وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار - عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2016

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de doctorat

DEFORMATION ET QUANTIFICATION DES ALGEBRES N-AIRES

Option
Algèbre

Par
Amri Hanene

DIRECTEUR DE THÈSE :	MAKHLOUF Abdenacer	Prof	U. Mulhouse (France)
CO-DIRECTEUR DE THÈSE :	BOUTABIA Hacene	Prof	U.B.M. Annaba
PRESIDENT :	KELAIAIA Smail	Prof.	U.B.M. Annaba
EXAMINATEUR :	BASDOURI Imed	M.C.A	U. Gafsa (Tunisie)
EXAMINATEUR :	BENHAMADI Zobida	M.C.A	U.B.M. Annaba
EXAMINATEUR :	HERNANE Mohand-Ouamar	Prof.	U.S.T.H.B. Alger

Résumé

Une algèbre *n*-aire est un espace vectoriel sur lequel est définie une multiplication sur n arguments. Classiquement les multiplications sont binaires, mais depuis l'utilisation en physique théorique de multiplications ternaires, comme les produits de Nambu, de nombreux travaux mathématiques se sont focalisés sur ce type d'algèbres. Deux classes d'algèbres *n*-aires sont essentielles : les algèbres *n*-aires associatives et les algèbres *n*-aires de Lie.
Les algèbres de Nambu ont été étudiées comme une généralisation naturelle d'une algèbre de Lie pour les opérations algébriques d'ordre supérieur.
Par définition, une algèbre de Nambu d'ordre n sur un corps IK de caractéristique nulle se compose d'un espace vectoriel V sur IK avec une opération IK -multilinéaire antisymétrique $\{.,...,.\}: V^n \to V$, appelé le crochet de Nambu, qui satisfait la généralisation suivante de l'identité de Jacobi. A savoir, pour tout $x_1, x_2,..., x_n \in V$

$$\{x_1,...,x_{n-1},\{x_n,...,x_{2n-1}\}\} = \{\{x_1,...,x_{n-1},x_n\},x_{n+1},...,x_{2n-1}\} + \{x_n,\{x_1,...,x_{n-1},x_{n+1}\},x_{n+2},...,x_{2n-1}\} + ... + \{x_n,x_{n+1},...,x_{2n-2},\{x_1,...,x_{n-1},x_{2n-1}\}\}.$$

Cette dernière notion, très important dans l'étude de la mécanique de Nambu-Poisson où lorsque $n = 2$, l'identité fondamentale devient l'identité de Jacobi et nous obtenons une définition d'une algèbre de Lie.
Différents aspects de la mécanique de Nambu, y compris la quantification, la déformation et diverses constructions algébriques pour les algèbres de Nambu ont été récemment étudiés. En outre, une généralisation twisté, appelé algèbres Hom-Nambu. Ce type d'algèbres appelé Hom algèbres apparu comme la déformation des algèbres de champs de vecteurs en utilisant σ-dérivations.
Dans cette thèse, on s'intéressé aux algèbres *n*-aires de Nambu-Poisson, particulièrement les algèbres ternaires de Nambu-Poisson, on a introduit les algèbres ternaires (non-commutative) de Nambu-Poisson et le type Hom de ces derniers, on a défini aussi la somme directe et le produit tensoriel de deux algèbres ternaires (non-commutatives) Hom-Nambu-Poisson, en fournissant les théorèmes de constructions des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson en utilisant le principe de twist, Ce processus est utilisé pour construire des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson correspondante à l'algèbre des polynômes ternaire où le crochet est défini par le Jacobien. On a établi la classification en dimension trois des algèbres ternaires non-commutatives de Nambu-Poisson. En outre nous avons proposé une procédure de construction d'une algèbre ternaire de Nambu-Poisson à partir d'un crochet binaire d'une algèbre de Poisson et une fonction trace qui satisfait certaines conditions de compatibilité. Nous avons trouvé beaucoup d'exemple en dimension 4, en utilisant cette procédure de construction qui nous a permis d'établir une classification en dimension 4 des algèbres de Poisson à partir des algèbres de Lie résolubles.
On appliquant la procédure de la construction décrite ci-dessus, on a établi une classication des algèbres ternaires de Nambu-Poisson construite à partir des algèbres de Poisson résolubles en dimension 4. La même procédure de construction a été appliquée pour construire des algèbres ternaires Hom Nambu-Poisson à partir des algèbres Hom-Poisson. Enfin Nous avons introduit la cohomologie des algèbres Hom-Poisson et la cohomologie des algèbres ternaire Hom-Nambu-Poisson.

Abstract

An n-ary algebra is a vector space on which is defined a multiplication of n arguments. Classically multiplications are binary, but since the use of theoretical physics ternary multiplications like Nambu products, many mathematical works has focused on this type of algebra. Two n-ary algebra classes are essential: the associative algebra n-ary and Lie algebra of n-ary.
Nambu algebras have been studied as a natural generalization of a Lie algebra for higher- order algebraic operations. By definition, Nambu algebra of order n over a field *IK* of characteristic zero consists of a vector space V over IK together with a *IK*-multilinear skew-symmetric operation $\{.,...,.\}: V^n \to V$, called the Nambu bracket that satisfies the following generalization of the Jacobi identity. Namely, for any $x_1, x_2, ..., x_n \in V$

$$\{x_1, ..., x_{n-1}, \{x_n, ..., x_{2n-1}\}\} = \{\{x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}, x_{n+1}, ..., x_{2n-1}\} + \{x_n, \{x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}\}, x_{n+2}, ..., x_{2n-1}\}$$
$$+ ... + \{x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n-2}, \{x_1, ..., x_{n-1}, x_{2n-1}\}\}.$$

Cette dernière notion, très important dans l'étude de la mécanique de Nambu-Poisson où

When $n = 2$, the fundamental identity becomes the Jacobi identity and we get a definition of a Lie algebra.
Different aspects of Nambu mechanics, including quantization, deformation and various algebraic constructions for Nambu algebras have recently been studied. Moreover, a twisted generalization called Hom-Nambu algebras. This kind of algebras called Hom-algebras appeared as deformation of algebras of vector fields using σ-derivations.
In this thesis, we were interested by nary Nambu-Poisson algebras, particularly by the ternary Nambu-Poisson algebras we introduced (non-commutative) ternary Nambu-Poisson algebras and a Hom type of (no-commutative) ternary Nambu-Poisson algebras, we also define direct sum and the tensor product of two (non-commutative) ternary Hom-Nambu-Poisson algebras, providing theorems of construction of ternary Hom-Nambu-Poisson algebras using the twisting principle, This process is used to construct ternary Hom-Nambu-Poisson algebras corresponding to the ternary algebra of polynomials where the bracket is defined by the Jacobian.We provide a classification of 3-dimensional ternary Nambu-Poisson algebras and then compute corresponding Hom-Nambu-Poisson algebras using twisting principle. In addition, we proposed a construction procedure of a ternary Nambu-Poisson algebra from a binary bracket of a Poisson algebra and a trace function that satisfies some conditions of compatibility.
We found many examples in dimension 4, we had a lot of algebra which gave us the idea to establish a classification of Poisson algebras from Solvable Lie algebras. Applying the construction procedure described above, we have established a classification of ternary Nambu-Poisson algebras constructed from solvable Poisson algebras in dimension 4. The same procedure of construction is applied to construct ternary Hom Nambu-Poisson algebras from Hom-Poisson algebras. Finally, we introduced cohomology of Hom-Poisson algebras and cohomology of ternary Hom-Nambu-Poisson algebra.

ملخص

الجبر ذات ن بعد هو الفضاء الشعاعي الذي يتم عليه تعريف عملية ضرب ذات ن حجة. كلاسيكيا الضرب عملية ثنائية، ولكن منذ استخدام الضرب الثلاثي في الفيزياء النظرية مثل عمليات ضرب نامبو، قد ركزت الكثير من الاعمال الرياضية على هذا النوع من الجبر. فئتين أساسيتين من الجبر ذات ن بعد: الجبر الجمعي ذات ن بعد وجبر لي ذات ن بعد. وقد درس جبر نامبو كتعميم طبيعي لجبر لي لعمليات جبرية ذات بعد أكبر.

جبر نامبو ذات ن بعد على الحقل IK ذات خاصية معدومة يتكون من الفضاء الشعاعي V على IK، عملية خطية ذات بعد ن على الحقل IK التي تتميز بغير التماثل $\{.,\dots,.\}: V^n \to V$ تدعى بقوس نامبو، و التي تحقق التعميم التالي لخاصية جاكوبي. لكل $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$

$$\{x_1, \dots, x_{n-1}, \{x_n, \dots, x_{2n-1}\}\} = \{\{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}, x_{n+1}, \dots, x_{2n-1}\} + \{x_n, \{x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}\}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-1}\}$$
$$+ \dots + \{x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n-2}, \{x_1, \dots, x_{n-1}, x_{2n-1}\}\}.$$

هذه الخاصية الاخيرة، جد مهمة لدراسة ميكانيك نامبو بواسون، و عندما $2 = ن$ ، الخاصية الأساسية تصبح هي تماما خاصية جاكوبي و نحصل على تعريف جبر لي.

في الآونة الأخيرة قد درست مختلف جوانب ميكانيك نامبو، بما في ذلك التقدير الكمي والتشوه ومختلف الانشاءات الجبرية لنامبو. وبالإضافة الى ذلك تم تقديم تعميم مغير او مشوه يدعى جبر نامبو بواسون. هذا النوع من الجبر يدعى جبر هوم ظهر كتشوه حقول اشعة جبرية باستخدام اشتقاق σ .

في هذه الاطروحة اهتممنا بجبر نامبو بواسون ذات ن بعد، بشكل خاص الجبر الثلاثي لنامبو بواسون، وعرضنا الجبر الثلاثي (غير التبادلي) لنامبو بواسون والنوع هوم للجبر الثلاثي (غير التبادلي) لنامبو بواسون، عرضنا أيضا الجمع المباشر والضرب تونسوريال لجبريين ثلاثيين (غير التبادليين) لهوم نامبو بواسون، وهذا بتقديم نظريات بناء هذه الجبريات الثلاثية لهوم نامبو بواسون. هذه العملية المستخدمة في بناء الجبر الثلاثي (غير التبادلي) لهوم نامبو بواسون الموافقة للجبر الثلاثي لكثيرات الحدود حيث القوس معرف بمصفوفة جاكوبي

تم انشاء تصنيف الجبر الثلاثي التبادلي لنامبو بواسون في ثلاث ابعاد. وبالإضافة إلى ذلك اقترحنا طريقة انشاء جبر ثلاثي لنامبو بواسون من خلال قوس ثنائي لجبر بواسون وتطبيق تراس التي تفي بشروط معينة من التوافق. لقد وجدنا العديد من الأمثلة في البعد 4، وذلك باستخدام عملية البناء التي سمحت لنا بوضع تصنيف في البعد 4 لجبر بواسون من خلال جبر لي

القابلة للحل. بتطبيق عملية الانشاء المذكورة اعلاه، قد أنشأت تصنيف جبريات ثلاثية لنامبو-بواسون التي بنيت من خلال جبريات بواسون القابلة للحل في البعد 4. نفس عملية البناء طبقت لبناء جبريات ثلاثية لهوم نامبو بواسون من خلال جبريات هوم بواسون. وأخيرا قدمنا الكومولوجيا لجبر هوم بواسون وللجبريات الثلاثية لهوم نامبو بواسون.

Universiuté Badji Mokhtar Annaba
laboratoire de probabilités et statistiques

Thèse

présentée en première version en vu d'obtenir le grade de Docteur,
spécialité « Algèbre et Théorie des Nombres »

par

Amri Hanene

Déformation et quantification des algèbres n-aires

Thèse soutenue le la date de soutenance devant le jury composé de :

M.	Smail KELAIAIA	Professeur, U. Annaba	(Président)
M.	Imed BASDOURI	MCF HDR, U. Gafsa (Tunisie)	(Examinateur)
Mme.	Zoubida BENHAMADI	MCF A, U. Annaba	(Examinatrice)
M.	Mohand Ouamar HERNANE	Professeur, USTHB	(Examinateur)
M.	Hacene BOUTABIA	Professeur, U. Annaba	(Co-directeur de thèse)
M.	Abdenacer MAKHLOUF	Professeur, UHA (France)	(Directeur de thèse)

Remerciements

Je voudrais remercier dans ces lignes les différentes personnes qui m'ont soutenues et encouragées durant ces années de thèse.

Tout d'abord je tiens à remercier grandement mon directeur de thèse, monsieur Abdenacer Makhlouf, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité et toute son aide au cours des stages au sein du Laboratoire de Mathématiques, Informatiques et Applications. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Je remercie mon co-encadreur monsieur Hacène Boutabia pour m'avoir donner cette chance de travailler avec monsieur Abdenacer Makhlouf.

Je remercie tout spécialement mon mari pour sa grande compréhension et son aide, et de m'avoir apporté le réconfort dont j'avais besoin, sans lui ce travail n'aurait pas eu lieu.
Un énorme remerciement pour mon adorable fils Idriss qui me donne la volonté de continuer. Cette thèse lui est dédié à cent pour cent.

Je remercie chaleureusement mes parents pour m'avoir toujours poussé dans mes études, pour leurs encouragements et leurs soutiens et pour toute l'aide qu'il m'apporte quand j'en ai eu.
Je remercie tous mes amies qui ont contribué à ce travail de près ou de loin.

Je remercie le chef de département de Mathématique, monsieur Abdelhak Djabebla, pour l'aide qu'il m'a apporté pour effectuer mes stages en France qui ont été très nécessaire pour l'aboutissement à ce travail sans oublier le chef de département de Mathématiques et Informatiques, monsieur Brahim Kilani pour sa compréhension.

Je remercie monsieur Mohand Ouamar HERNANE, pour l'intégration au projet TASSILI qui m'a beaucoup aidé pour l'avancement de ce travail, sans oublier monsieur Abdelmajid Bayad que je remercie pour l'aide qu'il m'a apporté à travers les stages dont j'ai bénéficiés dans le cadre du projet.

Je tiens enfin à remercier les rapporteurs et membres du jury d'avoir accepté de prendre le temps de regarder mon travail, et de leurs remarques et critiques pour l'améliorer.

Table des matières

Introduction...

Durant les dernières décennies, il y a eu un intérêt croissant pour les applications de diverses généralisations n-aires de la structure d'algèbre de Lie ordinaire à des problèmes de physique théorique, qui a culminé dans les dernières années. Les opérations n-aires algébriques sont, cependant, très anciennes : les opérations ternaires sont apparues pour la première fois associées à des matrices cubiques qui ont été introduites par A. Cayley au milieu du XIX ème siécle et qui ont aussi été considérées par J.J. Sylvester une quarantaine d'années plus tard. En dépit de cela, le travail mathématique moderne sur les multiopérateurs d'anneaux et des algèbres commence plus tard avec une série d'articles par Kurosh (voir [33]). En particulier, les algèbres linéaires sont données par un espace vectoriel sur lequel certaines opérations multilinéaires sont définies. Cette classe générale des algèbres est, cependant, plus grande que les deux principales généralisations des algèbres de Lie à discuter dans cette thèse, qui sera désigné d'une façon générique comme algèbres n-aires. Dans ceux-ci, le crochet de Lie standard est remplacé par le crochet n-aire qui est multilinéaire avec $n > 2$. La structure de l'algèbre étant définie par l'identité caractéristique satisfaite par le crochet n-aire.

Dans les années 70, Nambu a proposé un système hamiltonien généralisé fondé sur un produit ternaire, le crochet de Nambu-Poisson, qui permet d'utiliser plus d'un hamiltonien [36]. La motivation la plus récente pour les crochets ternaires est liée à la théorie des cordes et M-branes, les structures ternaires de type Lie ont été étroitement liée à la super symétrie et les transformations symétriques de Gauge et ont été appliquée à l'étude de la théorie de Bagger-Lambert. En outre les opérations ternaires apparues lors de l'étude de certains modèles de quarks. En 1996, la quantification des crochets de Nambu-Poisson a été étudiée dans [21], elle a été présentée dans une nouvelle approche de Zariski.

La formulation algébrique de la mécanique de Nambu a été discutée dans [42] et les algèbres de Nambu ont été étudiées dans [22] comme une généralisation naturelle d'une algèbre de Lie pour les opérations algébriques d'ordre supérieur. Par définition, une algèbre de Nambu d'ordre n sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle se compose d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$ avec une opération $\mathbb{K}$-multilinéaire antisymétrique $[.,\cdots,.] : \Lambda^n V \to V$, appelée le crochet de Nambu, qui satisfait la généralisation suivante de l'identité de Jacobi. A savoir, pour tout $x_1, ..., x_{n-1} \in V$ on définit une action adjointe $ad(x_1, ..., x_{n-1}) : V \to V$ par $ad(x_1, ..., x_{n-1})x_n = [x_1, ..., x_{n-1}, x_n], x_n \in V$. Ensuite, l'identité fondamentale est une condition affirmant que l'action adjointe est une dérivation par rapport au crochet de Nambu, i.e. pour tout $x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_n \in V$

$$ad(x_1, ..., x_{n-1})[y_1, ..., y_n] = \sum_{k=1}^{n} [y_1, ..., ad(x_1, ..., x_{n-1})y_k, ..., y_n]. \tag{1}$$

Lorsque $n = 2$, l'identité fondamentale devient l'identité de Jacobi et nous obtenons une définition d'une algèbre de Lie.

Différents aspects de la mécanique de Nambu, y compris la quantification, la déformation et diverses constructions algébriques pour les algèbres de Nambu ont été récemment étudiées. En outre, une généralisation twistée, appelée algèbres Hom-Nambu, ont été introduites dans [9]. Ce type d'algèbres appelé Hom-algèbres sont apparues dans les déformations quantiques des algèbres de champs de vecteurs, utilisant les σ-derivations. Le premiers exemples de q-déformations ont concerné les algèbres de Witt et Virasoro. Puis Hartwig, Larsson et Silvestrov ont introduit un cadre général et étudié les algèbres Hom-Lie [30], dans lesquelles l'identité de Jacobi est twistée ou déformée par un homomorphisme. Les algèbres associatives correspondantes, appelés les algèbres Hom-associatives ont été introduites par Makhlouf et Silvestrov dans [35]. Les algèbres non-commutative Hom-Poisson ont été discuté dans [48]. De même les algèbre n-aires de type-Hom ont été introduites dans [9], voir aussi [3, 2, 6, 49, 47].

Ce travail de thèse est divisé en cinq chapitres. Dans le premier chapitre on revoie les définitions et les généralités sur les algèbres n-aires, en s'intéressant à quelques types d'algèbres n-aires, les algèbres n-aires associatives et les algèbres n-Lie ou les algèbres n-aires de Nambu-Lie où on donne des définitions et quelques exemples fondamentaux, ainsi que les representations. Dans le deuxième chapitre, on se penche sur les algèbres n-aires de Nambu-Poisson et on présente la solution récemment obtenue combinant la quantification par déformation avec une «seconde quantification. L'approche est appelée quantification de Zariski parce qu'elle est basée sur la factorisation des polynômes (réels) irréductibles, et ça nécessite d'aller un peu plus loin (développements de Taylor de polynômes sur polynômes)[21]. Dans le troisième chapitre, on introduit les algèbres ternaires (non-commutatives) de Nambu-Poisson et le type-Hom des algèbres ternaires (non-commutatives) de Nambu-Poisson, on définit aussi la somme directe et le produit tensoriel de deux algèbres ternaires (non-commutatives) Hom-Nambu-Poisson. On donne quelques constructions d'algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson et on généralise le principe de twist à ce type d'algèbres. Par ailleurs, on établit une classification en dimension trois des algèbres ternaires non-commutatives de Nambu-Poisson.

Cependant, dans le quatrième chapitre, on porte notre interêt sur la construction des structures ternaires à partir des structures binaires, plus précisément, on propose une procédure de construction d'une algèbre ternaire de Nambu-Poisson à partir d'un crochet binaire d'une algèbre de Poisson et une fonction trace qui satisfait certaines conditions de compatibilité. Pour illustrer cette approche, nous avons cherché des exemples. On montre qu'il n'y a pas d'algèbre de Nambu-Poisson ternaire construite à partir des algèbres de Poisson en dimension 3. En revanche, en dimension 4, il existe de nombreux exemples. Cela nous a conduit à établir une classification en dimension 4 des algèbres de Poisson à partir des algèbres de Lie résolubles puis en appliquant la procédure de construction décrite ci-dessus, on a établi une classification des algèbres ternaires de Nambu-Poisson construite à partir des algèbres de Poisson résolubles en dimension 4. La même procédure de construction est appliquée pour construire des algèbres ternaires Hom Nambu-Poisson à partir des algèbres Hom-Poisson.

Dans le cinquième chapitre, on introduit les ingrédients de l'algèbre homologique, la (co)homologie de Hochschild des algèbres associatives et la cohomologie de Chevalley-Eilenberg des algèbres de Lie. On rappelle par ailleurs la cohomologie des algèbres ternaires de type Lie et des algèbres de Nambu ternaires, ceci en utilisant le procédé de Takhtajan. On donne quelques résultats sur la cohomologie des algèbres Hom-Poisson et la cohomologie des algèbres ternaires Hom-Nambu- Poisson.

Algèbres n-aires

1

1.1 Généralités et définitions

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutative de caractéristique zéro et A un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $n \in \mathbb{N}$ où $n \geq 2$.

Définition 1.1 *Une structure d'algèbre n-aire sur A est donnée par une application n-linéaire*

$$\mu : A^{\otimes n} \to A,$$

on note par(A, μ) chaque algèbre n-aire.

Les algèbres classiques (les algèbres associatives, les algèbres de Lie, les algèbres de Leibniz par exemple) sont des algèbres binaires données par un produit 2-aire.

Définition 1.2 *Une sous-algèbre d'une algèbre n-aire (A, μ) est un sous-espace vectoriel W de A tel que la restriction de μ vers $W^{\otimes n}$ satisfait $\mu(W^{\otimes n}) \subset W$.*

Dans ce cas (W, μ) est aussi une algèbre n-aire.

Définition 1.3 *Soit (A, μ) une algèbre n-aire. Un ideal de (A, μ) est une sous-algèbre (I, μ) satisfaisant :*

$$\mu(A^{\otimes p} \otimes I \otimes A^{\otimes n-p-1}) \subset I,$$

pour tout $p = 0, ..., n-1$, et où $A^{\otimes 0} \otimes I = I \otimes A^{\otimes 0} = I$.

Définition 1.4 *Soit (A_1, μ_1) et (A_2, μ_2) deux algèbres n-aires. Un morphisme des algèbres n-aires est une application linéaire $\phi : A_1 \to A_2$ satisfaisant*

$$\mu_2 \circ \phi^{\otimes n} = \phi \circ \mu_1.$$

Dans ce cas, le noyau $ker\phi$ du morphisme ϕ est un idéal de (A_1, μ_1). En effet, si $x \in ker\phi$, alors

$$\begin{aligned}\phi(\mu_1(x_1 \otimes ... \otimes x \otimes ... \otimes x_{n-1}))\\ = \mu_2(\phi(x_1) \otimes ... \otimes \phi(x) \otimes ... \otimes \phi(x_{n-1})) = 0. \quad (1.1)\end{aligned}$$

1.1.1 Algèbres n-aires commutatives et symétriques

Une algèbre n-aire (A, μ) est dite symétrique si elle satisfait

$$\mu(x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(n)}) = \mu(x_1 \otimes ... \otimes x_n),$$

pour tout $x_1, ..., x_n \in A$ et pour tout $\sigma \in S_n$, où S_n est le groupe de permutation.

L'algèbre (A, μ) est dite antisymétrique si

$$\mu(x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(n)}) = (-1)^{\epsilon(\sigma)} \mu(x_1 \otimes ... \otimes x_n),$$

pour tout $\sigma \in S_n$, où S_n est le groupe de permutation et $(-1)^{\epsilon(\sigma)}$ est le signe de permutation de σ.

L'algèbre (A, μ) est dite commutative si

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \mu(x_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma(n)}) = 0, \text{ pour tout } x_1, ..., x_n \in A.$$

Remarque 1.1 *Toute algèbre n-aire symétrique est commutative.*

1.1.2 Dérivations

Soit (V, μ) une algèbre n-aire.

Définition 1.5 *Une dérivation d'une algèbre n-aire (V, μ) est une appilication linéaire $D : V \to V$ vérifiant*

$$D(\mu(x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_1, ..., D(x_i), ..., x_n), \tag{1.2}$$

pour tout $x_1, ..., x_n \in V$.

Toutes les dérivations de (V, μ) génèrent une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $gl(V)$. On l'appelle l'algèbre des dérivations de V et elle est désignée par $Der(V)$.

Remarque 1.2 *Pour tout $x_1, ..., x_{n-1}$ dans V, Soit $ad(x_1, ..., x_{n-1})$ une application linéaire donnée par*

$$ad(x_1, ..., x_{n-1})(x) = \mu(x_1, ..., x_{n-1}, x),$$

Alors, cette application linéaire est une dérivation (intérieure) si et seulement si le produit μ satisfait

$$\mu(x_1, ..., x_{n-1}, \mu(y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} \mu(y_1, ..., \mu(x_1, ..., x_{n-1}, y_i), ..., y_n). \tag{1.3}$$

Nous allons étudier un tel produit pour les algèbres n-Lie. Si $n = 2$, ce qui montre que les l'applications $ad(X)$ sont des dérivations de (V, μ) si et seulement si le produit binaire satisfait

$$\mu(x_1, \mu(y_1, y_2)) = \mu(\mu(x_1, y_1), y_2) + \mu(y_1, \mu(x_1, y_2))$$

et (V, μ) est une algèbre de Leibniz ([16]). Ainsi, pour tout n, une algèbre n-aire (V, μ) satisfaisant l'équation (1.3) est appelée algèbre n-Leibniz.

1.2 Algèbres n-aires associatives

L'intérêt de la classe des algèbres associatives dans le cas binaire est bien connu. Il est naturel de généraliser l'associativité au cas n-aire. Il existe deux façons usuelles de leur généralisation, appelées associativité partielle et totale (voir [28]) et plus récemment les notions d'associativité σ-partielle et associativité σ-totale ont été introduites dans ([37]). Les algèbres partiellement et totalement associatives de type n-aires, ont été aussi considérées par Gnedbaye.

Définition 1.6 *Une algèbre (A, μ) est*

– *partiellement associative si μ satisfait*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(x_1, ..., x_{i-1}, \mu(x_i, ..., x_{n+i-1}), x_{n+i}, ..., x_{2n-1}) = 0 \tag{1.4}$$

– *totallement associative si μ satisfait*

$$\begin{aligned} \mu(\mu(x_1, ..., x_n), x_{n+1}, ..., x_{2n-1}) &= \mu(x_1, \mu(x_2, ..., x_{n+1}), x_{n+2}, ..., x_{2n-1}) \\ &= \mu(x_1, x_2, \mu(x_3, ..., x_{n+2}), x_{n+3}, ..., x_{2n-1}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &= \mu(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, \mu(x_n, ..., x_{2n-1})) \end{aligned}$$

pour tout $x_1, ..., x_{2n-1} \in A$

Exemple 1.1 ***Le produit de Gerstenhaber*** *Soit A une algèbre associative (binaire) et $H^*(A, A)$ sa cohomologie de Hochschild. L'espace des k-cochaines est $C^k(A) = Hom_{\mathbb{K}}(A^{\otimes k}, A)$. Gerstenhaber [27] a défini une algèbre pré-Lie graduée $\oplus_k C^k(A)$ avec le produit*

$$\bullet_{n,m} : C^n(A) \times C^m(A) \to C^{n+m-1}(A) \tag{1.5}$$

donnée par

$$(f \bullet_{n,m} g)(X_1 \otimes ... \otimes X_{n+m-1}) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(i-1)(m-1)} f(X_1 \otimes ... \otimes g(X_i \otimes ... \otimes X_{i+m-1}) \otimes ... \otimes X_{n+m-1}).$$

Le k-cochaine μ qui satisfait l'identité $\mu \bullet_{k,k} \mu = 0$ construit avec A une structure k-aire partiellement associative.

1.3 Algèbres Nambu-Lie (n-Lie)

Plusieurs notions d'algèbres n-Lie (Nambu-Lie) ont été présentées pour généraliser des algèbres de Lie pour des algèbres n-aires. La première généralisation est dûe à Filippov [22]. Ces algèbres ont été étudiées d'un point de vue algébrique (classification, simplicité, nilpotence, représentations) et en raison de leurs relations avec la mécanique de Nambu. La seconde généralisation est la notion introduite avec le point de vue d'homotopie d'algèbre. Dans cette thèse Nous sommes intéressés par la première approche appelée algèbre n-Lie (Nambu-Lie). Dans cette section, nous présentons les définitions et étudions les propriétés des algèbres n-Lie introduites par Filippov.

