وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار

- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Laboratoire de mathématiques appliquées

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme

DE DOCTORAT EN MATHEMATIQUES

Méthode Des équations Intégrales Au Bord Pour Le Bi-Laplacien

Option : Mathématiques et Applications

Par

NAILA BOUSELSAL

Sous la Direction de

HACENE SAKER Prof U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT:	Ali. DJELLIT	Prof	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR:	Faouzia. Rebbani	Prof	E.S.T.I. ANNABA
EXAMINATEUR:	Mahiéddine. Kouche	M.C.A	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR:	Abdelhak. Djebabla	M.C.A	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR:	Ahmed. Nouar	M.C.A	Univ. SKIKDA

Année : 2016/2017

Table des matières

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH qui m'a aidé pour terminer ce travail,

je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse, Monsieur H.SAKER , Professeur à l'université d'Annaba , pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Je remercie l'ensemble des membres du jury :

-Mr Ali. Djellit Professeur de l'Université d'Annaba, pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury.

-Mr H.Nouar Maître de Conférence (A) de l'Université de Skikda d'avoir accepté de faire le déplacement pour prendre part à mon jury de soutenance.

-Je tiens également à remercier avec une profonde sympathie madame F. Rebbani Professeur de l'Université d'Annaba, pour avoir accepté de juger ce travail.

-Mes remerciements vont également à l'égard de monsieur A.H.Djebabla Maître de Conférence (A) à l'université d'Annaba qui m'honore en acceptant de faire partie de mon jury.

-Je souhaite aussi vivement remercier monsieur M.Kouche Maître de Conférence (A) à l'Université d'Annaba d'avoir bien voulu participer à mon jury.

J'aimerais remercier tous les chercheurs que j'ai pu croiser lors de ces années, pour ces moments d'échange que nous avons cordialement partagés.

Ainsi, je remercie le Laboratoire Mathématique Appliquée pour son accueil.

Je souhaite remercier mes amis, mes collègues pour avoir toujours cru en moi, pour leur soutien, et leur compréhension.

A présent je tiens à remercier du fond de mon cœur mes parents, mes frères, mes sœurs ,ma famille, la famille de mon époux et à ninouche qui m'ont beaucoup encouragé durant ces années de travail , vous avez toujours été là pour moi dans les plus durs moments, merci maman d'avoir soutenu du mieux que tu pouvais , et merci papa de

m'avoir encouragé du mieux que tu pouvais jusqu'à la fin.

Enfin Je voudrai vivement remercier l'homme de ma vie, mon cher mari Med el FATEH de m'avoir encouragé soutenu sans faille ces derniers années, tu es le meilleur époux du monde, merci du fond de mon cœur.

Résumé

Dans cette thèse, en utilisant la méthode des équations intégrales au bord, pour étudier l'équation de Laplace et de Bi-Laplace avec des conditions non linéaires sur le bord. Basé sur la Formule de Green. On obtient un système d'équation intégrale non linéaire sur le bord. Par le Théorème de Browder et Minty sur les opérateurs monotones, l'existence et l'unicité de la solution est établie.

Mots-clés : méthode de l'équation intégrale au bord,Opérateur Pseudo-différentiel, des conditions aux limites non linéaires, l'inégalité de Gardiing.

Abstract

In this thesis, using the method of boundary integral equation study the Laplace equation and Bi-Laplace with nonlinear boundary conditions. Based on the green formula a nonlinear system of boundary integral equation is obtained. By the Browder and Minty theorem on monotone operators, the existence and the uniqueness of the solution is established.

KEY WORDS : boundary integral equation, pseudo differential operator, nonlinear boundary conditions , Garding inequality.

PRÉLIMINAIRES

Avant de procéder à notre étude des problèmes aux limites concernant le Laplacien, on introduit toutes les notations qui serons utilisées au fur et à mesure dans ce trvail.

Notations

Eléments d'espaces

- On désigne toujours par Ω un ouvert non vide dans le plan $\mathbb{R}^2$

- On note par $\partial\Omega := \Gamma$, la frontiére de Ω, c'est-à-dire $\Gamma := \bar{\Omega}\backslash\Omega$.

- Γ_1 et Γ_2 sont deux courbes C^∞ telles que :

- $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$.

- $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

- $B(x_0, r)$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

- $B_r := B(0, r)$.

- Γ_B est la forntière de la boule.

- χ_Ω désigne la fonction caractérsitique de Ω.

- δ est la mesure de Dirac.

- $\mu\delta_\Gamma$ désigne la simple couche étalée sur la surface Γ.

- $(-\partial_n(\nu\delta_\Gamma))$ désigne la double couche étalée sur la surface Γ.

- $F[\varphi]$ ou $\hat{\varphi}$ désigne, lorsqu'elle existe, la transformée de Fourier de φ définie par :

$$F\left[\varphi\right] = \hat{\varphi} := (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-ix.\tau\right) \varphi\left(x\right)\ dx$$

- Par contre, la transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$F^{-1}\left[\hat{\varphi}\right] := (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\left(ix.\tau\right) \hat{\varphi}\ d\tau$$

- Soient f, g deux fonctions. Alors la convolution de f et g l'orsqu'elle existe, est donnée par :

$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y)dy$$

Si f, g sont des distributions, il faut que l'une d'elles soit à support compact.

Multi-entier

- On utilise les notations classiques concernant les multi-entiers.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^2$ un multi-entier.

$\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \alpha_2$

Opérateurs

$\partial_n = \frac{\partial}{\partial_n}$ est la dérivée normale extérieure sur la frontière Γ.

$\partial_\tau = \frac{\partial}{\partial_\tau}$ est la derivée tangentielle extérieure sur la frontière Γ.

$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ est l'opérateur de Laplacien.

∇ est l'opérateur gradient, d'expression $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$

Soient m un entier non négatif et $a_{\alpha\beta}$ des fonctions mesurables et bornées, définies sur Ω telles que $\mid \alpha \mid, \mid \beta \mid \leq m$. Un opérateur différentiel est donné sous la forme :

$$A(x,\ D) := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta)$$

A est un opérateur différentiel d'ordre $2m$.

Produits scalaires

-$\mid . \mid$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$.

Soit H un espace de Hilbert.

-$\langle ., . \rangle_H$ (rep. $\|.\|_H$) est un produit scalaire de H (resp. la norme de H).

Soient V un espace vectoriel topologique séparé et localement convexe et V' son dual topologique. On note :

-$x'(x) = \langle x, x' \rangle_{V,V'}$ (ou simplement $\langle x, x' \rangle$) la valeur de la fonction en x' au point x.

INTRODUCTION

La résolution des problèmes aux limites pour les opérateurs aux dérivées partielles à l'aide la méthode des équations intégrales a débuté avec les travaux de Fredholm (principal fondateur de la théorie des équations intégrales de deuxièmes espèces). Pour rappel cette résolution porte son nom.

On peut distinguer deux formulations pour cette méthode :

1. La méthode directe indique que les fonctions inconnues apparant dans les équations intégrales sont les variables physiques du problème considéré [3], [52].
2. La méthode du potentiel ou indirecte qui signifie que les inconnues qu'on appelle usuellement des fonctions de densité n'ont pas une signification directe dans le problème aux EDP initial [23], [34], [35].

La méthode des équations intégrales sur le bord possède des avantages très importants par rapport à la résolution "directe" des EDP. Un aspect essentiel est que lorsque la fonction inconnue qui intervient dans l'EDP est recherchée sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$, la reformulation du problème en équation intégrale fait apparaître une fonction inconnue qui est recherchée sur le bord $\partial\Omega$ du domaine.

On réduit aussi la dimension de l'espace de un, c'est à dire, l'équation à résoudre est sur la frontière. De plus, lorsque Ω est le complémentaire d'un domaine $\mathcal{O}$, on transforme un problème posé dans un domaine non borné en un problème posé sur un domaine borné (qui est $\partial\Omega$).

Un point fort de ces méthodes est la possibilité de traiter des domaines infinis ou semi-infinis (problèmes extérieurs) sans avoir à tronquer artificiellement le domaine d'étude.

D'autre part, ces méthodes utilisent une solution élémentaire. Elles sont donc seulement applicables à des problèmes décrits par les opérateurs aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants.

Ceci peut apparaître un inconvénient, mais heureusement que, les systèmes physiques, décrits par des opérateurs de ce type, sont très fréquemment rencontrés dans la pratique.

Il est aussi possible d'étendre le domaine d'application en couplant les éléments frontières avec des éléments classiques.

Un autre inconvénient dans la plupart des cas, est que la classe des opérateurs intégraux obtenus est plus large que celle des équations de Fredholm de deuxième espèce à noyau faiblement singulier.

Un inconvénient qu'on peut rencontrer aussi, si le problème aux limites possède des conditions au bord plus générales que celle de Neumann qui nous conduisent a un problème de formulation sur le bord.

Une autre direction de recherche est née avec les travaux de Wendland qui consiste à interpréter n'importe quel opérateur intégral en tant qu'opérateur pseudo-différentiel, via le calcul symbolique associé à ce dernier, pour obtenir des résultats d'unicité et d'existence de la solution.

Donc on peut appliquer la théorie des opérateurs pseudo-différentiels [12], [13], [14] qui permet de formuler des propriétés commun, telles la forte ellipticité et la coercivité dans la forme de l'inégalité de Garding, pour une large classe d'espaces de Sobolev.

Un autre inconvénient qu'on peut rencontrer aussi si le problème aux limites possède des conditions au bord non linéaire. Cela nous conduit à la résolution des équations (ou bien des systèmes) intégrales non linéaires sur le bord.

Notre étude est organisée de la manière suivante :

-On commence par le premier chapitre qui est un rappel des résultats mathématiques nécessaire pour la suit de travail.

-**Dans le chapitre 2 :** On présente dans la première section deux approches de la théorie des équations intégrales appliquées à un domaine borné, la méthode indirecte et la méthode directe . La première consiste à utiliser les potentiels de simple et de double couche pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann dans un domaine borné simplement connexe . La deuxième se rapporte sur le problème de Laplace mixte dans un domaine borné doublement connexe en utilisant la formule de Green.

Dans la deuxième section, on applique la méthode des équations intégrales pour le Bi-

Laplacien avec les conditions de Dirichlet dans un domaine borné. L'objectif est d'établir un système d'équations intégrales en appliquant la formule de Green. On montre alors que ce système est fortement elliptique à l'aide de l'inégalité de Gading.

Les équations intégrales, obtenues dans ce chapitre, sont de différents types. On a :

1. 1- Des équations intégrales de Fredholm de première espèce avec un noyau faiblement singulier.

   2- Des équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce non intégrable, qui sont interprétées au sens d'une valeur principale.

   3- Un système d'équations intégrales.

-**le chapitre trois** est consacré tout d'abord à l'étude du problème de laplace avec des conditions non linéaire dans un domaine Simplement connexe comme dans [7, 8] . L'approche se résume à résoudre une équation intégrale non linéaire avec des donnés inconnues au bord, moyennant des hypothèses appropries sur la partie non linéaire.

Ensuite dans la deuxième section, on traite le problème de laplace avec des conditions non linéaire dans un domaine doublement connexe . On étend la téchnique déja utilisée en [4, 5, 18] pour une équation intégrale non linéaire à un système d'équations intégrales.

Puisque les opérateurs intervenant dans le système obtenu sont monotones, on établie leur résultat d'existence et d'unicité de la solution par le Théorème de Browder et Minty.

A la fin du chapitre, on use de l'approche vu en [7, 8] pour résoudre l'équation biharmonique.

Les équations bi-harmoniques sont une classe importante qu'on rencontre en physique, dynamique des fluides, l'élasticité.

Chapitre 1

Notions fondamentales

1.1 Introduction

Nous allons, dans ce chapitre, présenter d'abord quelques notions fondamentales qui nous serons utiles par la suite. Nous introduirons, en premier, quelques espaces fonctionnels. Ensuite nous définirons les notions d'opérateurs intégraux de types de Fredholm ou autres. Enfin, nous donnerons un aperçu sur un classe plus large que celle des opérateurs intégraux de fredholm est celle des opérateurs pseudo-diférentiels ainsi que certaines de leurs proprietés nous permettront d'aborder les problèmes considèrés.

1.2 Quelques espaces fonctionnels, proriétés

a) Soit un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et la norme associée $\|.\|_H$.

L'espace de Hilbert $H^{'}$ désigne le dual de H.

Définition 1.2.1

Soit une forme bilinéaire $a(u,v)$ de $H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$.

Alors $a(u,v)$ est :

i) continue s'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$| a(u,v) | \leq c\|u\|_H\|v\|_H \quad \text{pour tout } u,\ v \text{ dans } H \tag{1.1}$$

ii) coercive ou elliptique s'il existe un $\alpha > 0$ tel que :

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|_H^2 \qquad , \ \forall u \in H \tag{1.2}$$

Ennonçons maintenant le résultat suivant :

Théorème 1.2.2 (Lax-Milgram) :

Soit H un espace hilbertien réel et $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H. Alors, pour toute fonctionnelle linéaire, continue $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ sur H, il existe un u et un seul dans H tel que :

$$a(u,v) = L(v\ ) \quad v \in H \tag{1.3}$$

1.2.1 Théorie des Distributions

Définition d'une Distribution

Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^N$, on note comme fonctions test dans Ω les éléments de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$. Le support d'une fonction est la ferméture de l'ensemble des points où la fonction ne s'annule pas. L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est aussi noté par $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est à dire,

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \in C^\infty(\Omega),\ \text{supp}\varphi \Subset \Omega\} = C_0^\infty(\Omega) \tag{1.4}$$

Un exemple classique d'un fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est donné par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{(|x|^2-1)}) & \text{si } \ | x |< 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{1.5}$$

La densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ assure que la classe des fonctions test est suffisament large.

On conidère d'autre fonctions test, les fonctions à décroissance rapide, plus précisement, soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$q_h(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R} \ \ |\alpha|\leq h} (1+ \mid x \mid^2)^h \mid D^\alpha \varphi(x) \mid \tag{1.6}$$

Alors on note par $S(\Omega)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide qui est donné par

$$S(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \ \forall h = 1, 2, ...q_h(\varphi) < \infty\}. \tag{1.7}$$

L'espace dual de $S(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des distributions tempérées qui est noté par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Nous disons que la suite $\{\varphi_n\}$ des fonctions test est converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe un ensemble compact $\Bbbk \subset \Omega$ tel que $\text{supp}(\varphi_n\varphi) \subset \Bbbk$ pour tout n, et si pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} D^\alpha\varphi_n(x) = D^\alpha\varphi(x), CV \ \text{ uniformement sur } \Bbbk. \tag{1.8}$$

Nous définisons une fonctionnelle linéaire et continue T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ comme une appplication de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans le corps $\Bbbk$ ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$), noté par $\langle T, \varphi\rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, qui vérifiée

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle = \alpha\langle T, \varphi_1\rangle + \beta\langle T, \varphi_2\rangle \ \ \forall\alpha, \beta \in \Bbbk, \ \forall\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.9}$$

et telle que

$$\varphi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow \langle T, \varphi_n\rangle \longrightarrow 0 \text{ dans } \Bbbk. \tag{1.10}$$

Cette fonctionnelle linéaire et continue s'appelle une distribution ou une fonction généralisée.

L'espace des distributions (**de Schwartz**) est noté par $\mathcal{D}'(\Omega)$ et correspond à l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$. Ainsi, la forme bilinéaire $\langle ., .\rangle : \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \Bbbk$ représente le produit de dualité entre les deux espaces. Proprement dit, quand le corps $\Bbbk$ est pris comme $\mathbb{C}$, alors le produit de dualité doit être considéré comme une forme séquilinéaire et les distributions en tant que fonctionnelle antilinéaire. Néanmoins, pour la simplicité ceci n'est pas habituellement fait, puisque les résultats dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ sont identiques sauf une conjugaison complexe sur les fonctions test dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Nous notons que l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ a la topologie faible de l'espace dual. L'espace vectoriel et les opérations de convergence dans $\mathrm{D}'(\Omega)$, soient T, S, $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et α, $\beta \in \Bbbk$, peuvent être caractérisés comme suit :

$$\langle \alpha T + \beta S, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle + \beta \langle S, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.11}$$

et

$$T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \Longleftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \text{dans } \Bbbk,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.12}$$

Les distributions peuvent être aussi multipliées par des fonctions indéfiniment différentiables pour former de nouveaux distributions. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\eta \in C^{\infty}(\Omega)$, alors le produit $\eta T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est défini par

$$\langle \eta T, \varphi \rangle = \langle T, \eta \varphi \rangle \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.13}$$

On remarque, cependant, que le produit de deux distributions n'est pas bien défini en général.

Chaque fonction localement intégrable $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ définit une distribution

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.14}$$

La distribution f serait produite par la la fonction f. Une distribution qui est produite par une fonction localement intégrable s'appelle une distribution régulière. Toutes autres distributions s'appellent singulières. On note de maniére analogue la distribution

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} T(x)\varphi(x)dx \tag{1.15}$$

La fonction de Dirac

La fonction de Dirac δ, qui n'est pas à proprement dit une fonction, était présenté par le physicien théorique britannique **Paul Adrien Maurice Dirac (1902 à 1984)** comme une technique dispositif dans la formulation mathématique de la mécanique quantique. La fonction de Dirac s'annule partout sauf à l'origine, où sa valeur est infinie, et de sorte que son intégrale a une valeur d'une. Elle est donc définie par

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases} \tag{1.16}$$

et a la propriété

$$\int_{\Omega} \delta(x)dx = 1 \quad \text{si } 0 \in \Omega. \tag{1.17}$$

Il n'existe aucune fonction avec ces propriétés. Cependant, la fonction de Dirac est bien définie comme distribution. Dans ce cas elle associe à chaque fonction test φ sa valeur à l'origine.

Supposant que $0 \in \Omega$, la fonction de Dirac est définie comme distribution φ qui satisfait

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.18}$$

1.2.2 Les injections compactes

Soit E et F deux espaces de Banach tels que $(E \subseteq F)$. Nous disons que E est continument inclus dans F, écrit comme $E \overset{c}{\hookrightarrow} F$,si l'opérateur d'identité $I : E \longrightarrow F$ défini par $I(v) = v$ pour tout $v \in E$ est continu, c'est à dire, s'il existe une constante C

telle que

$$\|v\|_F \leq C\|v\|_E \quad \forall v \in E. \tag{1.19}$$

L'injection est dite compacte, si I est compacte, on écrit alors $E \overset{comp}{\hookrightarrow} F$

1.2.3 Les espaces de Sobolev

Soit f une fonction réelle, ou plus généralemet, une fonction à valeur complexe définie sur le domaine Ω, et soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}_N^0$, nous écrivons

$$D^\alpha f = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial x_2})^{\alpha_2}...(\frac{\partial}{\partial x_N})^{\alpha_N} f \tag{1.20}$$

pour noter une dérivée partielle mixte de f d'ordre

$$\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \alpha_2 ... + \alpha_N. \tag{1.21}$$

Les espaces de Lebesgue

Les L^p ou les espaces de Lebesgue correspondent aux classes des fonctions mesurables de Lebesgue définis sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ils sont définis, pour $1 \leq p \leq \infty$, par

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}; \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \right\}, \tag{1.22}$$

où la norme de L^p est donnée par

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} (\int\limits_\Omega \mid f(x) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{supp ess}_{x \in \Omega} \mid f(x) \mid, & p = \infty \end{cases} \tag{1.23}$$

Nous disons que deux fonctions sont égales presque partout si elles sont égales sauf sur un ensemble de mesure zéro. Les fonctions qui sont égales presque partout dans le domaine Ω sont donc identifiés dans $L^p(\Omega)$. Le supp essentiel est de même défini dans ce sens par

$$\text{supp ess}_{x\in\Omega} \mid f(x) \mid = \inf\left\{C > 0 : \mid f(x) \mid \leq C \text{ presque partout dans } \Omega\right\}. \qquad (1.24)$$

Nous rappelons que les espaces L^p, muni avec la norme de L^p, sont des espaces de Banach. Un espace vectoriel normé serait séparable s'il contient un sous-ensemble dénombrable (une suite partout dense).

Pour $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est espace séparable, réfléxif, et son dual $L^p(\Omega)'$ est identifié à $L^q(\Omega)$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'espace $L^1(\Omega)$ est un espace séparable, mais non réfléxif, et son dual $L^1(\Omega)'$ est identies à $L^\infty(\Omega)$. L'espace $L^\infty(\Omega)$ est ni un espace séparable ni réléxif, et son dual $L^\infty(\Omega)'$contient strictement $L^1(\Omega)$. Si

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega)(1 \leq i \leq n) \text{ avec } \frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \leq 1, \quad 1 \leq p_i \leq \infty, \qquad (1.25)$$

alors la multiplication de ces fonctions f_i est telle que

$$f = f_1 f_2 ... f_n \in L^p(\Omega), \qquad (1.26)$$

et de plus

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f\|_{L^{p_2}(\Omega)} ... \|f\|_{L^{p_n}(\Omega)} \qquad (1.27)$$

Si $f \in \|f\|_{L^p(\Omega)} \cap \|f\|_{L^q(\Omega)}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors $f \in \|f\|_{L^r(\Omega)}$ pour tout $p \leq r \leq q$, et nous avons d'ailleurs l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}, \text{ où } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \qquad (1.28)$$

En particulier $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}dx, \ \forall f, \ g \in L^2(\Omega). \qquad (1.29)$$

Son espace dual $L^2(\Omega)'$ est identifié avec l'espace $L^2(\Omega)$ lui-même.

Nous pouvons de même définir les espaces L^p_{loc} par

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \in L^p(K)\ \forall K \subset \Omega,\ K \text{ compact}\} \tag{1.30}$$

qui se comportent localement comme des espaces L^p, c'est à dire, sur chaque sous-ensemble compact $K \subset \Omega$.

Les espaces de Sobolev d'ordre entier

Nous définissons maintenant les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ pour $1 \leq p < \infty$ et $m \in \mathbb{N}_0$, par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega)\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N,\ \mid \alpha \mid \leq m\right\}, \tag{1.31}$$

ou alternativement, par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty\right\}, \tag{1.32}$$

muni d'une norme donnée par

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f(x)\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f(x)\|^p_{L^p(\Omega)}, & p = \infty \end{cases} \tag{1.33}$$

Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ sont des espaces de Banach, à condition que les dérivées soient données dans le sens des distributions (section (1.4)). Si $m = 0$, alors on a

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty \tag{1.34}$$

En particulier l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ noté $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert

L'espace $H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha f(x)\overline{D^\alpha g(x)}dx \quad \forall f,\ g \in H^m(\Omega), \tag{1.35}$$

dont la norme est d'expression :

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \mid D^\alpha f(x) \mid^2 dx)^{\frac{1}{2}} \quad \forall f \in H^m(\Omega). \tag{1.36}$$

L'espace $H^m(\Omega)$ est espace de Sobolev d'ordre m. Les espaces de Sobolev d'ordre supérieur contiennent des éléments plus réguliers.

Il est facilede voir que si $f \in H^m(\Omega)$ alors $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega)$ pour $1 \leq i \leq N$.

On définit maintenant l'espace $H_0^m(\Omega)$ comme étant la ferméture de $C_0^m(\Omega)$ par rapport à la norme de $H^m(\Omega)$,c'est-à-dire

$$H_0^m(\Omega) = \overline{C_0^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}}. \tag{1.37}$$

Dans le cas où le domaine Ω est assez régulier, l'espace $H^m(\Omega)$, représente la ferméture de l'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ par rapport à la norme de $H^m(\Omega)$

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|f - f_k\|_{H^m(\Omega)} = 0. \tag{1.38}$$

D'autre part, on a les propriétés suivantes

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^m(\Omega) \subset H_0^k(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-k}(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \qquad (\text{ k} \geq m) \tag{1.39}$$

avec les espaces de Sobolev localement définis, donnés par

$$H_{loc}^m(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \in H^m(K) \ \ \forall K \subset \Omega,\ K \text{ compact}\}, \tag{1.40}$$

qui sont définis comme les espaces $H^m(\Omega)$ sur chaque sous-ensemble compact K de

Ω, et pouvent être traité dans le cadre des espaces de Fréchet.

Les espaces de Sobolev d'ordre partiel

Les espaces de Sobolev peuvent être définis aussi pour des valeurs non-entière de m, prétendu des ordres partiels notés par s. Pour ceci nous considérons d'abord la situation particulière quand le domaine Ω est tout l'espace $\mathbb{R}^N$.Dans ce cas les espaces de Sobolev d'ordre partiel sont définis aussi à l'aide de la transformée de Fourier (section 1.3). Pour une valeur réelle s nous utilisons la norme

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = (\int_{\mathbb{R}^N} (1+ \mid \xi \mid^2)^s \mid \widetilde{f}(\xi) \mid^2 d\xi)^{\frac{1}{2}} \tag{1.41}$$

où $\widetilde{f}$ dénote la transformée de Fourier de f. Le facteur $(1+ \mid \xi \mid^2)^{s/2}$ est connu comme potentiel de Bessel d'ordre s. Si $s = m$ l'expression (1.41) définit une norme équivalente à (1.36) dans $H^m(\mathbb{R}^N)$ si mais s'obtient aussi pour s non-entier et même négative. Si s est réel et positif, alors les espaces de Sobolev d'ordre partiel sont définis par

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^N) : \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} < \infty\right\}, \tag{1.42}$$

qui est équivalent à la définition donnée précédemment, quand $s = m$. Si nous permettons des valeurs négatives pour s, alors la définition (1.42) doit être prolongée pour admettre aussi des distributions tempérées dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ (section (1.4) et (1.5)). Ainsi en général, si $s \in \mathbb{R}$, alors les espaces de Sobolev d'ordre partiel sont définis par

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} < \infty\right\}. \tag{1.43}$$

Nous observons que l'espace de Sobolev $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace dual de $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Si nous considérons maintenant un sous-domaine approprié Ω de $\mathbb{R}^N$, alors les espaces de Sobolev d'ordre partiel, pour $s \geq 0$, sont définis par

$$H^s(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid \exists F \in H^s(\mathbb{R}^N) \text{ tel que } F_\Omega = f \right\}. \tag{1.44}$$

et avez la norme

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} = \inf \left\{ \|F\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^N)} : F_\Omega = f \right\}. \tag{1.45}$$

Nous remarquons que si Ω est un domaine non admissible, alors la nouvelle définition (1.44) n'est pas équivalente à la définition pour $s = m$.

