

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي



Université Badji Mokhtar-
Annaba

جامعة باجي مختار

Badji Mokhtar University-
Annaba

-عنابة

Année 2016/2017

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat 3^{ème} cycle (LMD)

**Sur la convergence des méthodes de décomposition
de domaine généralisées avec recouvrement**

Option

Mathématiques et Applications

Présentée par

BOUSSAHA HANENE

Sous la direction de : Chibi Ahmed-Salah PROF UNIV.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT:	Chorfi Lahcène	PROF	UNIV.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR:	Laouar Abdelhamid	MC A	UNIV.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR:	Boussetila Najib	PROF	UNIV. GUELMA
EXAMINATEUR:	Taallah Frekh	MC A	UNIV.B.M. ANNABA

Remerciements

C'est avec une profonde émotion que je rends grâce au bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage d'achever ce travail que j'ai tant attendu et espéré.

Je remercie le directeur de ma thèse, le professeur **Chibi Ahmed Salah** pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour sa disponibilité et sa patience, de ses qualités humaines et scientifiques. Je ne pourrai jamais oublier son esprit de recherche et ses commentaires utiles. Un grand merci de m'avoir donné la chance de réaliser ce travail. Il était plus qu'un encadreur.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation LMD.

Je tiens à remercier le professeur **Chorfi Lahcène** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

Je remercie **Dr Laouar Abdelhamid, Pr Boussetila Najib** et **Dr Taallah Frekh** d'avoir bien voulu accepter de faire partie du jury.

Merci à **mes parents, mon marie et mes frères** pour l'appui moral qu'ils m'ont témoigné, à qui je souhaite une vie pleine de bonheur, de santé et de prospérité.

A tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ce que cette thèse soit réalisée se dirigent ma gratitude et mes pensées.

Résumé

Avec le développement des ordinateurs parallèles, les méthodes de décomposition de domaines (MDD) sont devenues des outils très puissantes pour résoudre les problèmes aux limites. Il existe, en pratique, deux idées de décomposition de domaines: avec et sans recouvrement.

Ce travail est consacré à l'analyse de la méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement (Schwarz), utilisant des conditions aux limites de type Robin sur les interfaces. Le cas sans recouvrement a été étudié dans [5], [6], [11], [14], [15]. Nous nous sommes intéressés par l'étude de la convergence du processus itératif dans les cas continu et discret. Nous utilisons la méthode d'énergie de Lions [11] pour prouver la convergence du processus itératif et généraliser un procédé de relaxation qui a été employé pour la première fois par Deng [5], pour éviter le calcul des dérivées normales dans l'algorithme et pour faciliter l'application de cette méthode aux problèmes discrets.

Mots-clés: Méthodes de décomposition de domaine généralisées, sous domaines avec recouvrement, conditions aux limites de type Robin, méthode d'énergie, méthode des éléments finis, procédé de relaxation.

La Classification AMS : 65N12, 65N35, 35J05, 35J20.

Abstract

With the development of parallel computers, domain decomposition methods (DDM) have been increasingly used as important tools for solving boundary value problems. There exists, in practice, two ideas of decomposition of the domain: with and without overlapping of subdomains. This work is concerned with the analysis of the generalized overlapping (Schwarz) DDM, by using Robin boundary conditions on the interfaces. The nonoverlapping case was studied in [5], [6], [11], [14], [15]. We are interested in the study of the convergence of the iterative process in the continuous and discrete cases. We use an energy method of Lions [11], to prove the convergence of the iterative process and a generalization of a relaxation procedure first used by Deng [5], to avoid the computation of normal derivatives and to facilitate the application of this method to discrete problems.

Key words: Generalized domain decomposition methods, overlapping subdomains, Robin boundary conditions, energy methods, finite element methods, relaxation procedure.

AMS Mathematics Subject Classification: 65N12, 65N35, 35J05, 35J20.

Notations

Les principales notations introduites dans cette thèse sont rassemblées dans cette nomenclature.

EDP : Une équation aux dérivées partielles.

MAS : La méthode alternée de Schwarz.

MPS : La méthode parallèle de Schwarz.

MDDGR : La méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement.

MEF : La méthode des éléments finis.

Ω : Un ouvert borné dans \mathbb{R}^N .

$\partial\Omega$: La frontière de Ω .

Ω_i : Un sous-domaine de Ω ($i \in \mathbb{N}$).

$\partial\Omega_i$: La frontière de Ω_i ($i \in \mathbb{N}$).

Δu : Laplacien de $u = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

∇u : désigne le gradient de u i.e. $\overrightarrow{\text{grad}} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: le produit scalaire dans l'espace euclidien \mathbb{R}^N .

n : vecteur normal extérieur unitaire.

$\frac{\partial u}{\partial n}$: la dérivée normale extérieure par rapport à u .

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ multi indice.

$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$, avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ dérivée partielle d'ordre α .

$C^k(\Omega)$: espace des fonctions k fois continues (les dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues).

$D(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et à support compact.

$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega), 1 \leq p < \infty\}$.

$W^{k,p}(\Omega)$ espace de Sobolev d'ordre k dans $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$.

λ paramètre d'accélération.

τ_h maillage de Ω .

t_k élément du maillage.

h_k diamètre de t_k , i.e. la distance maximum entre deux points de t_k .

-
- h pas du maillage : maximum des diamètres $h_k, t_k \in \tau_h$.
- H le diamètre de chaque Ω_i .

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires et Notions fondamentales	8
1.1 Espaces de Sobolev	8
1.1.1 Trace dans un espace de Sobolev	10
1.1.2 Les espaces $H^s(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$, pour $s \in \mathbb{R}$	11
1.1.3 Position du problème et Formulation Variationnelle	12
1.2 Principe de la méthode des éléments finis (MEF)	13
1.2.1 Espace conforme et non conforme	14
1.3 Méthode de décomposition de domaine avec recouvrement (de Schwarz)	17
1.3.1 Description de la méthode alternée de Schwarz (MAS) ou l'alternative de Schwarz	17
1.3.2 L'approche variationnelle de P.L. Lions [10] du MAS	19
2 Méthode de décomposition de domaine sans recouvrement (avec inter- face)	27
2.1 Présentation de la méthode	28
2.2 Analyse de la convergence de la méthode dans le cas continu	30
2.3 Amélioration de la convergence de la méthode de Lions (Deng [5])	35
2.4 La convergence de cette méthode dans le cas discret	41

2.4.1	Position du problème approché et discrétisation par éléments finis	42
2.4.2	Le taux de convergence de l'approximation par éléments finis	45
3	Méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement (MDDGR) dans le cas continu	49
3.1	Description de la MDDGR	50
3.2	Etude de la convergence de la MDDGR dans le cas continu	52
4	Méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement (MDDGR) dans le cas discret	60
4.1	Position du problème approché et discrétisation par éléments finis	61
4.2	Etude de la convergence du procédé itératif discret de la MDDGR	63
4.3	Application numérique	72
	Bibliographie	76

Introduction

Durant les dernières décennies, les mathématiques appliquées et le calcul scientifique en particulier, ont connu un développement intense et accéléré et sont maintenant des outils essentiels aussi bien dans les communautés non mathématiques (d'application) que dans le monde industriel. Le calcul scientifique, discipline regroupant la modélisation, l'analyse numérique et la simulation, est en évolution croissante vers des applications scientifiques très avancées ou proprement ingénieuses.

On trouve de multiples champs disciplinaires d'application se servant intensivement du calcul scientifique. On peut citer la biologie, l'astrophysique, la chimie quantique, la météorologie ou encore des branches de l'industrie telles que l'énergie, l'automobile ou l'aéronautique.

Les modèles mathématiques utilisés dans ces divers domaines d'applications sont souvent très complexes et font intervenir un grand nombre de paramètres lors de leurs formulations mathématiques. La simulation numérique de ces problèmes a pour objectif principal d'approcher le mieux possible le comportement physique du problème à travers des modèles discrétisés. Ces derniers forment des systèmes matriciels d'autant plus grands que le problème est complexe et que la précision demandée lors du traitement est importante.

Dans la majorité des simulations sur ordinateurs ordinaires, on ne parvient pas à résoudre des problèmes complexes en des temps raisonnables. On risque même de saturer ce type de machines par la simple demande de traitement des données qui nécessitent l'occupation d'une très grande place mémoire !

Avec les demandes actuelles, les machines ordinaires sont surexploitées dans la plupart des domaines d'applications du calcul scientifique. Elles montrent leurs limites malgré le développement et l'évolution de leurs vitesses très élevées de résolution qui se mesurent en million de flops.

Ce recours massif à l'informatique impose de disposer d'ordinateurs très puissants qui offrent un accès à une importante mémoire vive de stockage temporel lors de l'assimilation des données. Les ordinateurs parallèles, également appelés super-ordinateurs, disposent de la puissance et de l'espace mémoire nécessaires à certaines applications complexes. Ils offrent donc aux scientifiques un nouvel outil de calcul, avec des possibilités et avantages très largement supérieurs à ceux des ordinateurs conventionnels. Cependant, les algorithmes implémentés sur les ordinateurs parallèles, sont nettement différents de ceux que l'on met en œuvre sur des machines ordinaires séquentielles (uni-processeurs).

Pour ces raisons, et sans parler des contraintes économiques et techniques, les scientifiques et notamment les numériciens, sont invités à développer des algorithmes bien adaptés (qui doivent privilégier l'accès simultané à plusieurs processeurs et aussi à plus de ressources mémoires) à de telles architectures parallèles qui sont donc devenues un nouveau champ de recherche. Les méthodes de décomposition de domaines ont une implication évidente dans le développement de tels algorithmes, elles fournissent de bons schémas faciles à implémenter sur les machines parallèles et ont une base mathématique très riche.

Historiquement, la méthode de décomposition de domaine apparaît en 1870 dans [17]. Cet algorithme est avant tout une ingénieuse astuce utilisée par **Schwarz** dans le but de prouver l'unicité de la solution au problème de Dirichlet dans un domaine aux formes géométriques complexes. À l'époque, la preuve a déjà été établie pour des domaines ayant des formes bien particulières. Notamment, Poisson a résolu le problème pour des domaines circulaires et Fourier pour des domaines rectangulaires. **Schwarz** développa alors une méthode dans laquelle il décompose un domaine en deux sous domaines dont les solutions sont facilement calculable (voir le dessin extrait de l'article original [17]

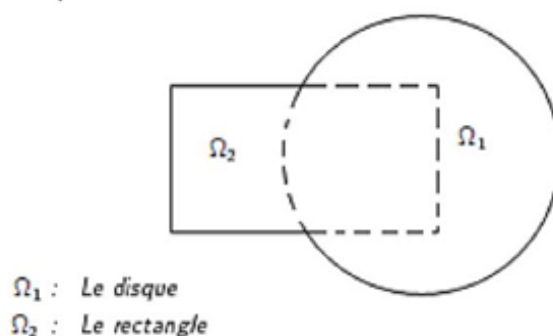
Figure 0.0.1 : **Hermann Schwarz**

Figure 0.0.2 : La décomposition originale de Schwarz

(0.0.1)–(0.0.2)) et propose un processus itératif permettant, à partir de ces deux solutions locales uniquement, d'obtenir la solution sur le domaine entier.

Le problème de Dirichlet peut se présenter sous la forme suivante : Existe-t-il une unique solution u vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Pour répondre à cette question, **Schwarz** a construit une suite de solutions (u_1^n, u_2^n) vérifiant, dans chacun de sous-domaine correspondant, les équations suivantes

$$\begin{cases} (a) -\Delta u_1^n = 0, & \text{dans } \Omega_1 \\ (b) u_1^n = g, & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, \\ (c) u_1^n = u_2^{n-1}, & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \Omega_2. \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u_2^n = 0, & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2^n = g, & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ u_2^n = u_1^n, & \text{sur } \partial\Omega_2 \cap \Omega_1. \end{cases} \quad (0.0.2)$$

Dans les équations (0.0.2), l'équation (c) correspond aux conditions de transmission. Elle relie les solutions aux problèmes locaux entre eux. Tout l'enjeu des méthodes de décomposition de domaine réside dans la manière d'échanger de l'information à travers l'interface entre les sous-domaines. Cet échange est régi par les conditions de transmission et de ces conditions dépend la vitesse de convergence de l'algorithme, c'est à dire le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la solution. Schwarz a démontré la convergence de cette méthode dans un cadre assez général en utilisant le principe du maximum. Les conditions de transmission utilisées décrivent simplement la continuité de la solution u sur l'ensemble du domaine.

Aujourd'hui, les méthodes de type décomposition de domaine ont subi un développement intense et accéléré, voir les monographies **Smith et al.** [18], **Quarteroni et Valli** [16] et **Toselli et Widlund** [19]. Ceci est dû principalement au développement considérable qu'a vécu le monde des ordinateurs. En particulier, l'apparition des machines à calcul parallèle (multiprocesseurs), ça veut dire elles sont utilisées pour rendre parallèle un code de simulation numérique. La résolution du problème sur chaque sous-domaine peut, en effet, être réalisée indépendamment des autres à chaque itération, avant d'échanger des informations à travers les conditions de transmission.

Ces méthodes permettent principalement à réduire des systèmes de grande taille à des systèmes de petite taille facile et moins coûteux de point de vue résolution. Elles permettent aussi de transformer des problèmes aux limites posés sur des régions à géométrie irrégulière à un ensemble de problèmes posés sur des sous domaines réguliers et simples. Par exemple, dans le cas où le domaine Ω a une forme géométrique non régulière. Le cas par exemple d'un L, T ou C . Puis on ramène le problème initial à des problèmes, locaux sur les sous-domaines moins complexes. La transmission des informations (contraintes de raccord) d'un sous-domaine à ses voisins joue un rôle capital pour la bonne approximation de la solution réelle ainsi que dans l'efficacité numérique de la méthode (coût du calcul effectué, place mémoire occupée et aptitude au parallélisme). La méthode des éléments finis fournit un cadre approprié pour coupler différents types de discrétisations variationnelles sur les sous-domaines. Ceci a des retombées importantes sur la place mémoire nécessaire

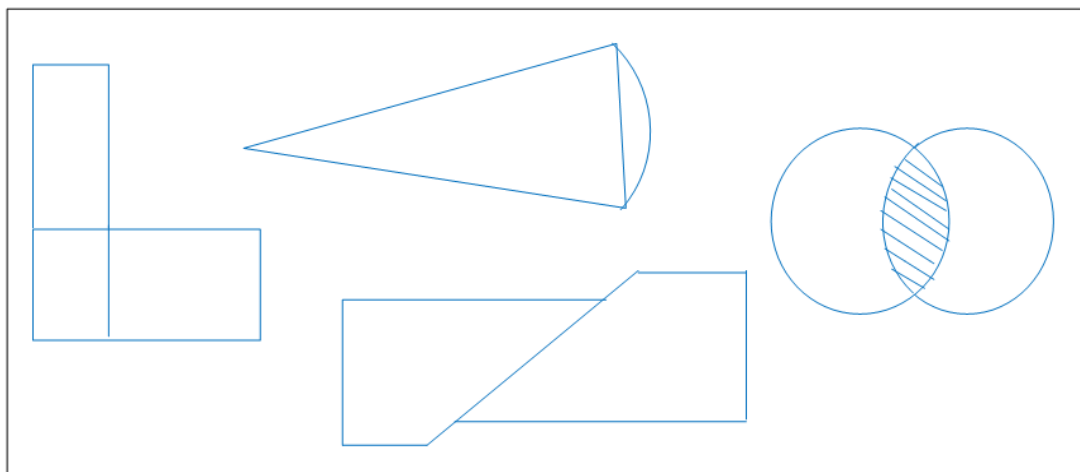


Figure 0.0.3 : Exemples des géométries de quelques sous domaines

au calcul et la rapidité de convergence vers la solution réelle du problème. L'ordre de convergence de la solution approchée par éléments finis uniformes décroît au voisinage de la singularité (angle strictement supérieure ou égal à $(\frac{\pi}{2})$). Pour remédier cette situation on peut par exemple, raffiner le maillage de la triangulation près de la singularité. Mais ceci conduit à une augmentation importante de la taille du système algébrique obtenu par approximation du problème. D'où, la nécessité d'utiliser une méthode de décomposition pour se débarrasser de la singularité. Il existe deux idées de décomposition de domaine : une avec intersection des sous domaines (avec recouvrement ou de Schwarz), et l'autre à intersection vide des sous domaines (dite avec interface ou sans recouvrement).

La première idée a été introduite par **Schwarz** [17]; puis analysée par **Lions** [10], il a trouvé que l'étude de la convergence de cette méthode est ramenée à l'étude du comportement d'une suite de projection sur des espaces de Hilbert et son ordre de convergence est lié à la grandeur du domaine de recouvrement entre les sous domaines (l'overlap).

Pour accélérer la convergence, **Lions** [11] a proposé une nouvelle variante " méthode parallèle " sur plusieurs sous domaines de décompositions sans recouvrement. L'idée est d'utiliser une condition aux limites de type Robin sur les frontières artificielles (interfaces). La convergence a été démontrée à travers des estimations "d'énergies" délicates et des inégalités de Sobolev. Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à améliorer cette

formulation, on cite en exemple, les travaux **Deng** [5]-[6], **Guo** et **Hou** [9], **Qin** et al. [14]-[15] dans les cas continu et discret. Le taux de convergence optimal obtenu est $1 - O\left(h^{\frac{1}{2}}\right)$, où h est le paramètre de discrétisation (voir les travaux de **Lui** [12], **Chen** et al. [4], et les références là-dedans).

L'objectif de cette thèse est d'obtenir la convergence de la méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement (la méthode de Schwarz généralisée) dans le cas continu et un taux de convergence dans le cas discret (discrétisation par éléments finis). Cette méthode est appliquée à la résolution d'un problème aux limites elliptique d'ordre deux avec des conditions aux limites de Robin sur les interfaces (artificielles) du recouvrement.

Cette thèse est composée de quatre chapitres, le premier contient des définitions, des propriétés des différents espaces et des théorèmes principaux dont on a besoin pour notre étude. Ainsi, On présente la méthode de décomposition de domaine avec recouvrement (MDDR) ou la méthode alternée de Schwarz sur un problème modèle de Dirichlet avec l'opérateur de Laplace. On détaille la convergence établie par **Lions** dans le cas continu.

Le deuxième chapitre est consacré à la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement, appliquée au même problème modèle. On expose la nouvelle variante qui a été proposée par **Lions** [11] sur plusieurs sous domaines. L'idée est d'utiliser une combinaison convexe de valeurs aux limites de Dirichlet et de Neumann (Robin) sur les frontières artificielles (interfaces). On détaillera la convergence dans le cas continu; puis on passe à l'amélioration de la méthode, en remplaçant le Laplacien par un opérateur d'ordre deux plus général dans le problème modèle précédent et on présente une technique de relaxation qui a été introduite par **Deng** [5]. On donne uniquement des résultats de convergence dans le cas continu. Ensuite, on analyse le cas discret, en se basant sur les travaux de **Qin**, **Shi** et **Xu** [14]-[15].