1.3.1 Définitions

Définition 1.7 *Une algèbre n-aire antisymétrique est une algèbre n-aire de Nambu-Lie si la généralisation de l'identité de Jacobi suivante est satisfaite :*

$$\{\{x_1,...,x_n\},y_1,...,y_{n-1}\} = \sum_{i=1}^{n}\{x_1,...,x_{i-1},\{x_i,y_1,...,y_{n-1}\},x_{i+1},...,x_n\}, \tag{1.6}$$

pour tous $\mu_1,...,\mu_n,v_1,...,v_{n-1} \in A$.
La condition 1.6 est appelée l'identité fondamentale, pour $n = 2$ l'identité devient l'identité de Jacobi, et on retrouve la définition d'une algèbre de Lie.
L'algèbre n-aire de Nambu-Lie est aussi appelée n-Lie.

Définition 1.8 *Soient $(A, \{.,...,.\})$ et $(B, \{.,...,.\})$ deux algèbres n-aires de Nambu-Lie. Un morphisme d'algèbres n-aire de Nambu-Lie est une application linéaire $f : A \to B$ vérifiant :*

$$f(\{x_1,...,x_n\}) = \{f(x_1),...,f(x_n)\}, \forall x_1,...,x_n \in A.$$

Définition 1.9 *Soit $(A, \{.,...,.\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie, et soit $f : A \to A$ une application linéaire. On dit que f est une dérivation de A si elle vérifie la condition suivante, pour tout $x_1,...,x_n \in A$:*

$$f(\{x_1,...,x_n\}) = \sum_{i=1}^{n}\{x_1,...,f(x_i),...,x_n\}.$$

1.3.2 Exemples fondamentales

1. Cet exemple a été donné par Fillipov. Soit A un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. Soit $\{v_1,...,v_{n+1}\}$ une base de A. Le produit suivant
$$\{v_1,v_2,...,\widehat{v_i},...,v_{n+1}\} = (-1)^{n+1+i}v_i, \tag{1.7}$$
pour $i = 1,...,n+1$, fournit avec A une structure d'algèbre n-aire de Nambu-Lie. On note cette algèbre A_{n+1}.

Théorème 1.1 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute algèbre n-aire de Nambu-Lie simple est de dimension $n+1$ et elle est isomorphe à A_{n+1}*

2. Soit $A = \mathbb{K}[X_1,...,X_n]$ des algèbres associatives de n polynômes indéterminés. Nous considérons le produit
$$\{P_1,...,P_n\} = Jac(P_1,...,P_n), \tag{1.8}$$
où Jac désigne la jacobienne, qui est le déterminant de la matrice jacobienne des dérivées partielles de $P_1,...,P_n$. A muni avec ce produit est une algèbre n-aire de Nambu-Lie de dimension finie.

3. Les crochets de Nambu généralisent directement l'exemple précédent. Soit $A = C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ l'algèbre des fonctions différentielles sur $\mathbb{R}^3$. Cette algèbre est considérée comme des observables classiques sur l'espace de dimension trois $\mathbb{R}^3$ de coordonnées x, y, z. Nous considérons sur A le produit

$$\{f_1, f_2, f_3\} = Jac(f_1, f_2, f_3). \tag{1.9}$$

Ce produit est un produit de l'algèbre ternaire de Nambu-Lie qui généralise le crochet de Poisson usuel des opérations binaire à des opérations ternaires.

4. Toute algèbre n-aire de Nambu-Lie de dimension n est abélienne.
5. Soit $V = \mathbb{R}^4$, un espace euclidien orienté de dimension 4, et le crochet de trois vecteurs $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ égal au déterminant suivant

$$[x, y, z] = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} \times \overrightarrow{z} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & e_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & e_4 \end{vmatrix},$$

où $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ et $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \overrightarrow{e_i}$, $\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{3} y_i \overrightarrow{e_i}$ et $\overrightarrow{z} = \sum_{i=1}^{3} z_i \overrightarrow{e_i}$. Alors $(V, [., ., .])$ est une algèbre ternaire de Nambu-Lie.

1.3.3 Représentations

Nous introduisons les notions d'objet fondamental et d'algèbre de Leibniz de base d'une algèbre n-aire de Nambu-Lie. Ces dernières seront utiles pour les représentations des algèbres n-aires de Nambu-Lie ou les algèbres n-Lie.

Définition 1.10 *Soit $(A, \{., ..., .\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et $L(A) = \wedge^{n-1}A$ la $(n-1)$-ème puissance extérieure de A. Les éléments $L(A)$ sont appelés objets fondamentaux. Pour $X = x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1}, Y = y_1 \wedge ... \wedge y_{n-1} \in L(A)$, on définit :*

– *L'action des objets fondamentaux sur A par :*

$$\forall z \in A, X \cdot z = ad_X(z) = \{x_1, ..., x_{n-1}, z\}.$$

– *La multiplication (composition) de deux objets fondamentaux par :*

$$[X, Y] = X \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} y_1 \wedge ... \wedge X \cdot y_i \wedge ... \wedge y_{n-1}.$$

On prolonge les définitions précédentes à tout l'espace $L(A)$ par linéarité.

Proposition 1.1 *Les deux opérations définies ci-dessus vérifient :*

– $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z + Y \cdot (X \cdot Z)$, *(Règle de Leibniz)*

– $ad_{X\cdot Y} = -ad_{Y\cdot X}$,
– $ad_{X\cdot Y} = ad_X \circ ad_Y - ad_Y \circ ad_X$.

Proposition 1.2 *Soit $(A, \{.,...,.\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie. Les applications ad_X pour $X \in L(A)$ sont des dérivations de A, elles sont appelées dérivations intérieures de A.*

Proposition 1.3 *Soit $(A, \{.,...,.\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie. L'espace $L(A)$ muni de la composition d'objets fondamentaux est une algèbre de Leibniz. Elle est appelée algèbre de Leibniz de base de l'algèbre A.*

Remarque 1.3 *Il est possible de montrer que la composition des objets fondamentaux est antisymétrique, en effet, soit $X = x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \in L(A)$, alors on a :*

$$\begin{aligned}[X, X] &= \sum_{i=1}^{n-1} x_1 \wedge ... \wedge X \cdot x_i \wedge ... \wedge x_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_1 \wedge ... \wedge [x_1, ..., x_i, ..., x_{n-1}, x_i] \wedge ... \wedge x_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_1 \wedge ... \wedge 0 \wedge ... \wedge x_{n-1} = 0.\end{aligned}$$

Il est aussi à noter que dans [27], l'auteur considère comme acquis le fait que l'algèbre de Leibniz de base d'une algèbre n-aire de Nambu-Lie soit antisymétrique.

Nous donnons maintenant quelques exemples d'algèbres de Leibniz de base

Exemple 1.2 (27) - *On considère l'algèbre n-aire de Nambu-Lie de dimension $n+1$, notée A_{n+1}, dont le crochet est donné, dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n+1}$, par : $[e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_{n+1}] = (-1)^i e_i$. L'algèbre de Leibniz de base de cette algèbre est isomorphe à l'algèbre de Lie $so_{n+1}(\mathbb{K})$.*

- *L'espace $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ des polynômes à n variables, muni du jacobien est une algèbre n-aire de Nambu-Lie. Son algèbre de Leibniz de base est isomorphe à l'algèbre des champs de vecteurs sans divergence S_{n-1}.*

Remarque 1.4 *En utilisant la notion d'objets fondamentaux, il est possible de réécrire l'identité fondamentale comme suit :*

$$X \cdot (Y \cdot z) = (X \cdot Y) \cdot z + Y \cdot (X \cdot z), \forall X, Y \in \wedge^{n-1} A, \forall z \in A.$$

Nous introduisons, maintenant, les notions de représentation d'algèbre n-aire de Nambu-Lie et de module n-aire de Nambu-Lie , ainsi que le lien entre les deux notions.

Définition 1.11 *Soit $(A, [\cdot, ..., \cdot])$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et soit V un espace vectoriel. Une représentation de A dans V est une application linéaire $\rho : \wedge^{n-1} A \to End(V)$ vérifiant la condition suivante :*

$$\forall X, Y \in \wedge^{n-1} A, \rho(X \cdot Y) = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X). \tag{1.10}$$

Autrement dit, ρ est un morphisme d'algèbre de $(L(A), \cdot)$ dans $End(V)$ muni du commutateur.

Exemple 1.3 *Soit $(A, \{., ..., .\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et $L(A)$ son algèbre de Leibniz de base. Une représentation de A dans $\mathbb{K}$ est une application linéaire $\rho : L(A) \to gl_1(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$ telle que :*

$$\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] = 0.$$

Exemple 1.4 *Soit $(A, [., ..., .])$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et $L(A)$ son algèbre de Leibniz de base. L'application $ad : L(A) \to End(A)$ qui à un objet fondamental X associe l'opérateur adjoint correspondant $ad_X : A \to A; ad_X(z) = X \cdot z$ est une représentation de $(A, \{., ..., .\})$ dans son espace vectoriel sous-jacent.*

Définition 1.12 *Soit $(A, \{., ..., .\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et soient $\rho : L(A) \to V$ et $\rho' : L(A) \to W$ deux représentations de A. On dit que les représentations ρ et ρ' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme $f : V \Rightarrow W$ tel que*

$$f(\rho(X)(y)) = \rho'(X)(f(y)), \forall X \in L(A), y \in A.$$

Définition 1.13 *Soit $(A, \{., ..., .\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et soit $\rho : L(A) \to V$ une représentation de A. La représentation ρ est dite triviale si $ker\rho = L(A)$, elle est dite fidèle si $ker\rho = 0$.*

Définition 1.14 *Soit $(A, \{., ..., .\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et soit V un espace vectoriel. On dit que V est un A-module n-aire de Nambu-Lie si on a sur $B = A + V$ une structure d'algèbre n-aire de Nambu-Lie telle que A soit une sous-algèbre de B et V un idéal abélien de B (au sens de Kuz'min, c'est-à-dire $\{V, V, B, ..., B\} = 0$). Dans ce cas, on dit que $B = A + V$ est le produit semi-direct de A et V, son crochet est donné, pour tout $y_1, ..., y_n \in B$ où $y_i = x_i + v_i$ avec $x_i \in A$ et $v_i \in V$, par :*

$$\{y_1, ..., y_n\} = \{x_1, ..., x_n\} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \{x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n, v_i\}.$$

Proposition 1.4 *Soit $(A, \{., ..., .\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et soit V un A-module. On définit pour tout $X = x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \in \wedge^{n-1} A$ une application linéaire $\rho(X) : V \to V$ par $\rho(X)(v) = X \cdot v = [x_1, ..., x_{n-1}, v]$ puis on prolonge ρ à $\wedge^{n-1} A$ par linéarité. L'application ρ est une représentation de A dans V , de plus, elle vérifie la propriété suivante :*

$$\rho([x_1, ..., x_n] \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \rho(x_i \wedge y_2 \wedge ... \wedge y_{n-1}) \circ \rho(x_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge ... \wedge x_n). \quad (1.11)$$

La réciproque de cette proposition est vraie, à savoir :

Proposition 1.5 *[27] Soit $(A, \{., ..., .\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et soit $\rho : L(A) \to End(V)$ une représentation de A. Si ρ vérifie la condition* (1.11) *alors V est un A-module, où le crochet de A est étendu à $A + V$ par :*

$$\{x_1, ..., x_{n-1}, v\} = \rho(x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1})(v), \forall x_1, ..., x_{n-1} \in A, v \in V,$$

et

$$\{y_1, ..., y_{n-2}, v, w\} = 0, \forall y_1, ..., y_{n-2} \in V + A, v, w \in V.$$

Remarque 1.5 - *Le crochet construit dans la proposition 1.5, que la condition* (1.11) *soit satisfaite ou non, définit un module de Lie sur $L(A)$, l'algèbre de base de A. La condition* (1.11) *permet d'assurer que $A+V$ muni de ce crochet soit une algèbre n-aire de Nambu-Lie .*

- *La définition d'une représentation donnée par Kasymov dans [45] exige aussi la condition* (1.11). *Ainsi, au sens de cette définition, la donnée d'une représentation d'algèbre n-aire de Nambu-Lie équivaut à la donnée d'un module n-aire de Nambu-Lie.*

- *Dans le cas d'une algèbre de Lie ($n=2$), la condition* (1.10) *est suffisante car, dans ce cas, la condition* (1.11) *lui est équivalente.*

Exemple 1.5 (27) *L'algèbre de Leibniz de base de l'algèbre A_{n+1} (exemple 2.1.35) est isomorphe à $so_{n+1}(\mathbb{K})$. L'isomorphisme entre $L(A)$ et $so_{n+1}(\mathbb{K})$ est donné par :*

$$e_i \wedge ... \wedge \widehat{e_i} \wedge ... \wedge \widehat{e_j} \wedge ... \wedge e_{n+1} \mapsto (-1)^{i+j+n+1} e_{ij}, i<j,$$

où e_{ij} est la matrice d'ordre $n+1$ définie par :

$$(e_{ij})_{ij} = 1; (e_{ij})_{ji} = -1; (e_{ij})_{kl} = 0 si (k,l) \neq (i,j).$$

Cet isomorphisme définit une représentation de A_{n+1} dans K_{n+1}. D'autre part, toute représentation ρ de A_{n+1} dans un espace vectoriel V peut être définie par un morphisme d'algèbre de Lie de $so_{n+1}(\mathbb{K})$ dans $End(V)$. De plus, une telle représentation vérifie la condition (1.11) *si et seulement si*

$$\rho(R_{ijks})(v) = 0, \forall v \in V,$$

où

$$R_{ijks} = e_{ij}e_{sk} + e_{is}e_{kj} + e_{ik}e_{js}.$$

Nous présentons maintenant quelques propriétés des modules n-aires de Nambu-Lie [27].

Définition 1.15 *Soit $(A, \{.,...,.\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et soit V un module n-aire de Nambu-Lie sur A. On appelle sous-module n-aire de Nambu-Lie de V tout sous-espace vectoriel $W \subset V$ tel que $\{x_1, ..., x_{n-1}, w\} \in W$, pour tout $x_1, ..., x_{n-1} \in A$ et pour tout $w \in W$.*

Définition 1.16 *Soit $(A, \{.,...,.\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et soit V un module n-aire de Nambu-Lie sur A. - On dit que V est simple, ou irréductible, si ses seuls sous-modules sont 0 et lui-même. - On dit qu'il est semi-simple, ou complètement réductible, s'il est une somme directe de sous-module simples, ou de manière équivalente si tout sous-module admet un supplémentaire.*

Proposition 1.6 *Soit $(A, \{.,...,.\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et soit V un module n-aire de Nambu-Lie sur A. Tout sous-module de V et tout module quotient de V est un module n-aire de Nambu-Lie sur A. De plus, si V_1 et V_2 sont deux modules n-aire de Nambu-Lie, alors $V_1 \oplus V_2$ est un module n-aire de Nambu-Lie sur A.*

Proposition 1.7 *Soit $(A, \{.,...,.\})$ une algèbre n-aire de Nambu-Lie et soit V un module n-aire de Nambu-Lie sur A. Le module V est simple (resp. semi-simple) si et seulement s'il est simple (resp. semi-simple) en tant que module de Lie sur $L(A)$.*

1.4 Autre généralisation des algèbres de Lie

Les algèbres n-aires de type Lie sont les généralisations au cas n-aire des algèbres de Lie. Les deux principales généralisations découlent de deux interprétations de l'identité de Jacobi :

– Les algèbres n-aire de Nambu-Lie, présentées précédemment, où l'identité de Jacobi est vue comme étant le fait que les applications adjointes (multiplications à gauche) soient des dérivations.
– Les algèbres de Lie généralisées, où l'identité de Jacobi est vue comme le fait que la somme sur S_{2n-1} des crochets imbriqués soit nulle. Il existe aussi d'autres types d'algèbres n-aires liées aux algèbres de Lie, notamment les algèbres n-Leibniz qui sont la version non-antisymétrique des algèbres n-aires de Nambu-Lie, ainsi que les systèmes triples de Lie qui sont partiellement antisymétriques. Nous donnerons les définitions et quelques propriétés de bases de ces algèbres.

Définition 1.17 *Une algèbre de Lie généralisée d'ordre n* $(G, [., ..., .])$ *est un espace vectoriel G muni d'une opération n-aire* $[., ..., .]$ *antisymétrique et vérifiant, pour tout* $x_1, ..., x_{2n-1} \in G$*, la condition suivante :*

$$\sum_{\sigma \in S^{2n-1}} [[x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}], x_{\sigma(n+1)}, ..., x_{\sigma(2n-1)}] = 0 \tag{1.12}$$

La condition (1.12) s'appelle identité de Jacobi généralisée. Lorsque $n = 2$, on retrouve l'identité de Jacobi.

Définition 1.18 *Une algèbre n-Leibniz (gauche)* $(L, [., ..., .])$ *est un espace vectoriel L muni d'une opération n-aire* $[., ..., .]$ *vérifiant, pour tout* $x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_n \in A$*, l'identité suivante :*

$$[x_1, ..., x_{n-1}, [y_1, ..., y_n]] = \sum_{i=1}^{n} [y_1, ..., [x_1, ..., x_{n-1}, y_i], ..., y_n]. \tag{1.13}$$

L'identité (1.13) *peut s'écrire :*

$$G(x_1, ..., x_{n-1})([y_1, ..., y_n]) = \sum_{i=1}^{n} [y_1, ..., G(x_1, ..., x_{n-1})(y_i), ..., y_n],$$

où $G(x_1, ..., x_{n-1}) = [x_1, ..., x_{n-1}, .]$ *est l'opérateur de multiplication à gauche, si on le remplace par celui de multiplication à droite* $D(x_1, ..., x_{n-1}) = [., x_1, ..., x_{n-1}]$*, l'algèbre définie est alors appelée algèbre n-Leibniz droite.*

Remarque 1.6 *Les algèbres n-Leibniz sont la version non antisymétrique des algèbres n-Lie. Aussi, dans le cas antisymétrique, les identités n-Leibniz gauche et droite sont équivalentes.*

Définition 1.19 *Un système triple de Lie* $(T, [., ., .])$ *est un espace vectoriel T muni d'une opération ternaire* $[., ., .]$ *vérifiant les conditions suivantes :*

– *Pour tout* $x, y, z \in T$

$$[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0,$$

– *Pour tout* $x, y, z \in T$

$$[x, y, z] = -[y, x, z],$$

– *Pour tout* $x, y, z_1, z_2, z_3 \in T$

$$[x, y, [z_1, z_2, z_3]] = [[x, y, z_1], z_2, z_3] + [z_1, [x, y, z_2]] + [z_1, z_2 [x, y, z_3]].$$

Nous allons présenter maintenant deux résultats qui permettent de construire des algèbres n-aires de type Lie à partir d'algèbres n-aires de type associatif, généralisant le fait qu'une algèbre associative munie du commutateur soit une algèbre de Lie.

Proposition 1.8 *Soit (A, m) une algèbre n-aire partiellement associative. On définit sur A l'opération n-aire $[., ..., .]$ par :*

$$[x_1, ..., x_n] = \sum_{\sigma \in S^{2n-1}} m(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

$\forall x_1, ..., x_n \in A$.

L'algèbre $(A, [., ..., .])$ est une algèbre de Lie généralisée.

La construction suivante est une autre généralisation du commutateur, elle est due à Yau.

Définition 1.20 *On considère l'ensemble $X = a_1, ..., a_n$ de cardinal $n \geq 2$. On définit l'ensemble W_n comme étant l'ensemble des mots de X de longueur n donné par :*

$$W_2 = a_1 a_2, -a_2 a_1$$

et

$$W_n = Z a_n, -a_n Z : Z \in W_{n-1} \text{ pour } n > 2.$$

Définition 1.21 *Soit V un espace vectoriel, et soit $w = \pm a_{i_1} ... a_{i_n} \in W_n$. On définit l'application $w : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n}$ par :*

$$w(v_1, ..., v_n) = \pm v_{i_1} \otimes ... \otimes v_{i_n}.$$

En utilisant l'application w définie ci-dessus, on définit une généralisation du commutateur, le n-commutateur :

Définition 1.22 *Soit (A, m) une algèbre n-aire. On définit sur A le n-commutateur $[\Delta, ..., \Delta] : A^n \to A$ par :*

$$[x_1, ..., x_n] = \sum_{w \in W_n} m(w(x_1, ..., x_n))$$

$\forall x_1, ..., x_n \in A$.

Par exemple, pour $n = 2$ on retrouve le commutateur usuel, à savoir :

$$[x_1, x_2] = m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1).$$

Pour $n = 3$, le n-commutateur prend la forme suivante :

$$[x_1, x_2, x_3] = m(x_1, x_2, x_3) - m(x_3, x_1, x_2) + m(x_3, x_2, x_1) - m(x_2, x_1, x_3).$$

Proposition 1.9 *Soit (A, m) une algèbre n-aire totalement associative. Alors $(A, [., ..., .])$, où $[., ..., .]$ est le n-commutateur, est une algèbre n-Leibniz. En particulier, l'algèbre ainsi obtenue pour $n = 3$ est un système triple de Lie.*

Algèbres n-aires de Nambu-Poisson

2

2.1 Algèbres n-aires de Nambu-Poisson

Définition 2.1 *Une algèbre n-aire de Nambu-Poisson $(A, \mu, \{., ..., .\})$ est un espace vectoriel A muni d'une application bilinéaire $\mu : A \times A \to A$ et une application n-linéaire $\{., ..., .\} : A^n \to A$ tel que*

1. *(A, μ) est une algèbre binaire associative commutative,*
2. *$(A, \{., ..., .\})$ est une algèbre n-aire de Nambu-Lie (n-Lie),*
3. *et la régle de Leibniz*

$$\{\mu(x_1, x'_1), x_2, ..., x_n\} = \mu(x_1, \{x'_1, x_2, ..., x_n\}) + \mu(\{x_1, x_2, ..., x_n\}, x'_1),$$

pour tout $x'_1, x_1, x_2, ..., x_n \in A$.

Une algèbre n-aire de Nambu-Poisson est une algèbre n-aire non-commutative de Nambu-Poisson si la multiplication μ n'est pas nécesserement commutative.

Définition 2.2 *Soient $(A, \mu, \{., ..., .\})$ et $(A', \mu', \{., ..., .\}')$ deux algèbres n-aires de Nambu-Poisson. Une application linéaire $f : A \to A'$ est un morphisme d'algèbre si les conditions suivantes sont satisfaites pour tout $x_1, x_2, ..., x_n \in A$*

$$\begin{aligned} f(\{x_1, ..., x_n\} &= \{f(x_1), ..., f(x_n)\}' && (2.1) \\ f \circ \mu &= \mu \circ f^{\otimes 2} && (2.2) \end{aligned}$$

Exemple 2.1 *Soit $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'algèbre C^∞ des fonctions sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et $x_1, x_2, ..., x_n$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$. Nous définissons le crochet n-aire par la fonction jacobienne suivante*

$$\{f_1, ..., f_m\} = \begin{vmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \end{vmatrix}, \qquad (2.3)$$

alors $(C^\infty(\mathbb{R}^n), \{., ..., .\})$ est une algèbre n-aire de Nambu-Lie. De plus si le crochet satisfait la régle de Leibniz : $\{fg, f_2, ..., f_m\} = f\{g, f_2, ..., f_m\} + \{f, f_2, ..., f_m\}g$ où $f, g, f_2, ..., f_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et la multiplication point par point qui est $fg(x) = f(x)g(x)$. Par conséquent, l'algèbre est une algèbre n-aire de Nambu-Poisson.

2.2 Mécanique de Nambu

Nambu a proposé sa généralisation de la mécanique hamiltonienne [36] en ayant à l'esprit une généralisation des équations de Hamilton de mouvement qui permet la formulation d'une mécanique statistique sur $\mathbb{R}^3$. Il a souligné que la seule caractéristique de la mécanique hamiltonienne que l'on doit conserver à cet effet, est la validité du théorème de Liouville. Dans cet esprit, il a considéré l'équation de mouvement suivante :

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \nabla g(\overrightarrow{r}) \wedge \nabla h(\overrightarrow{r}),\ \overrightarrow{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \tag{2.4}$$

où x, y, z sont les variables dynamiques et g, h sont des fonctions de $\overrightarrow{r}$. Puis le théorème de Liouville découle directement de l'identité :

$$\nabla \cdot (\nabla g(\overrightarrow{r}) \wedge \nabla h(\overrightarrow{r})) = 0$$

qui nous dit que le champ de vitesse dans l'équation(2.4) est divergent. Comme une motivation physique pour Eq.(2.4), Nambu a montré que les équations d'Euler pour le moment cinétique d'un corps rigide peuvent être mises sous cette forme si les variables dynamiques sont considérées comme les composantes du vecteur de moment angulaire $\overrightarrow{L} = (L_x, L_y, L_z)$ et g et h sont considérées comme étant, respectivement, l'énergie cinétique totale et le carré du moment cinétique. En outre, il a remarqué que l'équation d'évolution pour une fonction f sur $\mathbb{R}^3$ induite par l'équation du mouvement (2.4) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)} \tag{2.5}$$

où le terme à droite est la jacobienne de (f, g, h) par rapport à (x, y, z). Cette expression a été facilement généralisée à n fonctions sur $\mathbb{R}^n$. Le Jacobien peut être interprété comme une généralisation du crochet de Poisson : il est antisymétrique par rapport à f, g et h et la dérivation de l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{R}^3$, c'est à dire, la règle de Leibniz est vérifiée pour chaque argument. Il y a donc une complète analogie avec la formulation du crochet de Poisson d'équations de Hamilton, sauf, à première vue, pour l'équivalent de l'identité de Jacobi, qui semble faire défaut. En fait, dans la formulation de Poisson habituelle, l'identité de Jacobi est la forme infinitésimale du théorème de Poisson qui précise que le crochet de deux intégrales du mouvement est aussi une intégrale du mouvement. Si nous voulons un théorème similaire pour la Mécanique de Nambu il doit y avoir une forme infinitésimale qui fournira une généralisation de l'identité de Jacobi. Notons par $\{f, g, h\}$ le Jacobien apparaissant dans l'équation (2.5). Soit $\phi_t : \overrightarrow{r} \mapsto \phi_t(\overrightarrow{r})$ le flux de l'équation (2.4) . Puis une généralisation du théorème de Poisson qui impliquerait que ϕ_t est une "transformation canonique" pour le crochet généralisé :

$$\{f_1 \circ \phi_t, f_2 \circ \phi_t, f_3 \circ \phi_t\} = \{f_1, f_2, f_3\} \circ \phi_t$$

La différenciation de cette égalité par rapport à t donne la généralisation souhaitée de l'identité de Jacobi

$$\{\{g,h,f_1\},f_2,f_3\} + \{f_1,\{g,h,f_2\}\} + \{f_1,f_2,\{g,h,f_3\}\} \\ = \{g,h,\{f_1,f_2,f_3\}\}, \forall g,h,f_1,f_2,f_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

Cette idéntité et sa génaralisation dans $\mathbb{R}^n$, appelée identité fondamentale (IF), a été introduite par Flato, Fronsdal et Takhtajan[42] comme une condition de cohérence pour la mécanique de Nambu (cette condition de cohérence a également été formulée dans[38]) et déduite du théorème généralisé de Poisson : le crochet généralisé de n intégrales de mouvement est aussi une partie intégrante du mouvement. Il s'avère que la jacobienne sur $\mathbb{R}^n$ satisfait l'IF. On est donc amener à la généralisation suivante.

2.3 Variétés algébriques de Nambu-Poisson

Le concept de variété de Nambu-Poisson a été introduit par Takhtajan [42]. Takhtajan a remarqué que le crochet canonique de Nambu est n-linéaire, antisymétrique et satisfait l'identité de Jacobi généralisée. Un exemple intéressant a été fourni par Filippov [22]. Les structures de Poisson ternaires sont en particulier des algèbres de Nambu-Lie ternaires avec un crochet ternaire compatible avec la multiplication.