Quand $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$, où pour tout $f \in C_0^\infty(\Omega)$ l'extension trivial par zéro $\widetilde{f}$ extérieur de Ω est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, nous définissons l'espace $\widetilde{H}^s(\Omega)$ pour $s \geq 0$ pour être le complément de $C_0^\infty(\Omega)$ avec la norme

$$\|f\|_{\widetilde{H}^s(\Omega)} = \|\widetilde{f}\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.46}$$

Cette définition implique que

$$\widetilde{H}^s(\Omega) = \left\{ f \in H^s(\mathbb{R}^N) : \text{supp } f \subset \overline{\Omega}) \right\} \tag{1.47}$$

Nous remarquons que l'espace $\widetilde{H}^s(\Omega)$ est aussi noté comme $H_{00}^s(\Omega)$, si $\Omega = \mathbb{R}^N$, alors les espaces H^s et $\widetilde{H}^s$ coincident, c'est à dire,

$$\widetilde{H}^s(\mathbb{R}^N) = H^s(\mathbb{R}^N). \tag{1.48}$$

Pour des ordres négatifs $H^{-s}(\Omega)$ représente l'espace dual de $\widetilde{H}^s(\Omega)$, c'est à dire,

$$H^{-s}(\Omega) = \widetilde{H}^s(\Omega)', \tag{1.49}$$

où la norme est définie au sens du produit scalaire de $L^2(\Omega)$, à savoir

$$\|f\|_{H^{-s}(\Omega)} = \sup_{0 \neq \varphi \in \widetilde{H}^s(\Omega)} \frac{|\langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}|}{\|\varphi\|_{\widetilde{H}^s(\Omega)}}, \quad s > 0. \tag{1.50}$$

De la même manière, l'espace $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ est l'espace dual de $H^s(\Omega)$, c'est à dire,

$$\widetilde{H}^{-s}(\Omega) = H^s(\Omega)'. \tag{1.51}$$

Les injections des espaces de Sobolev

C'est principalement les caractéristiques des injections des espaces de Sobolev (section (1.2)) qui rendent ces espaces si utiles dans l'analyse, particulièrement dans l'étude des opérateurs différentiels et intégraux. En connaissant les propriétés de trace d'un tel opérateur en terme d'espaces de Sobolev, par exemple, il peut être déterminé si l'opérateur est continu ou compact.

Dans $\mathbb{R}^N$ nous avons les injections continues

$$H^s(\mathbb{R}^N) \overset{c}{\hookrightarrow} H^t(\mathbb{R}^N) \text{ pour } -\infty < t \leq s < \infty. \tag{1.52}$$

Si $m \in \mathbb{N}_0$ et $0 \leq \alpha < 1$, alors on obtient que

$$H^s(\mathbb{R}^N) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^N) \text{ pour } s \geq m + \alpha + \frac{N}{2}, \tag{1.53}$$

qui satisfaite aussi si $s = m + \alpha + \frac{N}{2}$ et $0 < \alpha < 1$.

Nous considérons maintenant un domaine fortement Lipschitziene $\Omega \in C^{0,1}$. Alors nous avons les injections compactes et continues

$$H^s(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} H^t(\Omega) \qquad \text{pour } -\infty < t < s < \infty, \tag{1.54}$$

$$\widetilde{H}^s(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} \widetilde{H}^t(\Omega) \qquad \text{pour } -\infty < t < s < \infty, \tag{1.55}$$

$$H^s(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) \qquad \text{pour } s > m + \alpha - \frac{N}{2},\ 0 \leq \alpha < 1,\ m \in \mathbb{N}_0. \tag{1.56}$$

Nous avons aussi l'injection continu

$$H^s(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) \qquad \text{pour } s > m + \alpha - \frac{N}{2},\ 0 < \alpha < 1,\ m \in \mathbb{N}_0. \tag{1.57}$$

Soit Γ une frontière de classe $C^{k,1}$, $k \in \mathbb{N}_0$, et soit $\mid t \mid, \mid s \mid \leq k + \frac{1}{2}$. Alors nous avons les injections compactes

$$H^s(\Gamma) \overset{comp}{\hookrightarrow} H^t(\Omega) \quad \text{pour } t < s, \tag{1.58}$$

$$H^s(\Gamma) \overset{comp}{\hookrightarrow} C^{m,\alpha}(\Gamma) \qquad \text{pour } s > m + \alpha + \frac{N}{2} - \frac{1}{2},\ 0 \leq \alpha < 1,\ m \in \mathbb{N}_0. \tag{1.59}$$

1.3 Transformation de Fourier

1.3.1 Définition de la transformée de Fourier

Nous définissons la transformée de Fourier directe $\widehat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ d'une fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ comme

$$\widehat{f}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\ \exp^{-ix\tau} dx, \quad \tau \in \mathbb{R}^N, \tag{1.60}$$

et son transformée de Fourier inverse $f = \mathcal{F}^{-1}\left\{\widehat{f}\right\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\tau) \exp^{ix\tau} d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.61}$$

Les transformées de Fourier (1.60) et (1.61) peuvent être utilisées aussi pour une classe plus générale des fonctions f, comme des fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ ou même pour des distributions tempérées dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, le dual de l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid \ x^\beta D^\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N \right\}, \tag{1.62}$$

ou $x^\beta = (x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} ... x_N^{\beta_N})$ pour un multi-indice $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a la propriété importante d'être invariable sous la transformée de Fourier, c'est à dire, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \Longleftrightarrow \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nous avons en particulier l'inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, et ainsi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. La convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est la même que pour des distributions (section1.4), mais en ce qui concerne des fonctions d'essai dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. En effet, si $T_n, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, alors

$$T_n \longrightarrow T \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \Longleftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ dans } \mathbb{k} \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \tag{1.63}$$

1.3.2 Quelques propriétés des transformées de Fourier

Dans ce qui suit, on considère les distributions arbitraires $S, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et les constantes arbitraires $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, $a, b \in \mathbb{R}^N$. On écrit $T(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{T}(\tau)$ pour noté que $\widehat{T}(\tau)$ est la transformé de Fourier de $T(x)$,c'est à dire, $\widehat{T} = \mathcal{F}\{T\}$. Alors

$$\alpha S(x) + \beta T(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha \widehat{S}(\tau) + \beta \widehat{T}(\tau). \tag{1.64}$$

$$\widehat{T}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} T(-\tau). \tag{1.65}$$

$$T(x-b) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp^{-ib.\tau} \widehat{T}(\tau), \tag{1.66}$$

$$\exp^{ib.x} T(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{T}(\tau - b), \tag{1.67}$$

$$T(x) * S(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{T}(\xi) \widehat{S}(\xi), \tag{1.68}$$

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} T(x) S(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{T}(\xi) * \widehat{S}(\xi). \tag{1.69}$$

Et aussi

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\left\{T\right\}\right\} = \mathcal{F}\left\{\mathcal{F}^{-1}\left\{T\right\}\right\} = T & \\ \mathcal{F}\left\{D^a u\right\} = (i\tau)^a \mathcal{F}\left\{u\right\}, & u \in S(\mathbb{R}^N),\ \forall a \in \mathbb{R}^N, \\ D^a \mathcal{F}\left\{u\right\} = \mathcal{F}\left\{(-ix)^a u\right\}, & u \in S(\mathbb{R}^N),\ \forall a \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.70}$$

1.3.3 Quelques transformées de Fourier paires

Nous considérons maintenant quelques transformées de Fourier paires, définies sur $\mathbb{R}^N$, qui utilisent les définitions (1.60) et (1.61). Pour la fonction de Dirac δ on obtient que

$$\delta(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}, \tag{1.71}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\xi). \tag{1.72}$$

La fonction exponentielle complexe, pour $a \in \mathbb{R}^N$, satisfaits

$$e^{ia.x} \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^{\frac{N}{2}} \delta(\xi - a), \tag{1.73}$$

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \delta(x + a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{ia.\xi}. \tag{1.74}$$

Pour la fonction cosinus nous avons

$$\cos(a.x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{2}(\delta(\xi - a) + \delta(\xi + a)), \tag{1.75}$$

$$\frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{2}(\delta(\xi - a) + \delta(\xi + a)) \xrightarrow{\mathcal{F}} \cos(a.\xi), \tag{1.76}$$

et pour la fonction de sinus nous avons

$$\sin(a.x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{2i}(\delta(\xi - a) - \delta(\xi + a)), \tag{1.77}$$

$$\frac{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}{2i}(\delta(\xi + a) - \delta(\xi - a)) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sin(a.\xi). \tag{1.78}$$

pour $n \in \mathbb{N}_0$ et $j \in \{1, 2, ..., N\}$, en obtenant

$$x_j^n \xrightarrow{\mathcal{F}} i^n (2\pi)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial^n \delta}{\partial \xi_j^n}(\xi), \tag{1.79}$$

$$(-i)^n (2\pi)^{\frac{N}{2}} \frac{\partial^n \delta}{\partial \xi_j^n}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \xi_j^n, \tag{1.80}$$

et, pour le cas général quand $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ est un multi-indice, on a $x^\alpha \xrightarrow{\mathcal{F}} i^{|\alpha|}(2\pi)^{\frac{N}{2}} D^\alpha \delta(\xi)$,

$$(-i)^{|\alpha|} (2\pi)^{\frac{N}{2}} D^\alpha \delta(\xi) \xrightarrow{\mathcal{F}} \xi^\alpha. \tag{1.81}$$

1.4 Fonctions de Green et solutions élémentaires

1.4.1 La solution élémentaire

Techniquement, une solution élémentaire pour un opérateur différentiel $\mathcal{L}$, linéaire, avec des coefficients constants, et défini sur l'espace des distributions $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N)$, est une distribution E qui satisfait

$$\mathcal{L}E = \delta \ \text{ dans } \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N), \tag{1.82}$$

où δ est la fonction de Dirac, centrée à l'origine. L'intérêt principal d'une telle solution élémentaire se situe dans le fait que si la convolution a un sens, alors la solution de

$$\mathcal{L}u = f \ \text{ dans } \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N), \tag{1.83}$$

pour une fonction donné f, est donnée par

$$u = E * f. \tag{1.84}$$

En fait, en raison de la linéarité de $\mathcal{L}$, puisque E est une solution élémentaire, et puisque δ est l'élément neutre de la convolution, nous avons

$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}\left\{E * f\right\} = \mathcal{L}E * f = \delta * f = f. \tag{1.85}$$

En ajoutant aux solutions non trivales des solutions élémentaires pour le problème homogène, de nouvelles solutions fondamentales peuvent être obtenues. La solution élémentaire pour un problème bien-posé est uniqe. Si des conditions additionnelles sont indiquées pour le comportement de la solution, par exemple, le comportement asymptotique à l'infini, étant ces conditions souvent déterminées à travers des considérations physiques. Dans la construction de la solution élémentaire, il est permis d'utiliser toutes les méthodes pour trouver les solutions de l'équation, à condition que le résultat soit alors justifié par des arguments rigoureux.

Nous remarquons aussi qu'a partir de la solution élémentaire, d'autres solutions peuvent être construites, dans le sens des distributions , quand les dérivées de la fonction de Dirac δ apparaissent sur le coté droit. Par exemple, la solution de

$$\mathcal{L}F = \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \tag{1.86}$$

est donné par

$$F = E * \frac{\partial \delta}{\partial x_i} = \frac{\partial E}{\partial x_i} * \delta = \frac{\partial E}{\partial x_i}. \tag{1.87}$$

1.4.2 La fonction de Green

Dans le cas de la fonction de Green, la solution élémentaire considère aussi des conditions de frontières homogènes, et la fonction delta de Dirac n'est plus centrée à l'origine, mais à un point fixe de source. Ainsi, une fonction de Green d'un opérateur différentiel partiel $\mathcal{L}_y$ avec des conditions de frontières homogènes, linéaires, avec des coefficients constants, par rapport à y, et défini sur l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, est une distribution G tel que

$$\mathcal{L}_y\left\{G(x,y)\right\} = \delta_x(y) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \tag{1.88}$$

où δ_x est la fonction de Dirac avec la masse de Dirac a centrée au point de source x, c'est à dire, $\delta_x(y) = \delta(y-x)$. La fonction de Green représente ainsi la réponse d'impulsion de l'opérateur $\mathcal{L}_y$ par rapport à un point de source x, étant donc le noyau de l'opérateur inverse de $\mathcal{L}_y$, noté par $\mathcal{L}_y^{-1}$, qui correspond à un opérateur intégral, et $G(x,y) = \mathcal{L}_y \{\delta_x(y)\}$. La fonction de Green, différemment comme solution élémentaire, est recherchée dans un certain domaine particulier Ω satisfait quelques conditions de frontière, mais pour la simplicité nous considérons ici juste $\Omega = \mathbb{R}^n$.

La solution du problème aux limites différentiel non homogène

$$\mathcal{L}_x \{u(x)\} = f(x) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \tag{1.89}$$

est donné par

$$u(x) = G(x,y) * f(y), \qquad \text{si la convolution a un sens} \tag{1.90}$$

où G est la fonction de Green de l'opérateur $\mathcal{L}_x$, qui est symétrique, c'est à dire,

$$G(x,y) = G(y,x). \tag{1.91}$$

Comme dans la solution élémentaire, nous prenons

$$\mathcal{L}_x \{u(x)\} = \mathcal{L}_x \{G(x,y) * f(y)\} = \delta_x(y) * f(y) = f(x). \tag{1.92}$$

Nous observons que la fonction de Green de l'espace libre ou de tout l'espace, c'est à dire, sans conditions de frontière, est liée à la solution élémentaire par la relation

$$G(x,y) = E(x-y) = E(y-x). \tag{1.93}$$

1.4.3 Quelques fonctions de Green dans des espaces libres

La fonction de Green d'espace libre pour l'équation de Laplace au sens des distributions

$$\Delta_y G(x,y) = \delta_x(y) \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \tag{1.94}$$

est donnée par

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{|y-x|}{2} & \text{pour } N = 1, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \mid y-x \mid & \text{pour } N = 2, \\ -\frac{1}{4\pi|y-x|} & \text{pour } N = 3, \\ -\frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(N-2)|y-x|^{N-2}} & \text{pour } N \geq 4, \end{cases} \tag{1.95}$$

où Γ dénote la fonction gamma qui est définie comme

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\Re e \ z > 0). \tag{1.96}$$

1.5 Equation aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles (E.D.P) d'ordre m dans $\mathbb{R}^N$ est une équation de la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha = 0, \tag{1.97}$$

où les fonctions a_α sont les coéfficients de $a_\alpha(x)D^\alpha$. On désigne par $A(x,D)$ l'opérateur aux dérivées partielles linéaire d'expression.

$$A(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1.98}$$

L'équation caractéristique, quant à elle, est donnée par

$$A_m(x,\tau) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\tau^\alpha \neq 0. \tag{1.99}$$

On dit que $A(x,D)$ est elliptique dans Ω, si pour tout $x \in \Omega$, on a

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\tau^\alpha \geq 0, \text{ pour tout } \tau \neq 0. \tag{1.100}$$

Il est fortement elliptique, s'il existe une constante C telle que

$$\mid \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\tau^\alpha \mid \geq C \mid \tau \mid^{2k}, \text{ pour tout } x \in \Omega, \; k > 0. \tag{1.101}$$

1.6 Opérateurs intégraux

a) Définition 1.6.1

On appelle opérateur sur Ω toute application linéaire continu de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

D'après le théorème des noyaux de schwartz, étant donné T un opérateur "agissant" sur Ω il existe une unique distribution $K \in \mathfrak{D}'(\Omega \times \Omega)$ telle que

$$< Tu, v >=< K, v \times u > \quad \forall u, \; v \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

On dit que K est le noyau distributionnel de T ou bien T est l'opérateur de noyau K.

Définition 1.6.2

Un opérateur T sur Ω est dit intégral si son noyau K est la distribution associée à une fonction $K \in L^1_{loc}(\Omega, \Omega)$. On dit que K est le noyau de

l'opérateur intégral T .

La théorie des opérateurs intégraux s'identifie à celle de l'integral.

Etant donné $K \in L^1_{loc}(\Omega, \Omega)$, on peut définir la fonction $Tu \in L^1_{loc}$ par

$$Tu(x) = \int_{\Omega} K(x,y) \; u(y) \; dy, \tag{1.102}$$

par application du théorème de Fubini.

Définition 1.6.3

i) Un opérateur linéaire, continu de E dans F, est appelé opérateur de Fredholm, si la dimension de son noyau et la codimension de son image sont finies.

ii) Le nombre $ind\ T = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T$ est appelé l'indice de T.

Théorème 1.6.4

Soit T un opérateur linéaire continu de E dans F. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) T est un opérateur de Fredholm et $ind\ T = 0$.

ii) Il y a un opérateur K, linéaire, continue de E dans F, compact tel que $T + K$ est inversible.

Preuve. voir [1] ■

b) Comme on l'a mentionné auparavant, plusieurs problèmes de la physique mathématique peuvent-être decrits par dans en équation intégrales. Généralement, les équations intégrales obtenues sont de différents types. Le caractère d'une équation intégrale est déterminé essentiellement par les propriétés de son noyau. En effet, si :

- Le noyau $K(x,t)$ est continue dans Ω ou, au moins, si les discontinuités du noyau sont telles que :

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} \mid K^2(x,t) \mid dx \; dt < \infty,$$

alors les équations données par :

$$Tu(x) := \int_{\Omega} K(x,y)\ u(y)\ dy = f(x) \tag{1.103}$$

où u est l'inconnue et $f(x)$, $K(x,y)$ des fonctions données, sont dites équations de type de Fredholm. Plus précisément, (1.103) est une équation de Fredholm de première espèce, contrairement à l'équation de Fredholm de deuxième espèce définie par :

$$u(x) - \int_{\Omega} K(x,y)\ u(y)\ dy = f(x) \tag{1.104}$$

- Si le noyau $K(x,y) = \frac{H(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}$ où $H(x,y)$ est borné et α une constante telle que $0 < \alpha < 1$, alors (1.103,1.104) sont des équations intégrales avec une singularité faible.
- Si le noyau $K(x,y) = \frac{A(x,y)}{|x-y|}$ où $A(x,y)$ est une équation differentiable en x et y, alors

$$\int_{\Omega} K(x,y)\, u(y)\ dy \text{ diverge.}$$

1.7 Les opérateurs pseudodifférentiels

Les opérateurs pseudodifférentiels peuvent-être considérés comme une généralisation des opérateurs différentiels. En effet, soit l'opérateur différentiel linéaire dans $\mathbb{R}^n$, à coefficients C^{∞}, $A(x,D)$.

Exprimons le, en fonction de la transformée de Fourier et de son inverse F^{-1} :

$$\begin{aligned} A(x,D)\,u(x) &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_{\alpha}(x)\, D^{\alpha}u(x) = F^{-1} \sum_{|\alpha|\leq m} a_{\alpha}(x)\,\tau^{\alpha} F[u]\,. \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\tau} a(x,\tau)\, F[u](\tau)\ d\tau \end{aligned} \tag{1.105}$$

avec $a(x,\tau) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_{\alpha}(x)\,\tau^{\alpha}$, $\tau \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, un élément de la classe des symboles, que nous allons définir :

Définition 1.7.1

On appelle $S^m(\Omega)$, l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ à valeurs complexes telles que, pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout multiindice α, β, il existe une constante C telle que

$$| D_x^\beta D_\tau^\alpha \ a(x,\tau) | \leq C_{\alpha,\beta,K} (1+ | \tau |)^{m-|\alpha|}, \quad \setminus x \in K, \text{ tout } \tau \in \mathbb{R}^n. \tag{1.106}$$

Les éléments dans $S^m(\Omega)$, sont appelés les fonctions amplitude d'ordre m.

L'espace $S^m(\Omega)$ est un espace de Fréchet muni du sytème des semi-normes :

$$P_{\alpha,\beta,K}^{(m)}(a) = \sup_{\substack{x\in K \\ \tau\in\mathbb{R}^n}} (1+ | \tau |)^{|\alpha|-m} | D_x^\beta D_\tau^\alpha \ a(x,\tau) | \tag{1.107}$$

on pose

$$S^\infty = \bigcup_{m\in\mathbb{R}} S^m \quad , \qquad S^{-\infty} = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m$$

Le résultat suivant, concerne le développement asymptotique des éléments de $S^m(\Omega)$. Ceci revient à donner un sens à une serie formelle d'éléments a_j d'ordre m_j, tendant vers $-\infty$.

1.8 Théorie du potentiel

La méthode des équations intégrales consiste à remplacer un problème aux limites par une équation intégrale posée sur le bord Γ.

Définition 1.8.1

Soit $\varphi \in C(\Gamma)$ une fonction donnée, $E(x,y)$ noyau de Green, les fonctions

$$S(x) = \int_\Gamma \varphi(y) .E(x,y) \ d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \tag{1.108}$$

et

$$V(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) \cdot \frac{\partial E(x,y)}{\partial n(y)} \, d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \tag{1.109}$$

sont appelées, respectivement, potentiel simple-cauche et double-cauche avec la densité φ.

Remarque 1.8.2

On pose $f(x,y) = \varphi(y) . E(x,y)$ ou $f(x,y) = \varphi(y) . \frac{\partial E(x,y)}{\partial n(y)}$; $x \notin \Gamma$, $y \in \Gamma$.

f est continue sur Γ, donc elle est intégrable.

Lemme 1.8.3

Si $f : D \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue si $x \neq y$ et satisfait$\mid f(x,y) \mid \leq \frac{c}{|x-y|^{\lambda}}$; $\quad 0 < \lambda < 1$ alors la fonction $g(x) = \int_{\Gamma} f(x,y) \, d\Gamma_y$ est continue sur D.

Preuve. voir [3] ■

Théorème 1.8.4

Soit Γ de classe C^2 et $\varphi \in C(\Gamma)$. Alors le potentiel simple-cauche S avec la densité φ est continue. Sur la frontière nous avons

$$S(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) . E(x,y) \, d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma$$

où l'intégrale existe.

Théorème 1.8.5

a) Le potentiel simple cauche $S(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ i.e prolongeable par continuité de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ à $\mathbb{R}^2$.

b) Si $\int_{\Gamma} \varphi(y) \, d\Gamma_y = 0$, alors $\lim\limits_{|x| \longrightarrow +\infty} S(x) = 0$.

Preuve.

a) On a $S(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) . E(x,y) \, d\Gamma_y, \ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$

On prend

$$f(x,y) = \varphi(y) . E(x,y)$$

avec

$$E(x,y) = \frac{1}{2\pi} \log \mid x - y \mid$$

.

donc

$$\mid f(x,y) \mid \leq c . \frac{\|\varphi\|_\infty}{\mid x - y \mid}$$

d'après lemme 1.8.3 $\lim\limits_{x \longrightarrow z \in \Gamma} S(x)$ existe et ne dépend pas de la direction.

alors S est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Supposons que $\int\limits_{\Gamma} \varphi(y)\, d\Gamma_y = 0$. On a

$$S(x) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(y) . E(x,y)\, d\Gamma_y = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \varphi(y) . \log \mid x - y \mid d\Gamma_y$$

d'où

$$\mid S(x) \mid \leq \frac{c}{\mid x \mid}\ mes(\Gamma) . \|\varphi\|_\infty = o\left(\frac{1}{\mid x \mid}\right)$$

donc

$$\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} S(x) = 0$$

■

Eximinons maintenant la trace du potentiel de double cauche

$$V(x) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(y) . \frac{\partial E(x,y)}{\partial n(y)}\, d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,\ \varphi \in C(\Gamma)$$

Lemme 1.8.6

Soit Γ de classe C^2. Alors il existe une constante positive L tel que

1. $|< x - y, n(x) >| \leq L \mid x - y \mid^2;\ x,\ y \in \Gamma$
2. $\mid n(x) - n(y) \mid \leq L \mid x - y \mid;\ x,\ y \in \Gamma$

Preuve. voir [3] ■

Lemme 1.8.7

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial E(x,y)}{\partial n(y)}\, d\Gamma_y = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in D \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x \in \Gamma \\ 0 & \text{si } x \notin D \end{cases} \tag{1.110}$$

Pour la preuve de ce lemme on a besoin de la proposition suivante.

Proposition 1.8.8

Soit $v \in C^2\left(\bar{D}\right)$, harmonique ($\Delta v = 0$) dans D. Alors

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n}\, d\Gamma = 0 \tag{1.111}$$

Preuve. On utilise la $1^{ère}$ formule de Green

$$\int\limits_{D} u\Delta v + \nabla u \nabla v = \int\limits_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\Gamma$$

on prend $u = 1$ et comme $\Delta v = 0$ alors

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n}\, d\Gamma = 0$$

■

Maintenant la preuve de lemme 1.8.7

Preuve.

1) $x \notin D$ $\left(x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}\right)$

d'aprés (1.111), on prend $v = E$ $(\Delta E = 0)$

$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial E}{\partial n}\, d\Gamma = 0$

2) $x \in D$ on utilise la réprésentation

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) .E(x,y) - u(y)\frac{\partial E}{\partial n}\right) d\Gamma_y$$

en prenant $u=1$

$$1=\int_{\Gamma}-\frac{\partial E\left(x,y\right)}{\partial n}\ d\Gamma_{y}$$

alors

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial E\left(x,y\right)}{\partial n}\ d\Gamma_{y}=-1$$

3) $x\in\Gamma$, $\Omega\left(x,\varepsilon\right)$ est un sphère de centre x et de rayon ε.

Soit $H\left(x,\varepsilon\right)=\Omega\left(x,\varepsilon\right)\cap D$

On applique la formule (1.111) $\left(v=E,\ \int_{\Gamma}\frac{\partial E}{\partial n}=0\right)$.

$$\int_{\{y\in\Gamma:|y-x|\geq\varepsilon\}}\frac{\partial E}{\partial n}\ d\Gamma_{y}+\int_{H(x,\varepsilon)}\frac{\partial E}{\partial n}\ d\Gamma_{y}=0$$

on a $\int_{\{y\in\Gamma:|y-x|\geq\varepsilon\}}\frac{\partial E(x,y)}{\partial n}\ d\Gamma_{y}=0\ \left(x\notin D\right)$

$$\int_{H(x,\varepsilon)}\frac{\partial E\left(x,y\right)}{\partial n_{y}}d\Gamma_{y}=\lim_{\varepsilon\longrightarrow0}\int_{H(x,\varepsilon)}\frac{\partial E\left(x,y\right)}{\partial n_{y}}d\Gamma_{y}=-\frac{1}{2}.$$

■

Théorème 1.8.9

Soit $\Gamma\in C^{2}$, le potentiel double cauche $V\left(x\right)$ avec la densité $\varphi\in C\left(\Gamma\right)$ est prolongeable par la continuité de D à $\bar{D}$ et de $\mathbb{R}^{2}/\bar{D}$ à $\mathbb{R}^{2}/D$ avec les limites

$$V\pm\left(x\right)=\int_{\Gamma}\varphi\left(y\right).\frac{\partial E\left(x,y\right)}{\partial n\left(y\right)}\ d\Gamma_{y}\pm\frac{1}{2}\varphi\left(x\right);\qquad x\in\Gamma \tag{1.112}$$

où

$$V\pm=\lim_{h\longrightarrow0}V\left(x\pm h.n\left(x\right)\right)$$

où l'intégrale existe.

