

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire LaPS



THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en
Mathématiques

Modèles Autorégressifs Exponentiels Périodiques

Option

Probabilités-Statistiques

Par

Mme Dridi Hadjer

DIRECTEUR DE THÈSE : Chadli Assia

Prof.

U.B.M. ANNABA

CO-DIRECTEUR DE THÈSE : Merzougui Mouna

MCA

U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENTE : Seddik-Ameur Nacera

Prof

U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Laskri Yamina

Prof

E.P.S.T. Annaba

Année : 2016/2017

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	iii
Abstract	iv
Introduction	v
1 Théorie asymptotique de LeCam	1
1.1 Normalité asymptotique locale (LAN)	1
1.1.1 Convergence faible des expériences statistiques	3
1.1.2 Contiguïté	4
1.2 Concepts d'optimalité asymptotique locale	5
1.2.1 Test le plus stringent	5
1.2.2 Critère Minimax Asymptotique Local (<i>LAM</i>)	6
2 Modèle AutoRégressif EXPonentiel $EXPAR(p)$	9
2.1 Introduction	9
2.2 Modèles et définitions de bases	10
2.2.1 Définitions	10
2.2.2 Modèles Autorégressifs Exponentiels	10
2.2.3 Conditions de stationnarité	13
2.3 Estimation des modèles <i>EXPAR</i>	14
2.3.1 Procédure d'estimation donnée par Haggan et Ozaki 1981	14
2.3.2 Méthode des moindres carrés conditionnels	15

2.3.3	Autres méthodes d'estimation	17
2.4	Modèle $EXPAR(1)$ restreint	19
3	Test de la périodicité dans un modèle $EXPAR$	21
3.1	Notations, Définitions et conditions de régularités	21
3.1.1	Définitions et notations principales	21
3.1.2	Hypothèses de régularités techniques	24
3.2	Normalité Asymptotique Locale du modèle $PEXPAR(1)$ restreint	24
3.2.1	Suite de Rapports de Vraisemblance	25
3.2.2	Normalité Asymptotique Locale	26
3.3	Test Asymptotique Locale (le plus Stringent)	32
4	Estimation du modèle $PEXPAR(1)$ restreint	38
4.1	Introduction	38
4.2	Estimation du modèle $PEXPAR(1)$ par la méthode de MCO :	39
4.2.1	Notation et hypothèses	39
4.2.2	Estimation	40
4.2.3	Résultats de simulations :	43
4.3	Estimateur Localement et Asymptotiquement Minimax LAM	45
4.3.1	Normalité Asymptotique Locale	46
4.3.2	Existence et construction d'estimateurs LAM	53
	Conclusion et perspectives	57

Résumé

Cette thèse est consacrée, essentiellement, à l'étude de quelques problèmes de l'inférence statistique liée au paramètre du modèle $EXPAR(1)$ périodique restreint. Nous nous sommes intéressé, dans un premier temps, à la construction d'un test paramétrique de périodicité asymptotiquement optimal au sens le plus stringent. Pour cela, nous proposons une statistique de test motivée par la théorie de Le Cam sur la normalité asymptotique local (LAN). Ce travail dégage un résultat important c'est l'introduction, dans la littérature des séries chronologiques, d'un nouveau modèle qui exhibe une dynamique non linéaire périodique : le modèle $EXPAR$ restreint périodique. Le second objectif de ce travail est de construire un estimateur localement et asymptotiquement minimax du modèle $EXPAR(1)$ restreint périodique, dans un cadre paramétrique et suivant l'approche de Le Cam (1986).

Mots clés : séries temporelles non linéaires, modèle $EXPAR$, séries temporelle périodiques, normalité asymptotique locale, test « most stringent », estimateur minimax asymptotique local.

Abstract

This thesis is devoted, essentially, to the study of some statistical inference problems related to the periodic restricted *EXPAR*(1) model parameters. First, we are interested with the construction of locally asymptotically optimal test in most stringent sense. To achieve this result, we propose a statistic test motivated by the theory of Le Cam on the local asymptotic normality (*LAN*). This work yields to an important result is the introduce, in the literature of time series, of a new model which exhibits a nonlinear periodic dynamics : the periodic restricted *EXPAR*(1) model. The second objective of this work is to construct a local asymptotic minimax estimator, in parametric framework and following LeCam approach.

Key words : nonlinear time series, *EXPAR* model, periodic time series, local asymptotic normality, « most stringent » test, locally asymptotic minimax estimators.

ملخص

يختص هذا البحث أساسا بدراسة بعض مشاكل الاستدلال الإحصائي المتعلقة بمعاملات نموذج الانحدار الذاتي الأسّي المقيد (1)EXPAR. حيث اهتمنا في البداية بإنشاء اختبار "MOST STRINGENT" الحدودي المقارب محليا و المتعلق بإثبات دورية نموذج الانحدار الذاتي الأسّي. لذلك قمنا باقتراح إحصائية اختبار مدعمة بنظرية Le Cam و قائمة على خاصية التقارب المحلي نحو القانون الطبيعي (LAN). قدم هذا العمل نتيجة مهمة في مجال البحث في السلاسل الزمنية وهو التعريف بنموذج جديد يمتلك ديناميكية دورية غير خطية وهو نموذج الانحدار الذاتي الأسّي الدوري. الهدف الثاني من هذا العمل هو الحصول على المقدر LAM وذلك باتباع منهجية Le Cam (1986).

الكلمات المفتاحية: السلاسل الزمنية غير الخطية، نموذج EXPAR، السلاسل الزمنية الدورية، التقارب المحلي نحو القانون الطبيعي، الاختبار "الأكثر صرامة"، المقدر LAM.

Introduction

Les Modèles linéaires des séries chronologiques ont été longtemps considérées comme un outil puissant pour l'analyse générale des séries temporelles avec des procédures d'estimation robustes, une théorie statistique complète ainsi qu'une bonne capacité prédictive. Cependant, ces modèles ne sont pas appropriés en présence des caractéristiques non linéaires et de nombreux processus physiques et naturels sont plus précisément modélisés par un modèle non linéaire que par une représentation linéaire. Vers la fin des années 1970, divers modèles de séries chronologiques non linéaires, à savoir : Modèles bilinéaire (Granger et Andersen, 1978), modèles autorégressifs à seuils (*TAR*) (Tong, 1978), Modèles autorégressifs exponentiels (*EXPAR*) (Haggan et Ozaki, 1981) et les modèles *ARCH* (Engle, 1982) ont été proposées et appliquées avec un grand succès dans de nombreux problèmes importants de la vie réelle. Tong (1990), Priestley (1988) et Tjøstheim (1994) ont fourni plusieurs fondations de l'analyse des séries chronologiques non linéaire paramétrique.

La classe des modèles Autorégressif Exponentiel (*EXPAR*), a été introduite par Ozaki (1978) et Haggan et Ozaki (1981), pour la modélisation et la prévision des données cycliques. Ces modèles ont la forme des modèles autorégressifs mais avec des coefficients dépendant de l'amplitude. En plus, ces modèles ont montré leur pertinence pour capturer certains phénomènes qui sont bien connues dans la théorie des vibrations non linéaires comme la fréquence dépendante de l'amplitude, les phénomènes de saut et des comportements de cycle limite, elles possèdent aussi plusieurs caractéristiques encourageantes, en effet Ozaki en 1993 a montré qu'un modèle *EXPAR* peut capturer les caractéristiques non gaussienne de la série, dans le même ouvrage une relation étroite entre les modèles *EXPAR* et la famille exponentielle est souligné, Ozaki a montré que pour une distribution donnée de la famille exponentielle on peut introduire un modèle *EXPAR* dont la distribution marginale est très proche de la distribution donnée. Dans l'analyse des séries temporelle non linéaire, il est parfois soutenu que les modèles non linéaires qui ont un bruit blanc gaussien homogène, comme les modèles *EXPAR*, ne sont pas appropriées pour l'analyse des séries temporelle dont la distribution marginale est à queues lourdes, ces séries se trouvent dans les données financières. Pour l'analyse de ces séries, les chercheurs utilisent souvent le modèle *ARCH*, Ozaki (1993) a montré que le modèle *EXPAR* combinée à une transformation de variable instantanée est utile pour la modélisation d'une telle série chronologiques hétéroscédastique. Récemment, Katsiampa

(2014) a combiné les modèles *EXPAR* aux modèles *ARCH* en introduisant une nouvelle classe de séries temporelles non linéaires : *EXPAR – ARCH* et *EXPAR – GARCH*, et qui sont des combinaisons d’un modèle non linéaire en moyenne conditionnelle et un modèle non linéaire en variance conditionnelle et qui a le potentiel d’expliquer des données observées en finance. Une application sur l’indice de prix du Dow Jones a montré que les nouveaux modèles peuvent expliquer ces données réels mieux que les modèles *AR – ARCH* et *AR – GARCH*.

Cette classe des séries temporelles non linéaire a trouvé des applications réussies dans de nombreux domaines, y compris l’écologie (Haggan et Ozaki ; 1981, Priestley ; 1988), l’hydrologie (Ozaki ; 1985), signale de la parole (K. Ishizuka et all., 2005), macroéconomie (N. Terui et HK Van Dijk ; 1999, E. Amiri ; 2012) et météorologie (Bishal Gurung ; 2013).

Divers propriétés théoriques tel que la stationnarité, l’ergodicité géométrique, l’estimation, la prévision et les tests ont été l’objet d’étude par plusieurs auteurs. Chan et Tong (1985) ont montré l’existence d’une solution stationnaire et géométriquement ergodique pour le modèle *EXPAR*(1), Al- Kassam et Lane (1989) ont proposé une méthode de prévision pour ce modèle, Koul et Schick (1997) ont donné la propriété *LAN* et ont étudié le problème de l’estimation efficace et Allal et El Melhaoui (2006) ont construit un test paramétrique et non paramétrique pour la détection d’une composante exponentielle dans un modèle *AR*(1), cela revient à tester une hypothèse d’autorégression linéaire d’ordre un contre une hypothèse d’autorégression exponentielle d’ordre un, Shi et Aoyama (1997), Baragona et al. (2002) ont utilisé l’algorithme génétique (*AG*) pour estimer les paramètres des modèles *EXPAR*(*p*).

Il est bien connue que de nombreuses séries temporelles rencontrées, en pratique, dans plusieurs domaines révèlent un comportement saisonnier, un fait qui ne peut pas être expliquer par les modèles de séries temporelles à paramètres invariant dans le temps, pour résoudre ce problème, Box et Jenkins (1970) ont proposé un type particulier de modèles linéaire saisonniers qui sont les modèles *SARIMA*, et qui malgré leur efficacité, souffrent d’une lacune majeure : ils sont incapable de représenter adéquatement de nombreuses séries chronologiques saisonnières exhibant une structure d’autocovariance périodique, parce qu’en fait les modèles *SARIMA* sont des cas particulier des processus *ARIMA* dont les autocorrélations ne dépendent pas de la saison. Ce fait a motivé les recherches dans les processus périodiquement corrélés, cette notion a été exploitée dans une variété de nouvelles classes de modèles de séries chronologiques qui sont les modèles périodiques. C’est ainsi que nous avons l’extension des modèles classiques aux cas périodiques : Modèles *GARCH* Périodiques (Bollerslev et Ghysels (1996)), Modèles Treshold Périodiques (Lewis et Ray (2002)), Modèles Bilinéaires Périodiques (Bibi et Gautier (2005)), Modèles de Mélange Périodiques (Shao (2006))...etc. La source d’inspiration originale des modèles des séries temporelles à coefficients dépendants du temps était le travail de Gladyshev (1961) sur les autocorrélations périodiques qui a été affiné ensuite par Tiao et Grupe (1980). Plusieurs auteurs ont exploré les conditions de stationnarité, l’estimation et les tests des modèles linéaires et non linéaires périodiques, y compris Jones et Brelsford (1967), Pagano (1978), Troutman (1979), Anderson et Vecchia (1993), Bentarzi et Hallin (1996), Aknouche et Bentarzi (2008), Aknouche et Guerbyenne (2009), Bibi et Aknouche (2009), Bentarzi et al (2009) et plusieurs autres. En

outre, ces modèles ont été largement utilisés dans les dernières décennies pour décrire des séries possédant une structure périodiques rencontrés dans plusieurs domaines en particulier en économie (e.g., Ghysels *et al* (1996), Osborn et Smith (1989), et autres) de même que dans les études hydrologiques et environnementales (Bloomfield *et al* (1994), Vecchia *et al* (1983), Ula et Smadi (1997), Salas *et al* (1982) et autres).

Le modèle *EXPAR* périodique est l'extension périodique de l'*EXPAR* non saisonnier, il consiste à avoir un *EXPAR* distinct pour chaque saison de l'année. La motivation derrière la proposition de ce modèle est justifiée, d'une part, pour saisir les caractéristiques de non-linéarité tel que les cycles limites du modèle *EXPAR*, et d'autre part, par le fait qu'ils permettent aux coefficients sous-jacents d'être périodiques pour capturer le phénomène de périodicité. Puisque un modèle autorégressif exponentiel périodique compte plus de paramètres que son analogue traditionnel et il est plus compliqué, alors il est très important de vérifier la nécessité de la périodicité avant de l'envisager.

Le premier objectif de ce travail est de construire un test, paramétrique, localement et asymptotiquement optimal pour tester la périodicité du modèle autorégressif exponentielle d'ordre un (*EXPAR*(1)) restreint, le concept d'optimalité en théorie des tests d'hypothèses que nous allons utilisés est le test "le plus stringent", introduit par Wald (1943). Dans le cadre des modèles semi paramétriques périodiques, Bentarzi et Hallin (1996) sont les premiers à avoir traité le problème d'inférence optimale en effectuant un test localement paramétrique et non paramétrique pour les modèles *AR* contre modèles *AR* périodiques. Dans ce travail, ils ont introduit la notion de perturbation périodique qui ajoutée à la perturbation non périodique et associée au paramètre d'intérêt formera la suite locale de valeur du paramètre. Ce point permettra aux chercheurs de résoudre le problème de tests paramétriques et semi paramétriques pour les modèles périodiques, ce test a été généralisé dans le cas multivarié par Hallin et Lotfi (2004). Récemment, un test adaptatif pour la périodicité dans les processus *SETAR* et *ARCH* a été fait par Bentarzi et Merzougui (2009, 2010).

Le résultat clé qui nous permet d'établir le test localement et asymptotiquement optimale est la propriété de Normalité Asymptotique Locale (*LAN*). L'idée d'approcher une suite d'expériences statistiques par une famille gaussienne remonte aux années quarante; plus précisément, sa première formulation a été établie par Wald (1943). Le développement considérable qu'a connu ce concept est dû à Le Cam (1986), qui a introduit le terme de normalité asymptotique locale (*LAN*) - Local Asymptotique Normality -. Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la dérivation de cette propriété pour divers modèles : Roussas (1979) pour les modèles Autorégressifs d'ordre un, Akritas et Johnson (1982) pour le modèle autorégressif général, Swensen (1985), qui en démontrant la propriété *LAN* pour les modèles *AR* avec tendance linéaire, a donné un résultat fort et très utilisé, il s'agit du lemme qui permet d'avoir cette propriété en vérifiant des conditions suffisantes, Kreiss (1987) pour le modèle *ARMA*, Linton (1993) pour les modèles *ARCH*, Bengabrit et Hallin (1998) pour les modèles bilinéaires, Bentarzi et Hallin (1996) pour les modèles *AR* périodiques, Garel et Hallin (1995) pour les modèles *ARMA* multivariés, Koul et schick (1996, 1997) pour le modèle *AR* d'ordre un à coefficient aléatoire et pour le modèle *SETAR*(2, 1, 1), Bentarzi et

Merzougui (2009, 2010) pour les modèles $PSETAR(2, 1, 1)_S$ et $PARCH(q)_S$...etc.

Toujours et dans le cadre d'étude des modèles $PEXP(1)$ restreint, nous avons abordé le sujet d'estimation des paramètres de ces modèles, comme second objectif de ce travail. Il est bien connu que l'estimation du paramètre du modèle $EXP(1)$ nécessite essentiellement des procédures d'optimisation non linéaire, alors que dans le cas du modèle $EXP(1)$ restreint ce problème se réduit à un problème de régression linéaire simple. Premièrement nous présentons les estimateurs de moindre carrée pour les paramètres du modèle $PEXP(1)$ restreint. La deuxième méthode d'estimation considérée est la méthode minimax asymptotique locale (LAM).

L'intitulé de cette thèse est " Modèles Autorégressifs Exponentiels Périodiques ". Notre objectif est d'utiliser l'approche de LeCam, connectée au modèle exponentiel Autorégressif d'ordre un, $EXP(1)$, restreint pour construire un test paramétrique de périodicité asymptotiquement optimal au sens le plus stringent et, du coup, introduire un modèle de série chronologique exhibant une dynamique non linéaire périodique, nomémment, le modèle $EXP(1)$ restreint périodique et de construire un estimateur asymptotiquement optimal au sens LAM . Pour accomplir cet objectif nous avons suivi la méthodologie suivante :

Apport et présentation de la thèse

Chapitre 1 : Théorie asymptotique de LeCam

Dans ce chapitre, on présente les notions de bases qui ont permis de faire ce travail c'est à dire l'approche asymptotique de LeCam (1960, 1986) : propriété LAN , contiguïté, propriété de linéarité, convergence faible des expériences statistiques, le test le plus stringent qui est le concept d'optimalité asymptotique valable sous la structure LAN et la borne minimax asymptotique locale LAM .

Chapitre 2 : Modèle autorégressif exponentiel $EXP(p)$

Le deuxième chapitre est réservé aux définitions de base de cycle limite, du point fixe et du modèle $EXP(p)$, introduit par Ozaki (1978) et Haggan et Ozaki (1981), ainsi que les conditions de stationnarité stricte et d'ergodicité géométrique pour l' $EXP(1)$. On traite aussi l'estimation des paramètres avec plusieurs méthodes et en fin, on présente le modèle $EXP(1)$ restreint avec son estimation par les moindres carrés établi par Koul et Schik (1997).

Chapitre 3 : Test de la périodicité dans un modèle EXP

On introduit, dans ce chapitre, le modèle $EXP(1)$ restreint périodique, et après avoir décrit la suite de logarithmes des rapports de vraisemblance, nous vérifions, en utilisant le lemme de Swensen (1985), que le modèle $EXP(1)$ restreint périodique jouit de la propriété LAN . Puis en établissant la linéarité asymptotique locale de la suite centrale, on donne le résultat le plus important de cette thèse, présenté dans la proposition 3.3.1 et qui donne

le test paramétrique localement asymptotiquement optimal au sens le plus stringent d'un modèle $EXPAR(1)$ restreint contre un modèle $EXPAR(1)$ restreint périodique.

Chapitre 4 : Estimation du modèle $PEXPAR(1)$ restreint

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de l'estimation dans un modèle $EXPAR(1)$ restreint périodique. On commence par donner les estimateurs de moindre carré ordinaire. Ensuite, les conditions suffisantes de Swensen (1985) adaptées au modèle $PEXPAR(1)$ restreint, sont vérifiées et permettent d'établir la propriété LAN du logarithme rapport de vraisemblance. En utilisant ces résultats, on construit des estimateurs LAM dans un cadre paramétrique.

CHAPITRE

1

Théorie asymptotique de LeCam

1.1 Normalité asymptotique locale (LAN)

Historique

L'idée d'approcher une suite d'expériences statistiques par une famille gaussienne remonte à Wald (1943), mais doit son développement à Lucien Lecam (1960, 1986), qui a introduit le terme de Normalité Asymptotique Locale. Ce cadre théorique est devenu un standard pour la résolution du problème d'efficacité des tests et des estimateurs au sens asymptotique, car quand le modèle de départ est approximativement normal, il hérite de la structure simple des modèles normaux. L'essence de la propriété *LAN* est que le logarithme du rapport de vraisemblance est asymptotiquement normalement distribué de variance localement constante et de moyenne localement linéaire du paramètre du modèle statistique en question.

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la dérivation de cette propriété pour divers modèles : Roussas (1979) pour les modèles Autorégressifs d'ordre un, Swensen (1985), qui en démontrant la propriété *LAN* pour les modèles *AR* avec tendance linéaire, a donné un lemme qui permet d'avoir cette propriété en vérifiant 6 conditions suffisantes et qui sera par la suite très utilisé, Kreiss (1987) pour le modèle *ARMA*, Linton (1993) pour les modèles *ARCH*, Bengabrit et Hallin (1998) pour les modèles bilinéaires, Bentarzi et Hallin (1996) pour les modèles *AR* périodiques (*PAR*), Garel et Hallin (1995) pour les modèles *ARMA* multivariés, Koul et schick (1996, 1997) pour le modèle *AR* d'ordre un à coefficient aléatoire et pour le modèle *SETAR*(2, 1, 1), Bentarzi et Merzougui (2009, 2010) pour les modèles *PSETAR*(2, 1, 1)_s

et $PARCH(q)_S \dots$ etc.

Propriété LAN

Soit $\mathbf{X}^{(n)} = (X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})'$, $n \in \mathbb{N}$ une suite d'observations décrites par la suite de modèles statistiques $\mathbf{E}^{(n)} = (\mathbb{R}^n, \mathbf{B}^n, \mathbf{P}^{(n)})$, où \mathbf{B}^n est la tribu de Borel engendrée par les ouverts de \mathbb{R}^n et $\mathbf{P}^{(n)} = \{P_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$ est une famille paramétrique de lois de probabilités définies sur $(\mathbb{R}^n, \mathbf{B}^n)$ et indexées de façon injective par le paramètre $\theta \in \Theta$, où Θ est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^k . Pour chaque $\theta \in \Theta$, on définit la suite locale (localisée en θ) :

$$\theta^{(n)} = \theta + \nu(n)\tau^{(n)}, \quad \tau^{(n)} \in \mathbb{R}^k, \quad (1.1.1)$$

où $\nu(n)$ est une suite de matrices $k \times k$ non singulières, telles que $\|\nu(n)\| \rightarrow 0$, et $\tau^{(n)}$ est une suite de vecteurs tels que $\sup_n \tau^{(n)'}\tau^{(n)} < \infty$. Considérons les suites de mesures de probabilités

$P_\theta^{(n)}$ et $P_{\theta+\nu(n)\tau^{(n)}}^{(n)}$, et le rapport de la log-vraisemblance de $P_{\theta+\nu(n)\tau^{(n)}}^{(n)}$ par rapport à $P_\theta^{(n)}$

$$\Lambda^{(n)}(\theta + \nu(n)\tau^{(n)}) = \log \left[\frac{dP_{\theta+\nu(n)\tau^{(n)}}^{(n)}}{dP_\theta^{(n)}} \right], \quad (1.1.2)$$

où $\frac{dQ}{dP}$ est la dérivée de Radon Nikodym de la partie absolument continue de Q par rapport à P .

