions, les algorithmes parallèles asynchrones peuvent se formuler de la manière suivante [10, 36, 2] :

Définition 3.4. (Algorithme parallèle asynchrone)

Soient $\mathcal{W}^0 \in D(\mathcal{F})$ un vecteur quelconque, \mathcal{S} une stratégie et \mathcal{R} une suite de retards. Un

algorithme parallèle asynchrone construit récursivement une suite d'itérés $(\mathcal{W}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{M}\}, \omega_i^{n+1} = \begin{cases} \omega_i^n & \text{si } i \notin \varrho(n), \\ \mathcal{F}_i(\tilde{\mathcal{W}}^n) & \text{si } i \in \varrho(n), \end{cases} \quad (3.63)$$

où

$$\tilde{\mathcal{W}}^n = (\omega_1^{h_1(n)}, \dots, \omega_i^{h_i(n)}, \dots, \omega_{\mathcal{M}}^{h_{\mathcal{M}}(n)}) \quad (3.64)$$

Interprétation de la stratégie et des retards

La stratégie rend compte de l'ordre des calculs effectués en parallèle. Les indices appartenant à $\varrho(n)$ désignent les composantes relaxées en parallèle à la $n^{\text{ième}}$ relaxation. L'hypothèse (3.59) sur la stratégie exprime le fait qu'aucune composante ne cesse d'être réactualisée. En pratique on prend les dernières composantes réactualisée par l'algorithme (3.63). La suite de retards rend compte l'absence de synchronisations entre les processeurs. Ainsi, les réactualisations des composantes du vecteur itéré font toujours appel à des données suffisamment récentes.

Remarque 3.1. (*Algorithme parallèle synchrone*) La définition 3.4 des itérations parallèles asynchrones est suffisamment générale pour modéliser les itérations synchrones, il suffit de considérer une suite de retards nuls [43]. Dans ce même cadre on retrouve pour des choix particuliers de $\varrho(n)$ les méthodes séquentielles de Jacobi, Gauss-Seidel et ADI.

3.4.2 Théorèmes de convergence

Définition 3.5. (Contraction pour la norme vectorielle)

Soit \mathcal{F} une application de $D(\mathcal{F}) \subset E$ à valeurs dans $D(\mathcal{F})$, telle que $D(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. \mathcal{F} est contractante en $\mathcal{W}^* \in D(\mathcal{F})$ pour la norme vectorielle $\tilde{q}(\cdot)$ s'il existe une matrice \mathcal{J} de taille $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ et de rayon spectral $r(\mathcal{J})$, vérifiant :

$$\mathcal{J} \geq 0 \quad (3.65)$$

$$r(\mathcal{J}) < 1 \quad (3.66)$$

telle que :

$$\forall \mathcal{W} \in D(\mathcal{F}), \tilde{q}(\mathcal{F}(\mathcal{W}) - \mathcal{F}(\mathcal{W}^*)) \leq \mathcal{J} \cdot \tilde{q}(\mathcal{W} - \mathcal{W}^*). \quad (3.67)$$

On dit que \mathcal{J} est une matrice de contraction de \mathcal{F} en \mathcal{W}^* .

Proposition 3.2. (Convergence en norme vectorielle)

Soit \mathcal{F} une application de $D(\mathcal{F}) \subset E$ à valeurs dans $D(\mathcal{F})$, telle que $D(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Si \mathcal{F} admet

un point fixe $\mathcal{W}^* \in D(\mathcal{F})$ et si \mathcal{F} est contractante en \mathcal{W}^* pour la norme vectorielle $\tilde{q}(\cdot)$, alors quelle que soit la donnée initiale \mathcal{W}^0 , la suite $(\mathcal{W}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite à l'aide de l'algorithme parallèle asynchrone (3.63) converge vers le point fixe \mathcal{W}^* .

Preuve. On considère ici la décomposition (3.54) de l'espace E , de manière identique à ce qui a été fait lors de l'établissement du résultat de la proposition 3.1. Dans le cas des itérations parallèles asynchrones la preuve de la proposition 3.2 est identique à celle considérée pour établir la proposition 3.1 car l'application de point fixe \mathcal{F} est contractante pour la norme vectorielle $\tilde{q}(\cdot)$.

On peut aussi montrer ce résultat de convergence en utilisant la norme uniforme avec poids définie par (3.51).

Proposition 3.3. (Convergence en norme scalaire)

Soit \mathcal{F} une application de $D(\mathcal{F}) \subset E$ à valeurs dans $D(\mathcal{F})$, telle que $D(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Si \mathcal{F} admet un point fixe $\mathcal{W}^* \in D(\mathcal{F})$ et si \mathcal{F} est contractante en \mathcal{W}^* pour la norme vectorielle $\tilde{q}(\cdot)$, alors \mathcal{F} est contractante pour la norme uniforme avec poids $\| \cdot \|_{\vartheta}$, autrement dit :

$$\exists \tau \in]0, 1[, \forall \mathcal{W} \in D(\mathcal{F}), \| \mathcal{F}(\mathcal{W}) - \mathcal{F}(\mathcal{W}^*) \|_{\vartheta} \leq \tau \| \mathcal{W} - \mathcal{W}^* \|_{\vartheta} \quad (3.68)$$

et la suite $(\mathcal{W}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite à l'aide de l'algorithme parallèle asynchrone (3.63) converge vers le point fixe \mathcal{W}^* , pour la norme $\| \cdot \|_{\vartheta}$.

Autre critères de convergence En général, on n'a pas autant de processeurs disponibles que le nombre de blocs \mathcal{M} ; soit $\tilde{\sigma}$ le nombre de processeurs avec $\tilde{\sigma} < \mathcal{M}$. Cette situation, consiste à considérer pour une décomposition donnée, une décomposition plus grossière comme dans [37].

Les grands blocs sont composés de blocs adjacents de la décomposition initiale. Ce type d'algorithme est appelé algorithme parallèle synchrone ou asynchrone associé à la décomposition en sous-domaines sans recouvrement du problème. Sa formulation et l'analyse de sa convergence est traitée dans [50, 37]. Il a été prouvé que si l'application de point fixe est contractante pour une décomposition donnée, alors l'application de point fixe est contractante pour une décomposition plus grossière; dans les deux situations l'algorithme parallèle asynchrone converge; la preuve est établie à l'aide d'un argument technique et nous nous référons à [37] pour plus de détails. En conséquence, si nous considérons une décomposition plus fine correspondant à la décomposition par points pour lequel l'application point fixe est contractante, alors l'application de point fixe associée à toute décomposition plus grossière est contractante aussi. En complément à la proposition 3.1 et en utilisant [37], nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 3.2. *Sous l'hypothèse que \mathbb{A} est une M -matrice et si les hypothèses de la proposition 3.1 sont vérifiées, alors les algorithmes parallèles asynchrones (3.63) associés à la décomposition en sous-domaines du système converge vers la solution de ce système pour n'importe quelle décomposition en sous-domaines.*

Preuve. *Compte tenu du résultat de la proposition 3.1 qui est vérifié pour la décomposition par points et l'application d'un résultat de [37], la preuve découle d'une manière très simple pour une décomposition plus grossière en sous-domaines; donc la méthode parallèle asynchrone sans recouvrement par sous-domaines converge pour chaque décomposition plus grossière.*

3.4.3 Méthode alternée de Schwarz

La méthode alternée de Schwarz est une méthode de décomposition de domaine qui est bien adaptée au parallélisme [26].

Pour présenter cette méthode, on considère un domaine $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, découpé en \mathcal{M} sous-domaines non vides se recouvrant $(\mathcal{O}_i)_{i \in \{1, \dots, \mathcal{M}\}}$ tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, \mathcal{M}\}, \mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$$

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{\mathcal{M}} \mathcal{O}_i$$

Notons $adj(i)$ l'ensemble des sous-domaines adjacents à \mathcal{O}_i , défini comme suit :

$$adj(i) = \{j \mid j \neq i \text{ et } \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset\}.$$

Soient $(\tilde{\Gamma}_i)_{1 \leq i \leq \mathcal{M}}$ les restrictions des frontières de \mathcal{O} à celles des sous-domaines \mathcal{O}_i tels que $\tilde{\Gamma}_i = \partial \mathcal{O}_i \cap \partial \mathcal{O}$. Les frontières entre \mathcal{O}_i et les sous-domaines adjacents sont notées par $\mathfrak{S}_i^j = \partial \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$, pour tout $j \in adj(i)$.

Considérons une équation aux dérivées partielles définie sur $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, par

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u) = f \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \mathcal{B}u_{/\partial \mathcal{O}} = 0, \end{cases} \quad (3.69)$$

où \mathcal{A} est un opérateur linéaire ou non-linéaire, les conditions aux limites étant décrites par l'opérateur \mathcal{B} , et pouvant être n'importe quelle condition aux limites classique; u et f sont des fonctions appartenant aux espaces fonctionnels convenablement choisis pour que le problème (3.69) ait une solution unique.

L'algorithme itératif de Schwarz consiste à résoudre à chaque itération, \mathcal{M} sous-problèmes, de la même forme que le problème initial (3.69), définis sur les sous-domaines $(\mathcal{O}_i)_{1 \leq i \leq \mathcal{M}}$ se

recouvrant. Les conditions aux limites des sous-problèmes découlent de la décomposition en sous-domaines. Soient $(f_1, \dots, f_i, \dots, f_{\mathcal{M}})$ les restrictions du second membre sur chacun des sous-domaines $(f_{/\mathcal{O}_i})$. La suite de vecteurs itérés engendrée par l'algorithme de Schwarz est notée $(u_1^n, \dots, u_i^n, \dots, u_{\mathcal{M}}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où u_i^n est une fonction définie sur \mathcal{O}_i . Chaque itération est définie comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{M}\}, \begin{cases} \mathcal{A}_i(u_i^{n+1}) = f_i & \text{dans } \mathcal{O}_i, \\ \mathcal{B}_i u_{i/\Gamma_i}^{n+1} = 0, \\ u_{i/\mathfrak{S}_i}^{n+1} = u_{j/\mathfrak{S}_i}^n, & \text{pour tout } j \in \text{adj}(i). \end{cases} \quad (3.70)$$

Chaque sous-problème associé à une itération de l'algorithme est résolu de façon parallèle. L'introduction du parallélisme asynchrone dans cet algorithme consiste à ré-écrire (3.70) en y incorporant une stratégie \mathcal{S} et d'une suite de retards \mathcal{R} :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} i \in \varrho(n) \implies \begin{cases} \mathcal{A}_i(u_i^{n+1}) = f_i & \text{dans } \mathcal{O}_i, \\ \mathcal{B}_i u_{i/\Gamma_i}^{n+1} = 0, \\ u_{i/\mathfrak{S}_i}^{n+1} = \tilde{u}_{j/\mathfrak{S}_i}^n, & \text{pour tout } j \in \text{adj}(i) \end{cases} \\ i \notin \varrho(n) \implies u_i^{n+1} = u_i^n. \end{cases} \quad (3.71)$$

où $\forall j \in \text{adj}(i)$, \tilde{u}_j^n est une application définie sur \mathcal{O}_j dont l'expression dépend de $\tilde{h}_j(n)$ est du type d'algorithme asynchrone choisi :

- 1- $\tilde{u}_j^n = \tilde{u}_j^{\tilde{h}_j(n)}$ dans le cas des algorithmes asynchrones classiques.
- 2- $\tilde{u}_j^n \in [u_j^n, \min(\tilde{u}_j^{\tilde{h}_j(n)}, \tilde{u}_j^m)]$ où $m = \max \mathcal{L}_i^n$ dans le cas des algorithmes asynchrones avec communication flexible et convergence monotone, avec $\mathcal{L}_i^n = \{\kappa \in \mathbb{N} \mid \tilde{h}(\kappa) = i, 0 \leq \kappa \leq n\}$ l'ensemble de tous les numéros d'itération inférieurs à n , pour lesquels la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur itéré a été réactualisée.

Analyse de convergence en asynchrone On peut à présent établir un lien entre la méthode de Schwarz asynchrone (3.71) et les modèles d'algorithmes parallèles asynchrones. La discrétisation des \mathcal{M} sous-problèmes de l'algorithme de Schwarz classique (3.70) conduit à la résolution de systèmes algébriques couplés. Dans le cas de problèmes linéaires

$$\mathbb{A}\mathcal{W} = G, \quad (3.72)$$

d'après [16] si la matrice de discrétisation du problème initial (3.69) est une M-matrice, alors la matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ résultant du procédé de Schwarz permettant de prendre en compte les recouvrements entre sous-domaines est une M-matrice. Le système augmenté associé à (3.70) s'écrit :

$$\tilde{\mathbb{A}}.\tilde{\mathcal{W}} = \tilde{G}. \quad (3.73)$$

De plus, si $\mathbb{A}\mathcal{W} - G$ est perturbé par un opérateur diagonal croissant, ce procédé permet d'aboutir à un système algébrique augmenté où intervient la somme d'une application affine construite avec une M-matrice et d'une application diagonale croissante et on est dans le contexte théorique des propositions (3.2) et (3.3).