Soit M une variété C^∞ de dimension m. Notons A l'algèbre des fonctions réelles de M. $\mathrm{S_n}$ représente le groupe de permutations de l'ensemble $\{1,...,N\}$. Nous notons par $\epsilon(s)$ le signe de la permutation $\sigma \in \mathrm{S_n}$

Rappelons qu'un crochet de Nambu-Poisson d'ordre n $(2 \leq n \leq m)$ sur M est défini par une application n-linéaire à valeurs dans A

$$\{.,...,.\} : A^n \to A,$$

tel que les relations suivantes sont vérifiées $\forall f_0,...,f_{2n-1} \in A$:

a) Antisymétrie

$$\{f_1,...,f_n\} = \epsilon(\sigma)\{f_{\sigma_1},...,f_{\sigma_n}\}, \forall \sigma \in \mathcal{S}_\backslash;$$

b) la règle de Leibniz

$$\{f_0f_1,f_2,...,f_n\} = f_0\{f_1,f_2,...,f_n\} + \{f_0,f_2,...,f_n\}f_1; \tag{2.6}$$

c) l'identité fondamentale

$$\begin{aligned}\{f_1,...,f_{n-1},\{f_n,...,f_{2n-1}\}\} \\ = \{\{f_1,...,f_{n-1},f_n\},f_{n+1},...,f_{2n-1}\} \\ + \{f_n,\{f_1,...,f_{n-1},f_{n+1}\},f_{n+2},...,f_{2n-1}\} \\ + ... + \{f_n,f_{n+1},...,f_{2n-2},\{f_1,...,f_{n-1},f_{2n-1}\}\}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Les propriétés $a)$ et $b)$ impliquent qu'il existe un n-champ de vecteur η sur M tel que :

$$\{f_1,...,f_n\} = \eta(df_1,...,df_n), \forall f_1,...,f_n \in A. \tag{2.8}$$

Bien entendu, L'identité fondamentale impose des contraintes sur η, analysées dans [42]. Un n-champ de vecteur sur M est appelé un tenseur de Nambu, si son crochet de Nambu associé défini par l'équation (2.8) satisfait l'IF cela nous amène à

Définition 2.3 *Une variété de Nambu-Poisson (M, η) est une variété M sur laquelle est défini un tenseur de Nambu η. Alors M est munie d'une structure de Nambu-Poisson.*

La dynamique associée à un crochet de Nambu sur M est défini par $n-1$ Hamiltoniens $H_1, ..., H_{n-1} \in A$ et l'évolution temporelle de $f \in A$ est donnée par :

$$\frac{df}{dt} = H_1, ..., H_{n-1}, f. \tag{2.9}$$

Supposons que le flux $\phi(t)$ associé à l'équation (2.9) existe et soit U_t le le groupe à un paramètre agissant sur A par $f \to U_t(f) = f \circ \phi_t$. Il résulte de l'IF que :

Théorème 2.1 *Le groupe à un paramètre U_t est un automorphisme pour le crochet de Nambu sur l'algèbre A.*

Définition 2.4 *$f \in A$ est appelée une intégrale du mouvement pour le système défini par l'équation* (2.9) *si elle satisfait $\{H_1, ..., H_{n-1}, f\} = 0$.*

Il résulte de l'IF qu'un théorème semblable de Poisson existe pour les variétés de Nambu-Poisson :

Théorème 2.2 *Le crochet de Nambu de n intégrales du mouvement est aussi une partie intégrante du mouvement.*

Pour le cas $n = 2$, l'IF est l'identité de Jacobi et on récupère la définition habituelle d'une Variété de Poisson. Sur $\mathbb{R}^2$, Le crochet de Poisson canonique de deux fonctions $P(f, g)$ est tout simplement leur Jacobien et Nambu a défini son crochet sur $\mathbb{R}^n$ comme un jacobien de n fonctions $f_1, ..., f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ de n variables $x_1, ..., x_n$:

$$\{f_1, ..., f_n\} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_\backslash} \epsilon(\sigma) \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma_1}} ... \frac{\partial f_n}{\partial x_{\sigma_n}}, \tag{2.10}$$

qui donne le crochet de Nambu canonique d'ordre n sur $\mathbb{R}^n$. D'autres exemples de Structures de Nambu-Poisson ont été trouvés dans [15]. L'une d'eux est une généralisation des structures linéaires de Poisson et est donnée par le crochet de Nambu suivant d'ordre n sur $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\{f_1, ..., f_n\} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}} \epsilon(\sigma) \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma_1}} ... \frac{\partial f_n}{\partial x_{\sigma_n}} x_{\sigma_{n+1}}, \tag{2.11}$$

En général, toute variété munie d'une structure de Nambu-Poisson d'ordre n est localement feuilletée par les variétés de Nambu-Poisson de dimension n munie d'une structure de Nambu-Poisson canonique [25]. En particulier, il est montré dans [25] que tout tenseur de Nambu est décomposable (ce fait, a été conjecturé par Takhtajan [42], a finalement été découvert comme une conséquence d'un vieux résultat [44] reproduit dans un manuel par Schouten [39] Chap. II sect. 4 et 6, la formule (6.7)).

2.4 Quantification par déformation

C'est un point de vue développé par Moshé Flato et ses collaborateurs dans un article fondateur de 1977 [13]. La piste explorée consiste à voir la mécanique quantique comme une déformation de la mécanique classique, le groupe de Lorentz est une déformation du groupe de Galilée ou inversement le groupe de Galilée est une contraction du groupe de Lorentz. Bien que la notion de perturbation soit bien connue des physiciens, cette interprétation ne s'est développée que tardivement, la connaissance de la cohomologie a permis peut être d'avoir des résultats substantiels.
La quantification des variétés de Poisson a été établie par Kontsevich. Néanmoins, la recherche de formules exactes pour une structure de Poisson donnée est un autre problème tout aussi intéressant. On connait de nombreux exemples de formules explicites du star-produit, le plus connu est le produit de Moyal quantifiant la structure de Poisson donnée par la structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^2$. Un autre exemple est la quantification standard du crochet de Kirillov-Kostant-Souriau sur l'espace dual g^* d'une algèbre de Lie g (Gutt, 1983).
Dans la suite, on rappelle la notion de star-produit associée à une structure de Poisson, ainsi que le théorème de Kontsevich qui en assure l'existance dans le cas général.
Dans la théorie de quantification par déformation (voir [13]), on considère des déformations formelles particulières d'une algèbre associative et commutative :

Le premier problème de quantification par déformation consiste à montrer l'existence et l'unicité pour une variété de Poisson donnée. Ce problème se décline en un problème local qui consiste à construire un star-produit correspondant à une structure de Poisson sur un voisinage de l'origine d'un espace vectoriel de dimension finie, ensuite en un problème global où on cherche à recoller les star-produits données sur des ouverts réalisant un recouvrement de la variété.
Dans le cas des variétés symplectiques, le théorème de Darboux permet de les voir localement comme l'espace tangent $T\mathbb{R}^n$ muni de la structure symplectique canonique, L'espace $T\mathbb{R}^n$ admet le star-produit de Moyal-Weyl. Le problème de globalisation a été résolu par De-Wilde et Lecompte en 1983 et par Fedosov en 1985 en donnant une preuve géométrique. La correspondance entre les classes d'équivalence de star-produits et les classes d'équivalence des déformations d'une structure de Poisson donnée a été établie dans les travaux de Nest-Tsygan, Deligne, Bertelsson-Cahen-Gutt. Le résultat général pour les variétés de Poisson est dû à Kontsevich.

Théorème 2.3 *(Kontsevich). Toute structure de Poisson complexe admet un star produit.*

Nous présentons ici un très bref aperçu de la quantification par déformation et le star-produit (voir aussi [12]). Soit M une variété de Poisson, on note par A l'algèbre des fonctions C^∞ de M et par $P(f,g)$ le crochet de Poisson de $f,g \in A$. Soit $A[[\nu]]$ l'espace des séries formelles dans le paramètre ν et à coefficients dans A. $*_\nu$-Le produit sur M est une déformation associative (généralement non abélienne) du produit usuel de l'algèbre A définie sur A par :

Définition 2.5 *Un $*_\nu$-produit sur M est une application bilinéaire $(f,g) \mapsto f *_\nu g$ de $A \times A$ sur $A[[\nu]]$, définie par :*

$$f *_\nu g = \sum_{r \geq 0} \nu^r C_r(f,g), \forall f,g \in A$$

où $C_0(f,g) = fg$, $f,g \in A$, et $C_r : A \times A \to A$ $(r \geq 1)$ sont des opérateurs bidifférentiable (opérateurs bipseudodifferentiables peuvent parfois être considérés) sur A satisfont :

a) $C_r(f,c) = C_r(c,f) = 0$, $r \geq 1$, $c \in \mathbb{R}$, $f \in A$;

b) $C_1(f,g) - C_1(g,f) = 2P(f,g)$, $f,g \in A$;

c) $\sum_{r+s=tr,s\geq 0} C_r(C_s(f,g),h) = \sum_{r+s=tr,s\geq 0} C_r(f,C_s(g,h))$,
$\forall t \geq 0$, $f,g,h \in A$.

Par linéarité, $*_\nu$ se prolonge à $A[[\nu]] \times A[[\nu]]$. La condition a) veille à ce que $c *_\nu f = f *_\nu c = cf, c \in \mathbb{R}$ (et peut être omis, dans le cas où un produit star équivalent le vérifiera). La condition c) est équivalente à la condition d'associativité $(f *_\nu g) *_\nu h = f *_\nu (g *_\nu h)$. La condition b) implique que le crochet star

$$[f,g]_{*_\nu} \equiv (f *_\nu g - g *_\nu f)/2\nu,$$

est une déformation d'algèbre de Poisson-Lie sur M. Ainsi le produit star sur M déforme à la fois les deux structures classiques sur A, i.e. l'algèbre abélienne associative pour le produit point par point des fonctions et la structure d'algèbre de Lie donnée par le crochet de Poisson. Cela conduit à :

Définition 2.6 *Une quantification par déformation d'une variété de Poisson (M,P) est un star-produit sur M.*

Définition 2.7 *Deux star-produits $*$ et $*'$ sont dits équivalents s'il existe une application T : $A[[\nu]] \to A[[\nu]]$ ayant la forme :*

$$T = \sum_{r \geq 0} \nu^r T_r,$$

où $T_r (r \geq 1)$ sont des opérateurs différentiels qui s'annulent sur les constantes et $T_0 = Id$, tel que

$$Tf * Tg = T(f *' g), \forall f,g \in A[[\nu]].$$

Remarque 2.1 *Un star-produit qui est équivalent au produit point par point des fonctions est dit trivial.*

Pour les applications en physiques, le paramètre de déformation ν est pris égal à $i\hbar/2$. Sur $\mathbb{R}^{2n}$ l'exemple de base d'un star-produit est le produit de Moyal définie par :

$$f *_M g = exp(\frac{i\hbar}{2}\mathcal{P})(f,g). \tag{2.12}$$

Il correspond à l'ordre de Weyl des opérateurs (symétrique totale) en mécanique quantique. Sur $\mathbb{R}^{2n}$ muni de son crochet de Poisson canonique, d'autres ordres peuvent être considérés et ils correspondent aux star-produits équivalents au produit de Moyal. Par exemple, le produit star classique (qui est l'exponentielle de "la moitié du crochet de Poisson" dans les variables $p \pm iq$) qui est équivalent au produit de Moyal. A partir de maintenant, nous considérons implicitement $\nu = i\hbar/2$. Une donnée hamiltonienne $H \in A$ détermine l'évolution temporelle d'une observable $f \in A$ par l'équation de Heisenberg :

$$\frac{df_t}{dt} = [H, f_t]_{*_\nu} \tag{2.13}$$

correspondante à un paramètre du groupe de l'évolution temporelle associé à l'équation (2.13) est donnée par l'exponentielle star définie par :

$$exp_*(\frac{tH}{i\hbar}) \equiv \sum_{r\geq 0} \frac{1}{r!}(\frac{t}{i\hbar})^r(*H)^r, \tag{2.14}$$

où $(*H)^r = H * ... * H$ (r facteurs). Alors la solution de l'équation (2.13) peut être exprimée comme :

$$f_t = exp_*(\frac{tH}{i\hbar}) * f * exp_*(\frac{-tH}{i\hbar})$$

Dans de nombreux exemples, l'exponentielle star est convergent comme une série dans la variable t dans certains intervalles ($|t| < p$ pour l'oscillateur harmonique dans le cas de Moyal) et converge comme une distribution sur M pour t fixe. Alors il est logique d'envisager un développement de Fourier-Dirichlet de l'exponentielle star

$$exp_*(\frac{tH}{i\hbar})(x) = \int exp(\frac{\lambda t}{i\hbar})d\mu(x;\lambda), x \in M, \tag{2.15}$$

la "mesure" μ étant interprétée comme la transformée de Fourier (dans le sens de distribution) de l'exponentielle star de la variable t. L'équation (2.15) permet de définir le spectre de l'Hamiltonien H comme le crochet de la mesure μ. Dans le cas discret où

$$exp(\frac{tH}{i\hbar})(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} exp(\frac{\lambda t}{i\hbar})\Pi_\lambda(x), x \in M,$$

les fonctions Π_λ sur M sont interprétées comme des états propres de H associés aux valeurs propres λ, et satisfont

$$H * \Pi_\lambda = \Pi_\lambda * H = \lambda\Pi_\lambda, \Pi_\lambda * \Pi_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \sum_{\lambda\in\Lambda} \Pi_\lambda = 1.$$

Dans le cas Moyal, l'intégrale du chemin de Feynman peut être exprimée [40] comme la transformée de Fourier sur l'espace des impulsions de l'exponentielle star. Dans la théorie des corps, où le produit star classique est pertinent, l'intégrale de chemin de Feynman est donnée (jusqu'à un facteur multiplicatif) [20] par l'exponentielle star.
De ce qui précède, il doit être clair que la quantification par déformation fournit un schéma de quantification totalement autonome d'un système hamiltonien classique et nous allons l'utiliser pour la quantification des structures de Nambu-Poisson.

2.5 Quantification de la mécanique de Nambu (Quantification de Zariski)

2.5.1 Produit de Zariski

Le point de départ est une simple remarque : le jacobien de n fonctions sur $\mathbb{R}^n$ est un crochet de Nambu parce que le produit usuel des fonctions est abélien, associative, distributive et respecte la règle de Leibniz. C'est ce qui permet de travailler sur le déterminant fonctionnel et les propriétés requises d'un crochet de Nambu (y compris l'identité fondamentale) seront satisfaites. Par conséquent, si on remplace le produit usuel dans la jacobienne par un nouveau produit ayant les propriétés précédentes, on obtient une "modification jacobienne" qui est aussi un crochet de Nambu dans le sens de la définition 2.3.

2.5.2 Déformation de la loi du produit usuel

On commence avec $N = \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ et considérer $S(N) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} N_{\otimes}^{n}$, son algèbre tensorielle symétrique sans scalaire (une sorte d'espace de Fock sur N). On désigne par N_1 le semi-groupe des polynômes normalisés, ceux pour lesquels le monôme maximal (le total du plus haut degré alors le maximal e par rapport à l'ordre lexicographique des variables (x_1, x_2, x_3) à coefficient 1, avec la convention $0 \in N_1$. Dans $N[\nu]$ on considère de même, le semi-groupe (sous le produit usuel) N_1^{ν} des polynômes normalisés, ceux pour lesquels le coefficient de non-disparition de plus bas degré dans ν appartient à N_1.
On définit une application $\alpha : N_1^{\nu} \to S(N)$ par $\alpha(P) = P_1 \otimes ... \otimes P_n$ où $P_1 \cdots P_n$ est la décomposition en facteurs irréductibles du coefficient de degré 0 dans ν de $P \in N_1^{\nu}$ et $\otimes$ désigne le produit tensoriel symétrique.
Afin d'obtenir la construction de quantification on utilise maintenant une application d'évolution

$$T : S(N) \to N[v] \tag{2.16}$$

définie par le remplacement du produit tensoriel symétrique par un produit symétrisé de Moyal. Le résultat de tout ceci est :

$$T(\alpha(P)) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} P_{\sigma_1} * ... * P_{\sigma_n}. \tag{2.17}$$

Le produit (2.5.2) est une application de $N_1^{\nu} \times N_1^{\nu} \to N_1^{\nu}$ et si $P, Q \in N_1$, alors
$P \times_{\alpha} Q|_{\nu=0} = PQ$. Dans ce sens, $\times_{\alpha}$ est une déformation généralisée du produit usuel sur le semi-groupe N_1, mais c'est loin d'être une DRG-déformation (Gerstenhaber deformation of an algebra) de l'algèbre de N. On a seulement une déformation abélienne de la loi du semi-groupe, et si on remplace cette loi dans la jacobienne alors la règle de Leibniz et l'identité fondamentale ne seront plus satisfaites. Ce qui manque est la distributivité de $\times_{\alpha}$ par rapport à l'addition. En fait, il s'ensuit à partir des résultats généraux de la cohomologie d'Harrison que DRG-déformations abéliennes des algèbres de polynômes sont triviales. Pour surmonter cette difficulté et de restaurer la distributivité ils utilisent une astuce inspiré par la procédure de seconde quantification [21]. L'approche utilise les fonctions

sur N_1 (par exemple des séries formelles). Intuitivement, ils ont obtenu un co-produit déformé et sur le dual de cet espace de fonction (polynômes sur les polynômes) nous aurons un produit et un produit déformé, il sera distributive par rapport à l'addition d'espace vectoriel. Le produit des polynômes est encore un polynôme. Donc à la fin ils obtiennent certains produits déformés sur une algèbre engendrée par les polynômes.

2.5.3 L'algèbre de Zariski et ses déformations

L'algèbre de "Zariski" engendrée par les polynômes n'est autre que l'algèbre Z_0 du semi-groupe N_1. C'est à dire l'algèbre abélienne libre engendrée par l'ensemble des polynômes réels normalisés irréductibles. $N_1^{irr} \subset N_1$ comme éléments de base.
Si on désigne par Z_u l'élement de Z_0 défini par $u \in N_1$, le produit classique de Zariski $\bullet^z$ dans Z_0 est donné par

$$Z_u \bullet^z Z_v = Z_{uv}, u, v \in N_1 \qquad (2.18)$$

définissant $Z_{cu} = cZ_u$ pour $c \in \mathbb{R}$, nous pouvons étendre le produit cidessus à tous les $u \in N$ et obtenir une injection multiplicative de N en Z_0 qui est non additif, c'est à dire : $Z_{u+v} \neq Z_u + Z_v$ (l'addition dans Z_0 n'est pas liée à l'addition dans N). C'est l'algèbre Z_0 qui va être quantifiée. Ils ont considéré l'espace $Z_\nu = Z_0[\nu]$ des polynômes dans ν à coefficients dans Z_0 et injecter N_1^ν dans Z_ν par $\zeta : (\sum_{r\geq 0} \nu^r u_r) \mapsto (\sum_{r\geq 0} \nu^r Z_{u_r})$ avec $u_0 \in N_1$ et $u_i \in N$, $i \geq 1$. En utilisant cette injection, on peut définir un produit déformée de Zariski $\bullet^z_\nu$ basé sur $\times_\alpha$ premièrement dans les éléments de base Z_u, $u = u_1 ... u_m$, $u_j \in N_1^{irr}$, $j = 1, ..., m$, et Z_v, par $Z_u \bullet^z_\nu Z_v = \zeta(u) \times_\alpha v$ puis ils ont prolongé par linéarité à tout l'ensemble de Z_v en tenant compte de l'exigence que le produit $\bullet^z_\nu$ annule les puissances non nuls de ν :

$$(\sum_{r\geq 0} \nu^r A_r) \bullet^z_\nu (\sum_{s\geq 0} \nu^s B_s) = A_0 \bullet^z_\nu B_0, \forall A_r, B_s \in Z_0, r, s \geq 0. \qquad (2.19)$$

Le produit $\bullet^z_\nu$ est évidement associatif (car $\times_\alpha$ l'est), distributif par rapport à l'addition dans Z_ν et abélien. Sa limite pour $\nu = 0$ est $\bullet^z$. Il s'agit de la première étape

Théorème 2.4 *L'espace vectoriel Z_ν muni du produit $\bullet^z_\nu$ est une algèbre abélienne qui est une déformation (généralisée) de l'algèbre abélienne $(Z_0, \bullet^z)$*

l'étape suivante est de déformer le crochet de Nambu sur $\mathbb{R}^3$, de définir les dérivées δ_i,$1 \leq i \leq 3$, sur Z_0 et de les prolonger à Z_ν. Cela permettrait de définir d'abord le crochet classique de Nambu sur Z_0. Comme la dérivée usuelle par rapport à x^i, définie comme suit $\delta_i Z_u = Z_{\delta_i u}, \forall u \in N$ ne satisfait pas la règle de Leibniz, alors ils ont utilisé cette dérivée pour les polynômes irréductibles $u \in N_1^{irr}$ et postulant la règle de Leibniz sur le produit $v = v_1 v_2 \cdots v_m$ des polynômes irréductibles :

$$\delta_i Z_{v_1 v_2 \cdots v_m} = Z_{(\delta_i v_1) v_2 \cdots v_m} + Z_{v_1 (\delta_i v_2) \cdots v_m} + ... + Z_{v_1 v_2 \cdots (\delta_i v_m)}$$

Les applications δ_i sont des dérivations sur l'algèbre Z_0, mais qui ne sont pas commutatives i.e. : la propriété de frobenius n'est pas vérifiée, cela vient du fait que lorsque l'on prend les dérivées d'un polynôme irréductible u les polynômes $\delta_i u$, $1 \leq i \leq 3$ ne sont pas nécessairement à factoriser au même nombres de facteurs. Une conséquence de ce fait est : si l'on définit le crochet classique de Nambu sur Z_0 par le remplacement dans la jacobienne le produit usuel $\bullet_Z$ et les dérivées usuelles partielles par les applications δ_i, ce nouveau crochet ne satisfera pas l'IF, il y'aura des anomalies dans l'IF. Pour cela, nous devons étendre l'algèbre sur laquelle sera défini le crochet de Nambu classique. Cette algèbre des polynômes consistera en une série de Taylor dans les variables (y^1, y^2, y^3) notée par $\varepsilon = Z_0[y^1, y^2, y^3]$ à coefficients dans Z_0. Les translations $x \mapsto u(x+y)$ peuvent maintenant être écrites comme suit :

$$u(x+y) = u(x) + \sum_i y^i \partial_i u(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} y^i y^j \partial_{ij} u(x) + ...,$$

Ces polynômes translatés sont multipliés par $(uv)(x+y) = u(x+y)v(x+y)$, ils sont regardé plutôt comme des séries de Taylor dans ε, pour $u \in N_1$:

$$J(Z_u) = Z_u + \sum_i y^i Z_{\partial_i u} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} y^i y^j Z_{\partial_{ij} u} + ... \tag{2.20}$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} (\sum_i y^i \partial_i)^n (Z_u), \tag{2.21}$$

où $\partial_i u, \partial_{ij} u, etc$ sont des dérivées usuelles de $u \in N_1 \subset N$ par rapport aux variables x^i et x^j, etc., $\partial_i Z_u \equiv Z_{\partial_i u}$ et depuis, en général les dérivées de $u \in N_1$ sont dans N, l'un doit se factoriser en tenant compte des constantes appropriées dans $Z_{\partial_i u}$, $Z_{\partial_{ij} u}$, etc.(i.e :$Z_{\lambda u} \equiv \lambda Z_u$, $u \in N_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

J définit une application additive de Z_0 vers ε (pour dire que J est multiplicatif équivalent à la propriété de Leibniz).
Soit l'algèbre A_0 la sous-algèbre de ε engendrée par des éléments de la forme (2.20). On désigne par $\bullet$ le produit dans A_0 qui est naturellement induit par le produit dans ε. Dans le but de définir la structure de Nambu-Poisson (classique) sur A_0, on note la dérivée $\partial_i u(x) + \sum_j y^j \partial_{ij} u(x) + ...$ On doit ainsi définir la dérivée Δ_a, $1 \leq a \leq 3$, d'un élément de la forme (2.20) par l'extension naturelle vers A_0 de la définition précédente "triviale", i.e :

$$\Delta_a(J(Z_u)) = J(Z_{\partial_a u}) = Z_{\partial_a u} + \sum_i y^i Z_{\partial_{a_i} u} + \frac{1}{2} \sum_i y^i y^j Z_{\partial_{a_{ij}} u} + ..., \tag{2.22}$$

pour $u \in N_1$, $1 \leq a \leq 3$. On peut regarder la définition de Δ_a comme la restriction au sous-ensemble des éléments de la forme $J(Z_u)$ de la dérivée formelle par rapport à y^a dans l'anneau $\varepsilon = Z_0[y^1, y^2, y^3]$. Puisque $\Delta_a(J(Z_u)) = J(Z_{\partial_a u})$, nous avons $\Delta_a(A_0) = A_0$ et on obtient une famille d'applications $\Delta_a : A_0 \rightarrow A_0$, $1 \leq a \leq 3$, la restriction à A_0 des dérivées par rapport à y^a, $1 \leq a \leq 3$, dans ε. On résume les propriétés de Δ_a dans ce qui suit :

Lemme 2.1 *L'application $\Delta_a : A_0 \rightarrow A_0$, $1 \leq a \leq 3$ définie par l'équation* (2.22) *constitue une famille de dérivées commutative (satisfaisant la régle de Leibniz) de l'algèbre A_0.*

La définition de dérivées sur A_0 conduit à la définition naturelle des crochets de Nambu-Poisson sur l'algèbre abélienne A_0 suivante.

Définition 2.8 *Le crochet classique de Nambu-Poisson sur l'application A_0 qui est trilinéaire prenant des valeurs dans A_0 donnée, $\forall A, B, C \in A_0$, par :*

$$(A, B, C) \mapsto [A, B, C]_\bullet \equiv \sum_{\sigma \in S_3} \epsilon(\sigma) \Delta_{\sigma_1} A \bullet \Delta_{\sigma_2} B \bullet \Delta_{\sigma_3} C \qquad (2.23)$$

Théorème 2.5 *Le crochet de Nambu-Poisson classique donné dans la définition 2.8, défini une structure de Nambu-Poisson sur A_0.*

Maintenant que nous avons une structure classique de Nambu-Poisson sur A_0, on construit une structure quantique de Nambu-Poisson par la définition d'une déformation abélienne généralisée $(A_\nu, \bullet_\nu)$ de $(A_0, \bullet)$.
La construction est basée sur l'application α introduite dans la section 2.5.2 et on prolonge la définition du produit $\bullet_\nu^Z$ défini dans la section 2.5.3 pour la structure de Nambu-Poisson sur A_0[21].
Soit $\varepsilon[\nu]$ l'algèbre des polynômes dans ν avec les coefficients dans ε. On considère le sous-espace de A_ν de $\varepsilon[\nu]$ composé des séries $\sum_{r \geq 0} \nu^r A_r$ pour lesquelles le coefficient A_0 est dans A_0.
Alors une application $\bullet_\nu : A_\nu \times A_\nu \to \varepsilon[\nu]$ est définie en prolongeant le produit $\bullet_\nu^Z$ défini précédemment, avec $u, v \in N_1$:

$$J(Z_u) \bullet_\nu J(Z_v) = Z_u \bullet_\nu^Z Z_v + \sum_i y^i (Z_{\partial_i u} \bullet_\nu^Z Z_v + Z_u \bullet_\nu^Z Z_{\partial_i v}) + ... \qquad (2.24)$$

Actuellement $\bullet_\nu$ défini un produit sur A_ν. En outre pour $A = \sum_{r \geq 0} \nu^r A_r$ et $B = \sum_{s \geq 0} \nu^s B_s$ dans A_ν, on a $A \bullet_\nu B = A_0 \bullet_\nu B_0$ et le coefficient de ν^0 de ce dernier est de la forme $A_0 \bullet B_0$ qui est dans A_0 car $A_0, B_0 \in A_0$. Cela montre que $\bullet_\nu$ est en fait un produit sur A_ν qui est abélien par définition. Finalement, pour $\nu = 0$ on a $A \bullet_\nu B|_{\nu=0} = A_0 \bullet B_0$. Par conséquent

Théorème 2.6 *L'espace vectoriel A_ν muni du produit $\bullet_\nu$ est une déformation (généralisée) de l'algèbre abélienne $(A_0, \bullet)$.*

Les dérivées Δ_a, $0 \leq a \leq 3$, sont naturellement prolongées à A_ν. Chaque élément $A \in A_\nu$ peut être écrit comme $A = \sum_I y^I A_I$ où $I = (i_1, ..., i_n)$ est un multi-indice et $A_I \in Z_\nu$. Alors, on a pour $A, B \in A_\nu$, $A \bullet_\nu B = \sum_{I,J} y^I y^J A_I \bullet_\nu^Z B_J$. Comme $(Z_\nu, \bullet_\nu^Z)$ est une algèbre abélienne et la dérivée Δ_a agit comme une dérivée formelle par rapport à y^a sur le produit $A \bullet_\nu B$, les propriétés usuelles (linéarité, Leibniz, Frobenius) d'une dérivée sont encore vérifiées sur A_ν et on peut définir le crochet de Nambu quantique sur A_ν.

Définition 2.9 *Le crochet quantique de Nambu sur A_ν est une application trilinéaire à valeurs dans A_ν définie par :$\forall A, B, C \in A_\nu$,*

$$(A, B, C) \mapsto [A, B, C]_{\bullet_\nu} \equiv \sum_{\sigma \in S_3} \epsilon(sigma) \Delta_{\sigma_1} A \bullet_\nu \Delta_{\sigma_2} B \bullet_\nu \Delta_{\sigma_3} C. \qquad (2.25)$$

Il est maintenant facile de montrer

Théorème 2.7 *Le crochet quantique de Nambu (2.25) confère à A_ν une structure de Nambu-Poisson, qui est une déformation de la structure classique de Nambu(généralisée) sur A_0.*

3 Algèbres non-commutatives ternaires de Nambu-Poisson et algèbres ternaires de Hom-Nambu-Poisson

Dans ce chapitre, on introduit les algèbres de Nambu-Poisson ternaires non nécessairement commutative ainsi que la version Hom de ces structures. On établit quelques propriétés et fournit des exemples.

