



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2017

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

ÉTUDE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES TRIDIMENSIONNELS

Option

Systèmes Dynamiques

Par

Asma Djerrai

DIRECTEUR DE THÈSE : Dr. Djellit Ilhem

Prof U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRÉSIDENT :

Dr. Ferchichi Mohamed Reda

M.C.A U.B.M. ANNABA

EXAMINATEURS :

Dr. Hachemi Amel

Prof U.F.A. SETIF

Dr. Abdelouahab Mohamed Salah

M.C.A C.U. MILA

Dr. Bouhroum-Mentri Sabria

M.C.A U.B.M. ANNABA

Dr. Maouni Messaoud

M.C.A Université de SKIKDA

Remerciement

En premier lieu Louange à Allah souverain de l'univers.

Je tiens à remercier Mme Ilhem Djellit mon encadreur pour son orientation, son soutien et sa confiance qui m'ont aidé à mener à bien ce travail.

Je remercie le professeur M.R. Ferchichi pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je suis très honoré que les professeurs A. Hachemi, M.S. Abdelouahab, S. Mentrì et M. Maouni aient accepté de faire partie de mon jury.

Mes remerciements vont à tous les professeurs qui m'ont encouragé dans mes études. Ils m'ont donné le goût du travail et le courage de continuer.

C'est aussi l'occasion pour moi de remercier mes collègues du département de mathématiques et mes amies.

Mes remerciements s'adressent également à ma famille et mes proches pour leur soutien.

Résumé

Notre travail concerne l'étude des transformations tridimensionnelles non inversibles. L'objectif de cette étude est de caractériser leurs propriétés et leurs comportements complexes.

On distingue trois parties majeures. La première est consacrée à l'analyse des spécificités de triopoles qui sont des systèmes dynamiques liés à la finance mathématique. La seconde partie traite une classe particulière de transformations tridimensionnelles et les variétés critiques relatives à ce type de systèmes dynamiques. La troisième concerne l'étude de quelques singularités telles que les plans critiques et l'application de la méthode de réduction par invariance et les conjugués topologiques des transformations 3D à des transformations 2D ou 1D. Divers résultats sont déduits par quelques travaux tels que ceux de Tramontana, d'autres sont nouveaux et donnent une première caractérisation à ce type de systèmes.

Mots-Clés : Systèmes Dynamiques Discrets, Transformation Tridimensionnelle, Attracteur Chaotique, Bifurcations, Point Fixe, Cycles.

Abstract

In this work, we studied three-dimensional discrete dynamical systems, The aim of this thesis is the study of their global properties and their complex dynamical behavior .

We distinguish three important parts. The first one puts in evidence the specificities of triopoly models. In the second part, we study a particular class of tridimensional transformations and their critical manifolds. The third part concerns the study of some singularities as critical planes and the application of the reduction method of 3D systems, based on topological conjugacy and invariance, to 2D and 1D systems.

Some results are deduced from some works of Tramontana, and others are new and can be considered as a good characterization of such systems.

Keywords: Discrete Dynamical Systems, three-dimensional maps, Dynamical Games., Chaotic Attractor , Bifurcations; Fixed point, Cycles.

ملخص

هذه الرسالة تهتم بدراسة التطبيقات ثلاثية الأبعاد الغير قابلة للعكس. الهدف من هذه الدراسة هو معرفة خصائصها وسلوكياتها المعقدة.

نميز ثلاثة أقسام. الأول مكرس لتحليل خصائص التريوبول التي هي أنظمة ديناميكية للرياضيات المالية. القسم الثاني يتناول بالبحث صنفا خاصا من التطبيقات ثلاثية الأبعاد و المنوعات الحرجة لمثل هذا النوع من الأنظمة الديناميكية. أما القسم الثالث فيختص بدراسة بعض الشذوذ مثل المستويات الحرجة وتطبيق طرق الاختصار عن طريق عدم الثبوت و المرافقة الطوبولوجية للتطبيقات ثلاثية الأبعاد إلى تطبيقات ذات بعدين أو بعد واحد.

تم استخلاص عدة نتائج من بعض الدراسات كأعمال ترامنتانا و بعض النتائج جديدة و تعطي خصائص أولى لهذا النوع من الأنظمة.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Généralités Sur les Transformations Ponctuelles	4
1.1 Introduction	4
1.2 Singularités	5
1.3 Multiplicateurs et nature des singularités	6
1.4 Bifurcations fondamentales	8
1.4.1 Bifurcation Fold ou Nœud-col	9
1.4.2 Bifurcation Flip ou doublement de période	9
1.4.3 Bifurcation de Neimark ou Hopf	10
1.5 Structure de bifurcation boîtes-emboîtées	10
1.6 Définitions et propriétés	11
1.6.1 Ensemble absorbant	11
1.6.2 Ensemble invariant	12
1.6.3 Ensemble attractant	12
1.6.4 Bassin d'attraction	12
1.6.5 Courbes invariantes	12
1.6.6 Lignes critiques	13
1.6.7 Chaos	13
1.6.8 Attracteur et attracteur chaotique	14
1.6.9 La conjugaison topologique	14
1.7 Rappels sur les transformations symétriquement découplées	14
1.7.1 Transformation symétriquement découplée	14
1.7.2 Duopole ou la théorie des jeux	17

2	Étude théorique de la transformation triopole	19
2.1	Introduction	19
2.2	Définition et propriétés du système	20
2.3	Étude des points fixes et des cycles	23
2.4	Points fixes et cycles spécifiques	28
2.4.1	La nature des p-points fixes de T	30
2.4.2	La nature des 3-cycles de T	30
2.4.3	Caractéristiques des cycles	31
2.5	Étude de l'espace d'état	31
2.5.1	Plans invariants	31
2.5.2	Variétés critiques	34
2.6	Conclusion.	35
3	Chaos et bifurcations dans une transformation tridimensionnelle	36
3.1	Introduction	36
3.2	Étude de la transformation T avec $b=1$	37
3.2.1	Étude du plan paramétrique	37
3.2.2	Les variétés critiques	38
3.2.3	Étude théorique de la transformation T_1 avec $a_1 = a_2 = a_3 = a$	40
3.3	Bifurcation de la courbe invariante	43
3.4	Conclusion	48
4	Étude qualitative d'une transformation tridimensionnelle	49
4.1	Introduction	49
4.2	Le modèle dynamique	50
4.2.1	Conjugaisons topologiques et propositions	51
4.3	Étude du système sur la ligne invariante	52
4.4	Étude du système dans le plan invariant	54
4.4.1	Les courbes critiques	55
4.4.2	Attracteurs et Bifurcations	56
4.5	Étude du système dans l'espace tridimensionnel	64
4.5.1	Étude de points fixes	64
4.5.2	Attracteurs et multistabilité	65
4.6	Conclusion	67

Conclusion générale	68
Bibliographie	69

Table des figures

1.1	Col (d'après [29])	7
1.2	Nœud (d'après [29])	7
1.3	Foyer (d'après [29])	8
1.4	Structure de bifurcations boites emboîtées (d'après [29])	11
3.1	Diagramme de bifurcation dans le plan (a_1, a_3) avec $a_2 = 1$	38
3.2	attracteur chaotique pour T_1 avec $a = 0.99$	39
3.3	Balayage dans le plan (a, b)	43
3.4	Apparition d'une courbe invariante fermée pour $a = 0.4200$	45
3.5	Oscillations de la courbe invariante fermée $a = 0.4946$	46
3.6	Doublement de la courbe invariante fermée $a = 0.4950$	46
3.7	Oscillations de la courbe invariante fermée $a = 0.500$	47
3.8	Transformation de (CIF) en (AFC) pour $a = 0.5250$	47
3.9	Attracteur chaotique pour $a = 0.5300$	48
4.1	Diagramme de bifurcation dans le plan paramétrique (a, b)	51
4.2	Diagramme de bifurcation de la transformation unidimensionnelle . .	55
4.3	Les lignes critiques	58
4.4	Coexistence de deux courbes invariantes fermées (CIF) (Γ_1, Γ_2)	59
4.5	Changements qualitatifs de deux courbes invariantes fermées (CIF) (Γ_1, Γ_2)	60
4.6	Présence de deux attracteurs chaotiques faibles (AFC)	61
4.7	Attracteur chaotique pour $a = 1.43$	62
4.8	Attracteur chaotique pour $a = 1.46$	63
4.9	Présence de courbes invariantes pour $a = 1.355$	66
4.10	Changement d'allure des courbes	66

4.11 Naissance des attracteurs faiblement chaotiques pour $a = 1.42$	67
--	----

Introduction générale

L'objet de ce mémoire consiste en une étude de la "dynamique complexe" générée par des systèmes non linéaires tridimensionnels régis par des équations aux récurrences appelées également transformations ponctuelles notées T et à leurs applications. Le terme "dynamique complexe" est utilisé pour caractériser tout comportement à caractère non périodique, notamment les régimes chaotiques.

Une classe particulière de transformations ponctuelles joue un rôle important du point de vue fondamental et appliqué : les transformations non inversibles. Elles se différencient des transformations dites inversibles par le fait qu'un point de l'espace de phase ne possède pas un antécédent unique mais peut en avoir zéro, un ou plusieurs suivant la région de l'espace considérée. Du point de vue historique, l'intérêt porté sur les transformations non inversibles s'est accru depuis 1990.

Dans ce mémoire, on distingue trois grandes parties. La première est consacrée à une analyse des spécificités de triopoles qui sont des systèmes dynamiques liés à la finance mathématique. La seconde partie traitera une classe de transformations tridimensionnelles et les variétés critiques relatives à ce type de système dynamique. La troisième et dernière partie concernera l'étude d'une transformation tridimensionnelle en se basant sur les réductions sur les variétés invariantes.

L'étude faite ici concerne principalement les transformations non inversibles tridimensionnelles. Elles se caractérisent en général par la présence dans l'espace de phase de singularités appelées plans critiques (PC). Cette notion a été introduite pour la première fois en 1964 [16, 17]. En dimension deux, les lignes critiques LC limitent dans le plan de phase (ou d'état) des régions Z_i à l'intérieur desquelles un point a un nombre constant i d'antécédents de rang 1. Les LC séparent deux régions Z_i et $Z_{i'}$ avec $i \neq i'$. Du point de vue de la transformation inverse T^{-1} , le plan de phase apparaît alors comme feuilleté. Chaque feuillet est associé à une détermination bien

définie de T^{-1} . Les Lignes Critiques constituent le lieu des points où les différents feuillets se joignent. Depuis 1969, de nombreuses publications ont développé le rôle des Lignes Critiques pour expliquer les bifurcations intervenant sur la structure des bassins d'attraction.[4, 8, 26, 29, 30]. En dimension p , une variété critique de rang 1, est le lieu géométrique de dimension $(p - 1)$ des points de l'espace d'état à p dimensions, ayant au moins deux antécédents de rang 1 confondus. En général, une telle variété divise l'espace d'état en deux régions, chacune d'elles ayant un nombre différent d'antécédents de rang 1.

On appelle bifurcation tout changement qualitatif des propriétés d'une transformation par variation des paramètres la caractérisant. Toutes ces bifurcations ainsi que de nouvelles sont relatées dans [27, 28].

Le rôle des Lignes Critiques est également prépondérant dans l'étude des bifurcations concernant les modifications des zones chaotiques. La définition d'une zone chaotique dérive de la notion de zone absorbante. Une zone absorbante est un ensemble connexe limité par des segments de Lignes Critiques de T^k , $k = 1, 2, \dots$, où une séquence constituée par les itérés successifs de T ne peut pas sortir de cette zone après y être entré. Une zone chaotique est une zone absorbante invariante dont les points sont stables au sens de Poisson et sensibles aux conditions initiales. Les études des propriétés des zones chaotiques ont commencé en 1977 et se sont poursuivies dans [3, 9, 15, 19, 20, 21, 30].

L'intérêt de ces transformations réside dans le fait que de nombreux modèles de systèmes appartenant aux techniques de l'ingénieur font appel à des transformations non inversibles. Des études dans le domaine du contrôle adaptatif ont nécessité l'utilisation des transformations non inversibles.

Ce travail est divisé en quatre chapitres.

Le chapitre 1 : est consacré à la description de quelques généralités concernant les transformations ponctuelles. Nous allons tout d'abord définir un certain nombre d'éléments élémentaires relatifs aux transformations ponctuelles. Différentes notions de singularités peuvent être introduites et caractérisées dans l'espace de phases. Dans l'espace des paramètres, l'étude des bifurcations est considérée c'est-à-dire l'étude des changements qualitatifs du comportement du système lorsque les valeurs des paramètres varient.

Le chapitre 2 : nous mettons en évidence les différentes propriétés des systèmes dynamiques de type triopole. Ce chapitre est consacré à l'étude des points fixes et des cycles, leurs natures, leur nombre et leurs stabilités.

Le chapitre 3 : concerne une classe de transformations tridimensionnelles symétriquement découplées, leur spécificité, et les bifurcations possibles liées à de tels systèmes. Les variétés critiques sont déterminées et illustrées.

Le chapitre 4 : porte sur l'étude spécifique d'une transformation tridimensionnelle qui correspond à un modèle cubique, Nous constatons une richesse de la dynamique pour certaines valeurs du paramètre et nous notons qu'il y a un lien, entre ce qu'on observe dans l'espace tridimensionnel et l'évolution du système dans l'espace bidimensionnel.

Chapitre 1

Généralités Sur les Transformations Ponctuelles

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous définissons les transformations ponctuelles qui seront étudiées dans cette thèse. Après quelques rappels sur les transformations ponctuelles autonomes, différents types de singularités selon leurs stabilité sont définis. Nous donnons les définitions des courbes invariantes, du bassin d'attraction, des variétés critiques et le chaos. Un paragraphe est consacré aux rappels sur les bifurcations classiques dans le plan des paramètres. A la fin du chapitre nous donnons quelques rappels sur les propriétés générales importantes des récurrences symétriquement découplées dont nous faisons états dans le chapitre 2.

Nous nous intéressons aux transformations ponctuelles (ou récurrences) de type autonomes définies par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} X_{n+1} = T(X_n) = F(X_n, \Lambda) \\ X_n \in \mathbb{R}^p, \quad p = 1, 2, \dots, \quad \Lambda \in \mathbb{R}^m, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.1)$$

où $F \in C^k$, $k \geq 1$ par rapport à la variable X et au paramètre Λ , Λ est un vecteur de paramètres réels, $\Lambda \in \mathbb{R}^m$, $m = 1, 2, \dots$, et P est la dimension de (1.1). L'espace $\mathbb{R}^p$ est appelé espace d'état.

Chaque solution de (1.1) formée par une suite de points X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$

où X_0 est appelée condition initiale ; les points X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ forment une trajectoire discrète de phase ou suite itérée ou orbite.

X_{n+1} est appelé conséquent de rang 1 de X_n , c'est à dire : $X_{n+1} = T(X_n)$.

X_n est un antécédent de rang 1 de X_{n+1} noté : $X_n = T^{-1}(X_{n+1})$.

- Si F est continument différentiable et d'inverse unique sur son domaine de définition alors T est un difféomorphisme.
- Si F est non continue ou non différentiable et à inverse unique, T est dite inversible.
- Si F ne possède pas d'inverse unique donc T est appelée un endomorphisme. Dans ce cas on peut introduire la notion de points critiques ou lignes critiques.

1.2 Singularités

Les transformations ponctuelles peuvent posséder différents types de singularités :

Point fixe

Un point fixe de T est un point de $\mathbb{R}^p$ vérifiant :

$$X^* = T(X^*) \quad (1.2)$$

Cycle d'ordre K

C'est la généralisation d'un point fixe lorsqu'on considère la transformation obtenue après k application de T noté T^k . Un cycle d'ordre k (k entier) est un ensemble de k points $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ vérifiant :

$$\begin{cases} X_{i+1} = T(X_i), i = 1, \dots, k-1 \\ X_1 = T(X_k) \\ X_i = T^k(X_i), i = 1, \dots, k \\ X_i \neq T^h(X_i), i = 1, \dots, k, 1 \leq h < k \end{cases} \quad (1.3)$$

Un cycle est caractérisé par l'ordre d'échange de ses k point X_i par applications successives de T , un tel cycle sera désigné par le système (k, j) ; (k représente l'ordre du cycle et j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par applications successives de T).

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre k (appelé aussi point périodique d'ordre k) est un point fixe pour $T^k : T^k(x_i) = x_i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$; et n'est pas un point fixe pour T^h si $h < k$.

1.3 Multiplicateurs et nature des singularités

La notion de multiplicateur permet de caractériser la nature de ces singularités (points fixes et cycles).

Ils sont définis lorsque T est différentiable au point X^* :

1. Lorsque la transformation T est unidimensionnelle :
le multiplicateur d'un point fixe X^* est :

$$S = T'(X^*) \text{ où } T' = \frac{dT}{dX} \quad (1.4)$$

et le multiplicateur d'un cycle d'ordre k , $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*)$ est :

$$S = \prod_{i=1}^k T'(X_i^*) \quad (1.5)$$

Un point fixe ou un cycle est dit attractif ou asymptotiquement stable si $|S| < 1$, il est répulsif ou instable si $|S| > 1$.

2. Lorsque la transformation T est de dimension supérieur à 1 :
les multiplicateurs d'un point fixe X^* ou d'un cycle d'ordre k , $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*)$ sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de $T(X^*)$ ou de $T^k(X_i^*)$, $i = 1, \dots, k$.

- (a) Lorsque la transformation T est bidimensionnelle, un point fixe ou un cycle possède deux multiplicateurs $S_i (i = 1, 2)$; qui sont les valeurs propres de la linéarisation de $T^k (k = 1, 2, \dots)$ en ces singularités.

On distingue alors les singularités suivantes :

Col : S_1 et S_2 sont réels : $|S_1| < 1$ et $|S_2| > 1$.

Un col est toujours instable et on distingue 3 types :

- type 1 si $S_1 > 0$ et $S_2 > 0$;
- type 2 si $S_1 > 0$ et $S_2 < 0$;
- type 3 si $S_1 < 0$ et $S_2 < 0$.