Le point de départ des développements de la théorie asymptotique moderne est la mise en évidence, par Lecam (1960), du fait remarquable qu'une structure extrêmement générale (structure LAN), suffisante à l'étude des performances asymptotiques de la quasi totalité des procédures statistiques, peut être caractérisée très simplement à partir du comportement de $\Lambda^{(n)}(\theta + \nu(n)\tau^{(n)})$.

Définition 1.1.1

Une suite d'expériences $\mathbf{E}^{(n)} = (\mathbb{R}^n, \mathbf{B}^n, \mathbf{P}^{(n)})$ est dite localement asymptotiquement normale (LAN $(\theta, \Gamma(\theta), \Delta_n(\theta))$) si pour tout $\theta \in \Theta$, il existe une suite $\Delta^{(n)}(\theta)$ de vecteurs aléatoires \mathbf{B}^n -mesurables, et une matrice $(k \times k)$ $\Gamma(\theta)$ continue en θ telle que : si $n \rightarrow \infty$, on ait, sous $P_\theta^{(n)}$,

$$\begin{aligned} (i) \quad & \Lambda^{(n)}(\theta + \nu(n)\tau^{(n)}) = \tau^{(n)'}\Delta^{(n)}(\theta) - \frac{1}{2}\tau^{(n)'}\mathbf{\Gamma}(\theta)\tau^{(n)} + o_p(1) \\ (ii) \quad & \Delta^{(n)}(\theta) \implies N(0, \Gamma(\theta)), \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Le vecteur $\Delta^{(n)}(\theta)$ est appelé suite centrale et $\Gamma(\theta)$ est la matrice d'information.

Remarque 1.1.1

Si $n \rightarrow \infty$

$$(\tau^{(n)'}\mathbf{\Gamma}(\theta)\tau^{(n)})^{-\frac{1}{2}} \left(\Lambda^{(n)}(\theta + \nu(n)\tau^{(n)}) + \frac{1}{2}\tau^{(n)'}\mathbf{\Gamma}(\theta)\tau^{(n)} \right) \implies N(0, 1).$$

1.1.1 Convergence faible des expériences statistiques

Pour interpréter et justifier la terminologie *LAN*, considérons le modèle de position gaussien

$$\{N(\Gamma(\theta)\tau, \Gamma(\theta)) / \tau \in \mathbb{R}^k\},$$

à une seule observation que nous notons Δ . Il est facile de vérifier que le logarithme du rapport de vraisemblance associé à la loi gaussienne $N(\Gamma(\theta)\tau, \Gamma(\theta))$ par rapport à $N(0, \Gamma(\theta))$ est donné par

$$\tau' \Delta - \frac{1}{2} \tau' \Gamma(\theta) \tau,$$

ce qui signifie (voir le second membre de (1.1.3)) que le logarithme du rapport de vraisemblance “local” en θ est asymptotiquement équivalent au logarithme du rapport de vraisemblance dans un modèle de position gaussien classique. Comme nous l’expliquons ci-dessous, ceci a d’importantes implications sur la construction de procédures localement et asymptotiquement optimales pour la suite d’expériences en question.

La normalité locale asymptotique entraîne, pour tout θ , la convergence faible de la suite d’expériences locales (localisées en θ)

$$\mathcal{E}^{(n)} = \left(\mathbb{R}^n, \mathbf{B}^n, \mathbf{P}^{(n)} = \left\{ P_{\theta + \nu^{(n)}\tau}^{(n)} / \tau \in \mathbb{R}^k \right\} \right)$$

vers le modèle de position gaussien

$$\mathcal{E}_\theta^N = \left(\mathbb{R}^k, \mathbf{B}^k, \mathbf{P}_\theta = \left\{ N(\Gamma(\theta)\tau, \Gamma(\theta)) / \tau \in \mathbb{R}^k \right\} \right)$$

nous noterons Δ l’unique observation associée à ce modèle limite. Ce concept de convergence est basé sur une pseudo-distance (dite distance de Le Cam) entre les ensembles des fonctions de risque (de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R}^+) réalisables sous les expériences considérées, pour les fonctions de perte bornées. Dans le contexte de test d’hypothèse, ceci signifie en quelque sorte que, lorsque $n \rightarrow \infty$, toutes les courbes de puissance réalisables pour l’expérience $\mathcal{E}^{(n)}$ convergent, ponctuellement en τ mais uniformément en l’ensemble de toutes les procédures de test possibles, vers les courbes de puissance associées au modèle limite gaussien \mathcal{E}_θ^N . A l’inverse, pour toute fonction de risque R réalisable dans le modèle \mathcal{E}_θ^N , il existe une suite de fonctions de risque associées à $\mathcal{E}^{(n)}$ qui converge ponctuellement vers cette fonction de risque R . Ainsi, si un test $\phi(\Delta)$ est exactement optimal au niveau α dans \mathcal{E}_θ^N , la suite de tests $\phi(\Delta^{(n)}(\theta))$ sera localement en θ et asymptotiquement optimale dans la suite d’expériences originales ce qui veut dire que modulo la connaissance des tests optimaux dans l’expérience de shift gaussien \mathcal{E}_θ^N la construction de tests localement asymptotiquement optimaux dans la suite d’expériences originales est directe.

Donc la convergence des expériences a des conséquences décisionnelles du moment qu’elle implique que les procédures optimales (tests et estimation) dans des expériences gaussiennes seront aussi optimales dans les expériences initialement considérées.

1.1.2 Contiguïté

La notion de contiguïté, due à LeCam, joue un rôle primordial dans les méthodes asymptotiques. Soit $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)})$ une suite d'espaces mesurables. Soient $P^{(n)}$ et $Q^{(n)}$ deux suites de mesures de probabilités sur $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)})$.

Définition 1.1.2

Si, pour toute suite $A^{(n)} \in \mathcal{A}^{(n)}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(A^{(n)}) = 0 \text{ implique } \lim_{n \rightarrow \infty} Q^{(n)}(A^{(n)}) = 0,$$

on dit que la suite $Q^{(n)}$ est contiguë à $P^{(n)}$. Si $Q^{(n)}$ est contiguë à $P^{(n)}$ et $P^{(n)}$ est contiguë à $Q^{(n)}$, on dit que $P^{(n)}$ et $Q^{(n)}$ sont mutuellement contiguës.

Une conséquence immédiate et forte utilisée de la contiguïté est la conservation des ordres de convergences en probabilité. En effet, si $P^{(n)}$ et $Q^{(n)}$ sont mutuellement contiguës alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} \left[\left| \frac{S_n}{h(n)} \right| > \varepsilon \right] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

est équivalent à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^{(n)} \left[\left| \frac{S_n}{h(n)} \right| > \varepsilon \right] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

pour toute statistique S_n $\mathcal{A}^{(n)}$ -mesurable.

En pratique, il n'est pas simple d'établir la contiguïté à partir de la définition, il est donc intéressant d'énoncer une démarche plus opérationnelle. Notons $L^{(n)} = \frac{dQ^{(n)}}{dP^{(n)}}$ la vraisemblance de $Q^{(n)}$ par rapport à $P^{(n)}$.

Lemme 1.1.1 (LeCam's first lemma, Hájek et Šidák (1967))

Soit $F^{(n)}$ la fonction de distribution de $L^{(n)}$ sous $P^{(n)}$ définie par

$$F^{(n)}(x) = P^{(n)}(L^{(n)} \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $F^{(n)}$ converge faiblement (aux points de continuité) vers une fonction de distribution F satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} x dF(x) = 1$, alors $P^{(n)}$ et $Q^{(n)}$ sont mutuellement contiguës.

Comme conséquence du lemme, nous énonçons le corollaire suivant qui est très utilisé en pratique : c'est la situation qu'on rencontre dans le contexte de la propriété LAN. Un résultat plus général se trouve dans Lecam (1960).

Corollaire 1.1.1

Si $\log L^{(n)}$ est asymptotiquement normal de moyenne $-\sigma^2/2$ et de variance σ^2 sous $P^{(n)}$, alors $P^{(n)}$ et $Q^{(n)}$ sont mutuellement contiguës.

Il est clair que la contiguïté conserve les convergences en probabilité. Des déductions analogues peuvent-elles être faites à propos des convergences en loi ?

La réponse à cette question est d'une grande importance notamment dans les problèmes de tests d'hypothèses. En effet la puissance d'un test en une suite $Q^{(n)}$ de contre hypothèses s'étudie à partir de la loi sous $Q^{(n)}$ de la statistique du test considéré ; or il est généralement plus facile d'étudier la loi asymptotique d'une statistique sous une suite d'hypothèses nulles $P^{(n)}$ que sous une suite de contre hypothèses $Q^{(n)}$. Le "3^{ème} lemme de LeCam " fournit une réponse dans le cas particulier de la normalité asymptotique liée de la log-vraisemblance et de la statistique considérée.

Lemme 1.1.2 (LeCam's third lemma, Hájek et Šidák (1967))

Soit $S^{(n)}$ une statistique $\mathcal{A}^{(n)}$ -mesurable. Soit Λ_n une version de $\log \left(\frac{dQ^{(n)}}{dP^{(n)}} \right)$. Supposons que si $n \rightarrow \infty$, on ait, sous $P^{(n)}$,

$$\begin{pmatrix} S^{(n)} \\ \Lambda_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \left(\begin{pmatrix} \mu \\ -\frac{1}{2}\sigma_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right).$$

Alors :

- (i) $P^{(n)}$ et $Q^{(n)}$ sont mutuellement contiguës;
- (ii) si $n \rightarrow \infty$, $S^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(\mu + \sigma_{12}, \sigma_1^2)$ sous $Q^{(n)}$.

1.2 Concepts d'optimalité asymptotique locale

Le Concept d'optimalité en théorie des tests d'hypothèses valable, dans ce travail, est le test "le plus stringent".

Soit H_0 une hypothèse nulle, H_1 sa contre hypothèse et C l'ensemble des tests ϕ vérifiant une condition de niveau α , i.e.

$$C = \{ \phi / E_P(\phi) \leq \alpha; \forall P \in H_0 \}.$$

1.2.1 Test le plus stringent

La notion de test le plus stringent a été introduite par Wald (1943). Pour tout $P \in H_1$, soit $\bar{\beta}(P) = \sup_{\phi \in C} E_P(\phi)$.

$\bar{\beta}(P)$ est donc la meilleure puissance que puissent atteindre, en un élément P fixé de H_1 , les tests de la classe C . On appelle regret d'un test ϕ dans la classe C la quantité

$$\tau(\phi) = \sup_{P \in H_1} [\bar{\beta}(P) - E_P(\phi)].$$

Le regret de ϕ est "le pire déficit de puissance" auquel donne lieu ϕ , si on le compare sur H_1 aux meilleures performances possibles au sein de C . Un test ϕ^* est dit le plus stringent au niveau α si son regret est minimum parmi les tests de niveau α , c'est à dire si

$$\begin{cases} \phi^* \in C \\ \tau(\phi^*) \leq \tau(\phi); \quad \forall \phi \in C. \end{cases}$$

Le test optimal dans les modèles shift gaussien se réduira à tester

$$\tau \in M(\Omega) \quad \text{contre l'alternative } \tau \notin M(\Omega),$$

où $M(\Omega)$ est le sous espace de \mathbb{R}^k engendré par les colonnes Ω (Ω est une matrice de dimension $k \times (k - r)$). On déduit alors, à partir de Lecam (1986) que pour ce type de problème le test le plus stringent au niveau α est

$$\phi_\theta^*(\Delta) = I_{[\Delta'(\Gamma_\theta^{-1} - \Omega(\Omega' \Gamma_\theta \Omega)^{-1} \Omega') \Delta > \chi_{r;1-\alpha}^2]}.$$

Donc le test localement asymptotiquement le plus stringent dans l'expérience originale est

$$\phi_\theta^*(\Delta_\theta^{(n)}) = I_{[\Delta_\theta^{(n)'}(\Gamma_\theta^{-1} - \Omega(\Omega' \Gamma_\theta \Omega)^{-1} \Omega') \Delta_\theta^{(n)} > \chi_{r;1-\alpha}^2]}.$$

1.2.2 Critère Minimax Asymptotique Local (LAM)

Dans les modèles classiques (paramétriques), plusieurs méthodes d'estimation ont été étudiées par exemple : maximum de vraisemblance, moindres carrés, estimateurs des moments, . . . Au contraire, dans les modèles semi paramétriques il n'y a pas encore une méthode générale pour la construction des estimateurs efficaces. Une approche qui offre beaucoup de lumière dans la structure de l'efficacité et la \sqrt{n} -consistance de l'estimateur pour les modèles semi paramétriques est basée sur les bornes d'information. Dans des modèles semiparamétrique on peut définir une borne d'efficacité pour les estimateurs analogue à la borne de Cramer-Rao pour les modèles paramétriques. Ces bornes ne se contentent pas de donner une référence pour mesurer l'efficacité asymptotique d'estimateurs semi paramétriques, elles peuvent aussi suggérer des moyens de construire ces estimateurs.

Sous la structure LAN, un critère d'efficacité asymptotique, souvent considéré dans la littérature statistique, est le critère minimax asymptotique locale (voir Hajek (1972) pour l'exposé détaillé de la théorie et son histoire). Avant de présenter cette borne asymptotique, on donne la définition d'un estimateur régulier.

Définition 1.2.1

Une suite d'estimateurs $\{Z_n\}$ est dite θ -régulière, sous la condition LAN $(\theta, \Gamma(\theta), \Delta_n(\theta))$ si

$$\sqrt{n}(Z_n - \theta) - \Gamma^{-1}(\theta) \Delta^{(n)}(\theta) = o_p(1), \tag{1.2.1}$$

i.e

$$\sqrt{n}(Z_n - \theta) \implies N(0, \Gamma^{-1}(\theta)).$$

Hàjek (1972) avait donné une borne inférieure du risque encouru en prenant $\{Z_n\}$ comme suite d'estimateurs arbitraires du paramètre θ , Fabian et Hannan ont étendu ces résultats.

Théorème 1.2.1 (Local Asymptotic Maximin (LAM))

Soit $\{Z_n\}$ une suite d'estimateurs quelconques de θ , l une fonction de perte définie sur \mathbb{R} , supposons que la condition LAN $(\theta, \Gamma(\theta), \Delta_n(\theta))$ est vérifiée alors :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{Z_n} \sup_{\sqrt{n}|\theta - \theta_0| \leq M} E_{\theta} l \{ \sqrt{n}(Z_n - \theta) \} \geq El(Z), \quad (1.2.2)$$

où Z suit la $N(0, \Gamma^{-1}(\theta))$.

L'appellation maximin est à cause de l'"inf sup". Une suite d'estimateurs $\{Z_n\}$ est dite LAM(θ) si on a l'égalité dans l'inéquation (1.2.2).

La formule précédente établit qu'aucun estimateur n'a une meilleur performance qu'un estimateur efficace dans le sens de (1.2.1), pour cette raison on donne ce lemme démontré par Fabian et Hannan (1982) Thm 6.3 p.467.

Lemme 1.2.1

Sous la condition LAN, pour toute suite d'estimateurs (Z_n) , si (Z_n) est θ -régulière alors (Z_n) est LAM.

Remarque 1.2.1

Une difficulté surgit dans la construction du test et de l'estimateur : la valeur de θ , sous l'hypothèse nulle, reste non spécifiée. Bien entendu, la solution consiste à remplacer θ par un estimateur $\hat{\theta}^{(n)}$ qui est \sqrt{n} -consistant et discret. Notons $\hat{\theta}^{(n)}$ une suite d'estimateurs de θ :

(i) $\hat{\theta}^{(n)}$ est \sqrt{n} -consistant, i.e.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}^{(n)} - \theta) = O(P_{\theta}) \text{ où encore } \exists c > 0, \text{ tel que } \sqrt{n}|\hat{\theta}^{(n)} - \theta| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}, \theta \in \Theta;$$

(ii) Pour des raisons techniques, nous utilisons des suites discrètes d'estimateurs $\{\bar{\theta}_n\}$ telles que, si $\hat{\theta}^{(n)}$ vérifie (i), $\bar{\theta}_n$ est donnée par un des points de l'ensemble θ :

$\theta = \frac{1}{\sqrt{n}}(i_1, \dots, i_k), i_j \in Z$ le plus proche de $\hat{\theta}^{(n)}$. Bien sûr, $\{\bar{\theta}_n\}$ satisfait la propriété plus générale de discrétisation.

Définition 1.2.2

Une suite $\{\bar{\theta}_n\}$ d'estimateurs est dite discrète s'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que, indépendamment de $n \in \mathbb{N}$, $\bar{\theta}_n$ prend au plus K valeurs différentes dans l'ensemble

$$Q_n = \{ \theta \in \mathbb{R}^k : \sqrt{n}|\theta - \theta_0| \leq c \}, c > 0.$$

La condition de discrétisation est due à Lecam (1960), elle permet d'éviter certains comportements pathologiques. Cette condition est cependant sans aucune conséquence pratique : à n fixé, elle n'a pas de réelle signification.

Enfin, signalons que dans les différents chapitres, nous allons utiliser une technique qui consiste à remplacer, dans des équations stochastiques, une suite de nombres réels par une suite de variables aléatoires. Cette technique est basée sur le lemme 4.4 de Kreiss (1987) que nous rappelons ici.

Lemme 1.2.2 (Kreiss (1987))

Supposons que $\{T^{(n)}(\theta), n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de variables aléatoires dépendant de $\theta \in \Theta$. Si pour toute suite de réels $\{\theta^{(n)}\}$ vérifiant

$$\sqrt{n}(\theta^{(n)} - \theta) \text{ est bornée par une constante } c > 0,$$

on a $T^{(n)}(\theta^{(n)}) = o_{P_\theta}(1)$, alors aussi $T^{(n)}(\widehat{\theta}^{(n)}) = o_{P_\theta}(1)$ est vérifiée pour toute suite d'estimateurs $\widehat{\theta}^{(n)}$ discrète et \sqrt{n} -convergente.

CHAPITRE

2

Modèle AutoRégressif EXPonentiel *EXPAR*(p)

2.1 Introduction

Le modèle Autorégressif exponentiel, (*EXPAR*), appartient à la classe des modèles Autorégressifs non linéaires. Il a été introduit par Ozaki (1978) et Haggan et Ozaki (1981) pour la modélisation et la prévision des données cycliques et pour reproduire quelques caractéristiques de la théorie des vibrations aléatoires non linéaires comme la fréquence dépendante de l'amplitude, les phénomènes de saut et les comportements de cycle limite. Il possède aussi plusieurs caractéristiques encourageantes, en effet, ozaki en (1993) a montré qu'un modèle *EXPAR* peut capturer les caractéristiques non gaussiennes de la série. Dans le même ouvrage une relation étroite entre les modèles *EXPAR* et la famille exponentielle est souligné, ozaki a montré que pour une distribution donnée de la famille exponentielle on peut introduire un modèle *EXPAR* dont la distribution marginale est très proche de la distribution donnée. Plusieurs articles ont traité les problèmes de stationnarité, d'ergodicité géométrique, d'estimation, de prévision et de test pour ces modèles comme : Ozaki (1982, 1985), Tjøstheim (1986), Chan et Tong (1985), Al-Kassam et Lane (1989), Koul et Schick (1997) et Allal et El Melhaoui (2006), en plus cette classe de séries temporelles non linéaire a été appliquée avec succès dans plusieurs domaines comme en écologie (Haggan et Ozaki; 1981, Priestley; 1988), hydrologie (Ozaki; 1985), signal vocal (K. Ishizuka, H. Kato et T. Nakatani; 2005) et macroéconomie (N. Terui et H.K. Van Dijk; 1999, E. Amiri; 2012).

Dans la section 2.1, on donne les définitions de base de cycle limite, du point fixe et du modèle $EXPAR(p)$ ainsi que les conditions de stationnarité stricte et d'ergodicité géométrique pour l' $EXPAR(1)$. L'estimation des paramètres est discutée à la section 2.2 avec plusieurs méthodes. En fin, dans la section 2.3, on présente le modèle $EXPAR(1)$ restreint avec son estimation par les moindres carrés.

2.2 Modèles et définitions de bases

2.2.1 Définitions

Dans cette section on donne les définitions explicites des points singuliers ou fixes et des cycles limites d'une équation (temporelle) de différence discrète générale :

$$x_t = f(x_{t-1}, \dots, x_{t-p}). \quad (2.2.1)$$

Ces définitions sont données par Ozaki (1985).

Définition 2.1.1 Point singulier ou fixe.

Un point fixe de l'équation (2.2.1) est un point ξ , pour lequel chaque trajectoire de l'équation (2.2.1) commençant suffisamment près de ξ l'approche soit pour $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$. Si la trajectoire approche ξ pour $t \rightarrow \infty$ on dit un point fixe stable, et si elle l'approche pour $t \rightarrow -\infty$ on dit un point fixe instable.

Définition 2.1.2 cycle limite :

Un cycle limite de l'équation (2.2.1) est une trajectoire fermée isolée x_{t+1}, \dots, x_{t+q} , où q est un entier positif.

"Fermée" signifie que si les valeurs initiales (x_1, \dots, x_p) appartiennent au cycle limite, alors $(x_{1+kq}, \dots, x_{p+kq}) = (x_1, \dots, x_p)$ quelque soit l'entier k . Autrement dit la trajectoire fermée revient à la condition initiale après un certain temps. "Isolée" signifie que toutes les trajectoires commençant suffisamment près du cycle limite l'approchent soit pour $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$ c'est à dire les trajectoires voisines ne sont pas fermées, elles spirales autour du cycle limite en s'en éloignant ou en s'en approchant. Si les trajectoires approchent le cycle limite pour $t \rightarrow \infty$, le cycle est dit stable ou attractif sinon, il est dit instable. Le plus petit entier q qui satisfait la définition 2.1.1 est appelé la période du cycle limite de l'équation (2.2.1). Ozaki (1985) a noté que le point fixe peut être considéré comme un cycle limite de période 1 mais il le distingue car il a une signification physique différente.