Ce procédé permet de reformuler la méthode de Schwarz (3.70) comme un algorithme par blocs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \varrho(n), \tilde{\mathbb{A}}_{ii}\tilde{\omega}_i^{n+1} = \tilde{G}_i - \sum_{j \neq i} \tilde{\mathbb{A}}_{ij}\tilde{\omega}_j^n \quad (3.74)$$

3.5 Application pour la résolution du problème de la coulée continue

Dans ce paragraphe, nous nous concentrons sur l'utilisation de la méthode de sous-domaines avec recouvrement et sur la méthode alternée de Schwarz parallèle asynchrone appliquée au système non linéaire multivoque (3.41) dans chaque zone. Sous des hypothèses considérées dans la section 3.3, on peut étudier la convergence de la méthode de sous-domaines avec recouvrement et de la méthode alternée de Schwarz parallélisée avec des algorithmes asynchrones. Notons par $\bigcup_{i=1} \mathcal{O}_{\mathcal{I},i}$ chaque sous-domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, et par $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ l'opérateur $\mathcal{A}_{\mathcal{I}} \equiv \rho_{\mathcal{I}} \mathcal{C}_{\mathcal{I}} \frac{\partial u_{\mathcal{I}}}{\partial t} - \text{div}(\lambda_{\mathcal{I}} \nabla u_{\mathcal{I}})$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ et $f \equiv 0$

3.5.1 Analyse de convergence asynchrone parallèle avec recouvrement

Considérons la même discrétisation que celle choisie dans la section 3.1; en utilisant les mêmes notations, nous avons à résoudre un système algébrique multivoque (3.41). La solution numérique de (3.41) par la méthode alternée de Schwarz consiste à résoudre le système suivant

$$\tilde{\Psi}(\tilde{V}) + \tilde{\mathbb{A}}\tilde{V} - \tilde{\mathbf{G}} + \partial_{\chi\kappa}(\tilde{V}) \ni 0 \quad (3.75)$$

où $\tilde{\mathbb{A}}$, \tilde{V} , $\tilde{\Psi}(\tilde{V})$ et $\partial_{\chi\kappa}(\tilde{V})$ découlent du procédé alternée de Schwarz (Voir [16] et [36]). Soit $\mathcal{M} \in \mathbb{N}$ un nombre entier positif et considérons la décomposition par blocs du problème (3.75) en \mathcal{M} sous-problèmes

$$\tilde{\mathbb{A}}_{ii}\tilde{V}_i^* - \tilde{\mathbf{G}}_i + \sum_{j \neq i} \tilde{\mathbb{A}}_{ij}\tilde{V}_j^* + \tilde{\Psi}_i(\tilde{V}_i^*) + \partial_{\chi_i} \kappa(\tilde{V}_i^*) \ni 0, \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{M}\}, \quad (3.76)$$

avec $\tilde{V}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $\tilde{\mathbf{G}}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ où m_i désigne la taille du $i^{\text{ième}}$ bloc des vecteurs précédents et $\tilde{\mathbb{A}}$ est décomposé comme suit $\tilde{\mathbb{A}} = (\tilde{\mathbb{A}}_{ij})_{1 \leq i, j \leq \mathcal{M}}$, conformément à la décomposition par blocs

considérée. Notons que (3.76) peut être écrit comme suit :

$$\tilde{\mathbb{A}}_{ii}\tilde{V}_i^* - \tilde{\mathbf{G}}_i + \sum_{j \neq i} \tilde{\mathbb{A}}_{ij}\tilde{V}_j^* + \tilde{\Psi}_i(\tilde{V}_i^*) + \tilde{\mathbf{W}}_i^*(\tilde{V}_i^*) = 0, \tilde{\mathbf{W}}_i^* \in \partial\chi_i \mathcal{K}(\tilde{V}_i^*) \quad \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{M}\}, \quad (3.77)$$

On résout le problème augmenté (3.76) par la méthode alternée de Schwarz parallèle asynchrone écrite comme suit

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{A}}_{ii}\tilde{V}_i^{n+1} + \partial\chi_i \mathcal{K}(\tilde{V}_i^{n+1}) + \tilde{\Psi}_i(\tilde{V}_i^{n+1}) \ni \tilde{\mathbf{G}}_i - \sum_{j \neq i} \tilde{\mathbb{A}}_{ij}\tilde{V}_j^n, & \text{si } i \in \varrho(n), \\ \tilde{V}_i^{n+1} = \tilde{V}_i^n, & \text{si } i \notin \varrho(n) \end{cases} \quad (3.78)$$

où $\{\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \dots, \tilde{V}_{\mathcal{M}}\}$ sont les valeurs disponibles des composantes définies par $\tilde{V}_j = \tilde{V}_j^{h_j(n)}$, $j \neq i$ selon (3.59)-(3.63).

Proposition 3.4. *$\tilde{\Psi}$ et $\partial\chi_{\mathcal{K}}$ étant des opérateurs diagonaux monotones, et $\tilde{\mathbb{A}}$ est une M -matrice à diagonale strictement dominante ; alors on peut associer au problème (3.75) une application de point fixe contractante \mathcal{F} . Donc, il existe un et un seul point fixe \tilde{V}^* unique solution du problème discrétisé (3.75). De plus, soit $\tilde{V} = \{\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_{\mathcal{M}}\}$ dont les composantes sont définies par $\tilde{V}_j = \tilde{V}_j^{h_j(n)}$, $j \neq i$; alors quelle que soit la condition initiale V^0 , la méthode alternée de Schwarz parallèle asynchrone définie par (3.78) appliquée à la résolution numérique du problème (3.41) converge vers la solution du système (3.41).*

Preuve. \mathbb{A} étant une M -matrice, la matrice augmentée $\tilde{\mathbb{A}}$ issue du procédé augmenté par la méthode alternée de Schwarz, est aussi une M -matrice (Voir [16, 36]). De plus $\Psi(\tilde{V})$ et $\partial\chi_{\mathcal{K}}(\tilde{V})$ également issus du procédé augmenté sont évidemment des opérateurs diagonaux monotones.

L'application affine construite à partir d'une M -matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ perturbée par $\Psi(\tilde{V})$ et $\partial\chi_{\mathcal{K}}(\tilde{V})$, produit un système algébrique augmenté (3.75) ayant les mêmes propriétés que celles du système algébrique initial (3.41).

On est alors ramené à étudier la convergence de la méthode de Schwarz asynchrone parallèle (3.78) de manière similaire à celle utilisée précédemment dans la proposition 3.1 et le corollaire 3.2. On considère une décomposition par points du problème (3.75), de manière identique on conclut que l'application point fixe $\tilde{\mathcal{F}}$ associée est contractante pour cette décomposition par points particulière. Ensuite, pour toute décomposition plus grossière par blocs du problème (3.78), on utilise encore le résultat de [37] et on obtient la propriété de contraction de l'application point fixe associée à la décomposition par blocs considérée. De plus, la convergence de la méthode de Schwarz asynchrone parallèle (3.78) est assurée en utilisant un argument similaire à celui utilisé dans la démonstration du corollaire 3.2.

Remarque 3.2. *La convergence de la méthode alternée de Schwarz parallèles synchrone et*

asynchrone sans recouvrement est assurée en utilisant un argument similaire à celui utilisé dans la proposition 3.2, 3.3, 3.4 et du corollaire 3.2.

Chapitre 4

Résultats numériques en 2D et 3D

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'implémentation des méthodes de relaxation et de Newton projetée pour résoudre des systèmes algébriques multivoques issus de la discrétisation des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites. Nous présentons différents résultats numériques de résolution du problème non linéaire, pour deux maillages distincts l'un ayant un pas de discrétisation plus fin que l'autre et différentes valeurs des coefficients physiques dans chaque sous-domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$. Nous utilisons pour la résolution numérique l'algorithme introduit au chapitre 3.

Nous présentons plusieurs tests visant à implémenter et comparer les résultats obtenus du problème de solidification de l'acier. Toutes les expérimentations numériques ont été réalisées sur un P.C personnel. Nous avons utilisé la méthode de relaxation par points projetée pour calculer les points intérieurs couplée avec la méthode de Newton projetée utilisée pour les points situés sur les frontières $\gamma_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, où figure la condition non-linéaire de Stefan (dû au rayonnement).

Dans un souci d'auto-suffisance de la présentation, on rappelle dans ce chapitre les trois systèmes algébriques multivoques non-linéaires décrivant le problème dans chaque sous-domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$,

$$\mathbb{A}_{\mathcal{I}}^n U_{\mathcal{I}}^{n+1} + \Psi_{\mathcal{I}}(U_{\mathcal{I}}^{n+1}) + \partial\chi_{K_{\mathcal{I}}}(U_{\mathcal{I}}^{n+1}) - \mathbf{G}_{\mathcal{I}} \ni 0, \quad \mathcal{I} = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

Tout d'abord, on considère que le domaine Ω est divisé en trois sous-domaines égaux, tel que Ω_1 est $[0, \frac{1}{3}] \times [0, 1]^{d-1}$, Ω_2 est $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times [0, 1]^{d-1}$ et Ω_3 est $[\frac{2}{3}, 1] \times [0, 1]^{d-1}$, $d = 2, 3$. On donne, ci-dessous, les paramètres physiques qui seront utiles pour la suite.

4.1 Paramètres Physiques

Les paramètres physiques varient dans chaque zone selon la réalité physique du phénomène et le type du matériau utilisé. Pour la simulation numérique, on considère deux situations distinctes concernant la conductivité thermique. Le premier cas correspond au cas où la conductivité thermique prend des valeurs constantes dans chaque sous domaine (voir Tableau 4.1 cas 1). Par contre, le deuxième cas correspond au cas où la conductivité thermique dépend de la température (voir Tableau 4.1). Ce dernier cas $\lambda_{\mathcal{I}}(u_{\mathcal{I}})$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ est approximé par des fonctions linéaires par morceaux définies par la relation suivante :

$$\lambda_{\mathcal{I}}^p(u_{\mathcal{I}}^p) = a_{\mathcal{I}}^p + b_{\mathcal{I}}^p u_{\mathcal{I}}^p,$$

où $u_{\mathcal{I}}^p \in [u_{\mathcal{I}}^{p,min}, u_{\mathcal{I}}^{p,max}]$ comme le montre le Tableau 4.1.

Sous-domaine	Ω_1	Ω_2	Ω_3	unité
Paramètres communs en 2D et 3D	$\rho_1 = 688.$	$\rho_2 = 745.$	$\rho_3 = 485.$	$J.Kg^{-1}K^{-1}$
	$c_1 = 7340.$	$c_2 = 7659.$	$c_3 = 7834.$	$Kg.m^{-3}$
	$h_{cv,1} = 25$	$h_{cv,2} = 15$	$h_{cv,1} = 5$	$W.m^{-2}K^{-1}$
case 1 : $\lambda_{\mathcal{I}}$ constant	$\lambda_1 = 32.$	$\lambda_2 = 35.6$	$\lambda_3 = 51.$	$W.m^{-1}K^{-1}$

TABLE 4.1 – Paramètres physiques dans chaque sous-domaine.

cas 2	$\lambda_{\mathcal{I}}^q(u_{\mathcal{I}}) = a_{\mathcal{I}}^q + b_{\mathcal{I}}^q u_{\mathcal{I}}^q, \mathcal{I} = 1, 2, 3$	
$\Omega_{\mathcal{I}}$	$[u_{\mathcal{I}}^{q,min}, u_{\mathcal{I}}^{q,max}]$	$(a_{\mathcal{I}}^q, b_{\mathcal{I}}^q)$
Ω_1	$[1508, 1627]; [1418, 1508]$ $[1400, 1418]; [1000, 1400]$	$(19.6240, 0.0134); (-85.7667, 0.0833)$ $(0.8889, 0.0222); (14.2000, 0.0130)$
Ω_2	$[800., 1000]; [700., 800.]$	$(20.7000, 0.0065); (73.1000, -0.0590)$
Ω_3	$[400., 700.]; [300., 400.]$ $[200., 300.]; [100., 200.]$ $[0., 100.]$	$(57.0000, -0.0360); (49.8000, -0.0180)$ $(57.0000, -0.0420); (53.4000, -0.0240)$ $(51.8000, -0.0080)$

TABLE 4.2 – Approximation linéaire par morceaux de la conductivité thermique

Le tableau (4.1) représente dans l'ordre, pour $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, la chaleur spécifique $\rho_{\mathcal{I}}$, la masse volumique $c_{\mathcal{I}}$, le coefficient de transfert thermique $h_{cv,\mathcal{I}}$ (W/m^2K) et la température initiale $w_{in,\mathcal{I}}$ (C) des paramètres communs dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel. L'unité

de la chaleur spécifique est ($J.Kg^{-1}.K^{-1}$), celle de la masse volumique est ($Kg.m^{-3}$) tandis que celle de la conductivité thermique $\lambda_{\mathcal{I}}$ est ($W.m^{-1}.K^{-1}$).

Les paramètres $u_{ext} = 40$ ($^{\circ}C$), $u_{imp} = 100$ ($^{\circ}C$), $\Phi_{imp} = 50$ (J/s), $R = 15$, $\sigma = 5.67e-08$ $w.m^{-2}.K^{-4}$, et $\xi = .18$ sont des paramètres communs dans chaque sous-domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$.

Commentaire sur l'approximation linéaire par morceaux de la conductivité thermique

L'approximation de $\lambda_{\mathcal{I}}^p(u_{\mathcal{I}}^p)$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, fournit une bonne précision (voir Figure 3.6). Aussi, le Tableau 4.1 donne les valeurs des coefficients $a_{\mathcal{I}}^p$ et $b_{\mathcal{I}}^p$ dans chaque intervalle. La figure 3.6 montre qu'on a une courbe parfaitement lisse et régulière sur chaque intervalle $[u_{\mathcal{I}}^{p,min}, u_{\mathcal{I}}^{p,max}]$. Ainsi, on peut conclure que la figure 3.6 représente une bonne approximation linéaire par morceaux de la conductivité thermique. Cette dernière sera utile pour déterminer le champ de températures pour le deuxième cas, c'est-à-dire, lorsque le coefficient de la conductivité thermique dépend de la solution $u(., .)$.