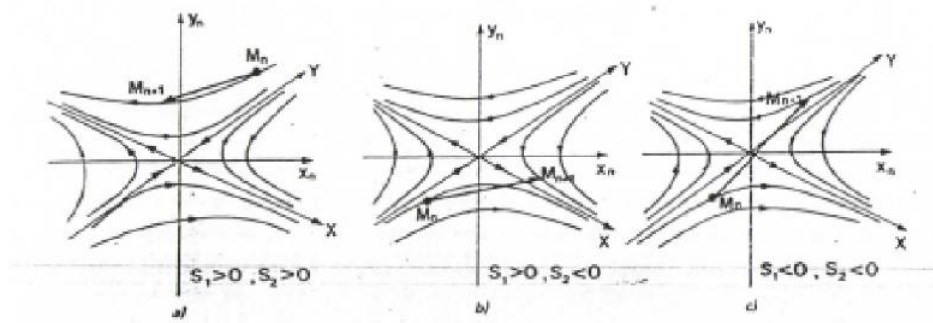


FIGURE 1.1 – Col (d'après [29])

Nœud : S_1 et S_2 sont réels

- stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2$
- instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2$

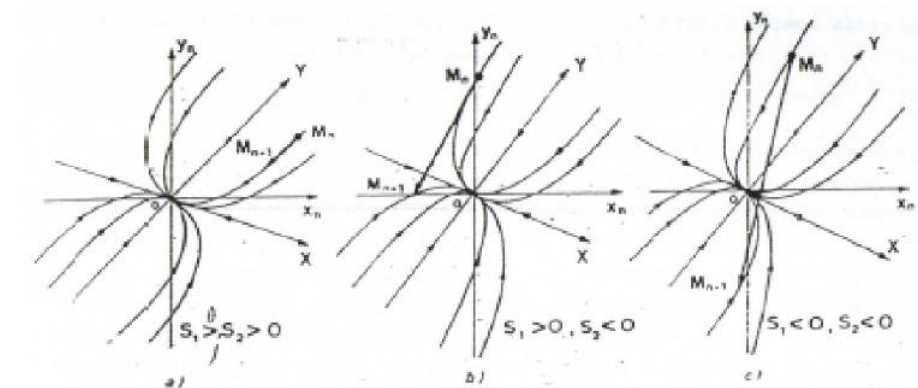


FIGURE 1.2 – Nœud (d'après [29])

Comme le col, le nœud peut être de type 1, 2 ou 3.

Foyer : S_1 et S_2 sont complexes conjugués et $\rho = |S_i|$, $i = 1, 2$

- stable si $\rho < 1$,

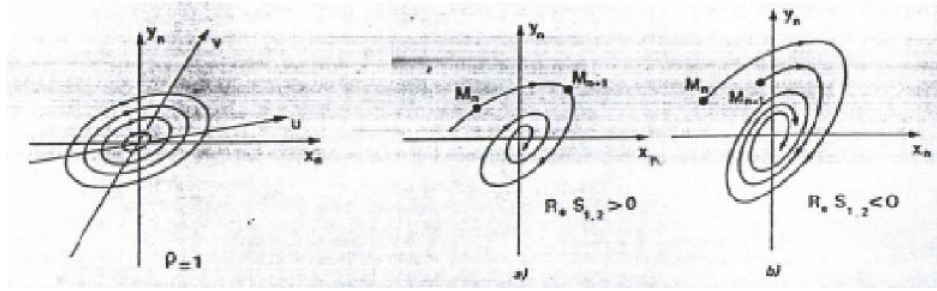


FIGURE 1.3 – Foyer (d'après [29])

- instable si $\rho > 1$
- (b) Lorsque la transformation T est tridimensionnelle, trois multiplicateurs S_i ($i = 1, 2, 3$) sont les valeurs propres de la matrice jacobienne d'un point fixe ou d'un cycle dans $\mathbb{R}^3$.

Col : S_1 et S_2 et S_3 sont réels

- de type 1 si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| > 1$.
- de type 2 si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| < 1$.

Col-foyer : S_1 et S_2 sont complexes conjugués, et S_3 est réel

- de type 1 si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| > 1$,
- de type 2 si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| < 1$,

Nœud : S_1 et S_2 et S_3 sont réels

- stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$
- instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2, 3$

Nœud-foyer : S_1 et S_2 sont complexes conjugués, et S_3 est réel

- stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$,
- instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2, 3$,

1.4 Bifurcations fondamentales

Le terme bifurcation est généralement associé à la notion de changement qualitatif du comportement d'une transformation lorsqu'un paramètre Λ traverse une valeur critique et de manière plus précise c'est l'apparition ou la disparition de nouvelles singularités ou à la modification de la nature de singularités.

Nous distinguons plusieurs bifurcations : bifurcation nœud-col (Fold), bifurcation doublement de période (Flip) et bifurcation de (Neimark-Hoph). Il est important de noter qu'il en existent d'autres. On se restreint aux bifurcations qui serviront de base aux études des chapitres de cette thèse.

Nous considérons la transformation ponctuelle (1.1) de dimension 2 suivante :

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(X_n, \Lambda) \\ F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (1.6)$$

1.4.1 Bifurcation Fold ou Nœud-col

Cette bifurcation intervient lorsque les multiplicateurs sont à valeurs réelles, et que l'un d'eux traverse la valeur +1, et donne naissance à deux cycles d'ordre k , l'un stable, et l'autre instable. Ces deux cycles sont confondus à la bifurcation pour une valeur du paramètre Λ notée $\Lambda_{(k)0}^j$. k représente l'ordre du cycle, j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par T . Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\phi \xleftrightarrow{S=1} N_s^k + C^k \quad (1.7)$$

Le symbole ϕ signifie l'absence de cycles dans le voisinage où apparaît les deux cycles.

N_s^k cycle nœud d'ordre k stable.

C^k cycle col d'ordre k .

1.4.2 Bifurcation Flip ou doublement de période

Lorsque le multiplicateur S avec $|s| < 1$ d'un cycle d'ordre k passe par la valeur $S = -1$. Ce cycle devient instable et donne naissance à un cycle d'ordre $2k$. Cette bifurcation intervient pour une valeur du paramètre Λ notée Λ_k^j .

$$N_i^k \xleftrightarrow{S=-1} N_s^k + N_i^{2k} \quad (1.8)$$

$$N_s^k \xleftrightarrow{S=-1} N_i^k + N_s^{2k} \quad (1.9)$$

N_s^{2k} signifie cycle d'ordre $2k$ stable.

N_i^{2k} signifie cycle d'ordre $2k$ instable.

1.4.3 Bifurcation de Neimark ou Hopf

Lorsque les cycles d'ordre k sont des foyers avec des multiplicateurs complexes ($S_1 = S_2 = \rho e^{i\theta}$) et ρ passe par la valeur +1, Ces cycles changent de stabilité et donnent naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que les cycles d'origine. On le présente par le schéma :

$$F_s^k \xrightarrow{\rho=1} F_i^k + CFI_s \quad (1.10)$$

$$F_s^k \xrightarrow{\rho=1} F_s^k + CFI_i \quad (1.11)$$

F_s^k signifie cycle foyer d'ordre k stable.

F_i^k cycle foyer d'ordre k instable.

CFI_s courbe fermée invariante stable.

CFI_i courbe fermée invariante instable.

1.5 Structure de bifurcation boites-emboîtées

Freigenbaum a découvert une route vers le chaos qui avait été étudiée dans les années 60 par Myrberg . Aujourd'hui, cette route est appelée "cascade de doublement de période 'pour décrire la transition entre un comportement périodique et un attracteur chaotique. Ce scénario est observé par la suite logistique qui est définie par récurrence par une application définie de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui même :

$$X_{n+1} = LX_n = X_n^2 - \lambda, X_n \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.12)$$

La dynamique de cette application présente un comportement très différent selon la valeur du paramètre λ , on la nomme structure de bifurcation "boites emboîtées" car sa première description remonte à 1975 [18, 29] ; Par la suite cette étude a été généralisée pour le cas bidimensionnel [13].

Lorsque le paramètre λ augmente, on obtient une succession de bifurcations présentant une structure fractale, c'est la propriété d'auto similarité, c'est à dire que l'organisation de cet ensemble est semblable à celle de ses parties.

Sur l'axe réel du paramètre λ , il existe un intervalle ou boite $\Omega_1 = [\lambda_{(1)0}, \lambda_1^*]$ qui

contient toutes les valeurs de bifurcations de la transformation logistique L . Ω_1 contient une infinité de boîtes $\Omega_k^j = [\lambda_{(k)0}^j, \lambda_k^{j*}]$, ($j = 1, 2, \dots, p_k$, $k = 3, 4, \dots, p_k \rightarrow 0$ si $k \rightarrow 0$). Chaque boîte est relative à l'ensemble de bifurcations de L^k , les valeurs $\lambda_{(k)0}^j$ correspondant à la naissance de deux cycles d'ordre k par une bifurcation fold, les valeurs λ_k^{j*} correspondant à la fusion du point critique de rang $k+1$, C_k (conséquent de rang $k+1$ de l'extremum), avec le cycle d'ordre k né répulsif.

Chaque boîte Ω_k^j contient une infinité de boîtes $\Omega_{kk_1}^{jj_1}$ (boîtes de rang 2), $j_1 = 1, 2, 3, \dots$, $k_1 = 3, 4, \dots$ qui contient des boîtes $\Omega_{kk_1k_2}^{jj_1j_2}$ (boîtes de rang 3).... Ainsi chaque boîte de rang n contient une infinité de boîtes de rang $n+1$, et toutes ces boîtes possèdent une structure similaire à Ω .

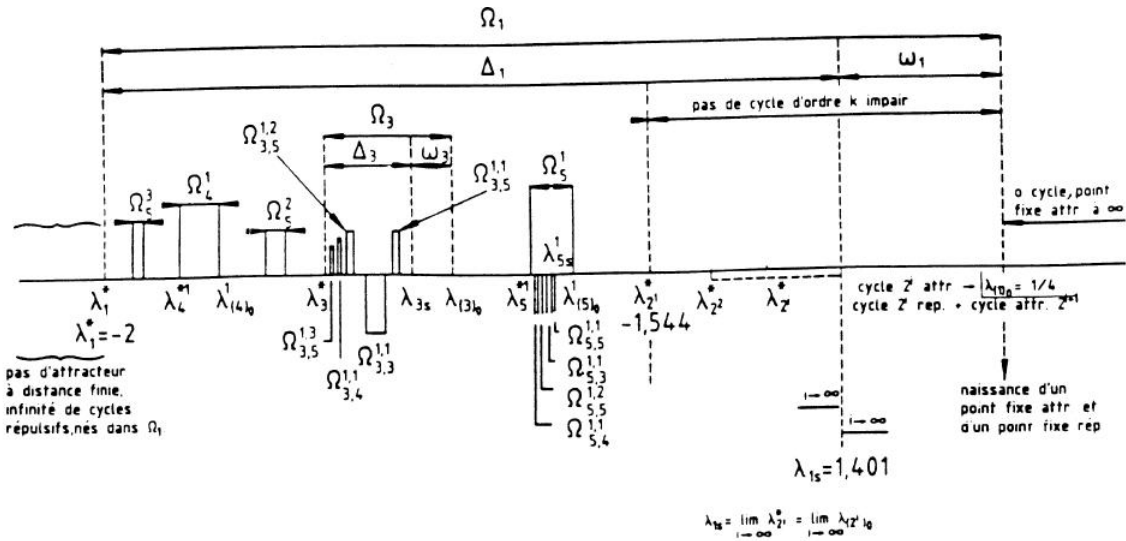


FIGURE 1.4 – Structure de bifurcations boîtes emboîtées (d'après [29])

1.6 Définitions et propriétés

1.6.1 Ensemble absorbant

Un ensemble A du plan de phase est absorbant s'il vérifie :

$$T(A) \subset A \quad (1.13)$$

1.6.2 Ensemble invariant

Un ensemble A est invariant par T s'il vérifie :

$$T(A) = A \quad (1.14)$$

1.6.3 Ensemble attractant

Un ensemble invariant fermé A est attractif s'il existe un voisinage U de A , tel que :

$$T(U) \subset U \text{ et pour tout } x \text{ de } U, T^n(x) \rightarrow A \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

1.6.4 Bassin d'attraction

Le bassin d'attraction $D(A)$ d'un ensemble attractant est l'ensemble ouvert de tous les points x , à partir desquels (1.1) engendre une suite récurrente qui tend asymptotiquement vers l'ensemble attractant :

$$D(A) = \{x \in \mathbb{R}^p : T^n(x) \rightarrow A, n \rightarrow \infty\} \quad (1.15)$$

Un bassin d'attraction D peut être connexe ou non connexe. S'il est non connexe, la plus large partie connexe s'appelle bassin d'attraction immédiat D_0 .

Le domaine $D(A)$ possède une frontière (F) dont les propriétés fondamentales sont :

- (F) est invariante par application de T^k et T^{-k} , $k = 1, 2, \dots$;
- (F) est répulsive pour les suites de points situées dans son voisinage.
- (F) se présente en général comme une séparatrice, mais dans certains cas peut être de nature plus complexe.

1.6.5 Courbes invariantes

Une courbe d'équation $\theta(X) = C$, C étant une constante réelle, est invariante par la transformation T définie par (1.1), si $\theta(X)$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\theta([F(X)]) = \theta(X) \quad (1.16)$$

Dans le cas d'un point fixe (ou d'un cycle d'ordre k) de type col, on note :

W_s les branches de la courbe invariante associées au multiplicateur de module inférieur à 1 et W_u les branches associées au multiplicateur de module supérieur à 1.

1.6.6 Lignes critiques

Dans le cas où T est différentiable, et $X \in \mathbb{R}$, les points critiques sont les conséquents de rang 1, définis par :

$$\frac{dT}{dX}(X) = 0 \quad (1.17)$$

Pour $X \in \mathbb{R}^2$, les lignes critiques LC sont les courbes conséquentes de rang 1 des courbes LC_{-1} définies par le lieu des points pour lesquels le déterminant $J(X)$ du jacobien de T s'annule.

Par conséquent, les courbes critiques de rang k ($k \geq 0$) sont conséquentes du rang k de LC_{-1} notées par :

$$LC_{k-1} = T^k(LC_{-1}) = T^{k-1}(LC) \text{ et } LC_0 = LC$$

Où LC_{-1} est l'ensemble défini comme suit :

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, \det[J(X)] = 0\} \quad (1.18)$$

Dans le cas où T est non différentiable, une courbe LC_{-1} est l'ensemble :

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, T \text{ non différentiable en } X\} \quad (1.19)$$

1.6.7 Chaos

Actuellement il n'y a pas de définition précise du terme Chaos. En fonction de ce contexte, on dit qu'un état est chaotique quand il est non périodique, très irrégulier sur une période.

1.6.8 Attracteur et attracteur chaotique

Attracteur

Un attracteur est un ensemble attractant topologiquement transitif, tel que pour tout ouvert $U, V \subset A$, il existe un entier positif k tel que $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Attracteur chaotique ou étrange

Un sous-ensemble de l'espace des phases est un attracteur chaotique si et seulement si c'est un attracteur contenant une orbite dense, présentant une sensibilité aux conditions initiales et possédant une structure fractale.

1.6.9 La conjugaison topologique

Deux applications $f, g : X \rightarrow X$ de classe C^r sont dites C^k -conjuguées ($k \leq r$), s'il existe un C^k -difféomorphisme $h : X \rightarrow X$, tel que :

$$h \circ f = g \circ h.$$

f et g sont dites topologiquement conjuguées, si elles sont C^0 -conjuguées.

Des applications topologiquement conjuguées sont complètement équivalentes par rapport à leurs dynamiques. Il est alors équivalent d'étudier l'une ou l'autre des fonctions.

1.7 Rappels sur les transformations symétriquement découplées

1.7.1 Transformation symétriquement découplée

D'une manière générale, on parlera de transformation symétriquement découplée [2], de dimension 2, chaque fois qu'on a la forme suivante :

$$T(x, y) = (g(y), f(x)) \in X \times Y \tag{1.20}$$

où $g : Y \rightarrow X$ et $f : X \rightarrow Y$ sont deux fonctions continues.

Pour toute transformation de ce type, il est possible d'associer les deux transformations unidimensionnelles définies par :

$$\psi = g \circ f \text{ et } \phi = f \circ g; \quad (1.21)$$

A l'aide de ces deux fonctions ψ et de ϕ on peut donner les formes des itérées d'ordres pairs et impairs de T :

$$T^{2n}(x, y) \rightarrow (x_{2n} = \psi_n(x_0), y_{2n} = \phi_n(y_0)) \quad (1.22)$$

$$T^{2n+1}(x, y) \rightarrow (x_{2n+1} = g \circ \phi_n(y_0), y_{2n+1} = f \circ \psi_n(x_0)) \quad (1.23)$$

où $n = 1, 2, \dots$, ψ_n et ϕ_n les itérées n -ièmes de ψ et ϕ .

La nature d'un cycle d'une transformation symétriquement découplée dépend de l'ordre k du cycle, car une itérée paire ($k = 2m$) de T est toujours découplée de la forme (1.22) et une itérée impaire ($k = 2m + 1$) est toujours symétriquement découplée de la forme (1.23).

Un point fixe (a_0, b_0) de T est construit à partir de a_0 point fixe de ψ et de b_0 point fixe de ϕ .

Un cycle d'ordre impair $k = 2m + 1$ est tel qu'un de ses points (a, b) soit racine réelle du système :

$$\begin{cases} g \circ \phi_m(b) = a \\ f \circ \psi_m(a) = b \end{cases} \quad (1.24)$$

où a et b ne sont pas racines de T^l pour tout $l < 2m + 1$.

Les relations donnant un point de cycle d'ordre impair peuvent s'écrire sous cette forme :

$$\begin{cases} \psi_{2m+1}(a) = a \\ \phi_{2m+1}(b) = b \end{cases} \quad (1.25)$$

Si f et g sont respectivement continument différentiables en a et b , les multiplicateurs d'un cycle d'ordre ($k = 2m + 1$) sont donnés par :

$$s^2 = g'[\phi_m(b)] \cdot f'[\psi_m(a)] \cdot \phi'_m(b) \cdot \psi'_m(a) \quad (1.26)$$

On peut donc affirmer que les cycles non dégénérés ($s^2 \neq 0.1$) d'ordre ($k = 2m + 1$), sont soit des foyer ($s^2 < 0$), soit des nœuds ($s^2 > 0$). Ils ne peuvent jamais être des cols ($|s_k^1| < 1$ et $|s_k^2| > 1$).