Notre but dans le troisième chapitre est d'étudier la méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement (MDDGR) appliquée à un problème modèle. On propose une technique généralisée similaire à la technique de **Deng** pour le processus itératif appliqué sur plusieurs sous domaines ($m \geq 2$). On démontre la convergence de

la méthode à travers des estimations "d'énergies" délicates et des inégalités de Sobolev dans le cas continu.

Le dernier chapitre concerne le cas discret de la **MDDGR** (discrétisation par éléments finis) sur plusieurs sous domaines. Pour démontrer la convergence de cette méthode, on a besoin d'utiliser des estimations "d'énergies" délicates et des inégalités inverses. On trouve que le taux de convergence est géométrique de l'ordre de $1 - O\left(\frac{h^{\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H}\right)^2$. On termine par une validation numérique des résultats obtenus.

Préliminaires et Notions fondamentales

Dans ce chapitre, on donne des définitions de quelques espaces fonctionnels utiles et des notations nécessaires pour notre thèse. Pour plus de détails concernant ces espaces, voir **Adams** [1], **Brézis** [3]. Ensuite on passe à la formulation variationnelle d'un problème modèle et la description de la méthode alternée de Schwarz (décomposition avec recouvrement). On étudie la convergence du processus dans le cas continu. Pour les preuves des différents résultats on cite **P-L. Lions** [10].

1.1 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev jouent un rôle central dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.1.1 *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N de frontière $\partial\Omega = \Gamma$, C^1 par morceaux, $N \geq 1$, on note par $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, l'espace des fonctions mesurables v vérifiant*

$$\int_{\Omega} |v(x)|^p dx < \infty, 1 \leq p \leq \infty,$$

et pour $p = \infty$,

$$\text{ess sup } \{|v(x)|, x \in \Omega\} < \infty.$$

Ces espaces sont munis de la norme usuelle suivante

$$\|v\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty,$$

et pour $p = \infty$

$$\|v\|_{p,\Omega} = \text{ess sup} \{|v(x)|, x \in \Omega\}.$$

L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables sur Ω à carré intégrable, est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} uv dx.$$

Définition 1.1.2 *L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, k un entier non-négatif et $1 \leq p \leq \infty$ est l'espace des fonctions $v \in L^p(\Omega)$ telle que toutes les dérivées au sens des distributions de v , d'ordre k , appartiennent à $L^p(\Omega)$.*

Pour tout $p, 1 \leq p \leq \infty$, on a $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}v(x)\|_{p,\Omega}^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et la semi-norme est définie par

$$|v|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha}v(x)\|_{p,\Omega}^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On note $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, l'espace de Sobolev défini par

$$H^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), D^{\alpha}v \in L^2(\Omega) \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq k\}$$

où D^{α} est pris au sens des distributions. $H^k(\Omega)$, muni de la norme suivante

$$\|v\|_{k,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{m, \Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v dx.$$

Corollaire 1.1.1 *Si Ω est borné, la semi norme*

$$|v|_{1, \Omega} = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0, \Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ (l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ à trace nulle sur $\partial\Omega$) équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$, $\|v\|_{1, \Omega}$.

1.1.1 Trace dans un espace de Sobolev

Pour une fonction définie dans un ouvert borné Ω , on souhaite définir sa valeur au bord de Ω . Pour les fonctions $u \in L^2(\Omega)$, cette notation n'a pas de sens. Par contre, si u est plus régulière, alors on peut lancer rigoureusement le théorème suivant :

Théorème 1.1.1 *Si Ω est 1-régulier (ou Γ est C^1 par morceaux) l'application*

$$\begin{aligned} \gamma_0 & : D(\overline{\Omega}) \rightarrow C^0(\Gamma) \\ v & \rightarrow \gamma_0 v = v|_{\Gamma} \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, il existe une constante C telle que:

$$\|\gamma_0 v\|_{0, \Gamma} \leq C \|v\|_{1, \Omega}.$$

Application du théorème: Lorsque Ω est 1-régulier (où Γ est C^1 par morceaux), alors

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = v|_{\Gamma} = 0\},$$

noyau de $H^1(\Omega)$.

On a alors le résultat fondamental :

Théorème 1.1.2 *Représentation de Riesz – Soit F une forme linéaire continue définie sur un espace de Hilbert V . Il existe un unique $u \in V$ tel que*

$$\langle u, v \rangle_V = F(v), \forall v \in V.$$

Définition 1.1.3 *Le sous espace $H_0^k(\Omega)$ de $H^k(\Omega)$ est défini par :*

$$H_0^k(\Omega) = \{v \in H^k(\Omega) : \Lambda \left(\frac{\partial^i v}{\partial n_i} \right) = 0 \forall i = \overline{0, k-1}\},$$

où Λ est l'opérateur trace et $\frac{\partial^i}{\partial n_i}$ est la dérivée d'ordre i dans la direction de la normale extérieure à Ω .

L'inégalité ci-dessous, dite inégalité de Poincaré, joue un rôle important dans l'étude des problèmes variationnels.

Théorème 1.1.3 (Inégalité de Poincaré) *Supposant que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que $\forall v \in H_0^1(\Omega)$*

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) |v|_{1,\Omega}.$$

1.1.2 Les espaces $H^s(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$, pour $s \in \mathbb{R}$

Définition 1.1.4 *Pour $s > 0$ on définit*

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ x \in L^2(\mathbb{R}^N), (1 + |\zeta|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{x} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

$$\|x\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\zeta|^2)^s |\widehat{x}(\zeta)|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}},$$

pour $s < 0$ on pose :

$$H^s(\mathbb{R}^N) = (H^{-s}(\mathbb{R}^N))'.$$

Définition 1.1.5 *On définit l'espace $H^s(\Omega)$ comme l'espace des restrictions à Ω des fonctions $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$.*

$$\begin{aligned}
 H^s(\Gamma) & : \gamma_0(H^1(\Omega)) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \\
 H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) & = \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)' \\
 \gamma & : H^m(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\
 v & \rightarrow (\gamma_0 v, \gamma_1 v, \dots, \gamma_{m-1} v).
 \end{aligned}$$

En particulier $m = 2$

$$\begin{aligned}
 \gamma(H^2(\Omega)) & = H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \\
 & = (\gamma_0 v, \gamma_1 v), \gamma_i v = \frac{\partial^i v}{\partial n_i}.
 \end{aligned}$$

Soit A une forme bilinéaire de $V \times V$ dans \mathbb{R} , où V est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et F une fonctionnelle linéaire continue de $V \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 1.1.4 (*Lemme de Lax-Milgram*) *On suppose que la forme bilinéaire A est continue i.e.*

$$\exists \alpha > 0 : |A(u, v)| \leq \alpha \|u\|_V \|v\|_V, \forall u, v \in V,$$

et coercive (V - elliptique), i.e.

$$\exists \alpha > 0 : A(u, v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

Alors le problème variationnel $A(u, v) = F(v), \forall v \in V$, admet une solution unique $u \in V$.

Proposition 1.1.1 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , alors $\forall (v_1, v_2) \in (H^1(\Omega))^2$, l'inégalité de Cauchy Schwarz vérifie*

$$|(v_1, v_2)| \leq \|v_1\|_{0,\Omega} \|v_2\|_{0,\Omega}.$$

1.1.3 Position du problème et Formulation Variationnelle

On considère le problème modèle suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega = \Gamma \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où Ω est un ouvert borné, régulier et connexe de \mathbb{R}^N . Notons par $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière du domaine Ω et f étant une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$.

La formulation variationnelle du problème (1.1.1) est donnée par:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ solution de} \\ a(u, v) = f(v)_\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.1.2)$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{et} \quad f(v)_\Omega = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (1.1.3)$$

On vérifie facilement que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et que la forme linéaire $f(v)_\Omega$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$. Par suite, par application du théorème (1.1.4) (Lax – Milgram), on déduit que le problème (1.1.2) admet une solution unique u dans $H_0^1(\Omega)$ qui est la solution faible du problème (1.1.1).

1.2 Principe de la méthode des éléments finis (MEF)

Une fois le problème précédent accompli, i.e. une fois que l'on dispose d'une formulation faible, «il n'y a plus qu'à» calculer la solution ! La méthode des éléments finis est l'un des outils numérique développé pour cela. La MEF se propose de mettre en place, sur la base de formulations faibles, un algorithme discret (discrétisation) permettant de rechercher une solution approchée d'un problème aux dérivées partielles sur un domaine borné avec conditions aux bords et/ou dans l'intérieur du borné.

Il s'agit donc de répondre aux questions d'existence et d'unicité de la solution, de stabilité, convergence des méthodes numériques, ainsi que d'estimer l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée (indicateurs et estimateurs d'erreur, a priori et a posteriori).

Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^N (1, 2 ou 3), de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et sur lequel on cherche à résoudre une EDP munie de conditions aux limites. Par exemple : le problème

(1.1.1), mis sous forme variationnelle (1.1.2), où $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On supposera également que l'équation de départ ait de bonnes propriétés, i.e. que l'on soit dans les hypothèses du théorème (1.1.4) permettant d'affirmer que le problème admet une solution unique u .

La MEF se propose de discrétiser le problème considéré. La discrétisation intervient à plusieurs niveaux :

- **Discrétisation** : il est nécessaire de disposer d'une description du domaine Ω sur lequel on souhaite travailler. Cette description va se faire en l'approximant par un maillage, qui sera constitué d'éléments finis.

- **Interpolation** : il est ensuite nécessaire de disposer d'une manière de représenter la ou les fonctions inconnues. Ce qui se propose de faire la MEF, c'est d'approcher ces fonctions par des fonctions plus simples (disons polynômiales de degré ≤ 3) définies sur chacun des éléments du maillage (la fonction est approchée par des bouts de fonctions qui, elles, ne sont définies chacune que sur un seul élément).

- **Approximation** : selon le type d'approximation, on remplace l'espace $H_0^1(\Omega)$ de dimension infinie, par des sous espaces V^h de dimension finie.

De manière classique, on notera τ_h le maillage de Ω considéré par exemple, si les éléments finis triangulaires sont utilisés dans \mathbb{R}^2 , alors le maillage construit à l'aide des triangles fermés $t_k \in \tau_h$. On note h_k le diamètre de l'élément t_k , i.e. le maximum des distances entre deux points de t_k .

On a donc évidemment $h_k \leq h, \forall t_k \in \tau_h$, puisque par définition $h = \max h_k$.

1.2.1 Espace conforme et non conforme

Type d'approximation	Espaces	problème approché
conforme	V^h inclus dans $H_0^1(\Omega)$	$u^h \in V^h \setminus a(u^h, v^h) = f(v^h)_\Omega$ $\forall v^h \in V^h$
non conforme	V^h n'est pas inclus dans $H_0^1(\Omega)$	$u^h \in V^h \setminus a_h(u^h, v^h) = f_h(v^h)_\Omega$ $\forall v^h \in V^h$

Approximation conforme (V^h inclus dans $H_0^1(\Omega)$)

Dans le cas d'une approximation conforme (dite aussi approximation interne), on se propose de construire un espace V^h , de dimension N_h (nombre de noeuds internes ou degré de liberté), comme étant un sous-espace vectoriel de $H_0^1(\Omega)$.

Cas Lax-Milgram On se place dans le cas d'une formulation relevant du théorème de Lax-Milgram.

V^h étant de dimension finie, c'est un fermé de $H_0^1(\Omega)$. $H_0^1(\Omega)$ étant un espace de Hilbert, V^h l'est donc aussi. D'où l'existence et l'unicité de u^h , à partir de Lax-Milgram.

L'espace V^h sera en pratique construit à partir d'un maillage du domaine Ω , et l'indice h désigne la taille typique des mailles. Lorsque l'on construit des maillages de plus en plus fins, la suite de sous espaces $(V^h)_h$ formera une approximation interne de $H_0^1(\Omega)$, i.e. pour tout élément φ de $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite de $\varphi_h \in V^h$ telle que $\|\varphi - \varphi_h\| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Cette méthode d'approximation interne est appelée méthode de Galerkin.

Signification de u^h :

D'après (1.1.2), On a

$$a(u, v) = f(v)_\Omega, \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donc en particulier

$$a(u, v^h) = f(v^h)_\Omega, \forall v^h \in V^h,$$

car $V^h \subset H_0^1(\Omega)$. Par ailleurs,

$$a(u^h, v^h) = f(v^h)_\Omega, \forall v^h \in V^h.$$

Par différence, il vient

$$a(u - u^h, v^h) = 0, \forall v^h \in V^h.$$

Approximation non conforme (V^h n'est pas inclus dans $H_0^1(\Omega)$)

Toujours V^h est de dimension finie, et $a_h(\cdot, \cdot)$ et $f_h(\cdot)_\Omega$ sont des approximations de $a(\cdot, \cdot)$ et $f(\cdot)_\Omega$ définies sur $V^h \times V^h$ et V^h resp.

Motivation :

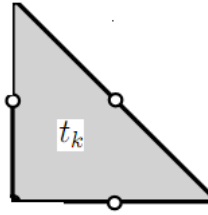


Figure 1.2.1 : nœuds au centre des arêtes du triangles

Considérons le problème du Laplacien de Dirichlet (1.1.1).

On considère l'espace des éléments finis triangulaires engendrés par l'élément ayant une pression constante par élément et les nœuds au centre des arêtes des triangles (figure 1.2.1). Notons cet espace V^h , alors, ce dernier n'est pas inclus dans $H_0^1(\Omega)$.

D'après (1.1.3), on a

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

alors, dans Ω , il y a des sauts et l'intégrale n'a pas de sens.

Alors que si l'on considère

$$a_h(u^h, v^h) = \sum_{t_k \in \tau_h} \int_{t_k} \nabla u^h \nabla v^h dx,$$

l'intégrale sur chaque élément a un sens.

Remarque 1.2.1 *Dans la méthode des éléments finis, on parle de méthode de Galerkin, et on dit conforme, lorsque que l'on choisit de calculer la solution 'élément fini u^h dans un sous-espace V^h de l'espace $H_0^1(\Omega)$, contenant la solution exacte u . La solution u^h construite élément par élément, vérifie alors des propriétés de continuité aux interfaces entre les éléments.*

Lorsqu'on décide de prendre la solution u^h dans un espace V^h qui n'est plus inclus dans l'espace $H_0^1(\Omega)$, on parle alors d'approximation non conforme. On ne s'assure plus une continuité complète entre les éléments mais la solution approchée peut garder une certaine continuité en quelques points des interfaces.

1.3 Méthode de décomposition de domaine avec recouvrement (de Schwarz)

Cette méthode a été originalement proposée par **Schwarz** [17] en 1870 pour démontrer l'unicité de solution des problèmes elliptiques sur des domaines complexes. Le domaine global est divisé en sous domaines avec recouvrement, et les problèmes sont résolus sur chaque sous-domaine. Le couplage entre les solutions des différents sous-domaines est assuré par la région commune dite "le recouvrement". Dans ce travail, nous nous limiterons à la méthode de Schwarz dont nous présentons deux variantes : la méthode alternée dans ce chapitre et la méthode généralisée dans le reste des chapitres.

1.3.1 Description de la méthode alternée de Schwarz (MAS) ou l'alternative de Schwarz

C'est une méthode itérative qui résout des sous problèmes différentiels d'une manière alternée sur des sous domaines qui se recouvrent. Ces sous problèmes sont couplés par l'échange des valeurs des approximations sur les frontières artificielles.

Pour appliquer la méthode alternée de Schwarz : On considère le cas simple de décomposition de Ω en l'union de deux sous -domaines Ω_1 et Ω_2 (voir figure 1.3.1) telle que:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ et } \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$$

On remarque que le domaine Ω est divisé en deux sous-domaines (Ω_1, Ω_2) , avec une partie commune appelée recouvrement qui est exprimée par

$$\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

On définit aussi les interfaces entre les sous- domaine par

$$\gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \Omega_j \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j$$

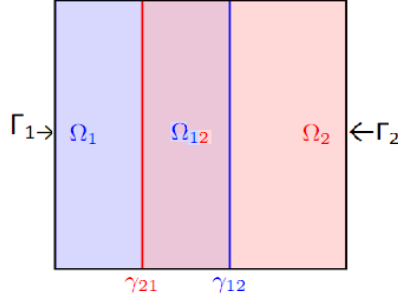


Figure 1.3.1 : Exemple de décomposition avec recouvrement

Théorème 1.3.1 *Le problème 1.1.2 est équivalent au problème suivant:*

$$\begin{cases} a(u_i, v) = f(v)_{\Omega_i}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_i) \quad (i = 1, 2) \\ u_i|_{\gamma_{ij}} = u_j|_{\gamma_{ij}} \quad i \neq j, i, j = 1, 2 \\ u_i|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} = 0, \partial\Omega \cap \partial\Omega_i = \Gamma_i, i = 1, 2 \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Preuve. Soit $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$ et v son prolongement par 0 à Ω , on a:

$$a(u, v) = a(u_i, v_i) \text{ et } f(v)_\Omega = f(v_i)_{\Omega_i}$$

et comme

$$a(u, v) = f(v)_\Omega$$

alors

$$a(u_i, v_i) = f(v_i)_{\Omega_i}, i = 1, 2.$$

Réciproquement, montrons que si u_1 et u_2 sont solutions du système (1.3.1), on a:

$$u = \begin{cases} u_1 \text{ sur } \Omega_1 \\ u_2 \text{ sur } \Omega_2 \end{cases}$$

est solution de (1.1.2).

En effet, soit $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe $(v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2)$ telle que $v = v_1 + v_2$

d'où

$$a(u, v) = a(u, v_1) + a(u, v_2) = a(u_1, v_1) + a(u_2, v_2) = f(v_1)_{\Omega_1} + f(v_2)_{\Omega_2}$$

Or

$$\begin{aligned} f(v_1)_{\Omega_1} + f(v_2)_{\Omega_2} &= \int_{\Omega_1} f v_1 dx + \int_{\Omega_2} f v_2 dx = \int_{\Omega} f v_1 dx + \int_{\Omega} f v_2 dx \\ &= \int_{\Omega} f(v_1 + v_2) dx = \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

donc, on a:

$$a(u, v) = f(v)_{\Omega}$$

■

1.3.2 L'approche variationnelle de P.L. Lions [10] du MAS

Etant donné une partition de Ω , par exemple de la forme donnée dans la figure (1.3.1). Soit u^0 une initialisation dans $H_0^1(\Omega)$, l'algorithme consiste à construire les deux sous-suites $(u^{2n+1})_{n \geq 0}, (u^{2n})_{n \geq 1}$ solutions respectives.