Preuve. voir [3] ■

Théorème 1.8.10

Soit $\Gamma \in C^2$. Alors pour le potentiel simple cauche $S(x)$ avec la densité $\varphi \in C(\Gamma)$ satisfait

$$\frac{\partial S\pm}{\partial n}(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) . \frac{\partial E(x,y)}{\partial n(y)} \, d\Gamma_y \mp \frac{1}{2}\varphi(x), \quad x \in \Gamma \tag{1.113}$$

où

$$\frac{\partial S\pm}{\partial n}(x) := \lim_{h \longrightarrow 0} n(x) . \nabla S(x \pm hn(x))$$

où l'intégrale existe.

Preuve. voir [3] ■

1.9 Alternative de Fredholm

Nous allons étudier les équations de Fredholm de deuxième espèce, c'est-à-dire les équations de la forme

$$u(x) = \int_{\Omega} K(x,t)u(t)dt + f(x) \tag{1.114}$$

La fonction K, appelée noyau de cette équation, sera supposée mesurable et appartenant à la classe L_2 sur Ω :

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} |K(x,t)|^2 \, dxdt < \infty.$$

Dans l'équation (1.114) f est une fonction donnée et φ est la fonction inconnue, toutes les deux appartenant à $L_2(\Omega)$. Les noyaux appartenant à la classe L_2 s'appellent noyaux de Hilbert-Schmidt.

Associons à l'équation (1.114) l'opérateur T défini par l'égalité

$$Tu := (I - C)\,u = f \text{ dans } H \tag{1.115}$$

avec

$$Cu = \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y)dy$$

où C est un opérateur linéaire compact . Nous adaptons ici l'opérateur duale $C^* : H \longrightarrow H$ de C qui est défini par

$$\langle Cu, v\rangle_H = \langle u, C^* v\rangle_H \text{ pout tout } u,\ v \in H.$$

En plus de (1.115), nous introduisons aussi l'équation adjointe

$$T^* v := (I - C^*)\, v = g \text{ dans } H. \tag{1.116}$$

Théorème 1.9.1

Pour l'équation (1.115) et l'équation (1.116), respectivement, l'alternative suivante est valable :

Soit $0 < \dim N(T) = \dim N(T^*) < \infty$.

i) $N(T) = \{0\}$ et $R(T) = H$

ou

ii) $0 < \dim N(T) = \dim N(T^*) < \infty$.

Dans ce cas, les équations non homogènes (1.115) et (1.116) ont des solutions si et seulement si f et g satisfaisassent les conditions d'orthogonalité

$$(f, v_0)_H = 0 \text{ pour tout } v_0 \in N(T^*) \tag{1.117}$$

et

$$(u_0, g)_H = 0 \text{ pour tout } u_0 \in N(T) \tag{1.118}$$

respectivement. Si (1.117) est satisfaite, alors la solution générale de (1.115) est de la forme

$$u = u^* + \sum_{l=1}^{k} c_l u_{0(l)}$$

où u^* est une solution particulière de (1.115) .

et on a :

$$\|u^*\|_H \leq c\|f\|_H \text{ tq } c \text{ est constant.}$$

$u_{0(l)}$ pour $l = 1, ..., k$ sont linéairement indépendants.

De même, si (1.118) est réalisé, la solution de(1.116) a la représentation

$$v = v^* + \sum_{l=1}^{k} d_l v_{0(l)}$$

où v^* est une solution particulière de (1.116) , et $v_{0(l)}$ pour $l = 1, ..., k$ sont linéairement indépendants.

Lemme 1.9.2

La suite des ensembles $N(T^j)$ pour $j = 0, 1, 2, ...$ avec $T^0 = I =$ l'identité est une suite croissante, i.e $N(T^j) \subseteq N(T^{j+1})$. Il existe un plus petit indice $m \in \mathbb{N}_0$ tels que

$$N\left(T^j\right) = N\left(T^m\right) \quad pourtout \;\; j \geq m \;\; et \;\; N\left(T^j\right) \subset N\left(T^{j+1}\right) \quad pourtout \;\; j < m.$$

Lemme 1.9.3

$R_j := R(T^j) = T^j H$ pour $j = 0, 1, 2, ...$ avec $R_0 = H$, forment une suite décroissante de sous-espaces fermés de H, i.e $R_{j+1} \subseteq R_j$.Il existe un plus petit indice $r \in \mathbb{N}_0$ tels que

$$R_r = R_j \text{ pour tout } j \geq r \text{ et } R_{j+1} \subset R_j \text{ pour tout } j < r.$$

Lemme 1.9.4

Soit m et r les indices dans les lemmes précédents. Alors, nous avons :

i) $m = r$.

ii) $H = N(T^r) \oplus R_r$, ce qui signifie que tous les $u \in H$ admet une décomposition unique :$u = u_0 + u_1$ où $u_0 \in N(T^r)$ et $u_1 \in R_r$.

Preuve. (théorème 1.9.1)

i)

a) Si la solution de (1.115) est unique alors l'équation homogène

$$Tu_0 = 0$$

n'admet que la solution triviale $u_0 = 0$. Par conséquent, $r = m = 0$, $H^{'} = H$ et $T(H) = H$ dans le lemme 2. Ce dernier implique $f \in T(H)$ qui donne l'existence du $u \in H$ avec (1.115), i.e solvabilité et que $T : H \longrightarrow H$ est un isomorphisme.

b) Supposons que (1.115) admet une solution $u \in H$ pour chaque donnée $f \in H$. Alors $T(H) = H$ et le lemme 2 implique $r = m = 0$ et $N(T) = \{0\}$, i.e l'unicité . et $T : H \longrightarrow H$ est un isomorphisme. $\blacksquare$

Corollaire 1.9.5

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et soit K un noyau continu ou faiblement singulier. Alors, soit les équations intégrales homogènes

$$u(x) - \int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy = 0, \quad x \in \Omega,$$

et

$$v(x) - \int_{\Omega} K(x,y)v(y)dy = 0, \quad x \in \Omega,$$

ont seulement des solutions triviales $u = 0$ et $v = 0$ et les équations integrales non homogènes

$$u(x) - \int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy = f(x), \quad x \in \Omega,$$

et

$$v(x) - \int_{\Omega} K(x,y)v(y)dy = g(x), \quad x \in \Omega,$$

ont une solution unique $u \in C(\Omega)$ et $v \in C(\Omega)$ pour chaque côté droit $f \in C(\Omega)$ et

$g \in C(\Omega)$, respectivement, où les équations intégrales homogènes ont le même nombre $m \in \mathbb{N}$ fini des solutions linéairement indépendantes et les équations integrales non homogènes ont des solutions si et seulement si f et g satisfaisseint les conditions d'orthogonalité.

Définition 1.9.6

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. L'opérateur linéaire borné $A : H_1 \longrightarrow H_2$ est appelé un opérateur de Fredholm si les conditions suivantes sont vérifiés :

i) La dimension de noyau $N(A)$ de A est finie,

ii) Le rang $R(A)$ de A est un sous-espace fermé de H,

iii) La codimension de $R(A)$ est finie.

Le nombre

$$ind\ T = \dim\ N(A) - \dim\ \operatorname{coker}(A)$$

est appelé l'indice de Fredholm de A.

Téorème 1.9.7

L'opérateur linéaire borné $A : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur de Fredholm si et seulement si il existe des opérateurs linéaires continus Q_1, $Q_2 : H_1 \longrightarrow H_2$ tels que

$$Q_1 A = I - C_1 \text{ et } Q_2 A = I - C_2$$

avec C_1 et C_2 sont des opérateurs lineaires compactes dans H_1 et H_2 respectivement.

Si $B : H_1 \longrightarrow H_2$ et $A : H_2 \longrightarrow H_3$ sont des opérateurs de Fredholm, alors $A \circ B$ est également un opérateur de Fredholm de $H_1 \longrightarrow H_3$ et

$$ind\ (A \circ B) = ind\ (A) + ind\ (B)$$

Pour un opérateur de Fredholm A et un opérateur compact C, la somme $A + C$ est un opérateur de Fredholm et

$$ind\ (A + B) = ind\ (A).$$

1.10 Méthode des opérateurs monotones :

Soient X un espace normé séparable réel, X^* le dual de X, $A : X \to X^*$ un opérateur non linéaire, $D(A) = X$, $R(A) \subset X^*$. On dit que l'opérateur A est monotone si

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq 0, \qquad \forall\ x, y \in X$$

Si cette inégalité devient stricte pour $x \neq y$, on dit que A est strictement monotone. S'il existe une fonction $c(t)$ continue et positive pour $t \geq 0$ telle que $c(0) = 0$, $c(t) > 0$ pour $t > 0$, $c(t) \to \infty$ pour $t \to \infty$ et telle que

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq c \left\| x - y \right\| \left\| x - y \right\|$$

on dit que A est fortement monotone. L'opérateur A est dit coercif s'il existe une fonction $\gamma(t)$ définie pour $t \geq 0$, qui tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$ et qui pour tout $x \in X$ vérifie l'inégalité

$$\langle A(x), x \rangle \geq \gamma \left\| x \right\| \left\| x \right\|$$

On dit que A est demi continu en $x_0 \in X$ si la convergence de x_n vers x_0 pour la norme de X implique $A(x_n) \to A(x_0)$ $(n \to \infty)$ faiblement , c-à dire

$$\langle A(x_n), x \rangle \to \langle A(x_0), x \rangle \quad (n \to \infty) \quad \forall x \in X$$

Théorème 1 *Soit un opérateur A qui applique un espace de Banach séparable réel X dans l'espace X^*. Supposons que A soit fortement monotone et demi continue . Alors l'équation $A(x) = y$ a une solution x et une seule pour tout $y \in X^*$.*

Chapitre 2

Méthode des équations intégrales pour quelques problèmes linéaire :

2.1 Introduction :

La résolution des problèmes linéaires aux limites pour l'opérateur de Laplace peut être remplacées, d'après la théorie du potentiel, par la recherche de la solution des équations intégrales dans des espaces de fonction défini au bord d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Les équations intégrales correspondantes aux problèmes linéaires considérés sont interprétées differémment. Par contre, la théorie des opérateurs pseudo-différentiels nous permet de formuler des propriétés communes.

Dans la première section la méthode indirecte des équations intégrales pour le Laplacien dans un domaine borné simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, appliquées aux problèmes de Dirichlet et de Neumann en utilisant les potentiels de simple et de double couche, et la méthode directe appliquée au problème mixte de type Dirichlet- Neumann pour le Laplacien dans un domaine borné doublement connexe de $\mathbb{R}^2$, et, en effet, comme on le verra plus loin, ce problème donne lieu à un système d'opérateurs intégraux regroupant les opérateurs S, D, D',T après l'utilisation de la méthode du potentiel. On établit l'existence et l'unicité de la solution pour les problèmes réduits sur le bord.

Dans la deuxième section, on applique la méthode des équations intégrales pour le Bi-Laplacien avec les conditions de Dirichlet dans un domaine ouvert et borné,. L'objectif est d'établir un système d'équations intégrales en appliquant la formule de Green. On montre alors que ce système est fortement elliptique à l'aide de l'inégalité de Gading.

2.2 Méthode du potentiel pour le Laplacien dans un domaine régulier pour Dirichlet :

2.2.1 Formulation du problème

Présentons ici le problème de Dirichlet intérieur pour l'opérateur de Laplace.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine ouvert ,borné ,simplement connexe, dont la frontière Γ est régulière ($\Gamma \in C^\infty$)

On cherche à déterminer une fonction u dans $H^1(\Omega)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ u &= f \quad , \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{P$_1$}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace, $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est donnée.

Le problème (P_1) constitue le problème de Dirichlet pour le Laplacien. Il modélise, entre autres, les phénomènes stationnaires.

2.2.2 Etude variationnelle

Pour énoncer une formulation variationnelle du problème traité, nous devons définir correctement les espaces des fonctions dans lequel on cherche la solution. Pour le problème (P_1) nous considérons l'espace classique de Sobolev

$$H^1(\Omega, \Delta) := \left\{ u \in H^1(\Omega),\ \Delta u = 0 \right\}, \tag{2.1}$$

qui est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $H^1(\Omega, \Delta)$ est important dans la formulation variationnelle, car il nous permet d'étendre la seconde formule de Green pour des fonctions "non régulières" de $H^1(\Omega)$. En effet, on a le

Lemme 2.2.1

Soit $u \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$ et soit $v \in H^1(\Omega)$ de support borné, alors $\partial_n u\,|_\Gamma$ est definie par :

$$\langle \Delta u, v\rangle + \langle \nabla u, \nabla v\rangle =< \partial_n u\,|_\Gamma, v\,|_\Gamma>_\Gamma \tag{2.2}$$

ici $<,>_\Gamma$ est la dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ donnée par :

$$< h, k >_\Gamma = \int_\Gamma h(y).k(y)\ d\Gamma \tag{2.3}$$

pour des fonctions h et k régulières.

Preuve. L'équation (2.2) est obtenue en intégrant par parties la trace $v\,|_\Gamma$ appartient à $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$ de support borné d'aprés le théorème des traces. La partie gauche de (2.2) est bornée d'après les hypothèses faites sur u, v. ■

On introduit ensuite le sous-espace de Hilbert V un sous espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui satisfont dans le sens des traces la condition essentielle d'homogénéité.

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma\right\} := H_0^1(\Omega) \tag{2.4}$$

Soit maintenant $v \in H_0^1(\Omega)$. En multipliant la première équation de (P_1) par v et en intégrant sur Ω, la formule de Green nous permet d'écrire

$$-\int_\Omega \nabla u.\nabla v\ d\Omega + \int_\Gamma \partial_n u.v\ d\Gamma = 0 \tag{2.5}$$

Posons alors

$$a_1(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \; d\Omega \tag{2.6}$$

et

$$L_1(v) = 0, \qquad \text{car } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

Tout d'abord, on a la

Définition 2.2.2

Soit $f(s)$ la trace de $w \in H^1(\Omega)$ telle que $w\mid_\Gamma = f$. La fonction $u \in H^1(\Omega)$ est appelée solution faible du problème (P_1) si :

i) $u - w \in V$

ii) Pour tout $v \in V$, la condition (2.5) est vérifiée.

Maintenant, le problème (P_1) devient équivalent au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \quad , & \text{telle que :} \\ a_1(u,v) = L_1(v) & \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{2.8}$$

Théorème 2.2.3

i) $H_0^1(\Omega)$ est un espace fermé dans $H^1(\Omega)$.

ii) $L_1(.)$ est une forme linéaire continue.

iii) $a_1(.,.)$ est une forme bilinéaire continue.

iv) $a_1(.,.)$ est $H_0^1(\Omega)$-coercive.

Preuve. i) Soit (v_k) une suite de fonctions dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ qui converge vers un élément $v \in H^1(\Omega)$.

D'après le théorème des traces, on a $\|v_k - v\|_{L^2(\Gamma)} \leq c(\Omega)\|v_k - v\|_{H^1(\Omega)}$, c'est à dire que la suite $(Tr\ v_k)$ converge vers $Tr\ v$ dans l'espace $L^2(\Gamma)$. Alors, il existe une sous suite qui converge presque partout vers $Tr\ v$ mais puisque $Tr\ v = 0$ sur Γ, ceci implique que $v \in H_0^1(\Omega)$.

ii) Evident.

iii) La bilinéarité de $a_1(.,.)$ est évidente. Pour la continuité, on a

$$| a_1(u,v) | \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq cte \ \|u\|_V \|v\|_V$$

iv) Il suffit de trouver $\alpha > 0$ tel que $a_1(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2$. On a alors,

$$a_1(u,u) = \int_\Omega | \nabla u |^2 \ dx = \|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_V^2 .$$

D'où le résultat avec $\alpha = 1$. ■

Ce théorème nous permet d'établir le résultat suivant :

Théorème 2.2.4

Le problème (2.8) possède exactement une seule et unique solution faible $u \in H^1(\Omega, \Delta)$.

Preuve.

Evident d'après le théorème 2.2.3 et le théorème de Lax-Milgram . ■

Pour interpréter maintenant le problème (2.8), considérons la solution faible du problème (P_1) et l'équation

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \ dx = 0 \quad , \quad \forall \ v \in V \tag{2.9}$$

Par application inverse de la formule de Green à son terme de gauche, on obtient :

$$-\int_\Omega \nabla u.\nabla v \ dx = \int_\Omega \Delta u.v \ dx - \int_\Gamma \partial_n u.v \ d\Gamma \quad , \quad v \in V \tag{2.10}$$

Prenons en compte que $v = 0$ sur Γ et substituons (2.10) dans (2.9), on aura

$$< \Delta u, v >= 0 \quad , \quad \text{c'est à dire que } \Delta u \in \mathcal{D}^{'}(\Omega) \text{ est nul.}$$

mais comme $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors on a $\Delta u = 0$ p.p dans Ω, qui est la première équation de (P_1).

Enfin, d'après la définition 2.2.2, on a $(u-f) \in H_0^1(\Omega)$, ce qui fait que

$$u - f = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

d'où la deuxième équation de (P_1).

Ainsi, le problème aux limites correspondant à la formulation variationnelle (2.8), est le problème (P_1).

2.2.3 Réduction en équations intégrales

D'une manière générale, le problème de Dirichlet pour le Laplacien est réduit en une équation intégrale, en supposant que la solution s'écrit sous la forme d'un potentiel de double cauche.

L'intérêt de cette procédure est que les équations intégrales obtenues sont des équations de Fredholm de deuxième espèce. Ainsi les théorèmes de Fredholm peuvent être appliqués [41], [33].

La démarche, qui consiste à représenter, la solution du problème de Dirichlet par un potentiel de simple cauche, conduit quand à elle, à d'autre types d'équations intégrales où la théorie de Fredholm n'est pas applicable [31].

Formules de représentations

Les outils fondamentaux pour construire les équations intégrales au bord sont la solution élémentaire de l'équation de Laplace donnée par

$$E(x) := \frac{1}{2\pi} \log \mid x \mid \tag{2.11}$$

et la propriété de simple et de double cauche.

Définition 2.2.5

Pour $\mu, \nu \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$,On définit S_Ω et D_Ω par les potentiels logarithmiques de simple cauche $(P.S.C)$ et de double cauche $(P.D.C)$, respectivement par

$$S_\Omega \mu\left(x\right) := E\left(x\right) * \mu \ \delta_\Gamma = \int\limits_\Gamma \mu(y) E(x-y) d\Gamma_y, \qquad x \in \Omega \tag{2.12}$$

$$D_\Omega \nu\left(x\right) := E\left(x\right) * \left(-\partial_n\left(\nu \delta_\Gamma\right)\right) = \int\limits_\Gamma \nu(y) \tfrac{\partial E}{\partial n_y}(x-y) d\Gamma_y, \qquad x \in \Omega \tag{2.13}$$

où δ_Γ est la masse de Dirac sur Γ.

Lemme 2.2.6

Soit $\Gamma \in C^{\infty}$ et $\nu,\ \mu \in C\left(\Gamma\right)$. Alors on a les relations suivantes du saut pour $(P.S.C)$ et $(P.D.C)$, quand un point x de l'intérieur tend vers un point sur la frontière.

$$\left(\partial_n S_\Omega\left(x\right)\right)|_\Gamma = +\tfrac{1}{2}\mu\left(x\right) + \int\limits_\Gamma \mu\left(y\right) . \partial_{n_y} E\left(x-y\right)\ d\Gamma_y \quad , \quad x,\ y \in \Gamma \tag{2.14}$$

$$\left(D_\Omega \nu\left(x\right)\right)|_\Gamma = -\tfrac{1}{2}\nu\left(x\right) + \int\limits_\Gamma \nu\left(y\right) . \partial_{n_y} E\left(x-y\right)\ d\Gamma_y \quad , \quad x,\ y \in \Gamma \tag{2.15}$$

Preuve. On remarque que pour toutes fonctions $\mu, \nu : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ assez régulières, les potentiels de simple et de double cauche satisfont l'équation de Laplace, à savoir

$$\Delta S_\Omega \mu = 0 \ \text{ dans } \Omega,$$

$$\Delta D_\Omega \nu = 0 \ \text{ dans } \Omega.$$

Calculons donc, en un point $x \in \Gamma$, l'expression du gradient de S_Ω, on a d'abord

$$\nabla_x E(x) = \frac{x-y}{2\pi \mid x-y \mid^2},$$

alors on a

$$\nabla_x S_\Omega \mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \mu(y) \frac{x-y}{\mid x-y \mid^2} \, d\Gamma_y$$

Cette expression n'a pas de limite quand x tend vers la courbe Γ car la fonction $\frac{1}{|x-y|}$ n'est pas intégrable pour x sur Γ. On peut donc exprimer la valeur de $\partial_n S_\Omega$ pour un sens faible par une fonction test Φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Et d'après la formule de Green on a

$$\begin{aligned}
\langle \partial_n S_\Omega, \Phi \rangle &= \int_\Gamma \partial_n S_\Omega(x) \Phi(x) \; d\Gamma_x = -\int_\Omega \nabla S_\Omega(z) . \nabla \Phi(z) \; d\Omega \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_\Omega \int_\Gamma \mu(y) \frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{\mid y-z \mid^2} \; d\Gamma_y d\Omega
\end{aligned}$$

Cette expression est intégrable sur le produit $\Gamma \times \Omega$. Nous pouvons donc permuter les deux intégrations, d'après le Théorème de Fubini. D'où

$$\int_\Gamma \partial_n S(x) \Phi(x) \; d\Gamma_x = -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \mu(y) \left(\int_\Omega \frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{\mid y-z \mid^2} \; d\Omega \right) \; d\Gamma_y. \tag{2.16}$$

Maintenant pour $r > 0$, notons par $\Omega_r = \Omega \cap B_r$, la partie de Ω contenue à l'intérieur de la boule B_r du rayon r et de centre y, alors

$$\int_\Omega \frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{\mid y-z \mid^2} \; d\Omega = \lim_{r \to 0} \int_{\Omega - \Omega_r} \frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{\mid y-z \mid^2} \; d\Omega$$

Par application de la formule de Green à nouveau on obtient

$$\int_{\Omega - \Omega_r} \frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{\mid y-z \mid^2} d\Omega = -\int_{\Gamma - \Gamma_r} \frac{(y-x).n_x}{\mid x-y \mid^2} \Phi(x) \, d\Gamma_x + \int_{\Omega_r} \frac{\Phi(x)}{\mid x-y \mid} d\Gamma_x$$

Quand $r \to 0$, nous obtenons donc :

$$\int_{\Omega} \frac{(y-z).\nabla\Phi(z)}{\mid y-z\mid^2} \; d\Omega = -\pi\Phi(y) + \int_{\Gamma} \frac{(y-x).n_x}{\mid x-y\mid^2}\Phi(x) \; d\Gamma_x.$$

D'où, en reportant cette expression dans (2.16), on aboutit à

$$\int_{\Gamma} \partial_n S_\Omega(x)\,\Phi(x) \; d\Gamma_x = +\frac{1}{2}\int_{\Gamma} \mu(x)\,\Phi(x) \; d\Gamma_x + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma} \frac{(y-x).n_x}{\mid x-y\mid^2}\mu(y)\,\Phi(x) \; d\Gamma_y d\Gamma_x$$

alors

$$\partial_n S_\Omega(x) = +\frac{1}{2}\mu(x) + \int_{\Gamma} \frac{(y-x).n_x}{\mid x-y\mid^2}\mu(y) \; d\Gamma_y$$

au sens faible, donc on en déduit (2.14). De la même manière on obtient (2.15). ■

Théorème 2.2.7

Pour toute fonction $\mu, \nu : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ assez régulière, les équations intégrales liées aux problème (P_1) sont données par :

$$S\mu = -2f, \qquad (I+D)\,\nu = -2f \tag{2.17}$$

où les opérateurs intégraux aux bord S, D sont donnés par

$$\begin{aligned} S\mu(x) \; &: = \frac{-1}{\pi}\int_{\Gamma} \mu(y)\,.\log\mid x-y\mid d\Gamma_y \\ D\nu(x) \; &: = \frac{-1}{\pi}\int_{\Gamma} \nu(y)\,.\partial_{n_y}\log\mid x-y\mid d\Gamma_y \end{aligned}$$

avec $x,\, y \in \Gamma$.

Preuve. On cherchera la solution de problème (P_1) sous la forme d'un potentiel de simple cauche.

Concernant le problème de Dirichlet (P_1), la première étape consiste à exprimer $u(x)$

sous la forme d'un potentiel de simple cauche, à savoir :

$$u(x) = E(x) * \mu\delta_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y) . \log | x - y | \, d\Gamma_y \quad , \quad x \in \Omega \quad , \quad y \in \Gamma \tag{2.18}$$

En passant à la limite dans (2.18), la continuité de la simple cauche nous permet d'avoir pour (P_1) une équation intégrale de première espèce

$$u(x) |_\Gamma = f = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \mu(y) . \log | x - y | \, d\Gamma_y, \qquad x, \ y \in \Gamma \tag{2.19}$$

Si on écrit $u(x)$ sous la forme d'un potentiel de double cauche, à savoir :

$$u(x) = E(x) * (-\partial_n(\nu\delta_\Gamma)) \tag{2.20}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \nu(y) \, \partial_{n_y} \log | x - y | \, d\Gamma_y, \quad x \in \Omega, \quad y \in \Gamma \tag{2.21}$$

la propriété de saut de double cauche, nous donne pour (P_1) une équation intégrale de deuxième espèce

$$u(x) |_\Gamma = f = \frac{-1}{2}\nu(x) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \nu(y) \, \partial_{n_y} . \log | x - y | \, d\Gamma_y \quad , \quad x, \ y \in \Gamma$$

■

Propriétés des opérateurs intégraux au bord

Ainsi, à un seul problème aux limites, on peut construire différentes équations intégrales lesquels, en général, ont différentes propriétés impliquant certains avantages ou inconvénients sur les schémas de la résolution numérique.

La résolution de la deuxième équation intégrale dans (2.17) est classique. Tandis que pour l'analogue d'équation intégrale (2.17), c'est seulement en 1973, et en 1978, qu'un cadre variationnel approprié a été présenté pour discuter l'éxistence et l'unicité de leur solution grâce aux travaux de Nedelec–Planchard [35], [51].

Dans ce travail, notre approche est totalement différente. En effet, les opérateurs intégraux définis dans (2.17) sont interprétés comme des opérateurs pseudo-différentiels. Ceci nous a permis d'obtenir la coercivité moyennant le calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels.

Pour mettre en évidence, l'élégance de cette technique, commençons par présenter brièvement les travaux de Nedelec et Planchard.