D'une façon similaire, un point (c, d) d'un cycle d'ordre pair ($k = 2m$), est tel que :

$$\begin{cases} \psi_m(c) = c \\ \phi_m(d) = d \end{cases} \quad (1.27)$$

où c et d ne sont pas racines de T^l pour tout $l < 2m$.

Sous les mêmes hypothèses sur f et g , les multiplicateurs sont donnés par :

$$s_k^1 = \psi'_m(c) \text{ et } s_k^2 = \phi'_m(d) \quad (1.28)$$

Ainsi, les cycles d'ordre pair sont toujours soit des nœuds ou des cols mais jamais des foyers.

D'une façon générale donc, tous les cycles sont entièrement définis par ceux des récurrences du premier ordre suivantes :

$$x_{n+2} = \psi(x_n) \text{ et } y_{n+2} = \phi(y_n) \quad (1.29)$$

En ce qui concerne les variétés invariantes de dimension 1, il faut savoir que si (a, b) est un point d'un cycle d'ordre ($k = 2m + 1$) donné, alors on a la relation :

$$\begin{aligned} \text{Si } (x, y) \in (x = a), \text{ alors } T^{2m+1}(x, y) &\in (y = b) \\ \text{Si } (x, y) \in (y = b), \text{ alors } T^{2m+1}(x, y) &\in (x = a) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ce qui se traduit, en d'autres termes, par le fait que les droites $x = a$ et $y = b$ sont des variétés invariantes d'ordre ($k = 2m + 1$). Dans le cas où le cycle est d'ordre pair ($k = 2m$) et qu'un point (c, d) de ce cycle est donné, on a alors :

$$\begin{aligned} \text{Si } (x, y) \in (x = c), \text{ alors } T^{2m}(x, y) &\in (x = c) \\ \text{Si } (x, y) \in (y = d), \text{ alors } T^{2m}(x, y) &\in (y = d) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ainsi, chacune des droites $x = c$ et $y = d$ est une variété invariante unidimensionnelle d'ordre ($k = 2m$).

1.7.2 Duopole ou la théorie des jeux

Considérons la transformation de dimension 2 de la forme suivante :

$$T(x, y) = (g(y), f(x)) \in X \times Y \quad (1.32)$$

où $g : Y \rightarrow X$ et $f : X \rightarrow Y$ sont des fonctions continues.

Notons la condition initiale (x_0, y_0) ,

et la trajectoire

$$\{x_t, y_t\} = T^t(x_0, y_0), \quad t \geq 0$$

où T^t est le $t^{\text{ème}}$ itéré de (1.20).

Nous énonçons quelques propriétés et propositions établies dans [5].

soit

$$F(x) = g \circ f(x), \quad x \in X \quad \text{et} \quad G(y) = f \circ g(y), \quad y \in Y \quad (1.33)$$

Propriété 1.1. $T^{2k}(x, y) = (F^k(x), G^k(y))$ pour chaque entier $k \geq 1$.

Propriété 1.2. Pour chaque $n \geq 1$, les deux fonctions F et G satisfont :

$$g \circ G^n(y) = g \circ f \circ g \circ \dots \circ f \circ g(y) = F^n \circ g(y), \quad (1.34)$$

$$f \circ F^n(x) = f \circ g \circ f \circ \dots \circ g \circ f(x) = G^n \circ f(x), \quad (1.35)$$

Propriété 1.3.

- Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un cycle d'ordre n de F alors : $\{y_1, \dots, y_n\} = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ est un cycle d'ordre n de G .
- Si $\{y_1, \dots, y_n\}$ est un cycle d'ordre n de G alors : $\{x_1, \dots, x_n\} = \{g(y_1), \dots, g(y_n)\}$ est un cycle d'ordre n de F .

Propriété 1.4. Un point de coordonnées (x_i, y_i) est dit point périodique de la transformation T , de période n ssi : $x = x_i$ et $y = y_i$ sont des points périodiques de F et G de période n (si n est impair) ou bien un diviseur de n (si n est pair).

Propriété 1.5. Soit C_x un cycle de la fonction F , C_y est un cycle de la fonction G , donc selon la définition de la transformation T , soit $C_y = f(C_x)$ ou bien $C_x = g(C_y)$.

Proposition 1.1. Soit T la transformation modélisant un duopole, alors :

1. L'image d'un segment horizontal est un segment vertical et vice- versa.
2. Les preimages d'un segment horizontal sont des segments verticaux et vise-versa.

Chapitre 2

Étude théorique de la transformation triopole

2.1 Introduction

En 1838 Augustin Cournot élabore un modèle de base de la théorie d'oligopole ; une des principales branches de l'économie mathématique. Si le nombre de demandeurs (*clients*) est élevé et le nombre d'offreurs (*vendeurs*) est très faible sur un marché on dit qu'on est dans une situation d'oligopole, dans ce cas il n'y a plus de conflits entre offreurs tant que la demande est plus importante que l'offre.

Avec la croissance du rendement, les producteurs tendent naturellement à réaliser des économies d'échelle. Ce système tend vers une situation d'équilibre monopolistique ; et avec des institutions qui protègent le consommateur cet équilibre tendra vers une situation d'oligopole.

La situation la plus simple d'oligopole est le cas de deux producteurs (*duopole*) qu'on appelle le modèle de Cournot-Nash. La théorie d'oligopole connaît des développements considérables sur le plan théorique et plus récemment, sur le plan empirique.

A la fin du premier chapitre nous avons présenté les propriétés du système bidimensionnel de type duopole qui est un type spécifique d'oligopole où seulement deux producteurs existent sur un marché ; c'est la forme la plus communément étudiée d'oligopole en raison de sa simplicité.

En se reportant à ces propriétés, nous traitons également dans ce chapitre le même système en dimension trois (*triopole*). Il s'agit d'une généralisation de l'étude présentées dans [1, 5]. Ce travail est décrit dans [12].

Nous nous intéressons à mettre en évidence les différentes propriétés de la transformation tridimensionnelle. Nous avons consacré un paragraphe à l'étude des points fixes et des cycles, leurs natures, le nombre éventuellement de cycles et leurs stabilités. Nous terminons par une étude détaillée sur les plans invariants et les variétés critiques.

2.2 Définition et propriétés du système

On étudie la transformation générale de dimension 3 de la forme suivante :

$$T(x, y, z) \begin{cases} x_{n+1} = f(y_n) \\ y_{n+1} = g(z_n) \\ z_{n+1} = h(x_n) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $f: Y \rightarrow X$, $g: Z \rightarrow Y$ et $h: X \rightarrow Z$: sont des fonctions continues.

Notons la *condition initiale* (x_0, y_0, z_0) , et la *trajectoire* $\{x_t, y_t, z_t\} = T^t(x_0, y_0, z_0)$, $t \geq 0$, où T^t le $t^{\text{ème}}$ itéré de (2.1).

Les propriétés suivantes sont considérées, et leurs démonstrations sont simples à obtenir.

Propriété 2.1. Pour toute transformation de ce type, il est possible d'associer les trois transformations unidimensionnelles définies par :

$$F = f \circ g \circ h, \quad G = g \circ h \circ f \quad \text{et} \quad H = h \circ f \circ g \quad (2.2)$$

A l'aide de F, G et H on peut donner les formes des itérées de type $3k, 3k+1, 3k+2$

de T :

$$\begin{aligned} T^{3k}(x_0, y_0, z_0) \rightarrow & \left(x_{3k} = F^k(x_0), \right. \\ & \left. y_{3k} = G^k(y_0), z_{3k} = H^k(z_0) \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} T^{3k+1}(x_0, y_0, z_0) \rightarrow & \left(x_{3k+1} = f \circ G^k(y_0), \right. \\ & \left. y_{3k+1} = g \circ H^k(z_0), z_{3k+1} = h \circ F^k(x_0) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} T^{3k+2}(x_0, y_0, z_0) \rightarrow & \left(x_{3k+2} = f \circ g \circ H^k(z_0), \right. \\ & y_{3k+2} = g \circ h \circ F^k(x_0), \\ & \left. z_{3k+2} = h \circ f \circ G^k(y_0) \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $k = 1, 2, \dots$; F^k, G^k et H^k sont les itérées k fois de F, G et H .

Cette propriété indique que la troisième itération de l'application T donne une récurrence dite *découplée*.

Propriété 2.2. Pour chaque $k \geq 1$: les fonctions F, G et H satisfont :

$$f \circ G^k = f \circ g \circ h \circ f \circ \dots \circ g \circ h \circ f = F^k \circ f \quad (2.6)$$

$$g \circ H^k = g \circ h \circ f \circ g \circ \dots \circ h \circ f \circ g = G^k \circ g \quad (2.7)$$

$$h \circ F^k = h \circ f \circ g \circ h \circ \dots \circ f \circ g \circ h = H^k \circ h \quad (2.8)$$

Propriété 2.3. Pour chaque $k \geq 1$: les fonctions F, G et H satisfont :

$$f \circ g \circ H^k = f \circ g \circ h \circ f \circ g \circ \dots \circ h \circ f \circ g = F^k \circ f \circ g \quad (2.9)$$

$$g \circ h \circ F^k = g \circ h \circ f \circ g \circ h \circ \dots \circ f \circ g \circ h = G^k \circ g \circ h \quad (2.10)$$

$$h \circ f \circ G^k = h \circ f \circ g \circ h \circ f \circ \dots \circ g \circ h \circ f = H^k \circ h \circ f \quad (2.11)$$

Propriété 2.4.

- Si $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ est un cycle d'ordre k de F alors :
 $\{z_1, z_2, \dots, z_k\} = \{h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_k)\}$ est un cycle d'ordre k de H .
- Si $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ est un cycle d'ordre k de G alors :
 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \{f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_k)\}$ est un cycle d'ordre k de F .

- Si $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ est un cycle d'ordre k de H alors :
 $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} = \{g(z_1), g(z_2), \dots, g(z_k)\}$ est un cycle d'ordre k de G .
- On appelle ces cycles, des cycles *conjugués*.
- La stabilité est déduite par cette relation :

$$S = \prod_{i=1}^{i=n} F'(x_i) = \prod_{i=1}^{i=n} G'(y_i) = \prod_{i=1}^{i=n} H'(z_i) = \prod_{i=1}^{i=n} f'(y_i) \cdot g'(z_i) \cdot h'(x_i) \quad (2.12)$$

- Ces propriétés montrent que les cycles de la transformation tridimensionnelle T sont liés aux cycles des transformations unidimensionnelles F , G et H .

Propriété 2.5. Si $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont p points fixes de F , alors :

- $z_1 = h(x_1), z_2 = h(x_2), \dots, z_p = h(x_p)$ sont les points fixes conjugués de H
- $y_1 = g(z_1), y_2 = g(z_2), \dots, y_p = g(z_p)$ sont les points fixes conjugués de G .

Propriété 2.6. Un point de coordonnée (x_t, y_t, z_t) est un point périodique de T , de période n , ssi $x = x_t, y = y_t$ et $z = z_t$ sont des points périodiques de F, G et H de période n (si $n = 3k + 1, n = 3k + 2$) ou de période k si $n = 3k$.

Démonstration. Cette propriété est une conséquence des propriétés (2.1), (2.2) et (2.3).

1. Si $n = 3k$:

$$T^{3k}(x_t, y_t, z_t) = (F^k(x_t), G^k(y_t), H^k(z_t)) = (x_t, y_t, z_t)$$

c'est un point périodique de T (ie : $T^{3k}(x_t, y_t, z_t) = (x_t, y_t, z_t)$), ssi x_t, y_t et z_t sont des points périodiques de F, G et H de période k ou un diviseur de k .

2. Si $n = 3k + 1$:

Pour les cycles de T de période $n = 3k + 1$, On a :

$$\begin{aligned} T^{3k+1}(x_t, y_t, z_t) &= (f \circ G^k(y_t), g \circ H^k(z_t), h \circ F^k(x_t)) \\ &= (F^k(f(y_t)), G^k(g(z_t)), H^k(h(x_t))) \\ &= (x_t, y_t, z_t) \end{aligned}$$

Cette relation est vérifiée ssi x_t, y_t et z_t sont des points périodiques de F, G et

H de même période $n = 3k + 1$ car on a :

$$T^{3(3k+1)}(x_t, y_t, z_t) = (F^{3(3k+1)}(x_t), G^{3(3k+1)}(y_t), H^{3(3k+1)}(z_t)) = (x_t, y_t, z_t)$$

ces points (x_t, y_t, z_t) appartiennent aux cycles conjugués.

3. Si $n = 3k + 2$:

Pour les cycles de T de période $n = 3k + 2$, On a :

$$\begin{aligned} T^{3k+2}(x_t, y_t, z_t) &= (f \circ g \circ H^k(z_t), g \circ h \circ F^k(x_t), h \circ f \circ G^k(y_t)) \\ &= (F^k(f(g(z_t))), G^k(g(h(x_t))), H^k(h(f(y_t)))) \\ &= (x_t, y_t, z_t) \end{aligned}$$

Cette relation est vérifiée ssi x_t, y_t et z_t sont des points périodiques de F, G et H de même période $n = 3k + 2$ car on a :

$$T^{3(3k+2)}(x_t, y_t, z_t) = (F^{3(3k+2)}(x_t), G^{3(3k+2)}(y_t), H^{3(3k+2)}(z_t)) = (x_t, y_t, z_t)$$

Propriété 2.7. Soit C_x un cycle de la fonction f , C_y un cycle de la fonction g , et C_z un cycle de la fonction h , en vertu de la définition de la transformation T on a :

$$\text{Soit } C_x = f(C_y) \quad \text{ou} \quad C_y = g(C_z) \quad \text{ou} \quad C_z = f(C_x).$$

2.3 Étude des points fixes et des cycles

Nous étudions dans un premier temps les points fixes, les cycles et leurs stabilités. Nous avons pu voir via les propriétés précédentes que les cycles de T sont liés aux cycles de F, G et H.

Nous pouvons énoncer ces deux propositions :

Proposition 2.1. Un point fixe (A_0, B_0, C_0) de T est obtenu à partir de A_0 : point fixe de F, B_0 : point fixe de G et C_0 : point fixe de H respectivement.

Démonstration.

1. (A_0, B_0, C_0) est un point fixe de $T \stackrel{?}{\Rightarrow} A_0$ point fixe de F , B_0 point fixe de G et C_0 point fixe de H respectivement.

$$\begin{aligned}
 \text{Si } (A_0, B_0, C_0) \text{ est un point fixe de } T &\Rightarrow T \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} f(B_0) \\ g(C_0) \\ h(A_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f(g(C_0)) \\ g(h(A_0)) \\ h(f(B_0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} f(g(h(A_0))) \\ g(h(f(B_0))) \\ h(f(g(C_0))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} F(A_0) \\ G(B_0) \\ H(C_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. A_0 point fixe de F , B_0 point fixe de G et C_0 point fixe de $H \stackrel{?}{\Rightarrow} (A_0, B_0, C_0)$ est un point fixe de T .

$$\begin{aligned}
 \text{Si } \begin{cases} A_0 \text{ point fixe de } F \\ B_0 \text{ point fixe de } G \\ C_0 \text{ point fixe de } H \end{cases} &\Rightarrow \begin{pmatrix} F(A_0) \\ G(B_0) \\ H(C_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} f(g(h(A_0))) \\ g(h(f(B_0))) \\ h(f(g(C_0))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} f[g(h(A_0))] \\ g[h(f(B_0))] \\ h[f(g(C_0))] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\
 \text{Nous posons } \begin{cases} g(h(A_0)) = B_0 \\ h(f(B_0)) = C_0 \\ f(g(C_0)) = A_0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{pmatrix} f(B_0) \\ g(C_0) \\ h(A_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow T \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Proposition 2.2. Un cycle d'ordre n est constitué de points fixes de la transformation T^n .

1. Si l'ordre du cycle est $n = 3k + 1$, on a trois cas :
 - les abscisses x du cycle de T sont les points d'un cycle de F de même ordre.
 - les ordonnées y du cycle de T sont les points d'un cycle de G de même ordre.
 - les coordonnées spatiales z du cycle de T sont des points d'un cycle de H de même ordre.
2. Si l'ordre du cycle est $n = 3k + 2$, alors on a trois cas :
 - les abscisses x du cycle de T sont les points d'un cycle de F de même ordre.
 - les ordonnées y du cycle de T sont les points d'un cycle de G de même ordre.
 - les coordonnées spatiales z du cycle de T sont des points d'un cycle de H de même ordre.
3. Si l'ordre du cycle est $n = 3k$:
 les abscisses x , les ordonnées y et les coordonnées spatiales z de ce cycle sont en même temps les points d'un cycle d'ordre k de F , G et H respectivement.

Démonstration. En effet :

1. Un cycle d'ordre $n = 3k + 1$ est la solution du système :

$$\begin{cases} x = f \circ G^k(y) \\ y = g \circ H^k(z) \\ z = h \circ F^k(x) \end{cases} \quad (2.13)$$

Si on remplace y et z dans la première équation et on utilise la propriété (2.2), on obtient $x = F^{3k+1}(x)$ donc x est un point fixe de F^{3k+1} donc x est un point d'un cycle d'ordre $(3k + 1)$ de F alors $h(x)$ est un point d'un cycle d'ordre $3k + 1$ de H et $g(z)$ est un points d'un cycle d'ordre $3k + 1$ de G .

2. Un cycle d'ordre $n = 3k + 2$ est la solution du système :

$$\begin{cases} x = f \circ g \circ H^k(z) \\ y = g \circ h \circ F^k(x) \\ z = h \circ f \circ G^k(y) \end{cases} \quad (2.14)$$

Si on remplace y et z dans la première équation et on utilise la propriété (2.3), on obtient $x = F^{3k+2}(x)$ donc x est un point fixe de F^{3k+2} donc x est un point d'un cycle d'ordre $(3k+2)$ de F alors $h(x)$ est un point d'un cycle d'ordre $(3k+2)$ de H et $g(z)$ est un points d'un cycle d'ordre $(3k+2)$ de G .