Pour tout $n \geq 0$, effectuer de façon successive :

$$\begin{cases} -\Delta u^{2n+1} = f \text{ sur } \Omega_1 \\ u^{2n+1} = u^{2n} \text{ sur } \gamma_{12} \\ u^{2n+1} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (1.3.2)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u^{2n} = f \text{ sur } \Omega_2 \\ u^{2n} = u^{2n-1} \text{ sur } \gamma_{21} \\ u^{2n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases} \quad (1.3.3)$$

où $\Gamma_i = \Gamma \cap \partial\Omega_i, i = 1, 2$.

Commençons par quelques remarques.

- Si $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$, son prolongement par 0 à tout Ω que l'on note encore v_i vérifie $v_i \in H_0^1(\Omega)$. On identifie donc $H_0^1(\Omega_i)$ à un sous-espace fermé de $H_0^1(\Omega)$.

Les problèmes (1.3.2) et (1.3.3) ont les formulations variationnelles respectives suivantes:

$$\begin{aligned} u^{2n+1} &\in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) : a(u^{2n+1}, v_1) = f(v_1)_{\Omega_1} \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega_1); u^{2n+1} = u^{2n} \text{ sur } \gamma_{12} \\ u^{2n} &\in H_{\Gamma_2}^1(\Omega_2) : a(u^{2n}, v_2) = f(v_2)_{\Omega_2} \quad \forall v_2 \in H_0^1(\Omega_2); u^{2n} = u^{2n-1} \text{ sur } \gamma_{21} \end{aligned}$$

où

$$H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i) = \{v \in H^1(\Omega_i) / v = 0 \text{ sur } \Gamma_i, 1 \leq i \leq m\} \quad (1.3.4)$$

Par construction des deux étapes (1.3.2) et (1.3.3), on peut conventionnellement prolonger u^{2n+1} et u^{2n} à tout Ω par les formules suivantes

$$\begin{aligned} u^{2n+1} &= \begin{cases} u^{2n+1} & \text{dans } \Omega_1 \\ u^{2n} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases} \\ u^{2n} &= \begin{cases} u^{2n} & \text{dans } \Omega_2 \\ u^{2n-1} & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Par définition, ces prolongements sont bien dans $H^1(\Omega)$ qui sont équivalentes à:

$$a(u^{2n+1} - u, v_1) = 0 \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega_1); u^{2n+1} - u^{2n} \in H_0^1(\Omega_1). \quad (1.3.5)$$

$$a(u^{2n} - u, v_2) = 0 \quad \forall v_2 \in H_0^1(\Omega_2); u^{2n} - u^{2n-1} \in H_0^1(\Omega_2). \quad (1.3.6)$$

On définit $P_{H_0^1(\Omega_i)}$, $i = 1, 2$ l'opérateur de projection dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ sur le sous-espace fermé $H_0^1(\Omega_i)$ et $P_{(H_0^1(\Omega_i))^\perp}$ l'opérateur de projection sur l'orthogonal de ce sous-espace.

Proposition 1.3.1 *Les suites $(u^{2n+1})_{n \geq 0}$, $(u^{2n})_{n \geq 0}$ solutions du problème (1.3.2)- (1.3.3) vérifient*

$$u^{2n+1} - u^{2n} = P_{H_0^1(\Omega_1)}(u - u^{2n}) \quad \forall n \geq 0, \quad (1.3.7)$$

$$u^{2n} - u^{2n-1} = P_{H_0^1(\Omega_2)}(u - u^{2n-1}) \quad \forall n \geq 1. \quad (1.3.8)$$

Preuve. D'après (1.3.4), on pourra réécrire (1.3.5) et (1.3.6) sous la forme suivante:

$$a(u^{2n+1} - u^{2n}, v_1) = a(u - u^{2n}, v_1) \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega_1), u^{2n+1} - u^{2n} \in H_0^1(\Omega_1) \quad (1.3.9)$$

$$a(u^{2n} - u^{2n-1}, v_2) = a(u - u^{2n-1}, v_2) \quad \forall v_2 \in H_0^1(\Omega_2), u^{2n} - u^{2n-1} \in H_0^1(\Omega_2) \quad (1.3.10)$$

$\forall n \geq 0, \forall n \geq 1$ respectivement.

En effet dans (1.3.5), on remplace $u^{2n+1} - u$ par:

$$u^{2n+1} - u = u^{2n+1} - u^{2n} - (u - u^{2n})$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} a(u^{2n+1} - u, v_1) &= a(u^{2n+1} - u^{2n} - (u - u^{2n}), v_1) = 0 \\ &= a(u^{2n+1} - u^{2n}, v_1) - a(u - u^{2n}, v_1). \end{aligned}$$

i.e.

$$a(u - u^{2n}, v_1) = a(u^{2n+1} - u^{2n}, v_1) + a(u - u^{2n+1}, v_1)$$

d'où (1.3.9). De la même façon on démontre (1.3.10) et on déduit les relations (1.3.7)-(1.3.8) du théorème de projection. ■

On peut réécrire ces relations sous la forme:

$$u - u^{2n+1} = P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp}(u - u^{2n}), \quad \forall n \geq 0. \quad (1.3.11)$$

$$u - u^{2n} = P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp}(u - u^{2n-1}), \quad \forall n \geq 1. \quad (1.3.12)$$

où

$$H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega_i) \oplus (H_0^1(\Omega_i))^\perp$$

Le processus alternatif de Schwarz pour le problème (1.3.2)-(1.3.3) est équivalent à une suite de projection sur des espaces de Hilbert. Pour étudier la convergence de la méthode, on est ramené à étudier le comportement de la suite (v_n) définie par:

$$\begin{aligned} v_{2n+1} &= u - u^{2n+1}, \forall n \geq 0. \\ v_{2n} &= u - u^{2n}, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

D'après (1.3.11)-(1.3.12), on obtient:

$$v_{2n+1} = P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v_{2n} \text{ et } v_{2n} = P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} v_{2n-1}. \quad (1.3.13)$$

Par conséquent

$$v_{2n+1} = P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} v_{2n-1}$$

D'où, on a le théorème de convergence suivant:

Théorème 1.3.2 *Si $H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega_1) + H_0^1(\Omega_2)$ ou $H_0^1(\Omega) = \overline{H_0^1(\Omega_1) + H_0^1(\Omega_2)}$ alors la suite (v_n) converge vers 0 et de plus il existe k appartenant à l'intervalle $[0, 1)$ telle que:*

$$\begin{cases} \left\| P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} \right\| \leq k \\ |v_{n+1}| \leq k^n |v_0|, \forall n \geq 0 \end{cases} \quad (1.3.14)$$

Preuve. On suppose que

$$(H_0^1(\Omega_1))^\perp \cap (H_0^1(\Omega_2))^\perp = \{0\}. \quad (1.3.15)$$

On doit étudier le comportement de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ établi comme suit :

$$v_0 \in H_0^1(\Omega) : v_{2n+1} = P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v_{2n}, v_{2n+2} = P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} v_{2n+1}, \forall n \geq 0$$

et on veut démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp \cap (H_0^1(\Omega_2))^\perp} v = P_{\{0\}} v = 0.$$

On a:

$$|v_{n+1}|^2 + |v_{n+1} - v_n|^2 = |v_n|^2, \forall n \geq 0$$

En effet, on pose:

$$v_n = v_{n+1} + v_n - v_{n+1}$$

On obtient

$$\begin{aligned} |v_n|^2 &= (v_n, v_n) = (v_{n+1} + v_n - v_{n+1}, v_{n+1} + v_n - v_{n+1}) \\ &= (v_{n+1}, v_{n+1}) + 2(v_{n+1}, v_n - v_{n+1}) + (v_n - v_{n+1}, v_n - v_{n+1}) \\ &= |v_{n+1}|^2 + |v_{n+1} - v_n|^2 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (v_{n+1}, v_n - v_{n+1}) &= \left(P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v_n, v_{n+1} - v_n \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

la dernière égalité due à l'orthogonalité $((v_{n+1} - v_n)$ est orthogonale à v_n), d'où

$$|v_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \text{ et } v_{n+1} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Puisque la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est convergente dans $H_0^1(\Omega)$ alors elle est bornée. D'après les propriétés des espaces de Hilbert, on peut extraire de toute suite bornée, une sous suite v_{n_k} qui converge faiblement vers $v \in H_0^1(\Omega)$ et l'autre $v_{n_{k+1}}$ converge vers v , d'où $v \in (H_0^1(\Omega_1))^\perp \cap (H_0^1(\Omega_2))^\perp$.

D'autre part, d'après le théorème (1.3.2) et les propriétés des espaces de Hilbert, on a :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{H_0^1(\Omega_1) + H_0^1(\Omega_2)} \iff (H_0^1(\Omega_1))^\perp \cap (H_0^1(\Omega_2))^\perp = (H_0^1(\Omega_1) + H_0^1(\Omega_2))^\perp = \{0\},$$

i.e $v = 0$.

On conclut que pour $l = 2n, n \geq 0$:

$$\begin{aligned} |v_l|^2 &= (v_l, v_l) = \left(v_l, P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v_{l-1} \right) = \left(P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v_l, P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} v_{l-2} \right) \\ &= \left(P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v_l, v_{l-2} \right) = (v_{l+2}, v_{l-2}). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $P_{(V_i^0)^\perp}$ est auto-adjoint. Et ainsi de suite on arrive à:

$$|v_l|^2 = (v_{2l-1}, v_0).$$

De la même façon pour $l = 2n + 1$. Donc v_n converge fortement vers zéro. ■

On déduit la première inégalité de (1.3.14) du lemme suivant:

Lemme 1.3.1 *Il existe une constante C positive telle que:*

$$|v_n| \leq C \left\{ \left| P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2 + \left| P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} v \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3.16)$$

Preuve. En appliquant le théorème de l'application ouverte à l'application T définie par

$$\begin{cases} T : H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2) \rightarrow H_0^1(\Omega) \\ (v_1, v_2) \rightarrow v = v_1 + v_2 \end{cases}$$

qui est surjective, on déduit qu'il existe une constante C telle que:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \exists (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2) \text{ telle que } (|v_1|^2 + |v_2|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C |v|$$

or on a

$$|v|^2 = (v, v) = (v, v_1 + v_2) = (v, v_1) + (v, v_2) \quad (1.3.17)$$

D'autre part, on a d'après les propriétés de la projection sur un espace de Hilbert

$$v = P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v + P_{H_0^1(\Omega_1)} v \quad (1.3.18)$$

on remplace (1.3.18) dans (1.3.17), on trouve

$$\begin{aligned} |v|^2 &= \left(v_1, P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v + P_{H_0^1(\Omega_1)} v \right) + \left(v_2, P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} v + P_{H_0^1(\Omega_2)} v \right) \\ &= \left(P_{H_0^1(\Omega_1)} v, v_1 \right) + \left(P_{H_0^1(\Omega_2)} v, v_2 \right) \end{aligned}$$

On utilise les inégalités de Cauchy Schwarz et Minkowski, on obtient

$$\begin{aligned}
 |v|^2 &= \left(P_{H_0^1(\Omega_1)} v, v_1 \right) + \left(P_{H_0^1(\Omega_2)} v, v_2 \right) \\
 &\leq \left(\left| P_{H_0^1(\Omega_1)} v \right|^2 |v_1|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\left| P_{H_0^1(\Omega_2)} v \right|^2 |v_2|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left(\left| P_{H_0^1(\Omega_1)} v \right|^2 + \left| P_{H_0^1(\Omega_2)} v \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (|v_1|^2 + |v_2|^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C |v| \left(\left| P_{H_0^1(\Omega_1)} v \right|^2 + \left| P_{H_0^1(\Omega_2)} v \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

ce qui donne (1.3.16).

Revenons à la démonstration du théorème (1.3.2), d'après (1.3.16), on a

$$\left| P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right| \leq C \left\{ \left| P_{H_0^1(\Omega_1)} P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2 + \left| P_{H_0^1(\Omega_2)} P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

telle que

$$\left| P_{H_0^1(\Omega_1)(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right| = 0,$$

ce qui donne

$$\left| P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right| \leq C \left| P_{H_0^1(\Omega_2)} P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right| \quad (1.3.19)$$

et comme $H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega_i) \oplus (H_0^1(\Omega_i))^\perp$, alors

$$\left| P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2 = \left| P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2 + \left| P_{H_0^1(\Omega_2)} P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2$$

on utilise (1.3.19)

$$\left| P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2 \geq \left| P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2 + \left(\frac{1}{C} \right)^2 \left| P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2$$

d'où,

$$\begin{aligned}
 \left| P_{(H_0^1(\Omega_2))^\perp} P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2 &\leq \left| P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2 - \left(\frac{1}{C} \right)^2 \left| P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2 \\
 &\leq \left(1 - \left(\frac{1}{C} \right)^2 \right) \left| P_{(H_0^1(\Omega_1))^\perp} v \right|^2, \forall v \in H_0^1(\Omega)
 \end{aligned}$$

ce qui donne 1.3.14 et achève la démonstration. ■

Remarque 1.3.1 *Notons finalement que la convergence de la **MAS** est géométrique et on peut l'appliquer à la résolution des problèmes avec des conditions aux limites de type Neumann, de Robin ou bien un mélange de conditions de Dirichlet, Neumann et Robin. Il est important de noter que l'étude de la convergence de la MAS dépend énormément de l'**EDP** à résoudre, plus particulièrement de l'opérateur et des conditions aux limites.*

*La difficulté rencontrée dans la **MAS**, est le fait qu'il peut avoir plus de deux sous-domaines qui s'intersectent. Pour éviter la difficulté et la lenteur de l'alternative dans ce cas et améliorer la convergence de la méthode de **P.L Lions** [11] on va proposer une nouvelle variante qu'on va l'appeler "Méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement" qui va accélérer la convergence et rendre cet algorithme parallèle.*

Méthode de décomposition de domaine sans recouvrement (avec interface)

Le but de ce chapitre est d'introduire la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement qui consiste à décomposer le domaine initial en deux ou plusieurs sous domaines à intersection vide voir (Figure (2.1.1)). Puis on considère le cas continu issu du problème modèle (1.1.1), en se basant sur l'article de **P.L. Lions** [11] qu'il utilise la méthode parallèle de Schwarz (**MPS**). Ensuite on donne une amélioration de la méthode avec un opérateur général L . L'idée de cette section a été introduire par **Deng** [5]-[6]. On passe après à la discrétisation par éléments finis. La convergence dans le cas discret a été démontrée par **Qin et al.** [14]-[15].

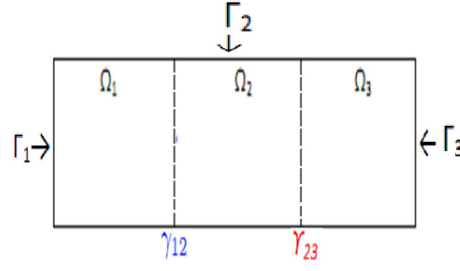


Figure 2.1.1 : Décomposition sans recouvrement

2.1 Présentation de la méthode

On décompose Ω en un nombre fini m (≥ 2) de sous domaines $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, on suppose que:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m \cup \sum, \text{ tel que } \sum = \bigcup_{1 \leq i \neq j \leq m} \gamma_{ij}$$

où Ω_i sont des ensembles ouverts bornés disjoints dans \mathbb{R}^N , γ_{ij} est l'interface entre Ω_i et Ω_j i.e $\gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ (voir figure 2.1.1) et pour chaque Ω_i , on a:

$$\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} \cap \overline{\Omega_k} = \emptyset, \forall 1 \leq i \neq j \neq k \leq m$$

Pierre Louis Lions s'est intéressé aux méthodes élaborées par Schwarz. En plus de peaufiner les preuves existantes de la **MAS**, il fut le premier à proposer une extension moderne de cette méthode. Depuis plusieurs années, le calcul en parallèle est le plus utilisé et **Lions** réalisa le potentiel que les méthodes des sous-domaines pourraient bénéficier de cet outil. Ainsi, il proposa une version parallèle de l'algorithme issu d'une décomposition sans recouvrement. Il utilise des conditions de type Robin sur les interfaces, qui peuvent être utilisées efficacement sur des machines à multiprocesseurs.

On considère le problème modèle (1.1.1) défini sur Ω . Soit $(u_i^0)_{1 \leq i \leq m}$ les données initiales dans $H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$. On construit une suite $(u_i^n)_{1 \leq i \leq m}$ solution $\forall n \geq 0$ du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u_i^{n+1} = f \text{ dans } \Omega_i, u_i^{n+1} \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i) \\ \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n+1} = \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_j^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i. \\ u_i^{n+1} = 0 \text{ sur } \Gamma_i \end{cases} \quad (2.1.1)$$

tel que $\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n+1}$ une condition de type Robin sur les interfaces communs γ_{ij} en tant qu'une condition de transmission, n_{ij} est la normale extérieur unitaire de $\partial\Omega_i$ sur γ_{ij} et $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0, 1 \leq i \neq j \leq m$.

Proposition 2.1.1 [11] *Si on a le procédé itératif (2.1.1) alors on peut déduire le problème suivant:*

$$\begin{cases} -\Delta (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) = 0 \text{ dans } \Omega_i, u_i^{n+1} - u_i^{n-1} \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i) \\ \frac{\partial (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})}{\partial n_{ij}} = \lambda_{ij} (2u_j^n - u_i^{n-1} - u_i^{n+1}) \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i. \\ u_i^{n+1} = 0 \text{ sur } \Gamma_i \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Preuve. Sur $\gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i$, on a:

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} = \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_j^n - \lambda_{ij} u_i^{n+1}$$

par une soustraction du $\frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}}$, on obtient:

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} - \frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}} = \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} (u_j^n - u_i^{n+1}) - \frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}}. \quad (2.1.3)$$

D'autre part, d'après la condition de Robin dans (2.1.1) on a :

$$\frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ji}} + \lambda_{ij} u_j^n = \frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ji}} + \lambda_{ij} u_i^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ji}, \forall 1 \leq i \leq m, j \neq i \quad (2.1.4)$$

Après quelque manipulation dans (2.1.3), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} - \frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}} &= \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} (u_j^n - u_i^{n+1}) - \frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}} \\ \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} - \frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}} &= \lambda_{ij} (u_j^n - u_i^{n+1}) + \left(\frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_j^n - \lambda_{ij} u_j^n + \lambda_{ij} u_i^{n-1} - \lambda_{ij} u_i^{n-1} - \frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}} \right) \\ \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} - \frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}} &= \lambda_{ij} (u_j^n - u_i^{n+1}) + \lambda_{ij} (u_j^n - u_i^{n-1}) + \left(\frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} - \lambda_{ij} u_j^n + \lambda_{ij} u_i^{n-1} - \frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}} \right). \end{aligned}$$

En utilisant (2.1.4) et $\frac{\partial}{\partial n_{ji}} = -\frac{\partial}{\partial n_{ij}}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} - \frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}} &= \lambda_{ij} (u_j^n - u_i^{n+1}) + \lambda_{ij} (u_j^n - u_i^{n-1}) \\ &= \lambda_{ij} (2u_j^n - u_i^{n-1} - u_i^{n+1}) \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq i \leq m, j \neq i. \end{aligned}$$

■

2.2 Analyse de la convergence de la méthode dans le cas continu

La convergence de cette méthode a été obtenue à travers l'utilisation des estimations "d'énergie" délicate et des inégalités de Sobolev. Le résultat principal de convergence est donné par le théorème suivant:

Théorème 2.2.1 [11] *Pour tous $1 \leq i \leq m$, u_i^n converge faiblement vers $u_{|\Omega_i}$ dans $H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ et en particulier $u_i^n|_{\gamma_{ij}}$ converge faiblement vers $u_{|\gamma_{ij}}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_{ij})$ pour tout $j \neq i$ quand $n \rightarrow +\infty$. En outre*

$$\frac{1}{2} (u_i^{n+1} + u_i^n)$$

converge vers $u_{|\gamma_{ij}}$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_{ij})$ quand $n \rightarrow +\infty$ pour tout $j \neq i$.