2.2.2 Modèles Autorégressifs Exponentiels

Les modèles Autorégressifs Exponentiels ($EXPAR$) ont une structure simple semblable aux modèles Autorégressif (AR) à part les coefficients qui sont état-dépendants.

Un processus univarié $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit suivre le modèle $EXPAR(p)$, s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique de la forme :

$$X_t = \sum_{i=1}^p (\varphi_{i,1} + \varphi_{i,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) X_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.2)$$

où $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et de variance finie σ^2 . $\gamma > 0$, $\varphi_{i,1}$, $\varphi_{i,2}$, pour $i = 1, \dots, p$, sont des constantes et p est l'ordre du modèle. La non linéarité du processus vient de la forme exponentielle. Cette fonction rend la dynamique de la série localement linéaire, mais globalement non-linéaire. Les coefficients autorégressifs sont dépendants de l'amplitude, ils dépendent de X_{t-1} . Ils changent de $\{\varphi_{i,1} + \varphi_{i,2}\}$ à $\{\varphi_{i,1}\}$ quand $|X_{t-1}|$ changent de zéro à $+\infty$. C'est à dire quand $|X_{t-1}|$ devient grand les coefficients $(\varphi_{i,1} + \varphi_{i,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) \rightarrow \varphi_{i,1}$ pour $i = 1, \dots, p$. Quand $|X_{t-1}|$ devient petit, les coefficients $(\varphi_{i,1} + \varphi_{i,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) \rightarrow \varphi_{i,1} + \varphi_{i,2}$ pour $i = 1, \dots, p$. Le coefficient non linéaire γ agit comme un facteur d'échelle qui modifie l'effet de X_{t-1} dans le terme $\exp(-\gamma X_{t-1}^2)$.

La Figure 2.2.1, montre la trajectoire simulée d'un processus Autorégressif Exponentiel, générée d'un $EXPAR(1)$ avec $n = 100$, $\varphi_{1,1} = 0.8$, $\varphi_{1,2} = 0.2$, $\gamma = 1$ et $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, 1)$.

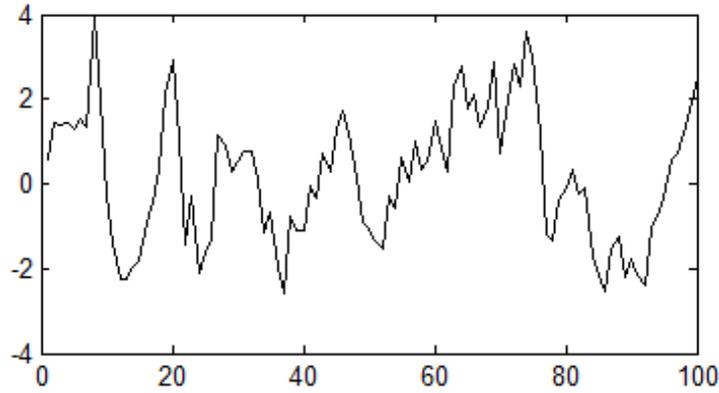


Figure 2.2.1

Les Figures 2.2.2 et 2.2.3 montrent les distributions marginales d'un $EXPAR(1)$ avec $n = 100$, $\varphi_{1,1} = 0.8$, $\varphi_{1,2} = 0.4$, $\gamma = 1$ et $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, 0.1)$ pour la première figure et $n = 1000$, $\varphi_{1,1} = 1$, $\varphi_{1,2} = -0.5$, $\gamma = 1$ et $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, 1)$ pour la deuxième figure.

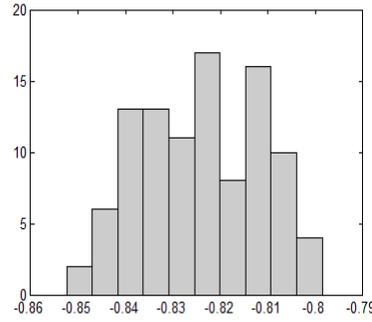


Figure 2.2.2

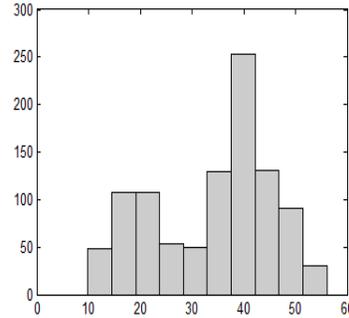


Figure 2.2.3

Haggan et Ozaki (1981) ont montré que le modèle $EXPAR$ exhibe un comportement de cycle limite sous les conditions suivantes :

i) Toutes les racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^p - \varphi_{1,1}\lambda^{p-1} - \dots - \varphi_{p,1} = 0$$

sont à l'intérieur du cercle unité. Par conséquent X_t commence à diminuer (amortir) quand $|X_{t-1}|$ est trop grand.

ii) quelques racines de l'équation :

$$\lambda^p - (\varphi_{1,1} + \varphi_{1,2})\lambda^{p-1} - \dots - (\varphi_{p,1} + \varphi_{p,2}) = 0$$

sont à l'extérieur du cercle unité. Par conséquent X_t commence à osciller et diverger pour les petites valeurs de $|X_{t-1}|$.

Le résultat de ces deux effets produit une oscillation auto-entretenu (self excited). La figure 2.2.4 montre le cycle limite obtenu pour le modèle

$$X_t = (1.95 + 0.23 \exp(-X_{t-1}^2)) X_{t-1} - (0.96 + 0.24 \exp(-X_{t-1}^2)) X_{t-2} + \varepsilon_t,$$

avec $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, 0.01)$ et où les coefficients satisfont les conditions i) et ii) précédente (exemple cité dans Haggan et Ozaki (1981)).

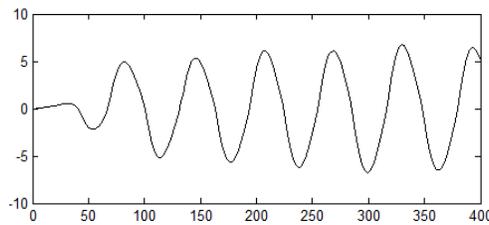


Figure 2.2.5

Les deux conditions précédentes sont nécessaires pour l'existence du cycle limite mais pas suffisantes. La condition suffisante est :

iii)

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}\right) / \sum_{i=1}^p \varphi_{i,2} > 1 \text{ ou } \left(1 - \sum_{i=1}^p \varphi_{i,1}\right) / \sum_{i=1}^p \varphi_{i,2} < 0.$$

Cette condition est exigée pour prévenir de l'occurrence d'un point singulier stable. Par exemple le modèle :

$$X_t = (1.8 + 4 \exp(-X_{t-1}^2)) X_{t-1} - (0.97 + 0.1 \exp(-X_{t-1}^2)) X_{t-2} + \varepsilon_t,$$

satisfait les conditions i) et ii) mais la trajectoire de X_t converge vers un point fixe ξ , voir figure 2.2.5. On a

$$\xi = (1.8 + 4 \exp(-\xi^2)) \xi - (0.97 + 0.1 \exp(-\xi^2)) \xi.$$

Dans ce cas, le point fixe existe parce que les coefficients ne satisfont pas la condition iii) c'est à dire :

$$0 < \left(1 - \sum_{i=1}^2 \varphi_{i,1}\right) / \sum_{i=1}^2 \varphi_{i,2} < 1$$

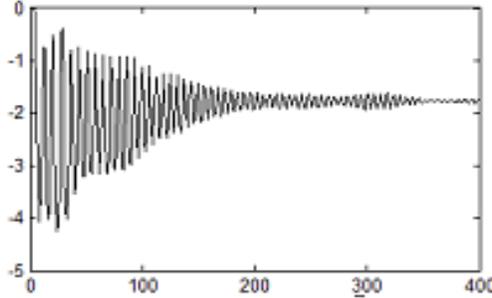


Figure 2.2.5

2.2.3 Conditions de stationnarité

Tjøstheim (1986), en estimant les paramètres avec la méthode des moindres carrés conditionnels, a donné une condition de stationnarité stricte et d'ergodicité pour le modèle *EXPAR* (1)

$$X_t = (\varphi_{1,1} + \varphi_{1,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.2.3)$$

avec $t \geq 2$ et X_1 étant une variable initiale.

Théorème (stationnarité stricte, Tjøstheim (1986))

Soit X_t définie par (2.2.3). Supposons que $|\varphi_{1,1}| + |\varphi_{1,2}| < 1$, et que ε_t a une fonction de densité avec un support infini. Alors il existe une distribution unique pour la variable initiale X_1 tel que $\{X_t, t \geq 1\}$ soit strictement stationnaire et ergodique.

Pour la démonstration voir Tjøstheim (1986) page 257.

Une condition d'ergodicité géométrique a été donné par Chan et Tong (1985) pour le modèle $EXPAR(1)$.

Théorème (ergodicité géométrique, Chan et Tong (1985))

Le modèle $EXPAR(1)$ définie par (2.2.3) est géométriquement ergodique si $|\varphi_{1,1}| < 1$.

La démonstration est basé sur la décomposition de la fonction $h(x) = (\varphi_{1,1} + \varphi_{1,2} \exp(-\gamma x^2)) x$ en deux parties : $h(x) = h_h(x) + h_d(x)$ où $h_h = \varphi_{1,1}x$ est une fonction continue et $h_d(x) = \varphi_{1,2} \exp(-\gamma x^2)x$ est une fonction bornée ensuite l'application du théorème 4.5 dans Chan et Tong (1985).

2.3 Estimation des modèles $EXPAR$

2.3.1 Procédure d'estimation donnée par Haggan et Ozaki 1981

Nous allons présenter une description de la procédure d'estimation de l' $EXPAR$, proposé par Haggan et Ozaki (1981), et qui est considérée comme une référence naturelle pour les méthodes alternatives parce que la procédure est directe et aboutit toujours a une solution. L'estimation de l'ordre p , et des coefficients $\{\gamma, \varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}; i = 1, \dots, p\}$ dans le modèle exponentiel (2.2.2) est une procédure d'optimisation non linéaire, impliquant toute les difficultés de calcul propre à cette procédure. Cependant ce problème peut être surmonter en fixant le paramètre γ dans une grille de valeurs et estimer l'ordre et les autres paramètres en appliquant une régression linéaire de X_t sur $\{X_{t-j}, X_{t-j} \exp(-X_{t-1}^2), j = 1, \dots, p\}$ où X_t est la série centrée. Les valeurs de γ sont choisi de manière que $\exp(-\gamma X_{t-1}^2)$ varie raisonnablement dans l'intervalle $[0, 1]$. L'ordre p est sélectionné en utilisant le critère AIC

$$AIC(p) = (n - P) \log \hat{\sigma}_p^2 + 2(2p + 1),$$

où P est l'ordre maximal du modèle, n est le nombre d'observation et

$$\hat{\sigma}_p^2 = (\hat{\varepsilon}_{P+1}^2 + \hat{\varepsilon}_{P+2}^2 + \dots + \hat{\varepsilon}_n^2) / (n - P)$$

est l'estimateur des moindres carrés de la variance des résidus du modèle.

Les modèles sélectionnés pour chaque γ sont comparés en utilisant l' AIC pour trouver le meilleur modèle.

L'algorithme exige la pré-spécification d'un intervalle $[a, b], a \geq 0$, pour les valeurs de γ dans l'équation (2.2.2). Cet intervalle sera partagé en M sous intervalles, de manière à avoir une grille de valeurs possibles de γ . Par exemple, si on prend l'intervalle $[0, 10]$ tel que $0 < \gamma < 10$, alors on aura une grille de 10000 points avec les valeurs 0.001, 0.002, ..., 10 comme solutions possibles.

Soit $\delta = \frac{b-a}{M}$ et $\gamma = a$. Alors, les étapes suivantes sont répétées M fois :

(i) Poser $\gamma = \gamma + \delta$

(ii) Estimer les paramètres $\varphi_{i,1}$ et $\varphi_{i,2}$ par les moindres carrés ordinaires par régression de X_t sur $X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, X_{t-1} \exp(-X_{t-1}^2), \dots, X_{t-p} \exp(-X_{t-1}^2)$.

(iii) Calculer le critère d'Akaike AIC et répéter l'étape (ii) pour $p = 1, \dots, P$, où P est un entier pré-spécifié supérieur à 1.

Les paramètres sélectionnés sont ceux qui minimisent l' AIC .

2.3.2 Méthode des moindres carrés conditionnels

Tjøstheim (1986) a traité le problème d'estimation des séries temporelle non linéaire dans un cadre général. Son approche est basée sur le développement de Taylor de la fonction de pénalité générale qui est par la suite spécialisé à un critère de type moindres carrés conditionnelle (MCC) et maximum de vraisemblance (MV). Dans le cas des MCC son travail est une généralisation de l'approche de Klimko et Nelson (1978) au cas multivarié.

Théorème (Tjøstheim (1986))

Soit X_t définie par (2.2.3) est strictement stationnaire et ergodique et supposons que $E(\varepsilon_t^6) < \infty$. Alors il existe une suite d'estimateurs $\{(\hat{\varphi}_{1,1}, \hat{\varphi}_{1,2}, \hat{\gamma})\}$ minimisant la fonction pénalité $Q_n = \sum_{t=2}^n (X_t - E(X_t/F_{t-1}^X))^2$, où F_t^X est la σ -algèbre générée par $\{X_s, s \leq t\}$, et tel que $(\hat{\varphi}_{1,1}, \hat{\varphi}_{1,2}, \hat{\gamma}) \xrightarrow{p.s.} (\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \gamma)$ et $(\hat{\varphi}_{1,1}, \hat{\varphi}_{1,2}, \hat{\gamma})$ est asymptotiquement normal c.à.d :

$$n^{1/2} ((\hat{\varphi}_{1,1}, \hat{\varphi}_{1,2}, \hat{\gamma}) - (\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \gamma)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 U^{-1}).$$

où

$$U = \begin{pmatrix} E(X_{t-1}^2) & E(\exp(-\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^2) & E(-\varphi_{1,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^4) \\ E(\exp(-\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^2) & E(\exp(-2\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^2) & E(-\varphi_{1,2} \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^4) \\ E(-\varphi_{1,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^4) & E(-\varphi_{1,2} \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^4) & E(\varphi_{1,2}^2 \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^6) \end{pmatrix}.$$

Preuve. Tjøstheim (1986) a démontré deux théorèmes (3.1) et (3.2) qui prouve l'existence d'une suite d'estimateurs minimisant la fonction critère Q_n , la convergence presque sur et la normalité asymptotique, pour des séries temporelles non linéaires. En vérifiant les conditions, C1-C3 et D1 citées dans les théorèmes (3.1) et (3.2), il montre l'existence des estimateurs de MCC pour l' $EXPAR(1)$.

Pour $t \geq 2$, on a

$$\tilde{X}_{t/t-1} = E(X_t/F_{t-1}^X) = (\varphi_{1,1} + \varphi_{1,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) X_{t-1}.$$

(C1) :

$$* \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,1}} = X_{t-1}, \quad \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,2}} = \exp(-\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}, \quad \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \gamma} = -\varphi_{1,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^3.$$

Puisque X_t est strictement stationnaire alors $E(\varepsilon_t^6) < \infty$ implique que $E(X_t^6) < \infty$ d'où :

$$E \left\{ \left| \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,1}} \right|^2 \right\} < \infty, E \left\{ \left| \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,2}} \right|^2 \right\} < \infty \text{ et } E \left\{ \left| \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \gamma} \right|^2 \right\} < \infty.$$

* pour la même raison on a : $E \left\{ \left| \frac{\partial^2 \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,2} \partial \gamma} \right|^2 \right\} < \infty$ et $E \left\{ \left| \frac{\partial^2 \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \gamma^2} \right|^2 \right\} < \infty.$

(C2) :

Soit a_1, a_2 et a_3 des nombres réels arbitraires. Alors

$$E \left(\left| a_1 \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,1}} + a_2 \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,2}} + a_3 \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \gamma} \right|^2 \right) = 0$$

implique que

$$a_1 \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,1}} + a_2 \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,2}} + a_3 \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \gamma} \stackrel{p.s}{=} 0$$

d'où :

$$X_{t-1} [a_1 + \exp(-\gamma X_{t-1}^2) (a_2 - a_3 \varphi_{1,2} X_{t-1}^2)] \stackrel{p.s}{=} 0$$

puisque $E(X_t^2) \geq E(\varepsilon_t^2) > 0$ (d'après la formule (2.2.3)) alors $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

(C3) :

$$\begin{aligned} * \left| \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,1}} \frac{\partial^2 \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,2} \partial \gamma} \right| &= \left| \exp(-\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^4 \right|, \left| \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,1}} \frac{\partial^2 \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \gamma^2} \right| = \left| \varphi_{1,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^6 \right|, \\ * \left| \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,2}} \frac{\partial^2 \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,2} \partial \gamma} \right| &= \left| \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^4 \right|, \left| \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,2}} \frac{\partial^2 \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \gamma^2} \right| = \left| \varphi_{1,2} \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^6 \right|. \\ * \left| \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,2} \partial \gamma} \right| &= \left| \varphi_{1,2} \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^6 \right|, \left| \frac{\partial \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \gamma^2} \right| = \left| \varphi_{1,2}^2 \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^8 \right|. \\ * \left| \left\{ X_t - \tilde{X}_{t/t-1} \right\} \frac{\partial^3 \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \varphi_{1,2} \partial \gamma^2} \right| &\leq (|X_t| + |X_{t-1}|) \left| \exp(-\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^5 \right|, \text{ car } |\varphi_{1,1}| + |\varphi_{1,2}| < 1. \\ * \left| \left\{ X_t - \tilde{X}_{t/t-1} \right\} \frac{\partial^3 \tilde{X}_{t/t-1}}{\partial \gamma^3} \right| &\leq (|X_t| + |X_{t-1}|) \left| \varphi_{1,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2) X_{t-1}^7 \right|. \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $x^k e^{-\gamma x^2}$ est bornée et $E(X_t^6) < \infty$ on vérifie que toutes les quantités précédentes sont majorées par des fonctions dont les espérances sont finie.

La condition *D1* est une implication de la condition *C1*. ■

Résultats de simulation :

La performance de l'estimation par la méthode des moindres carrés conditionnels est montrée par simulation, le programme est pris du site "http://perso.univ-lille3.fr/~cfrancq/Christian-Francq/R-Code/ Amendola-Francq/exparsim3.r". La série chronologique est générée à partir du modèle *EXPAR*(1) avec les paramètres $(\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \gamma) = (-0.8, 2, 0.1)$, pour la taille $n = 500$, et avec 100 répétitions monte carlo, la densité des erreurs est un mélange de loi normal. La performance de l'estimation est présentée par les boites à moustaches et les diagrammes quantile-quantile des erreurs d'estimation. Les erreurs d'estimation de $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}$ et γ sont tous centrées à zéro. D'autre part les diagrammes quantile-quantile montrent que les erreurs d'estimation sont normales.

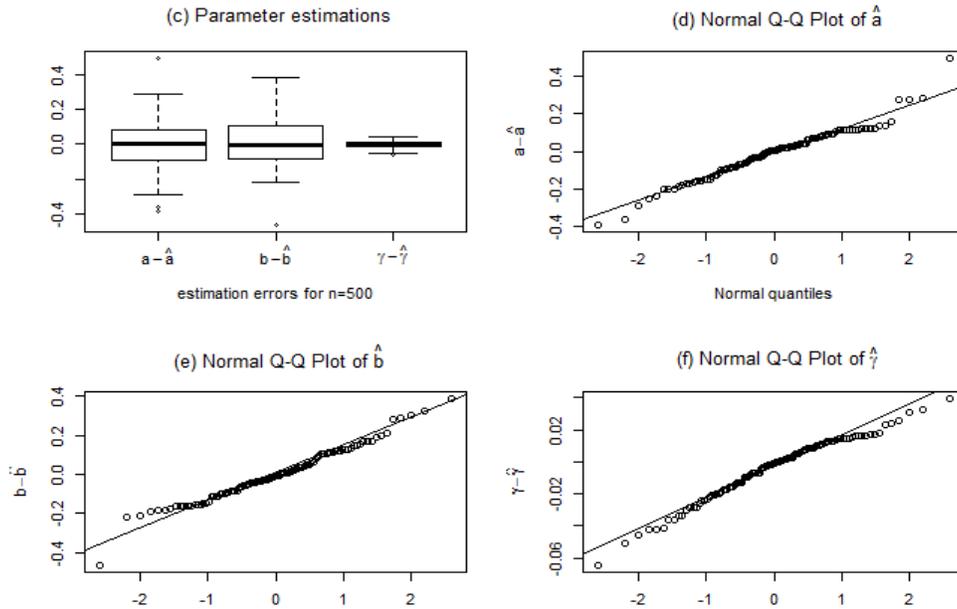


Figure 3.3.1 :Estimation de 100 répétitions de simulation du modèle *EXPAR*(1) et $n = 500$.

2.3.3 Autres méthodes d'estimation

Dans le même article de (1986), Tjøstheim a démontré les théorèmes (5.1) et (5.2) qui donnent les estimateurs du maximum de vraisemblance (MV) ainsi que leurs propriétés asymptotique, pour les modèles de séries temporelles non linéaires générales. Il suffit d'appliquer ces résultats aux modèle *EXPAR* en vérifiant les conditions *E1–E3* et *F1*. Amondela et Francq (2009) ont obtenu des résultats similaires, avec des conditions légèrement différentes, en montrant l'existence des estimateurs quasi MV pour l'*EXPAR*(1) (page 30).