3.1 Algèbres ternaires (non-commutatives) de Nambu-Poisson

On rappelle certaines définitions de base et notations. Dans la suite, A désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit $\mu : A \times A \to A$ une application bilinéaire, on note par $\mu^{op} : A^{\times 2} \to A$ l'application opposée, i.e., $\mu^{op} = \mu \circ \tau$ où $\tau : A^{\times 2} \to A^{\times 2}$ est un échangeur de deux variables. Une algèbre ternaire est donnée par le couple (A, m), où m est une opération ternaire dans A, qui est une application trilinéaire $m : A \times A \times A \to A$, que l'on note parfois par un crochet.

On introduit la notion d'algèbre ternaire (non-commutative) de Nambu-Poisson

Définition 3.1 *Une algèbre ternaire non-commutative de Nambu-Poisson est le triplet $(A, \mu, \{.,.,.\})$ où A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mu : A \times A \to A$ est une application bilinéaire et l'application trilinéaire $\{.,.,.\} : A \otimes A \otimes A \to A$ tel que*

1. *(A, μ) est une algèbre binaire associative,*
2. *$(A, \{.,.,.\})$ est une algèbre ternaire de Nambu-Lie,*
3. *la règle de Leibniz suivante*

$$\{x_1, x_2, \mu(x_3, x_4)\} = \mu(x_3, \{x_1, x_2, x_4\}) + \mu(\{x_1, x_2, x_3\}, x_4)$$

satisfaite pour $\forall\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in A$.

Une algèbre ternaire de Nambu-Poisson est une algèbre non-commutative ternaire de Nambu-Poisson $(A, \mu, \{.,.,.\})$ pour lequel μ est commutative, alors μ est commutative sauf indication contraire.

Pour une algèbre ternaire (non-commutative) de Nambu-Poisson, le crochet ternaire $\{.,.,.\}$ est appelé le crochet de Nambu-Poisson.
De même, une algèbre n-aire non-commutative de Nambu-Poisson est un triplet $(A, \mu, \{., \cdots, .\})$ où $(A, \{., \cdots, .\})$ définit une algèbre n-Lie qui satisfait la règle de Leibniz par rapport à μ.
Un morphisme d'une algèbre (non-commutative) ternaire de Nambu-Poisson est une application linéaire qui est un morphisme d'algèbre ternaire de Nambu-Lie et d'algèbre associative.

Exemple 3.1 *L'algèbre des polynômes de 3 variables x_1, x_2, x_3 munie de l'opération ternaire définie par le Jacobien fonctionnel*

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}, \tag{3.1}$$

est une algèbre ternaire de Nambu-Lie, et c'est une algèbres ternaire de Nambu-Poisson avec la multiplication usuelle des polynômes.

Exemple 3.2 *Soit $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ et x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$. Nous définissons les crochets ternaires par le jacobien fonctionel* (3.1), *alors $(C^\infty(\mathbb{R}^3), \{.,.,.\})$ est une algèbre ternaire de Nambu-Lie. De plus le crochet satisfait la règle de Leibniz : $\{fg, f_2, f_3\} = f\{g, f_2, f_3\} + \{f, f_2, f_3\}g$ où $f, g, f_2, f_3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ et la multiplication est bien la multiplication usuelle des fonctions tel que $fg(x) = f(x)g(x)$. Par conséquent, l'algèbre est une algèbre ternaire de Nambu-Poisson.*
Cette algèbre était déjà considérée en 1973 dans [36] comme une possibilité de prolonger le crochet de Poisson de la mécanique hamiltonienne standard aux crochets des trois fonctions définies par la jacobienne. Il est clair que le crochet de Nambu peut être généralisée en outre en Nambu-Poisson pour permettre un nombre arbitraire d'entrées.
En particulier, l'algèbre des polynômes de variables x_1, x_2, x_3 avec l'opération ternaire définie par la fonction Jacobienne dans (3.1), *est une algèbre ternaire de Nambu-Poisson.*

Remarque 3.1 *L'algèbre ternaire de Nambu-Lie en dimension n de l'exemple 3.1 ne possède pas une structure d'algèbre non-commutative de Nambu-Poisson, sauf celle donnée par une multiplication triviale.*

3.2 Le type Hom des algèbres ternaires (non-commutatives) de Nambu-Poisson

Dans cette section, on présente diverses structures algébriques de type Hom. La principale caractéristique des structures de Hom-algèbre est le fait que les identités classiques sont déformées par un endomorphisme et on retrouve la structure usuelle de l'algèbre quand l'endomorphisme est l'application identité.

Une Hom-algèbre (resp. Hom-algèbre ternaire) est un triplet (A, ν, α) où A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\nu : A \times A \to A$ une application bilinéaire (resp. une application trilinéaire $\nu : A \times A \times A \to A$) et $\alpha : A \to A$ est une application linéaire. Une Hom-algèbre (A, μ, α) est dite multiplicative si $\alpha \circ \mu = \mu \circ \alpha^{\otimes 2}$ et elle est commutative si $\mu = \mu^{op}$. Une Hom-algèbre ternaire (A, m, α) est dite multiplicative si $\alpha \circ m = m \circ \alpha^{\otimes 3}$. Les algèbres classiques (resp. algèbre ternaire) sont considérées comme des Hom-algèbres (resp. Hom-algèbre ternaire) avec l'identité comme twist. On utilisera souvent l'abréviation xy pour $\mu(x, y)$. Pour l'endomorphisme $\alpha : A \to A$, on note par α^n la composition de n copies de α, avec $\alpha^0 \equiv Id$.

Définition 3.2 *Une Hom-algèbre (A, μ, α) est une Hom-algèbre associative si elle satisfait la condition de Hom-associativité*

$$\mu(\alpha(x), \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), \alpha(z)) \text{ for all } x, y, z \in A.$$

Remarque 3.2 *On retrouve l'algèbre associative usuelle et la condition de l'associativité classique quand α est l'application identité.*

Définition 3.3 *[9] Une Hom-algèbre ternaire de Nambu est un triplet $(A, \{.,.,.\}, \widetilde{\alpha})$ où A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{.,.,.\} : A \times A \times A \to A$ une application ternaire et $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ une paire d'applications linéaires où $\alpha_1, \alpha_2 : A \to A$, vérifiant*

$$\begin{aligned} \{\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_2), \{x_3, x_4, x_5\}\} = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \alpha_1(x_4), \alpha_2(x_5)\} + \\ \{\alpha_1(x_3), \{x_1, x_2, x_4\}, \alpha_2(x_5)\} + \{\alpha_1(x_3), \alpha_2(x_4), \{x_1, x_2, x_5\}\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Cette dernière condition est appelée l'identité Hom-Nambu.

Plus généralement, les algèbres n-aires Hom-Nambu sont définies par des crochets n-aires et les applications $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$, vérifiant l'identité Hom-Nambu suivante

$$\begin{aligned} &\{\alpha_1(x_1), ..., \alpha_{n-1}(x_{n-1}), \{x_n, ..., x_{2n-1}\}\} \\ &= \sum_{i=n}^{2n-1} \{\alpha_1(x_n), ..., \alpha_{i-n}(x_{i-1}), \{x_1, ..., x_{n-1}, x_i\}, \alpha_{i-n+1}(x_{i+1}) ..., \alpha_{n-1}(x_{2n-1})\} \end{aligned}$$

pour tout $(x_1, ..., x_{2n-1}) \in A^{2n-1}$.

Remarque 3.3 *Une algèbre Hom-Nambu est une algèbre Hom-Nambu-Lie si les crochets vérivient l'antisymétrie.*

Nous introduisons maintenant la définition d'une algèbre non-commutative ternaire Hom-Nambu-Poisson dans sa forme générale, avec trois applications linéaires. Ensuite, nous allons discuter de la classe dans laquelle ces trois applications sont égales. Ce cas particulier convient pour fournir une construction par twist.

Définition 3.4 *Une algèbre ternaire non-commutative Hom-Nambu-Poisson est un triplet $(A, \mu, \beta, \{.,.,.\}, \widetilde{\alpha})$ où A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{.,.,.\} : A \times A \times A \to A$ est une opération ternaire, $\mu : A \times A \to A$ une opération binaire, une paire d'applications linéaires $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ où $\alpha_1, \alpha_2 : A \to A$, et une application linéaire $\beta : A \to A$ tel que :*

1. (A, μ, β) *est une algèbre binaire Hom-associative,*
2. $(A, \{.,.,.\}, \widetilde{\alpha})$ *est une algèbre ternaire Hom-Nambu-Lie,*
3. $\{\mu(x_1, x_2), \alpha_1(x_3), \alpha_2(x_4)\} = \mu(\beta(x_1), \{x_2, x_3, x_4\}) + \mu(\{x_1, x_3, x_4\}, \beta(x_2))$.

La dernière condition est appelée identité de Hom-Leibniz.

Quand, toutes les applications linéaires sont égales $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \beta$, *Nous référons à une algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson par le quadruple* $(A, \mu, \{.,.,.\}, \alpha)$.

Remarque 3.4 *Notons que* μ *n'est pas supposée être commutative. Lorsque* μ *est une multiplication commutative, alors* $(A, \mu, \beta, \{.,.,.\}, \widetilde{\alpha})$ *est dite algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson.*

On retrouve l'algèbre ternaire (non-commutative) de Nambu-Poisson classique quand $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = Id$.

De même, une algèbre n-aire non-commutative Hom-Nambu-Poisson est un 5*-uplet*

$(A, \mu, \beta, \{., \cdots, .\}, \widetilde{\alpha})$ *où* $(A, \{., \cdots, .\}, \widetilde{\alpha})$ *avec l'application linéaire* $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ *qui définit une algèbre n-aire Hom-Nambu-Lie satisfaisant la régle de Leibniz similaire par rapport à* (A, μ, β).

Dans la suite nous allons principalement s'intéresser à la classe des algèbres non-commutatives ternaires de Nambu-Poisson où $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \beta$.

Définition 3.5 *Soit* $(A, \mu, \{.,.,.\}, \alpha)$ *une algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson. Cette algèbre est multiplicative si*

$$\begin{aligned} \alpha(\{x_1, x_2, x_3\}) &= \{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \alpha(x_3)\}, \\ \alpha \circ \mu &= \mu \circ \alpha^{\otimes 2}. \end{aligned}$$

Si de plus α est bijective alors elle est dite régulière.

Définition 3.6 *Soit* $(A, \mu, \{.,.,.\}, \alpha)$ *et* $(A', \mu', \{.,.,.\}', \alpha')$ *deux algèbres ternaires (non-commutatives) Hom-Nambu-Poisson. Une application linéaire* $f : A \to A'$ *est un morphisme d'algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson s'il satisfait pour tout* $x_1, x_2, x_3 \in A$:

$$f(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}', \tag{3.3}$$

$$f \circ \mu = \mu' \circ f^{\otimes 2}, \tag{3.4}$$

$$f \circ \alpha = \alpha' \circ f. \tag{3.5}$$

Il est dit morphisme faible s'il satisfait les deux premières conditions.

3.3 Somme directe et produit tensoriel

Dans cette section, nous discutons la somme directe et le produit tensoriel d'algèbres ternaires (non-commutatives) Hom-Nambu-Poisson et d'algèbres symétriques totalement Hom-associative. Dans ce qui suit, nous définissons la somme directe de deux algèbres ternaires (non-commutatives) Hom-Nambu-Poisson.

Théorème 3.1 *Soient* $(A_1, \mu_1, \{.,.,.\}_1, \alpha_1)$ *et* $(A_2, \mu_2, \{.,.,.\}_2, \alpha_2)$ *deux algèbres ternaires (non-commutatives) Hom-Nambu-Poisson. Soit* $\mu_{A_1 \oplus A_2}$ *une application bilinéaire sur*

$A_1 \oplus A_2$ définie pour tout $x_1, y_1, z_1 \in A_1$ et $x_2, y_2, z_2 \in A_2$ par

$$\mu_{\mu_{A_1 \oplus A_2}}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \mu_1(x_1, y_1) + \mu_2(x_2, y_2),$$

$\{.,.,.\}_{A_1 \oplus A_2}$ une application trilinéaire définie par

$$\{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}_{A_1 \oplus A_2} = \{x_1, y_1, z_1\}_1 + \{x_2, y_2, z_2\}_2$$

et $\alpha_{A_1 \oplus A_2}$ une application linéaire définie par

$$\alpha_{A_1 \oplus A_2}(x_1 + x_2) = \alpha_1(x_1) + \alpha_2(x_2).$$

Alors

$$(A_1 \oplus A_2, \mu_{A_1 \oplus A_2}, \{.,.,.\}_{A_1 \oplus A_2}, \alpha_{A_1 \oplus A_2})$$

est une algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson.

Démonstration. La commutativité de $\mu_{A_1 \oplus A_2}$ est évidente puisque μ_1 et μ_2 sont commutatives. L'antisymétrie du crochet résulte de l'antisymétrie des crochets $\{.,.,.\}_1$ et $\{.,.,.\}_2$. Donc, il reste à vérifier la condition de la Hom-associativité, l'identité Hom-Nambu et l'identité Hom-Leibniz. Pour la condition de la Hom-associativité, nous avons

$$\begin{aligned}
&\mu_{A_1 \oplus A_2}(\mu_{A_1 \oplus A_2}(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2), \alpha_{A_1 \oplus A_2}(x_3 + x'_3)) \\
&= \mu_{A_1 \oplus A_2}(\mu_1(x_1, x_2) + \mu_2(x'_1, x'_2), \alpha_1(x_3) + \alpha_2(x'_3)) \\
&= \mu_1(\mu_1(x_1, x_2), \alpha_1(x_3)) + \mu_2(\mu_2(x'_1, x'_2), \alpha_2(x'_3)) \\
&= \mu_1(\alpha_1(x_1), \mu_1(x_2, x_3)) + \mu_2(\alpha_2(x'_1), \mu_2(x'_2, x'_3)) \\
&= \mu_{A_1 \oplus A_2}(\alpha_1(x_1) + \alpha_2(x'_1), \mu_1(x_2, x_3) + \mu_2(x'_2, x'_3)) \\
&= \mu_{A_1 \oplus A_2}(\alpha_{A_1 \oplus A_2}(x_1, x'_1), \mu_{A_1 \oplus A_2}(x_2 + x'_2, x_3 + x'_3)).
\end{aligned}$$

Maintenant, nous prouvons l'identité Hom-Nambu

$$\begin{aligned}
&\{\alpha_{A_1 \oplus A_2}(x_1 + x'_1), \alpha_{A_1 \oplus A_2}(x_2 + x'_2), \{x_3 + x'_3, x_4 + x'_4, x_5 + x'_5\}_{A_1 \oplus A_2}\}_{A_1 \oplus A_2} \\
&= \{\alpha_1(x_1) + \alpha_2(x'_1), \alpha_1(x_2) + \alpha_2(x'_2), \{x_3, x_4, x_5\}_1 + \{x'_3, x'_4, x'_5\}_2\}_{A_1 \oplus A_2} \\
&= \{\alpha_1(x_1), \alpha_1(x_2), \{x_3, x_4, x_5\}_1\}_1 + \{\alpha_2(x'_1), \alpha_2(x'_2), \{x'_3, x'_4, x'_5\}_2\}_2 \\
&= \{\{x_1, x_2, x_3\}_1, \alpha_1(x_4), \alpha_1(x_5)\}_1 + \{\alpha_1(x_3), \{x_1, x_2, x_4\}_1, \alpha_1(x_5)\}_1 \\
&+ \{\alpha_1(x_3), \alpha_1(x_4), \{x_1, x_2, x_5\}_1\}_1 + \{\{x'_1, x'_2, x'_3\}_2, \alpha_2(x'_4), \alpha_2(x'_5)\}_2 \\
&+ \{\alpha_2(x'_3), \{x'_1, x'_2, x'_4\}_2, \alpha_2(x'_5)\}_2 + \{\alpha_2(x'_3), \alpha_2(x'_4), \{x'_1, x'_2, x'_5\}_2\}_2 \\
&= \{\{x_1, x_2, x_3\}_1 + \{x'_1, x'_2, x'_3\}_2, \alpha_1(x_4) + \alpha_2(x'_4), \alpha_1(x_5) + \alpha_2(x'_5)\}_{A_1 \oplus A_2} \\
&+ \{\alpha_1(x_3) + \alpha_2(x'_3), \{x_1, x_2, x_4\}_1 + \{x'_1, x'_2, x'_4\}_2, \alpha_1(x_5) + \alpha_2(x'_5)\}_{A_1 \oplus A_2} \\
&+ \{\alpha_1(x_3) + \alpha_2(x'_3), \alpha_1(x_3) + \alpha_2(x'_3), \{x_1, x_2, x_5\}_1 + \{x'_1, x'_2, x'_5\}_2\}_{A_1 \oplus A_2} \\
&= \{\{x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3\}_{A_1 \oplus A_2}, \alpha_{A_1 \oplus A_2}(x_4 + x'_4), \alpha_{A_1 \oplus A_2}(x_5 + x'_5)\}_{A1 \oplus A_2} \\
&+ \{\alpha_{A_1 \oplus A_2}(x_3 + x'_3), \{x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_4 + x'_4\}_{A_1 \oplus A_2}, \alpha_{A_1 \oplus A_2}(x_5 + x'_5)\}_{A1 \oplus A_2} \\
&+ \{\alpha_{A_1 \oplus A_2}(x_3 + x'_3), \alpha_{A_1 \oplus A_2}(x_4 + x'_4), \{x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_5 + x'_5\}_{A_1 \oplus A_2}\}_{A_1 \oplus A_2}.
\end{aligned}$$

Enfin, pour l'identité Hom-Leibniz nous avons

$$\begin{aligned}
&\{\mu_{A_1\oplus A_2}(x_1+x_1',x_2+x_2'),\alpha_{A_1\oplus A_2}(x_3,x_3'),\alpha_{A_1+A_2}(x_4,x_4')\}_{A_1\oplus A_2}\\
&=\{\mu_1(x_1,x_2)+\mu_2(x_1',x_2'),\alpha_1(x_3)+\alpha_2(x_3'),\alpha_1(x_4)+\alpha_2(x_4')\}_{A_1\oplus A_2}\\
&=\{\mu_1(x_1,x_2),\alpha_1(x_3),\alpha_1(x_4)\}_1+\{\mu_2(x_1',x_2'),\alpha_2(x_3'),\alpha_2(x_4')\}_2\\
&=\mu_1(\alpha_1(x_1),\{x_2,x_3,x_4\}_1)+\mu_1(\{x_1,x_3,x_4\}_1,\alpha_1(x_2))\\
&+\mu_2(\alpha_2(x_1'),\{x_2',x_3',x_4'\}_2)+\mu_2(\{x_1',x_3',x_4'\}_2,\alpha_2(x_2'))\\
&=\mu_{A_1\oplus A_2}(\alpha_{A_1\oplus A_2}(x_1,x_1'),\{x_2+x_2',x_3+x_3',x_4+x_4'\}_{A_1\oplus A_2})\\
&+\mu_{A_1\oplus A_2}(\{x_1+x_1',x_3+x_3',x_4+x_4'\}_{A_1\oplus A_2},\alpha_{A_1\oplus A_2}(x_2,x_2')).
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. □

Proposition 3.1 *Soient $(A_1,\mu_1,\{.,.,.\}_1,\alpha_1)$ et $(A_2,\mu_2,\{.,.,.\}_2,\alpha_2)$ deux algèbres ternaires (non-commutatives) Hom-Nambu-Poisson. Une application linéaire $\phi : A_1\to A_2$ est un morphisme d'algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson si et seulement si $\Gamma_\phi\subseteq A_1\oplus A_2$ est une sous-algèbre Hom-Nambu-Poisson de*

$$(A_1\oplus A_2,\mu_{A_1\oplus A_2},\{.,.,.\}_{A_1\oplus A_2},\alpha_{A_1\oplus A_2})$$

où $\Gamma_\phi=\{(x,\phi(x)) : x\in A_1\}\subset A_1\oplus A_2$.

Démonstration. Soit $\phi : (A_1,\mu_1,\{.,.,.\}_1,\alpha_1)\to(A_2,\mu_2,\{.,.,.\}_2,\alpha_2)$ un morphisme d'algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson.
Nous avons

$$\begin{aligned}
\{x_1+\phi(x_1),x_2+\phi(x_2),x_3+\phi(x_3)\}_{A_1\oplus A_2}&=\{x_1,x_2,x_3\}_1+\{\phi(x_1),\phi(x_2),\phi(x_3)\}_2\\
&=\{x_1,x_2,x_3\}_1+\phi\{x_1,x_2,x_3\}_1.
\end{aligned}$$

Alors Γ_ϕ est stable par le crochet $\{.,.,.\}_{A_1\oplus A_2}$.
Nous avons aussi

$$(\alpha_1+\alpha_2)(x_1+\phi(x_1))=\alpha_1(x_1)+\alpha_2\circ\phi(x_1)=\alpha_1(x_1)+\phi\circ\alpha_1(x_1),$$

ce qui implique que $(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma_\phi\subseteq\Gamma_\phi$.
En outre, Γ_ϕ est stable pour la multiplication, en effet

$$\begin{aligned}
\mu_{A_1\oplus A_2}(x_1+\phi(x_1),x_2+\phi(x_2))&=\mu_1(x_1,x_2)+\mu_2(\phi(x_1),\phi(x_2))\\
&=\mu_1(x_1,x_2)+\phi\circ\mu_1(x_1,x_2)\subseteq\Gamma_\phi.
\end{aligned}$$

Inversement, si le graphe $\Gamma_\phi\subseteq A_1\oplus A_2$ est une Hom-sous-algèbre de

$$(A_1\oplus A_2,\mu_{A_1\oplus A_2},\{.,.,.\}_{A_1\oplus A_2},\alpha_{A_1\oplus A_2}),$$

alors nous avons

$$\{\phi(x_1),\phi(x_2),\phi(x_3)\}_2=\phi\{x_1,x_2,x_3\}_1,$$

et

$$\begin{aligned}
(\alpha_1+\alpha_2)(x+\phi(x))&=\alpha_1(x)+\alpha_2\circ\phi(x)\in\Gamma_\phi\\
&=\alpha_1(x)+\phi\circ\alpha_1(x).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\mu_{A_1\oplus A_2}(x_1+\phi(x_1),x_2+\phi(x_2)) &= \mu_1(x_1,x_2)+\mu_2(\phi(x_1),\phi(x_2))\\ &= \mu_1(x_1,x_2)+\phi\circ\mu_1(x_1,x_2)\subseteq\Gamma_\phi.\end{aligned}$$

Par conséquent ϕ est un morphisme d'algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson.

□

Maintenant, nous définissons le produit tensoriel de deux Hom-algèbres ternaires. En outre, nous considérons le produit tensoriel d'une algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson et d'une Hom-algèbre symétrique totalement associative.

Soit $A_1=(A,m,\alpha)$, où $\alpha=(\alpha_i)_{i=1,2}$ et $A_2=(A',m',\alpha')$ où $\alpha'=(\alpha'_i)_{i=1,2}$ deux Hom-algèbres ternaires (non-commutatives) d'un type donné, le produit tensoriel $A_1\otimes A_2$ est une Hom-algèbre ternaire définie par le triplet $(A\otimes A',m\otimes m',\alpha\otimes\alpha')$ où $\alpha\otimes\alpha'=(\alpha_i\otimes\alpha'_i)_{i=1,2}$ avec

$$m\otimes m'(x_1\otimes x'_1,x_2\otimes x'_2,x_3\otimes x'_3)=m(x_1,x_2,x_3)\otimes m'(x'_1,x'_2,x'_3), \tag{3.6}$$

$$\alpha_i\otimes\alpha'_i(x_1\otimes x'_1)=\alpha_i(x_1)\otimes\alpha'_i(x'_1), \tag{3.7}$$

où $x_1,x_2,x_3\in A_1$ et $x'_1,x'_2,x'_3\in A_2$.

Rappelons que (A,m,α) est une Hom-algèbre ternaire totallement associative si

$$\begin{aligned}m(\alpha_1(x_1),\alpha_2(x_2),m(x_3,x_4,x_5)) &= m(\alpha_1(x_1),m(x_2,x_3,x_4),\alpha_2(x_5))\\ &= m(m(x_1,x_2,x_3),\alpha_1(x_4),\alpha_2(x_5)).\end{aligned}$$

pour tout $x_1\cdots,x_5\in A$, et la multiplication ternaire m est symétrique si

$$m(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)})=m(x_1,x_2,x_3). \tag{3.8}$$

pour tout $\sigma\in S_3$, $x_1,x_2,x_3\in A$.

Lemme 3.1 *Soient $A_1=(A,m,\alpha)$ et $A_2=(A',m',\alpha')$ deux Hom-algèbres ternaires d'un type donné (Hom-Nambu, totallement Hom-associative). Si m est symétrique et m' est antisymétrique alors $m\otimes m'$ est antisymétrique.*

Démonstration. Simple. □

Théorème 3.2 *Soit $(A,\mu,\beta,\{.,.,.\},(\alpha_1,\alpha_2))$ une algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson, $(B,\tau,(\alpha'_1,\alpha'_2))$ une algèbre symétrique totallement Hom-associative, et (B,μ',β') une algèbre Hom-associative, Alors*

$$(A\otimes B,\mu\otimes\mu',\beta\otimes\beta',\{.,.,.\}_{A\otimes B},(\alpha_1\otimes\alpha'_1,\alpha_2\otimes\alpha'_2))$$

est une algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson si et seulement si

$$\tau(\mu'(b_1,b_2),b_3,b_4)=\mu'(b_1,\tau(b_2,b_3,b_4))=\mu'(\tau(b_1,b_3,b_4),b_2). \tag{3.9}$$

Démonstration. Comme μ et μ' sont des multiplications qui vérifient la condition de Hom-associativité alors le produit tensoriel $\mu \otimes \mu'$ est Hom-associative. De même la commutativité de $\mu \otimes \mu'$, l'antisymmétrie du crochet $\{.,.,.\}$ et la symétrie de τ implique l'antisymétrie de $\{.,.,.\}_{A\otimes B}$. Par conséquent, il reste à vérifier l'identité Hom-Nambu et l'identité Hom-Leibniz.

Nous avons

$$\begin{aligned}
LHS =&\{\alpha_1 \otimes \alpha'_1(a_1 \otimes b_1), \alpha_2 \otimes \alpha'_2(a_2 \otimes b_2), \{a_3 \otimes b_3, a_4 \otimes b_4, a_5 \otimes b_5\}_{A\otimes B}\}_{A\otimes B}\\
&= \{\alpha_1(a_1) \otimes \alpha'_1(b_1), \alpha_2(a_2) \otimes \alpha'_2(b_2), \{a_3, a_4, a_5\}_A \otimes \tau(b_3, b_4, b_5)\}_{A\otimes B}\\
&= \underbrace{\{\alpha_1(a_1), \alpha_2(a_2), \{a_3, a_4, a_5\}\}}_{a} \otimes \underbrace{\tau(\alpha'_1(b_1), \alpha'_2(b_2), \tau(b_3, b_4, b_5))}_{b},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
RHS =&\{\{a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, a_3 \otimes b_3\}_{A\otimes B}, \alpha_1 \otimes \alpha'_1(a_4 \otimes b_4), \alpha_2 \otimes \alpha'_2(a_5 \otimes b_5)\}_{A\otimes B}\\
&+ \{\alpha_1 \otimes \alpha'_1(a_3 \otimes b_3), \{a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, a_4 \otimes b_4\}_{A\otimes B}, \alpha_2 \otimes \alpha'_2(a_5 \otimes b_5)\}_{A\otimes B}\\
&+ \{\alpha_1 \otimes \alpha'_1(a_3 \otimes b_3), \alpha_2 \otimes \alpha'_2(a_4 \otimes b_4), \{a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, a_5 \otimes b_5\}_{A\otimes B}\}_{A\otimes B}\\
&= \{\{a_1, a_2, a_3\}_A \otimes \tau(b_1, b_2, b_3), \alpha_1(a_4) \otimes \alpha'_1(b_4), \alpha_2(a_5) \otimes \alpha'_2(b_5)\}_{A\otimes B}\\
&+ \{\alpha_1(a_3) \otimes \alpha'_1(b_3), \{a_1, a_2, a_4\}_A \otimes \tau(b_1, b_2, b_4), \alpha_2(a_5) \otimes \alpha'_2(b_5)\}_{A\otimes B}\\
&+ \{\alpha_1(a_3) \otimes \alpha'_1(b_3), \alpha_2(a_4) \otimes \alpha'_2(b_4), \{a_1, a_2, a_5\}_A \otimes \tau(b_1, b_2, b_5)\}_{A\otimes B}\\
&= \underbrace{\{\{a_1, a_2, a_3\}, \alpha_1(a_4), \alpha_2(a_5)\}}_{c} \otimes \underbrace{\tau(\tau(b_1, b_2, b_3), \alpha'_1(b_4), \alpha'_2(b_5))}_{d}\\
&+ \underbrace{\{\alpha_1(a_3), \{a_1, a_2, a_4\}, \alpha_2(a_5)\}}_{e} \otimes \underbrace{\tau(\alpha'_1(b_3), \tau(b_1, b_2, b_4), \alpha'_2(b_5))}_{f}\\
&+ \underbrace{\{\alpha_1(a_3), \alpha_2(a_4), \{a_1, a_2, a_5\}\}}_{g} \otimes \underbrace{\tau(\alpha'_1(b_3), \alpha'_2(b_4), \tau(b_1, b_2, b_5))}_{h}
\end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Nambu du crochet $\{.,.,.\}$ nous avons $a = c + e + g$, et $b = d = f = h$ en utilisant la symétrie de τ et la Hom-associativité de μ', alors le coté droit est égale au coté gauche d'où l'identité Hom-Nambu du crochet $\{.,.,.\}_{A\otimes B}$ est vérifiée.