3. Un cycle d'ordre $n = 3k$ est la solution du système :

$$\begin{cases} x = F^k(x) \\ y = G^k(y) \\ z = H^k(z) \end{cases} \quad (2.15)$$

Donc x est un point fixe de F^k , y est un point fixe de G^k , z est un point fixe de H^k .

Soit $x_0(A, B, C)$ un point fixe de T . La matrice jacobienne de T au point x_0 est :

$$J(A, B, C) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\delta f(B)}{\delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta g(C)}{\delta z} \\ \frac{\delta h(A)}{\delta x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

L'équation caractéristique de $J(A, B, C)$ étant :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \frac{\delta f(B)}{\delta y} \cdot \frac{\delta g(C)}{\delta z} \cdot \frac{\delta h(A)}{\delta x} = 0 \quad (2.17)$$

Nous allons déterminer de façon analytique les points fixes et certains cycles du système T de dimension trois selon la classification de [Bar 85]. Considérons les 3 cas possibles :

1er cas : Un cycle d'ordre $n = 3k$ est tel qu'un de ses points (A, B, C) soit racine réelle du système :

$$\begin{cases} F^k(A) = A \\ G^k(B) = B \\ H^k(C) = C \end{cases} \quad (2.18)$$

où A, B et C ne sont pas racines de T^i pour tout $i < 3k$.

Si f , g et h sont respectivement continument différentiables en A, B et C . La matrice jacobienne est donnée par :

$$J^{3k}(A, B, C) = \begin{bmatrix} \frac{\delta F^k(A)}{\delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta G^k(B)}{\delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta H^k(C)}{\delta z} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Les valeurs propres sont réelles :

$$\lambda_1 = \frac{\delta F^k(A)}{\delta x}, \quad \lambda_2 = \frac{\delta G^k(B)}{\delta y} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{\delta H^k(C)}{\delta z} \quad (2.20)$$

Ainsi, les cycles d'ordre $n = 3k$ ($k \geq 1$) sont toujours de type nœud ou col.

2ème cas : Un cycle d'ordre $n = 3k + 1$ sont tel qu'un de ses points (A, B, C) vérifie :

$$\begin{cases} f \circ G^k(B) = A \\ g \circ H^k(C) = B \\ h \circ F^k(A) = C \end{cases} \quad (2.21)$$

La matrice jacobienne s'écrit dans ce cas

$$J^{3k+1}(A, B, C) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\delta G^k(B)}{\delta y} \cdot \frac{\delta f[G^k(B)]}{\delta y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta H^k(C)}{\delta z} \cdot \frac{\delta g[H^k(C)]}{\delta z} \\ \frac{\delta F^k(A)}{\delta x} \cdot \frac{\delta h[F^k(A)]}{\delta x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

L'équation des valeurs propres est :

$$\lambda^3 + \frac{\delta f[G^k(B)]}{\delta y} \cdot \frac{\delta g[H^k(C)]}{\delta z} \cdot \frac{\delta h[F^k(A)]}{\delta x} + \frac{\delta G^k(B)}{\delta y} \cdot \frac{\delta H^k(C)}{\delta z} \cdot \frac{\delta F^k(A)}{\delta x} = 0 \quad (2.23)$$

On a trois solutions : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ complexes conjuguées. Par conséquent ; les cycles d'ordre $3k + 1$ sont soit des nœuds-foyers, soit des cols-foyers.

3ème cas : Un cycle d'ordre $n = 3k + 2$ est tel qu'un de ses points (A,B,C) verifie :

$$\begin{cases} f \circ g \circ H^k(C) = A \\ g \circ h \circ F^k(A) = B \\ h \circ f \circ G^k(B) = C \end{cases} \quad (2.24)$$

La matrice jacobienne s'écrit dans ce cas

$$J^{3k+1}(A, B, C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\delta f[g[H^k(C)]]}{\delta z} \cdot \frac{\delta g[H^k(C)]}{\delta z} \cdot \frac{\delta H^k(C)}{\delta z} \\ \frac{\delta g[h[F^k(A)]]}{\delta x} \cdot \frac{\delta h[F^k(A)]}{\delta x} \cdot \frac{\delta F^k(A)}{\delta x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta h[f[G^k(B)]]}{\delta y} \cdot \frac{\delta f[G^k(B)]}{\delta y} \cdot \frac{\delta G^k(B)}{\delta y} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

L'équation des valeurs propres est :

$$\lambda^3 + \frac{\delta f[g[H^k(C)]]}{\delta z} \cdot \frac{\delta g[h[F^k(A)]]}{\delta x} \cdot \frac{\delta h[f[G^k(B)]]}{\delta y} \cdot \frac{\delta g[H^k(C)]}{\delta z} \cdot \frac{\delta h[F^k(A)]}{\delta x} \cdot \frac{\delta f[G^k(B)]}{\delta y} \cdot \frac{\delta H^k(C)}{\delta z} \cdot \frac{\delta F^k(A)}{\delta x} \cdot \frac{\delta G^k(B)}{\delta y} = 0 \quad (2.26)$$

Nous avons donc trois solutions : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ complexes conjuguées.
Les cycles d'ordre $3k + 2$ sont soit des nœuds-foyers, soit des cols-foyers.

2.4 Points fixes et cycles spécifiques

Si $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont p points fixes de F , alors : Parmi les p^3 points du produit cartésien $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \times \{y_1, y_2, \dots, y_p\} \times \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$, p points sont des points fixes de T et sont donnés par :

$$(x_i, y_i, z_i) = (x_i, g(h(x_i)), h(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.27)$$

Les $(p^3 - p)$ points restants dont la forme (x_i, y_j, z_k) , $i \neq j \neq k$, forment des cycles d'ordre trois pour la transformation T .

du fait que :

$$\begin{aligned} T(x_i, y_j, z_k) &= T(x_i, g(h(x_j)), h(x_k)) \\ &= (F(x_j), g(h(x_k)), h(x_i)) \\ &= (x_j, y_k, z_i) \end{aligned} \quad (2.28)$$

et

$$\begin{aligned} T(x_j, y_k, z_i) &= T(x_j, g(h(x_k)), h(x_i)) \\ &= (F(x_k), g(h(x_i)), h(x_j)) \\ &= (x_k, y_i, z_j) \end{aligned} \quad (2.29)$$

et

$$\begin{aligned} T(x_k, y_i, z_j) &= T(x_k, g(h(x_i)), h(x_j)) \\ &= (F(x_i), g(h(x_j)), h(x_k)) \\ &= (x_i, y_j, z_k) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Le triplet ainsi formé $\{(x_i, y_j, z_k), (x_j, y_k, z_i), (x_k, y_i, z_j)\}$ est un cycle d'ordre 3 de T .

Il existe $\lfloor (p^3 - p)/3 \rfloor$ cycles d'ordre 3 de T , tel que :

$$C_T^3 = \{(x_i, g(h(x_j)), h(x_k)), (x_j, g(h(x_k)), h(x_i)), (x_k, g(h(x_i)), h(x_j))\} \quad i, j, k = 1, 2, \dots, p \quad (2.31)$$

Le fait qu'il existe p -points fixes de F (rappelons par ailleurs qu'il existe par conséquent p points fixes conjugués de G et H) implique l'existence, pour la transformation T de :

1. p points fixes conjugués donnés par :

$$(x_i, y_i, z_i) = (x_i, g(h(x_i)), h(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.32)$$

2. $\lfloor 1/3(p^3 - p) \rfloor$ cycles d'ordre 3 donnés par :

$$C_T^3 = \{(x_i, g(h(x_j)), h(x_k)), (x_j, g(h(x_k)), h(x_i)), (x_k, g(h(x_i)), h(x_j))\} \quad i, j, k = 1, 2, \dots, p \quad (2.33)$$

2.4.1 La nature des p-points fixes de T

La matrice jacobienne de T pour les points fixes $(x_i, g(h(x_i)), h(x_i))$ est donnée par :

$$J(x_i, g(h(x_i)), h(x_i)) = \begin{bmatrix} 0 & f'(g(h(x_i))) & 0 \\ 0 & 0 & g'(h(x_i)) \\ h'(x_i) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Le polynôme caractéristique de $J(x_i, g(h(x_i)), h(x_i))$ étant :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - h'(x_i)g'(h(x_i))f'(g(h(x_i))) \quad (2.35)$$

On a donc trois solutions : $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ (complexes conjuguées).

Les points fixes : $(x_i, g(h(x_i)), h(x_i))$, $i = 1, 2, \dots, p$. sont soit des nœuds-foyers soit des cols-foyers.

2.4.2 La nature des 3-cycles de T

La matrice jacobienne pour les cycles d'ordre trois de type :

$$C_T^3 = \{(x_i, y_j, z_k), (x_j, y_k, z_i), (x_k, y_i, z_j)\}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, p$$

est donnée par :

$$J^3(x_i, y_j, z_k) = \begin{bmatrix} F'(x_i) & 0 & 0 \\ 0 & G'(y_j) & 0 \\ 0 & 0 & H'(z_k) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

L'équation des valeurs propres est :

$$(\lambda - F'(x_i))(\lambda - G'(y_j))(\lambda - H'(z_k)) = 0 \quad (2.37)$$

Les valeurs propres sont réelles :

$$\lambda_1 = F'(x_i), \quad \lambda_2 = G'(y_j), \quad \lambda_3 = H'(z_k) \quad (2.38)$$

Les cycles d'ordre trois sont de type nœud ou col.

2.4.3 Caractéristiques des cycles

Le problème qui se pose maintenant est relative au nombre de cycles pour T lorsque F possède un cycle d'ordre n .

Proposition 2.3. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un cycle d'ordre $n = 3k + 1, n = 3k + 2$ de F alors T admet un cycle d'ordre n et $(\frac{n^2-1}{3})$ cycles d'ordre $3n$.

Démonstration. la première partie de la proposition résulte de la propriété (2.6).

Proposition 2.4. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un cycle d'ordre $n = 3k, (n \geq 1)$ de F alors : T admet $\frac{n^2}{3}$ cycles d'ordre $3n$.

Remarque. L'importance de cette proposition tient au fait que l'on est capable de connaître l'architecture des cycles de T .

Proposition 2.5. Un cycle C de l'application tridimensionnelle T est stable si et seulement si les trois cycles de F, G et H , pour lesquels les points périodiques de C sont obtenues, sont les trois stables.

Proposition 2.6. Si F admet un cycle stable de période $n > 2$ alors la transformation tridimensionnelle T est caractérisée par le phénomène de *multistabilité* (la coexistence de plusieurs attracteurs).

Démonstration. Une démonstration possible de cette proposition découle du théorème : (cycle trois implique chaos).

2.5 Étude de l'espace d'état

Dans cette section , nous étudions l'espace $\mathbb{R}^3$ de la transformation T . Les plans invariants associés aux cycles de type col, enfin, nous déterminons les variétés critiques.

2.5.1 Plans invariants

Proposition 2.7. Tout cycle de type col admet des plans invariants qui sont parallèles aux axes des coordonnées.

Démonstration. Selon l'étude précédente sur les type de cycles. Les valeurs propres des cycles d'ordre $n = 3k$ (sont les valeurs propres d'une matrice diagonale) sont :

$$\lambda_1 = \frac{\delta F^k(A)}{\delta x}, \quad \lambda_2 = \frac{\delta G^k(B)}{\delta y} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = \frac{\delta H^k(C)}{\delta z}$$

Les cycles d'ordre $n = 3k$ peuvent donc être de type nœud ou col.

Considérons les points de type col :

Soit $X_\mu = (x_\mu, y_\mu, z_\mu)$ un point fixe ou un point d'un cycle col d'ordre $3k$, les vecteurs propres sont toujours :

$$\vec{V}_1 = [1, 0, 0], \quad \vec{V}_2 = [0, 1, 0], \quad \vec{V}_3 = [0, 0, 1]$$

donc le plan invariant est soit parallèle à l'axe x , soit parallèle à l'axe y , ou parallèle à l'axe z .

Signalons encore deux propositions utiles :

Proposition 2.8. Soit T une transformation de type (2.1). Alors :

1. L'image par T d'un plan d'équation $y = u$ est un plan d'équation $x = f(u)$.
2. L'image par T d'un plan d'équation $x = v$ est un plan d'équation $z = h(v)$.
3. L'image par T d'un plan d'équation $z = w$ est un plan d'équation $y = g(w)$.

Démonstration. Il résulte immédiatement de la définition de la transformation T .

1. Soit le plan U d'équation $y = u$, u est une constante. Alors $T(u)$ appartient au plan d'équation $x = f(u)$.
2. Si V est le plan d'équation $x = v$, v est une constante. Alors $T(v)$ appartient au plan d'équation $z = h(v)$.
3. Si W est le plan d'équation $z = w$, w est une constante. Alors $T(w)$ appartient au plan d'équation $y = g(w)$.

Proposition 2.9. Pour tout point périodique $p(x_1, y_1, z_1)$ de la transformation T de période $n \geq 1$, les plans $x = x_1$, $y = y_1$ et $z = z_1$ qui résultent de p , sont des ensembles absorbants de l'application T^n .

Démonstration. Si (x_1, y_1, z_1) est un point périodique de T de période $n = 3k$, alors on a par la propriété (2.1), la relation suivante :

$$T^{3k}(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (F^k(x_1), G^k(y_1), H^k(z_1)) = (x_1, y_1, z_1) \quad (2.39)$$

puisque $(x_1, y, z) \in \{x = x_1\}$, alors :

$$T^{3K}(x_1, y, z) = (x, G^k(y_1), H^k(z_1)) \in \{x = x_1\}$$

- Si $(x, y_1, z) \in \{y = y_1\}$, alors :

$$T^{3K}(x, y_1, z) = (F^k(x), y_1, H^k(z_1)) \in \{y = y_1\}$$

- Si $(x, y, z_1) \in \{z = z_1\}$, alors :

$$T^{3K}(x, y, z_1) = (F^k(x), G^k(y), H^k(z_1)) \in \{z = z_1\}$$

Ce qui se traduit, en d'autres termes, par le fait que les plans $\{x = x_1\}$, $\{y = y_1\}$ et $\{z = z_1\}$ sont des plans absorbants de T^n .

Si (x_1, y_1, z_1) est un point périodique de T de période $n = 3k + 1$, alors :

- x_1 est un point périodique de période n de F ,
- y_1 est un point périodique de période n de G et
- z_1 est un point périodique de période n de H .

Et puisque :

$$T^{3(3k+1)}(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (F^{3k+1}(x_1), G^{3k+1}(y_1), H^{3k+1}(z_1)) = (x_1, y_1, z_1)$$

i.e.

$$T^{3(3k+1)}(x_1, y, z) \rightarrow (F^{3k+1}(x_1), G^{3k+1}(y), H^{3k+1}(z)) = (x_1, G^{3k+1}(y), H^{3k+1}(z)) \in \{x = x_1\}$$

et

$$T^{3(3k+1)}(x, y_1, z) \rightarrow (F^{3k+1}(x), G^{3k+1}(y_1), H^{3k+1}(z)) = (F^{3k+1}(x), y_1, H^{3k+1}(z)) \in \{y = y_1\}$$

$$\begin{aligned} T^{3(3k+1)}(x, y, z_1) &\rightarrow (F^{3k+1}(x), G^{3k+1}(y), \\ &H^{3k+1}(z_1)) = (F^{3k+1}(x), G^{3k+1}(y), H^{3k+1}(z)) \in \{z = z_1\} \end{aligned}$$

Donc la relation est vraie pour la transformation $T^{3(3k+1)}$ et par conséquent pour T^{3k+1} .

De même pour $n = 3k + 2$.

2.5.2 Variétés critiques

L'équation de la variété critique PC_{-1} dans $\mathbb{R}^3$ de T vérifie : $|J(X)| = 0$ où $J(X)$ est donné par

$$J(X) = f'(y).g'(z).h'(x) \quad (2.40)$$

d'où

$$\begin{aligned} PC_{-1} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f'(y) = 0, g'(z) = 0 \text{ ou } h'(x) = 0\} \\ PC_{-1} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f'(y) = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g'(z) = 0\} \\ &\quad \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h'(x) = 0\} \\ PC_{-1} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = y_{-1}^j, j = 1, \dots, M\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_{-1}^k, k = 1, \dots, N\} \\ &\quad \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_{-1}^i, i = 1, \dots, L\} \end{aligned}$$

où x_{-1}^i , $i = 1, \dots, L$, y_{-1}^j , $j = 1, \dots, M$ et z_{-1}^k , $k = 1, \dots, N$ sont les extréma locaux (des maxima locaux (resp. minima locaux) des transformations f , g et h respectivement.

On voit que PC_{-1} est formé de l'union des plans, le premier est vertical et le second est horizontal.

L'ensemble critique de rang 1 (plan critique) noté PC , est l'image directe de PC_{-1} par T .

$$\begin{aligned} PC_0 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = y^k = g(z_{-1}^k)\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z^i = h(x_{-1}^i)\} \\ &\quad \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x^j = f(y_{-1}^j)\} \end{aligned}$$

On remarque que PC_0 est formé d'union de plans.

Les ensembles critiques de rang supérieur sont obtenus par application de T^i , $i \geq 1$, et défini par $PC_i = T^{i+1}(PC_{-1})$.

2.6 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons présenté la théorie d'un triopole. Nous avons étudié les propriétés de la transformation tridimensionnelle associée. Nous avons présenté des propositions concernant l'étude des points fixes et des cycles, leurs natures, le nombre de cycles possibles et leurs stabilité. A la fin du chapitre, nous avons déterminé les plans invariants et les variétés critiques. Ce chapitre est un travail préliminaire qui nous sera utile pour le chapitre trois.

Il reste beaucoup à dire sur cette transformation tridimensionnelle et ses propriétés. Le nombre des cycles mérite une étude complète. Des propriétés et des propositions existent, concernant l'étude des bassins d'attraction dans l'espace de phase et leur évolution.

Chapitre 3

Chaos et bifurcations dans une transformation tridimensionnelle

3.1 Introduction

Ce chapitre concerne les bifurcations spécifiques aux transformations tridimensionnelles. Cette étude se trouve dans [12].