Lors de la mise en oeuvre sur ordinateur, les programmes de calcul ont été écrits en Fortran (Version 77) et les figures sont tracées par le logiciel Matlab (Version 7.5). Dans ce qui suit, nous donnons les résultats numériques ainsi que les graphes correspondants au problème de solidification de l'acier pour les deux situations .

Cas 1 : Coefficients physiques $\rho_{\mathcal{I}}$, $c_{\mathcal{I}}$ et $\lambda_{\mathcal{I}}$ constants

On va donner les résultats de la simulation numérique pour les deux problèmes étudiés en 2D et 3D.

Nous avons considéré 70 et 100 pas de temps.

• **En dimension 2**, on a choisi deux discrétisations correspondant à des nombres de points différents :

1- $211 \times 211 = 44\ 521$ est le nombre de points dans Ω ; le domaine Ω étant découpé en 3 sous-domaines ayant $70 \times 211 = 14\ 770$ points de discrétisation. Le pas d'espace h est égal à 0.014.

2- $301 \times 301 = 90\ 601$ est le nombre de points dans Ω ; chaque sous domaine $\Omega_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$ est de taille $100 \times 301 = 30\ 100$.

Dans ce cas, le pas h est égal à 0.01.

• En dimension 3, on a :

$211 \times 211 \times 211 = 9\,433\,931$ et $301 \times 301 \times 301 = 27\,270\,901$ nombre de points dans Ω et $70 \times 211 \times 211 = 3\,116\,470$ et $100 \times 301 \times 301 = 9\,060\,100$ points de discrétisation sur chaque sous domaine $\Omega_{\mathcal{I}}, \mathcal{I} = 1, 2, 3$. Récapitulons toutes ces données dans le tableau suivant : Pour

Temps	Pts de discrétisation dans $\Omega, 2D$	Pts de discrétisation dans $\Omega, 3D$
70	$211 \times 211 = 44\,521$	$211 \times 211 \times 211 = 9\,433\,931$
100	$301 \times 301 = 90\,601$	$301 \times 301 \times 301 = 27\,270\,901$
Temps	Pts de discrétisation dans $\Omega_{\mathcal{I}}, 2D$	Pts de discrétisation dans $\Omega_{\mathcal{I}}, 3D$
70	$70 \times 211 = 14\,770$	$70 \times 211 \times 211 = 3\,116\,470$
100	$100 \times 301 = 30\,100$	$100 \times 301 \times 301 = 9\,060\,100$

TABLE 4.3 – Points de discrétisation dans le domaine Ω et chaque sous domaine $\Omega_{\mathcal{I}}, \mathcal{I} = 1, 2, 3$ en 2D et 3D.

le problème modèle, c'est-à-dire, la solidification de l'acier en coulée continue nous avons à résoudre trois grands systèmes algébriques multivoques. Grâce aux valeurs élevées de la masse volumique $c_{\mathcal{I}}$ et de la chaleur spécifique $\rho_{\mathcal{I}}$, la convergence est très rapide puisque, les matrices $\mathbb{A}_{\mathcal{I}}^n, \mathcal{I} = 1, 2, 3$ sont à diagonales strictement dominantes.

4.2 Résultats numériques

Pour le premier cas, les performances de la procédure numérique sont regroupées dans le tableau suivant où :

G.S.iterat. : est le nombre d'itérations pour la méthode de Gauss-Seidel.

N.iterat. : est le nombre d'itérations pour la méthode de Newton projetée.

Newton-Relaxation projetée 2D			Newton-Relaxation projetée 3D		
<i>temps</i>	<i>G.S.iterat.</i>	<i>N.iterat.</i>	<i>temps</i>	<i>G.S.iterat.</i>	<i>N.iterat.</i>
4.024 sec	4	2	666.701 sec	6	2
<i>temps</i>	<i>G.S.iterat.</i>	<i>N.iterat.</i>	<i>temps</i>	<i>G.S.iterat.</i>	<i>N.iterat.</i>
14.6328 sec	4	2	2 582.019 sec	6	2

TABLE 4.4 – Performance de la procédure numérique en 2D et 3D - cas les parametres physiques constants.

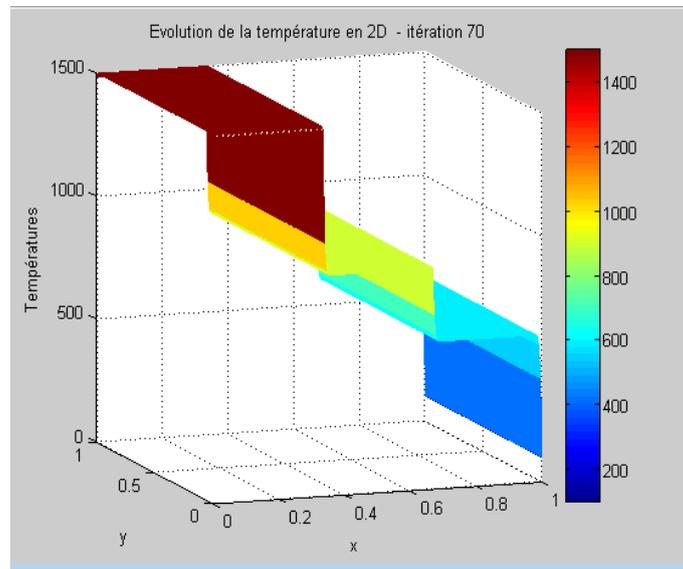


FIGURE 4.1 – Evolution de la température en 2D à l'itération 35

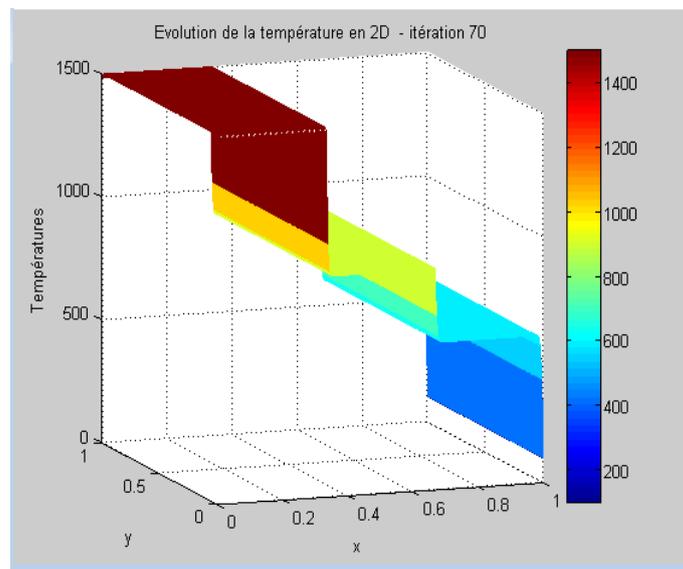


FIGURE 4.2 – Evolution de la température en 2D à l'itération 70

Après avoir calculé la solution approchée du problème discrétisé multivoque (3.36), nous souhaitons montrer que les solutions représentées par les figures 4.1 et 4.2 ne sont pas les mêmes. On calcule la différence absolue entre les deux solutions comme le montre la figure

4.3 et on fait la même chose pour le reste des figures que ce soit en 2D ou en 3D dans le cas où le coefficient physique est constant ou dépendant de la solution.

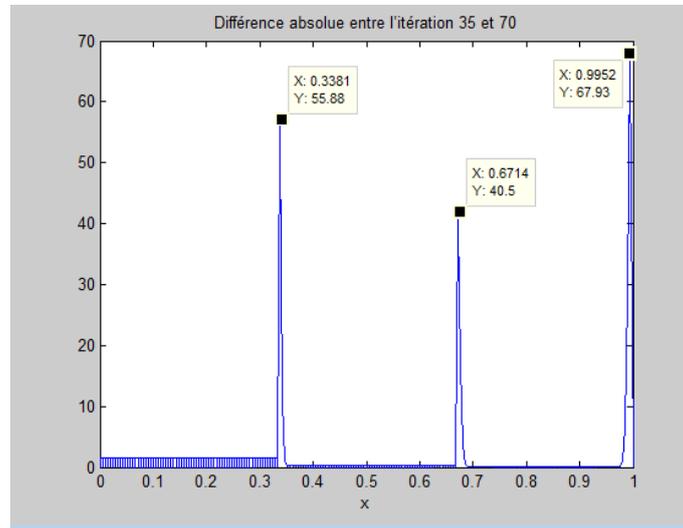


FIGURE 4.3 – Erreurs, $\text{abs}(U_{it70} - U_{it35})$

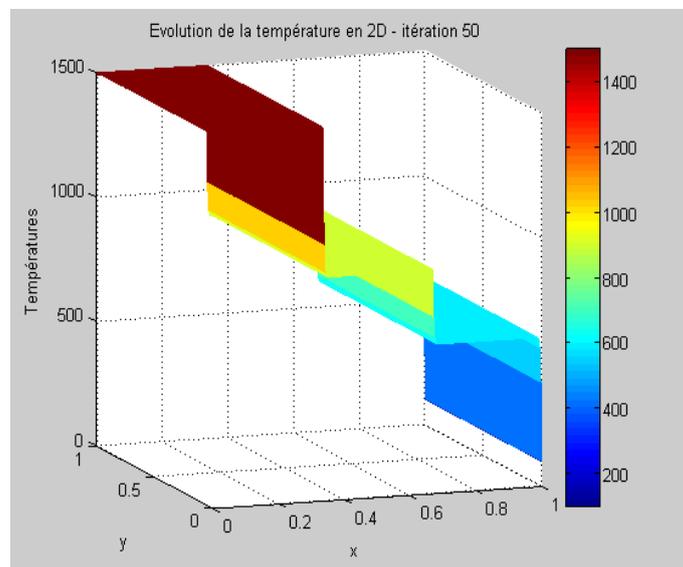


FIGURE 4.4 – Evolution de la température en 2D à l'itération 50

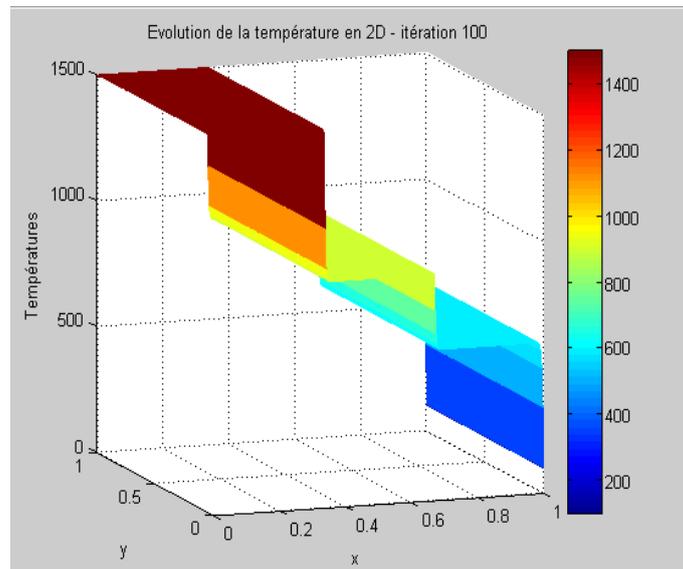


FIGURE 4.5 – Evolution de la température en 2D à l'itération 100

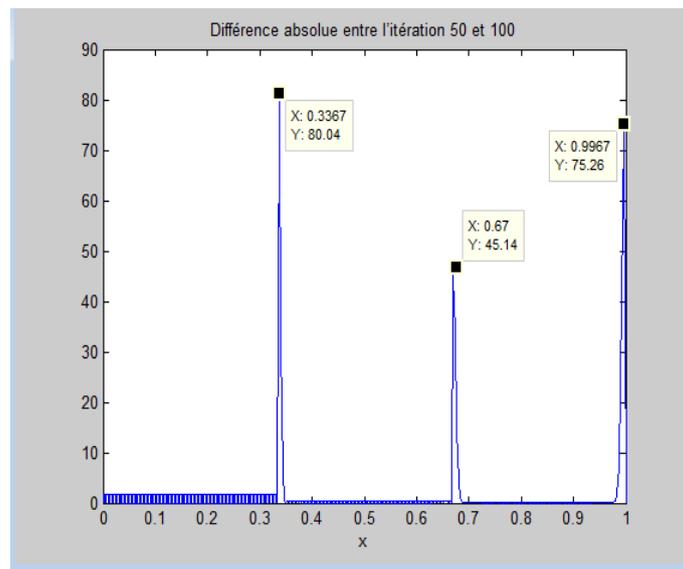


FIGURE 4.6 – Erreurs, $\text{abs}(U_{it100} - U_{it50})$

Les figures correspondant à la simulation numérique en 3D à coefficients physique constants sont les suivantes :