Pour l'identité Hom-Leibniz, nous avons

$$\begin{aligned}
LHS =&\{\mu \otimes \mu'(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2), \alpha_1 \otimes \alpha'_1(a_3 \otimes b_3), \alpha_2 \otimes \alpha'_2(a_4 \otimes b_4)\}_{A\otimes B}\\
&= \{\mu(a_1, b_1) \otimes \mu'(a_2, b_2), \alpha_1(a_3) \otimes \alpha'_1(b_3), \alpha_2(a_4) \otimes \alpha'_2(b_4)\}_{A\otimes B}\\
&= \underbrace{\{\mu(a_1, b_1), \alpha_1(a_3), \alpha_2(a_4)\}_A}_{a'} \otimes \underbrace{\tau(\mu'(a_2, b_2), \alpha'_1(b_3), \alpha'_2(b_4))}_{b'}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
RHS =&\mu \otimes \mu'(\beta \otimes \beta'(a_1 \otimes b_1), \{a_2 \otimes b_2, a_3 \otimes b_3, a_4 \otimes b_4\}_{A\otimes B}) \\
&+ \mu \otimes \mu'(\{a_1 \otimes b_1, a_3 \otimes b_3, a_4 \otimes b_4\}_{A\otimes B}, \beta \otimes \beta'(a_2 \otimes b_2)) \\
&= \mu \otimes \mu'(\beta(a_1) \otimes \beta'(b_1), \{a_2, a_3, a_4\} \otimes \tau(b_2, b_3, b_4)) \\
&+ \mu \otimes \mu'(\{a_1, a_3, a_4\} \otimes \tau(b_1, b_3, b_4), \beta(a_2) \otimes \beta'(b_2)) \\
&= \underbrace{\mu(\beta(a_1), \{a_2, a_3, a_4\})}_{c'} \otimes \underbrace{\mu'(\beta'(b_1), \tau(b_2, b_3, b_4))}_{d'} \\
&+ \underbrace{\mu(\{a_1, a_3, a_4\}, \beta(a_2))}_{e'} \otimes \underbrace{\mu'(\tau(b_1, b_3, b_4), \beta'(b_2)}_{f'}.
\end{aligned}$$

avec l'identité Hom-Leibniz nous avons $a' = c' + e'$, et en utilisant (3.9) nous avons $b' = d' = f'$, donc le côté droit est égale au côté gauche et l'identité Hom-Leibniz est prouvée. Alors

$$(A \otimes B, \mu \otimes \mu', \beta \otimes \beta', \{.,.,.\}_{A\otimes B}, (\alpha_1 \otimes \alpha'_1, \alpha_2 \otimes \alpha'_2))$$

est une algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson.

□

3.4 Construction des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson

Dans cette section, nous fournissons les constructions des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson en utilisant le principe de twist.

Théorème 3.3 *Soit $(A, \mu, \{.,.,.\}, \alpha)$ une algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson et $\beta : A \to A$ un morphisme faible de Hom-Nambu-Poisson, alors $A_\beta = (A, \{.,.,.\}_\beta = \beta \circ \{.,.,.\}, \mu_\beta = \beta \circ \mu, \beta\alpha)$ est également une algèbre ternaire (non-commutative) de Hom-Nambu-Poisson. De plus, si A est multiplicative et β est un morphisme d'algèbre, alors A_β est une algèbre (non-commutative) de Hom-Nambu-Poisson multiplicative.*

Démonstration. Si μ est commutative, alors μ_β l'est aussi. Le reste de la preuve s'applique si μ est commutatif ou non. L'antisymétrie découle de l'antisymétrie du crochet $\{.,.,.\}$. Il reste à prouver la condition de Hom-associativité, l'identité de Hom-Nambu et l'identité Hom-Leibniz. En effet

$$\begin{aligned}
\mu_\beta(\mu_\beta(x,y), \beta\alpha(z)) = \mu_\beta(\beta(\mu(x,y), \beta\alpha(z))) &= \beta^2(\mu(\mu(x,y), \alpha(z))) \\
&= \beta^2(\mu(\alpha(x), \mu(y,z))) = \mu_\beta(\beta\alpha(x), \mu_\beta(y,z)).
\end{aligned}$$

Nous vérifions l'identité Hom-Nambu

$$\begin{aligned}
&\{\beta\alpha(x_1), \beta\alpha(x_2), \{x_3, x_4, x_5\}_\beta\}_\beta = \beta^2\{\alpha(x_1), \alpha(x_2), \{x_3, x_4, x_5\}\} \\
&= \beta^2(\{\{x_1, x_2, x_3\}, \alpha(x_4), \alpha(x_5)\} + \{\alpha(x_3), \{x_1, x_2, x_4\}, \alpha(x_5)\} \\
&\quad + \{\alpha(x_3), \alpha(x_4), \{x_1, x_2, x_5\}\}) \\
&= \{\{x_1, x_2, x_3\}_\beta, \beta\alpha(x_4), \beta\alpha(x_5)\}_\beta + \{\beta\alpha(x_3), \{x_1, x_2, x_4\}_\beta, \beta\alpha(x_5)\}_\beta \\
&\quad + \{\beta\alpha(x_3), \beta\alpha(x_4), \{x_1, x_2, x_5\}_\beta\}_\beta.
\end{aligned}$$

Ensuite, il reste à montrer l'identité Hom-Leibniz

$$\begin{aligned}&\{\mu_\beta(x_1,x_2),\beta\alpha(x_3),\beta\alpha(x_4)\}_\beta = \beta^2(\{\mu(x_1,x_2),\alpha(x_3),\alpha(x_4)\})\\&= \beta^2(\mu(\alpha(x_1),\{x_2,x_3,x_4\}) + \mu(\{x_1,x_3,x_4\},\alpha(x_2)))\\&= \mu_\beta(\beta\alpha(x_1),\{x_2,x_3,x_4\}_\beta) + \mu_\beta(\{x_1,x_3,x_4\}_\beta,\beta\alpha(x_2)).\end{aligned}$$

Donc $A_\beta = (A,\{.,.,.\}_\beta,\mu_\beta,\beta\alpha)$ est une algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson. Pour l'assertion de la multiplicativité, supposons que A est multiplicative et β est un morphisme d'algèbre. Nous avons

$$(\beta\alpha)\circ(\mu_\beta) = \beta\alpha\circ\beta\circ\mu = \mu_\beta\circ\alpha^{\otimes 2}\beta^{\otimes 2} = \mu_\beta\circ(\beta\alpha)^{\otimes 2},$$

et

$$\beta\alpha\circ\{.,.,.\}_\beta = \beta\alpha\circ\beta\circ\{.,.,.\} = \{.,.,.\}_\beta\circ(\beta\alpha)^{\otimes 3}.$$

Alors A_β est multiplicative.

□

Corollaire 3.1 *Soit $(A,\mu,\{.,.,.\},\alpha)$ une algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson multiplicative. Alors*

$$A^n = (A,\mu^{(n)} = \alpha^n\circ\mu,\{.,.,.\}^{(n)} = \alpha^{(n)}\circ\{.,.,.\},\alpha^{n+1})$$

est une algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson multiplicative pour tout entier $n \geq 0$.

Démonstration. La multiplicativité de A implique que $\alpha^n : A \to A$ est un morphisme d'algèbre de Nambu-Poisson. Par le Théorème 3.3 $A_{\alpha^n} = A^n$ est une algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson multiplicative. □

Corollaire 3.2 *Soit $(A,\mu,\{.,.,.\})$ une algèbre ternaire (non-commutative) Nambu-Poisson et $\beta : A \to A$ un morphisme d'algèbre de Nambu-Poisson. Alors*

$$A_\beta = (A,\mu_\beta = \beta\circ\mu,\{.,.,.\}_\beta = \beta\circ\{.,.,.\},\beta)$$

est une algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson multiplicative.

Remarque 3.5 *Soient $(A,\mu,\{.,.,.\},\alpha)$ et $(A',\mu',\{.,.,.\}',\alpha')$ deux algèbres ternaires (non-commutatives) de Nambu-Poisson et $\beta : A \to A$, $\beta' : A' \to A'$ des endomorphismes d'algèbres ternaires de Nambu-Poisson. Si $\varphi : A \to A'$ est un morphisme d'algèbre de Nambu-Poisson qui satsfait $\varphi\circ\beta = \beta'\circ\varphi$, alors*

$$\varphi : (A,\mu_\beta,\{.,.,.\}_\beta,\beta\alpha) \to (A',\mu'_{\beta'},\{.,.,.\}'_{\beta'},\beta'\alpha')$$

est un morphisme d'algèbre ternaire (non-commutative) Hom-Nambu-Poisson.

En effet, nous avons

$$\varphi\circ\{.,.,.\}_\beta = \varphi\circ\beta\circ\{.,.,.\} = \beta'\circ\varphi\circ\{.,.,.\} = \beta'\circ\{.,.,.\}'\circ\varphi^{\times 3} = \{.,.,.\}'_{\beta'}\circ\varphi^{\times 3}$$

et

$$\varphi \circ \mu_\beta = \varphi \circ \beta \circ \mu = \beta' \circ \varphi \circ \mu = \beta' \circ \mu' \circ \varphi^{\times 2} = \mu'_{\beta'} \circ \varphi^{\times 2}.$$

Dans la suite, nous allons construire la version Hom-type d'une algèbre ternaire de Nambu-Poisson des polynômes de trois variables $(\mathbb{R}[x,y,z], \cdot, \{.,.,.\})$, définie Dans l'exemple 3.2. Le crochet de Poisson de trois polynômes est défini dans (3.1).

La version twistée est donnée par la structure d'algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson $(\mathbb{R}[x,y,z], \cdot_\alpha = \alpha \circ \cdot, \{.,.,.\}_\alpha = \alpha \circ \{.,.,.\}, \alpha)$ où $\alpha : \mathbb{R}[x,y,z] \to \mathbb{R}[x,y,z]$ est un morphisme d'algèbre qui satisfait pour tout $f, g \in \mathbb{R}[x,y,z]$

$$\alpha(f \cdot g) = \alpha(f) \cdot \alpha(g)$$
$$\alpha\{f,g,h\} = \{\alpha(f), \alpha(g), \alpha(h)\}.$$

Théorème 3.4 *Un morphisme $\alpha : \mathbb{R}[x,y,z] \to \mathbb{R}[x,y,z]$ qui donne une structure d'algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson $(\mathbb{R}[x,y,z], \cdot_\alpha = \alpha \circ \cdot, \{.,.,.\}_\alpha = \alpha \circ \{.,.,.\}, \alpha)$ satisfait l'équation suivante :*

$$1 - \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x} & \frac{\partial\alpha(x)}{\partial y} & \frac{\partial\alpha(x)}{\partial z} \\ \frac{\partial\alpha(y)}{\partial x} & \frac{\partial\alpha(y)}{\partial y} & \frac{\partial\alpha(y)}{\partial z} \\ \frac{\partial\alpha(z)}{\partial x} & \frac{\partial\alpha(z)}{\partial y} & \frac{\partial\alpha(z)}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \tag{3.10}$$

Démonstration. Soit α un morphisme d'algèbre de Nambu-Poisson, alors il satisfait pour tout $f, g, h \in \mathbb{R}[x,y,z]$

$$\alpha(f \cdot g) = \alpha(f) \cdot \alpha(g),$$
$$\alpha\{f,g,h\} = \{\alpha(f), \alpha(g), \alpha(h)\}.$$

La première égalité montre qu'il est juste suffisant pour mettre α sur x, y et z. Pour la deuxième égalité, nous supposons par linéarité que

$$f(x,y,z) = x^i y^j z^k,$$
$$g(x,y,z) = x^l y^m z^p,$$
$$f(x,y,z) = x^q y^r z^s.$$

Ensuite, nous pouvons écrire la deuxième équation comme suit

$$\alpha \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha(f)}{\partial x} & \frac{\partial\alpha(f)}{\partial y} & \frac{\partial\alpha(f)}{\partial z} \\ \frac{\partial\alpha(g)}{\partial x} & \frac{\partial\alpha(g)}{\partial y} & \frac{\partial\alpha(g)}{\partial z} \\ \frac{\partial\alpha(h)}{\partial x} & \frac{\partial\alpha(h)}{\partial y} & \frac{\partial\alpha(h)}{\partial z} \end{vmatrix},$$

qui peut être simplifiée pour

$$1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x} & \frac{\partial\alpha(x)}{\partial y} & \frac{\partial\alpha(x)}{\partial z} \\ \frac{\partial\alpha(y)}{\partial x} & \frac{\partial\alpha(y)}{\partial y} & \frac{\partial\alpha(y)}{\partial z} \\ \frac{\partial\alpha(z)}{\partial x} & \frac{\partial\alpha(z)}{\partial y} & \frac{\partial\alpha(z)}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{3.11}$$

□

Exemple 3.3 *Nous avons les polynômes :*

$$\begin{aligned}\alpha(x) = P_1(x,y,z) &= \sum_{0\leq i,j,k\leq d} a_{ijk}x^iy^jz^k,\\ \alpha(y) = P_2(x,y,z) &= \sum_{0\leq i,j,k\leq d} b_{ijk}x^iy^jz^k,\\ \alpha(z) = P_3(x,y,z) &= \sum_{0\leq i,j,k\leq d} c_{ijk}x^iy^jz^k,\end{aligned}$$

où $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}[x,y,z]$, et d le plus grand degré pour chaque variable. on suppose que $a_0 = b_0 = c_0 = 0$.

cas des polynômes de degré 1 *Nous prenons*

$$\begin{aligned}P_1(x,y,z) &= a_1x + a_2y + a_3z,\\ P_2(x,y,z) &= b_1x + b_2y + b_3z,\\ P_3(x,y,z) &= c_1x + c_2y + c_3z.\end{aligned}$$

L'equation (2.5) *devient*

$$1 - \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial P_1(x,y,z))}{\partial y} & \frac{\partial P_1(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial P_2(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial P_2(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial P_2(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial P_3(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial P_3(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial P_3(x,y,z)}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \qquad (3.12)$$

d'où

$$1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.13)$$

Les polynômes P_1, P_2 et P_3 prenent une de ces formes

1. $P_1(x,y,z) = xa_1 + ya_2 + za_3$, $P_2(x,y,z) = b_2y - \frac{z}{a_1c_2}$, $P_3(x,y,z) = c_2y$.
2. $P_1(x,y,z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = \frac{1+a_1b_3c_2}{a_1c_3}y + b_3z$, $P_3(x,y,z) = c_2y + c_3z$.
3. $P_1(x,y,z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_1x + \frac{1}{a_2c_1}z$, $P_3(x,y,z) = c_1x$.
4. $P_1(x,y,z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = \frac{-1+a_2b_3c_1}{a_2c_3}x + b_3z$, $P_3(x,y,z) = c_1x + c_3z$.
5. $P_1(x,y,z) = \frac{a_2b_1c_3+b_2}{c_3x} + a_2y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_1x + b_2y + b_3z$, $P_3(x,y,z) = c_3z$.
6. $P_1(x,y,z) = \frac{1}{b_2c_3}x + a_2y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_2y + b_3z$, $P_3(x,y,z) = c_3z$.
7. $P_1(x,y,z) = a_1x + \frac{1}{b_1c_3}y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_1x + b_3z$, $P_3(x,y,z) = c_3z$.

8. $P_1(x,y,z) = a_1x + a_2y + \frac{1}{b_1c_2}z$, $P_2(x,y,z) = b_1x$, $P_3(x,y,z) = c_1x + c_2y$.

9. $P_1(x,y,z) = a_1x + \frac{-1}{b_1c_3+a_3c_2c_3}y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_1x$,
$P_3(x,y,z) = c_1x + c_2y + c_3z$.

10. $P_1(x,y,z) = \frac{a_2b_1}{b_2} + \frac{1}{b_2c_3-b_3c_2}x + a_2y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_1x + b_2y + b_3z$,
$P_3(x,y,z) = \frac{b_1c_2}{b_2}x + c_2y + c_3z$.

11. $P_1(x,y,z) = \frac{-c_3+a_2c_1c_2}{b_3c_2^2}x + a_2y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_3z$,
$P_3(x,y,z) = c_1x + c_2y + c_3z$.

12. $P_1(x,y,z) = a_1x + a_2y + \frac{1}{b_1c_2-b_2c_1}z$, $P_2(x,y,z) = b_1x + b_2y$,
$P_3(x,y,z) = c_1x + c_2y$.

13. $P_1(x,y,z) = \frac{1+a_2b_1c_3-a_3b_1c_2-a_2b_3c_1+a_3b_2c_1}{b_2c_3-b_3c_2}x + a_2y + a_3z$,
$P_2(x,y,z) = b_1x + b_2y + b_3z$, $P_3(x,y,z) = c_1x + c_2y + c_3z$.

14. $P_1(x,y,z) = a_1x + \frac{b_2}{b_3}(a_3 - \frac{1}{b_1c_2-b_2c_1})y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_1x + b_2y + b_3z$, $P_3(x,y,z) = c_1x + c_2y + \frac{b_3c_2}{b_2}z$.

Cas particulier des polynômes de degré 2 *Nous prenons un des polynômes de degré 2 suivants*

$$P_1(x,y,z) = a_1x + a_2y + a_3z$$
$$P_2(x,y,z) = b_1x + b_2y + b_3z$$
$$P_3(x,y,z) = c_1x + c_2y + c_3z + c_4x^2$$

Les polynômes P_1, P_2 et P_3 prenent une de ces formes

1. $P_1(x,y,z) = \frac{a_2b_1}{b_2} + \frac{1}{b_2c_3-b_3c_2}x + a_2y + \frac{a_2b_3}{b_2}z$, $P_2(x,y,z) = b_1x + b_2y + b_3z$,
$P_3(x,y,z) = c_4x^2 + c_1x + c_2y + c_3z$.

2. $P_1(x,y,z) = a_2x + \frac{a_3b_2}{b_3}y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_2y + b_3z$,
$P_3(x,y,z) = c_4x^2 + c_1x + c_2y + \frac{\frac{1}{a_1}+b_3c_2}{b_2}z$.

3. $P_1(x,y,z) = a_2x + a_2y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_2y$,
$P_3(x,y,z) = c_4x^2 + c_1x + c_2y + \frac{1}{a_1b_2}z$.

4. $P_1(x,y,z) = (\frac{a_2b_1}{b_3} - \frac{1}{c_2b_3})x + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_1x + b_3z$,
$P_3(x,y,z) = c_4x^2 + c_1x + c_2y + c_3z$.

5. $P_1(x,y,z) = -\frac{1}{b_3c_2}x + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_3z$,
   $P_3(x,y,z) = c_4x^2 + c_1x + c_2y + c_3z$.

6. $P_1(x,y,z) = a_1x - \frac{1}{b_1c_3}y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_1x$,
   $P_3(x,y,z) = c_4x^2 + c_1x + c_3z$.

7. $P_1(x,y,z) = a_1x + \frac{-1}{b_1c_3} + \frac{a_3c_2}{c_3}y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = b_1x$,
   $P_3(x,y,z) = c_4x^2 + c_1x + c_2y + c_3z$.

8. $P_1(x,y,z) = a_1x + a_2y + \frac{1}{b_1c_2}z$, $P_2(x,y,z) = b_1x$,
   $P_3(x,y,z) = c_4x^2 + c_1x + c_2y$.

9. $P_1(x,y,z) = a_1x + a_2y + a_3z$, $P_2(x,y,z) = \frac{(1+a_2b_3c_1)}{a_2c_3}x + b_3z$,
   $P_3(x,y,z) = c_1x + c_3z$.

3.5 Classification des algèbres ternaires non-commutatives de Nambu-Poisson en dimension 3

Dans cette section, nous fournissons la classification en dimension 3 des algèbres ternaires non-commutatives de Nambu-Poisson. Par des calculs simples et en utilisant un logiciel de calcul formel "Mathematica", on obtient les résultats suivants

Théorème 3.5 *Toute algèbre ternaire de Nambu-Lie en dimension 3 est isomorphe à l'algèbre définie, par rapport à la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ ou par le biais de l'antisymétrie du crochet défini par*

$$\{e_1, e_2, e_3\} = e_1.$$

En outre, elle définit une algèbre ternaire non-commutative de Nambu-Poisson $(A, \{.,.,.\}, \mu)$ si et seulement si μ est l'une des algèbres non-commutatives associatives suivantes

1.
$$\begin{array}{lll} \mu_1(e_2,e_1) = ae_1 & \mu_1(e_2,e_2) = ae_2 & \mu_1(e_2,e_3) = ae_3 \\ \mu_1(e_3,e_1) = be_1 & \mu_1(e_3,e_2) = be_2 & \mu_1(e_3,e_3) = be_3, \end{array}$$

   où a, b sont des paramètres.
2. *L'algèbre inverse de (1).*

Les multiplications qui ne sont pas mentionnées sont égales à zéro.

Le premier énoncé du théorème est dû à Filippov [22]. Les deux familles ne sont pas isomorphes.

Remarque 3.6 *L'algèbre ternaire de Nambu-Lie en dimension 3 est munie d'une structure d'algèbre commutative de Nambu-Poisson que lorsque la multiplication est triviale.*

En utilisant le principe de twist décrit dans le théorème 3.3, on obtient dans ce qui suit les algèbres ternaires non-commutatives Hom-Nambu-Poisson.

Proposition 3.2 *Toute algèbre ternaire non-commutative Hom-Nambu-Poisson de dimension 3 $(A, \{.,.,.\}_\alpha, \mu_\alpha, \alpha)$ obtenue par le principe de twist définie par rapport à la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ par le crochet ternaire $\{e_1, e_2, e_3\}_\alpha = ce_1$, où c est un paramètre, est donnée par l'une des algèbres binaires Hom-associatives définies par μ_{α_i} et l'application α de la structure correspondante*

1.

$$\mu_{\alpha_1}(e_2,e_1)=ace_1, \qquad \mu_{\alpha_1}(e_3,e_1)=bce_1,$$
$$\mu_{\alpha_1}(e_2,e_2)=a(de_1+e_2), \qquad \mu_{\alpha_1}(e_3,e_2)=b(de_1+e_2),$$
$$\mu_{\alpha_1}(e_2,e_3)=a(he_1+ge_2+e_3), \qquad \mu_{\alpha_1}(e_3,e_3)=b(he_1+ge_2+e_3),$$

avec

$$\alpha_1(e_1)=ce_1, \alpha_1(e_2)=de_1+e_2, \alpha_1(e_3)=he_1+ge_2+e_3.$$

2.

$$\mu_{\alpha_2}(e_1,e_2)=ace_1, \qquad \mu_{\alpha_2}(e_3,e_1)=bce_1,$$
$$\mu_{\alpha_2}(e_2,e_2)=a(de_1+e_2+le_3), \qquad \mu_{\alpha_2}(e_3,e_2)=b(de_1+e_2+le_3),$$
$$\mu_{\alpha_2}(e_2,e_3)=a(he_1+e_3), \qquad \mu_{\alpha_2}(e_3,e_3)=b(he_1+e_3),$$

avec

$$\alpha_2(e_1)=ce_1, \alpha_2(e_2)=de_1+e_2+le_3, \alpha_2(e_3)=he_1+e_3e_3.$$

3.

$$\mu_{\alpha_3}(e_2,e_1)=ace_1, \qquad \mu_{\alpha_3}(e_3,e_1)=bce_1,$$
$$\mu_{\alpha_3}(e_2,e_2)=a(de_1+fe_2+\tfrac{a}{b}(1-f)e_3), \qquad \mu_{\alpha_3}(e_3,e_2)=bde_1+bfe_2+a(1-f)e_3,$$
$$\mu_{\alpha_3}(e_2,e_3)=ahe_1+b(f-1)e_2+\tfrac{a(b-ga)}{b}e_3), \qquad \mu_{\alpha_3}(e_3,e_3)=bhe_1+\tfrac{b^2(f-1)}{a}e_2+(b-ga)e_3,$$

avec

$$\alpha_3(e_1)=ce_1, \alpha_3(e_2)=de_1+fe_2+\tfrac{a}{b}(1-f)e_3, \alpha_3(e_3)=he_1+\tfrac{b}{a}(f-1)e_2+\tfrac{(b-ga)}{b}e_3.$$

4.

$$\mu_{\alpha_4}(e_1,e_2)=ace_1, \qquad \mu_{\alpha_4}(e_2,e_3)=b(de_1+e_2),$$
$$\mu_{\alpha_4}(e_1,e_3)=bce_1, \qquad \mu_{\alpha_4}(e_3,e_2)=a(he_1+ge_2+e_3),$$
$$\mu_{\alpha_4}(e_2,e_2)=a(de_1+e_2), \qquad \mu_{\alpha_4}(e_3,e_3)=b(he_1+ge_2+e_3),$$

avec

$$\alpha_4(e_1)=ce_1, \alpha_4(e_2)=de_1+e_2, \alpha_4(e_3)=he_1+ge_2+e_3.$$

5.

$$\mu_{\alpha_5}(e_1,e_2)=ace_1, \qquad \mu_{\alpha_5}(e_2,e_3)=b(de_1+e_2+le_3),$$
$$\mu_{\alpha_5}(e_1,e_3)=bce_1, \qquad \mu_{\alpha_5}(e_3,e_2)=a(he_1+e_3),$$
$$\mu_{\alpha_5}(e_2,e_2)=a(de_1+e_2+le_3), \qquad \mu_{\alpha_5}(e_3,e_3)=b(he_1+e_3).$$

avec

$$\alpha_5(e_1)=ce_1, \alpha_5(e_2)=de_1+e_2+le_3, \alpha_5(e_3)=he_1+e_3.$$

6.

$$\mu_{\alpha_6}(e_1,e_2)=ace_1, \qquad \mu_{\alpha_6}(e_2,e_3)=bde_1+bfe_2+a(1-f)e_3),$$
$$\mu_{\alpha_6}(e_1,e_3)=bce_1, \qquad mu_{\alpha_6}(e_3,e_2)=ahe_1-b(f-1)e_2+\frac{a(b-ag)}{b}e_3,$$
$$\mu_{\alpha_6}(e_2,e_2)=a(de_1+fe_2+\frac{a}{b}(1-f)e_3), \qquad \mu_{\alpha_6}(e_3,e_3)=bhe_1-\frac{b^2(f-1)}{a}e_2+(b-ag)e_3,$$

avec

$$\alpha_6(e_1)=ce_1,\alpha_6(e_2)=de_1+fe_2+\frac{a}{b}(1-f)e_3,\alpha_6(e_3)=he_1+\frac{-b}{a}(f-1)e_2+\frac{b-ag}{b}e_3.$$

7.

$$\mu_{\alpha_7}(e_1,e_3)=ace_1,$$
$$\mu_{\alpha_7}(e_2,e_3)=a(de_1+fe_2+le_3),$$
$$\mu_{\alpha_7}(e_3,e_3)=a(he_1+ge_2+\frac{1+g+l}{f}e_3),$$

avec

$$\alpha_7(e_1)=ce_1,\alpha_7(e_2)=de_1+fe_2+le_3,\alpha_7(e_3)=he_1+ge_2+\frac{1+g+l}{f}e_3.$$

8.

$$\mu_{\alpha_8}(e_1,e_3)=ace_1,$$
$$\mu_{\alpha_8}(e_2,e_3)=a(de_1+e_2),$$
$$\mu_{\alpha_8}(e_3,e_3)=a(he_1+ge_2+e_3),$$

avec

$$\alpha_8(e_1)=ce_1,\alpha_8(e_2)=de_1+e_2,\alpha_8(e_3)=he_1+ge_2+e_3.$$

9.

$$\mu_{\alpha_9}(e_1,e_3)=ace_1,$$
$$\mu_{\alpha_9}(e_2,e_3)=a(de_1-\frac{1}{g}e_3),$$
$$\mu_{\alpha_9}(e_3,e_3)=a(he_1+ge_2+re_3),$$

avec

$$\alpha_9(e_1)=ce_1,\alpha_9(e_2)=de_1-\frac{1}{g}e_3,\alpha_9(e_3)=he_1+ge_2+re_3.$$

4 Algèbres ternaires de Nambu-Poisson (resp. algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson) induites par des algèbres de Poisson (resp. algèbres Hom-Poisson)

4.1 Algèbres ternaires de Nambu-Poisson induites par des algèbres de Poisson

Dans cette section, nous fournissons une façon de construire des algèbres ternaires de Nambu-Poisson à partir des algèbres de Poisson. Nous rappelons quelques définitions de base.