De nombreux travaux [15] se sont intéressés à la transformation bidimensionnelle T_0 :

$$T_0(x, y, z) \begin{cases} x_{n+1} = 4a_1 y_n(1 - y_n) + (1 - b)x_n \\ y_{n+1} = 4a_2 x_n(1 - x_n) + (1 - b)y_n \end{cases} \quad (3.1)$$

où a_1 , a_2 , et b sont des paramètres réels.

Rappelons les bifurcations liées aux attracteurs chaotiques, les variétés critiques et les bassins d'attractions pour le system (3.1) sont les suivantes :

1. Bassin connexe $\longleftrightarrow$ bassin multiplement connexe.
2. Bassin non connexe $\longleftrightarrow$ Bassin connexe
3. Bifurcation de contact (aboutissant à la disparition d'un attracteur).
4. Fractalisation de la frontière du bassin.
5. Courbe invariante fermée (CIF) $\longleftrightarrow$ attracteur chaotique faible (AFC) : transformation d'une courbe invariante fermée en attracteur faiblement chaotique.
6. Bifurcations de contact de la zone chaotique.

Ce faisant, nous nous sommes inspirés de la transformation T_0 pour construire la transformation liée à la dimension 3 de la forme suivante :

$$T(x, y, z) \begin{cases} x_{n+1} = 4a_1 y_n(1 - y_n) + (1 - b)x_n \\ y_{n+1} = 4a_2 z_n(1 - z_n) + (1 - b)y_n \\ z_{n+1} = 4a_3 x_n(1 - x_n) + (1 - b)z_n \end{cases} \quad (3.2)$$

où a_1, a_2, a_3 , et b sont des paramètres réels.

Notons la *condition initiale* (x_0, y_0, z_0) , et la *trajectoire* $\{x_t, y_t, z_t\} = T^t(x_0, y_0, z_0)$, $t \geq 0$, où T^t le $t^{\text{ème}}$ itéré de (3.2).

Dans cette partie nous allons mettre en évidence des bifurcations classiques, qui relient les variétés critiques et les attracteurs chaotiques.

3.2 Étude de la transformation T avec b=1

Pour $b = 1$, la transformation (3.3) présente des comportements irréguliers :

$$T_1(x_n, y_n, z_n) \begin{cases} x_{n+1} = 4a_1 y_n(1 - y_n) \\ y_{n+1} = 4a_2 z_n(1 - z_n) \\ z_{n+1} = 4a_3 x_n(1 - x_n) \end{cases} \quad (3.3)$$

Nous remarquons que T_1 est évidemment de la forme triopolique déjà considérée dans le chapitre 2. T_1 possède les mêmes propriétés que (2.1).

Nous présentons dans un premier temps le diagramme de bifurcation qui est un scanner donnant l'évolution du système, les solutions possibles avec leur domaine d'existence et éventuellement les bifurcations.

3.2.1 Étude du plan paramétrique

La figure (3.1) représente le diagramme de bifurcation de la transformation T_1 dans le plan paramétrique (a_1, a_3) . Le code des couleurs permet de donner les périodes des différentes zones d'existence et de stabilité, des cycles d'ordre k avec ($k \leq 14$). Les zones de couleur noire, correspondent à l'existence des cycles d'ordre $k \geq 15$ ou à la présence des attracteurs chaotiques. Les zones de couleur blanche correspondent à non existence d'attracteurs dans le plan de phases.

Nous constatons l'existence de point fixe attractif qui bifurque en donnant naissance aux cycles d'ordre 2, 4 dans le troisième quadrant. Nous avons également l'existence du cycle d'ordre 3 qui donne naissance aux cycles d'ordre 6 avec existence de zones de communication de type échangeur.

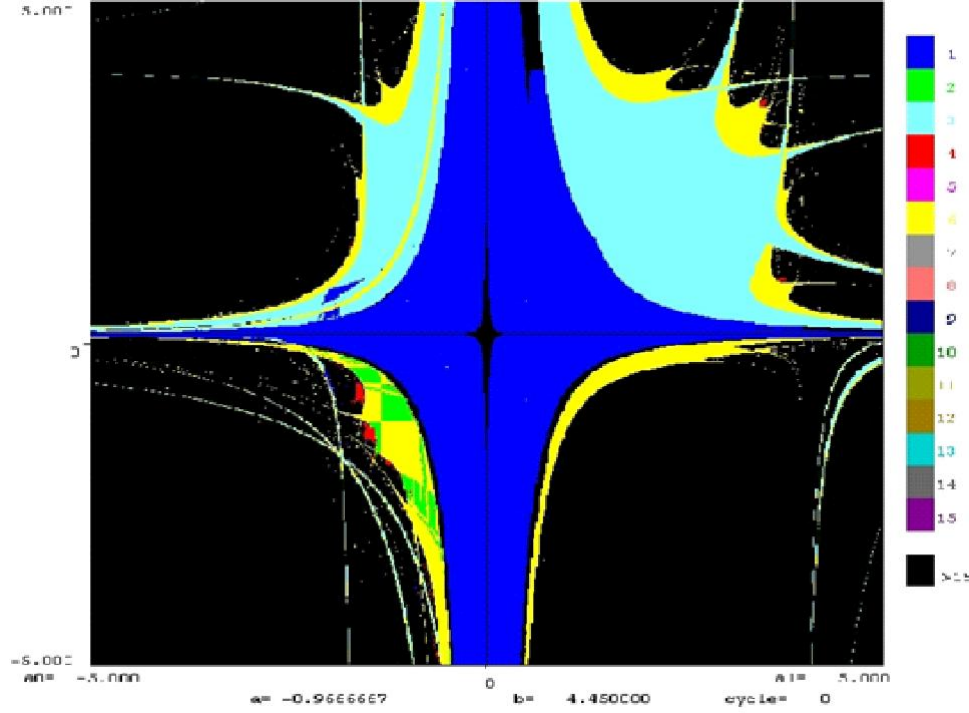


FIGURE 3.1 – Diagramme de bifurcation dans le plan (a_1, a_3) avec $a_2 = 1$

3.2.2 Les variétés critiques

Les variétés critiques interviennent dans certaines bifurcations spécifiques et délimitent les zones absorbantes, donc peuvent délimiter les attracteurs chaotiques .

L'équation de la variété critique en $\mathbb{R}^3$ PC_{-1} de T_1 vérifie :

$\det[J(X)] = 0$, où $J(X)$ est la matrice jacobienne de T_1 au point X donné par :

$$J(X) = \begin{bmatrix} 0 & 4a_1(1-2y) & 0 \\ 0 & 0 & 4a_2(1-2z) \\ 4a_3(1-2x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\det[J(X)] = 64.a_1.a_2.a_3.(1-2x)(1-2y)(1-2z) \quad (3.5)$$

On obtient 3 plans PC_{-1} dont l'équation est donnée par :

$$\begin{aligned} PC_{-1}^{(a)} &= \{(x, y, z) : x = \frac{1}{2}\} \\ PC_{-1}^{(b)} &= \{(x, y, z) : y = \frac{1}{2}\} \\ PC_{-1}^{(c)} &= \{(x, y, z) : z = \frac{1}{2}\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Remarquons que PC_{-1} ne dépend pas des paramètres. On obtient 3 plans distincts pour $PC = T_1(PC_{-1})$:

- $PC^{(a)} = T_1(PC_{-1}^{(a)})$ est le plan défini par : $z = a_3$ pour $y \leq a_2$.
- $PC^{(b)} = T_1(PC_{-1}^{(b)})$ est le plan défini par : $x = a_1$ pour $z \leq a_3$.
- $PC^{(c)} = T_1(PC_{-1}^{(c)})$ est le plan défini par : $y = a_2$ pour $x \leq a_1$.

Les variétés critiques de rang supérieur i , $i \geq 1$, sont obtenues par application de T_1 et définies par :

$$PC_{(i)} = T_1^{i+1}(PC_{-1})$$

Donc toutes les variétés sont dans le plan invariant qui est soit parallèle à l'axe x , soit parallèle à l'axe y , ou parallèle à l'axe z .

La figure (3.2), présente un attracteur chaotique avec les paramètres $a_1 = a_2 = a_3 = a = 0.99$.

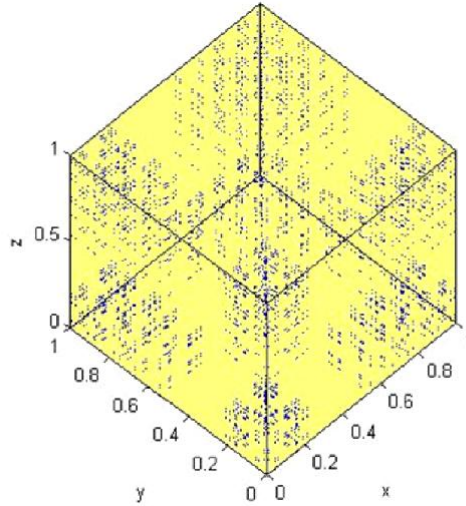


FIGURE 3.2 – attracteur chaotique pour T_1 avec $a = 0.99$

3.2.3 Étude théorique de la transformation T_1 avec $a_1 = a_2 = a_3 = a$

Limitons nous au cas d'un seul paramètre. Notons tout d'abord que l'étude de ce cas se ramène à la transformation tridimensionnelle définie comme suit :

$$T_1^*(x, y, z) \begin{cases} x_{n+1} = f(y) \\ y_{n+1} = f(z) \\ z_{n+1} = f(x) \end{cases} \quad (3.7)$$

De cette représentation de la transformation T_1 , nous devons pouvoir tirer quelques propriétés et conclusions sur le système lui-même et notamment caractériser sa structure de bifurcations.

L'étude portera essentiellement sur les propositions suivantes, issues de notre généralisation des résultats concernant les transformations bidimensionnelles décrits dans [34].

Proposition 3.1. Soit T_1 une transformation tridimensionnelle de type (3.7), alors nous avons :

- Le diagonale (Δ) d'équation : $\{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$ est un ensemble absorbant de l'espace de phase.
- Tout ensemble invariant A de l'espace de phases, soit il est symétrique par rapport à (Δ) ou bien son symétrique par rapport à (Δ) est aussi invariant.

Démonstration.

1. Soit : $(x, x, x) \in (\Delta) \Rightarrow T_1^*(x, x, x) = (f(x), f(x), f(x)) \in (\Delta)$.

Le premier résultat découle de la définition de la diagonale elle même.

2. Soit Ψ l'opérateur de la symétrie par rapport à (Δ) :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c) &\rightarrow \Psi(a, b, c) = (c, a, b) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Alors selon la définition de T_1^* , nous avons :

$$\begin{aligned}
 \Psi(T_1^*(x, y, z)) &= \Psi(f(x), f(y), f(z)) \\
 &= (f(z), f(x), f(y)) \\
 &= T_1^*(z, x, y) \\
 &= T_1^*(\Psi(x, y, z))
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Supposons que A est un ensemble invariant de T_1^* , donc $T_1^*(A) = A$, alors nous avons :

$$\Psi(T_1^*(A)) = T_1^*(\Psi(A)) = \Psi(A)$$

Il s'ensuit que soit : $\Psi(A) = A$ ou bien $A' = \Psi(A)$ est un ensemble invariant de T_1^* (i.e. $A' = \Psi(A')$).

Proposition 3.2. Soit $\{x_i\}$ l'ensemble de tous les points périodiques de l'application $F(x) = f^3(x)$: tous les points du produit cartésien $\{x_1, \dots, x_n\} \times \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \times \{f^2(x_1), f^2(x_2), \dots, f^2(x_n)\}$ constituent tous des points périodiques de T_1^* .

Démonstration. On sait que tout cycle d'ordre n de $F = f^3 : \{x_1, \dots, x_n\}$ correspond à deux cycles conjugués d'ordre n donnés par :

$$\{z_1, z_2, \dots, z_n\} = \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

et

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_n)\} = \{f^2(x_1), f^2(x_2), \dots, f^2(x_n)\}$$

et si on considère tous les points périodiques de F et leurs conjugués alors le produit cartésien :

$$\{x_1, \dots, x_n\} \times \{y_1, \dots, y_n\} \times \{z_1, \dots, z_n\}$$

donne tous les points périodiques de la transformation T_1^* .

Les deux propositions suivantes donnent une classifications des cycles car l'existence des cycles de la transformation tridimensionnelle T_1^* résulte immédiatement de l'existence d'un cycle de l'application F.

Proposition 3.3. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un cycle de f d'ordre n tel que $n \geq 1$ alors :

- Si $n = 3p + 1, n = 3p + 2$, alors T_1^* admet : un cycle d'ordre n sur (Δ) , $(\frac{n^2-1}{3})$ cycles d'ordre $3n$ en dehors de (Δ) .
- Si $n = 3p$ ($p = 3p'$), alors T_1^* admet n^2 cycles d'ordre n .
- Si $n = 3p$ ($p \neq 3p'$), alors T_1^* admet : trois cycles d'ordre $\frac{n}{3}$ en dehors de (Δ) et $(n^2 - 1)$ cycles d'ordre n .

Démonstration. Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un cycle d'ordre n ($n \geq 1$) de f . Nous considérons le produit cartésien :

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \times \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \times \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Calculons les itérations par T_1^* qui sont définies par la formule suivante :

$$T_1^{*k}(x_i, x_j, x_l) = \begin{cases} (f^k(x_i), f^k(x_j), f^k(x_l)) & \text{pour } k = 3m \\ (f^k(x_j), f^k(x_l), f^k(x_i)) & \text{pour } k = 3m + 1 \\ (f^k(x_l), f^k(x_i), f^k(x_j)) & \text{pour } k = 3m + 2 \end{cases} \quad (3.10)$$

- Si $i = j = l$, nous avons par conséquent un point sur (Δ) sachant que le premier entier qui donne un cycle est $k = n$, et également nous avons un cycle d'ordre n sur (Δ) .
- Si $i \neq j \neq l$, le point (x_i, x_j, x_l) se trouve hors (Δ) , et le premier nombre entier qui donne un cycle dépend de la période $3n$:
 - Si $n = 3p + 1, n = 3p + 2$, alors le premier nombre entier qui donne un point périodique est $k = 3n$, donc (x_i, x_j, x_l) est un point de cycle qui n'appartient pas à (Δ) de la première période $3n$.
Le nombre de ces cycles différents doit être égal à $(\frac{n^3-n}{3n}) = (\frac{n^2-1}{3})$.
 - Si $n = 3p$, alors $k = n$ est le premier nombre entier qui donne un point périodique dans ce cas, donc (x_i, x_j, x_l) est certainement un point périodique de période n , qui n'appartient pas à (Δ) , et il doit exister $(\frac{n^3-n}{n}) = (n^2 - 1)$ cycles différents de période n . Cependant la première période peut être inférieure à n . Ce cas est possible seulement quand $n = 3p$ ($p \neq 3p'$) (n est non multiple de 9), et les points périodiques appartiennent au trois cycles de période $\frac{n}{3}$.

Proposition 3.4. Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un cycle d'ordre n ($n \geq 1$) de f , alors :

- Si X est asymptotiquement stable (resp. instable) pour $f(x)$ avec la valeur propre λ , $|\lambda| < 1$ (resp. $|\lambda| > 1$) donc tous les cycles générés associés avec X sont asymptotiquement stables (resp. instables).
- Tous les cycles associés avec X sont des nœuds stables pour T_1^* avec les valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Démonstration. La première propriété est évidente.

3.3 Bifurcation de la courbe invariante

Dans cette section ; nous présentons les changements qualitatifs intervenant sur une courbe invariante fermée. Nous allons caractériser une bifurcation spécifique aux transformations tridimensionnelles.

Afin d'avoir une vue globale sur le comportement du système T_1^* dans le plan paramétrique (a, b) , nous présentons le balayage de bifurcation dans la figure (3.3) avec les paramètres a et b variant dans l'intervalle $[-4, 4]$. Ce balayage donne les domaines de stabilité et d'existence des cycles attractifs d'ordres allant de 1 à 14.

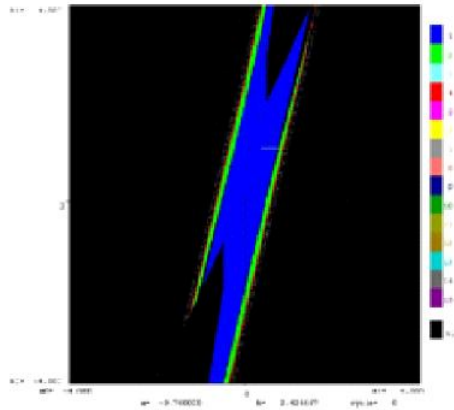


FIGURE 3.3 – Balayage dans le plan (a, b)

Pour $b = 0.50$ et faisons varier $a_1 = a_2 = a_3 = a \in \mathbb{R}_+$, il s'ensuit que :

$$T_2 : \begin{cases} x_{n+1} = 4.a.y_n.(1 - y_n) + 1/2.x_n \\ y_{n+1} = 4.a.z_n.(1 - z_n) + 1/2.y_n \\ z_{n+1} = 4.a.x_n.(1 - x_n) + 1/2.z_n \end{cases} \quad (3.11)$$

Ce système possède un point fixe x^* , de coordonnées :

$$x^* = \frac{-1+8a}{8a}(1, 1, 1) \quad (3.12)$$

Étudions maintenant la stabilité locale du point fixe x^* . La matrice Jacobienne de T_2 est égale à :

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1/2 & 4.a.(1-2y) & 0 \\ 0 & 1/2 & 4a.(1-2z) \\ 4.a.(1-2x) & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Cette matrice au point x^* est :

$$J(x^*) = \begin{bmatrix} 1/2 & h & 0 \\ 0 & 1/2 & h \\ h & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

où

$$h = 4.a. \left(1 - \frac{-1+8a}{4a} \right) \quad (3.15)$$

- Pour $a \in [0.125, 0.41284695471]$, le point fixe x^* est stable.
- Pour $a = 0.41284695471$, une courbe invariante fermée (CIF) apparaît à partir de la déstabilisation du point fixe x^* via une bifurcation de Hopf-Neimark, La figure (3.4) représente la courbe invariante fermée (CIF) pour la valeur du paramètre $a = 0.4200$.
- Lorsque a croît, des oscillations sur la courbe invariante fermée (CIF) apparaissent et sont illustrées sur la figure (3.5).
- Lorsque $a = 0.4950$ une bifurcation apparaisse de type différent qui ne peut pas se rencontrer pour une transformation bidimensionnelle (Figure 3.6). C'est le Doublement de la courbe invariante fermée. Cette bifurcation est équivalente à celle rencontrée dans [14].
- En augmentant la valeur de a ; des boucles naissent sur (CIF), en faisant croître le paramètre a , de plus en plus de boucles se forment. Par conséquent, le degré de complexité de (CIF) augmente. L'attracteur ainsi formé est appelé "attracteur faiblement chaotique" et noté par (AFC). On augmente le paramètre jusqu'à ce que la complexité de (CIF) grandisse; il en résulte un élargissement du

(AFC), générant une zone chaotique annulaire puis un attracteur chaotique.