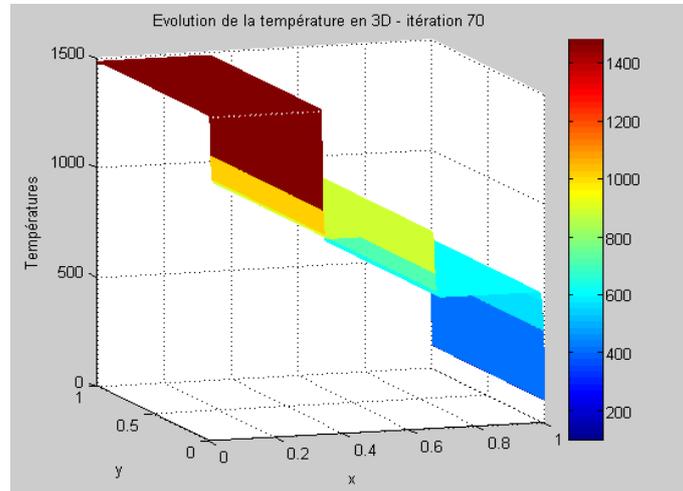


FIGURE 4.7 – Evolution de la température en 3D à l'itération 35

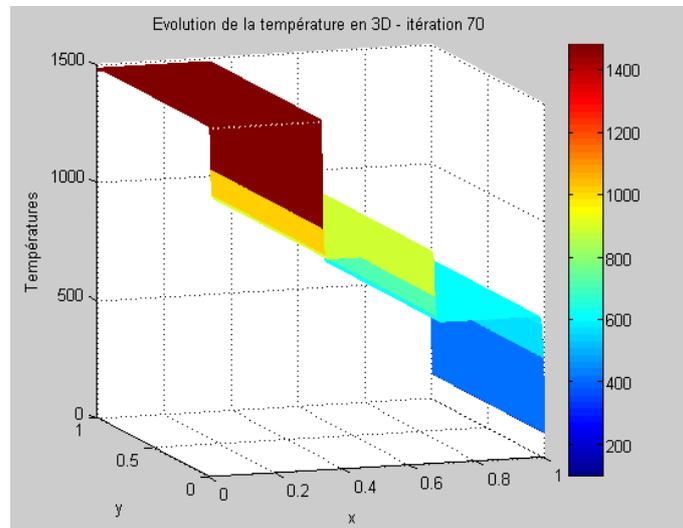


FIGURE 4.8 – Evolution de la température en 3D à l'itération 70

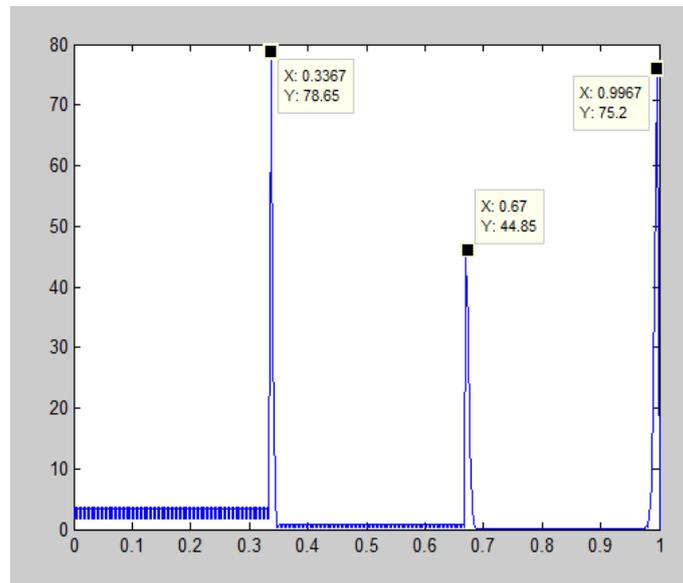


FIGURE 4.9 – Erreurs, $\text{abs}(U_{it70} - U_{it35})$

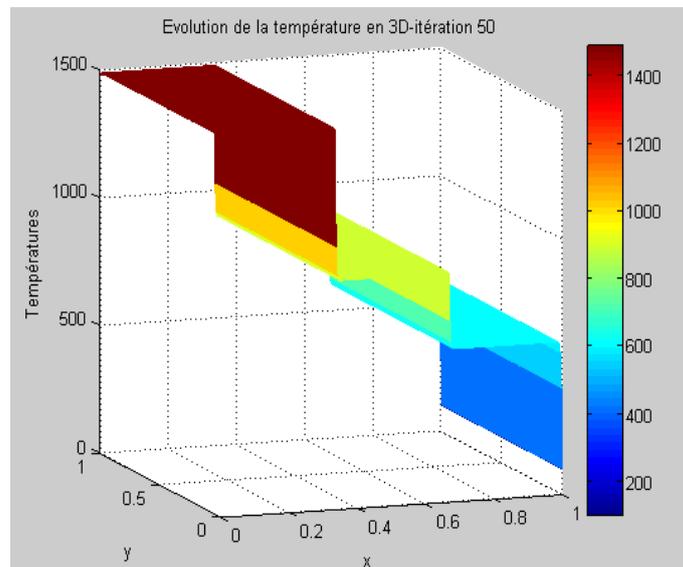


FIGURE 4.10 – Evolution de la température en 3D à l'itération 50

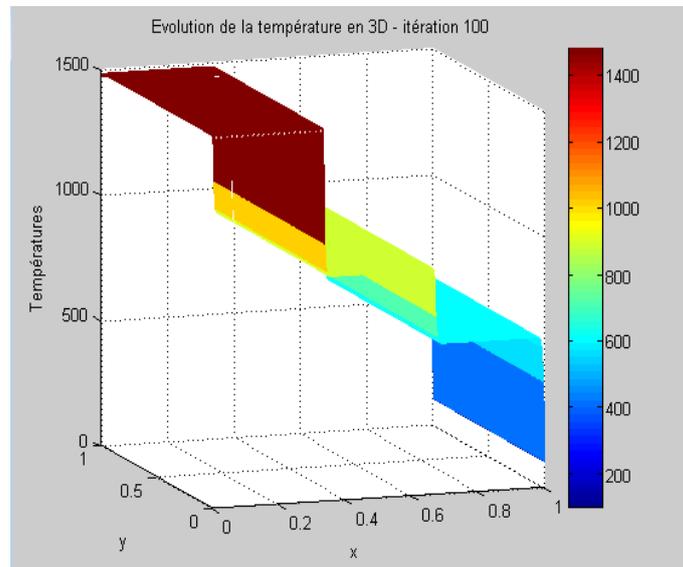


FIGURE 4.11 – Evolution de la température en 3D à l'itération 100

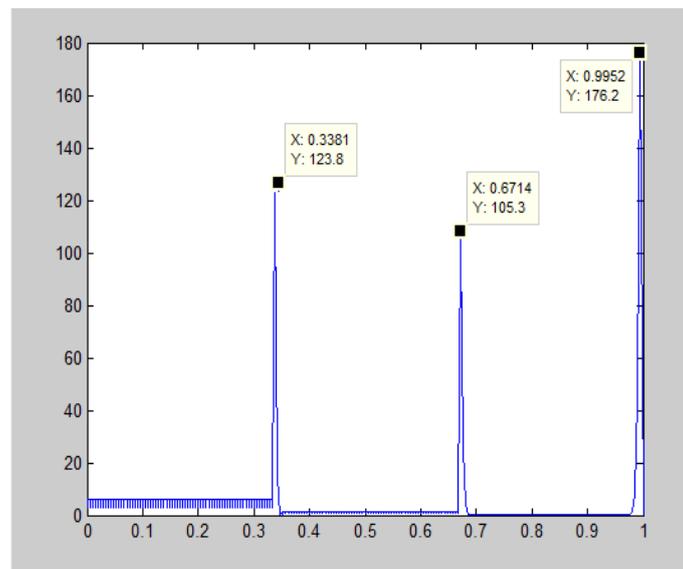


FIGURE 4.12 – Erreurs, $\text{abs}(U_{it100} - U_{it50})$

Cas 2 : Coefficients physiques $\rho_{\mathcal{I}}$, $c_{\mathcal{I}}$ sont constants et $\lambda_{\mathcal{I}}$ dépendant de la température

Pour le deuxième cas, on va tracer les figures qui correspondent à la distribution de la température confinée à la coulée continue. En prenant en considération que la conductivité thermique $\lambda_{\mathcal{I}}^p(\cdot, u_{\mathcal{I}}^p)$, $\mathcal{I} = 1, 2, 3$, dépend de la température et que le reste des coefficients physiques (chaleur spécifique $\rho_{\mathcal{I}}$ et la masse volumique $c_{\mathcal{I}}$) sont constants. Alors, les performances de la simulation numérique sont données dans le tableau suivant :

Newton-Relaxation projetée 2D			Newton-Relaxation projetée 3D		
<i>temps</i>	<i>G.S.iterat.</i>	<i>N.iterat.</i>	<i>temps</i>	<i>G.S.iterat.</i>	<i>N.iterat.</i>
6.2088 sec	4	2	150 328.4 sec	6	2
<i>temps</i>	<i>G.S.iterat.</i>	<i>N.iterat.</i>	<i>temps</i>	<i>G.S.iterat.</i>	<i>N.iterat.</i>
17.4409 sec	4	2	365 083.5 sec	6	2

TABLE 4.5 – Performance de la procédure numérique en 2D et 3D - cas où le coefficient de conductivité thermique dépend de la température.