Pour la première équation intégrale donnée par

$$S\mu\left(x\right) = -2f,$$

le but est de définir un opérateur qui associe f à μ. Pour cela, les auteurs introduisent le problème de Dirichlet exterieur et construisent leur opérateur par composition selon le schéma suivant :

$$\mu \in H^{-\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right) \longrightarrow u \in H^{1}\left(\Omega\right) \times W^{1}\left(\Omega_{e}\right) \longrightarrow f \in H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right) \tag{2.22}$$

avec

$$W^{1}\left(\Omega_{e}\right) := \left\{ v \in \mathcal{D}'\left(W^{1}(\Omega_{e})\right) \quad v;\ r\log r \in L^{2}\left(\Omega_{e}\right),\ Dv \in L^{2}\left(\Omega_{e}\right) \right\}$$

Maintenant, le deuxième opérateur dans (2.22) est défini et continu.

En vertu de l'unicité du problème (P_1) dans Ω et Ω_e, ils obtiennent l'isomorphisme J_0 de K sur $H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)$, où

$$K := \left\{ v \in W^{1}\left(\mathbb{R}^{2}\right),\ \operatorname{supp}\left(\Delta v\right) \subset \Gamma \right\}. \tag{2.23}$$

Concernant le premier opérateur dans (2.22), l'opérateur $u \longrightarrow \mu$ est défini, continue de K sur $H^{-\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)$.

Par analogie, ils montrent que l'opérateur

$$K \xrightarrow{J_1} H^{\frac{-1}{2}}$$

qui à u fait correspondre μ est lui aussi un isomorphisme. Ainsi (2.22) est réécrite de la manière suivante :

$$\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{J_1^{-1}} u \in H^1(\Omega) \times W^1(\Omega_e) \xrightarrow{J_0} u\mid_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

Ce qui fait que l'isomorphisme $J = J_0 \circ J_1^{-1}$ est représente par la première équation de (2.17).

Enfin, ils établissent le résultat suivant :

Théorème 2.2.8 [35] [51]

i) le problème variationnel lié à (2.17) est donné par

$$b\left(\mu, \mu'\right) = < f, \mu' > \quad , \quad \forall \mu' \in H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \quad ;$$

avec

$$b\left(\mu, \mu'\right) = -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma \log(\mid x - y \mid) \ \mu'(x) \ \mu(y) \ d\Gamma_x \ d\Gamma_y$$

ii) La forme bilinéaire symétrique $b\left(\mu, \mu'\right)$ est coercive sur $H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$ c'est à dire, il existe une constante $c > 0$, tel que :

$$b\left(\mu, \mu'\right) \geq c \ \|\mu\|^2_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)} \quad ; \quad \forall \mu \in H_0^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$$

A présent, comme on l'a mentionné auparavant, dans cette étude on présente une approche différente, qui consiste à interpréter les opérateurs S, $(I + D)$ comme des opérateurs pseudo-différentiels pour obtenir des propriétés communes.

Maintenant, à chaque opérateur intégral, on associe par la transformée de fourier, ce qu'on appelle le symbole complet. Après, on exige que celui-ci, admet une expansion asymptotique pour τ très grand avec pour premier terme d'ordre supérieur en τ, le symbole principal (section (1.9)).

Si on désigne l'ordre du symbole principal par 2α, alors l'opérateur intégral est appelé opérateur pseudo-différentiel d'ordre 2α.Ainsi, on est en mesure de formuler le

Théorème 2.2.10

i) Les opérateurs S, $(I + D)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels de symbole principal $\mid \tau \mid^{-1}$, 1 et d'ordre -1, 0 respectivement.

ii) Ils sont fortement elliptiques : c'est à dire, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\Re e \ \sigma(x,\tau) \geq c > 0$$

pour tout $\mid \tau \mid= 1$ et $x \in \Gamma$ avec c indépendant de x et τ et σ est le symbole principal.

Preuve. i1) La partie principale dans $(I + D)$ est donnée par l'opérateur I

$$I\mu(x) = \mu(x) = \frac{1}{2\pi}\int \overset{ix\tau}{\exp} \ F[\mu] \ d\tau$$

Ceci implique que $\sigma_I(x,\tau) = 1 =\mid \tau \mid^0$.

i2) Pour l'opérateur S, on considère, la représentation paramétrique de Γ suivante :

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = x\left(t'\right). \end{cases}$$

D'après la formule de Taylor on peut écrire :

$$x(t) - x\left(t'\right) = \left(t - t'\right)x'(t) + R\left(t,t'\right)$$

d'où

$$\mid x(t) - x\left(t'\right) \mid= (\bar{t}^2(\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + R(t,\bar{t})))^{\frac{1}{2}} = \left(\bar{t}^2\left(1 + R_1\left(t,\bar{t}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) = 1,\ \bar{t} = t - t^{'} \text{ et } R_1 = R\bar{t}^{-2}$$

où

$$\mid R_1 \mid = \mid R\bar{t}^{-2} \mid \leq c \mid \bar{t} \mid \leq 1.$$

Ainsi

$$\mid x - y \mid = \left[\bar{t}^2 \left(1 + R_1(t, \bar{t})\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \mid \bar{t} \mid \left(1 + R_1(t, \bar{t})\right)^{\frac{1}{2}} = \mid \bar{t} \mid \left[1 + R_1/2 - R_1^2/8 + ...\right]$$

Ce qui fait que

$$\begin{aligned} \log \quad \mid \quad & x - y \mid = \log \mid x(t) - x\left(t^{'}\right) \mid = \log(\mid \bar{t} \mid (1 + R_1)^{\frac{1}{2}}) \\ = \quad & \log \mid \bar{t} \mid + \frac{1}{2} \log \mid 1 + R_1 \mid = \log \mid \bar{t} \mid + \frac{1}{2} \log \left[R_1 - R_1^2/2 + ...\right] \end{aligned}$$

on a $\frac{1}{2}\left[R_1 - R_1^2/2 + ...\right]$ indéfiniment différentiable car $\mid R_1 \mid < 1$
Soit maintenant une fonction de troncature $\mathcal{X}$ telle que $\mathcal{X}(\mid \bar{t} \mid) = 1$.
Alors,

$$S\mu(t) = A_1\mu(t) + A_2\mu(t),\ \text{avec}$$

$$\begin{aligned} A_1\mu(t) \quad &= \quad -\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} \mathcal{X}(\mid \bar{t} \mid) . \log \mid \bar{t} \mid .\mu\left(t^{'}\right)\ dt^{'} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it\bar{t}) . \mathcal{F}\{\mu(\bar{t})\} . p_s(t, \bar{t})\ d\bar{t}, \end{aligned}$$

A_2 est un opérateur régularisant, c'est à dire, de noyau C^{∞} et $p_s(t, \bar{t})$ donné par

$$p_s(t, \bar{t}) = -\frac{1}{\pi}\int \exp(it\bar{t}) . \mathcal{X}(\mid \bar{t} \mid) . \log \mid \bar{t} \mid d\bar{t},$$

qui représente le symbole complet de S.

Sachant que

$$\mathcal{X}\left(\mid \bar{t}\mid\right)=\mathcal{X}\left(0\right)+\bar{t}.\mathcal{X}'\left(0\right)+...,$$

alors le symbole principal sera donné par

$$\sigma_S\left(t,\tau\right)=-\frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left\{\mathcal{X}\left(0\right)\log\mid \bar{t}\mid\right\}=\mid \tau\mid^{-1},$$

$\mathcal{F}\{.\}$ étand désigne la transformation de Fourier. Ce qui fait que l'ordre de l'opérateur S est égal à -1.

ii) évident d'après la définition. ■

Le symbole principal de chaque opérateur pseudo-différentiel, nous est nécessaire, afin de montrer certaines propriétés concernant ces opérateurs et en particulier, la propriété de forte ellipticité, qui à son tour, nous permet d'avoir une inégalité de type énergétique.

Lemme 2.2.11

Les opérateurs

$$\begin{aligned} S &: H^{-\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)\\ D &: H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)\end{aligned}$$

sont continus.

Preuve. i) On a :

$$\|S\mu\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}=\int_\Gamma\left(1+\mid\tau\mid^2\right)^{\frac{1}{2}}.\mid\mathcal{F}\left\{S\mu\left(\tau\right)\right\}\mid^2 d\tau$$

et

$$F\left\{S\mu\left(\tau\right)\right\}=\sigma_S F\left\{\mu\left(\tau\right)\right\},\ \text{avec}\ \sigma_S\left(x,\tau\right)\leq c_1\left(1+\mid\tau\mid^2\right)^{-1}$$

Ce qui fait que

$$\begin{aligned} &\mid \quad \sigma_S F\{\mu(\tau)\} \mid^2 \leq \mid c_1 \left(1+ \mid \tau \mid^2\right)^{-1} F\{\mu(\tau)\} \mid^2 \\ \leq &\quad c_1^2 \left(1+ \mid \tau \mid^2\right)^{-2} \mid F\{\mu(\tau)\} \mid^2 \end{aligned}$$

Ceci implique alors que

$$\begin{aligned} \|S\mu\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq c_1^2 \int_\Gamma \left(1+ \mid \tau \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1+ \mid \tau \mid^2\right)^{-2} \mid F\{\mu\} \mid^2 d\tau \\ &\leq c_2 \int_\Gamma \left(1+ \mid \tau \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1+ \mid \tau \mid^2\right)^{-1} \mid F\{\mu\} \mid^2 d\tau \\ &\leq c_2 \|\mu\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

ii) La démonstration pour l'opérateur D se fait d'une manière analogue. ■

2.2.4 Existence et Unicité

La coercivité pour les opérateurs est satisfaite dans la forme de l'inégalité de Garding (voir théorème 1.15). En effet, on a le théorème suivant :

Théorème 2.2.12

Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ on a :

$$< S\mu, \mu > \quad \geq \quad c_1 \|\mu\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} - < S_1\mu, \mu > \qquad (2.24)$$

où $S_1 : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est compact.

Preuve. Soit $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. En utilisant la transformation de Fourier. On réduit la situation au cas $\Gamma = \mathbb{R}$. D'après l'équation de Parseval, on a

$$< S\mu, \mu >= \int_{\mathbb{R}} S\mu.\mu \; dx = \int_{\mathbb{R}} F\{S\mu\}.F\{\mu\} \; dx = \int_{\mathbb{R}} \mid \tau \mid^{-1} . \mid F\{\mu\} \mid^2 \; d\tau$$

Soit maintenant un opérateur pseudo-différentiel S_0 de symbole principal $\sigma_{S_0} = \left(1+ \mid \tau \mid^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}$.

On a alors :

$$S = S_0 - S_0 + S = S_0 - S_1$$

avec S_1 un opérateur d'ordre -2, d'où compact de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. S_0 est défini positif, c'est-à-dire, il existe une constante c positive telle que :

$$< S_0\mu, \mu > \;\; \geq \;\; c\|\mu\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \tag{2.25}$$

En effet,

$$c\left(1+ \mid \tau \mid^2\right)^{-\frac{1}{2}} \leq \left(1+ \mid \tau \mid^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

Ce qui fait que

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(1+ \mid \tau \mid^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} \mid F\{\mu\} \mid^2 d\tau \geq c \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1+ \mid \tau \mid^2\right)^{-\frac{1}{2}} \mid F\{\mu\} \mid^2 d\tau.$$

D'où (2.25).

D'où

$$< S\mu, \mu > \;\; \geq \;\; c_1\|\mu\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} - < S_1\mu, \mu >$$

■

Maintenant, pour la suite de notre étude, on a besoin de la propriété suivante de Ω voir page139 dans [50], à savoir

$$\text{diamètre}\,(\Omega) < 1 \tag{2.26}$$

Cette condition revient à dire que la capacité analytique ou bien le rayon conforme de Γ est inferieur de l'unité.

Dans ce cas, on a le

Théorème 2.2.13

Soit $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ donné. Alors

i) $S\mu(x) = 0$ implique que $\mu = 0$.

ii) l'opérateur

$$S : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est bijectif.

Preuve. i) L'unicité est assurée d'après l'unicité du problème (P_1). En effet, si $S\mu(x) = 0$, alors le problème de Dirichlet (P_1) devient un problème avec une condition homogène et celui-ci possède une seule solution triviale $\mu(x) = 0$. D'où le résultat.

ii) D'après **i.** l'opérateur S est injectif. Maintenant, d'après l'inégalité de Garding, chaque opérateur diffèrent de l'opérateur défini-positif par une perturbation compacte. Ainsi, cet opérateur est un opérateur d'indice zéro. D'où la surjection de S. ∎

2.2.5 Propriété d'équivalence

On veut montrer que la solution faible $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ pour $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ satisfait aussi l'équation intégrale de première espèce (2.17). On a alors le

Théorème 2.2.14

Soit $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ donné. Alors

Le problème (P_1) pour $u \in H^1(\Omega, \Delta)$, la formulation variationnelle (2.6) et l'intégrale de première espèce (2.17) pour $\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, ont chacun exactement une solution et sont équivalents.

Preuve. Chaque solution de (P_1) donne une solution de l'équation intégrale de première espèce (2.17). Cette solution est unique et à son tour prouve que la solution de (2.17) définit une solution de (P_1). L'équivalence entre (P_1) et (2.6) pour $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ a été discutée. ∎

2.3 Méthode du potentiel pour le Laplacien dans un domaine régulier pour Neumann

2.3.1 Formulation du problème

Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ simplement connexe, de frontière $\Gamma \in C^{\infty}$. On aura besoin des espaces de Sobolev.

Considérons maintenant le problème suivant pour une fonction $u \in H^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_n u &= g \quad , \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{P$_2$}$$

$g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est donnée.

Le problème (P_2) constitue le problème de Neumann pour le Laplacien. Ce problème modélise, par exemple, le mouvement d'un corps solide dans un fluide incompressible parfait en hydrodynamique.

2.3.2 Etude variationnelle

Comme pour le problème de Dirichlet, l'étude est faite dans le cas où Ω est un domaine intérieur. L'espace dans lequel on cherche la solution de problème (P_2) est $H^1(\Omega, \Delta)$ et l'espace de Hilbert V est donné cette fois-ci par

$$V = H^1(\Omega)$$

car la condition au bord $\partial_n u$ est une condition naturelle.

Soit maintenant $v \in H^1(\Omega)$. Par analogie avec le problème (P_1), la formule de Green nous permet d'avoir

$$\int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \; d\Omega = \int_{\Gamma} g . v \; d\Gamma \tag{2.27}$$

Si on pose :

$$a_2(u,v) = a_1(u,v)$$

et

$$L_2(v) = \int_\Gamma g.v \, d\Gamma, \qquad v \in H^1(\Omega), \tag{2.28}$$

le problème (P_2), se réduit alors au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \quad , & \text{telle que :} \\ a_2(u,v) = L_2(v) & \text{pour tout } v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.29}$$

Théorème 2.3.1

i) $L_2(.)$ est une forme linéaire continue.

ii) $a_2(.,.)$ est une forme bilinéaire continue.

iii) $a_2(.,.)$ n'est pas H^1-elliptique, mais elle est H^1/P_0-elliptique, c'est à dire qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que :

$$a_2(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{H^1/P_0}, \tag{2.30}$$

avec P_0 l'espace des polynômes d'ordre zéro.

Preuve. i) et ii) sont évidents.

iii) On montre d'abord par un contre exemple que (2.6) n'est pas H^1-elliptique. Pour cela, supposons le contraire et soit $u = \mathcal{X}_\Omega$ alors, $\mathcal{X}_\Omega \in H^1(\Omega)$ et $\|\mathcal{X}_\Omega\|_{H^1} = mes(\Omega) \neq 0$.

Or $a_2(\mathcal{X}_\Omega, \mathcal{X}_\Omega) = a_2(1,1) = 0 \geq \alpha \|\mathcal{X}_\Omega\|^2_{H^1}$. Ce qui imlpique que $\alpha \geq 0$ et ceci est une contradiction.

Pour montrer maintenant (2.30), considérons l'espace P_0 des polynômes d'ordre zéro :

$$P_0 = \left\{ p_0 \in H^1(\Omega), \; p_0 = C^{te} \text{ dans } \Omega \right\}$$

et soit Q un sous espace de $H^1(\Omega)$ défini comme suit :

$$Q := \left\{ v \in H^1(\Omega),\ \ (v, p_0) = 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \right\}.$$

Notons que (v, p_0) est égal à $(v, 1) = 0$.

Q est le complément orthogonal de P_0 dans $H^1(\Omega)$. C'est à dire que pour tout élément $u \in H^1(\Omega)$, on a $u = v + p_0$, $v \in Q$ et $p_0 \in P_0$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (2.29) est donnée par $v + p_0$ où v est solution unique dans Q. En effet, pour tout $v \in Q$, on a

$$a_2(v, v) = \int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 dx. \tag{2.31}$$

Or d'après l'inégalité de Poincaré, on a

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \beta \left\{ \int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 dx + \left(\int_\Omega v\ dx \right)^2 \right\},$$

Ce qui fait que

$$\int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 dx \geq \frac{1}{\beta} \|v\|^2_{H^1} = \frac{1}{\beta} \|v\|^2_Q,$$

car $(v, 1) = 0$ et Q est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. Ainsi, (2.31) devient

$$a_2(v, v) \geq \frac{1}{\beta} \|v\|^2_Q,$$

c'est à dire la $Q-$coercivité de $a_2(.,.)$ avec $\alpha = \frac{1}{\beta}$. ■

Théorème 2.3.2

Le problème (2.29) possède une seul et unique solution faible dans $H^1(\Omega)/P_0$ avec la condition de solvabilité suivante :

$$\int_{\Gamma} g \, d\Gamma = 0 \tag{2.32}$$

Preuve. voir [20]. ■

Pour interpréter le problème (2.29), nous considérons l'équation

$$\int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx = \int_{\Gamma} g . v \, d\Gamma, \tag{2.33}$$

par application inverse de la formule de Green à son terme de gauche et par analogie avec le problème (P_1), on trouve la première équation du problème (P_2) à savoir

$$\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Ceci à son tour implique que

$$\int_{\Omega} \Delta u . v \, dx = 0 \quad , \quad \text{pour tout } v \in V.$$

En appliquant la formule de Green à cette équation, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx = \int_{\Gamma} \partial_n u . v \, d\Gamma, \quad \forall v \in V. \tag{2.34}$$

Si on retranche maintenant (2.34) de (2.33), on obtient :

$$\int_{\Gamma} (\partial_n u - g) . v \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Ceci implique à son tour $\partial_n u = g$ sur Γ, d'après la densité des traces de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

Ainsi, le problème équivalent au problème variationnel (2.29) est le problème (P$_2$).

2.3.3 Réduction en équations intégrales

Formules de représentations

Théorème 2.3.3

Les équations intégrales liées au problème (P$_2$) sont données par :

$$\left(I - D^{'}\right)\mu = 2g, \qquad T\nu = -2g, \tag{2.35}$$

où $D^{'}$, T sont données par

$$\begin{aligned} D^{'}\mu(x) \quad &: \quad = \frac{-1}{\pi}\int_{\Gamma}\mu(y)\,.\partial_{n_x}\log\mid x-y\mid d\Gamma_y \\ T\nu(x) \quad &: \quad = \frac{-1}{\pi}\int_{\Gamma}\nu(y)\,.\partial_{n_x}\partial_{n_y}\log\mid x-y\mid d\Gamma_y \end{aligned}$$

avec $x,\ y \in \Gamma$ et l'opérateur $D^{'}$ désigne l'adjoint de D.

Preuve. On cherchera la solution de problème (P$_2$) sous la forme d'un potentiel de double cauche.

En considérant la dérivée normale de (2.18) et après passage à la limite, on obtient une équation intégrale de deuxième éspèce pour (P$_2$), à savoir :

$$\partial_n u(x)\mid_\Gamma = g = +\frac{1}{2}\mu(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\mu(y)\,.\partial_{n_y}\log\mid x-y\mid d\Gamma_y, \qquad x,\ y\in\Gamma \tag{2.36}$$

Si par contre, on prend la dérivée normale de (2.20), on obtient après passage à la limite une équation définie comme une valeur principale, à savoir :

$$\partial_n u(x)\mid_\Gamma = g = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \nu(y).\partial_{n_x}\partial_{n_y}\log\mid x-y\mid d\Gamma_y, \qquad x,\ y\in\Gamma \tag{2.37}$$

■

On remarque que le noyau associé à l'opérateur T dans (2.35), est

$$\partial_{n_x}\partial_{n_y}\log\mid x-y\mid = O\left(\frac{1}{\mid x-y\mid^2}\right),$$

Ce noyau est donc non intégrable, alors cette expression doit être éxprimée à l'aide de distributions qui sont des parties finies.

Propriétés des opérateurs intégraux au bord

Concernant la deuxième équation intégrale donnée par

$$T\nu = -2g,$$

les auteurs introduisent comme pour l'équation de première espèce, l'espace

$$K' = \left\{\nu\in\left(H^1(\Omega,\Delta)/P_0\right)\times W^1\left(\Omega',\Delta\right)\ /\ \mathrm{Supp}(\Delta v)\subset\Gamma,\ \ [\partial_n v]=0\right\}$$

Soit à présent, l'application J qui associe $\nu\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/P_0$ à $g\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et qui vérifie la condition d'existence

$$< g,1 >_\Gamma = 0.$$

Alors l'application liant $g\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ à $\nu\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)/P_0$ est un isomorphisme.

Pour l'étude variationnel du problème au bord, ils établissent le résultat suivant :

Théorème 2.3.4 [28]

i) le problème variationnel lié à (2.35) est donné par

$$b\left(\nu,\nu^{'}\right)=\int g\left(y\right)\ \nu^{'}\left(y\right)\ d\Gamma_{y}\quad,\quad\forall\nu^{'}\in H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)/P_{0}$$

où

$$b\left(\mu,\mu^{'}\right)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma}\left(\nu\left(x\right)-\nu\left(y\right)\right)\left(\nu^{'}\left(x\right)-\nu^{'}\left(y\right)\right)\partial_{n_{x}}\partial_{n_{y}}\log\mid x-y\mid\ d\Gamma_{x}\ d\Gamma_{y}$$

pour tout ν, $\nu^{'}\in H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\right)/P_{0}$.

Théorème 2.3.5

i) Les opérateurs $\left(I-D^{'}\right)$, T sont des opérateurs pseudodifférentiels de symbole principal 1, $\mid\tau\mid$ et d'ordre 0, 1 respectivement.

ii) Ils sont fortement elliptiques : c'est à dire, il existe une constante $c>0$ telle que :

$$\Re e\ \sigma\left(x,\tau\right)\geq c>0$$

pour tout $\mid\tau\mid=1$ et $x\in\Gamma$ avec c indépendant de x, τ. σ étant le symbole principal.

Preuve. i1) La partie principale dans $(I+D)$ est donnée par l'opérateur I

$$I\mu\left(x\right)=\mu\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int exp^{ix\tau}\ \mathcal{F}\left\{\mu(\tau)\right\}\ d\tau$$

Ceci implique que $\sigma_{I}\left(x,\tau\right)=1=\mid\tau\mid^{0}$.

i2) Pour l'opérateur T, on sait que

$$\partial_{n_{x}}\partial_{n_{y}}\log\mid x-y\mid=O\left(\frac{1}{\mid x-y\mid^{2}}\right)=O\left(\mid\bar{t}\mid^{-2}\right).\tag{2.38}$$

Considérons maintenant une fonction de troncature $\overline{\mathcal{X}}(\mid t\mid)=1$ dans un voisinage fixe de zéro.

Alors l'opérateur T s'écrit

$$
\begin{aligned}
T\nu(t) = \quad & -\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \mathcal{X}(\mid t \mid)\partial_{n_x}\partial_{n_y}\log\mid x-y\mid \nu(t^{'})\ dt^{'} \\
& -\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} (1-\mathcal{X}(\mid t \mid))\partial_{n_x}\partial_{n_y}\log\mid x-y\mid \nu(t^{'})\ dt^{'}
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Remplaçons (2.38) dans (2.39), on obtient

$$
T\nu(t) = B_1\nu(t) + B_2\nu(t), \tag{2.40}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
B_1\nu(t) &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \mathcal{X}(\mid \bar{t} \mid)(-\mid \bar{t}^{-2} \mid)\nu(t^{'})\ dt \qquad (2.41)\\
&= \int\limits_{-\infty}^{'+\infty} \exp(it\bar{t})\mathcal{F}\left\{\nu(\overline{\tau})\right\} P_T(t,\bar{t})\ d\bar{t},
\end{aligned}
$$

et B_2 un opérateur régularisant, c'est à dire, de noyau C^{∞} et $P_T(t,\bar{t})$ donné par

$$
P_T(t,\bar{t}) = -\frac{1}{\pi}\int \exp(it\bar{t})\mathcal{X}(\mid \bar{t} \mid)\bar{t}^{-2}d\bar{t}, \tag{2.42}
$$

représente le symbole complet de T. Sachant que

$$
\mathcal{X}(\mid \bar{t} \mid) = \mathcal{X}(0) + \bar{t}.\mathcal{X}^{'}(0) + ..., \tag{2.43}
$$

alors le symbole principal sera donné par

$$
\sigma_T\left(t,\tau\right) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{F}\left\{\mathcal{X}\left(0\right)\bar{t}^{-2}\right\} = \mid \tau \mid,
$$

et on déduit l'ordre de T, qui est égale à 1.

ii) évident d'aprés la définition . ■

Lemme 2.3.6

Les opérateurs

$$\begin{aligned} D' &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ T &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{aligned}$$

sont continus.

Preuve. Pour l'opérateur T, on a :

$$\sigma_T(x,\tau) = \mid \tau \mid .$$

Alors

$$\mid \sigma_T \mathcal{F}\{\nu(t)\} \mid^2 = \mid \tau \mid^2 \mid \mathcal{F}\{\nu(t)\} \mid^2 \leq \left(1 + \mid \tau \mid^2\right) \mid \mathcal{F}\{\nu(t)\} \mid^2$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|T\nu\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq c \int_\Gamma \left(1 + \mid \tau \mid^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \mid \tau \mid^2\right) \mid \mathcal{F}\{\nu\} \mid^2 d\tau \\ &\leq C^{te} \|\nu\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \end{aligned}$$

ii) La démonstration pour l'opérateur D' se fait d'une manière analogue. ■

2.3.4 Existence et Unicité

L'inégalité de coercivité pour les opérateurs est satisfaite dans la forme de l'inégalité de Garding. En effet, on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.7

Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ on a :

$$< T\nu, \nu > \;\; \geq \;\; c_1 \|\nu\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - < T_1\nu, \nu > \tag{2.44}$$

où $T_1 : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est compact.