- Pour $a = 0.5300$, nous avons l'attracteur chaotique (voir Figure 3.9), qui disparaît.

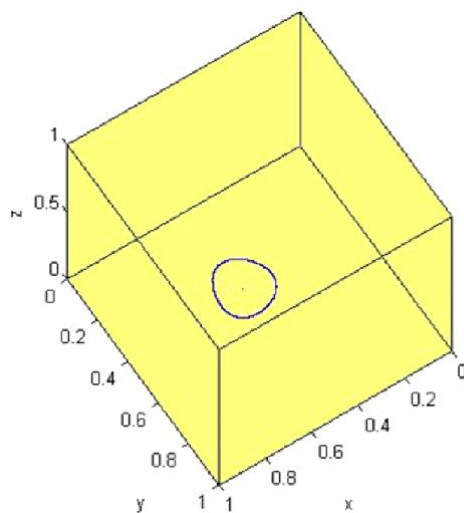


FIGURE 3.4 – Apparition d'une courbe invariante fermée pour $a = 0.4200$

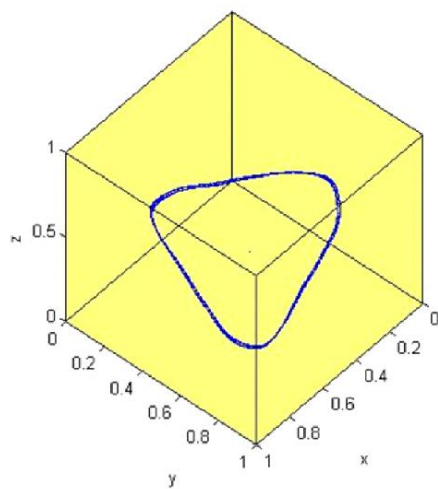


FIGURE 3.5 – Oscillations de la courbe invariante fermée $a = 0.4946$

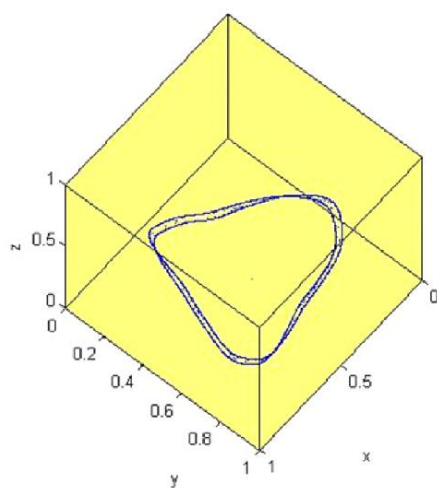


FIGURE 3.6 – Doublement de la courbe invariante fermée $a = 0.4950$

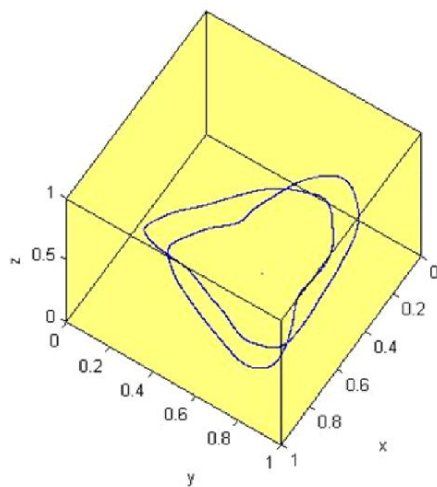


FIGURE 3.7 – Oscillations de la courbe invariante fermée $a = 0.500$

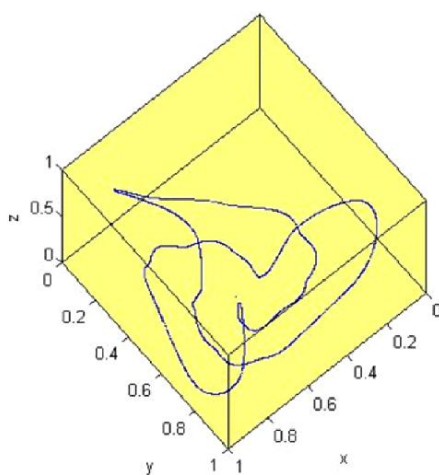
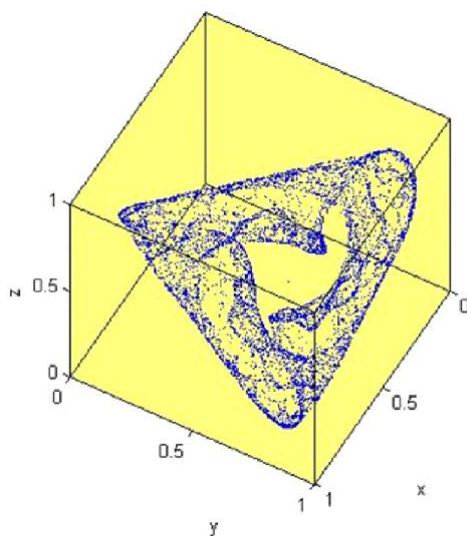


FIGURE 3.8 – Transformation de (CIF) en (AFC) pour $a = 0.5250$

FIGURE 3.9 – Attracteur chaotique pour $a = 0.5300$

Il faut remarquer que si nous choisissons une autre valeur de $b = 0.20$. Nous aurons des résultats similaires.

3.4 Conclusion

Ce chapitre regroupe différents résultats concernant l'étude d'une transformation tridimensionnelle non inversible.

Ce chapitre comporte deux parties de volumes très inégales. La première concerne la détermination des variétés critiques, les différents balayages dans des plans paramétriques différents pour garantir l'existence numérique d'attracteurs. La seconde partie est consacrée à la description d'une bifurcation spécifique aux transformations tridimensionnelles.

Chapitre 4

Étude qualitative d'une transformation tridimensionnelle

4.1 Introduction

Les systèmes dynamiques non linéaires, de façon générale, possèdent plusieurs cycles pour des paramètres fixes dépendant des conditions initiales. Cette propriété est appelée "multistabilité" conséquence immédiate de la non linéarité connectant différentes singularités. Des études récentes sur la multistabilité et les attracteurs cycliques appliquées aux transformations bidimensionnelles peuvent être trouvées dans plusieurs travaux tels que [22, 23, 24]. En se reportant à ces travaux, nous traitons dans ce chapitre le même système en dimension trois.

On se propose de mettre en évidence les différentes propriétés d'une classe de transformations tridimensionnelles. En utilisant des outils connus d'analyse des systèmes dynamiques non linéaires tels que la théorie des bifurcations, les notions de stabilité et d'attracteurs réguliers et chaotiques, nous apportons une analyse qui devrait permettre d'orienter les recherches expérimentales vers la mise en évidence de quelques phénomènes, encore mal connus.

L'étude est faite sur trois parties ; les deux premières présentent une étude qui repose sur la technique des réductions et le fait qu'il existe une correspondance importante entre ce qu'on observe dans l'espace tridimensionnel et l'évolution du système dans les variétés invariantes. la troisième partie est limitée au cas où la transforma-

tion dépend d'un seul paramètre.

4.2 Le modèle dynamique

On s'intéresse essentiellement à la transformation tridimensionnelle :

$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$T : \begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)(y_n + z_n + 1) \\ y_{n+1} = by_n(1 - y_n)(x_n + z_n + 1) \\ z_{n+1} = cz_n(1 - z_n)(x_n + y_n + 1) \end{cases} \quad (4.1)$$

Où a , b et c sont des paramètres réels.

Il est à noter qu'il s'agit d'une transformation tridimensionnelle non linéaire et complexe, dont les points fixes et les cycles sont difficiles à calculer. Mais on peut constater qu'il existe des points fixes triviaux sur les axes des coordonnées ; donnés par :

$$P_0 = (0, 0, 0); P_1 = \left(\frac{a-1}{a}, 0, 0\right), P_2 = \left(0, \frac{b-1}{b}, 0\right), P_3 = \left(0, 0, \frac{c-1}{c}\right) \quad (4.2)$$

Ces points fixes sont toujours de type nœud ou col.

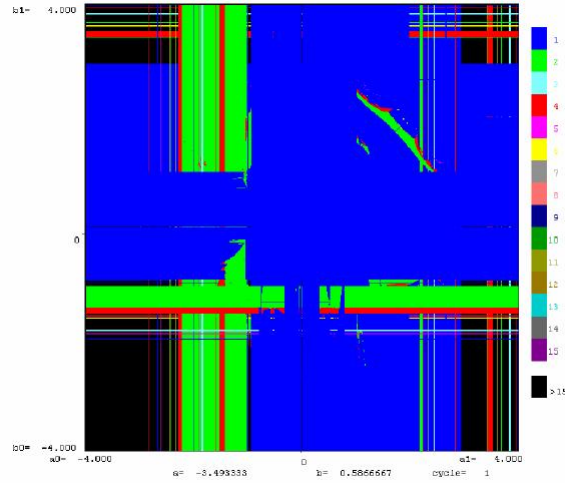
On remarque que l'étude d'un système dynamique est d'autant plus difficile que son espace d'état est de dimension plus élevée. Par conséquent on essaie toujours de décrire le système qui nous intéresse avec le plus petit nombre de paramètres possibles.

Commençons par un balayage dans un plan paramétrique appelé aussi diagramme de bifurcation illustré par la figure (4.1). Cette figure montre les types de cycles du système selon les valeurs de a et b pour une valeur fixe de c .

a et b sont compris entre -4 et 4 . Nous remarquons ici l'existence :

- Des points fixes attractifs qui sont présentés par les valeurs des paramètres (a, b) qui sont situés dans la région de la couleur bleue.
- Des cycles attractifs d'ordre 2 qui sont dans la zone de couleur verte.
- Des cycles attractifs d'ordre 4 qui sont dans la zone de couleur rouge.
- Des cycles d'ordre k ($k \geq 15$), sont dans les parties noires.

Les méthodes développées dans [7, 31, 32, 33] ont été appliquées à ce système pour déterminer les courbes de bifurcation analytiquement sans succès. Aucun résultat

FIGURE 4.1 – Diagramme de bifurcation dans le plan paramétrique (a, b)

probat n'a été obtenu à cause de la forme compliquée du système tridimensionnel (la méthode ne marche pas).

4.2.1 Conjugaisons topologiques et propositions

La transformation tridimensionnelle T possède également les propriétés intéressantes suivantes :

Proposition 4.1. Les dynamiques de la transformation T suite aux permutations :

- (a, b, c) par (b, a, c) sont topologiquement conjuguées par l'homéomorphisme $h_1(x, y, z) = (y, x, z)$, et dans le cas $a = b$ le plan $x = y$ est T -invariant avec les trajectoires qui sont symétriques par rapport à ce plan.
- (a, b, c) et (c, b, a) sont topologiquement conjuguées par l'homomorphisme $h_2(x, y, z) = (z, y, x)$, et dans le cas $a = c$ le plan $x = z$ est T -invariant avec les trajectoires qui sont symétriques par rapport à ce plan.
- (a, b, c) et (a, c, b) sont topologiquement conjuguées par l'homéomorphisme $h_3(x, y, z) = (x, z, y)$, et dans le cas $b = c$ le plan $y = z$ est T -invariant avec les trajectoires qui sont symétriques par rapport à ce plan.

Démonstration. En effet, si on change les trois paramètres (a, b, c) en (b, c, a) , alors on obtient la transformation tridimensionnelle T^* qui est la conjuguée topologique

de T par l'homéomorphisme $h_1(x, y, z) = (y, x, z)$ tel que : $T^* = h_1^{-1} \circ T \circ h_1$

De la même façon on peut procéder pour les autres permutations.

Proposition 4.2. Pour $a = b = c$, l'axe $x = y = z$ est T -invariant et la restriction de la transformation T sur cet axe est unidimensionnelle.

Démonstration. La démonstration de cette proposition est évidente (voir section 4.3)

Remarque. L'importance des propositions réside dans l'étude de la transformation T . Nous sommes dès lors amenés à distinguer deux cas :

- Nous nous intéresserons d'abord au cas où on suppose que T dépend d'un seul paramètre a et que les bifurcations interviennent pour des valeurs particulières de a lorsque celui-ci croît.
- Ensuite nous présenterons l'étude dans le plan invariant.

4.3 Étude du système sur la ligne invariante

Cette section, est consacrée pour L'étude de la restriction de T_1 sur la ligne invariante qui est une application unidimensionnelle, présentant une dynamique compliquée.

Nous présentons ici les deux types les plus importants de bifurcations qui se produisent dans la dynamique. On introduit le diagramme de bifurcation de cette transformation présenté dans la figure 4.3, nous allons montrer la naissance, l'évolution et la disparition des ensembles attractants.

Supposons que $a = b = c$, le système T devient :

$$T_1 : \begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)(y_n + z_n + 1) \\ y_{n+1} = ay_n(1 - y_n)(x_n + z_n + 1) \\ z_{n+1} = az_n(1 - z_n)(x_n + y_n + 1) \end{cases} \quad (4.3)$$

T_1 représente une transformation tridimensionnelle non inversible et différentiable.

La proposition 4.2 affirme que la ligne $L = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$ est T_1 -invariant et la restriction de la transformation T sur cette ligne est une transformation unidimen-

sionnelle donnée par :

$$\begin{aligned} T_1^1: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ T_1^1(x) &= ax(1-x)(2x+1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Cette transformation est de type cubique qui dépend du paramètre a qui est un nombre positif. Pour chaque valeur de a nous obtenons un système dynamique différent. Notre but est de comprendre le changement de la dynamique de T lorsque le paramètre a varie.

D'abord commençons par la recherche des points fixes de T_1^1 . Ces derniers sont obtenus en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} T_1^1(x) &= x \\ ax(1-x)(2x+1) &= x \end{aligned} \quad (4.5)$$

Elle admet trois racines :

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{a + \sqrt{9a^2 - 8a}}{4a}, x_2 = \frac{a - \sqrt{9a^2 - 8a}}{4a} \quad (4.6)$$

x_0 est le point fixe trivial de T_1^1 . Il est stable pour $a \in]0, 1[$ et instable pour $a \in [1, +\infty[$.

On note que x_1 et x_2 sont réels si et seulement si $9a^2 - 8a \geq 0$, ou $a \in [0.88, \infty[$. Lorsque $a < 0.88$, x_1 et x_2 ne sont pas des points fixes de T_1^1 . Tandis que si $a = 0.88$, on aura $9a^2 - 8a = 0$, telles que $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$.

Pour $a > 0.88$, nous présentons l'évolution de la structure de bifurcation avec des bifurcations locales et globales lorsque le paramètre a croît. La suite s'ouvre avec une bifurcation nœud-col, créant un point fixe attractif en x_1 et un point fixe répulsif en x_2 . Elle est suivie d'une bifurcation flip pour le point fixe attractif qui change à un point fixe répulsif et donne un cycle attractif d'ordre 2. Il est clair que les valeurs propres de x_1 doivent passer (en continu) de $+1$ à -1 .

Toute l'information peut se résumer dans ces deux propositions :

Proposition 4.3 (Première Bifurcation de la transformation T_1^1).

1. Pour $a < 0.88$: x_1 et x_2 ne sont pas des points fixes pour T_1^1 .
2. Pour $a = 0.88$: il y a deux points fixes confondus $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$. Ce point est un point neutre.

3. Pour $a > 0.88$: il y a deux points fixes distincts x_1 et x_2 .
 - Le point fixe x_1 est attractif pour $a \in [0.88, 1.469[$, et répulsif pour $a \in]1.469, \infty[$.
 - Le point fixe x_2 est répulsif pour $a \in]0.88, 1[$, et attractif pour $a \in [1, 2.41[$.

Proposition 4.4 (Deuxième Bifurcation de la transformation T_1^1).

1. Pour $a \in [0.88, 1.469[$: T_1^1 admet un point fixe attractif en x_1 et pas de cycles d'ordre 2.
2. Pour $a = 1.469$: T_1^1 admet un point fixe neutre en x_1 et aucun cycle d'ordre 2.
3. Pour $a \in]1.469, \infty[$: T_1^1 admet un point fixe répulsif x_1 et un cycle d'ordre 2 attractif.

Pour obtenir une vue générale de la dynamique de T_1 sur la ligne invariante L , on va considérer le diagramme de bifurcation. Cette illustration est une tentative de capturer la dynamique de T_1 pour plusieurs valeurs de a . Les résultats donnent un résumé de la dynamique de l'application T_1 ainsi qu'une idée sur sa transition vers le chaos sur la ligne invariante.

Nous remarquons que le diagramme de bifurcation montre la variable x comme fonction du paramètre a . Nous avons initialement choisi le paramètre a dans le rang $0 < a < 2$.

Notons que pour $a \in [0.88, 1.469[$, on voit exactement un point fixe attractif sur la ligne verticale en a . Notez que le point fixe n'est tracé que s'il s'agit d'un point fixe attractif. Lorsque a dépasse 1.469, on voit une bifurcation de doublement de périodes : un nouveau cycle d'attraction de la période 2 est né et les deux points dans le diagramme de bifurcation après ces points correspondent à ce cycle. En continuant à augmenter a , on voit une suite de cycles-attractif de période 2^n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Une telle suite est appelée "cascade de doublement de périodes".