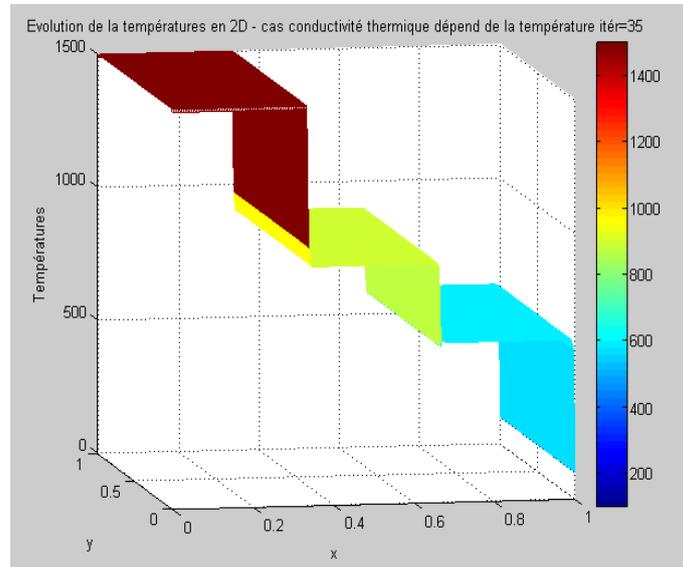


FIGURE 4.13 – Evolution de la température en 2D à l'itération 35

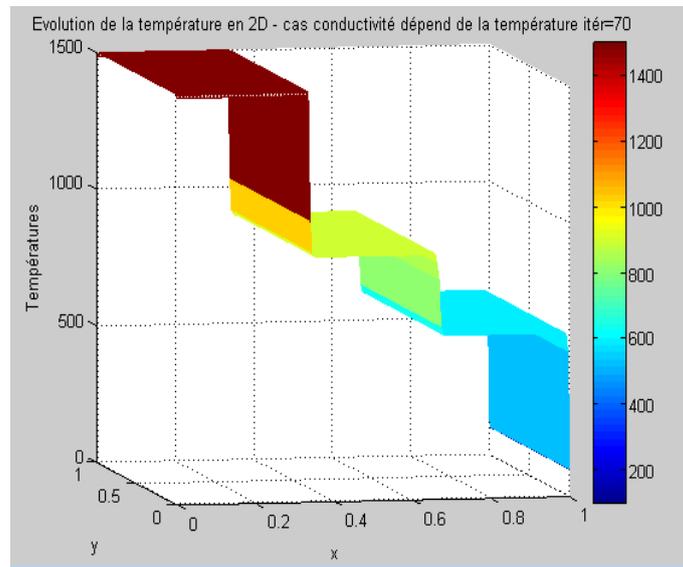


FIGURE 4.14 – Evolution de la température en 2D à l'itération 70

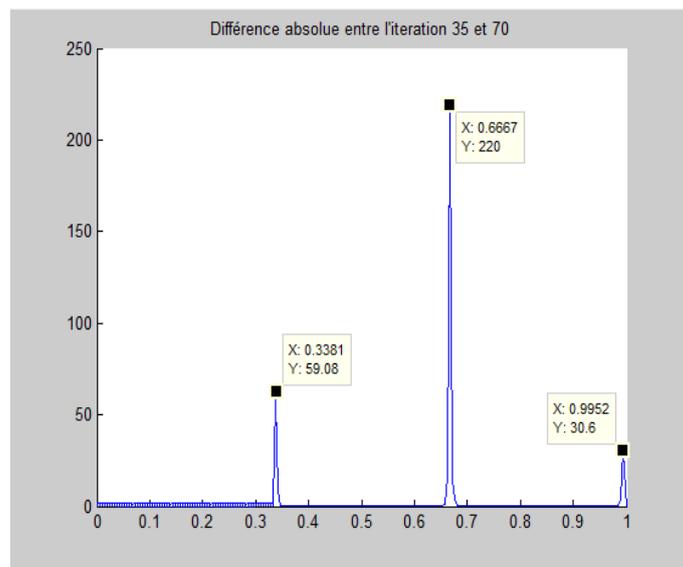


FIGURE 4.15 – Erreurs, $\text{abs}(U_{it70} - U_{it35})$

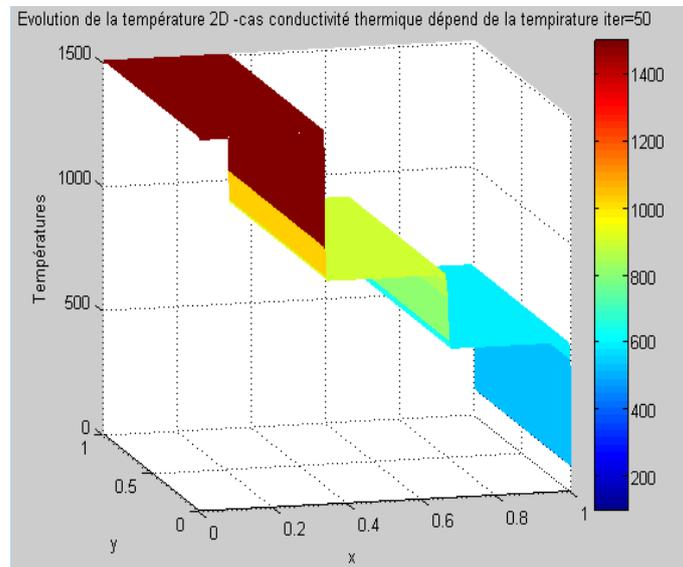


FIGURE 4.16 – Evolution de la température en 2D à l'itération 50

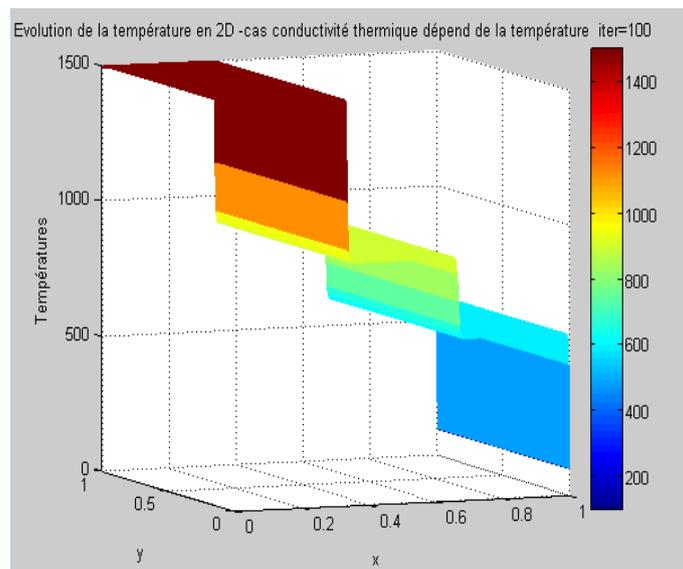


FIGURE 4.17 – Evolution de la température en 2D à l'itération 100

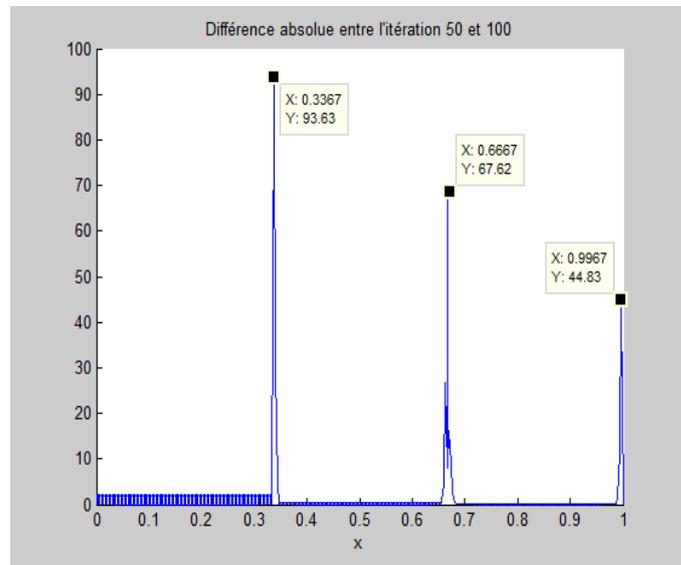


FIGURE 4.18 – Erreurs , $\text{abs}(U_{it100} - U_{it50})$

Les figures correspondant à la simulation numérique en 3D sont les suivantes :

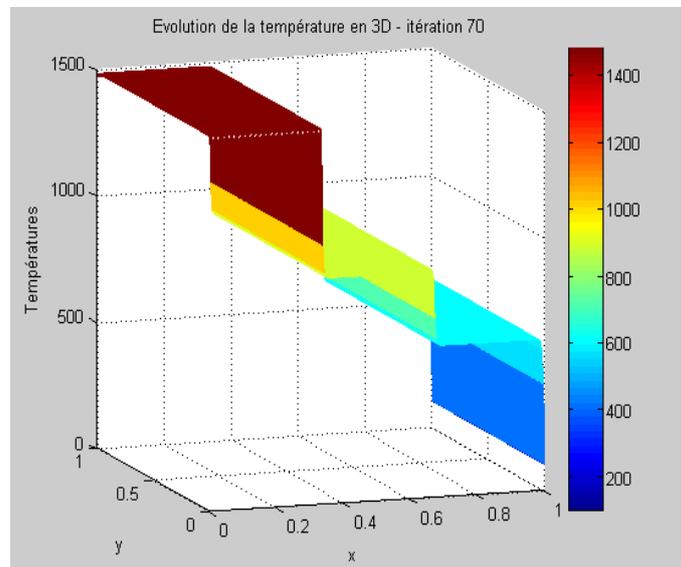


FIGURE 4.19 – Evolution de la température en 3D à l'itération 35

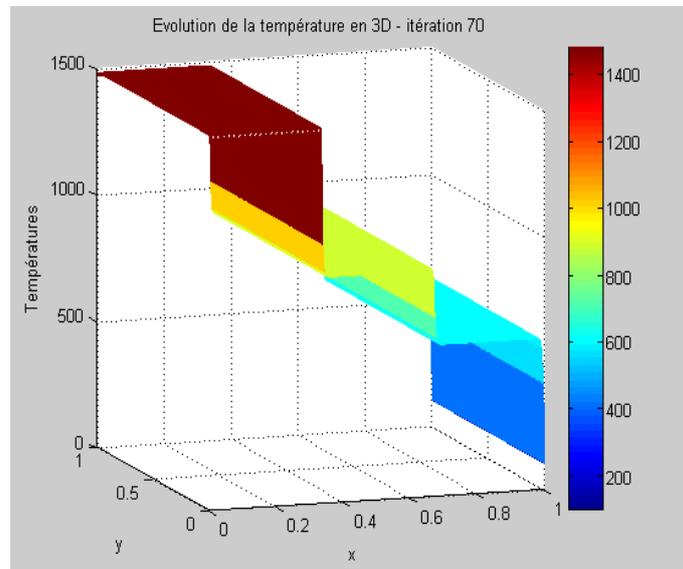


FIGURE 4.20 – Evolution de la température en 3D a l'itération 70

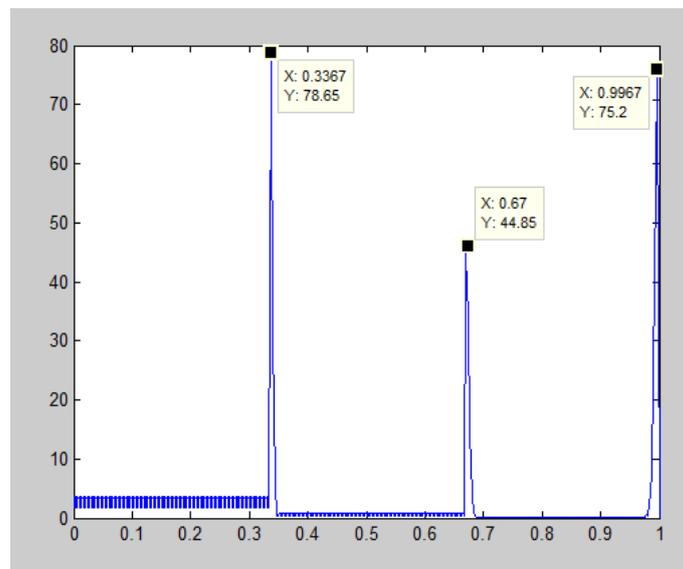


FIGURE 4.21 – Erreurs, $\text{abs}(U_{it70} - U_{it35})$

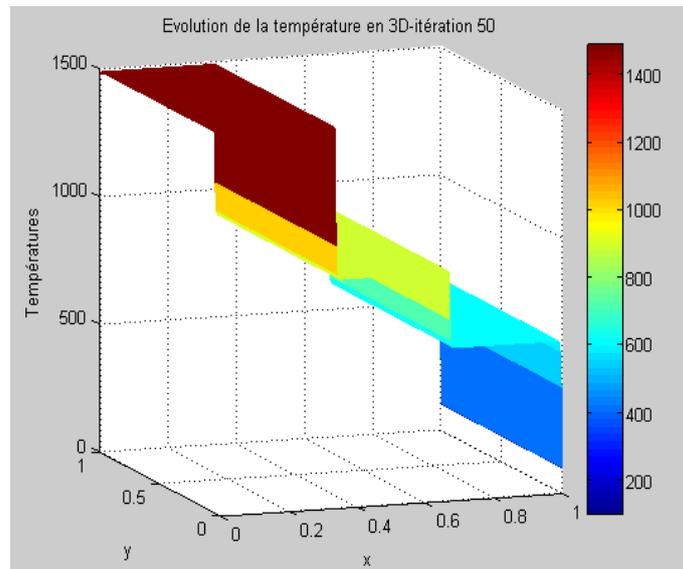


FIGURE 4.22 – Evolution de la température en 3D à l'itération 50

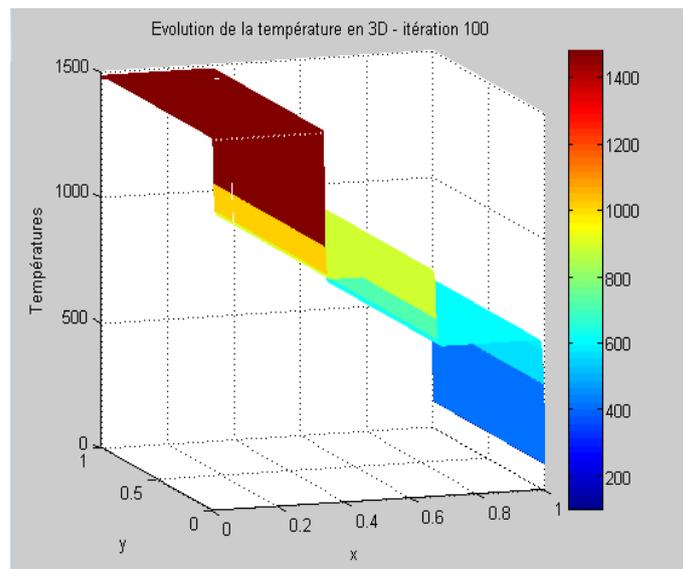
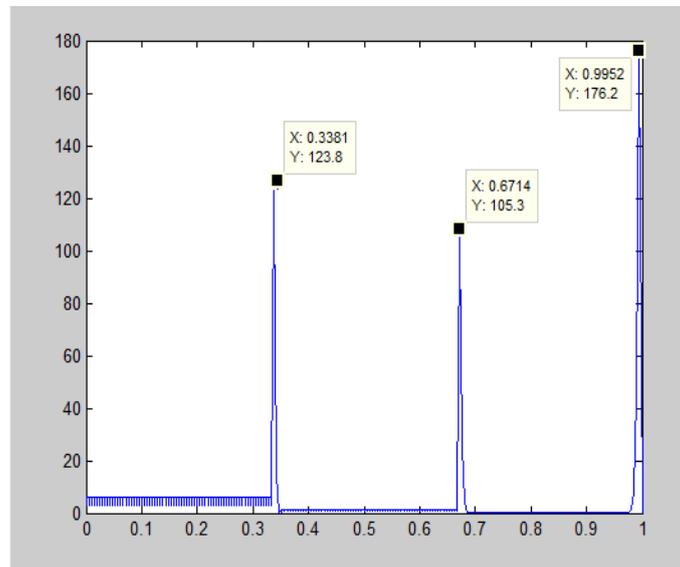


FIGURE 4.23 – Evolution de la température en 3D à l'itération 100

FIGURE 4.24 – Erreurs, $\text{abs}(U_{it100} - U_{it50})$

Commentaires

Les résultats numériques sont interprétés par des figures données ci-dessus. Dans le cas où les coefficients physiques sont constants, le temps d'exécution est très rapide par rapport au cas où la conductivité thermique dépend de la solution et le reste des coefficients physiques demeurant inchangés (voir Tableaux 4.2 et 4.2).

Concernant la convergence des deux méthodes, elle est très rapide (entre 4 et 6 itérations pour la méthode de Gauss-Seidel) et (2 itérations pour la méthode de Newton projetée) voir Tableaux 4.2 et 4.2.

Pour des pas de temps différents, on a donné deux figures pour chaque maillage en 2D ou en 3D.

Les figures 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.7, 4.8, 4.10, 4.11, 4.13, 4.14, 4.16, 4.17, 4.19, 4.20, 4.22 et 4.23 montrent une distribution uniforme de la température dans chaque zone. En rouge, la température dans les régions liquides; en bleu, la température dans les régions solides, et la jaune-vert, dans les zones intermédiaires pâteuses, c'est-à-dire, en jaune celles qui sont semi-liquides et en vert les régions semi-solides.

Les figures données dans le cas tridimensionnel correspondent à des coupes en 2D, c'est-à-dire, on fixe z puis on représente les températures correspondant aux coordonnées (x, y) . On obtient alors une figure en 2D. En regroupant toutes ces coupes, on obtient le volume en 3D. Les résultats des simulations montrent la pertinence des algorithmes utilisés.

4.3 Simulations parallèles

Les simulations numériques ont été réalisées sur clusters et sur grille en utilisant les machines de la plate-forme localisée en France : Grid'5000. Grid'5000 est un environnement permettant d'effectuer des simulations dans les domaines de l'informatique et est focalisé sur le calcul parallèle. Grid'5000 est composé de 1000 noeuds et 8000 coeurs regroupés dans des clusters eux-même reliés entre eux par un réseau de communication à haut débit.

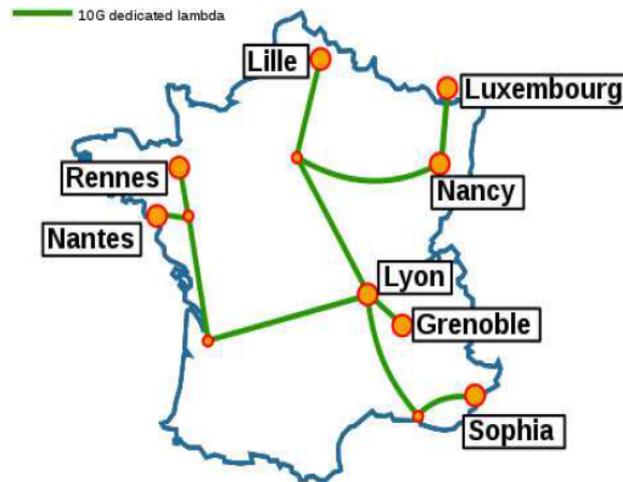


FIGURE 4.25 – Architecture Grid'5000.