Preuve. Pour montrer (2.44), considérons alors $\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et procédons de la même manière que pour l'opérateur S.

$$< T\nu, \nu >= \int_{\mathbb{R}} T\nu.\nu \; dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\{T\nu\} .\mathcal{F}\{\nu\} \; d\tau = \int_{\mathbb{R}} \mid \tau \mid . \mid \mathcal{F}\{\nu\} \mid^2 \; d\tau$$

Soit maintenant un opérateur pseudo-différentiel T_0 de symbole principal $\sigma_{T_0} = \left(1+ \mid \tau \mid^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

On a alors :

$$T = T_0 - T_0 + T = T_0 - T_1$$

avec T_1 un opérateur pseudo-différentiel d'ordre zéro, d'où compact de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

T_0 est défini positif, c'est à dire , il existe une constante c telle que :

$$< T_0\nu, \nu > \;\; \geq \;\; c\|\nu\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

D'où

$$< T\nu, \nu > \;\; \geq \;\; c_1 \|\nu\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - < T_1\nu, \nu > .$$

Remarquons que pour les opérateurs $(I+D)$ et $(I-D')$, D et D' ce sont les opérateurs qui constituent les perturbations compactes. ■

Pour la suite de notre étude, on a besoin de la condition (2.26).

Dans ce cas, on a le

Théorème 2.3.8

Soit $\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ donné. Alors

i) $T\nu(x) = 0$ implique que $\nu = cte.$

ii) l'opérateur

$$T : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}/P_0,$$

est bijectif.

Preuve. i) d'après (2.35) si $T\nu(x) = 0$, le problème de Neumann devient un problème avec une condition homogène et ceci possède une solution à une constante près.

ii) l'opérateur T est injectif. Maintenant, d'après l'inégalité de Garding, chaque opérateur diffère de l'opérateur défini positif par une perturbation compacte. Ainsi, cet opérateur est un opérateur d'indice zéro. D'où la surjection de T. ■

2.3.5 Propriété d'équivalence

On veut montrer que la solution faible $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ pour $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ satisfait aussi l'équation intégrale de première espèce (2.35). On a alors le

Théorème 2.3.9

Soit $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ donné. Alors

Le problème (P_2) pour $u \in H^1(\Omega, \Delta)$, la formulation variationnelle (2.29) et l'intégrale de première espèce (2.35) pour $\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, ont chacun exactement une solution et sont équivalents.

Preuve. En ce qui concerne la démonstration de ce théorème est identique à la démonstration utilisée dans le problème de Dirichlet. ■

2.4 Méthode directe pour le Laplacien dans un domaine régulier pour le problème mixte :

2.4.1 Formulation du problème mixte

Le domaine d'étude est notée Ω, c'est un domaine ouvert, borné, doublement connexe de $\mathbb{R}^2$. Le bord Γ est constitué de deux parties disjointes Γ_1 et Γ_2 suffisamment lisses. Γ_1 et Γ_2 sont deux courbes C^∞ telles que : $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.

On considère le problème aux limites mixte intérieur pour le Laplacien, à savoir :

Trouver u dans $H^1(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta u(x) & = & 0 & x \in \Omega \\ u(x) & = & f(x) & x \in \Gamma_1 \\ \partial_n u(x) & = & g(x) & x \in \Gamma_2 \end{cases} \tag{P$_3$}$$

où $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ sont données.

2.4.2 Etude variationnelle

Le cas le plus générale où (P$_3$) peut être transformé en un problème variationnel est le suivant :

$\partial_n u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est defini par la formule de Green du Lemme 2.2.1.

Définition 2.4.1

Soit $u \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Alors les données de Cauchy

$$(v, w) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

sont définies comme étant les traces

$$(v, w) := (u_{|\Gamma}, \partial_n u_{|\Gamma}) \tag{2.45}$$

Maintenant, l'espace dans lequel on cherche la solution de problème (P_3), est donné par (2.1).

Prenons comme espace V, l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui satisfont, dans le sens des traces, la condition aux limites essentielle homogène correspondant, c'est-à-dire

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega),\ v_{|\Gamma_1} = 0 \right\} \tag{2.46}$$

Ce qui fait que si $v \in V$, alors le Lemme 2.2.1 donne :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \, d\Omega = < g, v_{|\Gamma_2} >_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \tag{2.47}$$

Notons que

$$v_{|\Gamma_2} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$$

car

$$v_{|\Gamma} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ et } v_{|\Gamma_1} = 0$$

Posons alors

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, d\Omega$$

et

$$L(v) = < g, v_{|\Gamma_2} > = \int_{\Gamma_2} g.v \, d\Gamma.$$

Le problème (P_3), se réduit alors au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ avec } u_{|\Gamma_1} = f \\ \text{telle que pour tout } v \in V \\ a(u,v) = L(v) \text{ soit vraie} \end{cases} \tag{2.48}$$

Théorème 2.4.2

i) V est un sous espace fermé dans $H^1(\Omega)$.

ii) $L(.)$ est une forme linéaire continue.

iii) $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue.

iv) $a(.,.)$ est V-coercive.

Preuve. Evidente d'après les résultats de la méthode indirect. ∎

Théorème 2.4.3

Le problème (2.48) possède exactement une seule et unique solution faible $u \in H^1(\Omega, \Delta)$.

Preuve. Evident d'après le théorème 2.4.3 et le théorème de Lax-Milgram. ∎

L'inverse est aussi vrai. Le problème correspondant au problème variationnel (2.48) est exactement le problème (P_3). Cela se traite d'une manière tout à fait analogue aux problème (P_1) et (P_2).

En effet, la première équation de (P_3) est obtenue par application inverse de la formule de Green à (2.47), ce qui fait que $\Delta u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ceci implique $(\Delta u,\, v) = 0$ pour tout $v \in V$.

La deuxième équation s'obtient d'après la définition de la solution faible qui spécifie que $(u - f) \in V$, tandis que la troisième équation découle du lemme 2.2.1 et de la densité des traces de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_2)$.

2.4.3 Systèmes des équations intégrales

Formules de repésentations

Dans les sections précédents, on avait introduit les opérateurs S_Ω et D_Ω. On va les réutiliser ici, pour une distribution arbitraire u sur Γ, afin de rassembler les résultats standards sur les formules de représentations et les opérateurs intégraux au bord dans les espaces de Sobolev correspondant à la solution faible.

Définition 2.4.4

Soit $u \in C^{\infty}(\Gamma)$, déja définit au (2.12) et (2.13)

Lemme 2.4.5

Pour $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ avec les données de Cauchy (v, w) et pour $x \in \Omega$ on a :

$$u(x) = -\left[D_{\Omega} v(x) - S_{\Omega} w(x)\right] \tag{2.49}$$

$$\partial_n u(x) = -\left[\partial_n D_{\Omega} v(x) - \partial_n S_{\Omega} w(x)\right] \tag{2.50}$$

Preuve. Pour montrer les formules de représentaions (2.49) et (2.50), on définit Ω_h le domaine Ω sans $\overline{\Omega} \cap \overline{B}_h$, où $\overline{B}_h$ est la boule de centre $x \in \Omega$ et de rayon h, c'est à dire, pour h assez petit on a

$$\Omega_h = \Omega \backslash \left(\overline{\Omega} \cap \overline{B}_h\right), \tag{2.51}$$

où

$$B_h = \left\{y \in \mathbb{R}^2 : \mid y - x \mid < h\right\}. \tag{2.52}$$

On applique la troisième formules de Green aux fonctions u et $E(x, .)$ dans le domaine borné Ω_h, on a alors

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega_h} (\Delta u(y) E(x,y) - u(y) \Delta_y E(x,y)) dy \qquad (2.53) \\ &= \int_{\Gamma \cup \Gamma_h} (\frac{\partial u}{\partial n}(y) E(x,y) - u(y) \frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)) d\gamma_y \\ &= \int_{\Gamma} (\frac{\partial u}{\partial n}(y) E(x,y) - u(y) \frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)) d\gamma_y \\ &\quad + \int_{\Gamma_h} (\frac{\partial u}{\partial n}(y) E(x,y) - u(y) \frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)) d\gamma_y. \end{aligned}$$

Comme u est une fonction régulière, pour h assez petit, le premier terme de l'intégrale sur Γ_h est limité par

$$| \int_{\Gamma_h} \frac{\partial u}{\partial n}(y)E(x,y)d\Gamma_h \,|\leq h\log h \sup_{y\in B_h} | \frac{\partial u}{\partial n}(y) | \tag{2.54}$$

et tend vers zéro. Et le second terme d'intégrale sur Γ_h est limité par

$$| \int_{\Gamma_h} u(y)\frac{\partial E}{\partial n}(x,y)d\Gamma_h \,|\leq h \sup_{y\in B_h} | u(y) | \frac{1}{h}, \tag{2.55}$$

qui tend vers $u(x)$.

En conclusion, par passage à la limite, quand $h \longrightarrow 0$, alors (2.53) donne la formule de représentation suivante pour la solution u du problème (P_3)

$$u(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}(y)E(x,y)d\gamma_y - \int_{\Gamma} u(y)\frac{\partial E}{\partial n}(x,y)d\gamma_y, \quad x\in\Omega \tag{2.56}$$

qui en terme et devient

$$u(x) = (S_\Omega w(x) - D_\Omega v(x)). \tag{2.57}$$

On montre (2.50) de la même manière on trouve que

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \left(\frac{\partial S_\Omega}{\partial n}w(x) - \frac{\partial D_\Omega}{\partial n}v(x)\right).$$

■

Redéfinissons à présent les opérateurs intégraux au bord suivants

Définition 2.4.6

Soit $u \in C^{\infty}(\Gamma)$. Alors pour $x \in \Gamma$, on définit les opérateurs intégraux aux bord

$$Su(x) = -2\int_{\Gamma} u(y).E(x,y)d\Gamma \tag{2.58}$$

$$Du(x) = -2\int_{\Gamma} u(y).\partial_{n_y}E(x,y)d\Gamma \tag{2.59}$$

$$D^{'}u(x) = -2\int_{\Gamma} u(y).\partial_{n_x}E(x,y)d\Gamma \tag{2.60}$$

$$Tu(x) = -2\int_{\Gamma} u(y).\partial_{n_x}\partial_{n_y}E(x,y)d\Gamma \tag{2.61}$$

Pour une distribution u, on définit $\mathcal{D}^{'}$ l'adjoint de $\mathcal{D}$ par dualité

$$\left\langle \mathcal{D}^{'}u,\ \varphi \right\rangle_{\Gamma} = \langle u,\ \mathcal{D}\varphi \rangle_{\Gamma} \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Gamma) \tag{2.62}$$

La généralisation aux distributions a un sens, puisque les opérateurs (2.58), (2.59), (2.60), (2.61) sont des opérateurs pseudodifférentiels, d'ordre -1, 0, 0, 1 et de symboles principales $\mid \tau \mid^{-1}$, 1, 1, $\mid \tau \mid$ respectivement (théorème 2.2.10), (théorème 2.3.5).

Lemme 2.4.7

Soient $(v, w) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Alors les opérateurs $S_{\Omega}v$ et $D_{\Omega}w$ appartiennent à $H^{1}(\Omega, \Delta)$ et on a :

$$v = \frac{1}{2}\left[(I - D)v + Sw\right] \tag{2.63}$$

$$w = \frac{1}{2}\left[Tv + (I + D^{'})w\right] \tag{2.64}$$

Preuve. Nous avons noté que malgré le problème posé par la définition de l'intégrale sur Γ de $\partial_n \log \mid x - y \mid$, celle-ci a un meilleur comportement pour $y \in \Gamma$, voisin de x.

En effet, la droite $x - y$ tend vers le plan tangent à Γ, de sorte que le produit scalaire

$n_y.(x-y)$ est un $O(\mid x-y \mid)$, ce qui suffit à assurer l'intégrabilité de $\partial_n \log x-y \mid$ sur Γ.

Ainsi, lorsque $h \longrightarrow 0$, nous pouvons assimiler la courbe Γ, supposée régulière, à son plan tangent, de sorte que l'intersection de boule B_h et du domaine Ω est à la limite une demi-boule de centre x et de rayon h.

Maintenant, de la même manière que précédemment, on applique la troisième formule de Green dans le domaine Ω_h, de frontière $(\Gamma \backslash \Gamma_x) \cup \Gamma_h$, où Γ_x est un voisinage de x et Γ_h est la frontière de la demi-boule B_h.

Ici aussi, on a $\Delta u = 0$, $\Delta v = \Delta \log \mid x-y \mid = 0$ dans Ω_h. Ce qui fait que l'analogue à (2.53), devient dans ce cas

$$0 = \int\limits_{(\Gamma \backslash \Gamma_x) \cup \Gamma_h} \left\{ \partial_n u. \log \mid x-y \mid - u.\partial_n \log \mid x-y \mid \right\} d\Gamma \tag{2.65}$$

Maintenant

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \int\limits_{\Gamma_h} \left\{ \partial_n u. \log \mid x-y \mid - u.\partial_n \log \mid x-y \mid \right\} d\Gamma_h = -\pi u(x)$$

ainsi, (2.65) devient

$$u(x)_{|\Gamma} = v(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \partial_n u. \log \mid x-y \mid d\Gamma - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} u.\partial_n \log \mid x-y \mid d\Gamma$$

qu'on peut écrire sous la forme demandée (2.63). En ce qui concerne l'équation (2.64), on procède de la même manière. ■

Projecteur de Calderon

Nous pouvons écrire les traces définies dans (2.63) et (2.64) par

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I - D & S \\ T & I + D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I + C) \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

avec

$$C := \begin{bmatrix} -D & S \\ T & D' \end{bmatrix}$$

D'après le Lemme 2.2.11 et Lemme 2.3.6, il est évident que

$$C := H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est continu. où (v, w) sont les donnés de Cauchy de la solution faible, dans $H^1(\Omega, \Delta)$.

Définition 2.4.8

L'opérateur de projection égal à $\frac{1}{2}(I + C)$, c'est appelé le "projecteur de Calderron".

Dans notre cas, le projecteur de Calderon projette $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sur les données de Cauchy de la solution faible, dans $H^1(\Omega, \Delta)$.

Propriétés des applications des opérateurs aux bords

Dans cette section on commence par présenter les systèmes des équations intégrales sur Γ_1 et Γ_2. Ensuite, on s'intéressera aux propriétés des applications des opérateurs aux bords, ainsi qu'â la solvabilité de ces systèmes.

Dans la section précédente, on a obtenu le système suivant pour les données de Cauchy $u_{|\Gamma}$et $\partial_n u_{|\Gamma}$, à savoir

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left[(I - D)u + S\partial_n u\right] \\ \partial_n u = \frac{1}{2}\left[Tu + (I + D')\partial_n u\right] \end{cases} \tag{2.66}$$

Si on introduit maintenant dans ce système, les fonctions données sur Γ_1 et Γ_2, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u(x) & = & f(x) & \text{sur } \Gamma_1 \\ \partial_n u(x) & = & g(x) & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases}$$

et les fonctions inconnues aux bords Γ_1 et Γ_2 telles que :

$$\begin{cases} u(x) & = & v(x) & \text{sur } \Gamma_2 \\ \partial_n u(x) & = & w(x) & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases},$$

on aura alors, différents systèmes d'équations intégrales de première et deuxième espèces. En effet, si on :

a) restreint la première équation de (2.66) sur Γ_1 et la deuxième équation de (2.66) sur Γ_2 on obtient :

Sur le bord $\Gamma_1 : x \in \Gamma_1$

$$u_{|\Gamma_1} = f = \frac{1}{2}\left[(I - D_{11})f - D_{21}v + S_{11}w + S_{21}g\right]$$

Sur le bord $\Gamma_2 : x \in \Gamma_2$

$$\partial_n u_{|\Gamma_2} = g = \frac{1}{2}\left[T_{12}f + T_{22}v + (I + D_{22}^{'})g + D_{12}^{'}w\right]$$

C'est-à-dire le système des équations intégrales de première espèce pour v et w, qu'on écrira sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} T_{22} & D_{12}^{'} \\ -D_{21} & S_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{12} & I - D_{22}^{'} \\ I + D_{11} & -S_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

b) restreint la première équation de (2.66) sur Γ_1 et sur Γ_2 on obtient :

Sur le bord $\Gamma_1 : x \in \Gamma_1$

$$u_{|\Gamma_1} = f = \frac{1}{2}\left[(I - D_{11})f - D_{21}v + S_{11}w + S_{21}g\right]$$

Sur le bord $\Gamma_2 : x \in \Gamma_2$

$$u_{|\Gamma_2} = v = \frac{1}{2}\left[v - D_{22}v - D_{12}f + S_{12}w + S_{22}g\right]$$

C'est-à-dire le système des équations intégrales de deuxième espèce pour v , qu'on écrira sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} I + D_{22} & -S_{12} \\ -D_{21} & S_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{12} & S_{22} \\ I + D_{11} & -S_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

c) restreint la deuxième équation de (2.66) sur Γ_1 et sur Γ_2 on obtient :

Sur le bord Γ_1 : $x \in \Gamma_1$

$$\partial_n u_{|\Gamma_1} = w = \frac{1}{2}\left[T_{11}f + T_{21}v + w + D'_{11}w + D'_{21}g\right]$$

Sur le bord Γ_2 : $x \in \Gamma_2$

$$\partial_n u_{|\Gamma_2} = g = \frac{1}{2}\left[T_{12}f + T_{22}v + (I + D'_{22})g + D'_{12}w\right]$$

C'est-à-dire le système des équations intégrales de deuxième espèce pour w , qu'on écrira sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} T_{22} & D'_{12} \\ -T_{21} & I - D'_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{12} & I - D'_{22} \\ T_{11} & D'_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

d) restreint la première équation de (2.66) sur Γ_2 et la deuxième équation de (2.66) sur Γ_1 on obtient :

Sur le bord Γ_1 : $x \in \Gamma_1$

$$u_{|\Gamma_2} = v = \frac{1}{2}\left[v - D_{22}v - D_{12}f + S_{12}w + S_{22}g\right]$$

Sur le bord Γ_2 : $x \in \Gamma_2$

$$\partial_n u_{|\Gamma_1} = w = \frac{1}{2}\left[T_{11}f + T_{21}v + w + D'_{11}w + D'_{21}g\right]$$

C'est-à-dire le système des équations intégrales de deuxième espèce pour v et w , qu'on écrira sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} I + D_{22} & -S_{12} \\ -T_{21} & I - D'_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{12} & S_{22} \\ T_{11} & D'_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

L'opérateur S_{jk} $(j,\, k = 1,\, 2)$ est défini par

$$S_{jk}u(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} u(y).\log \mid x - y \mid d\Gamma_y, \qquad x \in \Gamma_k$$

Les autres opérateurs, à savoir D_{jk}, D'_{jk} et T_{jk} sont définis d'une manière analogue.

Maintenant, afin de décrire la solvabilté des systèmes, on donne les résultats concernant la propriété des applications des opérateurs S_{jk}, D_{jk}, D'_{jk}, T_{jk} $(j,\, k = 1,\, 2)$

Lemme 2.4.9

Les applications suivantes sont continues pour chaque s réel et $j,\, k = 1,\, 2$

$$\begin{cases} S_{jk} : H^s(\Gamma_j) \longrightarrow H^{s+1}(\Gamma_k) & , \quad D_{jk} : H^s(\Gamma_j) \longrightarrow H^{s+1}(\Gamma_k) \\ T_{jk} : H^{s+1}(\Gamma_j) \longrightarrow H^s(\Gamma_k) & , \quad D'_{jk} : H^s(\Gamma_j) \longrightarrow H^{s+1}(\Gamma_k) \end{cases} \tag{2.71}$$

Preuve. Par définition de $H^s(\Gamma_1)$, on peut prolonger v sur Γ :

$$v^* = \begin{cases} v & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sur } \Gamma_2 \end{cases} , \quad \text{appartient à } H^s(\Gamma).$$

Cependant, la continuité des applications (2.71), est obtenue en évaluant les symboles des opérateurs pseudo-différentiels S, D, D', T.

En effet, le lemme 2.2.11 assure que

$$\| Sw^* \|^2_{H^{s+1}(\Gamma)} \leq c^{te} \| w^* \|_{H^s(\Gamma)}$$

Si on restreint ceci à Γ_1 et Γ_2, on aura le résultat voulu pour l'opérateur S_{jk}. Les autres assertions dans (2.71) sont montrées de la même manière. ■

Pour l'étude proprement dite, il suffit d'étudier un des systèmes obtenus auparavant. Les autres se font par analogie.

Considérons le premier système, à savoir le système (2.67). Pour pouvoir appliquer le Lemme 2.4.9, réécrivons (2.67) sous une forme plus appropriée. Pour cela, soit les extensions Lf et Lg dans $H^s(\Gamma)$ pour $f \in H^s(\Gamma_1)$ et $g \in H^s(\Gamma_2)$.

Substituons $v = v^\circ + Lf$ et $w = w^\circ + Lg$ dans (2.67).

On aura :

$$\begin{bmatrix} T_{22} & D'_{12} \\ -D_{21} & S_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^\circ \\ w^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{12} & (I - D'_{22}) \\ (I + D_{11}) & -S_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Lf \\ Lg \end{bmatrix}$$

qu'on écrira sous la forme matricielle suivante

$$AU = BLG \tag{2.72}$$

avec

$$U = \begin{bmatrix} v^\circ \\ w^\circ \end{bmatrix} \text{ et } LG = \begin{bmatrix} Lf \\ Lg \end{bmatrix}$$

Ici T_{12} veut dire qu'on intégre sur Γ_1 et qu'on évalue sur Γ_2 etc.

Théorème 2.4.10

Les applications

$$\begin{aligned} A &: H^s(\Gamma_2) \times H^{s-1}(\Gamma_1) \longrightarrow H^{s-1}(\Gamma_2) \times H^s(\Gamma_1) \\ B &: H^s(\Gamma) \times H^{s-1}(\Gamma) \longrightarrow H^{s-1}(\Gamma_2) \times H^s(\Gamma_1) \end{aligned} \tag{2.73}$$

sont continues pour chaque réel s.

Preuve. A est une application continue d'aprés le Lemme 2.4.9. La continuité de B suit directement de la continuité des extensions Lf, Lg et les propriétés des applications des potentiels de simple et double couche et de leur dérivée normale respective. ■

Maintenant, pour l'étude de coercivité du système (2.72), on doit valider une inégalité de type énergétique.

Jusque là, le calcul symbolique des équations intégrales interprétées en tant qu'opérateurs pseudo-différentiels, nous a permis d'avoir les espaces de Sobolev appropriés. On va voir, qu'il est aussi nécéssaire à la coercivité, en utilisant le concept de la forte ellipticité.

Seulement, pour le cas d'un système d'équations, la notation de la forte ellipticité diffèrent complètement de celle d'une seule équation.

En effet, on a la

Définition 2.4.11 [12], [39]

Un système d'opérateurs pseudo-différentiels est fortement elliptique s'il existe une matrice $\theta(x)$ à valeurs complexe et une constante $\beta > 0$ telle que :

$$\Re e \left\{ a^T \theta(x) \sigma(x, \tau) \overline{a} \right\} \geq \beta \mid a \mid^2 \tag{2.74}$$

pour tout $x \in \Gamma$, $\tau \in R^2$ avec $\mid \tau \mid = 1$ et pour tout $a \in C^2$.

Lemme 2.4.12

Le système (2.72) est fortement elliptique.

Preuve. Si on prend pour $\theta(x)$, la matrice identité, avec $a = (a_1,\ a_2) \in C^2$, alors (2.74) s'écrit dans notre cas

$$\Re e \left\{ (a_1,\ a_2).Id(x). \begin{bmatrix} \mid \tau \mid & 0 \\ 0 & \mid \tau \mid^{-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \end{bmatrix} \right\} = \mid a \mid^2$$

d'où le résultat avec $\beta = 1$ ■

Maintenant on a le résultat suivant :

Théorème 2.4.13

L'opérateur

$$\theta A : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

est continu.

Preuve. Les opérateurs pseudodifférentiels T_{22} et S_{11} sont continus d'après le Lemme 2.4.9. Pour les autres opérateurs, on a :

$$\begin{aligned} D'_{12} &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \overset{cont}{\longrightarrow} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \subset L^2(\Gamma_1) \overset{cont}{\longrightarrow} C^\infty(\Gamma_2) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \\ -D_{21} &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \subset L^2(\Gamma_2) \overset{cont}{\longrightarrow} C^\infty(\Gamma_1) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

On va définir à présent, la forme bilinéaire appropriée et mettre en évidence l'espace d'énergie. On a donc la :

Définition 2.4.14

Soient $U = (v, w)$ et $U' = (v', w')$ appartenant à $H^\alpha(\Gamma)$, avec $H^\alpha(\Gamma)$ l'espace d'énergie donné par $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. On a alors la forme bilnéaire suivante :

$$\langle \theta AU,\ U\rangle = \left\langle T_{22}v + D'_{12}w,\ v'\right\rangle_{L^2(\Gamma_2)} + \left\langle -D_{21}v + S_{11}w,\ w'\right\rangle_{L^2(\Gamma_1)} \tag{2.75}$$

Cette forme bilinéaire est équivalente à la forme bilinéaire du problème variationnel (2.48) au sens de [12].

Un autre point qui diffère complètement de celui d'une seule équation est la question de compacité. On a vu que chaque opérateur intégral du chapitre deux crée une perturbation compacte.

Pour un système, les choses sont encore plus compliquées car d'autres perturbations apparaissent et rien ne garantie, à priori leur compacité.

Lemme 2.4.15

Les opérateurs

$$\begin{aligned} D'_{12} &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \\ -D_{21} &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \end{aligned}$$

sont compacts.

Preuve. Les opérateurs D'_{12} et $-D_{21}$ sont compacts d'après la continuité de théorème de Rellich.

$$\begin{aligned} D'_{12} \quad &: \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \xrightarrow{c} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \overset{comp}{\longrightarrow} H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \\ -D_{21} \quad &: \quad H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \subset L^2(\Gamma_2) \xrightarrow{c} C^{\infty}(\Gamma_1) \subset H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1) \overset{comp}{\longrightarrow} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

2.4.4 Existence et Unicité

L'inégalité de coercivité est satisfaite par notre système dans la forme de l'inégalité de Garding. En effet on a le :

Théorème 2.4.16

Il existe une constante $\beta > 0$, telle que pour tout $U = (v^{\circ},\ w^{\circ})$ on a :

$$\langle \theta AU,\ U\rangle \geq \beta \|U\|^2_{H^{\alpha}(\Gamma)} - \langle KU,\ U\rangle, \tag{2.76}$$

où $K : H^{\alpha}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\alpha}(\Gamma)$ est compact et $\theta A := A$

Preuve. Considérons $(v^{\circ},\ w^{\circ}) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ et prenons leurs extensions par zéro $(v^*,\ w^*) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sur la partie complémentaire dans Γ et utilisons la transformée de Fourier. On réduit la situation au cas Γ. Maintenant, d'après le Théorème 2.3.7 on obtient :

$$\langle Tv^*,\ v^*\rangle \geq \beta_1 \|v^*\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \langle T_1 v^*,\ v^*\rangle_{L^2(\Gamma)}$$

et ainsi

$$\langle T_{22} v^{\circ},\ v^{\circ}\rangle \geq \beta_1 \|v^{\circ}\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} - \langle T_1 v^{\circ},\ v^{\circ}\rangle_{L^2(\Gamma_2)}$$

De la même manière, on a pour S_{11} :

$$\langle S_{11} w^{\circ},\ w^{\circ}\rangle \geq \beta_2 \|w^{\circ}\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} - \langle S_1 w^{\circ},\ w^{\circ}\rangle_{L^2(\Gamma_1)}$$

A présent, les opérateurs

$$\begin{aligned} T_1 &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ S_1 &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{aligned}$$

créent une perturbation compacte K_1, à savoir

$$\langle K_1 U, U\rangle = \langle T_1 v^\circ,\ v^\circ\rangle_{L^2(\Gamma_2)} + \langle S_1 w^\circ,\ w^\circ\rangle_{L^2(\Gamma_1)}$$

D'autre part, les opérateurs du Lemme 2.4.15 créent une seconde perturbation compacte K_2, à savoir

$$\langle K_2 U,\ U\rangle = \langle D'_{12} w^\circ,\ v^\circ\rangle_{L^2(\Gamma_2)} + \langle -D_{21} v^\circ,\ w^\circ\rangle_{L^2(\Gamma_1)}$$

Ces deux perturbations nous donnent maintenant la compacité de K.