Shi et Aoyama (1997), Baragona et al. (2002) et Gurung (2013) ont utilisé l'algorithme génétique (AG) pour estimer les paramètres des modèles *EXPAR*(*p*). L'algorithme génétique

tique est une classe de procédures d'optimisation globale distinguée des autres techniques d'optimisation en utilisant des concepts de la génétique. Le principe de cette méthode métaheuristique est de partir d'une population initiale c'est à dire un ensemble de solutions du problème d'optimisation posé et qui forme la première génération ensuite la faire évoluer au sens darwinien : sélection naturelle, croisement et mutation jusqu'à obtenir une population relativement stable et ayant une adaptabilité (fitness cost) optimal (max /min) par rapport aux générations précédentes. Gurung (2013), en modélisant les données d'averse annuelles de l'Inde entre 1901 à 1995, a utilisé l'AG avec l'AIC comme fonction objective a minimisé et a identifié l' $EXPAR(1)$ comme étant le meilleur modèle. Ce dernier a été utilisé pour la prévision entre 1996 à 2003 et a montré sa supériorité par rapport au modèle $ARIMA$ sélectionné pour les mêmes données.

Le modèle $EXPAR$ appartient à la famille des modèles autorégressifs à coefficient fonctionnels ($FCAR$), donc les méthodes d'estimations utilisées pour les $FCAR$ sont applicables pour les modèles $EXPAR$, comme la méthode bayésienne dans Song et al (2014) et la technique de régression linéaire locale dans Cai et al (2000).

Estimateur en temps réel Les procédures d'estimation proposés impliquent des difficultés de calcul, par exemple la méthode du MV consomme beaucoup de temps et la fonction objective pour γ n'est pas convexe et plusieurs optimum locales peuvent exister, par conséquent, il n'y a aucune garantie que l'algorithme converge à l'optimum globale (Shi et al (2001)). En plus, ces procédures ne sont pas approprié pour l'utilisation dans les systèmes industriels (processus de contrôle statistique) où la mémoire est importante par exemple Messaoud (2006) a modélisé ses données avec un $EXPAR(40)$ et a estimé les 81 paramètres avec la procédure d'estimation en temps réel. Le but important de cette approche est la détermination rapide du coefficient non linéaire γ . L'estimation des autres coefficients du modèle est seulement un problème de moindres carrés linéaire dès que γ est déterminé. Shi et al (1998) ont noté qu'en termes du mécanisme du modèle $EXPAR$ pour révéler un cycle limite ou un comportement cyclique, le paramètre d'échelle γ prend le rôle d'ajuster les racines instantanées. Dès que l'état X_{t-1} s'éloigne trop du point d'équilibre, les termes $(\varphi_{i,1} + \varphi_{i,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2))$ dans le modèle $EXPAR$ vont approché $\varphi_{i,1}$. C'est à dire le terme non linéaire $\exp(-\gamma X_{t-1}^2)$ doit approcher 0 de telle façon que le modèle résultant a toutes les racines inférieure à un pour forcer l'état suivant X_t à ne pas diverger plus loin. A partir de ce point de vue, Shi et al (2001) proposent une détermination heuristique du coefficient non linéaire γ à partir de l'ensemble des données, et définissent :

$$\gamma_0 = -\frac{\log \delta}{\max x_i^2}$$

où δ est un petit nombre (exp. $\delta = 0.0001$), $1 \leq i < N$ et N est la taille des données. Basé sur $\gamma = \gamma_0$, même si ce n'est pas optimal, le modèle $EXPAR$ révélera toujours le comportement de cycle limite.

2.4 Modèle $EXPAR(1)$ restreint

Koul et Schik (1997) ont établi la propriété de normalité asymptotique locale (LAN) pour le modèle $EXPAR(1)$ avec des paramètres appartenant à l'ensemble

$\Theta = \{(\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : |\varphi_{1,1}| < 1, \gamma > 0\}$. Mais, pour traiter le problème d'estimation efficace (au sens localement asymptotiquement minimax) et pour éviter le cas singulier où le paramètre $\varphi_{1,2} = 0$ ce qui implique que γ ne soit pas identifiable, ils ont travaillé avec le modèle $EXPAR(1)$ dans lequel γ est connu. Pour ce modèle $\Theta =]-1, 1[\times \mathbb{R}$ avec l'appellation $EXPAR(1)$ restreint.

On donne les estimateurs des moindres carrés de l' $EXPAR(1)$ restreint suivant :

$$X_t = (\varphi_1 + \varphi_2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

Lemme (Koul et Schik (1997))

Les estimateurs de MCO de l' $EXPAR(1)$ restreint sont donnés par

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1 \\ \widehat{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2) \\ \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2) & \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t \\ \sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t \exp(-\gamma X_{t-1}^2) \end{pmatrix}.$$

Preuve. La somme des carrés des résidus de ce modèle est donné par :

$$S = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^n (X_t - \{\varphi_1 + \varphi_2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2)\} X_{t-1})^2$$

On remarque que cette fonction objective à minimiser est linéaire par rapport aux paramètres à estimer φ_1 et φ_2 .

La valeurs de la fonction S est minimum lorsque ces dérivées par rapport à φ_1 et φ_2 s'annulent, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} &= \sum_{t=1}^n X_{t-1} (X_t - \{\varphi_1 + \varphi_2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2)\} X_{t-1}) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \varphi_2} &= \sum_{t=1}^n X_{t-1} \exp(-\gamma X_{t-1}^2) (X_t - \{\varphi_1 + \varphi_2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2)\} X_{t-1}) = 0 \end{aligned}$$

On peut écrire ce système en utilisant la formule matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t \\ \sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t \exp(-\gamma X_{t-1}^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2) \\ \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2) & \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1 \\ \widehat{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2) \\ \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2) & \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t \\ \sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t \exp(-\gamma X_{t-1}^2) \end{pmatrix}$$

On vérifie que ce point est un minimum c'est-à-dire la Hessienne est définie positive :

$$H = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2) \\ \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2) & \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) \end{pmatrix};$$

et le déterminant est :

$$\det(H) = \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 * \sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-2\gamma X_{t-1}^2) - \left(\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2) \right)^2 > 0. \blacksquare$$

CHAPITRE

3

Test de la périodicité dans un modèle *EXPAR*

Puisque le modèle autorégressif exponentiel périodique compte plus de paramètres que son analogue traditionnel et donc il est plus compliqué, il semble très important de tester la périodicité des paramètres du modèle *EXPAR*. Ce chapitre est consacré au test d'un modèle *EXPAR* classique contre un modèle *EXPAR* périodique. La démarche se fonde sur la théorie asymptotique des expériences statistiques de Le Cam (1960, 1986). Nous exploitons la propriété *LAN*, et ces conséquences : la convergence faible des expériences statistiques, la contiguïté et la linéarité asymptotique locale pour construire un test optimale au sens "most stringent".

3.1 Notations, Définitions et conditions de régularités

3.1.1 Définitions et notations principales

Un processus $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit suivre le modèle Autorégressif exponentiel d'ordre un restreint *EXPAR*(1), s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique de la forme :

$$X_t = (\varphi_1 + \varphi_2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.1.1)$$

où φ_1 est le paramètre d'autorégression linéaire, φ_2 et $\gamma > 0$ sont les paramètres d'autorégression non linéaire et $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc, i.e., une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et de variance σ^2 , avec une densité de probabilité $f_\sigma(\cdot)$, pas nécessairement gaussienne.

Un processus $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit suivre le modèle Autorégressif exponentiels Périodique restreint *PEXPAR*(1), de période S ($S \geq 2$), s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique périodique de la forme :

$$X_t = [\varphi_{t,1} + \varphi_{t,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)] X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.1.2)$$

où $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc, i.e., une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et de variance finie σ_t^2 , avec une densité de probabilité $f_{\sigma_t}(\cdot)$, pas nécessairement gaussienne. Les paramètres Autorégressifs $\varphi_{t,1}$ et $\varphi_{t,2}$, la variance des innovations σ_t^2 sont périodiques, dans le temps, de période S , i.e.,

$$\varphi_{t+kS,j} = \varphi_{t,j} \text{ et } \sigma_{t+kS}^2 = \sigma_t^2, \quad \forall k, t \in \mathbb{Z} \text{ et } j = 1, 2.$$

Dans ce travail, la variance des innovations est considérée être un paramètre invariant dans le temps, i.e., $\sigma_t^2 = \sigma^2$.

La Figure 3.1.1, montre la trajectoire simulée d'un processus Autorégressif Exponentiel Périodique, générée d'un *PEXPAR*(1)_S avec $n = 200, S = 2, \varphi_{t,1} = (0.8, -0.2)'$, $\varphi_{t,2} = (0.3, 0.7)'$, $\gamma_t = (0.8, 1)'$, $\sigma_t^2 = (1, 1)'$ et $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, \sigma_t^2)$ ainsi que sa distribution marginale figure 3.1.2.

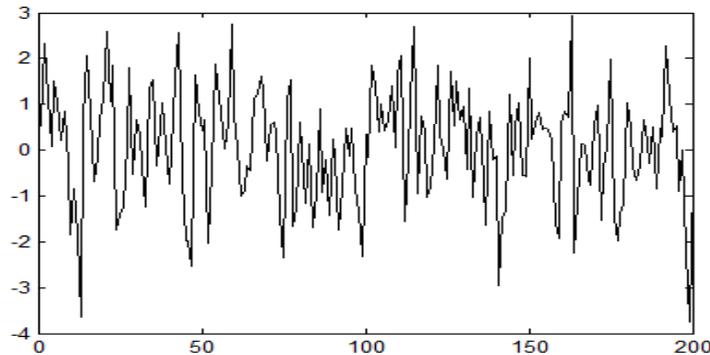


Figure 3.1.1

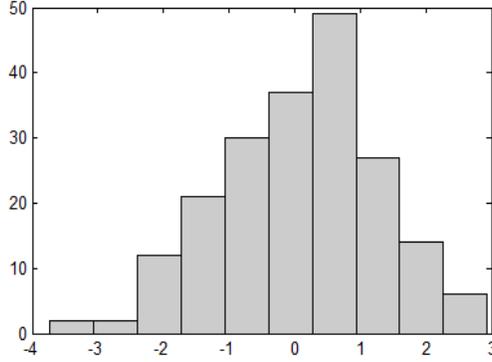


Figure 3.1.2

Notons $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ une suite d'hypothèse nulle sous laquelle $\{X_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de réalisations d'un processus satisfaisant le modèle non périodique (3.1.1), où $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)'$ et $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ la suite des hypothèses alternative sous laquelle la suite $\{X_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de réalisations d'un processus satisfaisant le modèle périodique (3.1.2), où

$$\underline{\varphi}^{(n)} = (\underline{\varphi}_1^{(n)}, \underline{\varphi}_2^{(n)}, \dots, \underline{\varphi}_S^{(n)}),$$

avec

$$\underline{\varphi}_s^{(n)} = \left(\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} (\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)}), \varphi_2 + \frac{1}{\sqrt{n}} (\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)}) \right)', \quad s = 1, \dots, S,$$

tel que $\sup_n \left((\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)})^2 + (\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)})^2 \right) < \infty$.

Les $\underline{h}_{\cdot 1}^{(n)} = (h_{1,1}^{(n)}, h_{2,1}^{(n)}, \dots, h_{S,1}^{(n)})'$ et $\underline{h}_{\cdot 2}^{(n)} = (h_{1,2}^{(n)}, h_{2,2}^{(n)}, \dots, h_{S,2}^{(n)})'$ peuvent être interpréter comme des perturbations périodiques des paramètres non périodiques φ_1 et φ_2 , respectivement, tel que $\sum_{s=1}^S h_{s,j}^{(n)} = 0$, pour $j = 1, 2$.

En considérant les notations :

$$\begin{aligned} \underline{\Phi} &= (\underline{\varphi}', \underline{\varphi}', \dots, \underline{\varphi}')' \quad \text{où } \underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)', \\ \underline{\tau}^{(n)} &= (\underline{\lambda}^{(n)'}, \underline{h}^{(n)'})' \quad \text{où } \underline{\lambda} = (\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)})' \quad \text{et } \underline{h}^{(n)} = (\underline{h}_1^{(n)'}, \dots, \underline{h}_{S-1}^{(n)'})' \end{aligned}$$

avec $\underline{h}_s^{(n)'}$ = $(h_{s,1}^{(n)}, h_{s,2}^{(n)})'$, $s = 1, \dots, S-1$, et soit $\underline{\nu}^{(n)}$ la matrice de dimension $2S \times 2S$ donnée par $\underline{\nu}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} K$, où la matrice K est définie comme suit :

$$K = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & & & & \\ \vdots & & I_{2(S-1) \times 2(S-1)} & & \\ I_{2 \times 2} & & & & \\ I_{2 \times 2} & -I_{2 \times 2} & \dots & & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

on peut aisément réécrire les hypothèses alternatives sous la forme $H_f^{(n)} (\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$.

3.1.2 Hypothèses de régularités techniques

A travers ce chapitre nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse (H1). Les paramètres autorégressifs exponentiels $\underline{\varphi}$ satisfont la condition de causalité du (3.1.1), i.e., $|\varphi_1| < 1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$,

Hypothèse (H2). La densité des innovations $\dot{f}_\sigma(\cdot)$ est supposée satisfaire les conditions suivantes :

(a) $f_\sigma(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

(b) $f_\sigma(\cdot)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue μ : il existe une fonction $\dot{f}_\sigma(\cdot)$ tel que, pour $-\infty < a < b < \infty$, nous avons $\dot{f}_\sigma(b) - \dot{f}_\sigma(a) = \int_a^b \dot{f}_\sigma(x) d\mu(x)$,

(c) L'information de Fisher $I(f_\sigma) = \int (\phi_f(x))^2 f_\sigma(x) dx$ est finie, où $\phi_f = -\frac{\dot{f}_\sigma(\cdot)}{f_\sigma(\cdot)}$,

(d) $\int x \dot{f}_\sigma(x) dx = 0$ et la variance est finie, i.e., $\sigma^2 = E(\varepsilon_t^2) < \infty$.

On note que les deux conditions (b) et (c) impliquent la différentiabilité en moyenne quadratique de la fonction $f(\cdot)^{\frac{1}{2}}$. i.e.,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-2} \int \left(f_\sigma^{\frac{1}{2}}(x + \lambda) - f_\sigma^{\frac{1}{2}}(x) - \lambda \frac{\dot{f}_\sigma(x)}{f_\sigma^{\frac{1}{2}}(x)} \right)^2 dx = 0.$$

3.2 Normalité Asymptotique Locale du modèle *PEXP*AR(1) restreint

Le contexte historique, qui a introduit cette notion, était la convergence faible des expériences statistique et la première formulation remonte à Wald (1943). Depuis les années 1960, ce concept a connu un développement considérable et sophistiqué dû à Le Cam, qui a introduit le terme de Normalité Asymptotique Locale (*LAN*). cette propriété traduit deux idées : la première est que l'information amenée par l'observation est suffisante pour produire des estimateurs assez précis des paramètres du modèle et la deuxième traduit le fait que dans

un voisinage de ces paramètres, la famille de probabilité peut être approché assez finement par une expérience gaussienne de nature plus simple.

La propriété de normalité asymptotique locale est à la base de plusieurs résultats de recherche liés à l'étude des modèles de séries temporelles, nombreux chercheurs se sont intéressés à la dérivation de la propriété LAN pour divers modèles. On cite notamment : Roussas (1979) pour les modèles Autorégressifs d'ordre un, Akritas et Johnson (1982) pour le modèle autorégressif général, Swensen (1985), qui en démontrant la propriété LAN pour les modèles AR avec tendance linéaire, a donné un résultat fort et très utilisé, il s'agit du lemme qui permet d'avoir cette propriété en vérifiant six conditions suffisantes, Kreiss (1987) pour le modèle $ARMA$, Linton (1993) pour les modèles $ARCH$, Bengabrit et Hallin (1998) pour les modèles bilinéaires, Bentarzi et Hallin (1996) pour les modèles AR périodiques, Garel et Hallin (1995) pour les modèles $ARMA$ multivariés, Koul et schick (1996, 1997) pour le modèle AR d'ordre un à coefficient aléatoire, le modèle $SETAR(2, 1, 1)$ et le modèle $EXPAR(1)$, Bentarzi et Merzougui (2009, 2010) pour les modèles $PSETAR(2, 1, 1)_S$ et $PARCH(q)_S$...etc.

3.2.1 Suite de Rapports de Vraisemblance

Notons $\underline{X}^{(n)} = (X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})$ une réalisation de taille finie n d'un processus $\{X_t^{(n)}; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant le modèle $EXPAR(1)$ restreint (3.1.1) et soit $X_0^{(n)}$ la valeur initiale dont les densités sont $g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \sigma)$ et $g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \sigma)$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$, respectivement. En plus, on suppose que $g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \sigma) - g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \sigma)$ converge en probabilité vers 0, quand $\underline{\varphi}^{(n)} \rightarrow \underline{\varphi}$ avec $n \rightarrow \infty$. Supposons, pour simplifier les notations, que la taille de la série temporelle observée n est un multiple de S , i.e., $n = mS$, $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $t = s + S\tau$, $s = 1, \dots, S$ et $\tau = 0, 1, \dots, m-1$. On note par $Z_t^{(n)}(\underline{\varphi})$ et $Z_t^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$, $t \in \mathbb{Z}$, les résidus calculés sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$, respectivement. Alors, nous avons

$$Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) = X_{s+rS}^{(n)} - \left[\varphi_1 + \varphi_2 \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}) \right] X_{s+rS-1}^{(n)},$$

et

$$\begin{aligned} Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) &= X_{s+rS}^{(n)} - \left[\left(\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} (\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)}) \right) + \left(\varphi_2 + \frac{1}{\sqrt{n}} (\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)}) \right) \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}) \right] X_{s+rS-1}^{(n)} \\ &= Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \left[(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)}) + (\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)}) \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}) \right] X_{s+rS-1}^{(n)} \\ &= Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{I}_s^{*(n)'} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} \\ &= Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \gamma_{s,r}^{(n)}, \end{aligned}$$

où

$$\underline{T}_s^{*(n)} = \left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)}, \lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right)',$$

et où

$$\underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} = \left(X_{s+rS-1}^{(n)}, X_{s+rS-1}^{(n)} \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}) \right)' \text{ et } \gamma_{s,r}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{T}_s^{*(n)'} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)}, \quad s = 1, \dots, S.$$

La variance empirique correspondante est donnée par $\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(Z_t^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)^2$.

Alors, le logarithme du rapports de vraisemblance, $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) = \Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{T}^{(n)})$ pour $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ contre $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$, est alors donné, pour $n = mS$, par :

$$\Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{T}^{(n)}) = \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \log \frac{f_\sigma \left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) \right)}{f_\sigma \left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)} + \log \frac{g_0^{(n)} \left(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \sigma \right)}{g_0^{(n)} \left(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \sigma \right)},$$

par conséquent, nous avons, sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$, l'approximation asymptotique locale :

$$\begin{aligned} \Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{T}^{(n)}) &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \log \frac{f_\sigma \left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) \right)}{f_\sigma \left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)} + 0_P(1), \\ &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left[\log \left(f_\sigma \left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) \right) - \log \left(f_\sigma \left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \right) \right] + 0_P(1). \end{aligned}$$

où le terme $0_P(1)$ correspond à l'influence de la valeur initiale $X_0^{(n)}$.

3.2.2 Normalité Asymptotique Locale

Afin d'adapter les conditions de Swensen pour traiter le modèle *EXPAR*(1) restreint périodique, nous avons besoin des variables suivantes :

$$\xi_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}) = f_\sigma^{-1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \gamma_{s,r}^{(n)} \right) - 1,$$

$$\zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}) = \frac{1}{2} \phi \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \gamma_{s,r}^{(n)} = \frac{1}{2} \delta_{s,r}^{(n)'} \underline{T}_s^{*(n)}$$

$$\text{où } \delta_{s,r}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \phi \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)},$$

$$\underline{\delta}^{(n)}(\underline{\varphi}) = (\delta_1^{(n)'}, \dots, \delta_S^{(n)'})' \in \mathbb{R}^{2S}$$

$$\text{où } \delta_s^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{m-1} \phi \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)}, \quad s = 1, \dots, S,$$

$$\delta_{s,1}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{m-1} \phi \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) X_{s+rS-1}^{(n)} \text{ et } \delta_{s,2}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{m-1} \phi \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) X_{s+rS-1}^{(n)} \exp \left(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2} \right).$$

(3.2.1)

Considérons la matrice bloc diagonale de dimension $2S \times 2S$:

$$\underline{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \end{pmatrix} = I_{S \times S} \otimes \left(\frac{1}{\sigma^2} \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \right), \quad (3.2.2)$$

où $\Gamma(\underline{\varphi})$ est la matrice de variance du vecteur $\underline{X}_{s-1+rS}^{(n)}$,

$$\Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) = \begin{pmatrix} E(X_0^2) & E(e^{-\gamma X_0^2} X_0^2) \\ E(e^{-\gamma X_0^2} X_0^2) & E(e^{-2\gamma X_0^2} X_0^2) \end{pmatrix}$$

En utilisant les définitions et notations précédentes, on peut formuler les conditions de Swensen adaptées, qui impliquent la propriété LAN .