Les expérimentations parallèles ont été effectuées d'une part sur le cluster grisou de Nancy ainsi que sur le cluster parasilo de Rennes et d'autre part sur grille en couplant ces deux clusters. Plusieurs tailles du domaine Ω ont été choisies (voir la Table 4.6) ; chaque taille étant caractérisée par la valeur de n . Nous présentons dans les sous-sections suivantes les résultats de ces benchmarks.

4.3.1 Performances sur clusters

Pour $n = 454, 622, 766$ et 1246 , on présente en Table 4.7 les temps d'exécution des algorithmes séquentiels sur les deux clusters grisou et parasilo dans le cas où la tolérance pour le test d'arrêt est fixée à $\epsilon = 10^{-3}$ qui est une tolérance suffisante compte-tenu des tests séquentiels ; en effet pour l'application cible, on atteint très rapidement le régime permanent.

n	Nombre de points en Ω	Nombre de points en Ω_1
454	$454 \times 454 \times 454 = 93\,576\,664$	$152 \times 454 \times 454 = 31\,329\,632$
622	$622 \times 622 \times 622 = 240\,641\,848$	$208 \times 622 \times 622 = 80\,471\,872$
766	$766 \times 766 \times 766 = 449\,455\,096$	$256 \times 766 \times 766 = 150\,209\,536$
1246	$1246 \times 1246 \times 1246 = 1\,934\,434\,936$	$416 \times 1246 \times 1246 = 645\,846\,656$
n	Nombre de points en Ω_2	Nombre de points en Ω_3
454	$151 \times 454 \times 454 = 31\,123\,516$	$150 \times 454 \times 454 = 30\,917\,400$
622	$207 \times 622 \times 622 = 80\,084\,988$	$206 \times 622 \times 622 = 79\,698\,104$
766	$255 \times 766 \times 766 = 149\,622\,780$	$254 \times 766 \times 766 = 149\,036\,024$
1246	$415 \times 1246 \times 1246 = 644\,294\,140$	$414 \times 1246 \times 1246 = 642\,741\,624$

TABLE 4.6 – Différentes tailles du domaine.

n	<i>grisou</i>		<i>parasilo</i>	
	temps d'exécu	itérations	temps d'exécu	itérations
454	603.47	1 532	606.10	1 532
622	1 728.36	1 900	1 718.51	1 900
766	3 426.18	2 190	3 421.33	2 190
1246	19 097.47	3 086	19 091.64	3 086

TABLE 4.7 – Temps d'exécution (sec) sur grisou et parasilo avec algorithme séquentiel et $\epsilon = 10^{-3}$.

Pour les mêmes valeurs de $n = 454, 622, 766$ et 1246 , la Table 4.8 présente les temps de calcul ainsi que le nombre de relaxations en mode synchrone sur grisou lorsqu'on utilise quatre et huit machines. La machine parasilo permet d'obtenir les mêmes performances.

Cette table est complétée par la Figure 4.26 représentant la comparaison entre le temps d'exécution en mode séquentiel et celui en mode synchrone sur un cluster. Avec

temps d'exécu : temps d'exécution.

accél : accélération.

effic : efficacité.

Le mode parallèle asynchrone ne permet pas d'obtenir de bonnes performances à cause :

- des temps de communications dus aux échanges entre processeurs qui sont faibles,
- les pertes de temps dues aux barrières de synchronisations nécessaires à chaque pas de temps,
- les passages d'un sous domaine Ω_I au sous-domaine suivant sont consommatrices de temps.

Cependant, il faut signaler, d'une part la vitesse de convergence élevée du à une forte diago-

Résultats synchrones sur 2 machines						
			temps de communication			
n	temps d'exécu	relaxation	calcul	barrière	accél	effic
454	440.52	9 776 601 836	26.21	7.30	1.37	0.68
622	1 286.19	19 750 337 514	85.66	2.16	1.34	0.67
766	2 581.54	34 445 168 867	126.93	34.81	1.33	0.66
1246	13 236.39	171 456 656 728	661.78	102.07	1.44	0.72
Résultats synchrones sur 4 machines						
			temps de communication			
n	temps d'exécu	relaxation	calcul	barrière	accél	effic
454	289.32	4 922 340 516	29.75	9.27	2.08	0.52
622	852.56	12 398 324 621	90.26	31.81	2.03	0.51
766	1 722.64	19 759 556 311	152.77	46.44	1.99	0.50
1246	8 473.50	88 356 783 766	616.32	193.14	2.25	0.56
Résultats synchrones sur 8 machines						
			temps de communication			
n	temps d'exécu	relaxation	calcul	barrière	accél	effic
454	239.17	2 437 451 191	57.25	23.07	2.52	0.32
622	685.61	7 249 606 101	164.78	52.75	2.52	0.32
766	1 317.83	124 166 981 51	264.39	92.34	2.60	0.32
1246	6 094.71	46 806 718 257	962.79	285.90	3.13	0.39

TABLE 4.8 – Temps d'exécution (sec), relaxation, communication, accélération et efficacité sur cluster grisou avec algorithme parallèle et $\epsilon = 10^{-3}$.

nale dominance des matrices et, d'autre part, du réseau d'interconnexion inter processeurs extrêmement rapide à 10 Gigabits par secondes.

En mode synchrone on obtient un effet inverse pour ces temps de communication : les temps de communication dus aux échanges entre processeurs sont importants alors que les barrières de synchronisation sont peu consommatrices de temps. Malgré ce gain notable, on constate que dans le cas d'utilisation de clusters, les méthodes parallèles asynchrones ont des performances globalement inférieures à celles obtenues en mode synchrone. Ainsi, les effets combinés de ces deux caractéristiques spécifiques à la résolution de notre problème modèle ne rendent pas efficace la parallélisation des méthodes asynchrones car, compte tenu du peu d'itérations, il y a peu de synchronisation et de communication entre les processeurs ; ainsi, contrairement, à ce qui se produit lorsque la convergence est lente, les méthodes synchrones sont plus efficaces sur clusters dans notre cas.

Par rapport aux temps obtenus en mode séquentiel, on constate que les temps obtenus

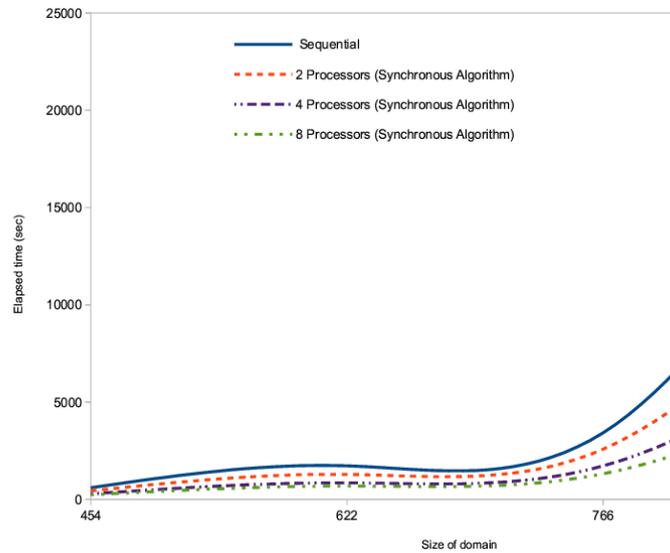


FIGURE 4.26 – Comparison entre le temps d’exécution en mode séquentiel et synchrone sur cluster.

en mode parallèle synchrone et asynchrone ont diminué notablement.

Sur le plan de la vitesse de convergence, on constate que le nombre de relaxations en mode asynchrone pour converger est toujours supérieur à celui obtenu en mode synchrone. Cette diminution de la vitesse de convergence provient du fait qu’en mode asynchrone l’algorithme parallèle n’a plus un comportement proche de la méthode de Gauss-Seidel implémentée en séquentiel alors qu’en mode synchrone ce comportement est conservé.

Il est enfin à noter que compte tenu de la vitesse de convergence, il n’est pas nécessaire d’utiliser beaucoup plus de processeurs pour cette application spécifique.

4.3.2 Performances sur grille

Les essais sur grille ont été effectués sur les clusters grisou et parasilo. Dans la mesure où ils sont très significatifs, nous présentons, ci dessous, les résultats pour $n = 454, 622, 766$ et 1246 , lorsqu’on utilise en tout quatre et huit processeurs en mode synchrone et asynchrone, soit respectivement deux et quatre machines sur chaque cluster. En effet, compte tenu de la vitesse élevée de convergence, lorsque seulement deux processeurs sont utilisés, on retrouve sensiblement un comportement proche de ce qui avait été observé sur un seul cluster. Mais, comme on le verra ci dessous, au delà de l’utilisation de deux processeurs, le comportement des méthodes asynchrones change complètement. La vitesse de convergence a une moindre influence et les méthodes asynchrones sur une grille trouvent tout leur intérêt à cause de

l'utilisation d'un réseau lent et du peu de synchronisations.

Les résultats des simulations sur grille sont résumés dans les Tables 4.9 et 4.10 pour une valeur de $\epsilon = 10^{-3}$ et pour les modes synchrones et asynchrones figurent dans ces tables la valeur de n , le nombre de machines utilisées, les temps de simulation, le nombre de relaxation pour atteindre la convergence, les temps de communication durant les calculs et les temps de synchronisation dus aux barrières de synchronisation, le pourcentage des temps de communication et de synchronisation et enfin le rapport τ du rapport des temps de calculs en mode synchrone et asynchrones. En effet, sur grille de calcul la notion de speed-up et d'efficacité perdent tout leur sens dans la mesure où les machines sont hétérogènes et, par conséquent, se pose la question de savoir par rapport à quelle machine le temps de calcul séquentiel est choisi. Il est donc difficile de choisir une machine particulière et dans la suite ce paramètre τ permettra de mesurer l'efficacité des méthodes asynchrones comparées aux méthodes synchrones.

Résultats synchrones sur 4 machines					
			temps de communication		
n	temps d'exécu	relaxation	calcul	barrière	% comms
454	3 339.13	4 922 340 516	2 676.42	412.92	92.52
622	6 871.79	12 398 324 621	4 556.52	1 600.89	89.60
766	11 118.37	19 759 556 311	7 177.95	2 455.35	86.64
1246	39 670.66	88 356 783 766	24 133.29	7 995.93	80.99
Résultats synchrones sur 8 machines					
			temps de communication		
n	temps d'exécu	relaxation	calcul	barrière	% comms
454	6 257.61	2 437 451 191	4 926.93	1 177.56	97.55
622	12 480.05	7 249 606 101	8 963.97	3 073.65	96.45
766	19 879.87	12 416 698 151	14 164.83	4 794.39	95.37
1246	> 50 400.00	—	—	—	—

TABLE 4.9 – Temps d'exécution (sec), relaxation et communication sur clusters grisou et parasilo avec algorithmes parallèles synchrones et $\epsilon = 10^{-3}$.

Ces tables sont complétées par les Figures 4.27 et 4.28 représentant les temps de restitution ainsi que la valeur de τ en fonction de n .

Lorsqu'on utilise quatre et huit processeurs, on constate clairement que les temps de simulation parallèles asynchrones sont nettement inférieurs à ceux obtenus en mode synchrone. Cette tendance est confirmée par les valeurs de τ qui varient entre 2.19 et 3.74 lorsque quatre processeurs sont utilisés et entre 4.61 et 4.74 lorsque huit processeurs sont utilisés. Pour $n = 1246$, l'exécution a été suspendue pour des raisons d'exploitation, au bout de 69

Résultats asynchrones sur 4 machines						
	temps de communication					
n	temps d'exécu	relaxation	calcul	barrière	% comms	τ
454	1 523.48	16 112 260 484	152.19	378.51	34.83	2.19
622	2 014.13	23 873 519 450	76.98	262.47	16.85	3.41
766	2 973.57	33 859 496 260	65.64	240.69	10.30	3.74
1246	15 226.62	180 948 707 311	99.30	581.01	4.47	2.60
Résultats asynchrones sur 8 machines						
	temps de communication					
n	temps d'exécu	relaxation	calcul	barrière	% comms	τ
454	1 358.03	11 894 722 985	136.89	449.19	43.16	4.61
622	2 904.89	25 768 698 689	161.58	590.97	25.91	4.30
766	4 195.60	37 260 950 145	137.31	598.98	17.55	4.74
1246	21 298.28	205 835 673 295	205.92	2 074.62	10.71	> 3.30

TABLE 4.10 – Temps d'exécution (sec), relaxation et communication sur clusters grisou et parasilo avec algorithmes parallèles asynchrones et $\epsilon = 10^{-3}$.