Ainsi, l'opérateur A est décomposé en deux parties, A_1 définie positive et K compacte. En effet :

$$\begin{aligned} \langle AU, U\rangle &= \langle T_{22} v^\circ + D'_{12} w^\circ,\ v^\circ\rangle_{L^2(\Gamma_2)} + \langle -D_{21} v^\circ + S_{11} w^\circ,\ w^\circ\rangle_{L^2(\Gamma_1)} \\ &= \langle T_{22} v^\circ,\ v^\circ\rangle + \langle S_{11} w^\circ,\ w^\circ\rangle + \langle D'_{12} w^\circ,\ v^\circ\rangle + \langle -D_{21} v^\circ,\ w^\circ\rangle \\ &\geq \beta_1 \|v^\circ\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} + \beta_2 \|w^\circ\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &\quad - \left[\langle T_1 v^\circ,\ v^\circ\rangle + \langle S_1 w^\circ,\ w^\circ\rangle - \langle D'_{12} w^\circ,\ v^\circ\rangle - \langle -D_{21} v^\circ,\ w^\circ\rangle\right] \\ &\geq \beta(\|v^\circ\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} + \|w^\circ\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}) \\ &\quad - \left[\langle T_1 v^\circ - D'_{12} w^\circ,\ v^\circ\rangle + \langle D_{21} v^\circ + S_1 w^\circ,\ w^\circ\rangle\right] \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\langle AU, U\rangle \geq \beta \|U\|^2_{H^\alpha(\Gamma)} - \langle KU, U\rangle$$

avec

$$\beta = \min(\beta_1, \beta_2)$$

et

$$\|U\|^2_{H^\alpha(\Gamma)} = \|v^\circ\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} + \|w^\circ\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$$

■

Pour l'unicité, on suit les idées de [31], pour établir le :

Théorème 2.4.17

Soit $U = (v^\circ,\, w^\circ) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ la solution de l'équation homogène

$$AU = 0. \qquad \text{Alors} \qquad v^\circ = w^\circ = 0$$

Preuve. Soit $(v^\circ,\, w^\circ)$ la solution de $AU = 0$ et v^*, w^* leurs extensions respectives par zéro. Définissons u dans Ω par (2.49)

$$u(x) = -[D_\Omega v^*(x) - S_\Omega w^*(x)] \qquad , x \in \Omega \tag{2.77}$$

D'autre part, $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ et d'aprés le Lemme 2.4.5, la formule de représentation

$$u(x) = -[D_\Omega u(x) - S_\Omega \partial_n u(x)] \qquad , x \in \Omega \tag{2.78}$$

est vraie.

De plus le Lemme 2.4.7 donne

$$u_{|\Gamma} = -\frac{1}{2}(D - I)v^* + \frac{1}{2}Sw^* \qquad , x \in \Gamma \tag{2.79}$$

De la même manière, pour la dérivée normale on a :

$$\partial_n u_{|\Gamma} = \frac{1}{2}Tv^* + \frac{1}{2}(D' + I)w^* \qquad , x \in \Gamma \tag{2.80}$$

Or $Au = 0$. Ce qui revient à dire que

$$Tv^* = -D'w^* \quad \text{et} \quad Dv^* = Sw^*$$

Remplaçons ceci dans (2.79) et (2.80), on obtient alors

$$u_{|\Gamma} = \frac{1}{2}v^* \qquad \text{et} \qquad \partial_n u_{|\Gamma} = \frac{1}{2}w^*$$

Ceci à son tour implique que

$$u_{|\Gamma_1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_n u_{|\Gamma_2} = 0$$

C'est-à-dire que u est solution du problème aux limites mixte homogène. L'unicité de sa solution variationnelle donne $u = 0$ dans Ω, qui à son tour donne $v^\circ = w^\circ = 0$. ■

La coercivité et l'unicité nous donnent le résultat suivant :

Théorème 2.4.18

L'opérateur

$$A : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

est bijectif.

Preuve. L'opérateur A est injectif (unicité). La coercivité de l'opérateur A nous assure la surjection de notre opérateur, car d'aprés l'inégalité de Garding, cet opérateur diffèrent de l'opérateur défini positif par une perturbation compacte. Ainsi, c'est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

Or $IndA = \dim \ker A - \dim \operatorname{coker} A$.

D'où la surjection. ■

2.4.5 Propriété d'équivalence

On veut maintenant montrer que la solution faible $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ avec $(f, g) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ satisfait aussi le système aux équations intégrales (2.72).

Lemme 2.4.19

Soit $u \in H^1(\Omega, \Delta)$. Alors les valeurs au bord $u_{|\Gamma} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\partial_n u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, satisfont le système des équations intégrales :

$$\begin{cases} (I + D)u_{|\Gamma} & = & S\ \partial_n u_{|\Gamma} \\ (I - D')\partial_n u_{|\Gamma} & = & T u_{|\Gamma} \end{cases} \tag{2.81}$$

Preuve. Pour $u \in H^1(\Omega, \Delta)$, on utilise la formule de représentation (2.49) et on exprime $u_{|\Gamma}$ et $\partial_n u_{|\Gamma}$ à l'aide de (2.63) et (2.64). Ce qui donne (2.81).

Inversement, définissons $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ en insérant $(v,\ w)$ dans (2.50). Alors d'après (2.63) et (2.64), les données $u_{|\Gamma}$ et $\partial_n u_{|\Gamma}$ de u satisfont le système (2.81). ■

Enonçons maintenant le :

Théorème 2.4.20

Soient $(f,\ g) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ donnés. Alors le problème mixte (P_3) pour $u \in H^1(\Omega, \Delta)$, la formulation variationnelle sous les même hypothèses et les équations intégrales (2.72) pour $(v^\circ,\ w^\circ)$ appartenant à $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, ont une seule solution et sont équivalents.

C'est-à-dire

$$v^\circ = u_{|\Gamma_2} - Lf_{|\Gamma_2} \quad \text{et} \quad w^\circ = \partial_n u_{|\Gamma_1} - Lg_{|\Gamma_1}$$

où inversement u dans Ω est donné par

$$u = \left[-Dv' + Sw' \right]$$

avec

$$v' = \begin{cases} v^\circ + Lf & \text{sur} \quad \Gamma_2 \\ f & \text{sur} \quad \Gamma_1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w' = \begin{cases} w^\circ + Lg & \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ g & \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{cases}$$

Preuve. On a l'unicité de la solution de ces trois problèmes et d'après le Lemme 2.4.19, chaque solution de (P_3) donne une solution du système (2.81). Cette solution est unique et à son tour montre que la solution de (2.81) définit une solution de (P_3).

L'équivalence entre (P_3) et la formulation variationnelle (2.48) pour $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ a été discutée. ■

2.5 Méthode des équations intégrales pour le Bi-Laplacien dans un domaine régulier dans le plan :

Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ simplement connexe, de frontière $\Gamma \in C^\infty$. Considérons maintenant le problème intérieur suivant pour une fonction $u \in H^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 \ , \quad x \in \Omega \\ u(x) = f\ (x), \ x \in \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x), \quad x \in \Gamma \end{cases} \tag{P$_4$}$$

Les fonctions f et g sont définies sur Γ . On suppose que $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Le problème (P_4) modélise entre autre l'étude de flexion d'une plaque mince par la quelle l'hypothèse de Kirchoff est supposée satisfaite.

2.5.1 Formulation Variationnelle :

L'espace dans lequel nous cherchons la solution du problème (P_4) est défini par :

$$H^2(\Omega, \Delta^2) := \left\{u \in L^2(\Omega)\ Tq\ \Delta^2 u = 0\right\}$$

Supposons que $u \in H^2(\Omega, \Delta^2)$ est solution du problème (P_4) avec

$$\left(u_{|\Gamma} = f\ , \partial_n u_{|\Gamma} = g\right) \in \left(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$$

Prenons comme espace V, l'espace des fonctions de $H^2(\Omega)$ qui satisfont au sens des traces à des conditions aux limites essentielles homogènes correspondantes, c'est-à -dire :

$$V = \left\{u \in H^2(\Omega)\ : u_{|\Gamma} = \partial_n u_{|\Gamma} = 0\right\} = H_0^2(\Omega)$$

Cet espace est fermé dans $H^2(\Omega)$. Cosidérons la forme bilinéaire $a(u, v)$ associée à $\Delta^2 u = 0$. Cette forme est donnée par :

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

$a(u,v)$ est continue et coercive sur $H_0^2(\Omega)$. Alors, d'après le théorème de Lax-Milgram, la solution faible du problème (p_4) existe et est unique.

2.5.2 Formules représentatives et opérateurs intégaux au bord :

Nous avons besoin de la solution fondamentale du biharmonique que nous notons :

$$E(x,y) = \frac{1}{8\pi} |x-y|^2 \log |x-y|$$

Définition 2.5.1 Soit $u \in C^\infty(\Gamma)$. Nous définissons les opérateurs suivants :

$$A_\Omega u(x) \;:\; = 2\int_\Gamma u(y)\partial_n \Delta E(x,y) ds_y, \quad x \in \Omega \tag{2.82}$$

$$B_\Omega u(x) \;:\; = -2\int_\Gamma u(y)\Delta E(x,y) ds_y, \quad x \in \Omega$$

$$C_\Omega u(x) \;:\; = 2\int_\Gamma u(y)\partial_n E(x,y) ds_y, \quad x \in \Omega$$

$$D_\Omega u(x) \;:\; = 2\int_\Gamma u(y) E(x,y) ds_y, \quad x \in \Omega \tag{2.83}$$

Ces mêmes définitions restent valables pour une distribution arbitraire u sur Γ puisque pour $x \notin \Gamma$, les noyaux des opérateurs(2.82)sont des fonctions $C^\infty sur\ \Gamma$.

Les opérateurs dans(2.82)donnent la formule représentative suivante :

Lemme 2.5.2 Pour $u \in H^2(\Omega)$ avec $(v, w, \Phi, \Psi) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$ nous avons :

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2}[A_\Omega v(x) + B_\Omega w(x) + C_\Omega \Psi(x) + D_\Omega \Phi(x)], \quad x \in \Omega \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{1}{2}[\partial_{nx} A_\Omega v(x) - A^*_\Omega w(x) + \partial_{nx} C_\Omega \Psi(x) + C^*_\Omega \Phi(x)], \quad x \in \Omega
\end{aligned} \tag{2.84}
$$

avec $A^*_\Omega w(x) = -\partial_{nx} B_\Omega w(x)$ et $C^*_\Omega \Phi(x) = \partial_{nx} D_\Omega \Phi(x)$.

Preuve. La formule de Green pour l'opérateur biharmonique appliquée à la solution élémentaire nous donne :

$$
\int_\Omega (\Delta^2 u E - u\Delta^2 E)dx = \int_\Gamma (E\partial_n \Delta u - \partial_n E \Delta u + \partial_n u \Delta E - u \partial_n \Delta E) ds \tag{2.85}
$$

avec $\Delta^2 E = \delta$ (la mesure de Direc) et $\int_\Omega u\ \Delta^2 E dy = u(x)$.

De plus, on a $\Delta^2 u = 0$ dans Ω, en remplaçant(2.85), on obtient la première formule représentative de $v = u_{|\Gamma}$, $w = \partial_n u_{|\Gamma}$, $\Psi = \Delta u_{|\Gamma}$, $\Phi = -\partial_n \Delta u_{|\Gamma}$.Ces fonctions sont régulières car les opérateurs dans (2.82) ont des noyaux C^∞ . Ceci nous donne la première formule représentative dans (2.84). Et par dérivation, on obtient la deuxième formule représentative.

A présent, afin de formuler les équations intégrales, nous définissons les opérateurs au bord suivants. ■

Définition 2.5.3 Soit $u \in C^\infty(\Gamma)$. Nous déffinissons les opérateurs suivants :

$$
\begin{aligned}
Au(x) &:= 2\int_\Gamma u(y)\partial_n \Delta E(x,y) ds_y, \quad x \in \Gamma \\
Bu(x) &:= -2\int_\Gamma u(y)\Delta E(x,y) ds_y, \quad x \in \Gamma \\
Cu(x) &:= 2\int_\Gamma u(y)\partial_n E(x,y) ds_y, \quad x \in \Gamma \\
Du(x) &:= 2\int_\Gamma u(y) E(x,y) ds_y, \quad x \in \Gamma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Ku(x) \quad &: \quad = -\partial_{nx} Au(x) \\
A^*u(x) \quad &: \quad = 2\int_\Gamma u(y)\partial_{nx}\Delta E(x,y)ds_y, \\
Vu(x) \quad &: \quad = \partial_{nx} Cu(x) \\
C^*u(x) \quad &: \quad = 2\int_\Gamma u(y)\partial_{nx} E(x,y)ds_y
\end{aligned}
$$

Pour une distibution u, nous définissons Au, Bu, Cu et Du en approximant u par des fonctions régulières. A^*u, C^*u sont définis par dualité :

$$
\begin{cases} \langle A^*u, \psi\rangle_\Gamma = \langle u, A\psi\rangle \\ \langle C^*u, \psi_\Gamma\rangle = \langle u, C\psi\rangle \end{cases} \quad , \quad \forall\ \psi \in C^\infty(\Gamma)
$$

l'extension aux distributions a un sens puisque les opérateurs définis ci-dessus sont des opérateurs pseudo-différentiels.

Lemme2.5.4 Les opérateurs A, B, C et D sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre :$0, -1, -2, -3$ respectivement et nous avons :

$$
\begin{aligned}
A \quad &: \quad H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \quad , \quad C : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \\
B \quad &: \quad H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \quad , \quad D : H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)
\end{aligned} \tag{2.86}
$$

ainsi que :

$$
\begin{aligned}
\partial_{nx} A \quad &: \quad H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad , \quad A^* : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\
\partial_{nx} C \quad &: \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad , \quad C^* : H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)
\end{aligned} \tag{2.87}
$$

sont continus.

Preuve. Nous donnons explicitement le mode de calcul du symbole principal de l'un des opérateurs intégraux au bord et pour les autres une simple equisse. Pour D, nous avons :

$$Du(x) := 2\int_\Gamma u(y)E(x,y)ds_y = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma |x-y|^2 \log|x-y|\, u(y)ds_y$$

Γ est une courbe qui peut être donnée par une représentation paramétrique régulière :

$$x = x(t), \quad y = x(t_0)$$

D'après la formule de Taylor, nous pouvons écrire :

$$|x-y|^2 \log|x-y| = \tau^2 \log|\tau| + R_1\tau^2\log|\tau| + \frac{1}{2}\tau^2(1+R_1)(R_1 - \frac{1}{2}R_1^2 + ...)$$

avec $\tau = t_0 - t, x_1'^2 + x_2'^2 = 1$ et $|R_1| \leq c\,|\tau| \leq 1$.

Soit $\chi(|\tau|) = 1$ dans le voisinage de zéro. Alors,

$$Du(t) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \chi\,|\tau|\,\tau^2\log|\tau|\,u(t_0)dt_0 + Ru(t)$$

où $Ru(t)$ est un opérateur de noyau C^∞. Donc d'ordre $(-\infty)$

Soit la transformée de Fourier de $u(t_0)$:

$$u(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(it_0y)F[u(y)]dy$$

remplaçons cette représentation de $u(t_0)$ dans $Du(t_0)$ nous obtenons :

$$Du(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P_D(t,y)\exp(it_0y)F[u(y)]dy + Ru(t)$$

où

$$P_D(t,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(it_0y)\chi(|\tau|)\tau^2\log|\tau|\,d\tau$$

De plus nous avons :

$$\chi(|\tau|) = \chi(0) + \tau\chi'(0) + \frac{\tau^2}{2}\chi''(0) + ... + \circ(\tau^n)$$

Donc le symbole principal sera vu comme la transformée de Fourier de

$$\chi(0)\tau^2 \log|\tau|$$

C'est-à-dire :

$$\sigma_D(t,y) = \frac{1}{4\pi} F[\tau^2 \log|\tau|] = \frac{1}{2}\left|y\right|^{-3}$$

d'où $Du(x)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre (-3) sur Γ.

La partie principale de l'opérateur B est du type convolution . De la même manière, nous démontrons que B est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre (-1) et de symbole principal

$$\sigma_B(t,y) = \left|y\right|^{-1}$$

$Ku = -\partial_{nx} Au$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre (1) et de symbole principal

$$\sigma_k(t,y) = |y|$$

Tandis que les opérateurs A, A^* sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 infinitisémal ainsi ils sont d'ordre (-1). Enfin pour les opérateurs V, C et C^*, nous utilisons les résultats de [37]. Ainsi

$$\partial_{nx}^j \int_{\Gamma_+(y)} \partial_{ny}^k E(x,y) u(y) ds_y$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre j+k-3 et de symbole principal σ_{jk}. Nous avons en particulier

$$\sigma_{11} = \sigma_V(t,\varepsilon) = \frac{1}{2}\left|\varepsilon\right|^{-1}$$

tandis que les opérateurs C et C^* ont un symbole d'ordre (-2) infinitisémal ce qui fait qui'ils sont d'ordre (-3). Nous savons qu'un opérateur pseudo-différentiel est continu de :

$$H^s(\Gamma) \to H^{s-2\alpha}(\Gamma)$$

ou bien de

$$H^{s+\alpha}(\Gamma) \to H^{s-\alpha}(\Gamma)$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$. 2α est l'ordre de l'opérateur ce qui donne (2.86). Pour démontrer (2.87) nous avons :$-\partial_{nx}A$ est composé de l'application continue

$$A : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \to H^{2}(\Omega)$$

et de

$$-\partial_{nx|_\Gamma} : H^{2}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

De même $\partial_{nx}C$ est composé de l'application continue

$$C : H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \to H^{2}(\Omega)$$

et de

$$-\partial_{nx|_\Gamma} : H^{2}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

on décompose A^* et C^* par dualité. ■

Revenons maintenant au Lemme 2.5.3 et citons la deuxième formule représentative suivante.

Lemme2.5.5 Soient $(v, w, \Phi, \Psi) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$ Alors :

1·Les opérateurs $A_\Omega v, B_\Omega w, C_\Omega \Psi, D_\Omega \Phi \in H^2(\Omega)$.

2·nous avons pour $x \to \Gamma$.

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}[(I+A)u(x) + B\partial_n u(x) + C\Delta u(x) + D\partial_n \Delta u(x)] \qquad (2.88) \\ \partial_n u(x) &= \frac{1}{2}[\partial_{nx}Au(x) + (I-A^*)\partial_n u(x) + \partial_{nx}C\Delta u(x) + \partial_{nx}D\partial_n\Delta u(x)] \end{aligned}$$

Preuve. Les opérateurs $A_\Omega, B_\Omega, C_\Omega$ et D_Ω satisfont dans Ω, l'équation différentielle de problèmes auxiliairs à savoir $\Delta^2 u = 0$ car pour $x \in \Omega$, les noyaux de ces opérateurs sont égaux à zéro. De plus, $A_\Omega, B_\Omega, C_\Omega$ et D_Ω appliquent continuement $H^s(\Gamma)$ dans $H^2(\Omega)$ avec s=$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}$ respectivement. Pour montrer (2.88) nous considérons le procéder aux limits dans (2.84) dans lequel x approche de l'intérieur dans le sous domaine Ω, un point arbitraire x sur le bord Γ, et avec la continuité du potentiel de simple cauche S_Ω , et la discontinuité de la double cauche D_Ω. En suivant la même méthode dans [12, 54] nous avons pour $x \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}
c(x)u(x) &= \int_\Gamma \left[u(y)\partial_{ny}\Delta E - \partial_{ny}u(y)\Delta E + \Delta u(y)\partial_{ny}E - \partial_{ny}\Delta u(y)E\right] ds \\
c'(x)\partial_n u(x) &= \int_\Gamma \left[u\partial_{nx}\partial_{ny}\Delta E - \partial_{ny}u\partial_{nx}\Delta E + \Delta u\partial_{nx}\partial_{ny}E - \partial_{ny}\Delta u\partial_{nx}E\right] ds
\end{aligned}$$

où le coefficient $c(x)$ dépend seulement de la propriété géométrique du bord au point x.

Nous le calculons par la formule :

$$c'(x) = c(x) = 1 + \lim_{y\to 0}\int_{\Gamma_y} -\partial_{ny}\Delta E d\Gamma_y$$

Γ_y est le cercle de centre x et de rayon y. Pour un bord régulier, $c(x) = \frac{1}{2}$.

Nous pouvons écrire le système des équations intégrales sur le bord Γ dans (2.88) et pour l'équation intégrale sur le bord, on considère la deuxième équation dans (2.84) et on suit la même démarche pour aboutir au résultat. ■

2.5.3 Reduction du Problème en Equation Intégrale :

Nous considérons $u \in H^2(\Omega)$ satisfaisant les conditions aux limites du problème (P) où $(f, g) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sont données.

Dans le Lemme 2.5.4 nous avons pu extraire les équations intégrales au bord Γ suivantes :

$$\begin{cases} C\Delta u(x) - D\partial_n \Delta u(x) = (I-A)u(x) - B\partial_n u(x) \\ V\Delta u(x) - C^*\partial_n \Delta u(x) = Ku(x) + (I+A^*)\partial_n u(x) \end{cases} \tag{2.89}$$

Si nous introduisons maintenant dans le système (2.89) les fonctions données sur Γ :

$$\begin{cases} u(x) = f(x)\ ,\ x \in \Gamma \\ \partial_n u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma \end{cases}$$

et les fonctions inconnues sur Γ Tq :

$$\begin{cases} -\partial_n \Delta u(x) = \Phi(x),\ x \in \Gamma \\ \Delta u(x) = \Psi(x),\ x \in \Gamma \end{cases}$$

On a alors le bord Γ :

$$\begin{cases} C\Psi(x) + D\Phi(x) = (I-A)f(x) - Bg(x) \\ V\Psi(x) + C^*\Phi(x) = Kf(x) + (I+A^*)g(x) \end{cases}$$

Ce qui donne sous forme matriciel l'equation :

$$\begin{bmatrix} D & C \\ C^* & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(x) \\ \Psi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I-A) & -B \\ K & (I+A^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

pour $x \in \Gamma$. Que l'on écrit :

$$\begin{cases} MU = LG \text{ sur } \Gamma \\ U = (\Phi, \Psi) \end{cases} \tag{2.91}$$

Maintenant nous allons décrire la solvabilité du système ci dessus, on donne en premier les résultats concernant les propriétés des opérateurs :

A, A^*, B, D, C, C^*, V et K

Nous voulons utiliser le fait que les opérateurs définis par (2.90) sont des opérateurs pseudo-différentiels.

Lemme2.5.6 Les opérateurs suivantes sont continues pour chaque réel s.

$$\begin{aligned} A &: H^s(\Gamma) \to H^{s+1}(\Gamma), \quad C : H^s(\Gamma) \to H^{s+3}(\Gamma) \\ B &: H^s(\Gamma) \to H^{s+1}(\Gamma), \quad D : H^s(\Gamma) \to H^{s+3}(\Gamma) \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} K &: H^{s+1}(\Gamma) \to H^s(\Gamma), \quad A^* : H^s(\Gamma) \to H^{s+1}(\Gamma) \\ V &: H^s(\Gamma) \to H^{s+1}(\Gamma), \quad C^* : H^s(\Gamma) \to H^{s+3}(\Gamma) \end{aligned}$$

Preuve. Considérons par exemple l'opérateur pseudo-différentiel D qui a pour symbol principal

$$\sigma_D(t,\varepsilon) = \frac{1}{2}\left|\varepsilon\right|^{-3}$$

Cet opérateur est continu de

$$H^s(\Gamma) \to H^{s+3}(\Gamma)$$

En effet, on a par définition

$$|\sigma_D(t,\varepsilon)| \leq c(1+|\varepsilon|^2)^{-3}$$

ce qui fait que

$$\|D\Phi\|^2_{H^{s+3}(\Gamma)} \leq c_0 \int_\Gamma (1+|\varepsilon|^2)^s \left|F[\Phi(\varepsilon)]\right|^2 d\varepsilon = c_0 \left\|\Phi\right\|^2_{H^s(\Gamma)}$$

Les autres sont montrés de la même manière ■

Soit le résultat suivant :

Thoerème2.5.7 Soient M, L définis dans(2.91) alors les applications :

$$\begin{aligned}
M &: H^{s-3}(\Gamma) \times H^{s-2}(\Gamma) \to H^{s}(\Gamma) \times H^{s-1}(\Gamma) \\
L &: H^{s}(\Gamma) \times H^{s-1}(\Gamma) \to H^{s-1}(\Gamma) \times H^{s}(\Gamma)
\end{aligned}$$

sont continues pour chaque réel s.

Preuve. M, L sont des applications continues comme conséquence du Lemme 2.5.5 .

■

Maintenant nous allons montrer que le système d'équations intégrales est fortement elliptique et satisfait une inégalité de coersivité.

Lemme2.5.8 Le système (2.90) est fortement elliptique.