Proposition 3.2.1 (Merzougui, Dridi et Chadli (2016))

Les conditions adaptées suivantes sont, sous les hypothèses (H1) et (H2), satisfaites :

$$(1) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} E \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\xi_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)^2 = 0,$$

$$(2) \quad \sup_m E \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+rS}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) < \infty,$$

$$(3) \quad \max_s \max_r \left| \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right| = 0_p(1),$$

$$(4) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+rS}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) - \frac{1}{4S} I(f_1) \underline{I}^{*(n)'} \underline{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{I}^{*(n)} = 0_p(1),$$

$$(5) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} E \left[\zeta_{s+rS}^{(n)2}(\underline{\varphi}) I_{\left[\left| \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right| > \frac{1}{2} \right]} / \mathcal{B}_{n, s-1+rS} \right] = 0_p(1),$$

$\mathcal{B}_{n, s-1+rS}$ est la σ -algèbre générée par le passé du processus jusqu'au temps $s-1+rS$,

$$(6) \quad E \left(\zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}) / \mathcal{B}_{n, s-1+rS} \right) = 0_p(1),$$

$$(7) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\left(\xi_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)^2 + 2 \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}) / \mathcal{B}_{n, s-1+rS} \right) = 0_p(1).$$

Preuve. Condition (1) :

En remplaçant $\xi_{s+S\tau}^{(n)}(\varphi)$ et $\zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\varphi)$ par leurs valeurs respectives dans l'expression de l'espérance donnée en (3.2.1), on obtient

$$\begin{aligned} E \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\xi_{s+S\tau}^{(n)}(\varphi) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\varphi) \right)^2 &= \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} E \left(f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) - \gamma_{s,r}^{(n)} \right) - f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left(-\gamma_{s,r}^{(n)} \right) \frac{\dot{f}_\sigma \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right)}{f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right)} \right)^2 f_\sigma^{-1} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right), \\ &= E \left(\sum_{s=1}^S (B_{1,s,m} + B_{2,s,m}) \right), \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} B_{1,s,m} &= \sum_{r=0}^{m-1} EI_{[|X_{s-1+S\tau}| < K]} f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) - \gamma_{s,r}^{(n)} \right) - f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right) - \\ &\quad \frac{1}{2} \left(-\gamma_{s,r}^{(n)} \right) \frac{\dot{f}_\sigma \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right)}{f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right)} \times f_\sigma^{-1} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_{2,s,m} &= \sum_{r=0}^{m-1} EI_{[|X_{s-1+S\tau}| \geq K]} f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) - \gamma_{s,r}^{(n)} \right) - f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right) - \\ &\quad \frac{1}{2} \left(-\gamma_{s,r}^{(n)} \right) \frac{\dot{f}_\sigma \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right)}{f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right)} \times f_\sigma^{-1} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right), \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $B_{1,s,m}$ et $B_{2,s,m}$ converge vers 0, pour tout s fixer, $s = 1, \dots, S$ et pour un nombre réel quelconque K .

$$\begin{aligned} B_{1,s,m} &= \sum_{r=0}^{m-1} \int_{|X_{s-1+S\tau}| < K} \gamma_{s,\tau}^{(n)2} \int_{|X_{s-1+S\tau}| < K} \left(\frac{f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) - \gamma_{s,r}^{(n)} \right) - f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right)}{-\gamma_{s,r}^{(n)}} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \frac{\dot{f}_\sigma \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right)}{f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\varphi) \right)} \right)^2 dZ_{s,r}^{(n)}(\varphi) dG_X, \end{aligned}$$

où : G_X est la distribution des variables aléatoires $X_{s-1+S\tau}$. Pour utiliser le lemme 2 de Swensen (1985), soit $u = -\underline{\tau}_s^{*(n)'} \underline{X}_{s-1+S\tau}^{(n)}$ et $y = Z_{s,r}^{(n)}(\varphi)$, on a

$$\begin{aligned} B_{1,s,m} &\leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}} \gamma_{s,\tau}^{(n)2} \int_{|X_{s-1+S\tau}| < K} \left(\frac{\sqrt{f_\sigma \left(y + \frac{u}{\sqrt{n}} \right)} - \sqrt{f_\sigma(y)}}{\frac{u}{\sqrt{n}}} - \frac{\dot{f}_\sigma(y)}{2\sqrt{f_\sigma(y)}} \right)^2 dy dG_X \\ &\leq C_m(K) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^2. \end{aligned}$$

où :

$$C_m(K) = \int_{|u| < b(K)} \left(\frac{\sqrt{f_\sigma\left(y + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)} - \sqrt{f_\sigma(y)}}{\frac{u}{\sqrt{n}}} - \frac{\dot{f}_\sigma(y)}{2\sqrt{f_\sigma(y)}} \right)^2 dy,$$

et

$$b(K) = K \left| \left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) + \left(\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right) \right|.$$

puisque $\sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2$ est uniformément bornée (prouvé dans la condition 2 ci-dessous) et $\lim_{m \rightarrow \infty} C_m(K) = 0$ (lemme 2 de Swensen (1985)), alors $B_{1,s,m}$ converge vers 0 quand $m \rightarrow \infty$.

Pour $B_{2,s,m}$ on utilise la seconde partie du lemme 2 de Swensen (1985), on a

$$\begin{aligned} B_{2,s,m} &\leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{|X_{s-1+S_r}| \geq K} \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{f_\sigma\left(y - \gamma_{s,r}^{(n)}\right)} - \sqrt{f_\sigma(y)} - \frac{1}{2} \gamma_{s,r}^{(n)} \phi(y) \sqrt{f_\sigma(y)} \right)^2 dy dG_X \\ &\leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{|X_{s-1+S_r}| \geq K} \gamma_{s,r}^{(n)2} I(f) dG_X \\ &= I(f) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(I_{|X_{s-1+S_r}| \geq K} \gamma_{s,r}^{(n)2} \right). \end{aligned}$$

puisque le processus $\{X_{s-1+S_r}, r \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire, en choisissant K assez grand $B_{2,s,m}$ peut être petit uniformément en m .

Condition (2).

Il suffit de montrer que, pour s fixé, $\sup_m E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+S_\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) < \infty$. En utilisant la définition de $\zeta_{s+S_\tau}^{(n)}(\underline{\varphi})$, on obtient

$$E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+S_\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) = \frac{I(f)}{4} \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^2, \text{ pour } s \text{ fixé.}$$

Il faut montrer, pour s fixé que la somme $\sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2$ est uniformément bornée

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2 &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{s+rS-1} + \left(\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right) \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^2) X_{s+rS-1} \right)^2 \\ &\leq \frac{2}{n} \left(\sup_m \left(\left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right)^2 \right) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(X_{s+rS-1}^2 \right) + \sup_m \left(\left(\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right)^2 \right) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\left(e^{-\gamma X_{s+rS-1}^2} X_{s+rS-1} \right)^2 \right) \right) \\ &= \frac{2}{S} \left(\sup_m \left(\left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right)^2 \right) E \left(X_0^2 \right) + \sup_m \left(\left(\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right)^2 \right) E \left(e^{-2\gamma X_0^2} X_0^2 \right) \right). \end{aligned}$$

puisque $\sup_m \left(\left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right)^2 + \left(\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right)^2 \right) < \infty$ et le processus X_{s-1+S_r} est stationnaire,

Il résulte de ce fait que $\sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2$ est uniformément bornée en m .

Condition (3).

On montre que $\max_{\tau} \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right| = \max_{\tau} \left| \frac{1}{2} \phi \left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \underline{I}_s^{*(n)'} X(S\tau + s - 1) \right) \right| = 0_p(1)$, pour s quelconque. Ainsi, on doit prouver que

$$\max_{\tau} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{s+rS-1}^{(n)} \right| = 0_p(1), \quad \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$$

et

$$\max_{\tau} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left(\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right) X_{s+rS-1}^{(n)} \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^2) \right| = 0_p(1), \quad \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} & p \left(\max_r \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{s+rS-1}^{(n)} \right| > \varepsilon \right) \\ & \leq \sum_{r=0}^{m-1} p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{s+rS-1}^{(n)} \right| > \varepsilon \right), \\ & \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \sum_{r=0}^{m-1} E \left\{ \phi^2 \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left(\left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{s+rS-1}^{(n)} \right)^2 I_{\left[\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \phi \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{s+rS-1}^{(n)} \right| > \varepsilon \right]} \right\}, \\ & \leq \frac{1}{S\varepsilon^2} E \left(\phi^2 \left(Z_{s,0}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left(\left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_0^{(n)} \right)^2 I_{\left[\left| \phi \left(Z_{s,0}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_0^{(n)} \right| > \sqrt{n}\varepsilon \right]} \right), \end{aligned}$$

ainsi le coté droit converge vers 0, quand $n \rightarrow \infty$. De la même manière, on peut montrer que la seconde expression converge aussi vers 0.

Condition (4). Nous avons :

$$\sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+Sr}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) = \frac{1}{4n} \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \phi^2 \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \underline{I}_s^{*(n)'} X(Sr + s - 1) X(Sr + s - 1)' \underline{I}_s^{*(n)},$$

en utilisant le fait que le processus est ergodique, nous avons

$$\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \phi^2 \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \underline{X}(Sr + s - 1) \underline{X}(Sr + s - 1)' \rightarrow E(\phi^2) E(\underline{X}(0) \underline{X}(0)'),$$

Où $E(\phi^2) = I(f_\sigma)$ avec $I(f_\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} I(f_1)$.

$$E(\underline{X}(0) \underline{X}(0)') = \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) = \begin{pmatrix} E(X_0^2) & E(e^{-\gamma X_0^2} X_0^2) \\ E(e^{-\gamma X_0^2} X_0^2) & E(e^{-2\gamma X_0^2} X_0^2) \end{pmatrix},$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+S_r}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) &= \frac{1}{4S} \sum_{s=1}^S \underline{\tau}_s^{*(n)'} I(f_1) \left(\frac{1}{\sigma^2} \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \right) \underline{\tau}_s^{*(n)} + 0_p(1), \\ &= \frac{I(f_1)}{4S} \underline{\tau}^{*(n)'} \underline{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{*(n)} + 0_p(1). \end{aligned}$$

Condition (6).

Puisque $Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi})$ est indépendant des variables de $\mathcal{B}_{n,s-1+S\tau}$ et $E\left(\phi\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi})\right)\right) = 0$, alors nous avons $E\left(\zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) / \mathcal{B}_{n,s-1+S\tau}\right) = 0$.

Les preuves des conditions (5) et (7) sont similaire à ceux de Swensen (1985), alors elles sont omises. ■

Proposition 3.2.2 (*Merzougui, Dridi et Chadli* (2016))

Supposons que les hypothèses H1 et H2 sont satisfaites, alors nous avons, sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$, quand $n \rightarrow \infty$ les deux résultats suivants:

$$(i) \quad \Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) = \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) - \frac{1}{2} \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1),$$

où la matrice carrée $\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}) = \frac{I(f_1)}{S} K' \underline{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) K$ et la suite centrale $\Delta_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ est donnée par

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) &= K' \underline{\delta}^{(n)}(\underline{\varphi}), \\ \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) &= \left(\sum_{s=1}^S \delta_{s,1}^{(n)}, \sum_{s=1}^S \delta_{s,2}^{(n)}; \delta_{1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)}; \dots; \delta_{S-1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{S-1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)} \right)'. \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \Delta_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \rightarrow N_{2S} \left(\underline{0}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \right).$$

Preuve.

Puisque les conditions suffisantes de Swensen sont vérifiées, alors en tenant compte du fait que $2 \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) = \underline{\tau}^{(n)'} K' \underline{\delta}^{(n)}(\underline{\varphi}) = \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi})$, la normalité asymptotique locale découle immédiatement du Théorème 1 (Le Cam) (cf., Swensen (1985)). ■

Le corollaire suivant établit les distributions asymptotiques de la suite centrale $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et du logarithme du rapport de vraisemblance $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$ sous l'hypothèse alternative $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$

Corollaire 3.2.1

Supposons que les hypothèses $H1$ et $H2$ sont satisfaites, alors nous avons,

- $i)$ $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ sont contiguës.
- $ii)$ $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \implies N\left(\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma)\right)$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$,
- $iii)$ $\Lambda_f^{(n)}\left(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}\right) \implies N\left(\frac{1}{2} \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)}, \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)}\right)$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$.

Ces résultats sont des conséquences directe de la propriété LAN .

3.3 Test Asymptotique Locale (le plus Stringent)

L'une des conséquences essentielles de la propriété LAN est que la suite des expériences locales :

$$\xi_f^{(n)}(\underline{\varphi}) = \left\{ P_{\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}}; \underline{\tau}^{(n)} \in \mathbb{R}^{2S} / \sup_n \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\tau}^{(n)} < \infty, \underline{\tau}^{(n)} \rightarrow \underline{\tau} \text{ quand } n \rightarrow \infty \right\},$$

converge faiblement vers l'expérience de position Gaussienne de dimension $2S$.

$$E_f = \left\{ N\left(\Gamma^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}, \Gamma^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma)\right), \underline{\tau} \in \mathbb{R}^{2S} \right\}.$$

Ainsi, dans le cas des tests d'hypothèse, si un test $\phi(\Delta)$ est exactement optimal au niveau α dans E_f , alors, la suite de tests $\phi(\Delta^{(n)}(\underline{\varphi}))$ sera localement et asymptotiquement optimale au niveau asymptotique α dans la suite d'expériences originales $\xi_f^{(n)}(\underline{\varphi})$. On rappelle que :

- 1) $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \implies N\left(\underline{0}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma)\right)$, sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$,
- 2) $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \implies N\left(\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma)\right)$, sous $H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau})$.

Considérons la décomposition suivante de la suite centrale $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) = \left(\underline{\Delta}_{I,f}^{(n)'} \quad \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)'} \right)'$ où les vecteurs colonnes $\underline{\Delta}_{I,f}^{(n)}$ et $\underline{\Delta}_{II,f}^{(n)}$ de dimensions 2 et $2(S-1)$, respectivement, sont donnés par :

$$\underline{\Delta}_{I,f}^{(n)} = \left(\sum_{s=1}^S \delta_{s,1}^{(n)}, \sum_{s=1}^S \delta_{s,2}^{(n)} \right)',$$

$$\underline{\Delta}_{II,f}^{(n)} = \left(\delta_{1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)}; \dots; \delta_{S-1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{S-1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)} \right)',$$

et soit la partition en bloc correspondante de la matrice de variance :

$$\Gamma^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) \end{pmatrix},$$

3.3. TEST ASYMPTOTIQUE LOCALE (LE PLUS STRINGENT)

où la matrice, de dimension 2×2 , $\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) = I(f) \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma)$ et la matrice, de dimension $2(S-1) \times 2(S-1)$,

$$\mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) = \frac{I(f)}{S} \begin{pmatrix} 2\Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \dots & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \\ & 2\Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \dots & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \dots & 2\Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \end{pmatrix}.$$

Posons $\eta = \mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \begin{pmatrix} \lambda \\ \underline{h} \end{pmatrix}$, alors le problème de tester l'hypothèse nulle $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ contre l'alternative locale $H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$, i.e., tester un modèle *EXPAR*(1) à temps-invariant, donné par (3.1.1), contre, un modèle *EXPAR*(1) localement S -périodique, donné par (3.1.2), revient, tout simplement, au problème de test lié à l'expérience de position Gaussienne. Plus précisément : tester l'hypothèse nulle

$$H_{0,f} : N(\eta_0, \mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma)), \quad \left(\eta_0 = \mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \begin{pmatrix} \lambda \\ \underline{0} \end{pmatrix} \right),$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_{1,f} : N(\eta, \mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma)), \quad \left(\eta = \mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \begin{pmatrix} \lambda \\ \underline{h} \end{pmatrix}, \underline{h} \neq \underline{0} \right).$$

Suivant LeCam, le test most stringent de niveau α est ϕ qui rejette $H_{0,f}$ si :

$$\begin{aligned} Q_f^{(n)}(\underline{\varphi}) &= \underline{\Delta}_f^{(n)'}(\underline{\varphi}) \left((\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma))^{-1} - \begin{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}), \\ &= \left((\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma))^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)' \left\{ I - (\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma))^{1/2} \begin{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma))^{1/2} \right\} \\ &\quad (\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma))^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) > \chi_{2(S-1), 1-\alpha}^2. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

La distribution de la forme quadratique $Q_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ est obtenue directement à cause du fait que le vecteur colonne $(\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}))^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ est asymptotiquement normalement distribué de moyenne 0 et de matrice de variance I et que la matrice

$$I - (\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma))^{1/2} \begin{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma))^{1/2}$$

est idempotente. En effet, la distribution asymptotique de $Q_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ est alors, comme c'est bien connu, une $\chi^2(2(S-1))$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et de loi khi-deux non centrale avec $2(S-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non centralité ν , $\chi^2(2(S-1); \nu)$, sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ où

$$\begin{aligned} \nu &= (\underline{\lambda}', \underline{h}') \left\{ \Gamma^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) - \Gamma^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) \begin{pmatrix} (\Gamma_{11}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Gamma^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) \right\} \begin{pmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{h} \end{pmatrix} \quad (3.3.2) \\ &= \underline{h}' \Gamma_{22}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{h}. \end{aligned}$$

Pour construire le test l'existence d'estimateurs $\underline{\nu}^{(n)}$ -consistant de $\underline{\Phi}$ est essentiel, on suppose qu'il existe une suite d'estimateurs initiale $\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}$, $\underline{\nu}^{(n)}$ -consistant d'où l'hypothèse suivante. Hypothèse (H3). Une suite d'estimateurs $\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}$ existe, tel que

- (i) $(\underline{\nu}^{(n)})^{-1} (\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)} - \underline{\Phi}) = O_P(1)$, sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$.
- (ii) $\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}$ est localement asymptotiquement discrète; c'est à dire, il existe $K \in N$ tel que indépendamment de $n \in N$, $\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}$ prend au plus K différentes valeurs dans l'ensemble

$$Q_n = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^{2S} : (\underline{\nu}^{(n)})^{-1} |\theta - \underline{\Phi}| \leq c \right\}, c > 0$$

Le grand avantage des estimateurs discrets, est qu'on peut remplacer une suite déterministe $\underline{\varphi}^{(n)}$ par une suite d'estimateurs discrète, ce résultat est formulé dans le lemme 4.4 dans Kreiss (1987), alors on peut restreindre les preuves aux suites non stochastiques.

Nous avons besoin aussi d'établir la linéarité asymptotique suivante de $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi})$.

Lemme 3.3.1

suite centrale $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ satisfait la Linéarité Asymptotique Locale suivante :

$$\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) = -\Gamma_f^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)} + o_p(1)$$

Où $\underline{\varphi}^{(n)} = \underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}$, quand $n \rightarrow \infty$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$.

Preuve.

Pour $s = 1, \dots, S$, on pose

$$T_s^{(n)}(\underline{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left\{ \phi \left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) - E \left(\phi \left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) / \mathcal{B}_{n,s-1+S\tau} \right) \right\} \underline{X}_{s-1+S\tau}^{(n)}.$$

utilise la même démonstration du lemme 6.4 de Kreiss (1987) on obtient

$$T_s^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) - T_s^{(n)}(\underline{\varphi}) = o_p(1),$$

$$\text{et } E \left(\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) / \mathcal{B}_{n,t-1} \right) + \widehat{\Gamma}_f^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) \underline{\tau}^{(n)} = o_p(1),$$

3.3. TEST ASYMPTOTIQUE LOCALE (LE PLUS STRINGENT)

d'où $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) = -\widehat{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1)$,

$$\text{et : } \widehat{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) = \frac{I(f_1)}{S} K' \frac{1}{\widehat{\sigma}^2} \begin{pmatrix} \widehat{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \widehat{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) \end{pmatrix} K,$$

$$\text{avec } \widehat{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left(X_{s-1+S\tau}^{(n)} \right)^2 & \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left(X_{s-1+S\tau}^{(n)2} e^{-\gamma X_{s-1+S\tau}^{(n)2}} \right) \\ \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left(X_{s-1+S\tau}^{(n)2} e^{-\gamma X_{s-1+S\tau}^{(n)2}} \right) & \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left(X_{s-1+S\tau}^{(n)2} e^{-2\gamma X_{s-1+S\tau}^{(n)2}} \right) \end{pmatrix}.$$

En utilisant le fait que notre modèle est stationnaire, on a

$$\widehat{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) = \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) + 0_p(1) \quad \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

ce qui est mène la démonstration. ■

La proposition suivante établie le test localement asymptotiquement optimal pour tester $H_{0,f}$ contre $H_{1,f}$.

Proposition 3.3.1 (Merzougui, Dridi et Chadli (2016))

Sous les conditions H1– H3, le test qui rejette l'hypothèse nulle $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ si :

$$\widehat{Q}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) = \widehat{\underline{\Delta}}_{II,f}^{(n)'}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) \left(\mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) \right)^{-1} \widehat{\underline{\Delta}}_{II,f}^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) > \chi_{2(S-1), 1-\alpha}^2,$$

i) est de niveau asymptotique α (sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$),

ii) est de puissance asymptotique :

$$1 - \mathcal{F} \left(\chi_{1-\alpha}^2; 2(S-1), \underline{h}' \mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) \underline{h} \right), \text{ sous } H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}),$$

où $\mathcal{F}(\chi_{1-\alpha}^2; r, \nu)$ désigne la fonction de répartition de la loi khi deux non centré à r degré de liberté et de paramètre de non centralité ν ,

iii) est un test localement asymptotiquement "most stringent" contre $H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau})$.

Preuve :

A partir de la seconde partie de la Proposition 3.2.2 et la première partie du Corollaire 3.2.1, nous avons, respectivement, $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \xrightarrow{L} N_{2S} \left(0, \mathbf{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)$, sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et

$$\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \xrightarrow{L} N \left(\mathbf{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)}, \mathbf{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \right) \text{ sous } H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}).$$

Ainsi il est facile de vérifier que la forme quadratique

$$Q_f^{(n)}(\underline{\varphi}) = \underline{\Delta}_f^{(n)'}(\underline{\varphi}) \left(\mathbf{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma)^{-1} - \Omega \left(\Omega' \mathbf{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \Omega \right)^{-1} \Omega' \right) \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}),$$

où $\Omega = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, suit asymptotiquement la distribution khi-deux centrale avec $2(S-1)$ degrés de liberté, $\chi^2(2(S-1))$, et la loi khi-deux non centrale avec $2(S-1)$ degrés de liberté et de paramètre de non centralité $\underline{h}' \mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta} \underline{h}$, $\chi^2(2(S-1); \underline{h}' \mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta} \underline{h})$, sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$, respectivement. En tenant compte de la décomposition de la suite centrale $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) = \left(\underline{\Delta}_{I,f}^{(n)'}, \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)'} \right)'$ et la décomposition correspondante de $\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi})$, on peut réécrire la dernière forme quadratique dans la forme

$$\begin{aligned} Q_f^{(n)}(\underline{\varphi}) &= \underline{\Delta}_f^{(n)'}(\underline{\varphi}) \left(\left(\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1} - \begin{pmatrix} \left(\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}), \\ &= \left(\left(\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)' \\ &\quad \left\{ I - \left(\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left(\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{1/2} \right\} \left(\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}). \end{aligned}$$

La distribution de la forme quadratique $Q_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ est obtenue directement à cause du fait que le vecteur colonne $\left(\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}) \right)^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ est asymptotiquement normalement distribué de moyenne 0 et de matrice de variance I et que la matrice

$$I - \left(\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left(\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{1/2} \text{ est idempotente.}$$

En effet, la distribution asymptotique de $Q_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ est alors, comme c'est bien connu, une $\chi^2(2(S-1))$ et $\chi^2(2(S-1); \underline{h}' \mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta}(\underline{\varphi}^{(n)}) \underline{h})$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$, respectivement. Bien sur, ces résultats sont obtenus en supposant que les paramètres $\underline{\varphi}$ sont connus. Néanmoins, on montre qu'ils restent vrais quand ces paramètres sont inconnus. En effet, soit $\underline{\tau}^{(n)} = \left(\underline{\nu}^{(n)} \right)^{-1} \left(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)} - \underline{\Phi} \right)$ pour un estimateur $\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}$ quelconque $\underline{\nu}^{(n)}$ -convergent du paramètre inconnu $\underline{\Phi}$ et en le remplaçant dans l'expression de la linéarité asymptotique donnée par le lemme 3.3.1, on obtient

$$\underline{\Delta}_f^{(n)}\left(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}\right) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) = -\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \left(\underline{\nu}^{(n)} \right)^{-1} \left(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)} - \underline{\Phi} \right) + o_p(1),$$

par conséquent nous avons

$$\left(\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1/2} \left(\underline{\Delta}_f^{(n)}\left(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}\right) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) = \left(\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{1/2} \left(\underline{\nu}^{(n)} \right)^{-1} \left(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)} - \underline{\Phi} \right) + o_p(1),$$

3.3. TEST ASYMPTOTIQUE LOCALE (LE PLUS STRINGENT)

en multipliant le coté gauche par la matrice

$$I - (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma))^{1/2} \begin{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma))^{1/2}$$

et en tenant compte de la continuité de $\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma)$, on obtient, sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ par conséquent sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$

$$\left\{ I - (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}))^{1/2} \begin{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}))^{1/2} \right\} \times \\ (\mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}))^{-1/2} (\underline{\Delta}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi})) = 0_p(1).$$

Qui mène à $Q_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) = Q_f^{(n)}(\underline{\varphi}) + 0_p(1)$, sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ par conséquent sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$.