4.4 Étude du système dans le plan invariant

Dans la section précédente, une étude du système tridimensionnel sur la ligne invariante L a été faite, en se basant sur les scénarios qui conduisent aux chaos. Nous avons vu qu'une augmentation continue d'un paramètre pouvait amener un

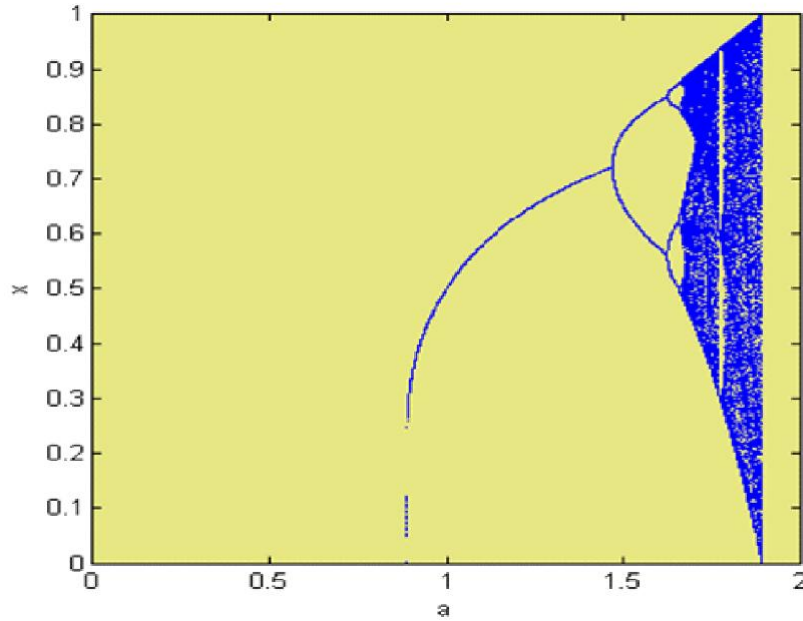


FIGURE 4.2 – Diagramme de bifurcation de la transformation unidimensionnelle

système à être chaotique. Notre travail est principalement expérimental. Nous présentons une série d'observations basées sur des images d'ordinateur. On introduit les courbes critiques essayant d'expliquer ce qu'on a vu ici.

On considère le cas où $a = b$. Remarquons que le plan d'équation : $x = y$ est T -invariant, la restriction de la transformation T devient bidimensionnelle.

D'après la proposition 4.1, nous avons la transformation bidimensionnelle associée :

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1-x_n)(x_n+z_n+1) \\ z_{n+1} = cz_n(1-z_n)(2x_n+1) \end{cases} \quad (4.7)$$

4.4.1 Les courbes critiques

Les courbes critiques jouent un rôle très important dans l'étude des attracteurs, des bassins d'attractions et des bifurcations.

Elles ont été introduites par Mira en 1964 voir [16].

Pour $X \in \mathbb{R}^2$, notées LC et définies comme étant les courbes images de rang 1 des

courbes LC_{-1} qui représentent l'ensemble des points pour lesquels le Jacobien $J(X)$ de T s'annule. Par conséquent, les courbes critiques de rang k ($k \geq 0$) sont les itérées de rang k de LC_{-1} notées par :

$$LC_{k-1} = T^k(LC_{-1}) = T^{k-1}(LC) \text{ et } LC_0 = LC$$

T_2 est une transformation bidimensionnelle non inversible, l'équation de la courbe critique LC_{-1} de T_2 est donnée par l'équation implicite :

$$ac[(6x^2 + 2x - 2)z^2 + (12x^3 + 4x^2 - 6x - 1)z - 6x^3 - 3x^2 + 2x + 1] = 0 \quad (4.8)$$

Remarquons que LC_{-1} ne dépend pas des paramètres, et l'équation paramétrique de LC_{-1} est donnée par :

$$z = -\frac{12x^3 - 6x + 4x^2 - 1 - \sqrt{(144x^6 - 8x^4 + 240x^5 - 144x^3 - 36x^2 + 20x + 9)}}{4(-1 + 3x^2 + x)}$$

$$z = -\frac{12x^3 - 6x + 4x^2 - 1 + \sqrt{(144x^6 - 8x^4 + 240x^5 - 144x^3 - 36x^2 + 20x + 9)}}{4(-1 + 3x^2 + x)}$$

On observe que LC_{-1} est constituée de deux branches Figure 4.3. En général les lignes critiques LC séparent le plan en des zones notées Z_i .

4.4.2 Attracteurs et Bifurcations

Considérons $a = c$.

Nous suivons les changements de paramètre de la transformation bidimensionnelle T_2 sur l'intervalle $[1.35, 1.46]$. Nous constatons dans les différentes figures une richesse de la dynamique pour certaines valeurs du paramètre a .

Nous observons (figure 4.4) que pour la valeur $a = 1.36$, la présence de deux courbes invariantes fermées (CIF) : (Γ_1, Γ_2) .

Pour $a = 1.38$, nous remarquons des changements qualitatifs qui interviennent dans l'allure des courbes invariantes fermées (CIF) (Γ_1, Γ_2) après une bifurcation de contact avec la ligne critique LC_{-1} . (Figure 4.5), nous constatons que les deux courbes invariantes fermées (CIF) ne traversent pas la ligne critique LC . Pour la valeur de $a = 1.40$, dans la figure (4.6), nous observons des formes plus complexes, ce sont les deux

attracteurs chaotiques faibles (AFC) qui se regroupent donnant un seul attracteur chaotique voir figures (4.7) et (4.8).

On notera que les résultats obtenus sont identiques à ceux établis dans le cas tridimensionnel.

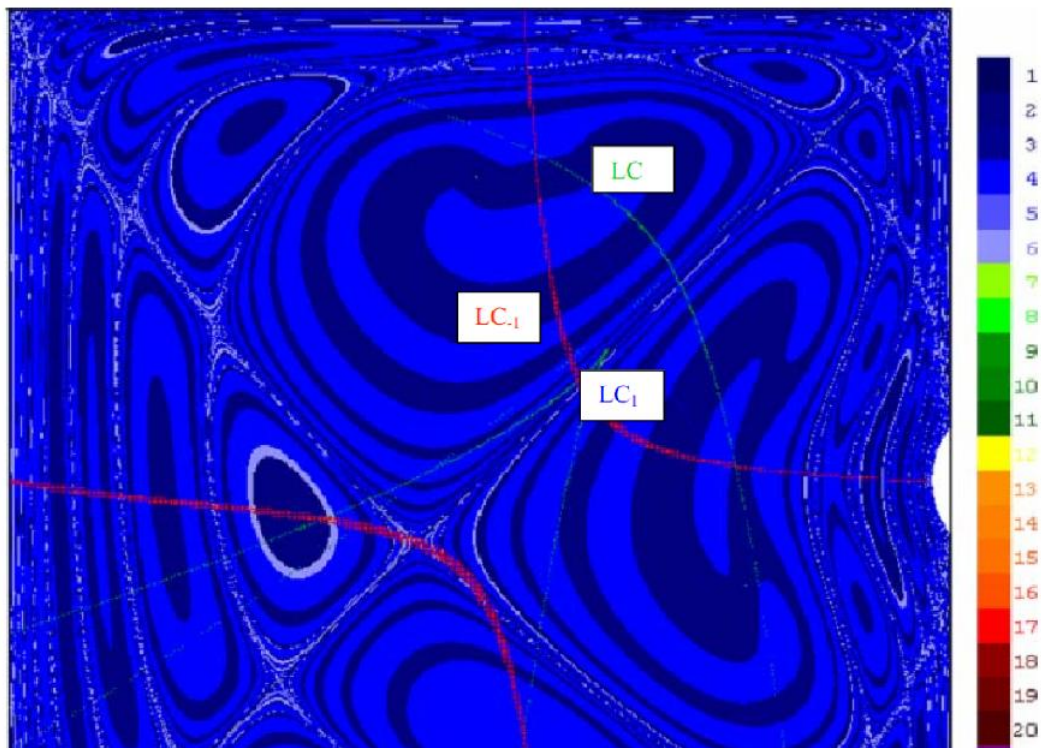


FIGURE 4.3 – Les lignes critiques

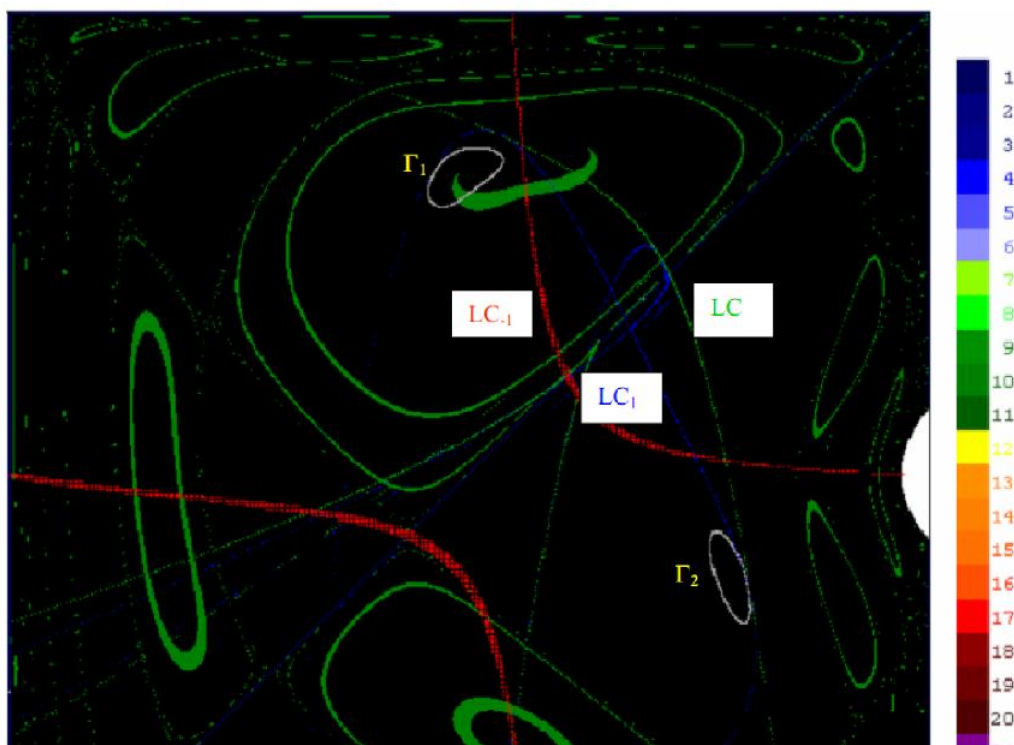


FIGURE 4.4 – Coexistence de deux courbes invariantes fermées (CIF) (Γ_1, Γ_2)

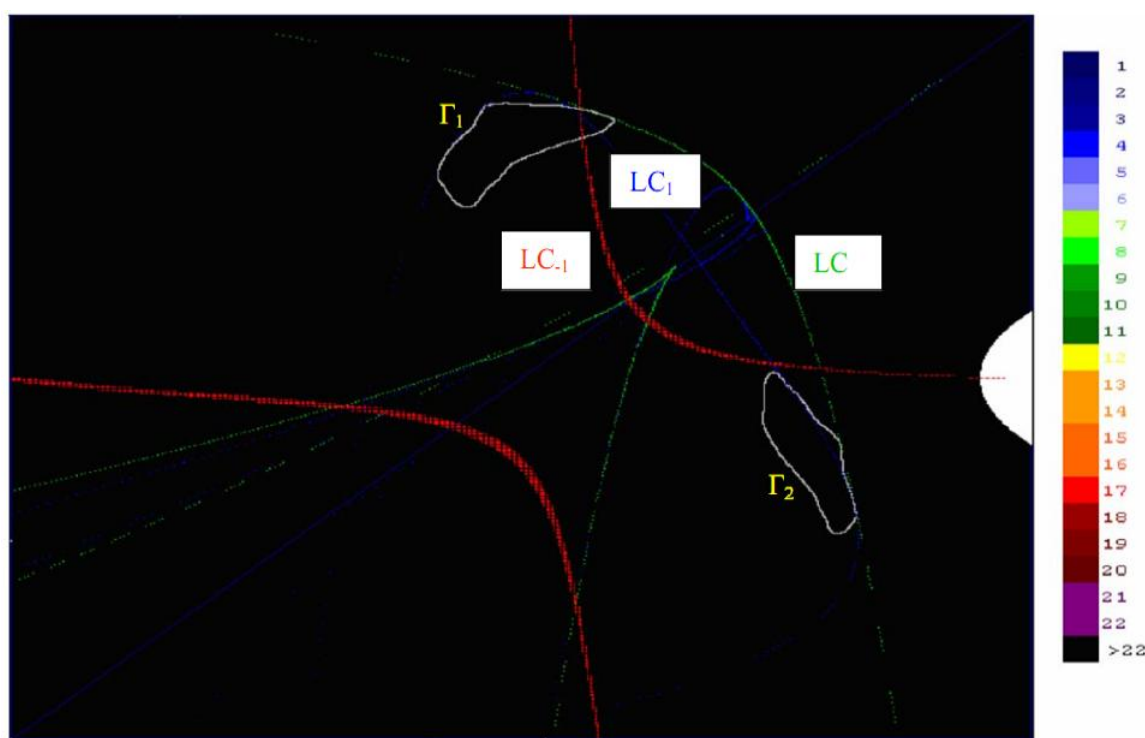


FIGURE 4.5 – Changements qualitatifs de deux courbes invariantes fermées (CIF) (Γ_1, Γ_2)

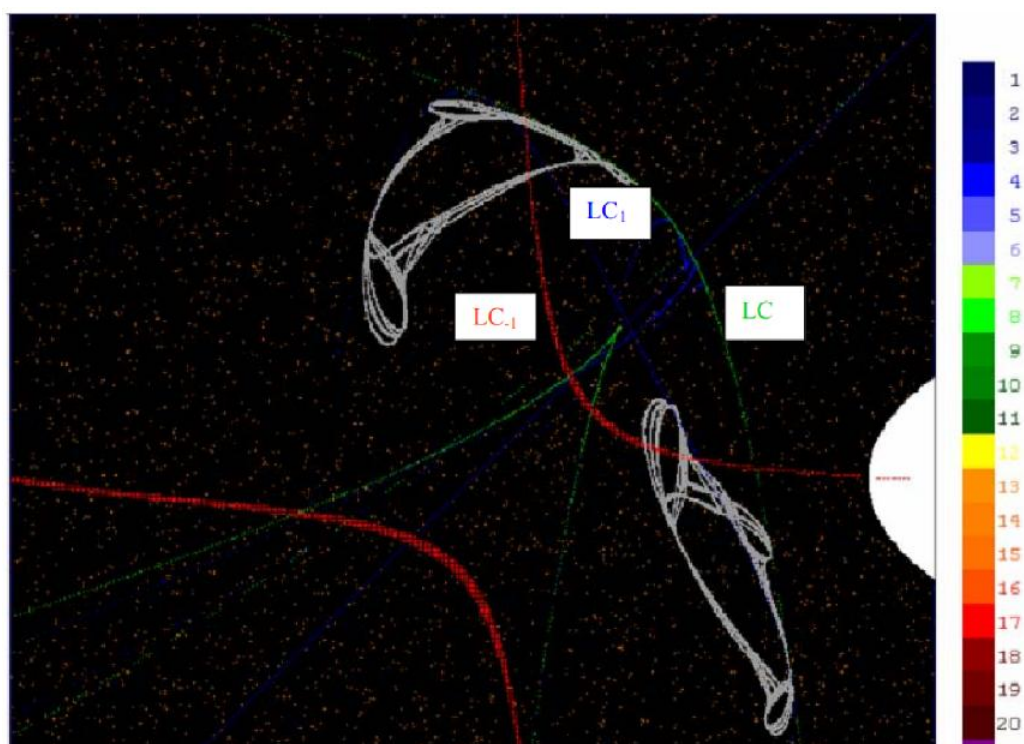


FIGURE 4.6 – Présence de deux attracteurs chaotiques faibles (AFC)