Preuve. M est une matrice d'opérateurs pseudo-différentiel de symbole principal :

$$\sigma_M(x,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}|\varepsilon|^{-3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}|\varepsilon|^{-1} \end{bmatrix}$$

Soit

$$\Theta(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ceci implique que

$$\tau^t \Theta(x) \sigma_M(x,\varepsilon) \overline{\tau} = \frac{1}{2}|\tau_1|^2 + \frac{1}{2}|\tau_2|^2 ; |\varepsilon| = 1$$

d'où

$$\mathrm{Re}\left\{ \tau^t \Theta(x) \sigma_M(x,\varepsilon) \overline{\tau} \geq \frac{1}{2}|\tau|^2 \right\}$$

d'où le résultat pour tout $x \in \Gamma$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ avec $|\varepsilon| = 1$ et pour $\tau \in \mathbb{C}^2$. ■

Notons que M est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 2α tel que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (-\frac{3}{2}, \frac{-1}{2})$, ici $2\alpha_1, 2\alpha_2$, sont les ordres respectives des opérateurs D, V. Nous avons alors le :

Theorème2.5.9 l'opérateur

$$M : H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

est continu

Preuve. La démonstration que celle déja vu au (théorème 2.5.7) ■

Définition2.5.10 Soit : $U = \binom{\Phi}{\Psi}$ et $U' = \binom{\Phi'}{\Psi'}$ appartenant à $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Nous avons la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} a(U,U') &:= \langle MU, U' \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &= \langle D\Phi + C\Psi, \Phi' \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &+ \langle C^*\Phi + V\Psi, \Psi' \rangle_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.5.9 , cette forme bilinéaire est continue.

$$|a(U,U')| \leq \gamma \|U\|_{H^\beta(\Gamma)} \|U'\|_{H^\beta(\Gamma)} \tag{2.92}$$

où

$$\|U\|_{H^\beta(\Gamma)} := \|\Phi\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} + \|\Psi\|_{H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)}$$

Montrons à présent un résultat de compacité.

Lemme2.5.11 Les opérateurs :

$$C : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

$$C^* : H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$$

sont compacts.

Preuve. Le résultat découle du théorème de l'injection de Rellich. ■

Notre forme bilinéaire satisfait une inégalité de coercivité à savoir l'inégalité de Garding.

Thèoreme2.5.12 Il existe une constante $\gamma > 0$, telle que pour tout
$U = (\Phi, \Psi) \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) := H^{\beta}(\Gamma)$ on a :

$$\langle MU, U \rangle_0 \geq \gamma \left\| U \right\|^2_{H^{\beta}(\Gamma)} - \langle TU, U \rangle \tag{2.93}$$

et

$$T : H^{\beta}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\beta}(\Gamma)$$

est compact.

Preuve. Démontrer (2.93) revient à la décomposition de l'opérateur M de la manière suivante :

$$M = \overline{M} + T$$

$\overline{M}$ est un opérateur défini positif

et

$$T : H^{\beta}(\Gamma) \longrightarrow H^{\beta}(\Gamma)$$

est un opérateur compact.

Ainsi pour $(\Phi, \Psi) \in H^{\beta}(\Gamma)$ nous utilisons sur le bord Γ la transformée de Fourier. On réduit la situation au cas $\Gamma = \mathbb{R}$. D'après l'équation de Parseval nous avons :

$$\langle D\Phi, \Phi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int \frac{1}{2} \left| \zeta \right|^{-3} \left| F[\Phi] \right|^2 d\zeta$$

$$\langle V\Psi, \Psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int \frac{1}{2} \left| \zeta \right|^{-1} \left| F[\Psi] \right|^2 d\zeta$$

Soient $\overline{D}$et $\overline{V}$ des opérateurs pseudo-différentiels de symbole principal :

$$\begin{aligned}\sigma_{\overline{D}}(x,\zeta) &= \frac{1}{2}(1+|\zeta|^{\frac{3}{2}})^{-2}\\ \sigma_{\overline{V}}(x,\zeta) &= \frac{1}{2}(1+|\zeta|^{\frac{1}{2}})^{-2}\end{aligned}$$

respectivement. Nous avons alors,

$$D = \overline{D} - \overline{D} + D = \overline{D} + \overline{\overline{D}}$$

$$V = \overline{V} - \overline{V} + V = \overline{V} + \overline{\overline{V}}$$

où $\overline{\overline{V}}$ et $\overline{\overline{D}}$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $-6, -2$ respectivement, Ainsi ils sont compacts.

$$\begin{aligned}\overline{\overline{D}} &: H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\\ \overline{\overline{V}} &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\end{aligned}$$

et $\overline{D}, \overline{V}$ sont définis positifs. On a alors :

$$\begin{aligned}\langle D\Phi,\Phi\rangle_{L^2(\Gamma)} &\geq \gamma_1 \|\Phi\|^2_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} - \left\langle \overline{\overline{D}}\Phi,\Phi\right\rangle_{L^2(\Gamma)}\\ \langle V\Phi,\Phi\rangle_{L^2(\Gamma)} &\geq \gamma_2 \|\Psi\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} - \left\langle \overline{\overline{V}}\Psi,\Psi\right\rangle_{L^2(\Gamma)}\end{aligned}$$

Les opérateurs $\overline{\overline{D}}$ et $\overline{\overline{V}}$ créent une perturbation compacte T_1. D'autre part, les opérateurs du lemme précident créent une seconde perturbation compacte T_2. Regroupons T_1 et T_2

on obtient

$$T = T_1 + T_2 : H^{\beta}(\Gamma) \longrightarrow H^{-\beta}(\Gamma)$$

compact. D'où le résultat. ■

UNICITE

A présent, suivant les idées de [12, 54] nous déduisons l'unicité de la solution du système des équations intégrales aux bords.

Thèoreme2.5.13 Soit $U = (\Phi, \Psi) \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. La seule solution de l'équation homogène $MU = 0$ est $U = 0$.

Preuve. pour la preuve de l'injection de M, on a $MU = 0$ sur Γ, équivalent à dire

$$\begin{bmatrix} D & C \\ C^* & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = 0$$

Ceci implique d'après (2.89)

$$\begin{cases} \Delta u_{|\Gamma} = 0 = \Psi \\ -\partial_n \Delta u_{|\Gamma} = 0 = \Phi \end{cases}$$

pour plus de détails voir[12] ■

A présent, on peut utiliser l'unicité et la coercivité pour prouver la bijectivité de notre système.

Thèoreme2.5.14 L'opérateur

$$M : H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

est bijectif.

Preuve. Il suffit de reproduire la démonstration du (*Théoreme* 2.5.12) et (*Théoreme* 2.5.13) pour obtenir la bijection de l'opérateur M. ■

Chapitre 3

Méthode des équations intégrales pour quelques Problèmes non linéaires :

3.1 Introduction

Dans la première section, est consacré à l'étude du problème de laplace avec des conditions non linéaire dans un domaine Simplement connexe comme dans [7, 8] . L'approche se résume à résoudre une équation intégrale non linéaire avec des donnés inconnues au bord, moyennant des hypothèses appropries sur la partie non linéaire.

Ensuite dans la deuxième section, on traite le problème de laplace avec des conditions non linéaire dans un domaine doublement connexe . On étend la téchnique déja utilisée en [4, 5, 18] pour une équation intégrale non linéaire à un système d'équations intégrales.

Puisque les opérateurs intervenant dans le système obtenu sont monotones, on établie leur résultat d'existence et d'unicité de la solution par le Théorème de Browder et Minty.

A la fin du chapitre, on use de l'approche vu en [7, 8] pour résoudre l'équation bi-harmonique. Les équations bi-harmoniques sont une classe importante qu'on rencontre en physique, dynamique des fluides, l'élasticité.

3.2 Problème du Laplacien avec des conditions non linéaires dans un domaine simplement connexe :

3.2.1 Formulation du problème :

Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\Gamma \in C^\infty$. Considérons maintenant le problème aux limites non linéaires

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -g(x, u(x)) + f(x), \quad x \in \Gamma \end{cases} \tag{3.1}$$

On note

$$G(u) = g(x, u(x))$$

$$G : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \qquad , \qquad f : \Gamma \to \mathbb{R}$$

donc le problème(3.1) devient :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x \in \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n} = G(u) - f(x), \quad x \in \Gamma \end{cases}$$

3.2.2 Représentation de la solution du problème aux limites non linéaires :

Nous cherchons une représentation de u, défini dans Ω et satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x \in \Omega \\ -\frac{\partial u}{\partial n} = G(u) - f, \quad x \in \Gamma \end{cases}$$

Nous allons écrire la deuxième formule de Green dans Ω, pour un x dans Ω. on obtient :

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n_y} \log \mid x-y \mid d\delta_y + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} u(x)\frac{\partial}{\partial ny} \log |x-y|\, d\delta_y \quad , x \in \Omega \qquad (3.2)$$

Par passage à la limite, $x \to \Gamma$:

$$u(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y} \log \mid x-y \mid d\delta_y = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n_y} \log \mid x-y \mid d\delta_y \quad , x \in \Gamma \qquad (3.3)$$

Introduisons les notations suivantes :

$$Ku(x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y} \log \mid x-y \mid d\delta_y, \quad x \in \Gamma$$

$$S\Psi(x) := -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \Psi(y) \log \mid x-y \mid d\delta_y, \quad x \in \Gamma$$

En peut écrire l'equation (3.3) :

$$(I-K)u = S(\frac{\partial u}{\partial n}) \qquad (3.4)$$

Il est clair que si $u \in H^1(\Omega)$ est la solution de le problème (3.1), Alors les donnés de Cauchy

$$(u_{|\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial n}_{|\Gamma})$$

satisfont l'équation(3.4)

Alors,on a la condition au bord :

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = G(u) - f$$

En remplace dans (3.4) :

$$(I-K)u+SG(u)=Sf \tag{3.5}$$

Pour étudier la solvabilité de l'equation intégrale non linéaire (3.5), on a besoin des hypothèses suivantes :

$-(H_1)$ La fonction g est une fonction carathéodory c-à-dire : $g(.,u):\Gamma\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est mesurable $\forall u\in\mathbb{R}$ et $g(x,.)$ est continue $\forall x\in\Gamma$

$-(H_2)$ $\frac{\partial g}{\partial u}(x,u)$ est Borel mesurable satisfait :

$$0<l\leq\frac{\partial}{\partial u}g(x,u)\leq L<\infty \quad ,u\in\mathbb{R} \tag{3.6}$$

La condition (3.6) équivalent à dire que l'opérateur $G:L^2(\Gamma)\to L^2(\Gamma)$ défini par $G(u)(x)=g(x,u(x))$ est Lipschitziene continu et fortement monotone :

$$\langle G(u)-G(v),u-v\rangle\geq c\left\|u-v\right\|_0^2 \quad ,\forall u,v\in L^2(\Gamma) \tag{3.7}$$

$\forall\ u,v\in L^2(\Gamma)$.

Les propriétés des opérateurs intégraux obtenus dans (3.5) sont données par le théorème suivant :

Théoreme 3.2.1 $\forall s\in[0,1]$, l'opérateur

$$u\to-Ku+SG(u)$$

est Lipschitziene continu de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+1}(\Gamma)$.

3.2.3 Existence et Unicité :

Théoreme 3.2.2 $\forall f\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe une unique solution $u\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ Tq :

$$(I-K)u+SG(u)=Sf$$

Preuve. D'abord l'opérateur $S : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un isomorphisme. Alors l'étude de l'existence et l'unicité de (3.5) revient à l'étude de l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$D(u) = S^{-1}(I-K)u + G(u) = f \tag{3.8}$$

Il suffit montrer que l'opérateur $D : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est continu et fortement monotone.

La continuité est claire pour S, K, G d'après le thèorème 3.2.1, il reste à montrer que D est fortement monotone.

Soit la fonction $\Psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ définie par :

$$\Psi = S^{-1}(I-K)u \qquad , \qquad \forall u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

la dérivé normale de la fonction harmonique

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\log|x-y|\,ds_y - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\Psi(y)\log|x-y|\,ds_y \tag{3.9}$$

D'après la formule de Green :

$$\left\langle S^{-1}(I-K)u \ \ , u\right\rangle = \int_{\Gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial n_y}u(y)ds_y = \int_{\Omega}(\nabla\Phi)^2dx$$

donc pour $u, v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$\left\langle S^{-1}(I-K)(u\ -v)\ , u-v\right\rangle = \int_{\Omega}(\nabla F)^2dx \tag{3.10}$$

Ici, F est la fonction harmonique de couchy $u-v$ et $S^{-1}(I-K)(u-v)$.

Autrement dit on a, en tenant compte de (3.7) :

$$\langle G(u) - G(v), u-v\rangle \geq l\,\|u-v\|_0^2 \tag{3.11}$$

Il reste à preuver que :

$$\|u - v\|_0 \geq c\, \|F\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.12}$$

Par conséquent, compte tenu de (3.10), on obtient :

$$\langle D(u) - D(v), u - v \rangle \geq c\, \|F\|^2_{H^1(\Omega)} \geq c^{'}\, \|u - v\|^2_{\frac{1}{2}}$$

d'après le thèorème de trace.

Pour montrer (3.12), observons qu'il existe $\chi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ Tq :

$$S\chi = u - v \quad dans\ \Gamma$$

$$\forall x \in \Omega, \qquad \text{on a :} \;\; -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \chi(y) \log|x - y|\, ds_y = F(x) \tag{3.13}$$

Le potentiel de simple cauche

$$\chi \to -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \chi(y) \log|x - y|\, ds_y$$

est continue de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+\frac{3}{2}}(\Omega)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Pour $s = 0$ voir [22, 42], on obtient :

$$\|F\|_{L^2(\Omega)} \leq c\, \|\chi\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)} \leq c^{'}\, \|u - v\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c^{'}\, \|u - v\|_0$$

Donc l'inégalité (3.12). ■

3.3 Problème du Laplacien avec des conditions non linéaires dans un domaine doublement connexe :

3.3.1 Formulation du Problème :

Le domaine étude est noté Ω, C'est un domaine ouvert borné doublement connexe de $\mathbb{R}^2$. Le bord Γ est constitué de deux parties disjointes $\Gamma_1$et Γ_2, Tq :$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ et $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$

Considérons maintenant le problème aux limites non linéaires suivant pour une fonction $u \in H^1(\Omega)$.

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 \ , \quad x \in \Omega \\ u(x) = f_0(x) \ , \ x \in \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) + g(x, u(x)) = g_0(x) \ , \quad x \in \Gamma_2 \end{cases} \tag{3.14}$$

où $f_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ et $g_0 \in H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma_2)$ sont définies dans $\Gamma_1$et Γ_2 respectivement .

3.3.2 Formules représentatives et opérateurs intégaux au bord :

Nous avons besoin de la solution fondamentale du Laplacien que nous notons :

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x|$$

Définition 3.3.1[3, 5, 18]

Soit $u \in C^\infty(\Gamma)$. Nous définissons les opérateurs suivants :

$$S_\Omega u(x) = \int_\Gamma u(y) E(x, y) ds_y \quad , \ x \in \Omega \tag{3.15}$$

$$D_\Omega u(x) = \int_\Gamma u(y) \partial_n E(x, y) ds_y \quad , \ x \in \Omega \tag{3.16}$$

Lemme 3.3.2

Pour $u \in H^1(\Omega)$ avec $(v,w) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$, $\forall\ x \in \Omega$ nous avons :

$$\begin{cases} u(x) = -\left[D_\Omega v(x) - S_\Omega w(x)\right] \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = \left[\partial_n D_\Omega v(x) - \partial_n S_\Omega w(x)\right] \end{cases} \tag{3.17}$$

Preuve. La formule de Green pour l'opérateur Δ appliquée à la solution élémentaire nous donne :

$$\int_\Omega (\Delta u E - u\delta)dx = \int_\Gamma \left[E\partial_n u - \partial_n E u\right] ds$$

avec $\Delta E = \delta$ (la mesure de Dirac) et $\int_\Omega u\Delta E dx = u(x)$.

On obtient la première formule représentative de $v = u_{|\Gamma}$, $w = \partial_n u_{|\Gamma}$. Par dérivation on obtient la deuxième formule représentative.

A présent, afin de formuler les équations intégrales, nous définissons les opérateurs au bord suivant. ■

Définition 3.3.3

Pour $x \in \Gamma$, soit $u \in C^\infty(\Gamma)$, Nous déffinissons les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} Du(x) &= -2\int_\Gamma u(y)\partial_{ny}E(x,y)ds_y \\ Su(x) &= -2\int_\Gamma u(y)E(x,y)ds_y \\ D'u(x) &= -2\int_\Gamma u(y)\partial_{nx}E(x,y)ds_y \\ Tu(x) &= -2\int_\Gamma u(y)\partial_{nx}\partial_{ny}E(x,y)ds_y \end{aligned}$$

Lemme 3.3.4 [3, 5, 18]

Les opérateurs S, D, D' et T définis par :

$$\begin{aligned} S \ &: \ H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad , \ I + D : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ I - D' \ &: \ H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \ \ , \ T : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \end{aligned} \tag{3.18}$$

sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre -1,0,0,1 respectivement et sont continus.

En utilisant le lemme 3.3.2 et on en déduit la deuxième formule représentative.

Lemme 3.3.5

Soient $(v, w) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma)$. Alors :

1-Les opérateurs $S_\Omega v, D_\Omega w \in H^1(\Omega, \Delta)$.

2-On a :

$$u(x) = \frac{1}{2} \left[(I - D)u(x) + S\partial_n u(x) \right], \quad x \in \Gamma \tag{3.19}$$

$$\partial_n u(x) = \frac{1}{2} \left[Tu(x) + (I + D')\partial_n u(x) \right], \quad x \in \Gamma \tag{3.20}$$

Preuve. Les opérateurs $S_\Omega v, D_\Omega w$ satisfont dans Ω, l'équation différentielle de deux problèmes auxiliaires à savoir $\Delta u = 0$

car pour $x \in \Omega$, les noyaux de ces opérateurs sont égaux à zéro. De plus, $S_\Omega v, D_\Omega w$ appliquent continuement. ■

3.3.3 Représentation du problème en équations intégrales au bord $(\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$:

Nous considérons $u \in H^1(\Omega, \Delta)$ satisfaisant les conditions aux limites du problème (3.14) .

Si nous introduisons dans le système (3.19) et (3.20) les fonctions données et les fonctions inconnues dans Γ_1 et Γ_2 telles que :

$$\begin{cases} u(x) = f_0(x) \quad , \quad \text{(fonction connue)} \\ \partial_n u(x) = w(x) \quad , \quad \text{(fonction inconnue)} \end{cases} \quad , \ x \in \Gamma_1$$

et

$$\begin{cases} u(x) = v(x) \quad , \quad \text{(fonction inconnue)} \\ \partial_n u(x) = -g(x, u(x)) + g_0(x) \quad , \text{(fonction connue)} \end{cases} \quad , \quad x \in \Gamma_2$$

Sur le bord Γ_2, l'équation (3.19) s'écrit sous la forme :

$$u(x)_{|\Gamma_2} = v(x) = \frac{1}{2}\left[(I - D_{22})v(x) - D_{12}f_0(x) + S_{12}w(x) + S_{22}(-g(x, u(x)) + g_0(x))\right]$$

On peut écrire :

$$(I + D_{22})v(x) - S_{12}w(x) + S_{22}Gv(x) = -D_{12}f_0(x) + S_{22}g_0(x) \tag{3.21}$$

avec

$$Gv(x) := g(x, v(x))$$

Sur le bord Γ_1, l'équation (3.20) s'écrit sous la forme :

$$\partial_n u(x)_{|\Gamma_1} = w(x) = \frac{1}{2}\left[T_{11}f_0(x) + T_{21}v(x) + (I + D'_{11})w(x) + D'_{21}(-g(x, u(x)) + g_0(x))\right]$$

On peut écrire :

$$-T_{21}v(x) + (I - D'_{11})w(x) + D'_{21}Gv(x) = T_{11}f_0(x) + D'_{21}g_0(x) \tag{3.22}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{cases} (I+D_{22})v(x) - S_{12}w(x) + S_{22}Gv(x) = -D_{12}f_0(x) + S_{22}g_0(x) \\ -T_{21}v(x) + (I-D'_{11})w(x) + D'_{21}Gv(x) = T_{11}f_0(x) + D'_{21}g_0(x) \end{cases} \tag{3.23}$$

Le système des équations intégrales s'écrit dans(3.23) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} I+D_{22}+S_{22}G & -S_{12} \\ -T_{21}+D'_{21}G & I-D'_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(x) \\ w(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{12} & S_{22} \\ T_{11} & D'_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(x) \\ g_0(x) \end{bmatrix}$$

$$A(U) + N(U) = B(F_0) \tag{3.24}$$

telle que :

$$A = \begin{bmatrix} I+D_{22} & -S_{12} \\ -T_{21} & I-D'_{11} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} S_{22}G & 0 \\ D'_{21}G & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -D_{12} & S_{22} \\ T_{11} & D'_{21} \end{bmatrix}$$

et

$$U = \begin{bmatrix} v(x) \\ w(x) \end{bmatrix} \quad , \quad F_0 = \begin{bmatrix} f_0(x) \\ g_0(x) \end{bmatrix}$$

Ici, S_{ij} $(i,\, j = 1,\, 2)$ sont les opérateurs appliqués à une fonction avec le support dans Γ_i et qu'on évalués sur Γ_j, avec les autres opérateurs à savoir D_{ij} ,T_{ij} et D'_{ij} sont définis d'une manière analogue.

L'opérateur S_{ij} $(i,\, j = 1,\, 2)$ est définit par

$$S_{ij}u(x) = -2\int_{\Gamma_i} u(y)E(x,y)ds_y \quad , \quad x \in \Gamma_j$$

3.3.4 Solvabilité du système d'équation intégrale(3.24) au bord ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) :

Pour l'étude de la solvabilité de l'équation intégrale non linéaire (3.24), nous donnons quelques hypothèses à faire ici :

$\cdot(H1)$ Nous supposons que diam$(\Omega) < 1$.

$\cdot(H2)$ La fonction g(.,.) est une fonction de Carathéodory.

$\cdot(H3)$ Nous supposons que $\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}$ est mesurable et satisfait :

$$0 < a \leq \frac{\partial g(x,u)}{\partial u} \leq b < +\infty$$

où a, b sont des constantes.

Remarque 3.3.6

1)L'opérateur S peut avoir des fonctions propres voir [3, 5], en vertu de l'hypothèse (H1) on peut verifier que l'opérateur intégral

$$S: \ H^s(\Gamma) \rightarrow \ H^{s+1}(\Gamma)$$

est un isomorphisme $\forall s \in \mathbb{R}$.

2)L'hypothèse (H3) traduit le fait que l'opérateur de Nemytski G :$L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est Lipschitziene continu et fortement monotone :

$$\langle Gu - Gv, u - v\rangle \geq a \left\| u - v \right\|_0^2 \quad , \forall u, v \in L^2(\Gamma) \tag{3.25}$$

3)Les opérateurs intégraux D_{22}, S_{12}, T_{21} et D'_{11} sont continus suit au lemme 3.3.4

$$\begin{array}{rcl} S_{12} & : & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \quad , \quad I + D_{22} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \\ I - D'_{11} & : & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \quad , \quad T_{21} \ : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \end{array}$$

4)Pour le domaine borné Ω, chaque opérateur intégrale qui défini ci-dessus est borné $\forall s \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ voir **[3, 5]**.

$$\begin{aligned} S \;&:\; H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma) \;\;,\quad I+D : H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma) \;\to H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma) \\ I-D' \;&:\; H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma) \;,\;\; T:\; H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma) \;\to H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Le potentiel de simple cauche S est coercive c-à-d :

$$\langle S\mu, \mu\rangle \geq c_s \left\|\mu\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

$\forall \mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $c_s \geq 0$.

L'opérateur intégrale T est coercive

$$\langle Tu, u\rangle \geq c_T \left\|u\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

$\forall u \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $c_T \geq 0$, **[5]** . Avec

$$H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \left\{ u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \int_\Gamma u(y) ds_y = 0 \right\}$$

Les opérateurs

$$I - D' : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \;,\;\; I + D : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

sont bijectifs **[3, 5]**.

Ce qui permet de considérer la solvabilité de (3.24).

Théoreme 3.3.7

$\forall (f_0, g_0) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$, il existe une unique solution $U = (v, w) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ Tq :

$$A(U) + N(U) = B(F)$$

Preuve. On applique le théorème de Browder et Minty sur les opérateurs monotones **[2, 6]**.

Nous allons démontrer que l'opérateur

$$A + N : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

est continu et fortement monotone.

$i)$Dans la première partie,nous montrons que $A + N$ est continu:

Il est clair que l' opérateurs A est défini de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ est continue.

D'autre part, en tenant compte de l'hypothèse (H3) et des opérateurs G, S_{22} et D'_{21} que est continu. Par conséquent l'opérateur intégrale au bord

$$A + N : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

est continu.

$ii)$Dans le seconde partie, nous montrons que l'opérateur intégrale $A+N$ est fortement monotone . $\forall U = (v, w)$, $U' = (v', w') \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$

L'opérateur linéaire A est coercif

$$\begin{aligned}
(A(U - U'), U - U')) &= ((I + D_{22} - T_{21})(v - v'), v - v') + ((I - D'_{11} - S_{12})(w - w'), w - w') \\
&\geq c_1 \|v - v'\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} + c_2 \|w - w'\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\
&\geq \min\{c_1, c_2\} \left(\|v - v'\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} + \|w - w'\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \right) \\
&\geq c \|U - U'\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}
\end{aligned}$$

avec la constante positive $c = \min\{c_1, c_2\} \rangle 0$.