A ce stade, on a besoin d'introduire quelques notations:

$$I_1 = \{i \in \{1, \dots, m\} \setminus \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset\} \quad (2.2.1)$$

$$I_2 = \{i \in \{1, \dots, m\} \setminus \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \text{ est une intersection pour certain } j \in I_1\} \quad (2.2.2)$$

Preuve. La preuve est divisée en 03 étapes :

Etape 01:

On multiplie la première équation du problème (2.1.2) par $(u_i^{n+1} - u_i^{n-1})$

$$-\int_{\Omega_i} \Delta (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) dx = 0,$$

Puis, on intègre par partie sur Ω_i et on utilise l'équation deux dans (2.1.2) :

$$\int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) ds = 0$$

$$\int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} (2u_j^n - u_i^{n-1} - u_i^{n+1}) (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) ds = 0$$

$$\int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} ((u_i^{n+1} - u_j^n) - (u_j^n - u_i^{n-1})) ((u_i^{n+1} - u_j^n) + (u_j^n - u_i^{n-1})) ds = 0$$

pour avoir

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} |u_i^{n+1} - u_j^n|^2 ds \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} |u_j^n - u_i^{n-1}|^2 ds. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq m$, en sommant par rapport à n on obtient:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} (|u_j^n - u_i^{n-1}|^2 - |u_i^{n+1} - u_j^n|^2) ds \end{aligned}$$

En sommant jusqu'à M entier positif

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx &= \sum_{n=1}^M \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} (|u_j^n - u_i^{n-1}|^2 - |u_i^{n+1} - u_j^n|^2) ds \\ &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \left(|u_j^1 - u_i^0|^2 - |u_i^{M+1} - u_j^M|^2 \right). \end{aligned}$$

Donc la série est bornée i.e

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega_i} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 dx \leq C. \quad (2.2.3)$$

Si $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, d'après (2.2.3) et l'inégalité de Poincaré, on déduit que :

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq i \leq m} \int_{\Omega_i} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2 dx \leq C, \quad (2.2.4)$$

i.e (2.2.4) est vraie pour $i \in I_1$:

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{i \in I_1} \int_{\Omega_i} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2 dx \leq C, \quad (2.2.5)$$

et d'après (2.1.2) – (2.2.3) et (2.2.5) pour $i \in I_2$ on a

$$\sum_{n \geq 2} \left(\left\| \frac{\partial}{\partial n_{ij}} (u_j^n - u_j^{n-2}) \right\|_{0, \gamma_{ij}}^2 + \lambda_{ij} \|u_j^n - u_j^{n-2}\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \right) \leq C, j \in I_1.$$

d'où

$$\sum_{n \geq 2} \left\| \frac{\partial}{\partial n_{ij}} (u_j^n - u_j^{n-2}) + \lambda_{ij} (u_j^n - u_j^{n-2}) \right\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \leq C, j \in I_1. \quad (2.2.6)$$

D'autre part, d'après l'équation deux dans (2.1.1) on a

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n+1} = \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_j^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial u_i^{n-1}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n-1} = \frac{\partial u_j^{n-2}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_j^{n-2} \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (2.2.8)$$

après, on fait une soustraction entre (2.2.7) et (2.2.8) et on applique la norme dans $L^2(\gamma_{ij})$, pour avoir

$$\sum_{n \geq 2} \left\| \frac{\partial}{\partial n_{ij}} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) + \lambda_{ij} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \right\|_{0, \gamma_{ij}}^2 = \sum_{n \geq 2} \left\| \frac{\partial}{\partial n_{ij}} (u_j^n - u_j^{n-2}) + \lambda_{ij} (u_j^n - u_j^{n-2}) \right\|_{0, \gamma_{ij}}^2$$

et d'après (2.2.6), on obtient

$$\sum_{n \geq 1} \left\| \frac{\partial}{\partial n_{ij}} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) + \lambda_{ij} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \right\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \leq C, i \in I_2. \quad (2.2.9)$$

Donc, on déduit que

$$\sum_{n \geq 1} \int_{\Omega_i} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2 dx \leq C, i \in I_2.$$

■

On voit également que (2.2.9) – (2.2.3), nous permettent d'énoncer le lemme ci-après qui joue le rôle de l'inégalité de **Poincaré** lorsque $i \in I_2$:

Lemme 2.2.1 *Soit ω un ouvert, lisse dans \mathbb{R}^N avec γ_0 un ouvert (relatif à $\partial\omega$) qui est un sous ensemble de $\partial\Omega$ et $\lambda > 0$. Alors, il existe une constante positive C tel que*

$$\|u\|_{L^2(\omega)} \leq C \left\{ \|\nabla u\|_{L^2(\omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} + \lambda u \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\gamma_0)} \right\} \quad (2.2.10)$$

pour tout u satisfaisant

$$-\Delta u = 0 \text{ dans } \omega.$$

Remarque 2.2.1 *Pour plus de détails, voir la preuve de ce lemme dans l'article de P.L Lions [11].*

Revenons à la démonstration du théorème (2.2.1).

Preuve. Maintenant, On applique ce lemme pour $i \in I_2$, on obtient

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_i} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2 dx \leq C. \quad (2.2.11)$$

Etape 02:

On multiplie la première équation dans (2.1.2) par u_i^{n+1} , on utilise l'équation deux de (2.1.2) et on intègre par partie sur Ω_i pour tout i, n :

$$\int_{\Omega_i} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla u_i^{n+1} dx + \sum_{1 \leq j \neq i \leq m} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} (u_i^{n+1} - u_i^{n-1} - 2u_j^n) u_i^{n+1} ds = 0 \quad (2.2.12)$$

On remarque alors qu'on peut écrire:

$$\frac{1}{2} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla u_i^{n+1} = \frac{1}{2} |\nabla u_i^{n+1}|^2 - \frac{1}{2} \nabla u_i^{n-1} \nabla u_i^{n+1} \quad (2.2.13)$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1} + u_i^{n-1}) \\
 &= \frac{1}{2} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 + \frac{1}{2} (\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla u_i^{n-1}) \\
 &= \frac{1}{2} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u_i^{n-1}|^2 + \frac{1}{2} \nabla u_i^{n-1} \nabla u_i^{n+1}
 \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

En sommant (2.2.13) et (2.2.15)

$$\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) \nabla u_i^{n+1} = \frac{1}{2} |\nabla u_i^{n+1}|^2 + \frac{1}{2} |\nabla (u_i^{n+1} - u_i^{n-1})|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u_i^{n-1}|^2. \tag{2.2.16}$$

On fait la même chose pour $(u_i^{n+1} - u_i^{n-1} - 2u_j^n) u_i^{n+1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 (u_i^{n+1} - u_i^{n-1} - 2u_j^n) u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} |u_i^{n+1}|^2 + \frac{1}{2} |u_i^{n-1}|^2 - |u_j^n|^2 + |u_i^{n+1} - u_i^n|^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} |u_i^{n+1} - u_i^{n-1}|^2.
 \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

On remplace (2.2.16) et (2.2.17) dans (2.2.12) et en raison de (2.2.11) que pour tout $1 \leq i \leq m$ et $n \geq 0$, on trouve:

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_i^{n+1}|^2 dx + \int_{\partial\Omega_i} |u_i^{n+1}|^2 ds \leq C \tag{2.2.18}$$

et

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{j \neq i, \gamma_{ij}} \int |u_i^{n+1} - u_i^n|^2 ds \leq C. \tag{2.2.19}$$

Etape 03 :

On sait que pour une série bornée, la limite de son terme général tend vers 0. Donc, en raison de (2.2.3), (2.2.11), (2.2.19) que $u_i^{n+1} - u_i^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\gamma_{ij}) \subset L^2(\gamma_{ij})$, pour tout $1 \leq i \neq j \leq m$. L'inégalité (2.2.18) implique immédiatement que $(u_i^n)_n$ est bornée dans $H^1(\Omega_i)$ pour tout $i, 1 \leq i \leq m$. En utilisant les propriétés des espaces de **Hilbert**, on peut extraire de toute suite bornée une sous suite $(u_i^{n_k})_{n_k}$ qui converge faiblement vers $u_i \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma_{ij}) \subset L^2(\gamma_{ij})$ et puisque la limite est unique, alors u_i^n aussi converge vers u_i . Ainsi, u_i satisfait 2.1.1, donc on a

$$u_i = u_j \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq i \neq j \leq m,$$

et

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_{ij}} = \frac{\partial u_j}{\partial n_{ij}} \text{ dans } L^2(\gamma_{ij}), \forall 1 \leq i \neq j \leq m,$$

de plus

$$u_i \equiv u_{|\Omega_i}, \forall 1 \leq i \neq j \leq m.$$

Pour le reste de la démonstration voir l'article de P.L Lions [9]. ■

2.3 Amélioration de la convergence de la méthode de Lions (Deng [5])

Dans cette section, on continue une recherche systématique sur les propriétés de convergence du procédé itératif (2.1.1) pour la méthode de décomposition de domaine sans recouvrement et on remplace l'opérateur de Laplace $-\Delta$ par un opérateur général L , i.e. on généralise le problème (1.1.1) comme suit :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où $f \in L^2(\Omega)$, et

$$Lu = -\sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha_{kl}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) + \alpha_0(x) u. \quad (2.3.2)$$

$\alpha_0(x) \in L^\infty(\Omega)$ est non négatif, et $\alpha_{kl}(x)$ sont définis symétriques et uniformément positifs c-à-d, il existe une constante $\beta > 0$ telle que :

$$\sum_{k,l} \alpha_{kl}(x) \zeta_k \zeta_l \geq \beta |\zeta|^2, \forall \zeta \in \mathbb{R}^N \text{ sur } \Omega. \quad (2.3.3)$$

La formulation faible associée à (2.3.1) est

$$a(u, v) = f(v)_\Omega, \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2.3.4)$$

où

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad (2.3.5)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{k,l} \alpha_{k,l}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_l} + \alpha_0(x) uv \right) dx,$$

$$f(v)_{\Omega} = \int_{\Omega} f v dx.$$

On vérifie facilement que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue et coercive et que la forme linéaire $f(v)_{\Omega}$ est continue et par suite, par application du théorème (1.1.4) (Lax – Milgram), on déduit que le problème (2.3.4) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ qui est aussi solution du problème (2.3.1) au sens faible.

On utilise toujours la condition de type Robin aux limites et on définit alors le procédé itératif suivant basé sur la décomposition sans recouvrement de domaine comme suit (voir Deng [5]):

$$\begin{cases} Lu_i^n = f \text{ dans } \Omega_i, \\ \frac{\partial u_i^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^n = g_{ij}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ u_i^n = 0 \text{ sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (2.3.6)$$

avec $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$ ($1 \leq i \neq j \leq m$) une donnée initiale, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$, la mesure de γ_{ij} est strictement positive, $n_{ij} = (n_{ij}^{(1)}, n_{ij}^{(2)}, \dots, n_{ij}^{(N)})$ est la normale extérieur unitaire de $\partial\Omega_i$ sur γ_{ij} et la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n_{ij}} \in L^2(\gamma_{ij})$ définit par

$$\frac{\partial u}{\partial n_{ij}} = \sum_{k,l} \left(\alpha_{k,l}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) n_{ij}^{(k)}, 1 \leq i \neq j \leq m \quad (2.3.7)$$

Pour améliorer cette méthode, **Deng** [5] a traité le problème de calcul de la dérivée normale à chaque itération dans la méthode proposée par **Lions** [11]. Il a introduit une technique de relaxation pour éviter de calculer les dérivées normales à chaque itération, comme suit :

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} u_j^n - g_{ij}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (2.3.8)$$

Cette nouvelle formulation du problème, nous permet davantage d'appliquer cette méthode aux problèmes de discrétisation.

La formulation faible associée au problème (2.3.6) est

$$a_i(u_i^n, v) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^n v ds = f(v)_{\Omega_i} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^n v ds, \forall v \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.3.9)$$

avec le renouvellement pour $n \geq 0$

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij}u_j^n - g_{ij}^n \text{ dans } L^2(\gamma_{ij}) \quad 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (2.3.10)$$

Il découle de l'équation deux dans (2.3.6) et (2.3.8) que :

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij}u_i^{n+1} = g_{ij}^{n+1} \quad (2.3.11)$$

$$\begin{aligned} &= 2\lambda_{ij}u_j^n - g_{ij}^n \\ &= 2\lambda_{ij}u_j^n - \left(\frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij}u_j^n \right) \\ &= \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ji}} + \lambda_{ij}u_j^n \text{ sur } \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

La manipulation formelle ci-dessus (2.3.11) montre que le procédé itératif (2.3.6) et (2.3.8) est essentiellement équivalent à la méthode de Lions pour les problèmes continus.

Pour étudier la convergence de cette méthode on a besoin des notations suivantes :

$$u_i = u|_{\Omega_i}, u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.3.13)$$

$$u_i^n = u_i^n|_{\Omega_i}, u^n = (u_i^n)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.3.14)$$

$$e^n = u^n - u, e^n = (e_i^n)_{1 \leq i \leq m} = (u_i^n - u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{i=1}^m H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.3.15)$$

$$\| \|g^n\| \|^2 = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |g_{ij}^n|^2 ds, g = (g_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq m}, \quad (2.3.16)$$

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^m \|v_i\|_{1,\Omega_i}^2, v = (v_i) \in \prod_{i=1}^m H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.3.17)$$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^m a_i(u, v), u = (u_i), v = (v_i) \in \prod_{i=1}^m H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i) \quad (2.3.18)$$

telle que e_i^n est l'erreur à l'étape n , satisfait le problème suivant:

$$\begin{cases} Le_i^n = 0, \text{ dans } \Omega_i \\ \frac{\partial e_i^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} e_i^n = g_{ij}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ e_i^n = 0 \text{ sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (2.3.19)$$

avec le renouvellement pour $n \geq 0$

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} e_j^n - g_{ji}^n, \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall 1 \leq j \leq m, j \neq i, \quad (2.3.20)$$

La formulation faible associée à (2.3.19) est

$$a_i(e_i^n, v) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} e_i^n v ds = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^n v ds, \forall v \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (2.3.21)$$

Pour $v_i = e_i^n \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ dans (2.3.21), on obtient

$$a_i(e_i^n, e_i^n) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^n - \lambda_{ij} e_i^n) e_i^n ds. \quad (2.3.22)$$

$$G_1 = \{\cup \Omega_k, \text{ tel que } M_k > 0\} \quad (2.3.23)$$

$$G_{r+1} = \{\cup \Omega_k, \text{ tel que } mes(\partial \Omega_k \cap \overline{G_r}) > 0, \partial \Omega_k \cap G_l = \emptyset \forall l \leq r\} \quad (2.3.24)$$

où $M_k = mes(\partial \Omega_k \cap \partial \Omega)$.

Lemme 2.3.1 Soient e^n, g_{ij}^n et g_{ij}^{n+1} définies comme dans (2.3.15) et (2.3.16) tel que:

$$g^k = (g_{ij}^k)_{1 \leq j \neq i \leq m}, k = n, n+1,$$

alors on a

$$\| \| g^{n+1} \| \|^2 = \| \| g^n \| \|^2 - 4a(e^n, e^n). \quad (2.3.25)$$

Preuve. On a d'après (2.3.20) – (2.3.22) et (2.3.18) que

$$\begin{aligned}
 \|\|g^{n+1}\|\|^2 &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |g_{ij}^{n+1}|^2 ds \\
 &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |2\lambda_{ij}e_j^n - g_{ji}^n|^2 ds \\
 &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |g_{ji}^n|^2 ds - 4 \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{\substack{1 \leq i < m \\ i \neq j}} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ji}^n - \lambda_{ij}e_j^n) e_j^n ds \\
 &= \|\|g^n\|\|^2 - 4 \sum_{1 \leq j \leq m} a_j(e_j^n, e_j^n) \\
 &= \|\|g^n\|\|^2 - 4a(e^n, e^n)
 \end{aligned}$$

où $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$. Alors (2.3.25) a été démontré. ■

Ce lemme est la clé pour démontrer la convergence du théorème suivant:

Théorème 2.3.1 Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ qui satisfait (2.3.5), une solution de (2.3.1) et soient $u_i^n \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) les solutions de (2.3.6) - (2.3.8). Alors pour tout $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$ on a :

$$\|u^n - u\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^m \|u_i^n - u_i\|_{1,\Omega_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (2.3.26)$$

où u^n, u_i et $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ sont définies dans (2.3.14), (2.3.13) et (2.3.17) respectivement.