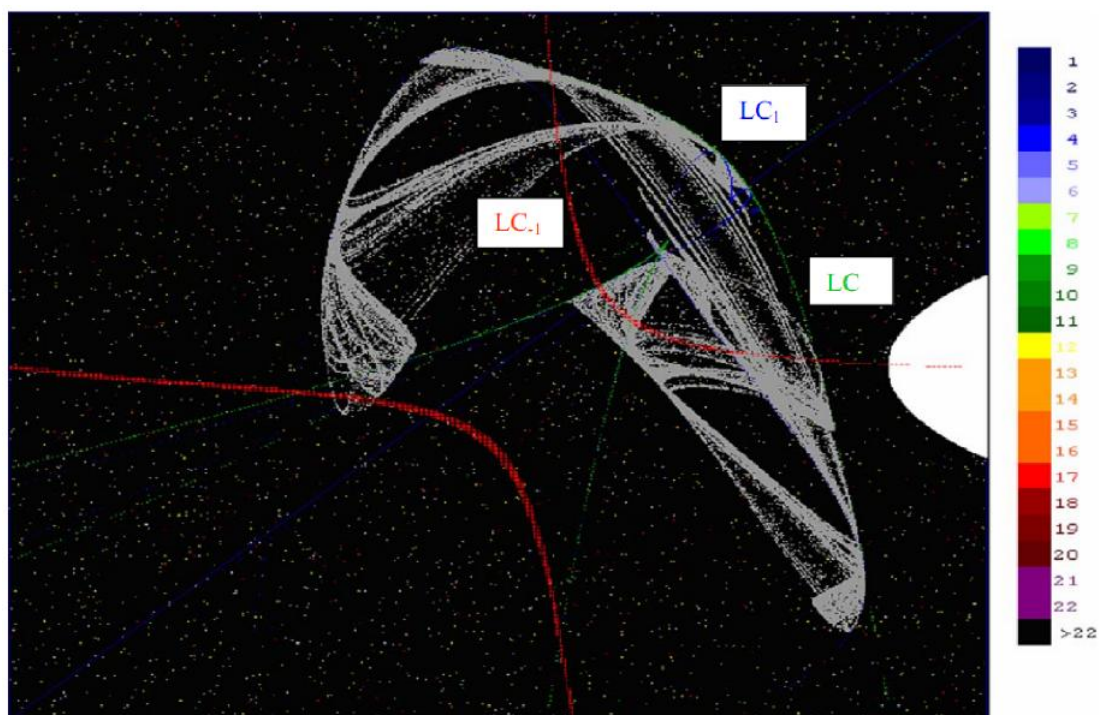


FIGURE 4.7 – Attracteur chaotique pour $a = 1.43$

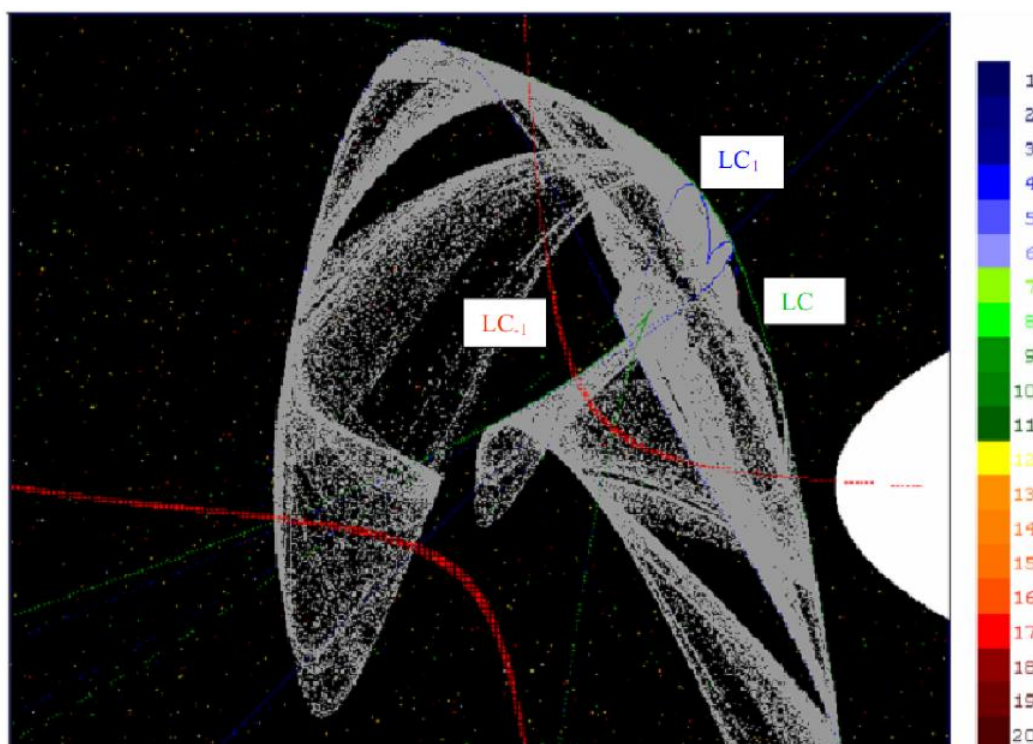


FIGURE 4.8 – Attracteur chaotique pour $a = 1.46$

4.5 Étude du système dans l'espace tridimensionnel

Dans cette section, pour des raisons de simplicité, nous nous limiterons ici au cas où T dépend d'un seul paramètre, ce qui donc nous permettra de déterminer les points fixes, leur nature, et l'allure des attracteurs existants dans le même intervalle $[1.35, 1.46]$. Pour le même intervalle de a , étudions la dynamique de la récurrence tridimensionnelle et comparons la à celle de la récurrence bidimensionnelle. Elles peuvent être identiques selon certains travaux, ce qui ramène dans certains cas l'étude à celle de la transformation bidimensionnelle associée.

Supposons que $(a = b = c)$, le système T devient :

$$T_1 : \begin{cases} x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)(y_n + z_n + 1) \\ y_{n+1} = ay_n(1 - y_n)(x_n + z_n + 1) \\ z_{n+1} = az_n(1 - z_n)(x_n + y_n + 1) \end{cases} \quad (4.9)$$

avec $a > 0$, T_1 représente une transformation tridimensionnelle non inversible et différentiable.

4.5.1 Étude de points fixes

Les points fixes de la transformation T_1 sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \\ y_{n+1} = y_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases} \quad (4.10)$$

Certains logiciels comme maple nous permettent d'avoir une solution numérique. Les points fixes sont donc donnés numériquement :

$$P_0 = (0, 0, 0)$$

$$P_1 = (\frac{a-1}{a}, 0, 0), P_2 = (0, \frac{a-1}{a}, 0), P_3 = (0, 0, \frac{a-1}{a})$$

$$P_4 = (\sqrt{\frac{a-1}{a}}, \sqrt{\frac{a-1}{a}}, 0), P_5 = (\sqrt{\frac{a-1}{a}}, 0, \sqrt{\frac{a-1}{a}}), P_6 = (0, \sqrt{\frac{a-1}{a}}, \sqrt{\frac{a-1}{a}}).$$

$$P_7 = (-\sqrt{\frac{a-1}{a}}, -\sqrt{\frac{a-1}{a}}, 0), P_8 = (-\sqrt{\frac{a-1}{a}}, 0, -\sqrt{\frac{a-1}{a}}), P_9 = (0, -\sqrt{\frac{a-1}{a}}, -\sqrt{\frac{a-1}{a}})$$

$$P_{10} = (-2, -2, \frac{3a+1}{3a}), P_{11} = (-2, \frac{3a+1}{3a}, -2), P_{12} = (\frac{3a+1}{3a}, -2, -2).$$

$$P_{13} = (\frac{a+\sqrt{9a^2-8a}}{4a}, \frac{a+\sqrt{9a^2-8a}}{4a}, \frac{a+\sqrt{9a^2-8a}}{4a}), P_{14} = (\frac{a-\sqrt{9a^2-8a}}{4a}, \frac{a-\sqrt{9a^2-8a}}{4a}, \frac{a-\sqrt{9a^2-8a}}{4a}).$$

Étudions maintenant ces points fixes :

- L'origine P_0 est un nœud stable pour $a \in]0, 1[$, qui devient un nœud instable pour $a \in [1, +\infty[$.
- Les points P_1, P_2, P_3 existent pour toute valeur de paramètre, ce sont des points cols (instables).
- Les six points fixes $P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$ existent pour $a \in [1, +\infty[$, qui sont des points cols (instables).
- Les points fixes P_{10}, P_{11}, P_{12} existent pour toute valeur de paramètre a et sont des cols (instables).
- Pour $a \geq 0.88$, il y a deux autres points fixes P_{13}, P_{14} qui sont situés dans la ligne invariante (leur stabilité est étudié dans la section 4.3).

4.5.2 Attracteurs et multistabilité

Dans cette partie, nous tacherons d'établir les résultats précis sur le comportement des solutions. A partir d'une condition initiale donnée, nous obtiendrons avec Matlab l'ensemble des comportements suivants :

- Pour $a = 1.355$: nous pouvons observer la coexistence des trois courbes invariantes fermées d'ordre 2 (CIF) (voir figure 4.9).
- Nous constatons qu'au fur et à mesure que le paramètre a grandit, des changements apparaissent concernant l'allure des courbes invariantes fermées (CIF) qui donne trois attracteurs cycliques d'ordre 2 (figure 4.10).
- A la valeur $a = 1.42$, les attracteurs cycliques se transforment en attracteurs faiblement chaotiques (AFC).
- Les attracteurs faiblement chaotiques (AFC) fusionnent et donnent un attracteur unique et chaotique $a = 1.45$, illustré sur la figure 4.11, qui disparaît par la suite.

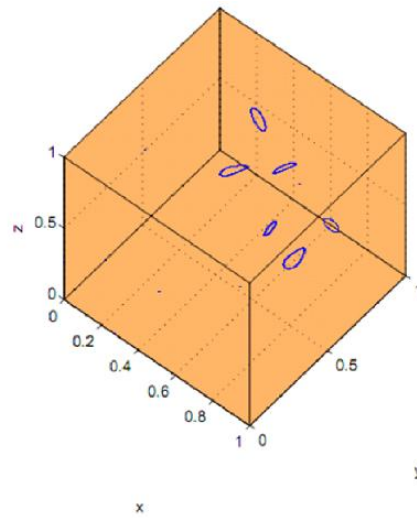


FIGURE 4.9 – Présence de courbes invariantes pour $a = 1.355$

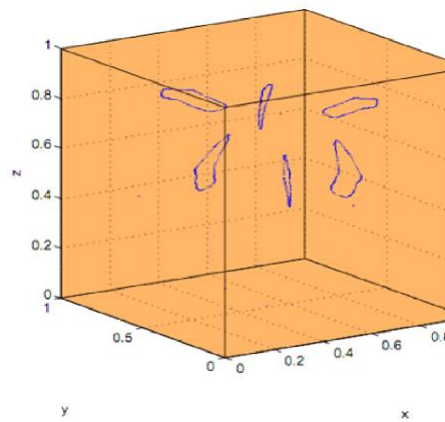


FIGURE 4.10 – Changement d'allure des courbes

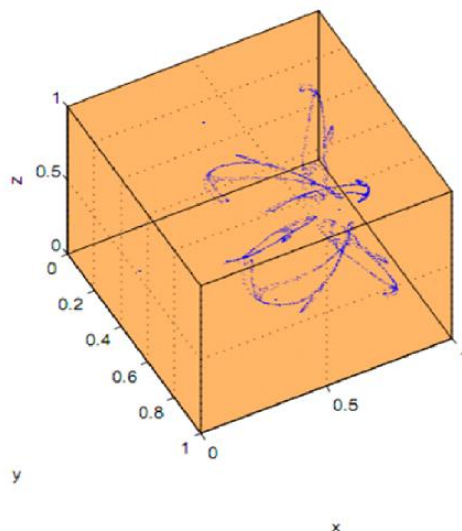


FIGURE 4.11 – Naissance des attracteurs faiblement chaotiques pour $a = 1.42$

Si l'on introduit les variétés critiques et les bassins d'attractions dans l'espace tri-dimensionnel, que se passe-t-il ? L'évolution ramène-t-elle des choses nouvelles ?

Pour répondre à cette question, il nous a paru essentiel de travailler sur un plan invariant ; qui doit répondre au mieux aux hypothèses du système qui est chaotique. Ce faisant, interprétons les bifurcations de contact entre les attracteurs et les bassins d'attraction.

4.6 Conclusion

Nous avons présenté une étude d'une transformation non inversible en dimension trois qui correspond à un modèle cubique. Après avoir présenté le système tri-dimensionnel et le balayage dans le plan paramétrique (a, b) . Nous avons établi des conjugaisons topologiques via deux propositions. A partir de ces propositions et la technique de réduction, Nous avons présenté l'étude du système en fixant deux variétés invariantes. A la fin, nous avons utilisé des méthodes analytiques et numériques pour caractériser les points fixes et donner les différents comportements dynamiques des attracteurs dans un intervalle donné des paramètres dans l'espace tri-dimensionnel.

Conclusion générale

Les transformations tridimensionnelles, modélisant des systèmes dynamiques, sont plus riches en propriétés.

Notre recherche a conduit à analyser les comportements possibles de trois transformations tridimensionnelles. Elle regroupe différents résultats concernant l'existence des attracteurs, les caractérisations des différentes bifurcations et comportements chaotiques possibles :

Le premier chapitre est consacré au rappel de quelques définitions préliminaires indispensables concernant les transformations ponctuelles. Nous donnons les propriétés des récurrences symétriquement découplées dont nous faisons état dans le chapitre 2.

Le chapitre deux présente l'étude théorique de la transformation triopole, c'est le véritable noyau des recherches grâce à la richesse des propriétés obtenues. Nous nous intéressons à mettre en évidence les différentes propriétés de la transformation tridimensionnelle concernant l'existence, la nature et le nombre des points fixes et des cycles.

Dans le chapitre trois, Nous présentons les résultats d'une étude qualitative d'une transformation tridimensionnelle. Nous retrouvons des phénomènes identiques au cas bidimensionnel concernant les attracteurs, les bifurcations et la multistabilité. Nous pouvons également noter une bifurcation spécifique à la dimension trois, le doublement d'une courbe invariante fermée.

Le dernier chapitre porte sur l'étude spécifique d'une transformation tridimensionnelle qui correspond à un modèle cubique, Nous constatons une richesse de la dynamique pour certaines valeurs du paramètre. l'étude se repose essentiellement sur le fait qu'il existe une correspondance importante entre ce qu'on observe dans l'espace tridimensionnel et l'évolution du système dans l'espace bidimensionnel et

unidimensionnel. Nous essayons de dégager des résultats rigoureux concernant des points fixes attracteurs et des bassins avec les différentes bifurcations possibles en dimension trois.

Bibliographie

- [1] A. Agliari, G. I. Bischi, and L. Gardini. Some methods for the global analysis of dynamic games represented by iterated noninvertible maps. In *Oligopoly Dynamics*, pages 31–83. Springer, 2002.
- [2] H. Aziz-Alaoui. *Bifurcations non classiques d'une classe de $\mathbb{R}^2$ Endomorphismes*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1984.
- [3] A. Barugola and J. C. Cathala. An extension of the notion of chaotic area in two-dimensional endomorphisms. In *Proceedings of ECIT 92 (European conference on Iteration Theory) Batschuns, Austria, sept.92*. World Scientific Ed, 1992.
- [4] A. Barugola, J. C. Cathala, and C. Mira. Annular chaotic areas. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 10(11) :1223–1236, 1986.
- [5] G. I. Bischi, C. Mammanna, and L. Gardini. Multistability and cyclic attractors in duopoly games. *Chaos, Solutions and Fractals*, 11(4) :543–564, 2000.
- [6] J. S. Canovas and A. Linero. Topological dynamic classification of duopoly games. *Chaos, Solitons and Fractals*, 12(7) :1259–1266, 2001.
- [7] J. P. Carcasses. Singularities of the parametric plane of an n-dimensional map. determination of different configurations of fold and flip bifurcation curves. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(02) :419–447, 1995.
- [8] J. C. Cathala. On some properties of absorptive area in 2^{nd} order endomorphisms. In *Proceedings of ECIT (European conference on Iteration Theory)*, pages 42–54, Batschuns Austria, sept 1989. World Scientific Ed, 1991.
- [9] J. C. Cathala. Multi connected chaotic areas in second-order endomorphisms. *International Journal of Systems Science*, 21(5) :863–887, 1990.
- [10] R. L. Devaney. *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*. The Benjamin/Cummings publishings co, Menlopark, California, 1987.
- [11] A. Djerrai. Transitions to chaos in a 3-dimensional map. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12(5) :4597–4611, 2016.
- [12] A. Djerrai and I. Djellit. Dynamics of three dimensional maps. *Facta universitatis*, 24(1), April 2011.

- [13] D. Fournier. *Contrubition à l'étude de structure de bifurcations rencontrées en dynamique chaotique*. PhD thesis, Toulouse, 1987.
- [14] D. Fournier-Prunaret, R. Lopez-Ruiz, and T. AbdelKaddous. Route to chaos in three-dimensional maps of logistic type. *arXiv preprint nlin/0502012*, 2005.
- [15] L. Gardini, R. Abraham, R. Record, and D. Fournier-Prunaret. A double logistic map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(01) :145–176, 1994.
- [16] I. Gumowski and C. Mira. Sur une solutions particulière de l'équation de schroe-der. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 259 :2952–2954, 1964.
- [17] I. Gumowski and C. Mira. Sur un algorithme de détermination du domaine de stabilité d'un point double d'une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variables réelles. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 260(25) :6524–6527, 1965.
- [18] I. Gumowski and C. Mira. Accumulations de bifurcations dans une récurrence. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 281 :45–48, 1975.
- [19] I. Gumowski and C. Mira. Solutions chaotiques bornées d'une récurrence ou transformation ponctuelle du second ordre à inverse non unique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 285 :477–480, 1977.
- [20] I. Gumowski and C. Mira. Bifurcation déstabilisant une solution chaotique d'un endomorphisme du 2^{nd} ordre. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 286 :427–431, 1978.
- [21] H. Kawakami and K. Kobayashi. Computer experiments on chaotic solutions of $x(t+2) - ax(t+1) - x^2(t) = b$. *Bulletin of Faculty of Engineering, Tokushima University, Tokushima, Japan*, 16(10) :29–46, 1979.
- [22] R. Lopez-Ruiz and D. Fournier-Prunaret. Complex patterns on the plane : different types of basin fractalization in a two-dimensional mapping. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(02) :287–310, 2003.
- [23] R. Lopez-Ruiz and D. Fournier-Prunaret. Complex behaviour in a discrete coupled logistic model for the symbiotic interaction of two species. *Mathematical Bioscience and Engineering*, 1(2) :307–324, 2004.
- [24] R. Lopez-Ruiz and D. Fournier-Prunaret. Indirect allee effect, bistability and chaotic oscillations in a predator-prey discrete model of logistic type. *Chaos Solitons and Fractals*, 24(1) :85–101, 2005.
- [25] R. Lopez-Ruiz and D. Fournier-Prunaret. Bistability in some 'aggregates' of logistic map. In *AIP Conference Proceedings*, volume 913, pages 89–95. AIP, 2007.
- [26] C. Mira. *Chaotic Dynamics*. World Scientific, Singapore, 1987.
- [27] C. Mira, D. Fournier-Prunaret, L. Gardini, H. Kawakami, and J. C. Catala. Basin bifurcations of two-dimensional non invertible maps : Fractactilization of basins. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(2) :343–381, 1994.

- [28] C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, and J. C. Cathala. Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps. *World Scientific Series on Nonlinear Science Series A*, 20, 1996.
- [29] C. Mira and I. Gumowski. *Dynamique chaotique*. Cepadues Editions, Toulouse, 1980.
- [30] C. Mira and I. Gumowski. *Recurrences and discrete dynamic systems, Lecture notes in mathematics*. Springer-Verlag, 1980.
- [31] M. Sonis. Once more on henon map : Analysis of bifurcations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 7(12) :2215–2234, 1996.
- [32] M. Sonis. Linear bifurcation analysis with applications to relative socio-spatial dynamics. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 1(1) :45–56, 1997.
- [33] M. Sonis. Critical bifurcation surfaces of 3d discrete dynamics. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 4(4) :333–343, 2000.
- [34] F. Tramontana, L. Gardini, and T. Puu. Cournot duopoly when the competitors operate multiple production plants. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33(1) :250–265, 2009.