Pour l'opérateur nonlineaire N, on a :

$$\begin{aligned}(NU - NU', U - U') &= (S_{22}Gv - S_{22}Gv', v - v') + (D'_{12}Gv - D'_{12}Gv', v - v') \\ &\geq c_S a \left\| v - v' \right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} + c_{D'} a \left\| v - v' \right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}\end{aligned}$$

alors, on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned}(A(U - U') + NU - NU', U - U') &\geq c \left\| U - U' \right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} + (c_S + c_{D'}) a \left\| v - v' \right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \\ &\geq c \left\| U - U' \right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}\end{aligned}$$

avec la constante positive c> 0. D'ou le résultat. ■

3.4 Problème du Bi-Laplacien avec des conditions non linéaires dans un domaine régulier :

3.4.1 Formulation du Problème :

Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\Gamma \in C^\infty$. Considérons maintenant le problème intérieur aux limites non linéaire suivant pour une fonction $u \in H^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 \ , \quad x \in \Omega \\ Mu + f(x, u, \frac{\partial u}{\partial n}) = f_0(x) \ , \ x \in \Gamma \\ Nu + g(x, u, \frac{\partial u}{\partial n}) = g_0(x) \ , \quad x \in \Gamma \end{cases} \tag{3.27}$$

Où Δ^2 est l'opérateur Bi-Laplacien.
Les fonctions $f_0 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $g_0 \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et

$$f : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \qquad g : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$$

sont définies sur Γ . et $Mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $Nu \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$

$$\Delta^2 u := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}) + 2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2})$$

et

$$Mu := \nu\Delta u + (1-\nu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}n_1^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}n_1 n_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}n_2^2\right] \tag{3.28}$$

$$Nu := -\frac{\partial}{\partial n}\Delta u + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left\{(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2})n_1 n_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(n_1^2 - n_2^2)\right\} \tag{3.29}$$

Tq la constante ν est dite coefficient de ratio $0 \leq \nu < 1$, qu'on rencotre dans la théorie de l'élasticité nous avons. Les dérivées normale et tangentielle sont définies par :

$$\frac{\partial}{\partial n} := n_1\frac{\partial}{\partial x_1} + n_2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial s} := -n_1\frac{\partial}{\partial x_2} + n_2\frac{\partial}{\partial x_1}$$

Nous allons écrire la première formule de Green dans Ω, pour x dans Ω. On obtient :

$$\int_\Omega (\Delta^2 uvdx = a(u,v) - \int_\Gamma \left\{\frac{\partial v}{\partial n}Mu + vNu\right\}ds, \qquad x \in \Omega \tag{3.30}$$

telle que la forme bilineaire $a(u,v)$ est définie par :

$$a(u,v) := \int_\Omega \left\{\nu\Delta u\Delta v + (1-\nu)\sum_{i,j=1}^{2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j})\right\}dx \tag{3.31}$$

L'espace dans lequel nous cherchons la solution du problème est défini par :

$$H^2(\Omega, \Delta^2) := \left\{u \in H^2(\Omega), \quad \Delta^2 u \in \widetilde{H}^{\,-2}(\Omega)\right\}$$

3.4.2 Formules représentatives et opérateurs intégaux au bord :

La solution fondamentale du biharmonique est d'expression :

$$E(x,y) := \frac{1}{8\pi}\,|x-y|^2 \log|x-y|$$

La formule représentative de la solution du problème(3.27) est:

$$u(x) = \int_\Gamma \left\{ E(x,y)Nu(y) + \left(\frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)Mu(y) \right) \right\} ds_y \tag{3.32}$$

$$- \int_\Gamma \left\{ (M_y E(x,y))\, \frac{\partial u}{\partial n}(y) + (N_y E(x,y))\, u(y) \right\} ds_y \qquad , x\ \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \int_\Gamma \left\{ \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_x} Nu(y) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial n_x \partial n_y}(x,y)Mu(y) \right) \right\} ds_y \tag{3.33}$$

$$- \int_\Gamma \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial n_x} M_y E(x,y) \right) \frac{\partial u}{\partial n_y} + \left(\frac{\partial}{\partial n_x} N_y E(x,y) \right) u(y) \right\} ds_y$$

Par passage à la limite, $x \to \Gamma$:

$$u(x) = \int_\Gamma \left\{ E(x,y)Nu(y) + \left(\frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)Mu(y) \right) \right\} ds_y + \frac{1}{2}u(x) \tag{3.34}$$

$$- \int_\Gamma \left\{ (M_y E(x,y))\, \frac{\partial u}{\partial n_y} + (N_y E(x,y))\, u(y) \right\} ds_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \int_\Gamma \left\{ \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_x} Nu(y) + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial n_x \partial n_y}(x,y)Mu(y) \right) \right\} ds_y + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial n}(x) \tag{3.35}$$

$$- \int_\Gamma \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial n_x} M_y E(x,y) \right) \frac{\partial u}{\partial n_y} + \left(\frac{\partial}{\partial n_x} N_y E(x,y) \right) u(y) \right\} ds_y$$

On peut écrire $u(x)$ la forme suivante

$$u(x) = V(Mu, Nu) - W(u, \frac{\partial u}{\partial n}) \quad , x \in \Omega \tag{3.36}$$

de terme potontiel de simple cauche et double cauche :

$$V : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \to H^2(\Omega) \quad \text{et } W : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^2(\Omega)$$

sont des opérateurs continus et définis par :

$$V(Mu, Nu)(x) = \int_\Gamma \left\{ E(x,y)Nu(y) + \frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)Mu(y) \right\} ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma \tag{3.37}$$

$$W(u, \frac{\partial u}{\partial n})(x) = \int_\Gamma \left\{ M_y E(x,y) \frac{\partial u}{\partial n_y} + N_y E(x,y)u(y) \right\} ds_y, \quad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma \tag{3.38}$$

A présent, afin de formuler les équations intégrales, nous définissons les opérateurs aux bords.

Définition 3.4.1

Soit $u \in C^\infty(\Gamma)$. Nous définissons les opérateurs suivants tels que pour tout $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned}
K_{11}u(x) &= \int_\Gamma N_y E(x,y)u(y)ds_y \\
V_{12}\partial_n u(x) &= -\int_\Gamma M_y E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_y} ds_y \\
D_{21}u(x) &= \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_x} N_y E(x,y)u(y)ds_y \\
K_{22}\partial_n u(x) &= \partial_n V_{12}\partial_n u(x) \\
V_{13}Mu(x) &= \int_\Gamma \frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)Mu(y)ds_y \\
V_{14}Nu(x) &= \int_\Gamma E(x,y)Nu(y)ds_y \\
V_{23}Mu(x) &= \partial_n V_{13}Mu(x) \\
V_{24}Nu(x) &= \partial_n V_{14}Nu(x)
\end{aligned}$$

Lemme 3.4.2 [3, 5, 9, 39]

Les opérateurs suivants ainsi définis sont continus pour chaque réel s :

$$\begin{aligned}
K_{11} &: H^s(\Gamma) \to H^s(\Gamma)\ , & V_{12} &: H^s(\Gamma) \to H^{s+1}(\Gamma) \\
D_{21} &: H^s(\Gamma) \to H^{s-1}(\Gamma), & V_{13} &: H^s(\Gamma) \to H^{s+3}(\Gamma)
\end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}
V_{14} &: H^s(\Gamma) \to H^{s+3}(\Gamma), & V_{24} &: H^s(\Gamma) \to H^{s+3}(\Gamma) \\
V_{23} &: H^s(\Gamma) \to H^{s+1}(\Gamma), & K_{22} &: H^s(\Gamma) \to H^s(\Gamma)
\end{aligned}$$

Preuve. Considérons par exemple l'opérateur pseudo-différentiel V_{13} qui a pour symbole principal

$$\sigma_{V_{13}}(t,\varepsilon) = \frac{1}{2}\left|\varepsilon\right|^{-3}$$

Cet opérateur est continu de

$$V_{13}\ : H^{s}(\Gamma) \rightarrow H^{s+3}(\Gamma)$$

En effet, on a par définition

$$|\sigma_{V_{13}}(t,\varepsilon)| \leq c(1+|\varepsilon|)^{-3}$$

Ce qui fait

$$\|V_{13}\Phi\|^2_{H^{s+3}(\Gamma)} \leq c_0 \int\limits_{\Gamma} (1+|\varepsilon|^2)^s \left|F\Phi(\varepsilon)\right|^2 d\varepsilon = c_0 \left\|\Phi\right\|^2_{H^{s}(\Gamma)} \tag{3.39}$$

Les autres sont montrés de la même façon. ■

Lemme 3.4.3

Soit $(u, v, Mu, Nu) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{-3}{2}}(\Gamma)$, alors :

$1 \cdot K_{11}u, V_{12}\partial_n u, V_{13}Mu, V_{14}Nu \in H^2(\Omega)$.

2·nous avons pour $x \rightarrow \Gamma$.

$$\begin{aligned} u(x) &= \left[(\frac{1}{2}I - K_{11})u(x) + V_{12}\partial_n u(x) + V_{14}Nu(x) + V_{13}Mu(x)\right] \\ \partial_n u(x) &= \left[D_{21}u(x) + (\frac{1}{2}I + K_{22})\partial_n u(x) + V_{24}Nu(x) + V_{23}Mu(x)\right] \end{aligned} \tag{3.40}$$

Dans le lemme 3.4.3 nous avons pu extraire les équations intégrales au bord Γ suivantes :

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}I + K_{11})u(x) - V_{12}\partial_n u(x) = V_{14}Nu(x) + V_{13}Mu(x) \\ -D_{21}u(x) + (\frac{1}{2}I - K_{22})\partial_n u(x) = V_{24}Nu(x) + V_{23}Mu(x) \end{cases} \tag{3.41}$$

Si nous introduisons maintenant dans le système(3.41), les fonctions inconnues sur Γ, définies par :

$$\begin{cases} u(x) = v(x), \;\; x \in \Gamma \\ \partial_n u(x) = w(x), \;\; x \in \Gamma \end{cases}$$

Ce qui donne sous forme matriciel l'equation :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I + K_{11} & -V_{12} \\ -D_{21} & \frac{1}{2}I - K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(x) \\ w(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{14} & V_{13} \\ V_{24} & V_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Nu(x) \\ Mu(x) \end{bmatrix}$$

avec les fonctions données sur Γ :

$$\begin{cases} Mu(x) + f(x, u, \frac{\partial u}{\partial n}) = f_0(x) \;, \;\; x \in \Gamma \\ Nu(x) + g(x, u, \frac{\partial u}{\partial n}) = g_0(x) \;, \;\;\; x \in \Gamma \end{cases}$$

On a alors sur le bord Γ :

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}I + K_{11})v(x) - V_{12}w(x) = V_{14}(-g(x, v, w) + g_0(x)) + V_{13}(-f(x, v, w) + f_0(x)) \\ -D_{21}v(x) + (\frac{1}{2}I - K_{22})w(x) = V_{24}(-g(x, v, w) + g_0(x)) + V_{23}(-f(x, v, w) + f_0(x)) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}I + K_{11})v(x) - V_{12}w(x) + V_{14}g(x, v, w) + V_{13}f(x, v, w) = V_{14}g_0(x) + V_{13}f_0(x) \\ -D_{21}v(x) + (\frac{1}{2}I - K_{22})w(x) + V_{24}g(x, v, w) + V_{23}f(x, v, w) = V_{24}g_0(x) + V_{23}f_0(x)) \end{cases}$$

Ce qui donne sous forme matricielle l'équation :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I + K_{11} & -V_{12} \\ -D_{21} & \frac{1}{2}I - K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(x) \\ w(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{14} & V_{13} \\ V_{24} & V_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(x, v, w) \\ f(x, v, w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{14} & V_{13} \\ V_{24} & V_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0(x) \\ f_0(x)) \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

pour $x \in \Gamma$. Que l'on écrit :

$$L(U) + V(F(U)) = V(F_0) \text{ sur } \Gamma \tag{3.43}$$

Tq :

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I + K_{11} & -V_{12} \\ -D_{21} & \frac{1}{2}I - K_{22} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} V_{14} & V_{13} \\ V_{24} & V_{23} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} g(x, v, w) \\ f(x, v, w) \end{bmatrix}$$

et

$$U = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \ F_0 = \begin{bmatrix} g_0 \\ f_0 \end{bmatrix}$$

3.4.3 Solvabilité du système d'équation intégrale (3.43) au bord

Pour étudier la solvabilité de système intégral non linéaire (3.43), on introduit les hypothéses suivantes :

$-(H1)$ $f, g : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de carathéodory c-à-d :

$f(., v, w)$ et $g(., v, w) : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont mesurables $\forall (v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f(x, ., .)$ et $g(x, ., .) : \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues $\forall x \in \Gamma$

$-(H2)$Les fonctions $f(., v, w)$ et $g(., v, w)$ admettent partout des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial w}$ et que pour tout $(v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 \ &< \ \alpha \leq \frac{\partial f}{\partial v} \leq l_1 \ < +\infty \ , \ \left|\frac{\partial f}{\partial w}\right| \leq \beta \\ 0 \ &< \ \alpha \leq \frac{\partial g}{\partial w} \leq l_2 < +\infty \ , \ \left|\frac{\partial g}{\partial v}\right| \leq \beta \end{aligned}$$

où α, β, l_1, l_2et sont des constantes positives Tq : $\alpha > \beta$.

Les hypothéses sur f et g nous assure que l'opérateur $F \begin{pmatrix} f(., v, w) \\ g(., v, w) \end{pmatrix}$ matricieles est fortement monotone et lipschitziene continu.

Remarque 3.4.4

1)Compte tenu de la formule des accroissement finis de Lagrange, il existe ζ_1, ζ_2 tels que :

$$\begin{aligned}(f(v,w)-f(v',w')) &= (f(v,w)-f(v',w))+(f(v',w)-f(v',w')) \\ &= \frac{\partial f(\zeta_1,w)}{\partial v}(v-v')+\frac{\partial f(v',\zeta_2)}{\partial w}(w-w')\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}((v-v'),f(v,w)-f(v',w')) &= \frac{\partial f(\zeta_1,w)}{\partial v}(v-v')^2+\frac{\partial f(v',\zeta_2)}{\partial w}(w-w')(v-v') \\ &\geq \alpha\left|v-v'\right|^2-\beta\left|v-v'\right|\left|w-w'\right| \\ &\geq \alpha\left|v-v'\right|^2-\frac{1}{2}\beta\left|v-v'\right|^2-\frac{1}{2}\beta\left|w-w'\right|^2\end{aligned}$$

De même :

$$(w-w',g(v,w)-g(v',w')) \geq -\frac{1}{2}\beta\left|w-w'\right|^2-\frac{1}{2}\beta\left|v-v'\right|^2+\alpha\left|w-w'\right|^2$$

Additionnant ces inégalités, on obtient par intégration sur le bord Γ :

$$\begin{aligned}(U-U',F(U)-F(U')) &= ((v-v'),f(v,w)-f(v',w'))+((w-w'),g(v,w)-g(v',w')) \\ &\geq (\alpha-\beta)(\left|v-v'\right|^2+\left|w-w'\right|^2) \\ &\geq (\alpha-\beta)\left\|U-U'\right\|_0\end{aligned}$$

Tq : $U=\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, U'=\begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} \in L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$.Nous avons donc montré que l'opérateur $F(U)$ est fortement monotone.

2)

$$
\begin{aligned}
|f(v,w)-f(v',w')| &= |f(v,w)-f(v',w))+(f(v',w)-f(v',w')| \\
&= \left|\frac{\partial f(\zeta_1,w)}{\partial v}(v-v')+\frac{\partial f(v',\zeta_2)}{\partial w}(w-w')\right| \\
&\leq l_1|v-v'|+\beta|w-w'| \\
&\leq Max(l_1,\beta)(|v-v'|+|w-w'|) \\
&\leq l_1(|v-v'|+|w-w'|)
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
|f(U)-f(U')| &\leq l_1|U-U'| \\
|f(U)-f(U')|^2 &\leq l_1^2|U-U'|^2 \\
\int\limits_\Gamma |f(U)-f(U')|^2 ds &\leq l_1^2\int\limits_\Gamma |U-U'|^2 \\
(\int\limits_\Gamma |f(U)-f(U')|^2 ds)^{\frac{1}{2}}ds &\leq l_1(\int\limits_\Gamma |U-U'|^2)^{\frac{1}{2}}ds \\
\|f(U)-f(U')\| &\leq l_1\|U-U'\|_0
\end{aligned}
$$

De même, on obtient :

$$\|g(U)-g(U')\|\leq l_2\|U-U'\|_0$$

En additionnant ces inégalités, on a

$$\|F(U)-F(U')\|\leq(l_1+l_2)\|U-U'\|_0$$

Tq : $U=\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, U'=\begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix}\in L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$ Nous avons donc montré que l'opérateur F est Lipschitziene continu.

Ce qui permet de considérer la solvabilité de (3.43) .

Théoreme 3.4.5

$\forall\ F_0 = (f_0, g_0) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$, il existe une unique solution $U = (v, w) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ Tq :

$$L(U) + V(F(U)) = V(F_0)\text{sur } \Gamma \tag{3.44}$$

Preuve. On applique le théorème de Browder et Minty sur les opérateurs monotone voir [2, 6], l'opérateur :

$$V : H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est un isomorphisme, alors l'étude de l'existence et l'unicité de la solution (3.44) revient à l'étude de l'équation intégrale non linéaire suivante :

$$T(U) = V^{-1}L(U) + F(U) = F_0 \ sur\ \Gamma$$

Il suffit montrer que l'opérateur

$$T : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est continu et fortement monotone

La continuité de V et L est évidente

De même

$$V^{-1}L : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est continu en vertu de l'hypothèse (H_2).

L'opérateur

$$F : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est aussi continu

Par conséquent l'opérateur intégral au bord

$$T : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est continu.

Il reste à montrer que T est fortement monotone.

Soit $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ définie par :

$$\Psi(x) := V^{-1}LU(x) \quad , \forall U = (v, w) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{3.45}$$

Pout tout (v, w) et $(M\varphi, N\varphi)$ d'une fonction biharmonique d'éxpression :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= V\left(M\varphi(x), N\varphi(x)\right) - W(\varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial n}) \\ &= V\Psi(x)\text{-}WU(x) \end{aligned}$$

$\forall x \in \Omega$, il est facile de voir que $\varphi(x)$ satisfait au problème

$$\begin{cases} \Delta^2\varphi(x) = 0 \ , \ x \in \Omega \\ \varphi(x) = v \ \ , \ x \in \Gamma \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) = w \ , \ x \in \Gamma \end{cases}$$

D'aprés la formule de Green :

$$\begin{aligned} \left\langle V^{-1}LU, U \right\rangle &= \int_\Gamma \Psi_1 v ds + \int_\Gamma \Psi_2 w ds \\ &= \int_\Gamma N\varphi\varphi ds + \int_\Gamma M\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \\ &= a(\varphi, \varphi) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\langle V^{-1}LU, U\right\rangle &= a(\varphi,\varphi)\\
&= \int_\Omega \left\{ \nu(\Delta\varphi)^2 + (1-\nu)\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2\right\} dx
\end{aligned}$$

Pour $U, U' \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle V^{-1}L(U-U'), U-U'\right\rangle &= \int_\Omega \left\{ \nu(\Delta(\varphi-\varphi'))^2 + (1-\nu)\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2(\varphi-\varphi')}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2\right\} dx\\
&= a(\varphi-\varphi', \varphi-\varphi')
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons :

$$\|\varphi-\varphi'\|_{H^2(\Omega)} \le c\,\|U-U'\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)\times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \le c\,\|U-U'\|_0$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\langle TU-TU', U-U'\rangle &= \langle FU-FU', U-U'\rangle + \left\langle V^{-1}L(U-U'), U-U'\right\rangle\\
&\ge (\alpha-\beta)\,\|U-U'\|_0^2 + a(\varphi-\varphi',\varphi-\varphi')\\
&\ge (\alpha-\beta)\,\|U-U'\|_0^2\\
&\ge \frac{1}{c^2}(\alpha-\beta)\,\|\varphi-\varphi'\|_{H^2(\Omega)}^2\\
&\ge \frac{1}{c^2}(\alpha-\beta)\,\|U-U'\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

d'après le théorème de trace [3, 5] , D'ou le résultat. ■

Conclusion générale et perspective

Notre étude montre que la méthode des équations intégrales au bord, pour étudier l'équation de Laplace et de Bi-Laplace avec des conditions non linéaires sur le bord est concluante. Le but de notre étude est d'examiner si on peut étendre les techniques d'approche vu au [4, 5, 18] , au l'équation intégrale non linéaire à un système d'équations intégrales. Le système obtenu admet une solution unique garantie par le Théoreme de Browder et Minty pour les opérateurs monotones. Nous envisageons d'appliquer cette technique pour résoudre numériquement un système non linéaire, comme on peut l'appliquer à un problème de poly-harmonique avec des conditions non linéaires dans un domaine doublement connexe. par exemple :

$$\begin{cases} \Delta^p u(x) = 0 \ , \quad x \in \Omega \\ Mu + f(x, u, \frac{\partial u}{\partial n}) = f_0(x) \ , \ x \in \Gamma_1 \\ Nu + g(x, u, \frac{\partial u}{\partial n}) = g_0(x) \ , \quad x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

.

Bibliographie

[1] A.K.Aziz, I Babuska Mathematical Foundation of the finite element method with applications to partial differential equation, Academic press, New York 1972.

[2] F.E Browder, Nonlinear elliptic boundary value problems . I. Bull. Am. Math. Soc. 69(1963),862-875.

[3] C.A. Brebbia. J. C. F. Telles . L. C. Wrobel, Boundary Element Techniques. Springer. Verlag, Berlin (1984).

[4] H.Saker. H. Bouguerne, The Boundary integral method for the Laplacien equation with mixed and oblique conditions. Adv. Studies Contemp . Math. 23(2013) , NO.3. 483-490.

[5] G. Hsiao, W.L. Wendlend, Boundary integral equations. App. Math. Sciences, Springer 164 (2008).

[6] G. Minty, Monotone opérators in Hilbert spaces, Duke Math. J, **29** (1962), 341-346.

[7] H. Saker, On the Harmonic problem with boundary integral conditions, International Journal of Analy-sis (2014), ID 976520.

[8] K. Ruotsalainen and W. Wendland, On the boundary element method for some nonlinear boundary value problems, Numerische. Mathematik, **53** (1988), 299-314.

[9] F. Cakoni, G. C. Hsiao, W. Wendlend, On the Boundary element method for a mixed boundary value problem of the biharmonic equation, Complex Variables, **50** (2005) 681-696.

[10] H.Saker.N.Bouselsal : "The boundary integral method for the Laplace equation with nonlinear boundary conditions. ASCM , Vol.24, NO. 4 , October (2014).

[11] H.Saker.N.Bouselsal : « On the Bi-Laplacian Problem with nonlinear Boundary Conditions. Indian J. Pure Appl. Math., 47(3) : 425-435, September 2016.

[12] M.Boutefnouchet. L'analyse des éléments aux bords pour le problème aux limites mixte biharmonique. Demonstration Mathematica, XXV, 1992.

[13] W.L.Wendlend : On some mathematical aspects of boundary element methods for elliptic problems, Fachber. Math. Th Darmstadt, Preprint N° 857, 1984.

[14] W.L.Wendlend : On the numerical analysis of boundary element methods. Numerical methods and applications, Sofia, 1985.

[15] G. Minty, Method Operators in Hilbert Spaces. Duke MJ.J.Khon, L.Nirenberg : On the algebra of pseudo-différential opérators. Comm. Pure Appl. Math. 18, 1965.

[16] P.P.Zabreyko et al : Integral equation- a reference text. Noordhoff international Publishing, 1975.

[17] H.Saker : L'analyse des éléments des frontières pour le Laplacien dans le plan, Institut de Mathématiques, University Badji Mokhtar, Annaba.

[18] W.L.Wendland.E.Stephan,G.Hsiao, On the integral equation methode for the plane mixed boundary value problem of Laplacien , Math. Method Appl . Sci. 1(1979), 265-321

[19] J.TREVE : Introduction to pseudodifferential and fourier integral operators. Plenom press. New York. London (1964).

[20] J.W.DETTMAN : Applied Complex Variables, Dover, New York (1984).

[21] K.REKTORYS : Variational methods in mathematics, Science and engineering. D.Reidel Publishing Company, (1980).

[22] M. Costabel : Boundary integral operators on lipschitz domains : Elementary results. Siam J.Math.Anal, Vol 19, N°3, 1988.

[23] K.Atkinson, The Numerical Solution of Integral Equations of the second kind, Published by Combridge University Press, 1997.

[24] Arnold, D.N. Wendland. W.L : On the asymptotic convergence of collocation methods, Math. Comput. 41,349-381(1983).

[25] M.LENOIR : Equations intégrales et problèmes de diffraction, Lecture notes, Cours D 11-1, ENSTA, Paris (2005).

[26] K. Rektorys : Variational methods in mathematic, science and engineering. D. Reidel Publishing Company, 1980.

[27] P.P.Zabreyko et al : Integral equation- a reference text. Noordhoff international Publishing, 1975.

[28] Kozlov VA, Maz'ya VG, Rossmann J. Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 52. AMS : Providence, RI, 1997.ath. J. 29(1962), 341-346.

[29] P.A.RAVIART : Résolution des modèles aux dérivées partielles, CHAPITRE VII, Majeur sciences de l'ingénieur et calcul scientifique, Département de Mathématiques Appliquées de l'Ecole polytechnique, Palaiseau (1991).

[30] M.TAYLOR : Pseudodifferential operators, Lecture notes in math. N^0 416, Springer-Verlag, (1974).

[31] P.Stephan : Boundary integral equations for mixed boundary value problems, screen and transmission problems in $\mathbb{R}^3$, Habilitationschrift, Darmstadt, 1983.

[32] B.E.PETERSEN : Introduction to the fourier transforme and pseudo-differential operators, Pitman, Boston, (1983).

[33] O.D.KELLOG : foundation of Potential theory. Springer-Verlag, Berlin, (1967).

[34] J. Giroire, J.C.Nedelec : Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potefntel. Math. Comp. 32, 1978.

[35] J.C.Nedelec : Approximation des équations intégrales en mécanique et physique, Palaiseau, 1977.

[36] J.P.AUBIN : Approximation of elleptic boundary value problems, Wiley-Interxience, New York, (1972).

[37] H.BREZIS : Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson Paris, (1983).

[38] J.Chazarin, A.Piriou : Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. Gauthier-Villars, Paris 1981.

[39] J.Kohn and L.Nirenberg : On the algebra of pseudo-différential opérators. Comm. Pure Appl. Math. 18 (1968).

[40] M.LENOIR, D.MARTIN : An application of the principle of limiting absorption to the motions of floating bodies, Journal of Mathematical Analysis and Applications 79, 370-383, (1981).

[41] C.MIRANDA : Partial differential equations of elliptic type. Springer-Verlag, New York (1970).

[42] Hsiao, G.C.Wendland , W.L : A finite element method for some integral equations of the first Kind. J. Math. Anal. Appl. 58, 449-481(1977).

[43] Adams, R.A : Sobolev Spaces. New York : Academic Press 1975.

[44] Arnold, D.N.Wendland, W.L : The convergence of spline collocation for strongly elliptic equations on curves. Numer . Math. 47,317-343(1985).

[45] Barbu, V : Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces. Leiden : Noordhoff International Publishing 1976.

[46] A. Jafarian, Z. Esmailzadeh and L.Khoshbakhti, A numerical methode for solving nonlinear integral equation in the Urysohn form, App. Math . Sci-ence, vol 7, no 28, pp.1375-1385,2013.

[47] Minty, G : Monotone (nonlinear) operators in Hilbert Spaces. Duke Math. J.29.341-346 (1962).

[48] Minty, G : On a monotonicity method for the solution of nonlinear equations in Banach spaces. Proc. Natl. Acad. Sci.50,1041-1083(1964).

[49] Minty, G : On the solvability of nonlinear functional equation of monotonic type. Pacific J. Math 14,249-255(1964).

[50] O.Steinbach : Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value problems. ISBN 978-0-387-31312-2-Springer Science .2008.

[51] J.C.Nedelec, J.Planchard : Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème de potentiel exterieur dans $\mathbb{R}^3$. France, 1973.

[52] M. Costabel, P. Stephan : A direct boundary integral equation method for tranmission problems. J.M.A.A. 106, 1985.

[53] M. Costabel, W.L.Wendlend : Strong ellipticity of boundary integral operators, J. Reine Angew. Math. 372, 1986. 39-63.

[54] M.Costabel, E.Stephan, and, W.L.Wendland. On the boundary integral equations of the first for the bilaplacien in polygonal plane domain. Ann. Sciola Norm.Sup.Psa, 19(IV), 1983.

[55] Necas, J : Remark on the Fredholm alternative for nonlinear operators with application to nonlinear integrale equations of generalized Hammerstein type. Commentationes Mathematicae Universitatis Carlolinae 13,109-120(1972).