Ainsi le test statistique $Q_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)})$ suit la $\chi^2(2(S-1))$ centrale et la $\chi^2(2(S-1); h' \mathbf{\Gamma}_{22}^\Delta(\underline{\varphi}^{(n)}) h)$ non centrale sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$, respectivement. Par conséquent, la preuve de *ii*) suit immédiatement. ■

CHAPITRE

4

Estimation du modèle $PEXPAR(1)$ restreint

4.1 Introduction

La construction des estimateurs optimaux a été un problème important dans la théorie d'estimation statistique. Généralement il y a deux approches différentes pour ce problème : l'approche d'échantillon finie et l'approche asymptotique. Dans ce chapitre, nous allons aborder l'estimation du modèle $PEXPAR(1)$ restreint par les deux approches.

Pour le modèle $EXPAR$ restreint le problème de l'estimation se réduit à un problème de régression linéaire simple. Par généralisation de la méthode de Koul et Schick (1997) dans le cas périodique, nous allons obtenir des estimateurs de moindre carrés des paramètres du modèle $PEXPAR(1)$ restreint.

Les résultats les plus connus dans le domaine de l'estimation asymptotique optimale et qui sont principalement dus à Hajek (1970, 1972) et Le Cam (1972) sont le théorème de convolution et le théorème minimax asymptotique local. Dans les problèmes paramétriques, ces théorèmes fournissent une description assez complète de l'estimation optimale dans le cas des grands échantillons. Beran (1977), Koshevnik et Levit (1976), Mullar (1979, 1983, 1985), Pfanzagl et Wefelmeyer (1982), Begun et al (1983) et autres ont étendu l'approche de Hajek-LeCam aux modèles non paramétriques et semi-paramétriques. Le second objectif de ce chapitre est de construire, en utilisant l'approche de Hajek-Le Cam, où la densité des innovations est supposée connue, un estimateur localement et asymptotiquement minimax paramétrique au sens de Fabian et Hannan (1982).

4.2. ESTIMATION DU MODÈLE $PEXPAR(1)$ PAR LA MÉTHODE DE MCO :

Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la prochaine section, on commence par donner les hypothèses techniques qui nous permettent de construire des estimateurs de moindres carrés pour le modèle $PEXPAR(1)$ restreint et on termine par des études de simulation pour prouver leur efficacité. Dans la dernière section, on revoit brièvement les modèles autorégressifs exponentiels périodiques et on donne les notations, définitions et conditions de régularités de bases de ces modèles nécessaires pour l'établissement, en adaptant à notre modèle les conditions de Swensen (1985), de la propriété de Normalité Asymptotique Locale (LAN). En utilisant cette propriété la construction de l'estimateur Minimax Asymptotique Local ($LAME$), dans le sens de Fabian et Hannan (1982), est mise en place.

4.2 Estimation du modèle $PEXPAR(1)$ par la méthode de MCO :

Dans cette section, nous généralisons le résultat de Koul et Schick (1997), nous obtenons des estimateurs de moindres carrés des paramètres du modèle $PEXPAR(1)$ restreint. L'idée est d'estimer le modèle $PEXPAR(1)$ dans chaque saison par la méthode MCO.

4.2.1 Notation et hypothèses

Le processus $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit suivre le modèle Autorégressif exponentiel périodique $PEXPAR(1)$, de période S ($S \geq 2$), s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastiques de la forme :

$$X_t = [\varphi_{t,1} + \varphi_{t,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)] X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.2.1)$$

où $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc, i.e., une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et de variance finie σ_t^2 , avec une densité de probabilité $f_{\sigma_t}(\cdot)$, pas nécessairement gaussienne. Les paramètres Autorégressifs $\varphi_{t,1}$ et $\varphi_{t,2}$, la variance des innovations σ_t^2 sont périodiques, dans le temps, de période S , i.e.,

$$\varphi_{t+kS,j} = \varphi_{t,j} \text{ et } \sigma_{t+kS}^2 = \sigma_t^2, \quad \forall k, t \in \mathbb{Z} \text{ et } j = 1, 2.$$

Soit

$$\underline{\varphi}_i = (\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2})', \quad i = 1, \dots, S \text{ and } \underline{\varphi} = (\underline{\varphi}'_1, \dots, \underline{\varphi}'_S)' \in \mathbb{R}^{3S}.$$

Nous considérons les hypothèses suivantes :

A1 : les paramètres du modèle Autorégressif exponentiel périodique $\underline{\varphi}$ satisfont la condition de stationnarité périodique de (4.2.1). Une condition suffisante est donnée par $|\varphi_{s,1}| < 1$, $\varphi_{s,2} \in \mathbb{R}$, $s = 1, \dots, S$.

A2 : Le processus périodique ergodique $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est tel que $E(X_t^4) < \infty$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.

La condition suffisante de stationnarité périodique est simplement la stationnarité des modèles $EXPAR(1)$ séparé pour chaque saison. Nous rappelons que dans le cas du modèle

$EXPAR(1)$ classique, une condition d'ergodicité géométrique est donnée par Chan et Tong (1985) par $|\varphi_{1,1}| < 1, \varphi_{1,2} \in \mathbb{R}$, et la condition de stationnarité stricte donné par Tjøstheim (1986), est $|\varphi_{1,1}| + |\varphi_{1,2}| < 1$. Ozaki (2012), a montré que la solution de l'équation caractéristique $\lambda - (\varphi_{1,1} + \varphi_{1,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) = 0$ dépend de X_{t-1} et si nous supposons que $\varphi_{1,1}$ et $\varphi_{1,2}$ satisfont la condition tel que la racine $\lambda(X_{t-1})$ reste à l'intérieur du cerle unité alors nous pouvons dire que le modèle $EXPAR(1)$ est ergodique et stationnaire. En fait, si nous supposons que λ_0 est la racine de $\lambda - (\varphi_{1,1} + \varphi_{1,2}) = 0$ et λ_∞ est la racine de $\lambda - \varphi_{1,1} = 0$ alors la racine $\lambda(X_{t-1})$ se déplace entre λ_0 et λ_∞ en fonction de X_{t-1} .

Nous pouvons remplacer l'hypothèse A2 par $E(\varepsilon_t^4) < \infty$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, puisque $E(\varepsilon_t^4) < \infty \implies E(X_t^4) < \infty$.

4.2.2 Estimation

Supposons que $\{X_1, \dots, X_N\}$ sont N observations de (4.2.1), pour simplifier les notations, nous supposons que $N = mS$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $t = S\tau + i$, $i = 1, \dots, S$ et $\tau = 0, 1, \dots, m-1$, définissons la somme conditionnelle des carrés

$$\begin{aligned} L_N(\underline{\varphi}) &= \sum_{i=1}^S L_{i,N}(\underline{\varphi}) \\ &= \sum_{i=1}^S \left(\sum_{\tau=1}^{m-1} \left(X_{S\tau+i} - E_{\underline{\varphi}}(X_{S\tau+i}/B_{S\tau+i-1}) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Où $B_{i-1+S\tau}$ est la σ -algèbre générée par le passé du processus jusqu'au temps $i-1+S\tau$ et $E_{\underline{\varphi}}(\cdot/\cdot)$ est l'espérance conditionnelle en supposant que $\underline{\varphi}$ est le vrai paramètre.

Pour le modèle $PEXP(1)$ restreint et comme le paramètre γ est supposé connu, le modèle (4.2.1) se réduit à une régression linéaire périodique pour laquelle les estimations des moindres carrés de $(\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2})'$ et σ_i sont facilement calculés.

Pour le modèle $PEXP(1)$ restreint

$$L_N(\underline{\varphi}) = \sum_{i=1}^S (L_{i,N}(\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}))$$

où

$$L_{i,N}(\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}) = \sum_{\tau=1}^{m-1} (X_{S\tau+i} - (\varphi_{i,1} + \varphi_{i,2} \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2)) X_{S\tau+i-1})^2.$$

4.2. ESTIMATION DU MODÈLE $PEXP(1)$ PAR LA MÉTHODE DE MCO :

Les estimateurs de MCO du modèle $PEXP(1)$ restreint sont donnés par :

$$\begin{bmatrix} \widehat{\varphi}_{i,1} \\ \widehat{\varphi}_{i,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S_{\tau+i-1}}^2 & \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S_{\tau+i-1}}^2 \exp(-\gamma X_{S_{\tau+i-1}}^2) \\ \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S_{\tau+i-1}}^2 \exp(-\gamma X_{S_{\tau+i-1}}^2) & \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S_{\tau+i-1}}^2 \exp(-2\gamma X_{S_{\tau+i-1}}^2) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S_{\tau+i-1}} X_{S_{\tau+i}} \\ \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S_{\tau+i-1}} X_{S_{\tau+i}} \exp(-\gamma X_{S_{\tau+i-1}}^2) \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

$$\widehat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{m} \sum_{\tau=1}^{m-1} (X_{S_{\tau+i}} - (\widehat{\varphi}_{i,1} + \widehat{\varphi}_{i,2} \exp(-\gamma X_{S_{\tau+i-1}}^2)) X_{S_{\tau+i-1}})^2. \quad (4.2.3)$$

Remarque : Pour i fixé, on obtient l'estimation du modèle $EXPAR(1)$ restreint.

Théoreme :4.2.1(Merzougui, 2016)

Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire satisfaisant (4.2.1), alors les estimateurs des moindres carrés (4.2.2) et (4.2.3) sont fortement consistents quand $m \rightarrow \infty$. Alors

$$\begin{bmatrix} \widehat{\varphi}_{i,1} \\ \widehat{\varphi}_{i,2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_{i,1} \\ \varphi_{i,2} \end{bmatrix} \text{ et } \widehat{\sigma}_i^2 \rightarrow \sigma_i^2.$$

et nous avons

$$\sqrt{m} \begin{bmatrix} \widehat{\varphi}_{i,1} - \varphi_{i,1} \\ \widehat{\varphi}_{i,2} - \varphi_{i,2} \end{bmatrix} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} N \left(\mathbf{0}_2, \sigma_i^2 \begin{pmatrix} E(X_{i-1}^2) & E(X_{i-1}^2 \exp(-\gamma X_{i-1}^2)) \\ E(X_{i-1}^2 \exp(-\gamma X_{i-1}^2)) & E(X_{i-1}^2 \exp(-2\gamma X_{i-1}^2)) \end{pmatrix}^{-1} \right).$$

Preuve :

En remplaçant $X_{S_{\tau+i}}$ dans la formule (4.2.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \widehat{\varphi}_{i,1} \\ \widehat{\varphi}_{i,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 & \sum_{\tau=1}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^2 \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \\ \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) & \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-2\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \end{bmatrix}^{-1} \times \\
 &\begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 & \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \\ \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) & \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-2\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{i,1} \\ \varphi_{i,2} \end{bmatrix} + \\
 &\begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 & \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \\ \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) & \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-2\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \end{bmatrix}^{-1} \times \\
 &\begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1} \varepsilon_{S\tau+i} \\ \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1} \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \varepsilon_{S\tau+i} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \varphi_{i,1} \\ \varphi_{i,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 & \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-\gamma_i X_{S\tau+i-1}^2) \\ \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-\gamma_i Y_{S\tau+i-1}^2) & \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-2\gamma_i X_{S\tau+i-1}^2) \end{bmatrix}^{-1} \times \\
 &\begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1} \varepsilon_{S\tau+i} \\ \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1} \exp(-\gamma_i X_{S\tau+i-1}^2) \varepsilon_{S\tau+i} \end{bmatrix}. \tag{4.2.4}
 \end{aligned}$$

Puisque X_t est ergodique, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{m} \sum_{\tau=1}^{m-1} \varepsilon_{d\tau+i} X_{d\tau+i-1} &\rightarrow E(\varepsilon_i) E(X_{i-1}) = 0 \\
 \frac{1}{m} \sum_{\tau=1}^{m-1} \varepsilon_{d\tau+i} Y_{d\tau+i-1} \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) &\rightarrow E(\varepsilon_i) E(X_{i-1} \exp(-\gamma X_{i-1}^2)) = 0.
 \end{aligned}$$

Alors $\begin{bmatrix} \widehat{\varphi}_{i,1} \\ \widehat{\varphi}_{i,2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_{i,1} \\ \varphi_{i,2} \end{bmatrix}$ quand $m \rightarrow \infty$.

A partir de (4.2.3) nous avons :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\sigma}_i^2 &= \frac{1}{m} \sum_{\tau=1}^{m-1} ((\varphi_{i,1} + \varphi_{i,2} \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2)) X_{S\tau+i-1} + \varepsilon_{d\tau+i} - (\widehat{\varphi}_{i,1} + \widehat{\varphi}_{i,2} \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2)) X_{S\tau+i-1})^2 \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{\tau=1}^{m-1} (\varepsilon_{d\tau+i} - (\widehat{\varphi}_{i,1} - \varphi_{i,1}) X_{S\tau+i-1} - (\widehat{\varphi}_{i,2} - \varphi_{i,2}) X_{S\tau+i-1} \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2))^2.
 \end{aligned}$$

4.2. ESTIMATION DU MODÈLE $PEXP$ AR(1) PAR LA MÉTHODE DE MCO :

A partir des résultats précédents nous avons : quand $m \rightarrow \infty$, $\widehat{\sigma}_i^2 \rightarrow E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$.

ii) de (4.2.4) :

$$\sqrt{m} \begin{bmatrix} \widehat{\varphi}_{i,1} - \varphi_{i,1} \\ \widehat{\varphi}_{i,2} - \varphi_{i,2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{m} \begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 & \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \\ \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) & \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-2\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \end{bmatrix} \right)^{-1} \times$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1} \varepsilon_{S\tau+i} \\ \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1} \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \varepsilon_{S\tau+i} \end{bmatrix} \right)$$

Puisque $\{X_{S\tau+i-1} \varepsilon_{S\tau+i}\}_\tau$ et $\{X_{S\tau+i-1} \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \varepsilon_{S\tau+i}\}_\tau$ sont des suites de différences

de martingales alors nous appliquons la version du théorème centrale limite pour différences de martingales (cf. Hall et Heyde, 1980) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \varepsilon_{S\tau+i}^2 &\rightarrow E(X_{i-1}^2) E(\varepsilon_i^2) \\ \frac{1}{m} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-2\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \varepsilon_{S\tau+i}^2 &\rightarrow E(X_{i-1}^2 \exp(-2\gamma X_{i-1}^2)) E(\varepsilon_i^2) \\ \frac{1}{m} \sum_{\tau=1}^{m-1} X_{S\tau+i-1}^2 \exp(-\gamma X_{S\tau+i-1}^2) \varepsilon_{S\tau+i}^2 &\rightarrow E(X_{i-1}^2 \exp(-\gamma X_{i-1}^2)) E(\varepsilon_i^2). \end{aligned}$$

ce qui accomplit la preuve.

4.2.3 Résultats de simulations :

La performance de l'estimation est montrée par des études de simulation. Nous avons d'abord généré une série temporelle à partir d'un modèle $PEXP$ AR_S(1) de période $S = 2$ et 4 et différentes tailles $n = 100$ à 400. Nous considérons 1000 répétitions monte Carlo et rapportons les estimateurs de moindre carré, leur biais et leur écart-type. Les programmes de simulations sont écrit en R 3.2.2 environnement. La table 4.2.1 donne l'estimation du modèle $PEXP$ AR₂(1) avec les paramètres $\underline{\varphi} = (-0.8, 2, 1; 0.5, -1.5, 0.5)'$ et $\underline{\sigma}^2 = (1.2, 0.8)'$. Les résultats de l'estimation du modèle $PEXP$ AR₄(1) restreint, avec paramètres les $\underline{\varphi} = (-0.8, 2, 1; 0.5, -1.5, 0.5; 0.9, 1.1, 1.2; -0.7, 0.6, 0.9)'$ et $\underline{\sigma}^2 = (1.4, 0.5, 1, 0.8)'$, sont données dans la table 4.2.2.

	$\varphi_{1,1}$	$\varphi_{1,2}$	$\varphi_{2,1}$	$\varphi_{2,2}$
$n = 100$	-.7832597	1.9480968	.4832181	-1.4515904
<i>bias</i>	.01674026	-.05190321	-.01678187	.04840961
<i>sd</i>	.2193881	.7109744	.1459586	.4272648
$n = 200$	-.7882735	1.9821566	.4917329	-1.4782132
<i>bias</i>	.011726509	-.017843385	-.008267116	.021786794
<i>sd</i>	.1428117	.4984303	.1024517	.2918904
$n = 300$	-.7948724	2.0057590	.4952911	-1.4954693
<i>bias</i>	.005127588	.005758960	-.004708899	.004530703
<i>sd</i>	.11032924	.38569394	.07816185	.23628854
$n = 400$	-.7944437	1.9970402	.4957914	-1.4900823
<i>bias</i>	.005556303	-.002959807	-.004208623	.009917719
<i>sd</i>	.10014972	.33758712	.07072278	.20269930

Table 4.2.1 : Résultats d'estimation d'un $PEXPAR_2(1)$ restreint

	$n = 200$	<i>bias</i>	<i>sd</i>	$n = 400$	<i>bias</i>	<i>sd</i>
$\varphi_{1,1}$	-.8034495	-.003449544	.12449191	-.8000518	-.0000518256	.08745148
$\varphi_{1,2}$	2.0288732	.028873224	.61680725	1.9953230	-.0046770448	.40790751
$\varphi_{2,1}$.5018116	.001811557	.14020992	.4969114	-.0030886402	.09422147
$\varphi_{2,2}$	-1.4846044	.015395643	.44480842	-1.5043003	-.0043003421	.30506324
$\varphi_{3,1}$.8969309	-.003069082	.15112932	.9031215	.0031215253	.10312155
$\varphi_{3,2}$	1.0701891	-.029810930	.68493325	1.0932798	-.0067202244	.46149421
$\varphi_{4,1}$	-.6949309	.005069078	.09111024	-.7032747	-.0032746654	.06255057
$\varphi_{4,2}$.5861970	-.013803017	.50632473	.6191498	.0191498187	.35409884

Table 4.2.2 : Résultats d'estimation d'un $PEXPAR_4(1)$ restreint

Maintenant on exprime les résultats de simulation d'une autre manière. Dans la figure 4.2.1, nous donnons les boîtes à moustaches et les diagrammes Quantile-Quantile des erreurs d'estimation du modèle $PEXPAR_2(1)$ précédent avec la longueur $n = 500$.

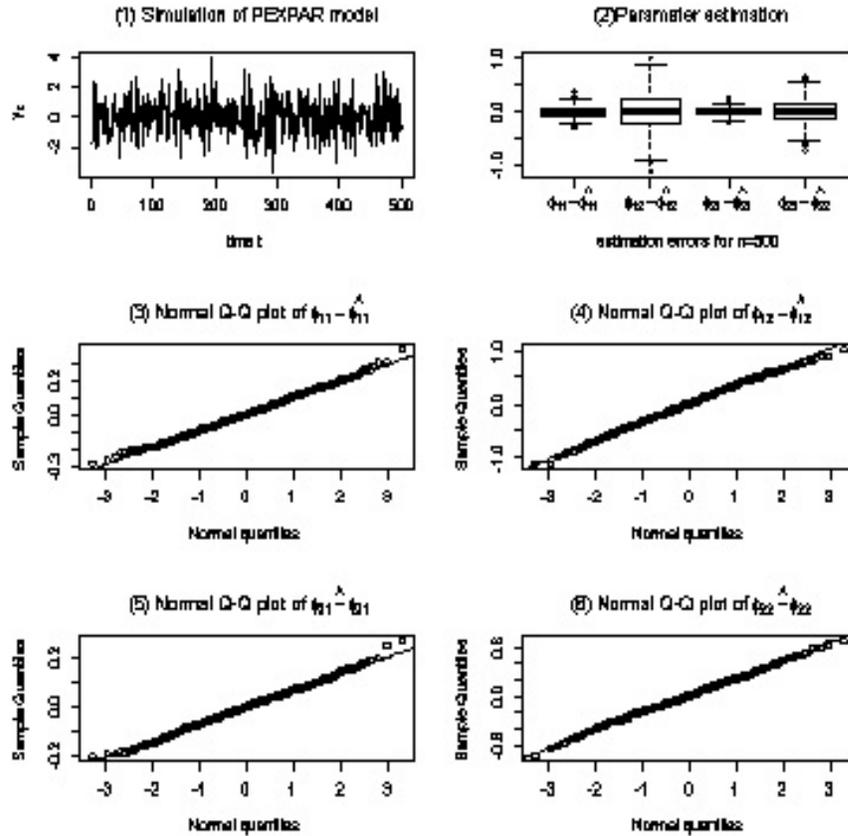


Figure 4.2.1 : Estimation de 1000 répétitions de simulations du modèle $PEXPAR_2(1)$ et $n = 500$.