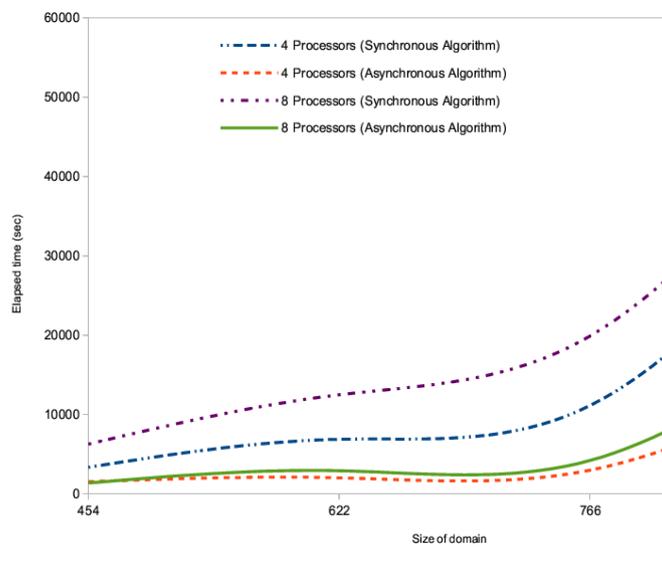
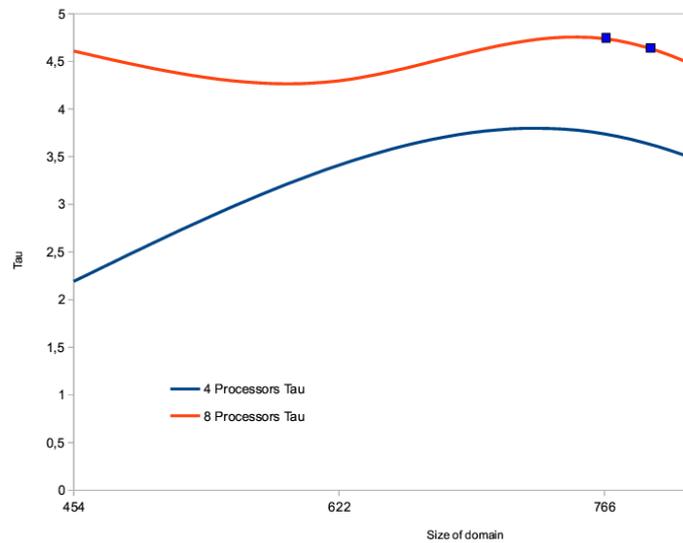


FIGURE 4.27 – Comparaison entre le temps d'exécution en mode synchrone et en mode asynchrone sur grille.

pas de temps, correspondant à une durée d'exécution de 13,5heures. C'est la raison pour laquelle la dernière partie de la courbe correspondant à 8 processeurs (*i.e.* $766 < n \leq 1246$)

FIGURE 4.28 – Evolution de τ .

est représentée de manière différente, la valeur de τ étant estimée à 3.30.

Ce gain de performance est du au poids des synchronisations et communications comme on peut le constater en examinant les Tables 4.9 et 4.10. En effet, en mode asynchrone les temps d'attente des processeurs est négligeable par rapport à ceux constatés en mode synchrone (voir Figure 4.29). Ceci constitue l'intérêt des algorithmes asynchrones lorsque l'on exécute un programme sur une architecture comportant beaucoup de processeurs hétérogènes éloignés entre eux et reliés par un réseau lent classique.

Le nombre de relaxations pour atteindre la convergence est lié au mode de mise à jour des composantes. Si, lors de la parallélisation de l'algorithme, le comportement de l'algorithme séquentiel de Gauss-Seidel est conservé, on aura un nombre de relaxations proche de ce qui a été obtenu en mode séquentiel. L'algorithme aura alors un comportement multiplicatif. Sinon il aura un comportement additif, proche du comportement de l'algorithme de Jacobi. Dans ce cas, le nombre de relaxations aura tendance à doubler. Ceci est lié au découpage en grand blocs du problème global. Un découpage optimal est toujours difficile à déterminer ce qui constitue d'ailleurs, une question ouverte et aura tendance à produire un algorithme itératif de type multiplicatif ; sinon le comportement sera additif. Cependant, compte tenu de l'imprécision du au test d'arrêt, un nombre supplémentaire de relaxations aura pour effet d'améliorer la qualité numérique de la solution calculée.

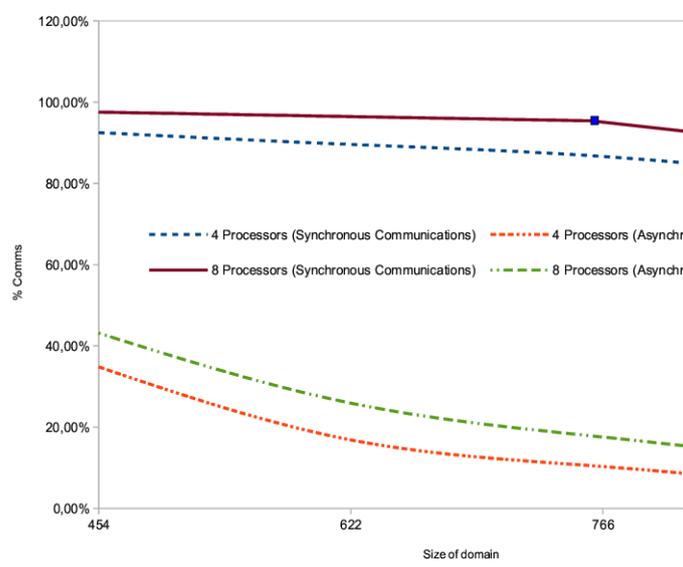


FIGURE 4.29 – Pourcentage de communications et synchronisations.

Conclusion générale

Cette étude a été consacrée à la résolution du problème de solidification de l'acier lors du procédé de coulée continue. Notre objectif était, d'une part, de prouver l'existence et l'unicité de la solution, et, d'autre part, de prouver la convergence de l'algorithme numérique utilisé pour déterminer la solution approchée. Conformément à l'hypothèse réaliste qui suppose que la solution est toujours positive ou nulle, nous avons présenté :

- Une reformulation du problème d'évolution en un problème avec obstacle,
- une reformulation du problème d'évolution avec obstacle en une suite de problèmes stationnaires, après discrétisation semi-implicite en temps du problème continu.
- Les formulations variationnelles associées aux problèmes stationnaires avec contrainte.

L'existence et l'unicité de la solution est étudiée sous des hypothèses appropriées et réalistes. De plus, les problèmes d'obstacle stationnaires ont été reformulés de manière multivoque ce qui, après discrétisation, permet d'analyser le comportement des algorithmes itératifs utilisés pour résoudre numériquement les problèmes stationnaires.

Deux méthodes itératives sont combinées pour déterminer la solution approchée :

- La méthode de relaxation projetée.
- La méthode de Newton projetée.

La méthode de relaxation permet de calculer les solutions en les points intérieurs des domaines $\Omega_{\mathcal{T}}$ et la méthode de Newton permet de calculer les solutions en les points situés sur la frontière où la condition de Stefan s'applique. La convergence des algorithmes est assurée par la technique de contraction.

Enfin les expériences numériques sont convaincantes à la fois par rapport au temps d'exécution, la vitesse de convergence et le nombre d'itérations. Ce domaine de recherche offre de nombreuses perspectives quelles soient théoriques ou numériques. Une piste intéressante à suivre est de considérer tous les coefficients physiques du matériau dépendant de la solution, ainsi que d'autres conditions d'interface entre les sous-domaines lors du changement de phase liquide-pâteux et pâteux-solide.

Annexe A

Problème avec conditions aux limites mêlées

On considère un problème thermique avec des conditions aux limites mêlées, dans le sens où les conditions aux limites sont de deux types Dirichlet et Neumann. Nous supposons que la frontière Γ est partitionnée en deux parties : sur Γ_1 est définie une condition de Dirichlet et sur Γ_2 une condition de Neumann (voir Figure A.1).

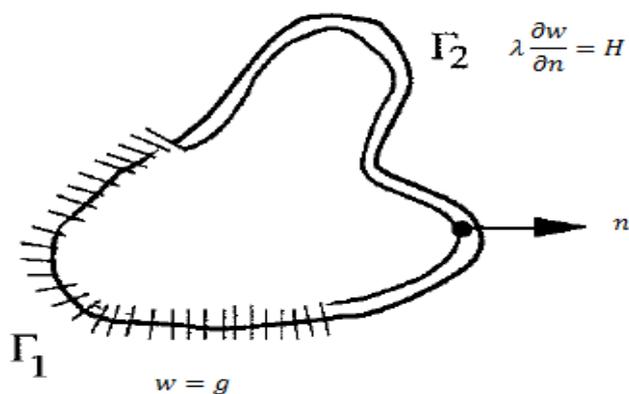


FIGURE A.1 – Répartition des conditions aux limites

Soit donc le problème :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma_1 \quad (g \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial n} = H & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où les frontières Γ_1 et Γ_2 vérifient $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ et $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$. La fonction H s'interprète comme un flux de chaleur à travers la frontière (en W/m^2). Nous donnons des résultats utiles suivants.

Définition A.1. La restriction au bord Γ d'une fonction de $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ est appelée trace de u et est notée $u|_{\Gamma}$ ou encore $\gamma_0(u)$.

Théorème A.1. L'ensemble des traces au bord des fonctions de $H^1(\Omega)$ forme un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ noté $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$. Plus précisément, on a :

$$\gamma_0(\mathcal{H}^1(\Omega)) = \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) \subsetneq L^2(\Gamma).$$

Remarque A.1. De cette définition, on conclut immédiatement que si $g \in \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$, alors il existe forcément, au moins, une fonction $u_g \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ dont g est la trace au bord, c-à-d. :

$$\gamma_0(u_g) = u_g|_{\Gamma} = g$$

Cette remarque sera essentielle quand ce type de condition aux limites est imposé.

La mise sous forme variationnelle n'est pas immédiate. D'après le théorème de trace, on peut trouver un relèvement de cette trace que l'on note u_g ; elle vérifie donc, par définition, $\gamma_0(u_g) = u_g|_{\Gamma_1} = g$. On cherche maintenant la solution u sous la forme

$$u = \tilde{u} + \bar{u}, \quad \tilde{u} \in V \quad (\text{A.2})$$

où

$$\bar{u} = u_g$$

et

$$V = \{\tilde{u} \in \mathcal{H}^1(\Omega) | \tilde{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

Pour établir la formulation variationnelle, nous multiplions par une fonction test $v \in V$ et

intégrons sur Ω . En utilisant le théorème de la divergence [20], il vient :

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla u \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (\text{A.3})$$

Nous détaillons le terme sur la frontière de la relation précédente :

$$\int_{\Gamma} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_{\Gamma_1} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} v ds + \int_{\Gamma_2} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} v ds \quad (\text{A.4})$$

$$= \int_{\Gamma_1} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \cdot 0 ds + \int_{\Gamma_2} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} v ds \quad (\text{A.5})$$

Tenant compte de la condition de Neumann, nous obtenons :

$$\int_{\Gamma} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_{\Gamma_2} H v ds$$

et u est solution du problème suivant :

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla u \nabla v d\Omega = \int_{\Gamma_2} H v ds + \int_{\Omega} f v d\Omega. \quad (\text{A.6})$$

Substituant (A.2) dans (A.6), on obtient :

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla \tilde{u} \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \nabla \bar{u} \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma_2} H v ds \quad (\text{A.7})$$

Ainsi le problème variationnel est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Déterminer } \tilde{u} \in V \text{ tel que} \\ a(\tilde{u}, v) = L(v) - a(\bar{u}, v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

où

$$a(\tilde{u}, v) = \int_{\Omega} \lambda \nabla \tilde{u} \nabla v d\Omega,$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_2} H v ds$$

et

$$a(\bar{u}, v) = \int_{\Omega} \lambda \nabla \bar{u} \nabla v d\Omega$$

Annexe B

Majoration de

$$\Pi = \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} P_{\mathcal{I},4}^2(u_{\mathcal{I}}) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{I} = 2, 3.$$

L'objectif est de faire une majoration de l'intégrale $\left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} P_{\mathcal{I},4}^2(u_{\mathcal{I}}) \right)^{\frac{1}{2}}$ qui sera utile pour vérifier l'hypothèse de continuité de la forme bilinéaire $a_{\mathcal{I}}(u_{\mathcal{I}}, v_{\mathcal{I}})$.

Calcul de $P_{\mathcal{I},4}^2(u_{\mathcal{I}})$, $\mathcal{I} = 2, 3$.