Définition 4.1 *Une algèbre de Poisson désigne un triplet $(A, \mu, \{.,.\})$ dans lequel A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $\mu : A \times A \to A$ est une application bilinéaire et $\{.,.\} : A \times A \to A$ est un crochet binaire tel que :*

1. *(A, μ) est une algèbre commutative binaire associative,*
2. *$(A, \{.,.\})$ est une algèbre de Lie,*
3. *pour tout x, y, z dans A*

$$\{\mu(x,y), z\} = \mu(x, \{y,z\}) + \mu(\{x,z\}, y). \tag{4.1}$$

la condition 4.1 est dite identité de Leibniz.

Une algèbre non commutative de Poisson est définie par un produit μ qui n'est pas commutative.

Définition 4.2 *Une algèbre ternaire de Nambu-Poisson désigne un triplet $(A, \mu, \{.,.,.\})$ dans lequel A est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $\mu : A \times A \to A$ est une application bilinéaire et $\{.,.,.\} : A \otimes A \otimes A \to A$ une application trilinéaire telles que*

1. *(A, μ) est une algèbre commutative binaire associative,*

2. *$(A, \{.,.,.\})$ est une algèbre ternaire de Nambu-Lie,*
3. *la règle de Leibniz suivante*

$$\{x_1, x_2, \mu(x_3, x_4)\} = \mu(x_3, \{x_1, x_2, x_4\}) + \mu(\{x_1, x_2, x_3\}, x_4),$$

pour tout $x_1, x_2, x_3, x_4 \in A$.

Une algèbre non commutative ternaire de Nambu-Poisson est définie par un produit μ qui n'est pas commutative.
Pour des raisons de simplification nous avons finalement choisi la notation de la multiplication $x \cdot y$ au lieu de $\mu(x, y)$.

Définition 4.3 *Soit $\varphi : A^n \to A$ une application n-linéaire et soit $\tau : A \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. $\varphi_\tau : A^{n+1} \to A$ est défini par*

$$\varphi_\tau(x_1, ..., x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \tau(x_k) \varphi(x_1, ..., \widehat{x_k}, ..., x_{n+1}),$$

où $\widehat{x_k}$ signifie que x_k est exclue.

En particulier

$$\{x, y, z\}_\tau = \tau(x)\{y, z\} + \tau(y)\{z, x\} + \tau(z)\{x, y\}.$$

Nous prenons τ qui possède une propriété généralisant celle de l'application trace qui est

Définition 4.4 *Nous appelons une forme linéaire $\tau : A \to \mathbb{K}$ une φ-trace (ou fonction trace) si*

$$\tau(\varphi(x_1, ..., x_n)) = 0,$$

pour tout $x_1, ..., x_n \in A$.

Lemme 4.1 *Soit $\varphi : A^n \to A$ une application n-linéaire antisymétrique et $\tau : A \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. Alors φ_τ est une application $(n+1)$-linéaire totalement antisymétrique. De plus, si τ est une φ-trace alors τ est une φ_τ-trace.*

Nous proposons une procédure de construction d'une algèbre ternaire de Nambu-Poisson à partir d'un crochet binaire d'une algèbre de Poisson et une fonction trace qui satisfait certaines conditions de compatibilité.

Théorème 4.1 *Soit $(A, \cdot, \{.,.\})$ une algèbre de Poisson unitaire (resp. algèbre non-commutative de Poisson unitaire), supposons que τ est une $\{.,.\}$-trace sur A i.e. $\tau(\{x, y\}) = 0$ pour tout $x, y \in A$. Alors $(A, \cdot, \{.,.,.\}_\tau)$ est une algèbre ternaire de Nambu-Poisson, est nous disons qu'elle est induite par l'algèbre de Poisson $(A, \cdot, \{.,.\})$, si et seulement si*

$$(\tau(x \cdot y)\mathbb{1} - \tau(y)x - \tau(x)y) \cdot (\{z, u\}) = 0, \tag{4.2}$$

Remarque 4.1 *Si l'algèbre $(A, \cdot)$ n'est pas commutative la condition 4.2 s'écrit sous la forme*

$$\tau(x \cdot y)\{z, u\} = \tau(y)x \cdot \{z, u\} + \tau(x)\{z, u\} \cdot y \tag{4.3}$$

pour tout $x, y, z, u \in A$.

Démonstration. [10] Le crochet ternaire $\{.,.,.\}_\tau$ est antisymétrique du Lemme 4.1, alors on a seulement à prouver que l'identité de Nambu et l'identité de Leibniz sont satisfaites. D'abord on développe l'identité de Nambu

$$\{x,y,\{z,u,v\}_\tau\}_\tau - \{\{x,y,z\}_\tau,u,v\}_\tau - \{z,\{x,y,u\}_\tau,v\}_\tau - \{z,u,\{x,y,v\}_\tau\}_\tau = 0,$$

qui donne 36 termes, 12 termes s'annulent car τ est une fonction trace i.e. $\tau(\{x,y\}) = 0$, pour tout $x,y \in A$. Les 18 termes restants sont les suivants

$$\begin{aligned}
&\tau(x)\tau(z)(\{y,\{u,v\}\} - \{\{y,u\},v\} - \{u,\{y,v\}\}) + \\
&\tau(y)\tau(z)(\{\{u,v\},x\} - \{\{u,x\},v\} - \{u,\{v,x\}\}) + \\
&\tau(x)\tau(u)(\{y,\{v,z\}\} - \{v,\{y,z\}\} - \{\{y,v\},z\}) + \\
&\tau(y)\tau(u)(\{\{v,z\},x\} - \{v,\{z,x\}\} - \{\{v,x\},z\}) + \\
&\tau(x)\tau(v)(\{y,\{z,u\}\} - \{\{y,z\},u\} - \{z,\{y,u\}\}) + \\
&\tau(y)\tau(v)(\{\{z,u\},x\} - \{\{z,x\},u\} - \{z,\{u,x\}\}).
\end{aligned}$$

Ces termes s'annulent en utilisant l'identité de Jacobi. Les 6 termes restants peuvent être écrite comme suit

$$\begin{aligned}
&\tau(u)\tau(z)(\{v,\{x,y\}\} - \{\{x,y\},v\}) + \\
&\tau(u)\tau(v)(\{\{x,y\},z\} - \{z,\{x,y\}\}) + \\
&\tau(v)\tau(z)(\{\{x,y\},u\} - \{u,\{x,y\}\})
\end{aligned}$$

qui s'annulent en utilisant l'antisymétrie du crochet $\{.,.\}$. Par conséquent l'identité de Nambu est satisfaite.
Deuxièmement, nous allons prouver l'identité de Leibniz qui s'écrit

$$\{x \cdot y, z, u\}_\tau = x \cdot \{y,z,u\}_\tau + \{x,z,u\}_\tau \cdot y.$$

En développant, la partie gauche

$$\begin{aligned}
LHS =& \tau(x \cdot y)\{z,u\} + \tau(z)\{u, x \cdot y\} + \tau(u)\{x \cdot y, z\} \\
=& \tau(x \cdot y)\{z,u\} + \tau(z)(x \cdot \{u,y\} + \{u,x\} \cdot y) \\
& + \tau(u)(x \cdot \{y,z\} + \{x,z\} \cdot y)) \\
=& \tau(x \cdot y)\{z,u\} + \tau(z)x \cdot \{u,y\} + \tau(z)\{u,x\} \cdot y \\
& + \tau(u)x \cdot \{y,z\} + \tau(u)\{x,z\} \cdot y,
\end{aligned}$$

et la partie droite

$$\begin{aligned}
RHS =& x \cdot \tau(y)\{z,u\} + x \cdot \tau(z)\{u,y\} + x \cdot \tau(u)\{y,z\} \\
& + \tau(x)\{z,u\} \cdot y + \tau(z)\{u,x\} \cdot y + \tau(u)\{x,z\} \cdot y,
\end{aligned}$$

l'identité de Leibniz pour le crochet ternaire est satisfaite, si et seulement si la condition 4.2 est vérifiée.

□

Corollaire 4.1 *Si $(A,\cdot)$ est unitaire et il existe $z \in \{A,A\}$ et $x \cdot z \neq 0$, $\forall x \in A$, alors*

$$\tau(x \cdot y)\mathbb{1} - \tau(y)x - \tau(x)y = 0. \tag{4.4}$$

Proposition 4.1 *Soient $(A, \cdot, \{.,.\})$ une algèbre de Poisson et τ une $\{.,.\}$-trace. S'il existe $z \in \{A, A\}$ et $x \cdot z \neq 0$, $\forall x \in A$, et $(A, \cdot)$ est une algèbre unitaire commutative associative alors $\tau(x) = 0$, pour tout $x \in A$.*

Démonstration. Comme l'algèbre est unitaire commutative et il existe $z \in \{A, A\}$ et $x \cdot z \neq 0$, $\forall x \in A$

$$(4.2) \Leftrightarrow \tau(x \cdot y)\mathbb{1} - \tau(y)x - \tau(x)y = 0$$

Soient $x \neq 1$ et $y = x$, alors

$$\tau(x \cdot x)\mathbb{1} - 2\tau(x)x = 0.$$

Comme x et $\mathbb{1}$ sont linéairement indépendant, il en résulte $\tau(x \cdot x) = 0$ et $\tau(x) = 0$ pour tout x in A. □

Proposition 4.2 *Soit $(A, \cdot, \{.,.\})$ une algèbre de Poisson unitaire, τ une $\{.,.\}$-trace et il existe $z \in \{A, A\}$ et $x \cdot z \neq 0$, $\forall x \in A$. Si e est un idempotent non proportionnel à $\mathbb{1}$ alors $\tau(e) = 0$.*

Démonstration. Soit $(A, \cdot, \{.,.\})$ une algèbre de Poisson, τ une $\{.,.\}$-trace et il existe $z \in \{A, A\}$ et $x \cdot z \neq 0$, $\forall x \in A$, alors d'après le théorème (4.1) et le corollaire (4.1)

$$\tau(x \cdot y)\mathbb{1} - \tau(y)x - \tau(x)y = 0 \tag{4.5}$$

si e est un idempotent i.e. $e^2 = e$ alors (4.5) peut être écrite comme suit

$$\tau(e \cdot e)\mathbb{1} - \tau(e)e - \tau(e)e = 0,$$

comme

$$\tau(e)\mathbb{1} - 2\tau(e)e = 0,$$

on a

$$\tau(e)(\mathbb{1} - 2e) = 0,$$

qui implique $\tau(e) = 0$. □

Remarque 4.2 *En dimension 3, $\tau(x) = 0$ pour tout $x \in A$. i.e. Toutes les algèbres ternaires de Nambu-Poisson induites à partir des algèbres de Poisson en dimension 3 sont triviales.*

4.1.1 Exemples

Dans cette section, nous présentons des exemples d'algèbres ternaires de Nambu-Poisson induites à partir des algèbres de Poisson en utilisant le théorème 4.1, dans les dimensions 5 et 6. Nous n'avons pas réussi à obtenir des exemples en dimension 3, pour cela nous avons des exemples d'algèbres de Poisson binaires recherchées sur la base de la classification des algèbres de Lie nilpotente en dimension 5 et 6.[19].

Exemple 4.1 *Soit $(A, \cdot, \{.,.\})$ une algèbre de Poisson définie sur un espace vectoriel de dimension 5, A engendré par $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Le crochet binaire qui est antisymétrique est défini par*

$$\{e_1, e_2\} = e_3,$$
$$\{e_1, e_3\} = e_5,$$
$$\{e_2, e_4\} = e_5,$$

et la multiplication commutative est définie par

$$e_1 \cdot e_1 = ae_5, \quad e_1 \cdot e_2 = be_5,$$
$$e_1 \cdot e_4 = ce_5, \quad e_2 \cdot e_2 = de_5,$$
$$e_2 \cdot e_4 = fe_5, \quad e_4 \cdot e_4 = ge_5,$$

pour tout a, b, c, d, f, g des paramètres dans $\mathbb{K}$. Les autres produits et crochets sont obtenus par commutativité (resp. antisymétrie) ou égaux à zéro.

Soient

$$\tau(e_1) = \gamma_1, \tau(e_2) = \gamma_2, \tau(e_4) = \gamma_3, \tau(e_3) = \tau(e_5) = 0,$$

pour tout $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{K}$.
La condition 4.2, est satisfaite, selon le théorème (4.1) nous obtenons une algèbre ternaire de Nambu-Poisson définie par le crochet ternaire suivant

$$\begin{aligned} \{e_2, e_1, e_3\}_\tau &= \gamma_2 e_5, \\ \{e_1, e_2, e_4\}_\tau &= \gamma_1 e_5 + \gamma_3 e_3, \\ \{e_1, e_3, e_4\}_\tau &= \gamma_3 e_5, \end{aligned}$$

les autres produits sont obtenus par antisymétrie ou égaux à zéro.
Alors $(A, \cdot, \{.,.,.\}_\tau)$ est l'algèbre ternaire de Nambu-Poisson induite.

Exemple 4.2 *Soit $(A, \cdot, \{.,.\})$ une algèbre de Poisson définie sur un espace vectoriel A de dimension 6 engendré par $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Le crochet binaire qui est antisymétrique est défini par*

$$\{e_1, e_2\} = e_3, \quad \{e_1, e_3\} = e_4,$$
$$\{e_1, e_4\} = e_6, \quad \{e_2, e_3\} = e_6,$$
$$\{e_2, e_5\} = e_6,$$

et la multiplication commutative définie par

$$e_1 \cdot e_1 = ae_6, \quad e_1 \cdot e_2 = be_6,$$
$$e_1 \cdot e_5 = ce_6, \quad e_2 \cdot e_2 = de_6,$$
$$e_2 \cdot e_5 = fe_6, \quad e_5 \cdot e_5 = ge_6,$$

pour tout a, b, c, d, f, g des paramètres dans $\mathbb{K}$. Les autres produits et crochets sont obtenus par commutativité (resp.antisymétrie) ou égaux à zéro.

Soient

$$\tau(e_1) = \gamma_1, \tau(e_2) = \gamma_2, \tau(e_5) = \gamma_3, \tau(e_3) = \tau(e_4) = \tau(e_6) = 0,$$

pour tout $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{K}$.
La condition (4.2)*, est satisfaite, selon le théorème* (4.1) *nous obtenons une algèbre ternaire de Nambu-Poisson définie par le crochet ternaire suivant*

$$\begin{aligned}
\{e_1, e_2, e_3\}_\tau &= \gamma_1 e_6 - \gamma_2 e_4,\\
\{e_1, e_2, e_4\}_\tau &= -\gamma_2 e_6,\\
\{e_1, e_2, e_5\}_\tau &= \gamma_1 e_6 + \gamma_3 e_3,\\
\{e_1, e_3, e_5\}_\tau &= \gamma_3 e_4,\\
\{e_1, e_4, e_5\}_\tau &= \gamma_3 e_6,\\
\{e_2, e_3, e_5\}_\tau &= \gamma_3 e_6,
\end{aligned}$$

les autres produits sont obtenus par antisymétrie ou égaux à zéro.
Alors $(A, \cdot, \{., ., .\}_\tau)$ *est l'algèbre ternaire de Nambu-Poisson induite.*

Nous présentons un exemple d'algèbre non-commutative ternaire de Nambu-Poisson intuite par une algèbre non-commutative de Poisson.

Exemple 4.3 *Soit* $(A, \cdot, \{., .\})$ *une algèbre non-commutative de Poisson, définie sur un espace vectoriel* A *de dimension 3 engendré par* $\{e_1, e_2, e_3\}$*. Le crochet binaire qui est antisymétrique est défini par*

$$\{e_3, e_4\} = e_1, \quad \{e_1, e_3\} = e_2,$$

et la multiplication non-commutative définie par

$$e_4 \cdot e_3 = ae_2, \quad e_4 \cdot e_4 = be_2,$$

pour tout a, b *des paramètres dans* $\mathbb{K}$*. Les autres crochets sont obtenus antisymétrie ou égal à zéro, et les autres multiplications sont égale à zéro.*

Soient

$$\tau(e_1) = \tau(e_2) = 0, \tau(e_3) = \gamma_1, \tau(e_4) = \gamma_2,$$

pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{K}$.
La condition (4.2)*, est satisfaite, selon le théorème* (4.1) *nous obtenons une algèbre non-commutative ternaire de Nambu-Poisson définie par le crochet ternaire suivant*

$$\{e_1, e_3, e_4\}_\tau = \gamma_2 e_2,$$

les autres crochets sont obtenus par antisymétrie ou égaux à zéro.
Alors $(A, \cdot, \{., ., .\}_\tau)$ *est l'algèbre ternaire non-commutative de Nambu-Poisson induite.*

4.2 Classification des algèbres de Poisson-Lie résolubles en dimension 4

Nous donnons ci-dessous la liste des algèbres de Lie résolubles de dimension 4, les algèbres résolubles de Poisson-Lie en dimension 4 sont classées, on calcule toutes les fonctions traces et les algèbres de Poisson ternaires induite en utilisant ces fonctions trace.

Théorème 4.2 *(Algèbre de Lie résoluble de dimension 4 [32][18]) Soit L une algèbre de Lie résoluble, et $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sa base sur L, alors L est isomorphe à l'une des algèbres suivantes : (Les autres crochets sont obtenus par antisymétrie ou égaux à zéro)*

1.*L'algèbre de Lie abélienne* $\{x, y\} = 0, \forall x, y \in g$.
2.$M^2 : \{e_1, e_4\} = e_1; \{e_2, e_4\} = e_2; \{e_3, e_4\} = e_3$.
3.$M_a^3 : \{e_1, e_4\} = e_1; \{e_2, e_4\} = e_3; \{e_3, e_4\} = -ae_2 + (a+1)e_3$.
4.$M^4 : \{e_2, e_4\} = e_3; \{e_3, e_4\} = e_3$.
5.$M^5 : \{e_2, e_4\} = e_3$.
6.$M_{a,b}^6 : \{e_1, e_4\} = e_2; \{e_2, e_4\} = e_3; \{e_3, e_4\} = ae_1 + be_2 + e_3$.
7.$M_{a,b}^7 : \{e_1, e_4\} = e_2; \{e_2, e_4\} = e_3; \{e_3, e_4\} = ae_1 + be_2 (a = b \neq 0$ *ou* $a = 0$ *ou* $b = 0)$.
8.$M^8 : \{e_1, e_2\} = e_2; \{e_3, e_4\} = e_4$.
9.$M_a^9 : \{e_1, e_4\} = e_1 + ae_2; \{e_2, e_4\} = e_1; \{e_1, e_3\} = e_1; \{e_2, e_3\} = e_2 (X^2 - X - a$ *n'a pas de racine sur* $\mathbb{K})$.
10.$M^{11} : \{e_1, e_4\} = e_1; \{e_3, e_4\} = e_3; \{e_1, e_3\} = e_2$.
11.$M^{12} : \{e_1, e_4\} = e_1; \{e_2, e_4\} = 2e_2; \{e_3, e_4\} = e_3; \{e_1, e_3\} = e_2$.
12.$M_a^{13} : \{e_1, e_4\} = e_1 + ae_3; \{e_2, e_4\} = e_2; \{e_3, e_4\} = e_1; \{e_1, e_3\} = e_2$.
9.$M_a^{14} : \{e_1, e_4\} = ae_3; \{e_3, e_4\} = e_1; \{e_1, e_3\} = e_2$.($M_a^{14}$ *est isomorphe* M_b^{14} *si et seulement si* $a = \alpha^2 b$ *pour un scalaire* $\alpha \neq 0$).

Nous donnons dans ce qui suit, la classification des algèbres de Poisson-Lie en dimension 4.

Proposition 4.3 *Étant donné une algèbre de Lie M, nous construisons toutes les multiplications associatives qui munissent M d'une structure d'algèbre de Poisson. On note $\mathcal{P}(M, i)$ la structure de Poisson correspondante (Les autres multiplications sont obtenues par commutativité ou égales à zéro)*

1. $\mathcal{P}(M^2, 1)$ *La multiplication correspondante est l'algèbre nulle.*

2. – $\mathcal{P}(M_0^3, 1) : e_4 \cdot e_4 = a_1 e_2 - a_1 e_3$.
   – $\mathcal{P}(M_0^3, 2) : e_2 \cdot e_2 = a_2 e_2 - a_2 e_3; e_2 \cdot e_4 = a_3 e_2 - a_3 e_3; e_4 \cdot e_4 = \frac{a_3^2}{a_2} e_2 - \frac{a_3^2}{a_2} e_3$.
   – $\mathcal{P}(M_0^3, 3) : e_1 \cdot e_2 = a_5 e_1; e_1 \cdot e_4 = a_6 e_1; e_2 \cdot e_2 = a_5 e_2 + a_5 e_3; e_2 \cdot e_3 = a_5 e_3; e_2 \cdot e_4 = a_6 e_3 + a_5 e_4; e_3 \cdot e_4 = a_6 e_3; e_4 \cdot e_4 = 2a_6 e_4 - \frac{a_6^2}{a_5} e_2 + \frac{a_6^2}{a_5} e_3$.

3. – $\mathcal{P}(M^4, 1) : e_1 \cdot e_2 = a_0 e_1; e_1 \cdot e_4 = a_1 e_1; e_2 \cdot e_2 = a_2 e_1 + a_0 e_2 + a_0 e_3; e_2 \cdot e_3 = a_0 e_3; e_2 \cdot e_4 = \frac{a_1 a_2}{a_0} e_1 + a_1 e_3 + a_0 e_4; e_4 \cdot e_4 =$

$a_{10}e_1 - \frac{a_1^2}{a_0}e_2 + \frac{a_1^2}{a_0}e_3 + 2a_1e_4$;

- $\mathcal{P}(M^4,2)$: $e_1 \cdot e_1 = a_3e_1; e_1 \cdot e_2 = a_3e_3; e_1 \cdot e_3 = a_3e_3; e_1 \cdot e_4 = a_4e_2 - a_4e_3 + a_3e_4; e_2 \cdot e_2 = a_5e_2 - a_5e_3; e_2 \cdot e_4 = -\frac{a_4a_5}{a_3}e_2 + a_6e_3; e_3 \cdot e_4 = (a_6 - \frac{a_4a_5}{a_3})e_3; e_4 \cdot e_4 = \frac{(a_4a_5-a_3a_6)^2}{a^3}e_1 + \frac{a_4(2a_3a_6-a_4a_5)}{a^2}e_2 + \frac{a_4(a_4a_5-2a_3a_6)}{a^2}e_3 + 2(a_6 - \frac{a_4a_5}{a_3})e_4$;

- $\mathcal{P}(M^4,3)$: $e_1 \cdot e_1 = a_3e_1; e_1 \cdot e_2 = a_3e_2; e_1 \cdot e_3 = a_3e_3; e_1 \cdot e_4 = a_3e_4$;
  $e_2 \cdot e_2 = a_2e_1 + a_5e_2 - \eta e_3$;
  $e_2 \cdot e_3 = \frac{1}{2}(a_5 - \eta)e_3$;
  $e_2 \cdot e_4 = a_{11}e_1 + \frac{(a_5+\eta)a_{11}}{2a_2}e_2 + a_6e_3 + \frac{1}{2}(a_5 - \eta)e_4$;
  $e_3 \cdot e_4 = (\frac{(a_5+\eta)a_{11}}{2a_2} + a_6)e_3$;
  $e_4 \cdot e_4 = \frac{(-8a_3^2a_2^2a_{11}^2+a_5(a_5+\eta)(a_5a_{11}+a_2a_6)^2+2a_3a_2(3a_5^2a_{11}^2+2a_2a_6(2\eta a_{11}+a_2a_6)+2a_5a_{11}(\eta a_{11}+2a_2a_6)))}{(2a_3a_2^2\sqrt{\eta})}e_1 + \frac{a_6^2}{\eta}e_2 - \frac{a_6^2}{\eta}e_3 + (\frac{(a_5+\eta)a_{11}}{2a_2} + a_6)e_4$.

- $\mathcal{P}(M^4,4)$: $e_1 \cdot e_1 = a_3e_1$; $e_1 \cdot e_2 = a_3e_2$; $e_1 \cdot e_3 = a_3e_3$; $e_1 \cdot e_4 = a_3e_4$;
  $e_2 \cdot e_2 = a_2e_1 + a_5e_2 + \eta e_3; e_2 \cdot e_3 = \frac{1}{2}(a_5 + \eta)e_3$;
  $e_2 \cdot e_4 = a_{11}e_1 + \frac{(a_5-\eta)a_{11}}{2a_2}e_2 + a_6e_3 + \frac{1}{2}(a_5 + \eta)e_4$;
  $e_3 \cdot e_4 = (\frac{(a_5-\eta)a_{11}}{2a_2} + a_6)e_3$;
  $e_4 \cdot e_4 = \frac{(-8a_3^2a_2^2a_{11}^2-a_5(a_5-\eta)(a_5a_{11}+a_2a_6)^2-2a_3a_2(3a_5^2a_{11}^2-2a_2a_6(2\eta a_{11}-a_2a_6)-2a_5a_{11}(\eta a_{11}-2a_2a_6)))}{(2a_3a_2^2\sqrt{\eta})}e_1 - \frac{a_6^2}{\eta}e_2 + \frac{a_{11}^2}{\eta}e_3 + (\frac{(a_5-\eta)a_{11}}{2a_2} + a_6)e_4$.

avec $\eta = \sqrt{4a_3a_2 + a_5^2}$

- $\mathcal{P}(M^4,5)$: $e_1 \cdot e_1 = a_3e_1$;
  $e_1 \cdot e_2 = a_0e_2 + a_3e_3$;
  $e_1 \cdot e_3 = a_3e_3$;
  $e_1 \cdot e_4 = a_1e_1 - \frac{a_3a_1}{a_0}e_2 + \frac{a_3a_1}{a_0}e_3 + a_3e_4$;
  $e_2 \cdot e_2 = a_2e_1 + (a_0 - \frac{a_3a_2}{a_0})e_2 + (a_0 + \frac{a_3a_2}{a_0})e_3$;
  $e_2 \cdot e_3 = a_0e_3$;
  $e_2 \cdot e_4 = \frac{a_1a_2}{a_0}e_1 - \frac{a_3a_1a_2}{a_0^2}e_2 + a_6e_3 + a_0e_4$;
  $e_3 \cdot e_4 = (a_6 - \frac{a_3a_1a_2}{a_0^2})e_3$;
  $e_4 \cdot e_4 = \frac{(a_3^2a_2^2a_1^2+a_3a_0^2a_1a_2(a_1-2a_6)+a_0^4(a_1-a_6)^2))}{a_3a_0^4}e_1 + \frac{1}{a_0^3}a_1(a_3a_1a_2 + a_0^2(a_1 - 2a_6))e_2 - \frac{1}{a_0^3}a_1(a_3a_1a_2 + a_0^2(a_1 - 2a_6))e_3 + 2(a_6 - \frac{a_3a_1a_2}{a_0^2})e_4$.