A partir des tables 4.2.1 et 4.2.2 on peut voir que les paramètres sont bien estimés et que plus la taille de l'échantillon augmente plus l'écart type diminue donc on a la propriété de consistance, et nous remarquons que le biais et l'écart-type de $\varphi_{i,1}$ sont plus petit que ceux de $\varphi_{i,2}$. Cette remarque est confirmée par les boîtes à moustaches où nous avons observé que les erreurs sont plus consistents pour $\varphi_{1,1}$ et $\varphi_{2,1}$ et l'écart est plus large pour $\varphi_{1,2}$ et $\varphi_{2,2}$ et dans tous les cas les erreurs sont centrés en 0. D'autre part les diagrammes Quantile-Quantile montrent que les erreurs sont normales.

4.3 Estimateur Localement et Asymptotiquement Minimax LAM

La construction d'un estimateur localement et asymptotiquement minimax est généralement réalisé par l'établissement d'une borne inférieure pour le risque minimax asymptotique

local, les estimateurs qui atteignent cette borne inférieure seront appelés estimateurs mini-max asymptotique local (*LAM*). Un concept étroitement lié à l'étude de ces estimateurs est la notion de normalité asymptotique locale (*LAN*) des familles des distributions, cette notion joue un rôle important dans la théorie d'estimation asymptotique, plusieurs propriétés importantes des estimateurs telles que la distribution limite, les bornes inférieures et l'efficacité asymptotique, etc découlent de la condition *LAN*.

4.3.1 Normalité Asymptotique Locale

Modèles et Hypothèses

Modèle Autorégressif exponentiel périodique On rappelle qu'un processus univarié $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit suivre le modèle Autorégressif exponentiel périodique d'ordre un restreint *PEXP*(1), s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique de la forme :

$$X_t = [\varphi_{t,1} + \varphi_{t,2} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)] X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.3.1)$$

où $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc, i.e., une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et de variance finie σ_t^2 , avec une densité de probabilité $f_{\sigma_t}(\cdot)$, pas nécessairement gaussienne. Les paramètres Autorégressifs $\varphi_{t,1}$ et $\varphi_{t,2}$, la variance des innovations σ_t^2 sont périodiques, dans le temps, de période S , i.e.,

$$\varphi_{t+kS,j} = \varphi_{t,j} \text{ et } \sigma_{t+kS}^2 = \sigma_t^2, \quad \forall k, t \in \mathbb{Z} \text{ et } j = 1, 2.$$

Notons $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ une suite des hypothèses nulles sous laquelle $\{X_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de réalisations d'un processus satisfaisant le modèle (4.3.1), où $\underline{\varphi} = (\underline{\varphi}'_1; \underline{\varphi}'_2; \dots; \underline{\varphi}'_S)' \in \mathbb{R}^{2S}$, avec $\underline{\varphi}_s = (\varphi_{s,1}, \varphi_{s,2})'$, $s = 1, \dots, S$ et $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ la suite des hypothèses alternatives sous laquelle la suite $\{X_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de réalisations d'un processus satisfaisant le modèle Autorégressif exponentiel périodique (4.3.1), où

$$\underline{\varphi}^{(n)} = \left(\underline{\varphi}_1^{(n)'} , \underline{\varphi}_2^{(n)'} , \dots , \underline{\varphi}_S^{(n)'} \right)' \in \mathbb{R}^{2S},$$

avec

$$\underline{\varphi}_s^{(n)} = \left(\varphi_{s,1} + \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,1}^{(n)}, \varphi_{s,2} + \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,2}^{(n)} \right)' \in \mathbb{R}^2, \quad s = 1, \dots, S,$$

tel que $\sup_n \left(h_{s,1}^{(n)2} + h_{s,2}^{(n)2} \right) < \infty$, $s = 1, \dots, S$. Les quantités $h_{s,1}^{(n)}$ et $h_{s,2}^{(n)}$, $s = 1, \dots, S$, peuvent être interpréter comme des perturbations locales des paramètres $\varphi_{s,1}$ et $\varphi_{s,2}$ respectivement.

Soit $\underline{\mathcal{I}}^{(n)} = \left(\underline{\mathcal{I}}_1^{(n)}, \underline{\mathcal{I}}_2^{(n)}, \dots, \underline{\mathcal{I}}_S^{(n)} \right)'$ où $\underline{\mathcal{I}}_s^{(n)} = \left(h_{s,1}^{(n)}, h_{s,2}^{(n)} \right)'$, $s = 1, 2, \dots, S$, alors nous pouvons facilement réécrire la suite $\{\underline{\varphi}^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ sous la forme suivante :

$$\underline{\varphi}^{(n)} = \underline{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}, \quad \underline{\tau}^{(n)} \in \mathbb{R}^{2S} \text{ tel que } \sup_n \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\tau}^{(n)} < \infty.$$

Hypothèses de régularités techniques A travers cette section, nous faisons les hypothèses suivantes :

(H1). Les paramètres autorégressifs $\underline{\varphi}$ satisfont la condition de stationnarité périodique de (4.3.1). Une condition suffisante est donnée par $|\varphi_{s,1}| < 1, \varphi_{s,2} \in \mathbb{R}, s = 1, \dots, S$.

(H2). La densité des innovations $f(\cdot)$ est supposée satisfaire les conditions suivantes :

(a) $f_{\sigma_t}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et elle est symétrique i.e., $\int x f_{\sigma_t}(x) dx = 0$, avec $\sigma_t^2 = E(\varepsilon_t^2) < \infty$.

(b) $f_{\sigma_t}(\cdot)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue μ : il existe une fonction $\dot{f}_{\sigma_t}(\cdot)$ tel que, pour $-\infty < a < b < \infty$, nous avons $f_{\sigma_t}(b) - f_{\sigma_t}(a) = \int_a^b \dot{f}_{\sigma_t}(x) d\mu(x)$,

(c) L'information de Fisher $I(f_{\sigma_t}) = \int (\phi_f(x))^2 f_{\sigma_t}(x) dx$ est finie, où $\phi_f = -\frac{\dot{f}_{\sigma_t}}{f_{\sigma_t}}$.

On note que les deux conditions (b) et (c) impliquent la différentiabilité en moyenne quadratique de la fonction $f_{\sigma_t}(\cdot)^{\frac{1}{2}}$. i.e.,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-2} \int \left(f_{\sigma_t}^{\frac{1}{2}}(x + \lambda) - f_{\sigma_t}^{\frac{1}{2}}(x) - \lambda \frac{\dot{f}_{\sigma_t}(x)}{f_{\sigma_t}^{\frac{1}{2}}(x)} \right)^2 dx = 0.$$

(voir, Lemme 3, page 191, Hájek (1972) ou Hájek et Šidák (1967)).

Suite de Rapports de Vraisemblance

Soit $\underline{X}^{(n)} = (X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})$ une réalisation de taille finie n d'un processus autorégressif périodiquement corrélé $\{X_t^{(n)}; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant le modèle autorégressif périodique causale (4.3.1) et notons par $X_0^{(n)}$ la valeur initiale dont les densités sont $g_0^{(n)}(x_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \underline{\sigma})$ et $g_0^{(n)}(x_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \underline{\sigma})$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$, respectivement, où $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_S)'$. En plus, on suppose que $g_0^{(n)}(x_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \underline{\sigma}) - g_0^{(n)}(x_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \underline{\sigma})$ converge en probabilité vers 0, quand $\underline{\varphi}^{(n)} \rightarrow \underline{\varphi}$ avec $n \rightarrow \infty$. Supposons, pour simplifier les notations, que la taille de la série temporelle observée n est un multiple de S , i.e., $n = mS$, $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $t = s + rS$, $s = 1, \dots, S$ et $r = 0, 1, \dots, m - 1$. On note par $Z_t^{(n)}(\underline{\varphi})$ et $Z_t^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$, $t \in \mathbb{Z}$, les résidus calculés sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$, respectivement. Alors, nous avons

$$Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) = X_{s+rS}^{(n)} - \left[\varphi_{s,1} + \varphi_{s,2} \exp\left(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}\right) \right] X_{s+rS-1}^{(n)},$$

où il est clair que $Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)$ coïncide avec ε_{s+rS} sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et

$$\begin{aligned} Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) &= X_{s+rS}^{(n)} - \left[\left(\varphi_{s,1} + \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,1}^{(n)} \right) + \left(\varphi_{s,2} + \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,2}^{(n)} \right) \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^2) \right] X_{s+rS-1}^{(n)} \\ &= Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \left[h_{s,1}^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^2) \right] X_{s+rS-1}^{(n)} \\ &= Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}_s^{(n)'} X_{s+rS-1}^{(n)} \\ &= Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \gamma_{s,r}^{(n)}, \end{aligned}$$

Où

$$\underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} = \left(X_{s+rS-1}^{(n)}, X_{s+rS-1}^{(n)} \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^2) \right)' \text{ et } \gamma_{s,r}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}_s^{(n)'} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)}, \quad s = 1, \dots, S.$$

La variance empirique correspondante est donnée par $\hat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \left(Z_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)^2$.

Alors, le logarithme du rapports de vraisemblance, $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) = \Lambda_f^{(n)}\left(\underline{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}\right)$ pour $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ contre $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$, est alors donné, pour $n = mS$, par

$$\Lambda_f^{(n)}\left(\underline{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}\right) = \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \log \frac{f_{\sigma_s}\left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})\right)}{f_{\sigma_s}\left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi})\right)} + \log \frac{g_0^{(n)}\left(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \sigma\right)}{g_0^{(n)}\left(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \sigma\right)},$$

par conséquent, nous avons, sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$, l'approximation asymptotique locale :

$$\begin{aligned} \Lambda_f^{(n)}\left(\underline{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}\right) &= \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \log \frac{f_{\sigma_s}\left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})\right)}{f_{\sigma_s}\left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)\right)} + 0_P(1), \\ &= \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left[\log \left(f_{\sigma_s}\left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \gamma_{s,r}^{(n)}\right) \right) - \log \left(f_{\sigma_s}\left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)\right) \right) \right] + 0_P(1). \end{aligned}$$

où le terme $0_P(1)$ correspond à l'influence de la valeur initiale $X_0^{(n)}$.

Afin d'adapter les conditions de Swensen pour traiter le modèle autorégressif exponentiel périodique PEXPAR(1), nous avons besoin des variables suivantes :

$$\xi_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) = \frac{f_{\sigma_s}^{1/2}\left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \gamma_{s,r}^{(n)}\right)}{f_{\sigma_s}^{1/2}\left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)\right)} - 1,$$

$$s = 1, 2, \dots, S, \quad r = 0, \dots, m-1.$$

et

$$\zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) = \frac{1}{2} \phi_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right) \gamma_{s,r}^{(n)} = \frac{1}{2} \Delta_{s,r}^{(n)'} \underline{T}_s^{(n)}, \quad (4.3.2)$$

où $\phi_{\sigma_s}(\cdot) = -\frac{\dot{f}_{\sigma_s}(\cdot)}{f_{\sigma_s}(\cdot)}$ et $\Delta_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \phi_{\sigma_t} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right) \underline{X}_{s-1+S\tau}$, $s = 1 \dots S$

en plus soit :

$$\begin{aligned} \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) &= (\Delta_1^{(n)'(\underline{\varphi}_1)}, \dots, \Delta_S^{(n)'(\underline{\varphi}_S)}) \in \mathbb{R}^{2S}, \\ \Delta_s^{(n)}(\underline{\varphi}_s) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{m-1} \phi_{\sigma_t} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right) \underline{X}_{s-1+S\tau}, \quad s = 1, \dots, S, \\ \Delta_{s,1}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{m-1} \phi_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) X_{s+rS-1}^{(n)}, \quad \text{et} \\ \Delta_{s,2}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{m-1} \phi_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) X_{s+rS-1}^{(n)} \exp \left(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2} \right). \end{aligned}$$

Notons $\Gamma_s(\underline{\varphi}, \sigma)$ la matrice de variance-covariance de $\underline{X}_{s-1+S\tau}$, $s = 1, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$:

$$\Gamma_s(\underline{\varphi}, \sigma) = \begin{pmatrix} E(X_{s-1}^2) & E(e^{-\gamma X_{s-1}^2} X_{s-1}^2) \\ E(e^{-\gamma X_{s-1}^2} X_{s-1}^2) & E(e^{-2\gamma X_{s-1}^2} X_{s-1}^2) \end{pmatrix}$$

et la matrice carrée bloc diagonal de dimension $2S \times 2S$:

$$\Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_1(\underline{\varphi}, \underline{\sigma})}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma_2(\underline{\varphi}, \underline{\sigma})}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{\Gamma_S(\underline{\varphi}, \underline{\sigma})}{\sigma_S^2} \end{pmatrix}, \quad (4.3.3)$$

Sous les notations précédentes, on peut formuler la proposition suivante qui donne les conditions de Swensen adaptées.

Proposition 4.3.1 (Dridi, Merzougui et Chadli, 2016)

Les conditions adaptées suivantes sont, sous les hypothèses (H1) et (H2), satisfaites :

$$(1) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} E \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\xi_{s+rS}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) - \zeta_{s+rS}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right)^2 = 0,$$

$$(2) \quad \sup_m E \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+rS}^{(n)2} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) < \infty,$$

$$(3) \quad \max_s \max_r \left| \zeta_{s+rS}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right| = 0_p(1),$$

$$(4) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+rS}^{(n)2} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) - \frac{1}{4S} I(f_1) \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) \underline{\tau}^{(n)} = 0_p(1),$$

$$(5) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} E \left[\zeta_{s+rS}^{(n)2} \left(\underline{\varphi}_s \right) I_{\left[\left| \zeta_{s+rS}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right| > \frac{1}{2} \right]} / \mathcal{B}_{n,s-1+rS} \right] = 0_p(1),$$

$\mathcal{B}_{n,s-1+rS}$ is the σ -algebra generated by the past of the process up to time $s-1+rS$,

$$(6) \quad E \left(\zeta_{s+rS}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) / \mathcal{B}_{n,s-1+rS} \right) = 0_p(1).$$

Preuve.

Condition (1).

En remplaçant $\xi_{s+Sr}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right)$ et $\zeta_{s+Sr}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right)$ par leurs valeurs dans l'expression de l'espérance donnée en (4.3.2), on obtient

$$\begin{aligned} E \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\xi_{s+Sr}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) - \zeta_{s+Sr}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right)^2 &= \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} E \left(f_{\sigma_s}^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) - \gamma_{s,r}^{(n)} \right) - f_{\sigma_s}^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left(-\gamma_{s,r}^{(n)} \right) \frac{\dot{f}_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right)}{f_{\sigma_s}^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right)} \right)^2 f_{\sigma_s}^{-1} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) \right), \\ &= E \left(\sum_{s=1}^S (B_{1,s,m} + B_{2,s,m}) \right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} B_{1,s,m} &= \sum_{r=0}^{m-1} E \left\{ I_{\left[\left| X_{s-1+Sr} \right| < K \right]} \left(f_{\sigma_s}^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) - \gamma_{s,r}^{(n)} \right) - f_{\sigma_s}^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{2} \left(-\gamma_{s,r}^{(n)} \right) \frac{\dot{f}_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right)}{f_{\sigma_s}^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right)} \right)^2 \times f_{\sigma_s}^{-1} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) \right\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_{2,s,m} &= \sum_{r=0}^{m-1} E \left\{ I_{\left[\left| X_{s-1+Sr} \right| \geq K \right]} \left(f_{\sigma_s}^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) - \gamma_{s,r}^{(n)} \right) - f_{\sigma_s}^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{2} \left(-\gamma_{s,r}^{(n)} \right) \frac{\dot{f}_{\sigma} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right)}{f_{\sigma}^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right)} \right)^2 \times f_{\sigma_s}^{-1} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) \right\}, \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $B_{1,s,m}$ et $B_{2,s,m}$ converge vers 0, pour tout s fixer, $s = 1, \dots, S$ et pour

un nombre réel quelconque K .

$$B_{1,s,m} = \sum_{r=0}^{m-1} \int_{|X_{s-1+S_r}| < K} \gamma_{s,r}^{(n)2} \int_{|X_{s-1+S_r}| < K} \left(\frac{f_{\sigma_s}^{1/2}(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \gamma_{s,r}^{(n)}) - f_{\sigma_s}^{1/2}(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s))}{-\gamma_{s,r}^{(n)}} - \frac{1}{2} \frac{\dot{f}_{\sigma_s}(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s))}{f_{\sigma_s}^{1/2}(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s))} \right)^2 dZ_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) dG_X,$$

où G_X est la distribution des variables aléatoires X_{s-1+S_r} . Pour utiliser le lemme 2 de Swensen (1985), soit $u = -\underline{I}_s^{*(n)'} \underline{X}_{s-1+S_r}^{(n)}$ et $y = Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\varphi})$, on a

$$\begin{aligned} B_{1,s,m} &\leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}} \gamma_{s,r}^{(n)2} \int_{|X_{s-1+S_r}| < K} \left(\frac{\sqrt{f_{\sigma_s}(y + \frac{u}{\sqrt{n}})} - \sqrt{f_{\sigma_s}(y)}}{\frac{u}{\sqrt{n}}} - \frac{\dot{f}_{\sigma_s}(y)}{2\sqrt{f_{\sigma_s}(y)}} \right)^2 dy dG_X \\ &\leq C_m(K) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2. \end{aligned}$$

Où

$$C_m(K) = \int_{|u| < b(K)} \left(\frac{\sqrt{f_{\sigma_s}(y + \frac{u}{\sqrt{n}})} - \sqrt{f_{\sigma_s}(y)}}{\frac{u}{\sqrt{n}}} - \frac{\dot{f}_{\sigma_s}(y)}{2\sqrt{f_{\sigma_s}(y)}} \right)^2 dy,$$

$$\text{et } b(K) = K \left| h_{s,1}^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right|.$$

Puisque $\sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2$ est uniformément bornée (prouvé dans la condition 2 ci-dessous) et

$\lim_{m \rightarrow \infty} C_m(K) = 0$ (lemme 2 de Swensen (1985)), alors $B_{1,s,m}$ converge vers 0 quand $m \rightarrow \infty$.

Pour $B_{2,s,m}$ on utilise la seconde partie du lemme 2 de Swensen (1985), on a

$$\begin{aligned} B_{2,s,m} &\leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{|X_{s-1+S_r}| \geq K} \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{f_{\sigma_s}(y - \gamma_{s,r}^{(n)})} - \sqrt{f_{\sigma_s}(y)} - \frac{1}{2} \gamma_{s,r}^{(n)} \phi(y) \sqrt{f_{\sigma_s}(y)} \right)^2 dy dG_X \\ &\leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{|X_{s-1+S_r}| \geq K} \gamma_{s,r}^{(n)2} I(f_{\sigma_s}) dG_X \\ &= I(f_{\sigma_s}) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(I_{\{|X_{s-1+S_r}| \geq K\}} \gamma_{s,r}^{(n)2} \right). \end{aligned}$$

puisque le processus $\{X_{s-1+S_r}, r \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire, en choisissant K assez grand $B_{2,s,m}$ peut être petit uniformément en m .

Condition (2). Il suffit de montrer que, pour s fixé, $\sup_m E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+S_\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) < \infty$. En utilisant

la définition de $\zeta_{s+S_\tau}^{(n)}(\underline{\varphi})$, on obtient

$$E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+S_\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) = \frac{I(f)}{4} \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^2, \text{ pour } s \text{ fixé.}$$

Il faut montrer , pour s fixé que la somme $\sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2$ est uniformément bornée

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2 &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{m-1} E \left(h_{s,1}^{(n)} X_{s+rS-1} + h_{s,2}^{(n)} \exp \left(-\gamma X_{s+rS-1}^2 \right) X_{s+rS-1} \right)^2 \\ &\leq \frac{2}{n} \left(\sup_m \left(h_{s,1}^{(n)2} \right) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(X_{s+rS-1}^2 \right) + \sup_m \left(h_{s,2}^{(n)2} \right) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\left(e^{-\gamma X_{s+rS-1}^2} X_{s+rS-1} \right)^2 \right) \right) \\ &= \frac{2}{S} \left(\sup_m \left(h_{s,1}^{(n)2} \right) E \left(X_{s-1}^2 \right) + \sup_m \left(h_{s,1}^{(n)2} \right) E \left(e^{-2\gamma X_{s-1}^2} X_{s-1}^2 \right) \right). \end{aligned}$$

puisque $\sup_m \left(h_{s,1}^{(n)2} + h_{s,2}^{(n)2} \right) < \infty$ et le processus X_{s-1+S_r} est stationnaire, Il résulte de ce fait que $\sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2$ est uniformément bornée en m .

Condition (3).

On montre que $\max_r \left| \zeta_{s+Sr}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right| = \max_r \left| \frac{1}{2} \phi_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) \left(\underline{\tau}_s^{(n)'} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} \right) \right| = 0_p(1)$, pour s quelconque. Ainsi, on doit prouver que

$$\max_r \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) h_{s,1}^{(n)} X_{s+rS-1}^{(n)} \right| = 0_p(1), \text{ sous } H_f^{(n)} \left(\underline{\varphi} \right)$$

et

$$\max_r \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) h_{s,2}^{(n)} X_{s+rS-1}^{(n)} \exp \left(-\gamma X_{s+rS-1}^2 \right) \right| = 0_p(1), \text{ sous } H_f^{(n)} \left(\underline{\varphi} \right)$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} &p \left(\max_r \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) h_{s,1}^{(n)} X_{s+rS-1}^{(n)} \right| > \varepsilon \right) \\ &\leq \sum_{r=0}^{m-1} p \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) h_{s,1}^{(n)} X_{s+rS-1}^{(n)} \right| > \varepsilon \right), \\ &\leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \sum_{r=0}^{m-1} E \left\{ \phi_{\sigma_s}^2 \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) \left(h_{s,1}^{(n)} X_{s+rS-1}^{(n)} \right)^2 I_{\left[\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \phi_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) h_{s,1}^{(n)} X_{s+rS-1}^{(n)} \right| > \varepsilon \right]} \right\}, \\ &\leq \frac{1}{S\varepsilon^2} E \left(\phi_{\sigma_s}^2 \left(Z_{s,0}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) \left(h_{s,1}^{(n)} X_{s-1}^{(n)} \right)^2 I_{\left[\left| \phi_{\sigma_s} \left(Z_{s,0}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) h_{s,1}^{(n)} X_{s-1}^{(n)} \right| > \sqrt{n}\varepsilon \right]} \right), \end{aligned}$$

ainsi le coté droit converge vers 0, quand $n \rightarrow \infty$. De la même manière, on peut montrer que la seconde expression converge aussi vers 0.