Preuve. Grâce au le lemme (3.2.1) pour M entier positif

$$\sum_{n=1}^M a(e^n, e^n) = \frac{1}{4} \left(\|\|g^0\|\|^2 - \|\|g^{M+1}\|\|^2 \right) \quad (2.3.27)$$

On trouve d'après (2.3.19) et (2.3.27) que :

$$a(e^n, e^n) = \sum_{i=1}^m a(e_i^n, e_i^n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (2.3.28)$$

$$\|e_i^n\|_{1,\Omega_i} \leq C, \quad \forall n \geq 0, i = \overline{1, m} \quad (2.3.29)$$

Si $\alpha_0(x) \geq C_0 > 0$, on obtient à partir de (2.3.3) et (2.3.28) que

$$\|e^n\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^m \|e_i^n\|_{1,\Omega_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

L'étude du cas général exige le choix de $\alpha_0(x) = 0$ avec l'utilisation de (2.3.3) et (2.3.28) on aura:

$$\|\nabla e_i^n\|_{0,\Omega_i} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ pour } i = \overline{1, m}. \quad (2.3.30)$$

$$e_i^n = 0 \text{ sur } \Gamma_i; \forall i, \Omega_i \subset G_1. \quad (2.3.31)$$

D'après (2.3.30)-(2.3.31) et l'inégalité de Poincaré

$$\|e_i^n\|_{1,\Omega_i} \leq C \|\nabla e_i^n\|_{0,\Omega_i} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \forall i = 1, \dots, m, \Omega_i \subset G_1. \quad (2.3.32)$$

Grâce à (2.3.32) et le théorème de trace (1.1.1), on obtient, pour tout $i, \Omega_i \subset G_1$

$$\|e_i^n\|_{0,\gamma_{ij}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (2.3.33)$$

et d'après (2.3.21), (2.3.28) et (2.3.33) on obtient, pour tout $i, \Omega_i \subset G_1$.

$$\|g_{ij}^n\|_{0,\gamma_{ij}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (2.3.34)$$

Maintenant, on considère le cas où $\Omega_i \subset G_2, 1 \leq i \leq m$:

En raison de (2.3.10), (2.3.33) et (2.3.34), on peut avoir

$$\|g_{ij}^n\|_{0,\gamma_{ij}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \forall j, \Omega_j \subset G_1, \quad (2.3.35)$$

Par conséquent, prenons $v \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ tel que

$$v = \begin{cases} e_i^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall j, \Omega_j \subset G_1 \\ 0 \text{ ailleurs sur } \partial\Omega_i \end{cases}$$

Dans (2.3.21) et en employant (2.3.28), (2.3.29) et (2.3.35), on obtient pour tout $i, \Omega_i \subset G_2$

$$\|e_i^n\|_{0,\gamma_{ij}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \forall j, \Omega_j \subset G_1. \quad (2.3.36)$$

De la définition du (2.3.24), pour $i, \Omega_i \subset G_2, \exists j \setminus \Omega_j \subset G_1$, avec $mes(\gamma_{ij}) > 0$. Donc, d'après (2.3.30), (2.3.36) et l'inégalité de **Poincaré**, on obtient

$$\|e_i^n\|_{1,\Omega_i} \leq C \left(\|\nabla e_i^n\|_{0,\Omega_i} + \sum_{\Omega_j \subset G_1} \|e_i^n\|_{0,\gamma_{ij}} \right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, i, \Omega_i \subset G_2$$

Par le même raisonnement, on obtient les mêmes résultats dans le cas de $G_r, r \geq 3$:

$$\|e_i^n\|_{1,\Omega_i} \leq C \left(\|\nabla e_i^n\|_{0,\Omega_i} + \sum_{\Omega_j \subset G_{r-1}} \|e_i^n\|_{0,\gamma_{ij}} \right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, i, \Omega_i \subset G_r.$$

■

Remarque 2.3.1 *Cette méthode a plusieurs avantages. D'abord, le procédé itératif est très simple. En second lieu, contrairement à d'autres procédures, il n'a pas besoin de résoudre des problèmes globaux. Ainsi le procédé itératif est fortement parallèle et on n'a pas besoin de calculer les dérivées normales à chaque itération.*

2.4 La convergence de cette méthode dans le cas discret

En 1990, **Lions** [11] a utilisé la condition de Robin sur les interfaces communs d'une décomposition sans recouvrement pour une décomposition en plusieurs sous domaines. En 1997, **Deng** [5] a continué la recherche dans cette direction. Il utilise des fonctions $g_{ij} \in L^2(\gamma)$ qui remplace la condition aux limites précédente, cette dernière permet l'avantage d'éviter le calcul la dérivée normale à chaque itération.

La recherche concernant le taux de convergence de cette méthode sur plusieurs sous domaines est très active. Le taux de la MDD de Schwarz avec un petit recouvrement a été obtenu par **Brenner** et **Dryja & al.** [2]-[7] de l'ordre de $1 - O(hH^{-1})$ pour la version additive et multiplicative. Le taux le plus petit de la MDD sans recouvrement a été obtenu par **Qin** et **al.** [15]-[14] en 2006-2008 de l'ordre de $1 - O\left(h^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{1}{2}}\right)$ où h est le pas du maillage et H est le diamètre des Ω_i .

2.4.1 Position du problème approché et discrétisation par éléments finis

Pour obtenir une approximation numérique de u , on considère le cas particulier suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha_0 u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

du problème (2.3.1) où α_0 est une constante positive et $f \in L^2(\Omega)$.

On va présenter quelques résultats de convergence de cette méthode dans le cas discret en se basant sur les articles [14] et [15]. Alors, on a besoin d'introduire une triangulation τ_h de $\bar{\Omega}$, à l'aide de triangles fermés $t_k \in \tau_h$ de diamètre : $\text{diam}(t_k) \leq h_k$.

On construit l'espace des éléments finis $V^h \subset H_0^1(\Omega)$ (V^h est conforme) de dimension finie N_h (nombre de noeuds internes ou degré de liberté), dont $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$ est sa base. Dans le cas où V^h est non conforme alors on considère V^h l'espace des éléments finis de Grouzeix-Raviart sur τ_h . Les fonctions de V^h s'annule à chaque noeud N_h sur la frontière Ω .

Si V^h est l'espace conforme, N_h contient tous les noeuds intérieurs des éléments finis. Si V^h est non conforme, N_h contient tous les barycentres des éléments intérieurs t_k .

En outre, nous supposons que la décomposition de domaine n'a aucun "cross point" si V^h est un espace conforme. Un "cross point" est un point qui appartient à trois sous domaines et plus.

Soit $V_i^h = V_{|\Omega_i}^h$. Définir $V_i^{0,h} \subseteq V_i^h$ dont les fonctions s'annulent à chaque degré de liberté sur $\partial\Omega_i$. En plus, on définit $V_{ij}^{0,h} \subseteq V_{|\Omega_i \cup \Omega_j}^h$ dont les fonctions s'annulent à chaque degré de liberté sur $\partial(\bar{\Omega}_i \cup \bar{\Omega}_j)$.

Après, nous définissons les deux espaces T_i et T_{ij} sur $\partial\Omega_i$ et γ_{ij} respectivement. Si V^h est un espace conforme, nous définissons $T_i = V_{|\partial\Omega_i}^h$. Si V^h est un espace non conforme, nous définissons T_i pour être un espace des fonctions constantes par morceaux sur la triangulation $\tau_{\partial\Omega_i}$, où $\tau_{\partial\Omega_i} = \tau_h|_{\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega}$. En outre, soit $T_{ij} = T_i|_{\gamma_{ij}}$ l'espace conforme ou non conforme.

Si l'espace est conforme, alors on utilise les normes de H^1 et L^2 , sinon on utilise les normes $|\cdot|_{1,h}$, $\|\cdot\|_{1,h}$ où

$$|v|_{1,h}^2 = \sum_{t_i \in \tau_h} \int_{t_i} |\nabla v|^2, \quad \|v\|_{1,h}^2 = |v|_{1,h}^2 + H^{-2} \|v\|_0^2.$$

On introduit r_i, r_{ij} deux opérateurs de restrictions définies sur $\partial\Omega_i$ et γ_{ij} respectivement, si V^h est conforme :

$$\begin{cases} r_i : V_i^h \rightarrow T_i, & r_{ij} : V_i^h \rightarrow T_{ij}, \\ r_i v_i^h = v_i^h|_{\partial\Omega_i}, & r_{ij} v_i^h = v_i^h|_{\gamma_{ij}}. \end{cases}$$

Sinon

$$\begin{cases} r_i : V_i^h \rightarrow T_i, \\ r_i v_i^h|_{t_{k\partial\Omega_i}} \equiv v_i^h(b_k), \forall t_{k\partial\Omega_i} \in \tau_{\partial\Omega_i}, \end{cases}$$

où b_k est le barycentre de $t_{k\partial\Omega_i} = t_{k|\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega}$ et

$$\begin{cases} r_{ij} : V_i^h \rightarrow T_{ij}, \\ r_{ij} v_i^h = r_i v_i^h|_{\gamma_{ij}}, \end{cases}$$

Ainsi, on définit s_i, s_{ij} des opérateurs linéaire

$$s_i : T_i \rightarrow V_i^h$$

$$s_i w_i^h = \begin{cases} w_i^h, & \text{noeud sur } \partial\Omega_i \\ 0, & \text{autres noeuds} \end{cases},$$

$$s_{ij} : T_{ij} \rightarrow V_i^h$$

$$s_{ij} w_{ij}^h = \begin{cases} w_{ij}^h, & \text{noeud sur } \gamma_{ij} \\ 0, & \text{autres noeuds} \end{cases}.$$

Notons que $r_i v_i^h \neq v_i^h|_{\partial\Omega_i}$, $s_i w_i^h|_{\partial\Omega_i} \neq w_i^h$ en général. Cependant

$$v_i^h - s_i r_i v_i^h \in V_i^{0,h} \tag{2.4.1}$$

et

$$s_i r_i = Id_i, s_{ij} r_{ij} = Id_{ij} \quad (2.4.2)$$

sont des opérateurs d'identité sur T_i et T_{ij} respectivement. Par (2.4.2), nous savons que r_i et r_{ij} sont surjectifs. En outre, nous avons le lemme suivant. La preuve de ce lemme est dans [15].

Lemme 2.4.1 $\forall w_{ij}^h \in T_{ij}, \exists v_{ij}^h \in V_{ij}^{0,h}$ tels que $r_{ij} v_{ij}^h = w_{ij}^h$, où la mesure de γ_{ij} , $i \neq j$ est strictement positive.

Donc on considère le problème approché suivant

$$\begin{cases} -\Delta u^h + \alpha_0 u^h = f & \text{dans } \Omega \\ u^h = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4.3)$$

La formulation variationnelle associée à (2.4.3) est

$$a(u^h, v^h) = f(v^h)_\Omega, \forall v^h \in V^h \quad (2.4.4)$$

où

$$\begin{aligned} a(u^h, v^h) &= \sum_{t_k \in \tau^h} \int_{t_k} \nabla u^h \nabla v^h + \alpha_0 \int_{\Omega} u^h v^h dx, \\ f(v^h)_\Omega &= \int_{\Omega} f v^h dx. \end{aligned}$$

On définit le procédé itératif suivant basé sur la décomposition sans recouvrement comme suit

$$\begin{cases} -\Delta u_i^{n,h} + \alpha_0 u_i^{n,h} = f & \text{dans } \Omega_i, 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial u_i^{n,h}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n,h} = g_{ij}^{n,h} & \text{sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ u_i^{n,h} = 0 & \text{sur } \Gamma \cap \partial\Omega_i = \Gamma_i, \end{cases} \quad (2.4.5)$$

où

$$g_{ij}^{n,h} = 2\lambda_{ij}u_j^{n,h} - g_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i,$$

est le renouvellement sur l'interface γ_{ij} pour $n \geq 0, \lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ (λ_{ij} est un paramètre d'accélération), $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$ ($1 \leq i \neq j \leq m$) une donnée initiale et la mesure de γ_{ij} est strictement positive.

La formulation variationnelle discrète associée à (2.4.5) est

$$\begin{cases} a(u_i^{n,h}, v^h) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^{n,h} v^h ds = \int_{\Omega_i} f v^h dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^{n,h} v^h ds, \\ g_{ij}^{n,h} = 2\lambda_{ij}u_j^{n,h} - g_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \end{cases} \quad (2.4.6)$$

où $u^{n,h}, v^h \in \prod_{1 \leq i \leq m} V_i^h$.

2.4.2 Le taux de convergence de l'approximation par éléments finis

Pour chercher un taux de convergence de ce procédé itératif discret en fonction de h et H , on a besoin d'introduire une définition, un lemme et un théorème suivants :

Définition 2.4.1 Soit u^h la solution approchée par éléments finis sur Ω et $u^{n,h}$ est la solution approchée par éléments finis à la $n^{\text{ième}}$ itération du procédé itératif. Si on a

$$\|u^{n,h} - u^h\| \leq CA^n \|u^{0,h} - u^h\| \quad (2.4.7)$$

où $\|\cdot\|$ est une norme, $A \in [0, 1)$ et C est une constante indépendante de n , alors (2.4.7) est la convergence géométrique et A est le taux de convergence.

Remarque 2.4.1 Il est optimal s'il est indépendant de h et H .

Lemme 2.4.2 Soient r_{ij} l'opérateur de trace et s_{ij} un opérateur linéaire de trace inverse alors on a les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|r_{ij}v_i^h\|_{0,\gamma_{ij}} &\leq C \|v_i^h\|_{0,\gamma_{ij}}, \forall v_i^h \in V_i^h \\ \|s_{ij}w_{ij}^h\|_{0,\Omega_i} &\leq Ch^{\frac{1}{2}} \|w_{ij}^h\|_{0,\gamma_{ij}}, \forall w_{ij}^h \in T_{ij} \\ |s_{ij}w_{ij}^h|_{1,\Omega_i} &\leq Ch^{-\frac{1}{2}} \|w_{ij}^h\|_{0,\gamma_{ij}}, \forall w_{ij}^h \in T_{ij} \end{aligned}$$

où C est une constante générique indépendante de h .

Preuve. Pour démontrer ces inégalités de trace, on utilise des calculs direct et des inégalités inverses, voir [15]. ■

Théorème 2.4.1 *Si le diamètre de chaque $\Omega_i, 1 \leq i \leq m$ est $O(H)$, alors $\forall v_i^h \in V_i^h$ on a*

$$\|v_i^h\|_{0,\partial\Omega_i}^2 \leq CH \|v_i^h\|_{1,\Omega_i}^2,$$

où C est une constante générique indépendante de Ω_i .

Le théorème suivant indique l'existence de $g_{ij}^h \in T_{ij}$.

Théorème 2.4.2 *Si u^h est la solution approchée de (2.4.4) dans $\Omega, \lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ et $u_i^h = u_{|\Omega_i}^h$, alors $\exists g_{ij}^h \in T_{ij}$ telle que*

$$a_i(u_i^h, v_i^h) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^h v_i^h ds = \int_{\Omega_i} f v_i^h dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^h v_i^h ds, \quad (2.4.8)$$

de la forme

$$g_{ij}^h = 2\lambda_{ij}u_j^h - g_{ji}^h, \quad (2.4.9)$$

où $v^h = (v_1^h, v_2^h, \dots, v_m^h) \in \prod_{i=1}^m V_i^h$.

Preuve. Pour démontrer l'existence de g_{ij}^h on utilise théorème représentation de Riesz et lemme (2.4.1). La preuve du théorème est détaillé dans [14]. ■

Maintenant, on définit les erreurs

$$e_i^{n,h} = u_i^{n,h} - u_i^h \in V_i^h \text{ et } E_{ij}^{n,h} = g_{ij}^{n,h} - g_{ij}^h \in T_{ij} \quad (2.4.10)$$

où

$$\|E^{n,h}\|^2 = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |E_{ij}^{n,h}|^2 ds. E = (E_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq m}, \quad (2.4.11)$$

$e_i^{n,h}$ l'erreur à l'étape itérative n , satisfait

$$\begin{cases} -\Delta e_i^{n,h} + \alpha_0 e_i^{n,h} = 0 \text{ dans } \Omega_i, 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial e_i^{n,h}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} e_i^{n,h} = E_{ij}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ e_i^{n,h} = 0 \text{ sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (2.4.12)$$

$$E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} - E_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m, \text{ pour } n \geq 0, \quad (2.4.13)$$

avec $E_{ij}^{0,h} \in L^2(\gamma_{ij})$ ($1 \leq i \neq j \leq m$) une donnée initiale, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ et la mesure de γ_{ij} est strictement positive. La relation (2.4.13) est le renouvellement pour $n \geq 0$.

L'erreur $e^{n,h}$ satisfait le problème variationnel suivant

$$\begin{cases} a(e^{n,h}, v^h) + \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} e_i^{n,h} v^h ds = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} E_{ij}^{n,h} v^h ds, \\ E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} - E_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

où $e^{n,h}, v^h \in \prod_{1 \leq i \leq m} V_i^h$.

L'obtention du taux de convergence $A = 1 - Ch^{\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{2}}$ est selon le théorème suivant

Théorème 2.4.3 *Si $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0, \forall i, j, i \neq j$, alors les résultats de convergence du problème variationnel sont*

$$a(e^{n,h}, e^{n,h}) \leq \frac{1}{4} |||E^{n,h}|||^2,$$

$$|||E^{n,h}|||^2 \leq \left[1 - \frac{C}{\max(\lambda^{-\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}}, \lambda^{-\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \alpha_0^{\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{2}} \alpha_0^{-\frac{1}{2}})^2} \right]^n |||E^{0,h}|||^2,$$

En particulier, si $\alpha_0 = 1$, nous choisissons

$$\lambda = O\left(h^{-\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{2}}\right), \quad (2.4.14)$$

pour avoir

$$|||E^{n,h}|||^2 \leq \left[1 - C \min(h^{\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{2}}, h^{\frac{1}{2}} H^{\frac{3}{2}}) \right]^n |||E^{0,h}|||^2.$$

Si $\alpha_0 \in [H^{-2}, h^{-2}]$, Choisir le même λ que dans (2.4.14), pour obtenir

$$|||E^{n,h}|||^2 \leq \left(1 - Ch^{\frac{1}{2}} H^{-\frac{1}{2}}\right)^n |||E^{0,h}|||^2,$$

où C est une constante générique indépendante de h et H .

Preuve. La preuve du théorème est dans [14]. ■

Remarque 2.4.2 *Il n'est pas difficile de prolonger les résultats en cette section aux problèmes elliptiques de deuxième ordre plus général (comme on va le faire en chapitre 4).*

Méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement (MDDGR) dans le cas continu

Dans ce chapitre, on étudie la méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement (**MDDGR**) appliquée à problème (2.3.1). La convergence de la décomposition sans recouvrement a été détaillée dans le chapitre précédant. Puisque dans plusieurs cas on est amené à utiliser des discrétisations uniformes sur les sous domaines. La décomposition avec recouvrement nous permet d'utiliser des domaines simples adaptés à la discrétisation uniforme voir la figure originale de Schwarz (figure 0.0.2). Le but maintenant est de montrer la convergence de cette méthode dans le cas continu. On applique une idée similaire à l'idée de Deng [5].

Dans [11], Lions note la possibilité d'appliquer la condition de Robin sur les interfaces artificielles pour la **MDDGR** sans faire des détails. Engquist et Zhao [8] ont appliqué cette idée sur une décomposition d'un domaine simple en deux sous domaines (rectangle,

Ω_1		Ω_2		Ω_3
Ω_8		Ω_9		Ω_4
Ω_7		Ω_6		Ω_5

Figure 3.0.1 : Exemple de DD avec recouvrement en plusieurs sous domaines

cercle) pour utiliser l'analyse de Fourier. Notre but est d'utiliser la même idée pour plusieurs sous domaines $m \geq 2$ (Figure 3.0.1).