- $\mathcal{P}(M^4,6)$: $e_1 \cdot e_1 = a_3e_1 + a_8e_2 - a_8e_3$;
  $e_1 \cdot e_2 = a_0e_1 + a_7e_2 - a_7e_3$;
  $e_1 \cdot e_4 = a_1e_1 + a_4e_2 - a_4e_3$;
  $e_2 \cdot e_2 = \frac{a_0a_7}{a_8}e_1 + \frac{(a_8a_0-a_3a_7+a_7^2)}{a_8}e_2 - \frac{(a_8a_0-a_3a_7+a_7^2)}{a_8}e_3$;
  $e_2 \cdot e_4 = \frac{a_0a_4}{a_8}e_1 - \frac{1}{t}(-a_8a_1 + (a_3 - a_7)a_4)e_2 + \frac{1}{t}(-a_8a_1 + (a_3 - a_7)a_4)e_3$;
  $e_4 \cdot e_4 = \frac{(a_3a_0a_4^2+a_8a_1(-a_7a_1+2a_0a_4))}{(a_8(a_8a_0-a_3a_7))}e_1 + \frac{(a_8^2a_1^2+a_3(a_3-a_7)a_4^2+a_8a_4(-2a_3a_1+a_0a_4))}{(a_8(a_8a_0-a_3a_7))}e_2-$

$\frac{(a_8^2a_1^2+a_3(a_3-a_7)a_4^2+a_8a_4(-2a_3a_1+a_0a_4))}{(a_8(a_8a_0-a_3a_7))}e_3.$

- $\mathcal{P}(M^4,7)$:$e_1 \cdot e_1 = a_3e_1 + a_8e_2 - a_8e_3;$
  $e_1 \cdot e_2 = a_0e_1 + a_7e_2 + \frac{1}{2}(a_3 - \alpha - a_7)e_3;$
  $e_1 \cdot e_3 = \frac{1}{2}(a_3 - \alpha + a_7)e_3;$
  $e_1 \cdot e_4 = a_1e_1 + \frac{1}{2a_0}(-a_3 + \alpha + a_7)a_1e_2 - \frac{1}{2a_0}(-a_3 + \alpha + a_7)a_1e_3 + \frac{1}{2}(a_3 - \alpha + a_7)e_4;$
  $e_2 \cdot e_2 = \frac{a_0a_7}{a_8}e_1 + \frac{a_8a_0-a_3a_7+a_7^2}{a_8}e_2 + \frac{1}{a_8}(a_8a_0 - \alpha a_7)e_3;$
  $e_2 \cdot e_3 = \frac{1}{2a_8}(2a_8a_0 - a_3a_7 - \alpha a_7 + a_7^2)e_3;$
  $e_2 \cdot e_4 = \frac{a_7a_1}{a_8}e_1 + \frac{(a_7(-a_3+\alpha+a_7)a_1)}{2a_8a_0}e_2 + a_6e_3 + \frac{1}{2a_8}(2a_8a_0 - a_3a_7 - \alpha a_7 + a_7^2)e_4;$
  $e_3 \cdot e_4 = (\frac{(a_7(-a_3+\alpha+a_7)a_1)}{2a_8a_0} + a_6)e_3;$
  $e_4 \cdot e_4 = ((a_3^4a_7^3a_1^2 + a_7^6(a_7 + \beta)a_1^2 - a_3^3a_7^2a_1(4a_7^2a_1 + a_7a_7\beta a_1 + 2a_8a_0a_6) + 2a_8a_0a_7a_7^4a_1(\beta(2a_1 + a_6) + a_7(3a_1 + s)) + a_8^2a_0^2a_7^2(\beta\rho_1 + a_7(7a_1^2 + 10a_1a_6 + a_6^2)) + 2a_8^3a_0^3(\beta(a_1 - a_6^2) + a_7(-2a_1^2 + 4a_1a_6 + 2a_6^2)) + a_3^2a_7(3a_7^3(2a_7 + \beta)a_1^2 - a_8^2a_0^2\sigma + 2a_8a_0a_7a_1(\beta a_6 + 3a_7(a_1 + a_6))) - a_3a_7(a_7^4(4a_7 + 3\beta)a_1^2 + 2ta_0a_7^2a_1(2\beta(a_1 + a_6) + 3a_7(2a_1 + a_6)) + a_8^2a_0^2(\beta(a_1 - a_6)^2 - 2a_7\rho_2)))/\gamma)e_1$

  $+(-a_3^4a_7^2a_1^2 - a_7^5(a_7 + \beta)a_1^2 + a_3^3a_7a_1(4a_7^2a_1 + a_7\beta a_1 + 2a_8a_0s) + 4a_8^3a_0^3\sigma - 2a_8a_0a_7^3a_1(\beta(2a_1 + a_6) + a_7(3a_1 + a_6)) - a_8^2a_0^2a_7\beta\rho_1 + a_7(7a_1^2 + 10a_1a_6 + a_6^2)) + a_3^2(-3a_7^3(2a_7 + \beta)a_1^2 - a_8^2a_0^2\sigma + 2a_8a_0a_7a_1(\beta a_6 + 3a_7(a_1 + a_6))) + a_3(a_7^4(4a_7 + 3\beta)a_1^2 + 2a_8a_0a_7^2a_1(2\beta(a_1 + a_6) + 3a_7(2a_1 + a_6)) - a_8^2a_0^2(\beta(a_1 - a_6)^2 + 2a_7\rho_2)))/\gamma)e_2$
  $+((-a_3^4a_7^2a_1^2 + a_7^5(a_7 + \beta)a_1^2 - a_3^3a_7a_1(4a_7^2a_1 + a_7\beta a_1 + 2a_8a_0a_6) - 4a_8^3a_0^3\sigma + 2a_8a_0a_7^3a_1(\beta(2a_1 + a_6) + a_7(3a_1 + a_6)) + a_8^2a_0^2a_7(\beta\rho_1 + a_7(7a_1^2 + 10a_1a_6 + a_6^2)) + a_3^2(3a_7^3(2a_7 + \beta)a_1a_1^2 - a_8^2a_0^2\sigma + 2a_8a_0a_7a_1(\beta s + 3a_7(a_1 + a_6))) + a_3(-a_7^4(4a_7 + 3\beta)a_1^2 - 2a_8a_0a_7^2a_1(2\beta(a_1 + a_6) + 3a_7(2a_1 + a_6)) + a_8^2a_0^2(\beta(a_1 - a_6)^2 + 2a_7\rho_2)))/\gamma)e_3$
  $+2(\frac{(a_7(-a_3+\alpha+a_7)a_1)}{2a_8a_0} + a_6)e_4$

- $\mathcal{P}(M^4,8)$: $e_1 \cdot e_1 = a_3e_1 + a_8e_2 - a_8e_3;$
  $e_1 \cdot e_2 = a_0e_1 + a_7e_2 + \frac{1}{2}(a_3 + \alpha - a_7)e_3;$
  $e_1 \cdot e_3 = \frac{1}{2}(a_3 + \alpha + a_7)e_3;$
  $e_1 \cdot e_4 = a_1e_1 - \frac{1}{2a_0}(a_3 + \alpha - a_7)a_1e_2 - \frac{1}{2a_0}(a_3 + \alpha - a_7)a_1e_3 + \frac{1}{2}(a_3 + \alpha + a_7)e_4;$
  $e_2 \cdot e_2 = \frac{a_0a_7}{a_8}e_1 + \frac{a_8a_0-a_3a_7+a_7^2}{a_8}e_2 + \frac{1}{a_8}(a_8a_0 + \alpha a_7)e_3;$
  $e_2 \cdot e_3 = \frac{1}{2a_8}(2a_8a_0 - a_3a_7 + \alpha a_7 + a_7^2)e_3;$
  $e_2 \cdot e_4 = \frac{a_7a_1}{a_8}e_1 - \frac{(a_7(a_3+\alpha-a_7)a_1)}{2a_8a_0}e_2 + a_6e_3 + \frac{1}{2a_8}(2a_8a_0 - a_3a_7 + \alpha a_7 + a_7^2)e_4;$
  $e_3 \cdot e_4 = (-(\frac{(a_7(a_3+\alpha-a_7)a_1)}{2a_8a_0}) + a_6)e_3;$
  $e_4 \cdot e_4 = ((a_3^4a_7^3a_1^2 + a_7^6(a_7 - \beta)a_1^2 + a_3^3a_7^2a_1(-4a_7^2a_1 + a_7\beta a_1 - 2a_8a_0a_6) + 2a_8a_0a_7^4a_1(-\beta(2a_1 + a_6) + a_7(3a_1 + a_6)) - 2a_8^3a_0^3(\beta(a_1 - a_6^2 + 2a_7\sigma) + a_8^2a_0^2a_7^2(-\beta\rho_1 + a_7(7a_1^2 + 10a_1a_6 + a_6^2)) + a_3^2a_7(3a_7^3(2a_7 - \beta)a_1^2 - a_8^2a_0^2\sigma + 2a_8a_0a_7a_1(-\beta a_6 + 3a_7(a_1 + a_6))) + a_3a_7(a_7^4(-4a_7 + 3\beta)a_1^2 + 2a_8a_0a_7^2a_1(2\beta(a_1a_0 + a_6) - 3a_7(2a_1 + a_6)) + a_8^2a_0^2(\beta(a_1 -$

$a_6)^2 - 2a_7\rho_2)))/\gamma)e_1$

$+(-a_3^4a_7^2a_1^2 - a_7^5(-a_7+\beta)a_1^2 + a_3^3a_7a_1(4a_7^2a_1 - a_7\beta a_1a_0 + 2a_8a_0a_6) + 4a_8^3a_0^3\sigma + 2a_8a_0a_7^3a_1(\beta(2a_1+a_6) - a_7(3a_1+a_6)) + a_8^2a_0^2a_7(\beta\rho_1 - a_7(7a_1^2+10a_1a_6+a_6^2)) + a_3^2(3a_7^3(-2a_7+\beta)a_1^2 + a_8^2a_0^2\sigma + 2a_8a_0a_7a_0(\beta a_6 - 3a_7(a_1+a_6))) + a_3(a_7^4(4a_7-3\beta)a_1^2 + 2a_8a_0a_7^2a_1(-2\beta(a_1+a_6) + 3a_7(2a_1+a_6)) + a_8^2a_0^2(\beta(a_1-a_6)^2 + 2a_7\rho_2)))/\gamma)e_2$

$+((a_3^4a_7^2a_1^2 + a_7^5(a_7-\beta)a_1^2 + a_3^3a_7a_1(-4a_7^2a_1 + a_7\beta a_1 - 2a_8a_0a_6) - 4a_8^3a_0^3\sigma + 2a_8a_0a_7^3a_1(-\beta(2a_1+a_6) + a_7(3a_1+a_6)) + a_8^2a_0^2a_7(-\beta\rho_1 + a_7(7a_1^2+10a_1a_6+a_6^2)) + a_3^2(3a_7^3(2a_7-\beta)a_1^2 - a_8^2a_0^2\sigma + 2a_8a_0a_7a_1(-\beta a_6 + 3a_7(a_1+a_6))) - a_3(a_7^4(4a_7-3\beta)a_1^2 + 2a_8a_0a_7^2a_1(-2\beta(a_1+a_6) + 3a_7(2a_1+a_6)) + a_8^2a_0^2(\beta(a_1-a_6)^2 - 2a_7\rho_2)))/\gamma)e_3$
$+2(-\frac{(a_7(a_3+\alpha-a_7)a_1)}{2a_8a_0} + a_6)e_4$

avec
$\alpha = \sqrt{4a_8a_0 + (a_3-a_7)^2};$
$\beta = \sqrt{(a_3 + 4a_8a_0 - 2a_3a_7 + a_7^2)};$
$\sigma = (a_1^2 - 2a_1a_6 - a_6^2);$
$\gamma = (2a_8a_0(-a_3^3a_7 + a_8a_0(4a_8a_0 + a_7^2) + a_3^2(a_7a_0 + 2a_7^2) - a_3(6a_8a_0a_7 + a_7^3)));$
$\rho_1 = a_1^2 + 6a_1a_6 + a_6^2;$
$\rho_2 = a_1^2 - 6a_1a_6 - a_6^2$

- $\mathcal{P}(M^4,9)$: $e_2\cdot e_2 = a_2e_1 + a_5e_2 + a_5e_3; e_2\cdot e_3 = a_5e_3; e_2\cdot e_4 = a_{11}e_1 + a_6e_3 + a_5e_4; e_3\cdot e_4 = a_6e_3; e_4\cdot e_4 = \frac{a_6(2a_5a_{11}-a_2a_6)}{a_5^2}e_1 - \frac{a_6^2}{a_5}e_2 + \frac{a_6^2}{a_5}e_3 + 2a_6e_4.$

- $\mathcal{P}(M^4,10)$: $e_1\cdot e_1 = a_8e_2 - a_8e_3; e_1\cdot e_2 = a_7e_2; e_1\cdot e_3 = a_7e_3; e_1\cdot e_4 = a_1e_1 - \frac{a_8a_1}{a_7}e_2 + \frac{a_8a_1}{a_7}e_3 + a_7e_4; e_2\cdot e_2 = \frac{a_7^2}{a_8}e_2 + \frac{a_7^2}{a_8}e_3; e_2\cdot e_3 = \frac{a_7^2}{a_8}e_3; e_2\cdot e_4 = \frac{a_7a_1}{a_8}e_1 - a_1e_2 + a_6e_3 + \frac{a_7^2}{a_8}e_4; e_3\cdot e_4 = (a_6-a_1)e_3; e_4\cdot e_4 = 2a_1\frac{(a_6-a_+a_6)}{a_7}e_1 + \frac{a_8(a_1^2-a_6^2)}{a_7^2}e_2 - \frac{a_8(a_1^2-a_6^2)}{a_7^2}e_3 + (2a_6-a_1)e_4.$

- $\mathcal{P}(M^4,11)$: $e_1\cdot e_1 = a_8e_2 - a_8e_3; e_1\cdot e_2 = a_7e_2 - a_7e_3; e_1\cdot e_4 = a_4e_2 - a_4e_3; e_2\cdot e_2 = \frac{a_7^2}{a_8}e_2 + \frac{a_7^2}{a_8}e_3; e_2\cdot e_4 = \frac{a_7a_4}{a_8}e_2 - \frac{a_7a_4}{a_8}e_3; e_4\cdot e_4 = a_{10}e_1 + (\frac{a_4^2}{a_8} - \frac{a_8a_{10}}{a_7})e_2 - (\frac{a_4^2}{a_8} - \frac{a_8a_{10}}{a_7})e_3.$

- $\mathcal{P}(M^4,12)$: $e_1\cdot e_1 = a_3e_1; e_1\cdot e_2 = a_3e_2; e_1\cdot e_3 = a_3e_3; e_1\cdot e_4 = a_3e_4; e_2\cdot e_2 = a_5e_2 - a_5e_3; e_2\cdot e_4 = a_9e_2 + a_6e_3; e_3\cdot e_4 = (a_9 + a_6)e_3; e_4\cdot e_4 = -\frac{(a_9+a_6)^2}{a_3}e_1 + \frac{a_6^2}{a_5}e_2 - \frac{a_6^2}{a_5}e_3 + 2(a_9+a_6)e_4.$

- $\mathcal{P}(M^4,13)$: $e_1\cdot e_1 = a_3e_1; e_1\cdot e_2 = a_3e_2; e_1\cdot e_3 = a_3e_3; e_1\cdot e_4 = a_3e_4; e_2\cdot e_2 = a_5e_2 + a_5e_3; e_2\cdot e_3 = a_5e_3; e_2\cdot e_4 = a_{11}e_1 - \frac{a_3a_{11}}{a_5}e_2 + a_6e_3 + a_5e_4; e_3\cdot e_4 = (a_6 - \frac{a_3a_{11}}{a_5})e_3; e_4\cdot e_4 = \frac{a_{11}(2a_5a_6-a_3a_{11})}{a_5^2}e_1 - \frac{a_6^2}{a_5}e_2 + \frac{a_6^2}{a_5}e_3 + 2(a_6 - \frac{a_3a_{11}}{a_5})e_4.$

- $\mathcal{P}(M^4,14)$: $e_1\cdot e_1 = a_3e_1; e_1\cdot e_2 = a_3e_2; e_1\cdot e_3 = a_3e_3; e_1\cdot e_4 =$

$a_3e_4; e_2\cdot e_2 = a_2e_1 - 2\lambda e_2; e_2\cdot e_3 = -\lambda e_3; e_2\cdot e_4 = a_{11}e_1 - \frac{\lambda a_{11}}{a_2}e_2 - \lambda e_3 + a_5e_4; e_3\cdot e_4 = -\frac{\lambda a_{11}}{a_2}e_3; e_4\cdot e_4 = a_{10}e_1 + \frac{\lambda(a_{11}^2 - a_2a_{10})}{a_2^2}e_2 - \frac{\lambda(a_{11}^2 - a_2a_{10})}{a_2^2}e_3 - \frac{2\lambda a_{11}}{a_2}e_4.$

– $\mathcal{P}(M^4, 15)$: $e_1\cdot e_1 = a_3e_1; e_1\cdot e_2 = a_3e_2; e_1\cdot e_3 = a_3e_3; e_1\cdot e_4 = a_3e_4; e_2\cdot e_2 = a_2e_1 + 2\lambda e_2; e_2\cdot e_3 = \lambda a_2e_3; e_2\cdot e_4 = a_{11}e_1 + \frac{a_{11}\lambda}{a_2}e_2 + \lambda e_3 + a_5e_4; e_3\cdot e_4 = \frac{a_{11}\lambda}{a_2}e_3; e_4\cdot e_4 = a_{10}e_1 - \frac{\lambda(a_{11}^2 - a_2a_{10})}{a_2^2}e_2 + \frac{\lambda(a_{11}^2 - a_2a_{10})}{a_2^2}e_3 + \frac{2\lambda a_{11}}{a_2}e_4.$
avec $\lambda = \imath\sqrt{a_2a_3}$

– $\mathcal{P}(M^4, 16)$: $e_1\cdot e_1 = a_3e_1; e_1\cdot e_2 = a_0e_1; e_1\cdot e_4 = a_1e_1; e_2\cdot e_2 = a_2e_1 + (a_0 - \frac{a_3a_2}{a_0})e_2 - (a_0 - \frac{a_3a_2}{a_0})e_3; e_2\cdot e_4 = a_{11}e_1 + (a_1 - \frac{a_3a_{11}}{a_0})e_2 - (a_1 - \frac{a_3a_{11}}{a_0})e_3; e_4\cdot e_4 = \frac{(a_1^2a_2 - 2a_0a_1a_{11} + a_3a_{11}^2)}{(-a_0^2 + a_3a_2)}e_1 + \frac{(a_0a_1 - a_3a_{11})^2}{a_0^3 - a_3a_0a_2}e_2 - \frac{(a_0a_1 - a_3a_{11})^2}{a_0^3 - a_3a_0a_2}e_3.$

– $\mathcal{P}(M^4, 17)$: $e_1\cdot e_1 = a_3e_1; e_1\cdot e_2 = a_0e_1; e_1\cdot e_4 = a_1e_1; e_2\cdot e_2 = a_2e_1 + (a_0 - \frac{a_3a_2}{a_0})e_2 + (a_0 - \frac{a_3a_2}{a_0})e_3; e_2\cdot e_3 = (a_0 - \frac{a_3a_2}{a_0})e_3; e_2\cdot e_4 = \frac{a_1a_2}{a_0}e_1 + a_6e_3 + (a_0 - \frac{a_3a_2}{a_0})e_4; e_3\cdot e_4 = a_6e_3; e_4\cdot e_4 = \frac{a_3a_1a_2(a_1 - 2a_6) - a_0^2(a_1 - a_6)^2)}{(a_3(-a_0^2 + a_3a_2))}e_1 + \frac{a_0a_6^2}{-a_0^2 + a_3a_2}e_2 + \frac{a_0a_6^2}{a_0^2 - a_3a_2}e_3 + 2a_6e_4.$

– $\mathcal{P}(M^4, 18)$: $e_1\cdot e_1 = a_3e_1 + a_8e_2 - a_8e_3; e_1\cdot e_4 = a_1e_1 + \frac{a_8a_1}{a_3}e_2 - \frac{a_8a_1}{a_3}e_3; e_4\cdot e_4 = \frac{a_1^2}{a_3}e_1 + a_{12}e_2 - a_{12}e_3.$

– $\mathcal{P}(M^4, 19)$: $e_1\cdot e_1 = a_3e_1 + a_8e_2 - a_8e_3; e_1\cdot e_2 = a_3e_2; e_1\cdot e_3 = a_3e_3; e_1\cdot e_4 = a_4e_2 - a_4e_3 + a_3e_4; e_2\cdot e_4 = \frac{a_3a_4}{a_8}e_2; e_3\cdot e_4 = \frac{a_3a_4}{a_8}e_3; e_4\cdot e_4 = \frac{-a_3a_4^2}{a_8^2}e_1 + a_{12}e_2 - a_{12}e_3 + 2\frac{a_3a_4}{a_8}e_4.$

– $\mathcal{P}(M^4, 20)$: $e_1\cdot e_1 = a_3e_1 + a_8e_2 - a_8e_3; e_1\cdot e_2 = a_3e_2 - a_3e_3; e_1\cdot e_4 = a_1e_1 + a_4e_2 - a_4e_3; e_2\cdot e_4 = a_1e_2 - a_1e_3; e_4\cdot e_4 = \frac{a_1^2}{a_3}e_1 - \frac{a_1(a_8a_1 - 2a_3a_4)}{a_3^2}e_2 + \frac{a_1(a_8a_1 - 2a_3a_4)}{a_3^2}e_3.$

– $\mathcal{P}(M^4, 21)$: $e_1\cdot e_1 = a_3e_1 + te_2 - te_3; e_1\cdot e_2 = a_7e_2 + (a_3 - a_7)e_3; e_1\cdot e_3 = a_3e_3; e_1\cdot e_4 = a_4e_2 - a_4e_3 + a_3e_4; e_2\cdot e_2 = -\frac{a_7(a_3 - a_7)}{a_8}e_2 + \frac{a_7(a_3 - a_7)}{a_8}e_3; e_2\cdot e_4 = \frac{a_7a_4}{a_8}e_2 + a_6e_3; e_3\cdot e_4 = (\frac{a_7a_4}{a_8} + a_6)e_3; e_4\cdot e_4 = \frac{(\frac{a_7a_4}{a_8} + a_6)^2}{a_3}e_1 + \frac{(\frac{a_7a_4^2}{a_8} + 2a_4a_6 - \frac{a_8(\frac{a_7a_4}{a_8} + a_6)^2}{a_3})}{(a_3 - a_7)}e_2 + \frac{((a_7a_4 + a_8a_6)^2 - a_3a_4(a_7a_4 + 2a_8a_6))}{(a_3a_8(a_3 - a_7))}e_3 + 2(\frac{a_7a_4}{a_8} + a_6)e_4.$

– $\mathcal{P}(M^4, 22)$: $e_1\cdot e_1 = a_3e_1 + a_8e_2 - a_8e_3; e_1\cdot e_2 = a_0e_1 + (a_3 - 2\mu)e_2 + \mu e_3; e_1\cdot e_3 = (a_3 - \mu)e_3; e_1\cdot e_4 = a_1e_1 - \frac{\mu a_1}{a_0}e_2 + \frac{\mu a_1}{a_0}e_3 + (a_3 - \mu)e_4; e_2\cdot e_2 = \frac{(a_3 - 2\mu a_0)}{t}e_1 + (-\frac{2\mu a_3}{a_8} - 3a_0)e_2 + a_0e_3; e_2\cdot e_3 = (-\frac{\mu a_3}{a_8} - a_0)e_3; e_2\cdot e_4 = \frac{(a_3 - 2\mu a_1)}{a_8}e_1 - (2 + \frac{\mu a_3}{a_8a_0})be_2 + a_1e_3 + (-\frac{\mu a_3}{a_8} - a_0)e_4; e_3\cdot e_4 = (-1 - \frac{\mu a_3}{a_8a_0})a_1e_3; e_4\cdot e_4 = a_{10}e_1 + (\frac{\mu a_3a_1^2}{a_0^2a_8} + \frac{a_1^2 - \mu a_{10}}{a_0})e_2 + \frac{(\mu(-a_3a_1^2 + \mu a_1^2 + a_8a_0a_{10}))}{(a_0^2a_8}e_3 + 2(-1 - \frac{\mu a_3}{a_8a_0})a_1e_4.$

– $\mathcal{P}(M^4, 23)$: $e_1 \cdot e_1 = a_3e_1 + a_8e_2 - a_8e_3; e_1 \cdot e_2 = a_0e_1 + (a_3 + 2\mu)e_2 - \mu e_3; e_1 \cdot e_3 = (a_3 + \mu)e_3; e_1 \cdot e_4 = a_1e_1 + \frac{\mu a_1}{a_0}e_2 - \frac{\mu a_1}{a_0}e_3 + (a_3 + \mu)e_4; e_2 \cdot e_2 = \frac{(a_3+2\mu a_0)}{a_8}e_1 + (\frac{2\mu a_3}{a_8} - 3a_0)e_2 + a_0e_3; e_2 \cdot e_3 = (\frac{\mu a_3}{a_8} - a_0)e_3; e_2 \cdot e_4 = \frac{(a_3+2\mu a_1)}{a_8}e_1 - (2 - \frac{\mu a_3}{a_8a_0})a_1e_2 + a_1e_3 + (\frac{\mu a_3}{a_8} - a_0)e_4; e_3 \cdot e_4 = (-1 + \frac{\mu a_3}{a_8a_0})a_1e_3; e_4 \cdot e_4 = a_{10}e_1 + (-\frac{\mu a_3a_1^2}{a_0^2a_8} + \frac{a_1^2+\mu a_{10}}{a_0})e_2 + \frac{(\mu(a_3a_1^2+\mu a_1^2-a_8a_0a_{10}))}{(a_0^2a_8}e_3 + 2(-1 + \frac{\mu a_3}{a_8a_0})a_1e_4.$
avec $\mu = \imath\sqrt{a_0a_8}$

– $\mathcal{P}(M^4, 24)$: $e_1 \cdot e_1 = a_3e_1 + a_8e_2 - a_8e_3; e_1 \cdot e_2 = a_0e_1 + \frac{a_8a_0}{a_3}e_2 - \frac{a_8a_0}{a_3}e_3; e_1 \cdot e_4 = a_1e_1 + \frac{a_8a_1}{a_3}e_2 - \frac{a_8a_1}{a_3}e_3; e_2 \cdot e_2 = \frac{a_0^2}{a_3}e_1 + \frac{a_8a_0^2}{a_3^2}e_2 - \frac{a_8a_0^2}{a_3^2}e_3; e_2 \cdot e_4 = \frac{a_0a_1}{a_3}e_1 + \frac{a_8a_0a_1}{a_3^2}e_2 - \frac{a_8a_0a_1}{a_3^2}e_3; e_4 \cdot e_4 = a_{10}e_1 + (-\frac{\mu a_3a_1^2}{a_0^2a_8} + \frac{a_1^2+\mu a_{10}}{a_0})e_2 - \frac{((1+\frac{a_8a_0}{a_3^2})a_1^2-a_3a_{10})}{a_0}e_3.$

– $\mathcal{P}(M^4, 25)$: $e_1 \cdot e_1 = a_3e_1 + a_8e_2 - a_8e_3; e_1 \cdot e_2 = \frac{-a_3^2}{a_8}e_1 + 3a_3e_2 - a_3e_3; e_1 \cdot e_3 = 2a_3e_3; e_1 \cdot e_4 = a_1e_1 - \frac{a_8a_1}{a_3}e_2 + \frac{a_8a_1}{a}e_3 + 2a_3e_4; e_2 \cdot e_2 = \frac{-3a_3^3}{a_8^2}e_1 + \frac{5a_3^2}{a_8}e_2 - \frac{a_3^2}{a_8}e_3; e_2 \cdot e_3 = \frac{2a_3^2}{a_8}e_3; e_2 \cdot e_4 = \frac{3a_3a_1}{a_8}e_1 - 3a_1e_2 + a_1e_3 + \frac{2a_3^2}{a_8}e_4; e_3 \cdot e_4 = -2a_1e_3; e_4 \cdot e_4 = a_{10}e_1 - \frac{a_8(2a_1^2+a_3a_{10})}{a_3^2}e_2 + \frac{a_8(2a_1^2+a_3a_{10})}{a_3^2}e_3 - 4a_1e_4.$

4. – $\mathcal{P}(M^5, 1)$: $e_2 \cdot e_2 = a_0e_1 + a_1e_3; e_2 \cdot e_4 = a_2e_1 + a_3e_3; e_4 \cdot e_4 = a_4e_1 + a_5e_3;$

– $\mathcal{P}(M^5, 2)$: $e_1 \cdot e_2 = a_6e_3; e_1 \cdot e_4 = a_7e_3; e_2 \cdot e_2 = a_0e_1 + a_1e_3; e_2 \cdot e_4 = \frac{a_7a_0}{a_6}e_1 + a_3e_3; e_4 \cdot e_4 = \frac{a_0a_7^2}{a_6^2}e_1 + a_5e_2.$

– $\mathcal{P}(M^5, 3)$: $e_1 \cdot e_1 = a_8e_1 + a_9e_3; e_1 \cdot e_2 = a_8e_2 + a_6e_3; e_1 \cdot e_3 = a_8e_3; e_1 \cdot e_4 = a_7e_3 + a_8e_4; e_2 \cdot e_2 = -\frac{a_8a_6^2}{a_9^2}e_1 + \frac{2a_8a_6}{a_9}e_2 + a_1e_3; e_2 \cdot e_3 = \frac{a_8a_6}{a_9}e_3; e_2 \cdot e_4 = -\frac{a_8a_6a_7}{a_9^2}e_1 + \frac{a_8a_7}{a_9}e_2 + a_3e_3 + \frac{a_8a_6}{a_9}e_4; e_3 \cdot e_4 = \frac{a_8a_7}{a_6}e_3; e_4 \cdot e_4 = -\frac{a_8a_7^2}{a_9^2}e_1 + a_5e_3 + \frac{2a_8a_7}{a_9}e_4.$

– $\mathcal{P}(M^5, 4)$: $e_1 \cdot e_4 = a_7e_3; e_2 \cdot e_2 = a_1e_3; e_2 \cdot e_4 = a_3e_3; e_4 \cdot e_4 = a_8e_1 + b_1e_3.$

– $\mathcal{P}(M^5, 5)$: $e_1 \cdot e_1 = a_8e_1; e_1 \cdot e_4 = a_{10}e_1; e_2 \cdot e_2 = a_1e_3; e_2 \cdot e_4 = a_3e_3; e_4 \cdot e_4 = \frac{a_{10}^2}{a_8}e_1 + a_5e_3.$

– $\mathcal{P}(M^5, 6)$: $e_1 \cdot e_1 = a_8e_1; e_1 \cdot e_2 = a_8e_2; e_1 \cdot e_3 = a_8e_3; e_1 \cdot e_4 = a_8e_4; e_2 \cdot e_2 = a_1e_3; e_2 \cdot e_4 = a_{11}e_2 + a_3e_3; e_3 \cdot e_2 = a_{11}e_3; e_4 \cdot e_4 = -\frac{a_{11}^2}{a_8}e_1 + a_5e_3 + 2a_{11}e_4.$