Condition (4). Nous avons

$$\sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+Sr}^{(n)2} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) = \frac{1}{4n} \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \phi_{\sigma_s}^2 \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) \underline{\tau}_s^{(n)'} \underline{X}_{Sr+s-1} \underline{X}'_{Sr+s-1} \underline{\tau}_s^{(n)},$$

en utilisant le fait que le processus est ergodique, nous avons

$$\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \phi_{\sigma_s}^2 \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) \underline{X}_{Sr+s-1} \underline{X}'_{Sr+s-1} \rightarrow E(\phi_{\sigma_s}^2) E(\underline{X}_{s-1} \underline{X}'_{s-1}),$$

où $E(\phi_{\sigma_s}^2) = I(f_{\sigma_s})$ avec $I(f_{\sigma_s}) = \frac{1}{\sigma_s^2} I(f_1)$.

$$E(\underline{X}_{s-1} \underline{X}'_{s-1}) = \Gamma_s(\underline{\varphi}, \sigma) = \begin{pmatrix} E(X_{s-1}^2) & E(e^{-\gamma X_{s-1}^2} X_{s-1}^2) \\ E(e^{-\gamma X_{s-1}^2} X_{s-1}^2) & E(e^{-2\gamma X_{s-1}^2} X_{s-1}^2) \end{pmatrix},$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+Sr}^{(n)2} \left(\underline{\varphi}_s \right) \right) &= \frac{1}{4S} \sum_{s=1}^S \underline{\tau}_s^{(n)'} I(f_1) \left(\frac{1}{\sigma_s^2} \Gamma_s(\underline{\varphi}, \sigma) \right) \underline{\tau}_s^{(n)} + o_p(1), \\ &= \frac{I(f_1)}{4S} \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)} + o_p(1). \end{aligned}$$

où $\Gamma(\underline{\phi}, \underline{\sigma})$ est donné par (4.3.3).

Les preuves des conditions (5) et (6) sont similaire à ceux de Swensen (1985), alors elles sont omises.

Où $\widehat{\Gamma}_{n,s}(\widehat{\varphi}_n) = \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \underline{X}(S\tau + s - 1) \underline{X}'(S\tau + s - 1)$ et $\widehat{\Gamma}_n$ est un estimateur consistant de $\Gamma(\underline{\varphi})$.

Proposition 4.3.2

Sous les conditions de régularités (H1) et (H2) et sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$, nous avons, pour $n \rightarrow \infty$:

- 1) $\Lambda_f^{(n)} \left(\underline{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)} \right) = \underline{\tau}^{(n)'} \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) - \frac{I(f_1)}{2S} \underline{\tau}^{(n)'} \mathbf{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)} + o_p(1),$
- 2) $\Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) \rightarrow N_{2S} \left(\underline{0}, \frac{I(f_1)}{S} \mathbf{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) \right).$

Puisque les conditions suffisantes de Swensen sont vérifiées, alors en tenant compte du fait que $2 \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\varphi}) = \underline{\tau}^{(n)'} \Delta^{(n)}(\underline{\varphi})$, la normalité asymptotique locale découle immédiatement du Théorème 1 (Le Cam) (cf., Swensen (1985)).

4.3.2 Existence et construction d'estimateurs LAM

Borne inférieure des estimateurs dans les modèles LAN

Soit l une fonction de perte de \mathbb{R}^{2S} à \mathbb{R}^+ qui satisfait les conditions suivantes :

- (i) $l(x) \geq 0,$

(ii) $l(x) = l(-x), \forall x \in \mathbb{R}^{2S}$

(iii) l'ensemble $\{x/l(x) \leq u\}$ est convexe $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$.

Le théorème qui suit donne une borne inférieure du risque encouru en prenant $\{Z_n\}$ comme une suite d'estimateurs quelconques du paramètre $\underline{\varphi}$.

Théorème 4.3.1 (Fabian et Hannan (1982))

Soit $\{Z_n\}$ une suite d'estimateurs quelconques de $\underline{\varphi}$ et en supposant que la condition LAN $\left(\underline{\varphi}, \frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}), \Delta^{(n)}(\underline{\varphi})\right)$ est vérifié, alors :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{Z_n} \sup_{\|\sqrt{n}(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}_0)\| \leq K} E_{n, \underline{\varphi}} l\{\sqrt{n}(Z_n - \underline{\varphi})\} \geq \int l(x) dN\left(0, \left(\frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma})\right)^{-1}\right). \quad (4.3.4)$$

Définition 4.3.1

Si la condition LAN $\left(\underline{\varphi}, \frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}), \Delta^{(n)}(\underline{\varphi})\right)$ est satisfaite. Toute suite d'estimateurs $\{Z_n\}$ qui atteint la borne inférieure (4.3.4) est dite *Localement Asymptotiquement Minimax* LAM($\underline{\varphi}$).

Définition 4.3.2

La suite d'estimateurs $\{Z_n\}$ est dite $\underline{\varphi}_0$ -régulière, sous LAN $\left(\underline{\varphi}, \frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}), \Delta^{(n)}(\underline{\varphi})\right)$, si.

$$\sqrt{n}(Z_n - \underline{\varphi}) - \left(\frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma})\right)^{-1} \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) = o_p(1)$$

Lemme 4.3.1

Sous les conditions de régularités H1 et H2, nous avons pour toute suite d'estimateurs $\{Z_n\}$, l'implication suivante

$$\sqrt{n}(Z_n - \underline{\varphi}_0) - \left(\frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma})\right)^{-1} \Delta_f^{(n)}(\underline{\varphi}_0) = o(P_{\underline{\varphi}_0})$$

implique que $\{Z_n\}$ est LAM.

Construction d'estimateurs LAM

Afin de construire des estimateurs réguliers l'existence d'estimateurs \sqrt{n} -consistents est essentielle, on suppose que l'on dispose d'un estimateur initial $\hat{\underline{\varphi}}_n$ \sqrt{n} -consistent, d'où les hypothèse suivante :

$$H3 : (i) \sqrt{n}(\hat{\underline{\varphi}}_n - \underline{\varphi}_0) = O(P_{\underline{\varphi}_0}).$$

Pour des raisons techniques, nous utilisons des suites discrètes d'estimateurs $\{\bar{\theta}_n\}$, si $\hat{\theta}^{(n)}$ vérifie (i), $\bar{\theta}_n$ est donnée par un des points de l'ensemble θ :

(ii) $\theta = \frac{1}{\sqrt{n}}(i_1, \dots, i_k)$, $i_j \in Z$ le plus proche de $\widehat{\theta}^{(n)}$. Bien sûr, $\{\bar{\theta}_n\}$ satisfait la propriété plus générale de discrétisation.

Nous avons également besoin d'établir la propriété de linéarité asymptotique suivante de la suite $\Delta^{(n)}(\underline{\varphi})$

Lemma 4.3.2

La suite centrale $\Delta^{(n)}(\underline{\varphi})$ satisfait la propriété de Linéarité Asymptotique Locale suivante :

$$\Delta^{(n)}(\underline{\varphi}^n) - \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) = -\frac{I(f_1)}{S} \mathbf{\Gamma}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) \underline{\tau}^{(n)} + o_p(1),$$

où $\underline{\varphi}^n = \underline{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}$, quand $n \rightarrow \infty$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ et sous $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^n)$.

Proposition 4.3.3 (Dridi, Merzougui et Chadli, 2016)

Si $\{\bar{\varphi}_n\} \in \Theta$ est une suite discrète d'estimateurs \sqrt{n} -consistant pour $\underline{\varphi} \in \Theta$. Alors l'estimateur $\widehat{\underline{\varphi}}_n$ suivant :

$$\widehat{\underline{\varphi}}_n = \bar{\varphi}_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{I(f)}{S} \widehat{\mathbf{\Gamma}}(\bar{\varphi}_n, \underline{\sigma}) \right)^{-1} \Delta_f^{(n)}(\bar{\varphi}_n),$$

est régulier

Où

$$\left(\widehat{\mathbf{\Gamma}}_n(\bar{\varphi}_n, \underline{\sigma}) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\widehat{\Gamma}_{n,1}(\bar{\varphi}_n)}{\widehat{\sigma}_1^2} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\widehat{\Gamma}_{n,2}(\bar{\varphi}_n)}{\widehat{\sigma}_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\widehat{\Gamma}_{n,S}(\bar{\varphi}_n)}{\widehat{\sigma}_S^2} \end{pmatrix}^{-1}$$

tel que $\widehat{\Gamma}_{n,s}(\bar{\varphi}_n) = \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} X(S\tau + s - 1) X(S\tau + s - 1)'$ où $\widehat{\Gamma}_n$ est un estimateur consistant de $\mathbf{\Gamma}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma})$.

Preuve : Nous allons montrer que $\widehat{\underline{\varphi}}_n$ est régulier

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left(\widehat{\underline{\varphi}}_n - \underline{\varphi} \right) - \left(\frac{I(f_1)}{S} \mathbf{\Gamma}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) \right)^{-1} \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) &= \sqrt{n} (\bar{\varphi}_n - \underline{\varphi}) \\ &+ \left[\left(\frac{I(f)}{S} \widehat{\mathbf{\Gamma}}(\bar{\varphi}_n, \underline{\sigma}) \right)^{-1} - \frac{S}{I(f_1)} (\mathbf{\Gamma}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}))^{-1} \right] \Delta_f^{(n)}(\bar{\varphi}_n) \\ &+ \frac{S}{I(f_1)} (\mathbf{\Gamma}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}))^{-1} \left(\Delta_f^{(n)}(\bar{\varphi}_n) - \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \\ &= \sqrt{n} (\bar{\varphi}_n - \underline{\varphi}) + \frac{S}{I(f_1)} (\mathbf{\Gamma}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}))^{-1} \left(\Delta_f^{(n)}(\bar{\varphi}_n) - \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \end{aligned}$$

car $\Delta_f^{(n)}(\bar{\varphi}_n) = O_P(1)$ et $\widehat{\Gamma}(\bar{\varphi}_n, \underline{\sigma}) = \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) + 0_p(1)$.

D'autre part, par le lemme 4.3.2 on a

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\bar{\varphi}_n - \underline{\varphi}) + \frac{S}{I(f_1)} (\Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}))^{-1} \left(\Delta_f^{(n)}(\bar{\varphi}_n) - \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) &= \frac{S}{I(f_1)} (\Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}))^{-1} \times \\ &\left[\frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) \sqrt{n}(\bar{\varphi}_n - \underline{\varphi}) + \Delta_f^{(n)}(\bar{\varphi}_n) - \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) \right] \blacksquare \\ &= 0_p(1). \end{aligned}$$

Conclusion et perspectives

L'étude, réalisée dans cette thèse, porte essentiellement sur des problèmes de l'inférence statistique liée aux paramètres du modèle Autorégressif exponentiel restreint périodique. En particulier, nous avons étudiés les tests et l'estimation dans le cas où la densité des innovations est supposé connue. Donc les procédures obtenues sont hautement paramétrique.

Nous nous sommes intéressés d'une part à la construction d'un test localement et asymptotiquement optimal au sens "most stringent" pour tester la présence, éventuelle, de la périodicité dans un modèle $EXPAR(1)$ restreint, et d'autre part à l'obtention des estimateurs minimax asymptotique locale. En fait, ce travail dégage un résultat important c'est l'introduction, dans la littérature des séries chronologiques, d'un nouveau modèle qui exhibe une dynamique non linéaire périodique : le modèle $EXPAR$ périodique.

On peut généraliser le test de périodicité à d'autre classe de modèles par exemple : les modèles Bilinéaires, les modèles $GARCH$, les modèles $ARMA$ à erreurs $GARCH$, les modèles multivariés...etc.

Dans ce travail, nous avons considérés uniquement le test most stringent paramétrique, alors qu'il serait intéressant de construire des tests semi paramétriques et adaptatifs.

Concernant l'estimation des paramètres du modèle $PEXPAR$ on peut étendre les méthode déjà considérées pour le modèle $EXPAR$ classique ou cas périodique.

Pour les modèles de séries temporelles périodiques : $GARCH$ périodique, Treshold Périodiques et Bilinéaires Périodiques, il y a une abondance de travaux par plusieurs chercheurs, alors que ce travail est un premier pas dans la théorie d'analyse des modèles $EXPAR$ périodiques, il reste, en fait, beaucoup de choses à faire à commencer par généraliser le modèle à l'ordre p , trouver les conditions d'ergodicité, l'existence de solution stationnaire, les critères de choix de l'ordre, les tests de non linéarités, l'estimation des paramètres et la prévision.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aknouche, A. and Bentarzi, M. (2008). On the existence of higher-order moments for periodic GARCH models. *Statistics and Probability Letters*, 78, 3262-3268.
- [2] Aknouche A. and Bibi, A. (2009). Quasi-maximum likelihood estimation of periodic GARCH and periodic ARMA-GARCH processes. *Journal of Time Series Analysis*, 28, 19-46.
- [3] Aknouche, A. and Guerbyenne, H. (2009). On some probabilistic properties of double periodic AR models. *Statistics & Probability Letters*, 79, 407-413.
- [4] Al-Kassam, M. S. and Lane, J. A. (1989). Forecasting Exponential Autoregressive Models Of Order 1. *Journal Of Time Series Analysis*. 10(2) : 95-113.
- [5] Allal, J. and El Melhaoui, S.(2006).Optimal Detection Of Exponential Component. *Journal Of Time Series Analysis* Vol. 27, No. 6, PP(793-810).
- [6] Amiri, E., (2012). Forecasting GDP Growth rate with Nonlinear Models. *1st International Conference on Econometrics Methods and Applications*. ICEKU2012 (25-27).
- [7] Baragona, R., Battaglia, F. and Cuccina, D. (2002) : A note on estimating autoregressive exponential models. *Quaderni di Statistica*, Vol.4, 2002.
- [8] Bengabrit, Y. and Hallin, M.(1998). Locally asymptotically optimal tests for $AR(p)$ against diagonal bilinear dependence. *Journal of Statistical Planning Inference*, 68, 47-63.
- [9] Bentarzi, M. (1995) : "Modèles de séries chronologiques à coefficients périodiques". Thèse de Doctorat. Institut de mathématiques, U.S.T.H.B, Alger, Algérie.

-
- [10] Bentarzi, M. and Hallin, M. (1996). Locally optimal tests against periodic autoregression. *Econometric Theory*, 12, 88-112.
- [11] Bentarzi, M., Guerbyenne, H. and Merzougui, M. (2009). Adaptive Estimation of Causal Periodic Autoregressive Model. *Comm. Simulation Comput.* 38, 1592-1609.
- [12] Bentarzi, M. and Merzougui, M. (2009). Adaptive Test for Periodicity in Self-Exciting Threshold Autoregressive Models. *Comm. Simulation Comput.* 38, 1723-1741.
- [13] Bentarzi, M. and Merzougui, M. (2010). Adaptive Test for Periodicity in Autoregressive Conditional Heteroskedastic Processes. *Comm. Simulation Comput.* 39, 1735-1753.
- [14] Bibi, A. and Gautier, A. (2005). Stationnarité et inférence asymptotique de modèles bilinéaires périodiques, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences - Mathématique* 341, 679-682.
- [15] Bollerslev, T. and Ghysels, E. (1996). Periodic Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, 139-152.
- [16] Chan, K. S. and Tong, H. (1985). On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations. *Advances in applied probability*, 17(3). pp.666-678.
- [17] Dridi, H., Merzougui, M. and Chadli, A. (2016). Efficient estimation in restrictive Periodic EXPAR Models. Submitted.
- [18] El Melhaoui, S. (2003) : Contribution à la résolution de problèmes de tests d'hypothèses paramétriques et non paramétriques dans quelques modèles de séries temporelles. Thèse de Doctorat. Faculté des Sciences, Université Mohammed 1er Oujda.
- [19] Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of variance of U.K. Inflation. *Econometrica*, 50, 987-1008.
- [20] Fabian, V. and Hannan, J. (1982). On estimation and adaptive estimation for locally asymptotically normal families. *Z. Wahrsh. verw. gebiete* 59 459-478.
- [21] Garel, B. and Hallin, M. (1995). Local asymptotic normality of multivariate ARMA processes with a linear trend. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 47, 551-579.
- [22] Ghosh, H., Gurung, B. and Gupta, P. (2015). Fitting EXPAR Models Through the Extended Kalman Filter. *Sankhya : The Indian Journal of Statistics*. Volume 77, Part 1, pp 27-44.
- [23] Gladyshev, E. G. (1961). Periodically correlated random sequences. *Soviet. Math.*, 2, 385-88.
- [24] Haggan, V. and Ozaki, T. (1981), Modeling nonlinear random vibrations using an amplitude-dependent autoregressive time series model. *Biometrik* Vol.68, No.1, PP(96-189).

-
- [25] Hájek, J. (1972). Local Asymptotic Minimax and Admissibility in Estimation. *Proc.Sixth Berkeley Symp.Math.Stat.Proba.1* 175-194. *Univ. California Press*.
- [26] Hájek and Šidák (1967). *Theory of Rank Tests*, Academic Press, New York.
- [27] Hallin, M. and Lotfi, S. (2004). Optimal Detection of Periodicities in Vector Autoregressive Models. *Statistical modeling and analysis for complex data problems*, (page 49-75).
- [28] Ishizuka, K., Kato, H. and Nakatani, T. (2005). Speech signal analysis with exponential autoregressive model, *Proc. the 30th International Conference of Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1, 225-228.
- [29] Ismail, M. A. (2001). Bayesian Analysis of Exponential AR Models. *The Far East Journal of Statistics*, Vol 5, pp. 1-15. (India)
- [30] Katsiampa, P. (2014). A new approach to modelling nonlinear time series : Introducing the ExpAR-ARCH and ExpAR-GARCH models and applications. 4th Student Conference Operational Research. P. 34-51.
- [31] Koul, H. L. and Schick, A. (1996). Adaptive estimation in a Random Coefficient Autoregressive Model. *The Annals of Statistics*, 24, 1025-1052.
- [32] Koul, H. L. and Schick, A.(1997). Efficient estimation in nonlinear autoregressive time series models. *Bernoulli*, 3, 247-277.
- [33] Kreiss, J. P.(1987) On Adaptive Estimation in Stationary ARMA Processes. *The Annals of Statistics*.Vol 15, N°1, 112-133.
- [34] Le Cam, L. (1986). *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*. Springer-Verlag, New York.
- [35] Le Cam,L. (1960) Locally Asymptotically Normal Families of Distributions. *Univ California Publ. Statist.3* 37-98.
- [36] Lewis, P. A. W. and Ray, B. K. (2002). Nonlinear Modelling of Periodic Threshold Autoregressions using TSMARS. *J. Time. Series Anal.* Vol. 23, No. 4, 459-471.
- [37] Linton, O. (1993). Adaptive Estimation in ARCH Models. *Econometric Theory* 9, 539–569.
- [38] Merzougui, M. (2010). Modèles de séries temporelles linéaires et non linéaires périodiques. Thèse de Doctorat. Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B. Alger.
- [39] Merzougui, M., Dridi, H. and Chadli, A. (2016). Test for Periodicity in restrictive EXPAR Models. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 45 :9, 2770-2783.
- [40] Merzougui, M. (2016). Estimation in Periodic restricted *EXPAR*(1) Models. Submitted.

-
- [41] Messaoud, A. (2006). Monitoring Strategies for Chatter Detection In a Drilling Process. Doctoral Thesis. Department of Statistics, University of Dortmund.
- [42] Ozaki, T. (1980). Non-linear time series models for non-linear random vibrations, *Journal of Applied Probability* 17, 84–93.
- [43] Ozaki, T. (1982). The statistical analysis of Perturbed Limit Cycle Processes Using Nonlinear Time Series Models, *Journal of Time Series Analysis*, Vol.3, No.1, PP(29-41).
- [44] Ozaki, T. (1985). Non linear Time Series Models and Dynamical System. *Handbook of statistics*, 5 : 25-83.
- [45] Ozaki, T. (1993). *Non-Gaussian characteristics of exponential autoregressive processes*. In Developments in time-series analysis, Festschrift in honour of prof. Maurice Priestley, T. Subba Rao (ED.), Chapman and Hall, pp. 257-273.
- [46] Priestley, M. B. (1988). *Non-linear and Non-stationary Time Series Analysis*, Academic Press, New York.
- [47] Shao, Q. (2006). Mixture periodic autoregressive time series model. *Statistics & Probability Letters. Volume 76, Issue 6, Pages 609 – 618*.
- [48] Shi, Z. and Aoyama, H. (1997). Estimation of exponential autoregressive time series model by using genetic algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 205(3), 309-321.
- [49] Shi, Z., Tamura, Y., and Ozaki, T. (2001) : Monitoring the stability of BWR oscillation
- [50] by nonlinear time series modeling. *Annals of Nuclear Energy*, 28, 953-966.
- [51] Swensen, A. R.(1985). The Asymptotic Distribution of the likelihood ratio for autoregressive time series with a regression trend. *Journal of Multivariate Analysis*. 16, 54-70.
- [52] Terui, N. and Van Dijk, H. K. (1999). Combined Forecasts from Linear and Nonlinear Time Series Models. *Econometric Institute Report EI-9949/A*.
- [53] Tong, H. (1990). *Nonlinear Time Series : a Dynamical System Approach*. Oxford University Press, Oxford.
- [54] Wald, A. (1943). Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Trans. Amer. Math. Soc.* 54, 426-482.