3.1 Description de la MDDGR

Soit Ω un ouvert borné dans \mathbb{R}^N . On décompose Ω en un nombre fini $m (\geq 2)$ de sous domaines $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, on suppose que :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m$$

où Ω_i sont des ensembles ouverts dans \mathbb{R}^N , γ_{ij} (γ_{ji}) est l'interface entre Ω_i et Ω_j (Ω_j et Ω_i) respectivement, et que $\Omega_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, tel que $\gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$ ($\gamma_{ji} = \Omega_i \cap \partial\Omega_j$).

On considère le problème modèle (2.3.1) défini sur Ω . On définit alors le procédé itératif suivant basé sur la décomposition avec recouvrement comme suit :

$$\begin{cases} Lu_i^n = f \text{ dans } \Omega_i, 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial u_i^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^n = g_{ij}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ u_i^n = 0 \text{ sur } \Gamma \cap \partial\Omega_i = \Gamma_i, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} u_j^n - g_{ji}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (3.1.2)$$

avec $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$ ($1 \leq i \neq j \leq m$) une donnée initiale, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ et la mesure de γ_{ij} est strictement positive. La relation (3.1.2) est le renouvellement pour l'étape $n = 0$. A partir de l'étape $n \geq 1$, on utilise le renouvellement suivant

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} (u_j^n - u_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.1.3)$$

La formulation faible associée au problème (3.1.1) est

$$a_i(u_i^n, v) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^n v ds = f(v)_i + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^n v ds, \forall v \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i), \quad (3.1.4)$$

Si on pose

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} u_j^n - g_{ji}^n \text{ dans } L^2(\gamma_{ij}), \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i,$$

donc

$$\begin{aligned} g_{ij}^{n+1} &= 2\lambda_{ij} u_j^n - g_{ji}^n \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij} u_j^n - \left(\frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ji}} + \lambda_{ji} u_j^n \right) \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij} u_j^n - \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ji}} - \lambda_{ji} u_j^n \text{ sur } \gamma_{ij}. \end{aligned}$$

Si $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$, les interfaces sont parallèles i.e. $\gamma_{ij} // \gamma_{ji} \implies \frac{\partial}{\partial n_{ji}} = -\frac{\partial}{\partial n_{ij}}$ on a

$$g_{ij}^{n+1} = \frac{\partial u_j^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_j^n \text{ sur } \gamma_{ij}.$$

Alors d'après ce qui précède, on peut prendre quand $n \geq 1$

$$\begin{aligned} g_{ij}^{n+1} &= 2\lambda_{ij} u_j^n - g_{ji}^n \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij} u_j^n - (2\lambda_{ij} u_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1}) \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij} (u_j^n - u_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}. \end{aligned}$$

Ce qui montre la relation entre la formulation avec des conditions de Robin avec la formulation avec relaxation.

3.2 Etude de la convergence de la MDDGR dans le cas continu

Maintenant, on veut démontrer la convergence dans la norme H^1 de la procédure itérative (3.1.2)-(3.1.3) et (3.1.4) pour n'importe quelle valeur initiale $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$.

L'erreur e_i^n est l'erreur à l'étape itérative n , satisfait

$$\begin{cases} Le_i^n = 0, \text{ dans } \Omega_i, 1 \leq i \leq m, \\ \frac{\partial e_i^n}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} e_i^n = g_{ij}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ e_i^n = 0 \text{ sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

pour $n = 0$, on utilise le renouvellement suivant sur l'interface γ_{ij}

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} e_j^n - g_{ji}^n \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \quad (3.2.2)$$

et pour $n \geq 1$, on utilise le renouvellement :

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} (e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.2.3)$$

On a employé g_{ij}^n à la place de $g_{ij}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial n_i} + \lambda_{ji} u\right)$. L'expression d'équations (3.2.1) satisfait le même type d'équations que (3.1.1) mais avec $f = 0$. Pour n'importe quelle valeur initiale g_{ij}^0 , la formulation faible habituelle est

$$a_i(e_i^n, v) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} e_i^n v ds = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^n v ds, \forall v \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i). \quad (3.2.4)$$

Si on prend $v = e_i^n \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ dans (3.2.4), on obtient

$$a_i(e_i^n, e_i^n) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^n - \lambda_{ij} e_i^n) e_i^n ds. \quad (3.2.5)$$

Pour démontrer la convergence de ce procédé itératif, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.1 Soient e^n, g_{ij}^{n-1} et g_{ij}^{n+1} définies comme dans (2.3.15) et (2.3.16) tel que

$$g^k = (g_{ij}^k)_{1 \leq i \neq j \leq m}, k = n-1, n+1$$

alors on a

$$\| \|g^{n+1}\| \|^2 = \| \|g^{n-1}\| \|^2 - 4S_n. \quad (3.2.6)$$

où

$$S_n = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} [\lambda_{ij} (e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1}] (e_i^{n-1} - e_j^n) ds. \quad (3.2.7)$$

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (3.2.8)$$

Preuve. On a d'après (3.2.3), le renouvellement pour $n \geq 1$ est donné sous la forme

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} (e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i.$$

on applique la norme (2.3.16), on trouve

$$\begin{aligned} \| \|g^{n+1}\| \|^2 &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |g_{ij}^{n+1}|^2 ds = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |2\lambda_{ij}(e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1}|^2 ds \\ &= \| \|g^{n-1}\| \|^2 + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{\lambda_{ij}^2}{\lambda_{ij}} \| \|e_j^n - e_i^{n-1}\| \|^2_{0, \gamma_{ij}} + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}} \langle e_j^n - e_i^{n-1}, g_{ij}^{n-1} \rangle_{\gamma_{ij}} \\ &= \| \|g^{n-1}\| \|^2 + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (\lambda_{ij}(e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1}) (e_j^n - e_i^{n-1}) ds \\ &= \| \|g^{n-1}\| \|^2 - 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (\lambda_{ij}(e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1}) (e_i^{n-1} - e_j^n) ds \\ &= \| \|g^{n-1}\| \|^2 - 4S_n, \end{aligned}$$

On sommant par rapport à n on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M S_n &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^M (\| \|g^{n-1}\| \|^2 - \| \|g^{n+1}\| \|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\| \|g^0\| \|^2 + \| \|g^1\| \|^2 - \| \|g^M\| \|^2 - \| \|g^{M+1}\| \|^2), \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{n=1}^M S_n$ est bornée alors la limite de son terme général

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (3.2.9)$$

■

Théorème 3.2.1 Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaisant (2.3.5) une solution de (2.3.1) et soient $u_i^n \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) les solutions de (3.1.1), (3.1.2) et (3.1.3). Alors pour tout $g_{ij}^0 \in L^2(\gamma_{ij})$ on a

$$\|u^n - u\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^m \|u_i^n - u_i\|_{1,\Omega_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad (3.2.10)$$

où u^n, u_i et $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ sont définies dans (2.3.13), (2.3.14) et (2.3.17) respectivement.

Preuve. Notre but est de démontrer que

$$\|e^n\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^m \|e_i^n\|_{1,\Omega_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (3.2.11)$$

D'après (3.2.3), on a

$$\begin{aligned} g_{ij}^{n+1} &= 2\lambda_{ij} (e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij} . \\ -g_{ij}^{n+1} + 2\lambda_{ij} e_j^n &= 2\lambda_{ij} e_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij} . \end{aligned}$$

On applique la norme de $L^2(\gamma_{ij})$, on obtient

$$\begin{aligned} \|-g_{ij}^{n+1} + 2\lambda_{ij} e_j^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &= \|2\lambda_{ij} e_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &= 4\lambda_{ij}^2 \|e_i^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + \|g_{ij}^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4\lambda_{ij} \langle e_i^{n-1}, g_{ij}^{n-1} \rangle . \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$, on divise l'égalité par λ_{ij} et en sommant sur $j, 1 \leq j \leq m$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \|-g_{ij}^{n+1} + 2\lambda_{ij} e_j^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &= 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \|e_i^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \|g_{ij}^{n-1}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &\quad - 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \langle e_i^{n-1}, g_{ij}^{n-1} \rangle , \end{aligned}$$

d'après (3.2.5), on obtient

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| -g_{ij}^{n+1} + 2\lambda_{ij}e_j^n \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| g_{ij}^{n-1} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4a_i(e_i^{n-1}, e_i^{n-1}),$$

en sommant sur $i, 1 \leq i \leq m$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| -g_{ij}^{n+1} + 2\lambda_{ij}e_j^n \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| g_{ij}^{n-1} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4 \sum_{i=1}^m a_i(e_i^{n-1}, e_i^{n-1}),$$

i.e

$$\left\| \left\| g^{n-1} \right\| \right\|^2 - 4a(e^{n-1}, e^{n-1}) \geq 0,$$

d'où

$$a(e^{n-1}, e^{n-1}) \leq \frac{1}{4} \left\| \left\| g^{n-1} \right\| \right\|^2. \quad (3.2.12)$$

Ainsi, d'après le renouvellement (3.2.3), on a

$$\begin{aligned} g_{ij}^{n+1} &= 2\lambda_{ij}(e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij}e_j^n - (2\lambda_{ij}e_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1}) \text{ sur } \gamma_{ij} \\ &= 2\lambda_{ij}e_j^n - g_{ji}^n \text{ sur } \gamma_{ij}. \end{aligned}$$

i.e

$$\begin{aligned} g_{ji}^n &= 2\lambda_{ij}e_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij} \\ g_{ji}^n - \lambda_{ij}e_i^{n-1} &= \lambda_{ij}e_i^{n-1} - g_{ij}^{n-1}. \end{aligned}$$

On multiplie l'égalité par e_i^{n-1} , on obtient

$$g_{ji}^n e_i^{n-1} - \lambda_{ij}(e_i^{n-1})^2 = \lambda_{ij}(e_i^{n-1})^2 - g_{ij}^{n-1} e_i^{n-1}.$$

On intègre l'égalité sur γ_{ij} et on somme sur $j, 1 \leq j \leq m, j \neq i$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ji}^n - \lambda_{ij}e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds &= - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^{n-1} - \lambda_{ij}e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds \\ &= -a(e_i^{n-1}, e_i^{n-1}) \leq 0, \end{aligned}$$

i.e

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ji}^n - \lambda_{ij} e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds \leq 0. \quad (3.2.13)$$

Puisque (3.2.13) est négative et $\gamma_{ij} // \gamma_{ji}$, $|\gamma_{ij}| = |\gamma_{ji}|$, alors le signe de l'intégrale reste toujours négatif si on intègre (3.2.13) sur γ_{ji}

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ji}} (g_{ji}^n - \lambda_{ij} e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds \leq 0, \quad (3.2.14)$$

on somme (3.2.14) sur $i, 1 \leq i \leq m$

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ji}} (g_{ji}^n - \lambda_{ij} e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds \leq 0, \quad (3.2.15)$$

et on a aussi d'après le renouvellement (3.2.3)

$$g_{ij}^{n+1} = 2\lambda_{ij} (e_j^n - e_i^{n-1}) + g_{ij}^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i,$$

i.e

$$g_{ij}^{n+1} - 2\lambda_{ij} e_j^n = g_{ij}^{n-1} - 2\lambda_{ij} e_i^{n-1} \text{ sur } \gamma_{ij}.$$

On applique la norme de $L^2(\gamma_{ij})$ aux deux côtés de l'égalité

$$\|g_{ij}^{n+1} - 2\lambda_{ij} e_j^n\|_{0, \gamma_{ij}}^2 = \|g_{ij}^{n-1} - 2\lambda_{ij} e_i^{n-1}\|_{0, \gamma_{ij}}^2,$$

$$\begin{aligned} \|g_{ij}^{n+1}\|_{0, \gamma_{ij}}^2 + 4\lambda_{ij}^2 \|e_j^n\|_{0, \gamma_{ij}}^2 - 4\lambda_{ij} \langle g_{ij}^{n+1}, e_j^n \rangle &= \|g_{ij}^{n-1}\|_{0, \gamma_{ij}}^2 + 4\lambda_{ij}^2 \|e_i^{n-1}\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \\ &\quad - 4\lambda_{ij} \langle g_{ij}^{n-1}, e_i^{n-1} \rangle. \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{ij} > 0$ on divise l'égalité par λ_{ij} et on somme sur $1 \leq i \neq j \leq m$, on obtient

$$\|g^{n+1}\|^2 - 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^{n+1} - \lambda_{ij} e_j^n) e_j^n ds = \|g^{n-1}\|^2 - 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^{n-1} - \lambda_{ij} e_i^{n-1}) e_i^{n-1} ds$$

$$\|g^{n+1}\|^2 - \|g^{n-1}\|^2 + 4a (e^{n-1}, e^{n-1}) = 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (g_{ij}^{n+1} - \lambda_{ij} e_j^n) e_j^n ds,$$

d'après (3.2.15), on a

$$\begin{aligned} \left\| \|g^{n+1}\| \right\|^2 - \left\| \|g^{n-1}\| \right\|^2 + 4a(e^{n-1}, e^{n-1}) &\leq 0, \\ -4S_n + 4a(e^{n-1}, e^{n-1}) &\leq 0, \end{aligned}$$

i.e.

$$a(e^{n-1}, e^{n-1}) \leq S_n. \quad (3.2.16)$$

Donc d'après (3.2.16) et (3.2.9), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(e^n, e^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m a(e_i^n, e_i^n) = 0, \quad (3.2.17)$$

et d'après (3.2.16), on a

$$\begin{aligned} 4S_n &\geq 0, \\ \left\| \|g^{n+1}\| \right\|^2 &\leq \left\| \|g^{n-1}\| \right\|^2. \end{aligned}$$

i.e. S_n est une suite décroissante positive.

On veut démontrer aussi que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \|g^n\| \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \|g_{ij}^n\|_{0, \gamma_{ij}}^2 = 0, \quad (3.2.18)$$

On a d'après le lemme (3.2.1)

$$\left\| \|g^{n+1}\| \right\|^2 = \left\| \|g^{n-1}\| \right\|^2 - 4S_n.$$

Puisque $\left\| \|g^{n+1}\| \right\|^2 \leq \left\| \|g^{n-1}\| \right\|^2$, on divise l'égalité par $\left\| \|g^{n-1}\| \right\|^2$

$$\frac{\left\| \|g^{n+1}\| \right\|^2}{\left\| \|g^{n-1}\| \right\|^2} \leq 1 - \frac{4S_n}{\left\| \|g^{n-1}\| \right\|^2 + 1} \leq 1,$$

où

$$1 - \frac{4S_n}{\left\| \|g^{n-1}\| \right\|^2 + 1} = M_n.$$

Donc

$$\frac{\left\| \|g^{n+1}\| \right\|^2}{\left\| \|g^{n-1}\| \right\|^2} \leq M_n \leq 1.$$

On général on peut écrire

$$\|g^n\|^2 = \begin{cases} M_n \times M_{n-1} \times \dots \times M_1 \|g^0\|^2, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ M_n \times M_{n-1} \times \dots \times M_2 \|g^1\|^2, & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

telles que

$$M_1 = \frac{4S_1}{\|g^0\|^2 + 1} \text{ et } M_2 = \frac{4S_2}{\|g^1\|^2 + 1}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g^n\|^2 = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \times M_{n-1} \times \dots \times M_1 \|g^0\|^2 = 0, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \times M_{n-1} \times \dots \times M_2 \|g^1\|^2 = 0, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

i.e. (3.2.18) est vérifiée.

Maintenant, $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, $\exists \mu > 0$ telle que

$$\mu \|e_i^n\|_{1, \Omega_i}^2 \leq a(e_i^n, e_i^n)$$

alors, pour $\alpha_0(x) \geq C_0 > 0$ et d'après (2.3.3) – (3.2.17) on obtient (3.2.11).

En général, $\alpha_0(x) = 0$, d'après (2.3.3) – (3.2.17) on trouve

$$\|\nabla e_i^n\|_{0, \Omega_i}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.2.19)$$

Ainsi, pour tout $i, \Omega_i \subset G_1$

$$e_i^n = 0, \text{ sur } \Gamma_i \text{ (mes}(\Gamma_i) > 0),$$

et

$$\|e_i^n\|_{1, \Omega_i}^2 = \|\nabla e_i^n\|_{0, \Omega_i}^2 + \|e_i^n\|_{0, \Omega_i}^2,$$

d'après (3.2.19) et l'inégalité de Poincaré

$$\|e_i^n\|_{1, \Omega_i}^2 \leq C \|\nabla e_i^n\|_{0, \Omega_i}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall i, \Omega_i \subset G_1. \quad (3.2.20)$$

Donc, d'après (3.2.20) et théorème (1.1.1), on a

$$\|e_i^n\|_{0, \gamma_{ij}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.2.21)$$

Pour tout $i, \Omega_i \subset G_1$, d'après (3.2.5), (3.2.17), (3.2.20) et (3.2.21), on obtient

$$\|g_{ij}^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.2.22)$$

ou on peut déduire directement de (3.2.18) pour tout $i, \Omega_i \subset G_1$

$$\|g_{ij}^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.2.23)$$

Ainsi, d'après (3.2.18) pour tout $i, \Omega_i \subset G_2$, on trouve

$$\|g_{ij}^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.2.24)$$

d'après (3.2.5), (3.2.17) et (3.2.24) pour tout $i, \Omega_i \subset G_2$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_i^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = 0, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (3.2.25)$$

Soit $v \in H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ telle que

$$v = \begin{cases} e_i^n & \text{sur } \gamma_{ij}, j, \Omega_j \subset G_1 \\ 0 & \text{ailleurs sur } \partial\Omega_i \end{cases} \quad (3.2.26)$$

Pour tout $i, \Omega_i \subset G_2$, $\exists j, \Omega_j \subset G_1$ tel que $\partial\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, alors on a d'après (3.2.19), (3.2.25), (3.2.26) et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|e_i^n\|_{1,\Omega_i}^2 \leq C \left(\|\nabla e_i^n\|_{0,\Omega_i}^2 + \sum_{\Omega_j \subset G_1} \|e_i^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, i, \Omega_i \subset G_2. \quad (3.2.27)$$

En général, pour tout $i, \Omega_i \subset G_l, l \geq 3$ on a

$$\|e_i^n\|_{1,\Omega_i}^2 \leq C \left(\|\nabla e_i^n\|_{0,\Omega_i}^2 + \sum_{\Omega_j \subset G_{l-1}} \|e_i^n\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, i, \Omega_i \subset G_l. \quad (3.2.28)$$

■

D'après ce précède, on conclut par ce corollaire

Corollaire 3.2.1 *Sous les conditions du théorème (3.2.1), nous avons*

$$\left\| g_{ij}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ji} u \right) \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, 1 \leq j \neq i \leq m. \quad (3.2.29)$$

g_{ij}^n est défini dans (3.1.2) – (3.1.3).