On a

$$P_{\mathcal{I},4}(u_{\mathcal{I}}) = u_{\mathcal{I}}^4 + 4\tilde{u}u_{\mathcal{I}}^3 + 6\tilde{u}^2u_{\mathcal{I}}^2 + 4\tilde{u}^3u_{\mathcal{I}}. \quad (\text{B.1})$$

On pose

$$a_1 = u_{\mathcal{I}}^4, \quad a_2 = 4\tilde{u}u_{\mathcal{I}}^3, \quad a_3 = 6\tilde{u}^2u_{\mathcal{I}}^2, \quad a_4 = 4\tilde{u}^3u_{\mathcal{I}}. \quad (\text{B.2})$$

Substituant (B.2) dans (B.1), puis calculant $P_{\mathcal{I},4}^2(u_{\mathcal{I}})$, alors on obtient :

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 = \sum_{i=1}^4 a_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \geq i}}^4 a_i a_j.$$

Ce qui donne

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 = u_{\mathcal{I}}^8 + 8\tilde{u}u_{\mathcal{I}}^7 + 28\tilde{u}^2u_{\mathcal{I}}^6 + 56\tilde{u}^3u_{\mathcal{I}}^5 + 68\tilde{u}^4u_{\mathcal{I}}^4 \\ + 48\tilde{u}^5u_{\mathcal{I}}^3 + 16\tilde{u}^6u_{\mathcal{I}}^2.$$

Calcul de $\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} P_{\mathcal{I},4}^2(u_{\mathcal{I}})ds_{\mathcal{I}}$

On veut calculer $\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} P_{\mathcal{I},4}^2(u_{\mathcal{I}})ds_{\mathcal{I}}$

$$\Pi^2 = \oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} P_{\mathcal{I},4}^2(u_{\mathcal{I}})ds_{\mathcal{I}} = \oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} (u_{\mathcal{I}}^4 + 4\tilde{u}u_{\mathcal{I}}^3 + 6\tilde{u}^2u_{\mathcal{I}}^2 + 4\tilde{u}^3u_{\mathcal{I}})^2 ds_{\mathcal{I}}$$

Alors, on a

$$\Pi^2 = \oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} u_{\mathcal{I}}^8 ds_{\mathcal{I}} + 8 \oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} \tilde{u}u_{\mathcal{I}}^7 ds_{\mathcal{I}} + 28 \oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} \tilde{u}^2u_{\mathcal{I}}^6 ds_{\mathcal{I}} + 56 \oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} \tilde{u}^3u_{\mathcal{I}}^5 ds_{\mathcal{I}} \\ + 68 \oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} \tilde{u}^4u_{\mathcal{I}}^4 ds_{\mathcal{I}} + 48 \oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} \tilde{u}^5u_{\mathcal{I}}^3 ds_{\mathcal{I}} + 16 \oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} \tilde{u}^6u_{\mathcal{I}}^2 ds_{\mathcal{I}}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} (P_{\mathcal{I},4}(u_{\mathcal{I}}))^2 ds_{\mathcal{I}} \leq \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} 1 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |u_{\mathcal{I}}^8|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} + 8 \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |\tilde{u}|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |u_{\mathcal{I}}^7|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ + 28 \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |\tilde{u}^2|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |u_{\mathcal{I}}^6|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} + 56 \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |\tilde{u}^3|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |u_{\mathcal{I}}^5|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} + 68 \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |\tilde{u}^4|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |u_{\mathcal{I}}^4|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ + 48 \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |\tilde{u}^5|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |u_{\mathcal{I}}^3|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ + 16 \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |\tilde{u}^6|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} |u_{\mathcal{I}}^2|^2 ds_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La fonction \tilde{u} est de carré sommable, ce qui permet d'obtenir

$$\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} (P_{\mathcal{I},4}(u_{\mathcal{I}}))^2 ds_{\mathcal{I}} \leq \text{mes}(s_{\mathcal{I}}) \|u_{\mathcal{I}}^8\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} + 8\tilde{C}_1 \|u_{\mathcal{I}}^7\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} + 28\tilde{C}_2 \|u_{\mathcal{I}}^6\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} + 56\tilde{C}_3 \|u_{\mathcal{I}}^5\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} \\ + 68\tilde{C}_4 \|u_{\mathcal{I}}^4\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} + 48\tilde{C}_5 \|u_{\mathcal{I}}^3\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} + 16\tilde{C}_6 \|u_{\mathcal{I}}^2\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}}.$$

Grâce à l'hypothèse suivante (pour plus de détails, voir chapitre 2, formule (2.32))

$$\left\| u_{\mathcal{I}}^\beta \right\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} \leq C_{\mathcal{I}} \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}}, \quad \forall u_{\mathcal{I}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{I}} \quad 1 < \beta \leq 8 \quad (\text{B.3})$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} (P_{\mathcal{I},4}(u_{\mathcal{I}}))^2 ds_{\mathcal{I}} &\leq C_{\mathcal{I}} \text{mes}(s_{\mathcal{I}}) \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} + 8C_{\mathcal{I}}\tilde{C}_1 \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} + 28C_{\mathcal{I}}\tilde{C}_2 \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} \\ &\quad + 56C_{\mathcal{I}}\tilde{C}_3 \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} + 68C_{\mathcal{I}}\tilde{C}_4 \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} + 48C_{\mathcal{I}}\tilde{C}_5 \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} \\ &\quad + 16C_{\mathcal{I}}\tilde{C}_6 \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} \end{aligned}$$

que l'on peut écrire

$$\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} (P_{\mathcal{I},4}(u_{\mathcal{I}}))^2 \leq C_{\mathcal{I}} \underbrace{\left(\text{mes}(s_{\mathcal{I}}) + 8\tilde{C}_1 + 28\tilde{C}_2 + 56\tilde{C}_3 + 68\tilde{C}_4 + 48\tilde{C}_5 + 16\tilde{C}_6 \right)}_{\Theta_{\mathcal{I}}} \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}}$$

où $\Theta_{\mathcal{I}}$ est une constante. On a alors

$$\Pi = \left(\oint_{\gamma_{\mathcal{I}}} (P_{\mathcal{I},4}(u_{\mathcal{I}}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\Theta_{\mathcal{I}} \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.4})$$

$$\leq \left(\Theta_{\mathcal{I}} \right)^{\frac{1}{2}} \|u_{\mathcal{I}}\|_{0,\gamma_{\mathcal{I}}}. \quad (\text{B.5})$$

Remarque B.1. *La majoration (B.4) reste vraie aussi bien en 2D qu'en 3D.*

Bibliographie

- [1] V. Barbu. Nonlinear semigroups and differential equations in banach spaces. *Noordhoff International Publishing*, 1976.
- [2] G.M. Baudet. Asynchronous iterative methods for multiprocessor. *Assoc. Comput. Mach*, 2 :226–244, 1978.
- [3] D.P. Bertsekas and J. Tsitsiklis. Parallel and distributed computation, numerical methods. *Englewood Cliffs Prentice Hall*, 1989.
- [4] H. Brezis. Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de hilbert. *North- Holland Publishing Company Amesterdam*, 1973.
- [5] A.C. Briozzo, M.F. Natale, and D.A. Tarzia. Determination of unknown thermal coefficients for storm’s-type materials through a phase-change process. *Int. J. Non- Linear Mech*, 34 :324–340, 1999.
- [6] H. Batatia C. Tauber, P. Spiteri. Iterative methods for anisotropic diffusion of speckled medical images. *Applied Numerical Mathematics*, 60 :1115–1130, 2010.
- [7] A. Capatina. Inéquations variationnelles et problèmes de contact avec frottement. *Preprint Series of the Institute of Mathematics of the Romanian Academy*, 2011.
- [8] M. Chau, R. Couturier, J. Bahi, and P. Spiteri. Parallel solution of the obstacle problem in grid environments. *International Journal of High Performance Computing Applications*, 25(4) :488–495, 2011.
- [9] M. Chau, C. Tauber, J. Bahi, and P. Spiteri. Parallel schawarz alternating methods for anisotropic diffusion of speckled medical images. *Numer Algo*, 51 :85–114, 2009.
- [10] D. Chazan and W. Miranker. Chaotic relaxation. *Linear Algebra Appl*, 2 :199–222, 1969.
- [11] G. Comini, Del Giuduce, R.W Lewwis, and O.C Zienkiewicz. Finite element solution of non-linear heat conduction problems with special reference to phase change. *Int .J. Numer , methods Engrg*, 8 :613–624, 1974.
- [12] F. Costes. Modélisation thermomécanique tridimensionnelle par éléments finis de la coulée continue d’acier. *Thèse de doctorat, ENSM de Paris*, 2004.

-
- [13] F. Costes, A. Heinrich, and M. bellet. Modélisation par éléments finis 3d de la coulée continue d'acier. *ESA FORM conference, Krakow, Poland*, 2002.
- [14] G. Duvaut and J.L Lions. Les inéquations en mécanique et physique. *Dunod*, 1972.
- [15] D. Euvrard. Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur. *Masson*, 1988.
- [16] D.J. Evans and W. Deren. An asynchronous parallel algorithm for solving a class of nonlinear simultaneous equations. *Parallel Computing*, 17 :165–180, 1991.
- [17] L.C. Evans. Partial differential equation,graduate studies in mathematics. *American mathematical society*, 19 :1065–7339, 2008.
- [18] M. Charnay F. Robert and F. Musy. Itérations chaotiques série-parallèle pour des équations non linéaires de point fixe. *Aplikace Matematiky*, 20 :1–38, 1975.
- [19] M. Charnay et F. Musy. F. Robert. Itérations chaotiques série-parallèle pour des équations non-linéaires de point fixe. *Aplikace Matematik*, 20 :1–38, 1975.
- [20] A. Fortin and A. Garon. Les éléments finis de la théorie à la pratique. *Ecole Polytechnique de Montréal*, 1999.
- [21] P.L George. Simulation numérique d'un problème parabolique non linéaire trempé d'un barreau métallique. *INRIA*, 1982.
- [22] R. Glowinski, J.L Lions, and R. Tremolieres. Analyse numérique des inéquations variationnelles. *Dunod*, vol 1 et vol 2, 1976.
- [23] R. Guivarch. Résolution parallèle de problèmes aux limites couplés par des méthodes de sous-domaines synchrones et asynchrones. *Thèse de doctorat, ENSM de Paris*, 2003.
- [24] A. Heinrich. Modélisation bidimensionnelle de la coulée continue d'acier. *Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse*, 1979.
- [25] M. Henri. Modélisation tridimensionnelle par élément finis du refroidissement primaire lors de la coulée continue d'acier. *Thèse de doctorat, ENSM de Paris*, 2009.
- [26] K.H. Hoffman and J. Zou. Parallel efficiency of domain decomposition methods. *Parallel Computing*, 19 :1375–1391, 1993.
- [27] S. Howison. Practical applied mathematics modelling, analysis, approximation. *OCIAM Mathematical Institute Oxford University*, 2003.
- [28] M.K Jain. Numerical solution of differential equation. *Wiley Eastern Limited, India*, 1979.
- [29] D. El Baz J.C. Miellou and P. Spiteri. A new class of iterative algorithms with order intervals. *Mathematics of Computation*, 67 :237–255, 1998.
- [30] A.Y Kandeil, I.A Tag, and M.A Hassab. Solidification of steel billets in continuous casting. *Engineering Journal of Qatar University*, 4 :103–120, 1991.

-
- [31] F. Lafolie. Etude numérique de la résolution des équations de transfert : Application à l'irrigation localisée. *Thèse de doctorat, université d'Avignon*, 1986.
- [32] S. Larsson and V. Thomée. Partial differential equations with numerical methods. *Springer, Verlag Berlin, Heidelberg*, 2009.
- [33] R.W Lewis and K. Ravidrans. Finite element simulation of metal casting. *Int .J. Numer , methods Engrg*, 47(1-3) :29–59, 2000.
- [34] J.L Lions. Inéquations variationnelles d'évolution. *Actes, Congrès intern.Math*, 2 :841–851, 1970.
- [35] Z. Lipniz. Role of the contact layer between liquid and solid on a solidification process. *Int .J. Heat Mass Transfer*, 46(12) :2149–2154, 2003.
- [36] J.C Miellou. Algorithmes de relaxation chaotique à retards. *RAIRO Analyse Numérique*, R1 :55–82, 1975.
- [37] J.C Miellou and P. Spiteri. Un critère de convergence pour des méthodes générales de point fixe. *M2AN*, 19 :645–669, 1985.
- [38] B. Mohammadi and J.H. Saïac. Pratique de la simulation numérique. *Dunod*, 2003.
- [39] D.A. Murio. Numerical identification of interface source functions in heat transfer problems under nonlinear boundary conditions. *Computers Math. Applic.*, 24(4) :65–76, 1992.
- [40] J.M Ortega and W.C Rheinboldt. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. *Academic Press, New York*, 1970.
- [41] A. Le Pourhiet. Résolution numérique des equations aux dérivées partielles (une première approche). *Cepadues-Editions*, 1988.
- [42] A. Quarteroni and A. Valli. Numerical approximation of partial differential equations. *Springer, in computational Mathematics*, 1996.
- [43] F. Robert. Etude et utilisation de normes vectorielles en analyse numérique linéaire. *Thèse de Doctorat ès Sciences, Grenoble*, 1968.
- [44] F. Robert. Convergence locale d' itération chaotique non-linéaire. *C.R.A.S. série A*, 284 :679–682, 1977.
- [45] R.Temam. Algèbre linéaire c3 analyse numérique. *Université Paris XI, U.E.R Mathématiques Orsay, France*, 1969-1970.
- [46] C. Saguez. Contrôle optimal de systèmes à frontière libre. *Thèse de Doctorat ès Sciences Mathématiques, Université de Techologie de Compiègne*, 1980.
- [47] A. Schmidt and A. Narimanyan. Advanced numerical methods and their applications to industrial problems adaptive finite element methods. *Center for Industrial Mathematics University of Bremen. Bremen, Germany*, 2004.

- [48] M. Sibony and J.C Mardon. Approximation et equations différentielles. *Hermann*, 1982.
- [49] S.Peruzzi. Simulation numérique du comportement thermomécanique de pieces refractaires de coulée continue. *Thèse de doctorat, ENSCI, France*, 2000.
- [50] P. Spiteri. Contribution à l'étude de grands systèmes non linéaires. *Doctorat ès Sciences, Faculté des Sciences et des Techniques de l'Université de Franche-Comté*, 1984.
- [51] M. El Tarazi. Some convergence results for asynchronous algorithms. *Numerische Mathematik*, 39 :325–340, 1982.
- [52] B. G. Thomas and L. Zhang. Mathematical modeling of fluid flow in continuous casting. *ISIJ International*, 41(10) :1181–1193, 2001.
- [53] J. W. Thomas. Numericals patial differential equations (finite difference methods). *Springer Science + Business Media, LLC*, 1995.
- [54] N. T. Trinh. Sur la modélisation du comportement thermomécanique et métallurgique des aciers, application au procédé de soudage et de traitements thermiques. *Thèse de doctorat, LUME-MS ENSTA de Paris*, 2008.
- [55] R. S. Varga. Matrix iterative analysis. *New york Verlag Berlin Heidelberg*, 2000.
- [56] L. Ziane-Khodja, M. Chau, R. Couturier, J. Bahi, and P. Spiteri. Parallel solution of american option derivatives on gpu clusters. *Computers and Mathematics with Applications*, 65 :1830–1848, 2013.

1.135