Méthode de décomposition de domaine généralisée avec recouvrement (MDDGR) dans le cas discret

On commence ce chapitre par la représentation numérique de la solution u du problème (2.3.1) et on donne sa formulation variationnelle, pour cela, on utilise la méthode des éléments finis sur les sous domaines. On passe après à l'étude de la convergence dans le cas discret (discrétisation par éléments finis conformes). L'objectif principal dans ce chapitre est d'obtenir un taux de convergence $A = 1 - O\left(\frac{h^{\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}}}{1+h+H}\right)^2$ qui dépend de H et h où $\lambda = O(H^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}})$ est le paramètre d'accélération. On utilise l'approche de la méthode d'énergie et des inégalités inverses pour l'estimation. On constate que Pour faciliter l'application de cette méthode aux problèmes de discrétisation, on utilise une technique de relaxation pour éviter les calculs des dérivées normales dans l'algorithme.

4.1 Position du problème approché et discrétisation par éléments finis

Pour obtenir une approximation numérique de u , on remplace le problème (2.3.1) par un problème approché. Alors, on a besoin d'introduire une triangulation τ_h de $\bar{\Omega}$, à l'aide de triangles fermés $t_k \in \tau_h$ de diamètre : $diam(t_k) \leq h_k$.

$$h = \max(h_k).$$

H : le diamètre de chaque Ω_i .

On construit l'espace des éléments finis $V^h \subset H_0^1(\Omega)$ de dimension finie N_h (nombre de nœuds internes ou degré de liberté), dont $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_h})$ est sa base. Donc

$$V^h = \{v^h \in C^0(\bar{\Omega}), v|_{t_k} = P_l, l = \overline{1, 3}, \forall t_k \in \tau_h, v|_{\Gamma} = 0\}. \quad (4.1.1)$$

L'approximation u^h de u dans cette base s'écrit sous la forme suivante

$$u^h = \sum_{k=1}^{N_h} u_k^h \varphi_k$$

où, u_k^h sont les valeurs aux nœuds de la triangulation et $V_i^h = V_{|\Omega_i}^h$ tel que

$$V_i^h = \{v^h \in V^h(\Omega_i) \setminus v|_{\Gamma_i} = 0\}.$$

Soit u^h la solution du problème approché suivant

$$\begin{cases} Lu^h = f & \text{dans } \Omega \\ u^h = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.1.2)$$

tel que $f \in L^2(\Omega)$ et L est un opérateur défini par (2.3.2).

La formulation variationnelle associée à (4.1.2) est

$$a(u^h, v^h) = (f, v^h), \forall v^h \in V^h \quad (4.1.3)$$

où, on a

$$a_{\Omega}(u^h, v^h) = \int_{\Omega} \left(\sum_{k,l} \alpha_{k,l}(x) \frac{\partial u^h}{\partial x_k} \frac{\partial v^h}{\partial x_l} + \alpha_0(x) u^h v^h \right) dx,$$

$$(f, v^h)_{\Omega} = \int_{\Omega} f v^h dx.$$

On travaille dans un espace conforme $V_i^h \subset H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$, on lui associe la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega_i}$ et la semi norme $|\cdot|_{1,\Omega_i}$.

On définit le procédé itératif suivant, basé sur la MDDGR comme suit :

On note par $(u_i^h)_{1 \leq i \leq m}$ la solution de ce procédé dans Ω_i , $1 \leq i \leq m$, à la $n^{\text{ième}}$ itération,

on a

$$\begin{cases} Lu_i^{n,h} = f \text{ dans } \Omega_i, 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial u_i^{n,h}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} u_i^{n,h} = g_{ij}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ u_i^{n,h} = 0 \text{ sur } \Gamma \cap \partial\Omega_i = \Gamma_i, \end{cases} \quad (4.1.4)$$

$$g_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} u_j^{n,h} - g_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i \quad (4.1.5)$$

avec $g_{ij}^{0,h} \in L^2(\gamma_{ij})$ ($1 \leq i \neq j \leq m$) une donnée initiale, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ et la mesure de γ_{ij} est strictement positive. La relation (4.1.5) est le renouvellement pour l'étape $n = 0$. A partir de l'étape $n \geq 1$, on utilise le renouvellement suivant :

$$g_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} (u_j^{n,h} - u_i^{n-1,h}) + g_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i. \quad (4.1.6)$$

Le problème variationnel de (4.1.4), $\forall v_i^h \in V_i^h$ est

$$a_i(u_i^{n,h}, v_i^h) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^{n,h} v_i^h ds = \int_{\Omega_i} f v_i^h dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^{n,h} v_i^h ds, \quad (4.1.7)$$

$$g_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} u_j^{n,h} - g_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij} \text{ pour } n = 0, \quad (4.1.8)$$

$$g_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} (u_j^{n,h} - u_i^{n-1,h}) + g_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \text{ pour } n \geq 1. \quad (4.1.9)$$

4.2 Etude de la convergence du procédé itératif discret de la MDDGR

On commence par le résultat préliminaire suivant

Théorème 4.2.1 Soit u^h la solution approchée de (4.1.3) dans Ω et $u_i^h = u|_{\Omega_i}$, alors $\exists g_{ij}^h \in T_{ij}$ telle que

$$a_i(u_i^h, v_i^h) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^h v_i^h ds = \int_{\Omega_i} f v_i^h dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^h v_i^h ds, \quad (4.2.1)$$

où $v^h = (v_1^h, v_2^h, \dots, v_m^h) \in \prod_{i=1}^m V_i^h$.

Preuve. On définit sur T_i la fonction

$$a_i(u^h, s_i r_i v_i^h) - \int_{\Omega_i} f s_i r_i v_i^h dx, \forall r_i v_i^h \in T_i$$

On applique le théorème de représentation de Riesz (1.1.2) i.e $\exists y_i \in T_i$ tel que

$$a_i(u^h, s_i r_i v_i^h) - \int_{\Omega_i} f s_i r_i v_i^h dx = \langle y_i, r_i v_i^h \rangle.$$

Puisque u^h est la solution approchée de (4.1.3) par $v_i^h - s_i r_i v_i^h \in V_i^h, \forall v_i^h \in V_i^h$

$$a_i(u^h, v_i^h - s_i r_i v_i^h) - \int_{\Omega_i} f (v_i^h - s_i r_i v_i^h) dx = 0.$$

Alors

$$a_i(u^h, v_i^h) - \int_{\Omega_i} f v_i^h dx = a_i(u^h, s_i r_i v_i^h) - \int_{\Omega_i} f s_i r_i v_i^h dx = \langle y_i, r_i v_i^h \rangle$$

Soit $y_{ij} = y_i|_{\gamma_{ij}} \in T_{ij}$

$$a_i(u^h, v_i^h) - \int_{\Omega_i} f v_i^h dx = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \langle y_{ij}, r_{ij} v_i^h \rangle|_{\gamma_{ij}}. \quad (4.2.2)$$

Soit y_{ij} écrite sous forme suivante

$$y_{ij} = g_{ij}^h - \lambda_{ij} u_i^h \text{ sur } \gamma_{ij}. \quad (4.2.3)$$

Maintenant si on restreint u^h sur γ_{ij} , on trouve

$$u_i^h|_{\gamma_{ij}} = u|_{\gamma_{ij}}, u_j^h|_{\gamma_{ij}} = u|_{\gamma_{ij}}$$

i.e

$$u_j^h - u_i^h = 0 \text{ sur } \gamma_{ij}. \quad (4.2.4)$$

Alors, d'après (4.2.3), (4.2.2) devient

$$a_i(u^h, v_i^h) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} u_i^h v_i^h ds = \int_{\Omega_i} f v_i^h dx + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} g_{ij}^h v_i^h ds,$$

■

Maintenant, on définit les erreurs

$$e_i^{n,h} = u_i^{n,h} - u_i^h \in V_i^h \text{ et } E_{ij}^{n,h} = g_{ij}^{n,h} - g_{ij}^h \in T_{ij} \quad (4.2.5)$$

$e_i^{n,h}$ l'erreur à l'étape itérative n , satisfait

$$\begin{cases} L e_i^{n,h} = 0 \text{ dans } \Omega_i, 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial e_i^{n,h}}{\partial n_{ij}} + \lambda_{ij} e_i^{n,h} = E_{ij}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i, \\ e_i^{n,h} = 0 \text{ sur } \Gamma_i, \end{cases} \quad (4.2.6)$$

$$E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} - E_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, \text{ pour } n = 0, \quad (4.2.7)$$

avec $E_{ij}^{0,h} \in L^2(\gamma_{ij})$ ($1 \leq i \neq j \leq m$) une donnée initiale, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$ et la mesure de γ_{ij} est strictement positive. La relation (4.2.7) est le renouvellement pour l'étape $n = 0$.

A partir de l'étape $n \geq 1$, on utilise le renouvellement suivant

$$E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} (e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m. \quad (4.2.8)$$

Sa formulation variationnelle prend la forme

$$a_i(e_i^{n,h}, v_i^h) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} e_i^{n,h} v_i^h ds = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} E_{ij}^{n,h} v_i^h ds, \forall v_i^h \in V_i^h, \quad (4.2.9)$$

si on prend $v_i^h = e_i^{n,h} \in V_i^h$ dans (4.2.9), on a

$$a_i \left(e_i^{n,h}, e_i^h \right) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} \left(E_{ij}^{n,h} - \lambda_{ij} e_i^{n,h} \right) e_i^{n,h} ds, \forall v_i^h \in V_i^h, \quad (4.2.10)$$

Remarque 4.2.1 Les notations pour l'étude de la convergence dans le cas discret sont les mêmes que dans le cas continu avec le changement de u par u^h et $H_{\Gamma_i}^1(\Omega_i)$ par V_i^h .

Notre but maintenant, est d'obtenir un taux de convergence de ce procédé itératif discret en fonction de h et H .

Lemme 4.2.1 Soient $e_i^{n,h}$, $E_{ij}^{n-1,h}$, $E_{ij}^{n+1,h}$, $\|\cdot\|$ définies comme dans (4.2.5)- (2.3.16)

$$E^{p,h} = \left(E_{ij}^{p,h} \right)_{1 \leq i \leq m}, p = n-1, n+1,$$

alors on a

$$\| \| E^{n+1,h} \| \| ^2 = \| \| E^{n-1,h} \| \| ^2 - 4S_{n,h}, \quad (4.2.11)$$

et

$$-4S_{n,h} \leq 0$$

où

$$S_{n,h} = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} \left(\lambda_{ij} (e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \right) (e_i^{n-1,h} - e_j^{n,h}) ds. \quad (4.2.12)$$

Preuve. On a d'après (4.2.8), le renouvellement pour $n \geq 1$ est donné sous la forme

$$E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} \left(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h} \right) + E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i.$$

On applique la norme (2.3.16), on trouve

$$\begin{aligned}
\| \| E^{n+1,h} \| \|^2 &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |E_{ij}^{n+1,h}|^2 ds = \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{1}{\lambda_{ij}} \int_{\gamma_{ij}} |2\lambda_{ij}(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h}|^2 ds \\
&= \| \| E^{n-1,h} \| \|^2 + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{\lambda_{ij}^2}{\lambda_{ij}} \| \| (e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) \| \|^2_{0,\gamma_{ij}} \\
&\quad + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}} \left\langle e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}, E_{ij}^{n-1,h} \right\rangle_{|\gamma_{ij}} \\
&= \| \| E^{n-1,h} \| \|^2 + 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} \left(\lambda_{ij}(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \right) (e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) ds \\
&= \| \| E^{n-1,h} \| \|^2 - 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} \left(\lambda_{ij}(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \right) (e_i^{n-1,h} - e_j^{n,h}) ds \\
&= \| \| E^{n-1,h} \| \|^2 - 4S_{n,h}. \tag{4.2.13}
\end{aligned}$$

En sommant sur $n, 1 \leq n \leq M$, on obtient

$$\begin{aligned}
-4 \sum_{n=1}^M S_{n,h} &= \sum_{n=1}^M \left(\| \| E^{n+1,h} \| \|^2 - \| \| E^{n-1,h} \| \|^2 \right) \\
&= - \| \| E^{0,h} \| \|^2 - \| \| E^{1,h} \| \|^2 + \| \| E^{M,h} \| \|^2 + \| \| E^{M+1,h} \| \|^2,
\end{aligned}$$

Puisque $-4 \sum_{n=1}^M S_{n,h}$ est bornée alors la limite de son terme général

$$-4S_{n,h} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{4.2.14}$$

i.e.

$$|-4S_{n,h}| < 1. \tag{4.2.15}$$

D'autre part, d'après le renouvellement (4.2.8) on a

$$\begin{aligned}
E_{ij}^{n+1,h} &= 2\lambda_{ij} \left(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h} \right) + E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \\
&= 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} - \left(2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} - E_{ij}^{n-1,h} \right) \text{ sur } \gamma_{ij}, \\
&= 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} - E_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij},
\end{aligned}$$

i.e.

$$E_{ji}^{n,h} = 2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} - E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, j \neq i,$$

$$E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h} = \lambda_{ij} e_i^{n-1,h} - E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \quad \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, \quad 1 \leq j \leq m, j \neq i.$$

On multiplie l'égalité par $e_i^{n-1,h}$, on trouve

$$e_i^{n-1,h} E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} \left(e_i^{n-1,h} \right)^2 = \lambda_{ij} \left(e_i^{n-1,h} \right)^2 - e_i^{n-1,h} E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}.$$

On intègre sur γ_{ij} et on somme sur j , $1 \leq j \leq m, i \neq j$ on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \int_{\gamma_{ij}} (E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h}) e_i^{n-1,h} ds &= - \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \int_{\gamma_{ij}} (E_{ij}^{n-1,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h}) e_i^{n-1,h} ds, \\ &= -a \left(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

i.e

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \int_{\gamma_{ij}} (E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h}) e_i^{n-1,h} ds \leq 0. \quad (4.2.16)$$

Puisque (4.2.16) est négative et $\gamma_{ij}/\gamma_{ji}, |\gamma_{ij}| = |\gamma_{ji}|$, alors le signe de l'intégral reste toujours négative si on intègre (4.2.16) sur γ_{ji}

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \int_{\gamma_{ji}} (E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h}) e_i^{n-1,h} ds \leq 0. \quad (4.2.17)$$

On somme sur i , $1 \leq i \leq m$

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ji}} (E_{ji}^{n,h} - \lambda_{ij} e_i^{n-1,h}) e_i^{n-1,h} ds \leq 0. \quad (4.2.18)$$

En plus, on a d'après le renouvellement (4.2.8)

$$E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} \left(e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h} \right) + E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \quad \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, \quad 1 \leq j \leq m, j \neq i,$$

i.e

$$E_{ij}^{n+1,h} - 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} = E_{ij}^{n-1,h} - 2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}.$$

On applique la norme de $L^2(\gamma_{ij})$

$$\left\| E_{ij}^{n+1,h} - 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = \left\| E_{ij}^{n-1,h} - 2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2,$$

$$\begin{aligned} \left\| E_{ij}^{n+1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + 4\lambda_{ij}^2 \left\| e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4\lambda_{ij} \left\langle E_{ij}^{n+1,h}, e_j^{n,h} \right\rangle &= \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &+ 4\lambda_{ij}^2 \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4\lambda_{ij} \left\langle E_{ij}^{n-1,h}, e_i^{n-1,h} \right\rangle. \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{ij} > 0$ on divise l'égalité sur λ_{ij} et on somme sur $i, j, 1 \leq i \neq j \leq m$, on obtient

$$\left\| E^{n+1,h} \right\|^2 - \left\| E^{n-1,h} \right\|^2 + 4a (e^{n-1,h}, e^{n-1,h}) = 4 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \int_{\gamma_{ij}} (E_{ij}^{n+1,h} - \lambda_{ij} e_j^{n,h}) e_j^{n,h} ds,$$

d'après (4.2.18), on a

$$\begin{aligned} \left\| E^{n+1,h} \right\|^2 - \left\| E^{n-1,h} \right\|^2 + 4a (e^{n-1,h}, e^{n-1,h}) &\leq 0, \\ -4S_{n,h} + 4a (e^{n-1,h}, e^{n-1,h}) &\leq 0, \end{aligned}$$

i.e

$$4a (e^{n-1,h}, e^{n-1,h}) \leq 4S_{n,h}. \quad (4.2.19)$$

et d'après (4.2.15), on conclut

$$\begin{aligned} 1 &> 4S_{n,h} \geq 0, \\ \left\| E^{n+1,h} \right\|^2 &\leq \left\| E^{n-1,h} \right\|^2. \end{aligned}$$

i.e $S_{n,h}$ est une suite décroissante positive. ■

L'erreur satisfait le problème variationnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} a(e^{n,h}, v^h) + \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} e_i^{n,h} v^h ds = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \int_{\gamma_{ij}} E_{ij}^{n,h} v^h ds, \forall v^h \in V^h, \\ E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} - E_{ji}^{n,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m, \\ E_{ij}^{n+1,h} = 2\lambda_{ij} (e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}, \gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}, 1 \leq j \leq m. \end{array} \right.$$

Théorème 4.2.2 Si $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0, \forall i, j, i \neq j$, alors les résultats de convergence du problème variationnel pour $0 < \alpha_0(x) \leq \alpha_{kl}(x) < \infty$ sont

$$a(e^{n,h}, e^{n,h}) \leq \frac{1}{4} \left\| E^{n,h} \right\|^2,$$

$$\| \| E^{n,h} \| \|^2 \leq \begin{cases} \left[1 - C(h^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}} + H^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}})^{-2} \right]^{\frac{n}{2}} \| \| E^{0,h} \| \|^2, & (n \text{ pair}). \\ \left[1 - C(h^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}} + H^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}})^{-2} \right]^{\frac{n+1}{2}} \| \| E^{1,h} \| \|^2, & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

où C est une constante générique indépendante de h et H .

Corollaire 4.2.1 Pour un choix de

$$\lambda = O(H^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}})$$

on a

$$\| \| E^{n,h} \| \|^2 \leq \begin{cases} \left(1 - C \left(\frac{h^{\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H} \right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} \| \| E^{0,h} \| \|^2, & (n \text{ pair}). \\ \left(1 - C \left(\frac{h^{\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H} \right)^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \| \| E^{1,h} \| \|^2, & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

Preuve. On veut démontrer que

$$a(e^{n,h}, e^{n,h}) \leq \frac{1}{4} \| \| E^{n,h} \| \|^2.$$

D'après (4.2.8), on a

$$\begin{aligned} E_{ij}^{n+1,h} &= 2\lambda_{ij} (e_j^{n,h} - e_i^{n-1,h}) + E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}. \\ -E_{ij}^{n+1,h} + 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} &= 2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} - E_{ij}^{n-1,h} \text{ sur } \gamma_{ij}. \end{aligned}$$

On applique la norme $L^2(\gamma_{ij})$ aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned} \left\| -E_{ij}^{n+1,h} + 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &= \left\| 2\lambda_{ij} e_i^{n-1,h} - E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &= 4\lambda_{ij}^2 \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4\lambda_{ij} \left\langle e_i^{n-1,h}, E_{ij}^{n-1,h} \right\rangle. \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} > 0$, on divise l'égalité par λ_{ij} et on somme par rapport à j ,

$1 \leq j \leq m$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| -E_{ij}^{n+1,h} + 2\lambda_{ij} e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &= 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \lambda_{ij} \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 + \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \\ &\quad - 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \left\langle e_i^{n-1,h}, E_{ij}^{n-1,h} \right\rangle, \end{aligned}$$

d'après (4.2.10), on obtient

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| -E_{ij}^{n+1,h} + 2\lambda_{ij}e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4a_i \left(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h} \right),$$

en sommant sur $i, 1 \leq i \leq m$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| -E_{ij}^{n+1,h} + 2\lambda_{ij}e_j^{n,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_{ij}} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 - 4 \sum_{i=1}^m a_i \left(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h} \right),$$

i.e

$$\left\| E^{n-1,h} \right\|^2 - 4a \left(e^{n-1,h}, e^{n-1,h} \right) \geq 0,$$

d'où

$$a \left(e^{n-1,h}, e^{n-1,h} \right) \leq \frac{1}{4} \left\| E^{n-1,h} \right\|^2. \quad (4.2.20)$$

Maintenant, si on prend $v_i^h = s_{ij}E_{ij}^{n-1,h}$ dans la formulation variationnelle (4.2.9), on obtient

$$\left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 = a_i \left(e_i^{n-1,h}, s_{ij}E_{ij}^{n-1,h} \right) + \lambda_{ij} \int_{\gamma_{ij}} e_i^{n-1,h} E_{ij}^{n-1,h} ds,$$

on utilise l'inégalité de Cauchy Schwarz (1.1.1), on trouve

$$\begin{aligned} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &\leq \max \alpha_{kl}(x) \left| e_i^{n-1,h} \right|_{1,\Omega_i} \left| s_{ij}E_{ij}^{n-1,h} \right|_{1,\Omega_i} \\ &+ \max \alpha_0(x) \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\Omega_i} \left\| s_{ij}E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\Omega_i} + \lambda_{ij} \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}, \end{aligned}$$

puis, on utilise le lemme (2.4.2) et le théorème de trace (2.4.1),

$$\begin{aligned} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &\leq Ch^{-\frac{1}{2}} \max \alpha_{kl}(x) \left| e_i^{n-1,h} \right|_{1,\Omega_i} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}} \\ &+ Ch^{\frac{1}{2}} \max \alpha_0(x) \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\Omega_i} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}} + C\lambda_{ij}H^{\frac{1}{2}} \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{1,\Omega_i} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}, \end{aligned}$$

Puisque $\left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{1,\Omega_i}^2 = \left| e_i^{n-1,h} \right|_{1,\Omega_i}^2 + \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{0,\Omega_i}^2$, alors

$$\left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \max \alpha_{kl}(x) + h^{\frac{1}{2}} \max \alpha_0(x) + \lambda_{ij}H^{\frac{1}{2}} \right] \left\| e_i^{n-1,h} \right\|_{1,\Omega_i} \left\| E_{ij}^{n-1,h} \right\|_{0,\gamma_{ij}},$$

comme $a_i(\cdot, \cdot)$ est coercive i.e. $\exists \beta$ tel que

$$a_i(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h}) \geq \beta \|e_i^{n-1,h}\|_{1,\Omega_i},$$

alors

$$\|E_{ij}^{n-1,h}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \max \alpha_{kl}(x) + h^{\frac{1}{2}} \max \alpha_0(x) + \lambda_{ij} H^{\frac{1}{2}} \right] a_i^{\frac{1}{2}}(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h}) \|E_{ij}^{n-1,h}\|_{0,\gamma_{ij}},$$

et pour $\lambda_{ij} = \lambda$, on multiplie l'inégalité par $\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \|E_{ij}^{n-1,h}\|_{0,\gamma_{ij}} &\leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right] a_i^{\frac{1}{2}}(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h}), \\ \frac{1}{\lambda} \|E_{ij}^{n-1,h}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 &\leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2 a_i(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h}). \end{aligned}$$

En sommant sur $i, j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, j \neq i$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda} \|E_{ij}^{n-1,h}\|_{0,\gamma_{ij}}^2 \leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2 \sum_{i=1}^m a_i(e_i^{n-1,h}, e_i^{n-1,h}),$$

on trouve

$$\|E^{n-1,h}\|^2 \leq C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2 a(e^{n-1,h}, e^{n-1,h}),$$

i.e

$$-a(e^{n-1,h}, e^{n-1,h}) \leq -\frac{C}{\left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2} \|E^{n-1,h}\|^2 \quad (4.2.21)$$

et on a d'après (4.2.19)

$$-4S_{n,h} \leq -\frac{C}{\left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2} \|E^{n-1,h}\|^2$$

$$\begin{aligned} \|E^{n+1,h}\|^2 - \|E^{n-1,h}\|^2 &\leq -\frac{C}{\left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2} \|E^{n-1,h}\|^2 \\ \|E^{n+1,h}\|^2 &\leq \left(1 - \frac{C}{\left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^2} \right) \|E^{n-1,h}\|^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\| \| E^{n+1,h} \| \|^2 \leq \left(1 - C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^{-2} \right) \| \| E^{n-1,h} \| \|^2$$

On général, on peut écrire

$$\| \| E^{n,h} \| \|^2 \leq \begin{cases} \left(1 - C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^{-2} \right)^{\frac{n}{2}} \| \| E^{0,h} \| \|^2, & \text{si } n \text{ pair,} \\ \left(1 - C \left[h^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} \right]^{-2} \right)^{\frac{n+1}{2}} \| \| E^{1,h} \| \|^2, & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

et pour $\lambda = O(H^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}})$, on obtient dans le cas où n est pair

$$\begin{aligned} \| \| E^{n,h} \| \|^2 &\leq \left(1 - C \left(h^{-\frac{1}{4}} H^{-\frac{1}{4}} + H^{-\frac{1}{4}} h^{\frac{3}{4}} + H^{\frac{3}{4}} h^{-\frac{1}{4}} \right)^{-2} \right)^{\frac{n}{2}} \| \| E^{0,h} \| \|^2, \\ &\leq \left(1 - C \left(\frac{1+h+H}{h^{\frac{1}{4}} H^{\frac{1}{4}}} \right)^{-2} \right)^{\frac{n}{2}} \| \| E^{0,h} \| \|^2, \\ &\leq \left(1 - C \left(\frac{h^{\frac{1}{4}} H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H} \right)^2 \right)^{\frac{n}{2}} \| \| E^{0,h} \| \|^2. \end{aligned}$$

et de même façons pour n est impair

$$\| \| E^{n,h} \| \|^2 \leq \left(1 - C \left(\frac{h^{\frac{1}{4}} H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H} \right)^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} \| \| E^{1,h} \| \|^2.$$

■

4.3 Application numérique

Le but de cette section est de valider les résultats théoriques obtenus dans le chapitre 4.

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \in L^2(\Omega) \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

On note par n le nombre d'itération, $Er_i = \left\| u_i - u_i^{h,n} \right\|_{1,\Omega_i}$, $1 \leq i \leq 9$, est l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée obtenue par **MDDGR** à l'itération n dans la norme H^1 .

On prend $\Omega = [0, 0.85]^2$. La solution exacte dans ce cas est $u(x, y) = xy(x - 0.85)(y - 0.85)e^{xy}$. On applique la **MDDGR** et on calcule en premier les solutions approchées $u_i^{h,n}$, sur $\Omega_i, 1 \leq i \leq 9$, pour un pas max h de discrétisation non uniforme sur $\Omega_i, 1 \leq i \leq 9$, un diamètre de sous domaines $H_1 = 0.494975$ et un diamètre du recouvrement $H_2 = 0.364005$. Le paramètre de relaxation $\lambda_i = H_i^{0.5}h^{-0.5}, i = 1, 2$. On prend $\Omega_1 = [0, 0.35]^2$ et ainsi de suite pour les autres sous domaines.

Au premier tableau, on utilise le diamètre de sous domaines H_1 , pour calculer le paramètre de relaxation λ_1 .

n	10	9	8	8	7	7
h	7.22656 (-2)	4.98827 (-2)	3.56725 (-2)	3.16248 (-2)	2.39612 (-2)	2.02743 (-2)
λ_1	2.61713	3.15004	3.72499	3.95619	4.54503	4.94104
Er_1	7.28185 (-4)	6.06232 (-4)	9.62553 (-4)	6.97588 (-4)	1.6411 (-3)	1.51838 (-3)
Er_2	6.42793 (-4)	4.21228 (-4)	2.42216 (-4)	4.88872 (-4)	9.88321 (-4)	8.73636 (-4)
Er_3	7.68888 (-4)	6.19124 (-4)	1.00608 (-3)	7.27570 (-4)	1.67470 (-3)	1.53050 (-3)
Er_4	7.46416 (-4)	5.77527 (-4)	3.36459 (-4)	5.06810 (-4)	1.00272 (-3)	8.55340 (-4)
Er_5	9.65344 (-4)	7.80042 (-4)	1.09302 (-3)	8.09513 (-4)	1.75415 (-3)	1.57165 (-3)
Er_6	8.27126 (-4)	5.35709 (-4)	3.29798 (-4)	5.05156 (-4)	9.99831 (-4)	8.55825 (-4)
Er_7	8.10454 (-4)	6.09655 (-4)	9.97034 (-4)	7.31062 (-4)	1.67650 (-3)	1.52733 (-3)
Er_8	6.38624 (-4)	4.10186 (-4)	2.61681 (-4)	4.85569 (-4)	9.92180 (-4)	8.70073 (-4)
Er_9	7.60580 (-4)	4.73420 (-4)	3.61371 (-4)	3.88561 (-4)	4.49320 (-4)	4.84113 (-4)

Au deuxième et troisième tableau, on utilise la taille du recouvrement H_2 , pour calculer le paramètre de relaxation λ_2 .

4.3. Application numérique

n	10	9	8	8	7	7
h	7.22656 (-2)	4.98827 (-2)	3.56725 (-2)	3.16248 (-2)	2.39612 (-2)	2.02743 (-2)
λ_2	2.24434	2.70134	3.19439	3.39266	3.89762	4.23722
Er_1	1.31766 (-3)	1.35437 (-3)	1.75157 (-3)	1.49889 (-3)	2.03904 (-3)	1.81746 (-3)
Er_2	1.16920 (-3)	1.05351 (-3)	9.19297 (-4)	6.21742 (-4)	1.47993 (-3)	1.19704 (-3)
Er_3	1.40724 (-3)	1.39505 (-3)	1.82353 (-3)	1.55541 (-3)	2.10579 (-3)	1.87078 (-3)
Er_4	1.30072 (-3)	1.19023 (-3)	1.02439 (-3)	7.15879 (-4)	1.54542 (-3)	1.22824 (-3)
Er_5	1.60020 (-3)	1.57622 (-3)	1.95841 (-3)	1.68027 (-3)	2.24863 (-3)	1.97966 (-3)
Er_6	1.33054 (-3)	1.17060 (-3)	1.01985 (-3)	7.16062 (-4)	1.54357 (-3)	1.22825 (-3)
Er_7	1.41778 (-3)	1.39459 (-3)	1.81453 (-3)	1.55687 (-3)	2.10757 (-3)	1.86765 (-3)
Er_8	1.16197 (-3)	1.05183 (-3)	9.17917 (-4)	6.26358 (-4)	1.48284 (-3)	1.19338 (-3)
Er_9	8.19311 (-4)	5.90348 (-4)	3.86911 (-4)	3.19053 (-4)	4.37793 (-4)	4.07200 (-4)

n	10	10	9	9	8	8
h	7.22656 (-2)	4.98827 (-2)	3.56725 (-2)	3.16248 (-2)	2.39612 (-2)	2.02743 (-2)
λ_2	2.24434	2.70134	3.19439	3.39266	3.89762	4.23722
Er_1	1.31766 (-3)	8.77678 (-4)	6.15172 (-4)	3.41723 (-4)	8.13174 (-4)	3.87056 (-4)
Er_2	1.16920 (-3)	8.01003 (-4)	4.34380 (-4)	2.51011 (-4)	3.54910 (-4)	8.75995 (-4)
Er_3	1.40724 (-3)	9.15757 (-4)	6.60285 (-4)	3.75350 (-4)	8.43662 (-4)	4.08682 (-4)
Er_4	1.30072 (-3)	9.14423 (-4)	5.63036 (-4)	3.79663 (-4)	3.83094 (-4)	8.78808 (-4)
Er_5	1.60020 (-3)	1.05113 (-4)	7.91121 (-4)	5.21362 (-4)	9.27689 (-4)	4.70390 (-4)
Er_6	1.33054 (-3)	8.76189 (-4)	5.49960 (-4)	3.78677 (-4)	3.78565 (-4)	8.79066 (-4)
Er_7	1.41778 (-3)	9.09449 (-4)	6.50644 (-4)	3.80656 (-4)	8.45709 (-4)	4.05448 (-4)
Er_8	1.16197 (-3)	7.92973 (-4)	4.36556 (-4)	2.57016 (-4)	3.52267 (-4)	8.77773 (-4)
Er_9	8.19311 (-4)	4.29479 (-4)	4.15460 (-4)	3.41727 (-4)	3.46492 (-4)	4.64665 (-4)

Remarque 4.3.1 *Le pas h est le même dans les trois tableaux.*

Les itérations dans le premier et le deuxième tableau sont les mêmes, mais dans le troisième tableau, les itérations sont différents par rapport au premier.

D'après les trois tableaux, on voit que l'erreur et nombre des itérations diminuent avec le raffinement du maillage en les sous domaines. Alors on constate que les résultats des tableaux sont presque les mêmes lorsque on utilise H_1 (le diamètre de domaine) ou H_2 (le diamètre du recouvrement) dans le calcul du meilleur paramètre de relaxation.

Conclusion

Les méthodes de décomposition de domaine avec et sans recouvrement sont des méthodes itératives couplées à une approche par sous-domaines. Elles représentent non pas une alternative mais un choix incontournable pour résoudre les problèmes discrets de grande taille.

Ces méthodes sont plus efficaces qu'une méthode itérative appliquée au problème global, car elles allient des méthodes directes et une méthode itérative pour résoudre un problème d'interface mieux conditionné que le problème global.

Elles permettent de décomposer le problème initial en des sous-problèmes de petite taille définis sur des géométries plus simples, on peut alors traiter des problèmes de grande taille pour lesquels aucun ordinateur n'aurait suffisamment de place mémoire.

Notre étude portée sur l'application de la méthode de décomposition de domaine généralisée pour une EDP de deuxième ordre. En utilisant des conditions aux limites de type Robin sur les interfaces dans les cas avec et sans recouvrement et une technique de relaxation. On a établi la convergence du processus itératif dans les cas continu et discret. En utilisant la méthode d'énergie et une technique de relaxation pour faciliter l'application de cette méthode aux problèmes discrets (on évite les calculs des dérivées normales sur les interfaces). Un taux de convergence de l'ordre optimal de $1 - O\left(\frac{h^{\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{4}}}{1+h+H}\right)^2$ est obtenu.

Bibliographie

- [1] **Adams R. A.**, Sobolev spaces, Pure and Applied Mathematics, vol. 65, Academic Press, New York, 1975.
- [2] **Brenner S. C.**, Lower bounds for two-level additive Schwarz preconditioners with small overlap, SIAM J. Sci. Comput., 21, pp. 1657-1669, 2000.
- [3] **Brézis H.**, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application, Masson, 1983.
- [4] **Chen W., Xu X. and Zhang S.**, On the optimal convergence of a Robin-Robin domain decomposition method. Journal of Computational Mathematics. Vol.32, No.4, 456–475, 2014.
- [5] **Deng Q.**, An analysis for a nonoverlapping domain decomposition iterative procedure, SIAM J. Sci. Comput., 18, 1517-1525, 1997.
- [6] **Deng Q.**, A nonoverlapping domain decomposition method for nonconforming finite element problems, Comm. Pure Appl. Anal., 2, 295 -306, 2003.
- [7] **Dryja M. and Widlund O. B.**, Domain decomposition algorithms with small overlap, SIAM J. Sci. Comput., 15, pp. 604-620, 1994.
- [8] **Engquist B. and Zhao H. K.**, Absorbing boundary conditions for Domain Decomposition. Appl. Num.Math., 1998.
- [9] **Guo W. and Hou L.S.**, Generalization and accelerations of Lions' nonoverlapping domain decomposition method for linear elliptic PDE, SIAM J. Numer. Anal., 41, 2056-2080, 2003.

- [10] **Lions P.L.**, On The Schwarz Alternating Method I, In Pro. First international Symposium on domain Decomposition method for Prtial Differential Equations. SIAM, Philadelphia 1988.
- [11] **Lions P.L.**, On the Schwarz alternating method III: a variant for nonoverlapping subdomains, in third international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, T. F. Chan, R. Glowinski, J. Perianx, and O. B. Widlund, eds., SIAM, Philadelphia, 202-223, 1990.
- [12] **Lui S.**, A Lions non-overlapping domain decomposition method for domains with an arbitrary interfaces, IMA J. Numer. Anal., 29, 332-349, 2009.
- [13] **Marini L.D. and Quarteroni A.**, Arelaxation procedure for domain decomposition methods using finite elements. Num. Math., 55, 575-598, 1989.
- [14] **Qin L., Shi Z. and Xu X.**, On the convergence rate of a parallel nonoverlapping domain decomposition method, Sciences in China, Series A: Mathematics, 51, 1461-1478, 2008.
- [15] **Qin L. and Xu X.**, On a parallel Robin-type nonoverlapping domain decomposition method, SIAM J. Numer. Anal., 44, pp. 2539-2558, 2006.
- [16] **Quarteroni A. and Valli A.**, Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Clarendon Press, Oxford, 1999.
- [17] **Schwarz H. A.**, Uber einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich, 15, pp. 272-286, 1870.
- [18] **Smith B. F., Bjorstad P. E., and Gropp W.**, Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 1996.

- [19] **Toselli A. and Widlund O.**, Domain decomposition methods algorithms and theory, vol. 34 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000.