– $\mathcal{P}(M^5, 7)$: $e_1 \cdot e_1 = a_8e_1; e_1 \cdot e_2 = a_8e_2; e_1 \cdot e_3 = a_8e_3; e_1 \cdot e_4 = a_8e_4; e_2 \cdot e_2 = a_0e_1 - 2\mu e_2 + a_1e_3; e_2 \cdot e_3 = -\mu e_3; e_2 \cdot e_4 = a_2e_1 -$

$\frac{\mu a_2}{a_0}e_2 + a_3e_3 - \mu e_4; e_3 \cdot e_4 = -\frac{\mu a_2}{a_0}e_3; e_4 \cdot e_4 = \frac{a_2^2}{a_0}e_1 + a_5e_3 - \frac{2\mu a_2}{a_0}e_4.$

- $\mathcal{P}(M^5, 8)$:$e_1 \cdot e_1 = a_8e_1; e_1 \cdot e_2 = a_8e_2; e_1 \cdot e_3 = a_8e_3; e_1 \cdot e_4 = a_8e_4; e_2 \cdot e_2 = a_0e_1 + 2\mu e_2 + a_1e_3; e_2 \cdot e_3 = \mu e_3; e_2 \cdot e_4 = a_2e_1 + \frac{\mu a_2}{a_0}e_2 + a_3e_3 + \mu e_4; e_3 \cdot e_4 = \frac{\mu a_2}{a_0}e_3; e_4 \cdot e_4 = \frac{a_2^2}{a_0}e_1 + a_5e_3 + \frac{2\mu a_2}{a_0}e_4.$

avec $\mu = \imath\sqrt{a_0a_8}$

- $\mathcal{P}(M^5, 9)$: $e_1 \cdot e_1 = a_8e_1; e_1 \cdot e_2 = a_{12}e_1; e_1 \cdot e_4 = a_{10}e_1; e_2 \cdot e_2 = \frac{a_{12}^2}{a_8}e_1 + a_1e_3; e_2 \cdot e_4 = \frac{a_{12}a_{10}}{a_8}e_1 + a_3e_3; e_4 \cdot e_4 = \frac{a_{10}^2}{a_8}e_1 + a_5e_3.$

5. - $\mathcal{P}(M^6_{0,0}, 1)$: $e_1 \cdot e_1 = a_0e_2 - a_0e_3; e_1 \cdot e_4 = a_1e_2 - a_1e_3; e_4 \cdot e_4 = a_2e_2 - a_2e_3.$
   - $\mathcal{P}(M^6_{0,b}, 2)$: $e_4 \cdot e_4 = a_3e_1 + \frac{a_3}{a_4}e_2 - \frac{a_3}{a_4}e_3.$
   - $\mathcal{P}(M^6_{0,b}, 3)$: $e_1 \cdot e_1 = a_5e_1 - \frac{a_5}{a_4}e_2 + \frac{a_5}{a_4}e_3; e_1 \cdot e_2 = a_5e_2; e_1 \cdot e_3 = a_5e_3; e_1 \cdot e_4 = a_1e_2 - a_1e_3 + a_5e_4; e_2 \cdot e_4 = -a_4a_1e_2; e_3 \cdot e_4 = -a_4a_1e_3; e_4 \cdot e_4 = -\frac{a_4^2a_1^2}{a_5}e_1 - \frac{a_4^2a_1^2}{a_5}e_2 + \frac{a_4^2a_1^2}{a_5}e_3 - 2a_4a_1e_4.$
   - $\mathcal{P}(M^6_{0,b}, 4)$: $e_1 \cdot e_1 = a_5e_1 + \frac{a_5}{a_4}e_2 - \frac{a_5}{a_4}e_3; e_1 \cdot e_4 = a_6e_1 + \frac{a_6}{a_4}e_2 - \frac{a_6}{a_4}e_3; e_4 \cdot e_4 = \frac{a_6^2}{a_5}e_1 + \frac{a_6^2}{a_4a_5}e_2 - \frac{a_6^2}{a_4a_5}e_3.$

6. - $\mathcal{P}(M^7_{0,b}, 1)$: $e_4 \cdot e_4 = a_3e_1 - \frac{a_3}{a_4}e_3.$
   - $\mathcal{P}(M^7_{0,b}, 2)$: $e_1 \cdot e_1 = a_5e_1 - \frac{a_5}{a_4}e_3; e_4 \cdot e_4 = \frac{a_6^2}{a_5}e_1 - \frac{a_6^2}{a_4a_5}e_3.$
   - $\mathcal{P}(M^7_{0,b}, 3)$: $e_1 \cdot e_1 = a_5e_1 + \frac{a_5}{a_4}e_3; e_1 \cdot e_2 = a_5e_2; e_1 \cdot e_3 = a_5e_3; e_1 \cdot e_4 = a_7e_3 + a_5e_4; e_2 \cdot e_4 = a_4a_7e_2; e_3 \cdot e_4 = a_4a_7e_3; e_4 \cdot e_4 = -\frac{a_7^2a_4^2}{a_5}e_1 + \frac{a_4a_7^2}{a_5}e_3 + 2a_7e_4.$

7. $\mathcal{P}(M^8, 1)$ *La multiplication correspondante est l'algèbre nulle.*
8. $\mathcal{P}(M^9_{-\frac{1}{4},b}, 1)$: $e_1 \cdot e_3 = a_0e_1 - \frac{1}{2}a_0e_2; e_1 \cdot e_4 = \frac{1}{2}a_0e_1 - \frac{1}{4}a_0e_2; e_2 \cdot e_3 = 2a_0e_1 - a_0e_2; e_2 \cdot e_4 = a_0e_1 - \frac{1}{2}a_0e_2; e_3 \cdot e_3 = -2a_0e_3 + 4a_0e_4; e_3 \cdot e_4 = -a_0e_3 + 2a_0e_4; e_4 \cdot e_4 = -\frac{1}{2}a_0e_3 + a_0e_4.$
9. $\mathcal{P}(M^{11}, 1)$: *La multiplication correspondante est l'algèbre nulle.*
10. $\mathcal{P}(M^{12}, 1)$ *La multiplication correspondante est l'algèbre nulle.*
11. $\mathcal{P}(M^{13}_0, 1)$: $e_1 \cdot e_4 = a_0e_2; e_3 \cdot e_4 = a_0e_2; e_4 \cdot e_4 = -a_0e_1 + 2a_0e_3.$
12. - $\mathcal{P}(M^{14}_0, 1)$: $e_3 \cdot e_3 = a_0e_2; e_3 \cdot e_4 = a_1e_2; e_4 \cdot e_4 = a_2e_2.$
    - $\mathcal{P}(M^{14}_a, 2)$: $e_4 \cdot e_4 = a_2e_2.$

avec $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ *des paramètres dans* $\mathbb{K}$

Dans ce qui suit, nous donnons toutes les traces τ sur les algèbres de Poisson énumérées ci-dessus.

Algèbre de Poisson	**Trace**	**Algèbre ternaire de Nambu-Poisson induite**
Algèbre de Poisson abélienne	Toutes les formes linéaires	Algèbre ternaire de Nambu-Poisson abélienne.
$\mathcal{P}(M_0^3,1),\mathcal{P}(M_0^3,2),$ $\mathcal{P}(M_0^3,3),\mathcal{P}(M^5,4),$ $\mathcal{P}(M^5,6),\mathcal{P}(M^5,7),$ $\mathcal{P}(M^5,8),\mathcal{P}(M^5,9),$ $\mathcal{P}(M_{0,b}^6,2),\mathcal{P}(M_{0,b}^6,3),$ $\mathcal{P}(M_{0,b}^6,4),\mathcal{P}(M_{0,b}^7,1)$ $\mathcal{P}(M_{0,b}^7,2),\mathcal{P}(M_{0,b}^7,3),$ $\mathcal{P}(M_0^{13},1),\mathcal{P}(M_{-\frac{1}{4}}^9,1)$ $\mathcal{P}(M^4,10)$	$\tau(x)=0$	Algèbre ternaire de Nambu-Poisson abélienne
$\mathcal{P}(M^4,2),\mathcal{P}(M^4,3)$ $\mathcal{P}(M^4,5),\mathcal{P}(M^4,6)$ $\mathcal{P}(M^4,7),\mathcal{P}(M^4,8)$ $\mathcal{P}(M^4,9),\mathcal{P}(M^4,11)$ $\mathcal{P}(M^4,12),\mathcal{P}(M^4,13)$ $\mathcal{P}(M^4,14),\mathcal{P}(M^4,15)$ $\mathcal{P}(M^4,16),\mathcal{P}(M^4,17)$ $\mathcal{P}(M^4,18),\mathcal{P}(M^4,19)$ $\mathcal{P}(M^4,20),\mathcal{P}(M^4,21)$ $\mathcal{P}(M^4,22),\mathcal{P}(M^4,23)$ $\mathcal{P}(M^4,24),\mathcal{P}(M^4,25)$	$\tau(x)=\gamma_4x_4$	Algèbre ternaire de Nambu-Poisson abélienne
$\mathcal{P}(M^5,1)_{(a_0=a_2=a_4=0)},$ $\mathcal{P}(M^5,2)_{(a_0=0)},$ $\mathcal{P}(M^5,3)_{(a_8=0)},$ $\mathcal{P}(M^5,3)_{(a_4=0)},$ $\mathcal{P}(M^5,7)_{(a_0=a_2=a_8=0)},$ $\mathcal{P}(M^5,8)_{(a_0=a_2=a_8=0)},$	$\tau(x)=$ $\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\gamma_4x_4$	$\{e_2,e_4,e_1\}=\gamma_1e_3$
$\mathcal{P}(M_0^{14},1),\mathcal{P}(M_a^{14},2)$	$\tau(x)=\gamma_4x_4$	$\{e_1,e_3,e_4\}=\gamma_4e_2$
$\mathcal{P}(M^4,1)_{(a_1=a_2=0)},$ $\mathcal{P}(M^4,11)_{(a_{10}=0)}$ $\mathcal{P}(M^4,20)_{(a_3=0)}$ $\mathcal{P}(M_{0,0}^6,1)$	$\tau(x)=$ $\gamma_1x_1+\gamma_4x_4$	$\{e_1,e_3,e_4\}=\gamma_1e_3$ $\{e_1,e_2,e_4\}=\gamma_1e_3$
$\mathcal{P}(M^4,14)_{(a_3=0)},$ $\mathcal{P}(M^4,15)_{(a_3=0)},$ $\mathcal{P}(M^4,18)_{(a_8=a_{12}=0)}$ $\mathcal{P}(M^4,24)_{(a_8=a_{10}=a_1=0)}$	$\tau(x)=$ $\gamma_2x_2+\gamma_4x_4$	$\{e_2,e_3,e_4\}=\gamma_2e_3$

4.3 Algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson induites par des algèbres Hom-Poisson

Dans cette section, on donne un résultat qui permet de construire des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson à partir des algèbres Hom-Poisson.

Définition 4.5 *Une algèbre Hom-Poisson est un quadruple $(A, \mu, \{.,.\}, \alpha)$ où A est un espace vectoriel, $\mu : A \times A \to A$ une application bilinéaire, $\{.,.\} : A \times A \to A$ un crochet, et $\alpha : A \to A$ une application linéaire telle que :*

1. *(A, μ, α) est une algèbre commutative binaire Hom-associative,*
2. *$(A, \{.,.\}, \alpha)$ est une algèbre Hom-Lie,*
3. *pour tout $x, y, z \in A$*

$$\{\mu(x,y), \alpha(z)\} = \mu(\alpha(x)\{y,z\}) + \mu(\{x,z\}\alpha(y)). \tag{4.6}$$

la troisième condition est dite identité Hom-Leibniz.

Une algèbre non-commutative Hom-Poisson est définie par une multiplication qui n'est pas commutative.

Remarque 4.3 *Nous obtenons la structure classique de Poisson lorsque $\alpha = Id$.*

Définition 4.6 *Une algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson est désigné par $(A, \mu, \beta, \{\cdot,\cdot,\cdot\}, \widehat{\alpha})$ dans lequel A est un espace vectoriel, $\{.,.,.\} : A \times A \times A \to A$ une opération ternaire, $\mu : A \times A \to A$ une application bilinéaire, une paire d'applications linéaires $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ où $\alpha_1, \alpha_2 : A \to A$, et une application linéaire $\beta : A \to A$ tel que*

1. *(A, μ, β) est une algèbre commutative binaire Hom-associative,*
2. *$(A, \{.,.,.\}, \widetilde{\alpha})$ est une algèbre ternaire Hom-Nambu-Lie,*
3. *$\{\mu(x_1,x_2), \alpha_1(x_3), \alpha_2(x_4)\} = \mu(\beta(x_1), \{x_2, x_3, x_4\}) + \mu(\{x_1, x_3, x_4\}, \beta(x_2))$.*

Une algèbre non-commutative Hom-Poisson est définie sauf si la multiplication n'est pas commutative.

Remarque 4.4 *Nous récupérons l'algèbre ternaire de Nambu-Poisson classique lorsque $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = Id$.*
Dans la suite nous allons principalement s'intéressé à la classe des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson où $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \beta$, pour laquelle nous les notons par le quadruple $(A, \mu, \{.,.,.\}, \alpha)$.

Nous proposons une procédure de construction des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson à partir des crochets binaires des algèbres Hom-Poisson et une fonction trace qui satisfait certaines conditions de compatibilités.

Théorème 4.3 *Soit $(A, \cdot, \{.,.\}, \alpha)$ une algèbre Hom-Poisson, supposons que τ est $\{.,.\}$-trace sur A satisfaisant*

$$\begin{aligned} \tau(\alpha(x))\tau(y) &= \tau(x)\tau(\alpha(y)), & (4.7)\\ \tau(x\cdot y)\alpha(\{z,u\}) &= \alpha(x)\cdot\tau(y)\{z,u\} + \tau(x)\{z,u\}\cdot\alpha(y), & (4.8)\\ \tau(\alpha(z)) &= \tau(z), & (4.9) \end{aligned}$$

pour tout $x, y, z, u \in A$.
Alors $(A, \cdot, \{.,.,.\}_\tau, \alpha)$ est une algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson, et on dit que c'est une algèbre induite par une algèbre Hom-poisson.

Démonstration. D'après le lemme 4.1, $\{.,.,.\}_\tau$ est antisymétrique et l'identité Hom-Nambu est prouvée en utilisant la condition 4.7 voir [6], il suffit de prouver que l'identité Hom-Leibniz est satisfaite. Ainsi l'identité Hom-Leibniz est écrite comme suit :

$$\{x \cdot y, \alpha(z), \alpha(u)\}_\tau = \alpha(x) \cdot \{y, z, u\}_\tau + \{x, z, u\}_\tau \cdot \alpha(y).$$

En développant, la partie gauche est

$$\begin{aligned} LHS =& \tau(x \cdot y)\{\alpha(z), \alpha(u)\} + \tau(\alpha(z))\{\alpha(u), x \cdot y\} + \tau(\alpha(u))\{x \cdot y, \alpha(z)\} \\ =& \tau(x \cdot y)\{\alpha(z), \alpha(u)\} + \tau(\alpha(z))(\alpha(x) \cdot \{u, y\} + \{u, x\} \cdot \alpha(y)) \\ &+ \tau(\alpha(u))(\alpha(x) \cdot \{y, z\} + \{x, z\} \cdot \alpha(y)) \\ =& \tau(x \cdot y)\alpha(\{z, u\}) + \tau(\alpha(z))\alpha(x) \cdot \{u, y\} + \tau(\alpha(z))\{u, x\} \cdot \alpha(y) \\ &+ \tau(\alpha(u))\alpha(x) \cdot \{y, z\} + \tau(\alpha(u))\{x, z\} \cdot \alpha(y), \end{aligned}$$

et la partie droite est

$$\begin{aligned} RHS =& \alpha(x) \cdot \tau(y)\{z, u\} + \alpha(x) \cdot \tau(z)\{u, y\} + \alpha(x) \cdot \tau(u)\{y, z\} \\ &+ \tau(x)\{z, u\} \cdot \alpha(y) + \tau(z)\{u, x\} \cdot \alpha(y) + \tau(u)\{x, z\} \cdot \alpha(y), \end{aligned}$$

en utilisant 4.8 et 4.9 les termes de RHS disparaîtra avec ceux de la gauche. Par conséquent, l'identité Hom-Leibniz pour le crochet ternaire est satisfaite, si et seulement si les conditions 4.8 et 4.9 sont vérifiées. □

4.3.1 Exemples

En utilisant la classification en dimension 4 des algèbres de Poisson et le principe de twist, nous avons pu construire des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson en dimension 4, à partir de cela et selon la méthode décrite dans le théorème (4.3) nous fournissons des exemples d'algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson induites par des algèbres Hom-Poisson.

Exemple 4.4 *Soit $(A, \cdot, \{.,.\}, \alpha)$ une algèbre Hom-Poisson sur un espace vectoriel de dimension 4, A engendré par $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Le crochet binaire qui est antisymétrique est défini par*

$$\{e_2, e_4\} = f_2^2 e_3,$$

et la multiplication commutative par

$$e_2 \cdot e_2 = a f_2^2 e_3, \quad e_2 \cdot e_4 = b f_2^2 e_3, \quad e_4 \cdot e_4 = c f_2^2 e_3,$$

pour tout $a, b, c \in \mathbb{K}$, les autres multiplications et crochet sont obtenus par commutativité (resp.antisymétrie) ou égaux à zéro.
avec

$$\begin{array}{llll} \alpha(e_1) & = e_1 + f_1 e_3, & \alpha(e_2) & = f_2 e_2 + f_3 e_3, \\ \alpha(e_3) & = f_2^2 e_3, & \alpha(e_4) & = f_4 e_3 + f_2 e_4, \end{array}$$

où f_1, f_2, f_3, f_4 *des paramètres dans* $\mathbb{K}$*, avec* $f_2 \neq 0$.

Soient

$$\tau(e_1) = \gamma, \tau(e_2) = \tau(e_3) = \tau(e_4) = 0,$$

pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$*. les conditions 4.7, 4.8 et 4.9 sont satisfaites, selon le théorème 4.3 nous obtenons une algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson définie par le crochet ternaire suivant*

$$\{e_1, e_2, e_4\}_\tau = \gamma f_2^2 e_3.$$

Les autres crochets sont obtenus par antisymétrie ou égaux à zéro.

Nous disons que $(A, \cdot, \{.,.,.\}_\tau, \alpha)$ *est une algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson induite par une algèbre Hom-Poisson.*

Exemple 4.5 *Soit* $(A, \cdot, \{.,.\}, \alpha)$ *une algèbre Hom-Poisson sur un espace vectoriel de dimension 4* A *engendré par* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$*. Le crochet binaire qui est antisymétrique est défini par*

$$\{e_3, e_4\} \quad = \quad \lambda e_1 + \beta e_2, \quad \{e_1, e_3\} = e_2,$$

pour tout $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$*,*

et la multiplication commutative par

$$e_3 \cdot e_3 \quad = \quad a e_2, \quad e_4 \cdot e_4 = b e_2,$$

pour tout $a, b \in \mathbb{K}$*, les autres multiplications et crochet sont obtenus par commutativité (resp.antisymétrie) ou égaux à zéro.*
avec

$$\begin{array}{llll} \alpha(e_1) & = \lambda e_1 + \beta e_2, & \alpha(e_2) & = e_2, \\ \alpha(e_3) & = \alpha e_1 + \delta e_2 + \lambda e_3, & \alpha(e_4) & = -\rho\lambda e_1 + \omega e_2 + e_4, \end{array}$$

où $\lambda, \beta, \delta, \rho, \omega$ *sont des paramètres dans* $\mathbb{K}$.

Soit

$$\tau(e_1) = \tau(e_2) = \tau(e_3) = 0, \tau(e_4) = \gamma,$$

pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$.
les conditions 4.7, 4.8et 4.9 sont satisfaites, selon le théorème 4.3 nous obtenons une algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson définie par le crochet ternaire suivant

$$\{e_1, e_3, e_4\}_\tau = \gamma e_2.$$

Les autres crochets sont obtenus par antisymmétrie ou égaux à zero.

Nous disons que $(A, \cdot, \{.,.,.\}_\tau, \alpha)$ *est une algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson induite par une algèbre Hom-Poisson.*

Un autre exemple en dimension 3

Exemple 4.6 *(Jackson $sl(2)$) L'algèbre $sl(2)$ de Jackson est une q-déformation de l'algèbre de Lie classique $sl(2)$. Elle est munie d'une structure d'algèbre Hom-Lie (qui n'est pas une structure d'algèbre de Lie) en utilisant des dérivations de Jackson. Elle est définie par rapport à une base $\{x_1, x_2, x_3\}$ par les crochets et une application linéaire α (non multiplicative)*

$$[x_1, x_2] = -2qx_2, [x_1, x_2] = -2qx_2, [x_1, x_2] = -2qx_2,$$

$$\alpha(x_1) = qx_1, \alpha(x_2) = q^2x_2, \alpha(x_3) = qx_3,$$

où q est un paramètre dans $\mathbb{K}$. Si $q = 1$ on retrouve la structure $sl(2)$ classique. Cette algèbre est munie d'une structure non-commutative Hom-Poisson si $q = -1$ et elle est définie par la multiplication non-commutative suivante

$$x_1 \cdot x_2 = ax_1, x_2 \cdot x_1 = -ax_2, x_1 \cdot x_3 = ax_3,$$

où a est un paramètre dans $\mathbb{K}$. Si $q \neq -1$ la multiplication est nulle. A partir de cette algèbre non-commutative Hom-Poisson, nous ne pouvons pas construire un crochet ternaire à partir des crochets binaires définis ci-dessus parce que les conditions du théorème 4.3 ne peuvent pas être satisfaites.

Théorème 4.4 *Soit $(A, \cdot, \{.,.,.\}_\tau)$ une algèbre ternaire de Nambu-Poisson induite par une algèbre de Poisson $(A, \cdot, \{.,.\})$, et α un endomorphisme d'une algèbre de Poisson-Lie tel que $\alpha : A \to A$ i.e. $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$ et $\alpha \circ \{x, y, z\}_\tau = \{\alpha(x), \alpha(y), \alpha(z)\}_\tau$. Alors $(A, \cdot_\alpha, \{.,.,.\}_{\tau,\alpha}, \alpha)$ est une algèbre Hom-Nambu-Poisson.*

Démonstration. [4] □

Exemple 4.7 *Soit $(A, \cdot, \{.,.\})$ une algèbre Hom-Poisson sur un espace vectoriel de dimension 4, A engendré par $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Le crochet binaire qui est antisymétrique est défini par*

$$\{e_3, e_4\} = e_1, \quad \{e_1, e_3\} = e_2,$$

et la multiplication commutative par

$$e_3 \cdot e_3 = ae_2, \quad e_3 \cdot e_4 = be_2, \quad e_4 \cdot e_4 = ce_2,$$

pour tout $a, b, c \in \mathbb{K}$, les autres multiplications et crochets sont obtenus par commutativité (resp.antisymétrie) ou égaux à zéro.
avec

$$\begin{aligned} \alpha(e_1) &= e_1 + a_1e_2, & \alpha(e_2) &= e_2, \\ \alpha(e_3) &= a_2e_1 + a_3e_2 + e_3, & \alpha(e_4) &= -a_1e_1 + a_4e_2 + e_4, \end{aligned}$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 sont des paramètres dans $\mathbb{K}$, $(A, \cdot, \{.,.\}, \alpha)$ est une algèbre Hom-Poisson.
En utilisant le théorème 4.1 et le théorème 4.3 nous obtenons une algèbre ternaire de Nambu-Poisson $(A, \cdot, \{.,.,.\}_\tau)$ et une algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson $(A, \cdot, \{.,.,.\}_\tau, \alpha)$ respectivement définie par le crochet ternaire suivant

$$\{e_1, e_3, e_4\}_\tau = \gamma_2 e_2.$$

Les autres crochets sont obtenus par antisymétrie ou égaux à zéro.
avec

$$\tau(e_1) = \tau(e_2) = \tau(e_3) = \gamma_1, \tau(e_4) = \gamma_2,$$

pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{K}$. On peut exprimer cet exemple par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(A, \cdot, \{.,.\}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tau"'] & (A, \cdot, \{.,.\}, \alpha) \arrow[d, "\tau"] \\
(A, \cdot, \{.,.,.\}_\tau) \arrow[r, "\alpha"'] & (A, \cdot, \{.,.,.\}_\tau, \alpha)
\end{tikzcd}$$

5 Cohomologie

L'algèbre homologique fournit des invariants aux structures algébriques et aux variétés. L'homologie est apparue dans les années 50 en topologie (Hurewicz, Holf, Eilenberg, Maclane, Freudenthal). La (co)homologie joue un rôle essentiel dans des nombreux domaines des mathématiques. La définition de la cohomologie à valeur dans un module a été introduite par Eilenberg et Maclane 1947. La cohomologie des algèbres associatives est dûe à Hochschild et la cohomologie des algèbres de Lie a été développée par Koszul, Chevalley et Eilenberg. Une synthèse de ces théories a été faite par Cartan et Eilenberg, en 1956, dans le cadre des catégories, basée sur le concept de catégorie dérivéee et des foncteurs dérivés (Ext et Tor).

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux cohomologies des algèbres ternaires de type Lie et de Poisson. Dans le cas des algèbres ternaires de type Lie, on rappelle la cohomologie des systèmes triples de Lie et celle des algèbres de Nambu-Lie. Par ailleurs, on rappelle la construction de Takhtajan qui permet d'obtenir la cohomologie des algèbres de Nambu-Lie à partir de la cohomologie des algèbres de Lie binaires, ainsi que la cohomologie de Poisson pour une algèbre de Poisson. On donne aussi quelques résultats originaux sur la cohomologie des algèbres Hom-Poisson et la cohomologie des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson.

5.1 Généralités

Les concepts de base de l'algèbre homologique sont ceux d'un complexe et des homomorphismes de complexes, définissant la catégorie des complexes. Un complexe $(\mathtt{C}, d)$ est un ensemble indexé $\mathtt{C} = \{\mathtt{C}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{K}$-modules ainsi qu'un ensemble indexé $d = \{d_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ des R-homomorphismes

$$d_i : \mathtt{C}_i \to \mathtt{C}_{i-1}$$

tels que

$$d_{i-1} \circ d_i = 0$$

pour tous i.

Un complexe chaîne $\mathtt{C}$ est une suite de groupes abéliens et d'homomorphismes

$$\dots \xrightarrow{d_{n+1}} \mathtt{C}_n \xrightarrow{d_n} \mathtt{C}_{n+1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots$$

avec la propriété

$$d_n \circ d_{n+1} = 0$$

pour tout n.

Un complexe chaîne peut-être considéré comme complexe cochaîne en renversant l'énumération

$$\mathtt{C}^n = \mathtt{C}_{-n}, d^n = d_{-n}$$

Un complexe cochaîne $\mathtt{C}$ est une suite de groupes abeliens et d'homomorphismes

$$\dots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathtt{C}^n \xrightarrow{d^n} \mathtt{C}^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

avec la propriété

$$d^{n+1} \circ d^n = 0$$

pour tout n.

Les homomorphismes d^n s'appellent opérateurs cobords ou codifférentiels.

Une cohomologie d'un complexe cochaîne $\mathtt{C}$ est donnée par les groupes $H^n(\mathtt{C}) = Kerd^n/Imd^{n-1}$. Les éléments de $\mathtt{C}^n$ sont les n-cochaînes, les éléments de $Z^n := Kerd^n$ sont les n-cocycles et les éléments de $B^n := Imd^{n-1}$ sont les n-cobords. Nous avons $Imd^{n-1} \subset Kerd^n$, c'est-à-dire $B^n \subset Z^n$.

Complexes d'algèbres ternaires Nous présentons dans la suite une notion de p-cochaînes pour une algèbre n-aire.

Définition 5.1 *Nous appelons p-cochaîne n-aire une application p-linéaire*

$$\varphi : V^{\times(2p+1)} \longrightarrow V.$$

L'ensemble des p-cochaînes sur V est

$$\mathtt{C}^p(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = \{\varphi : V^{\times(2p+1)} = \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{2p+1 fois} \longrightarrow V\}.$$

Remarque 5.1 *L'ensemble* $\mathtt{C}^p(\mathcal{A},\mathcal{A})$ *est un groupe abélien.*

On a un complexe cochaîne pour une algèbre n-aire s'il existe une suite de groupes abéliens et d'homomorphismes

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathtt{C}^n \xrightarrow{\delta^n} \mathtt{C}^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \cdots$$

tel que

$$\delta^{n+1}\circ\delta^n = 0,$$

pour tout n.

Soient (C,d) et (C',d') deux complexes, un homomorphisme de C dans C' est un ensemble $\alpha = \{\alpha_i : i\in\mathbb{Z}\}$ d'homomoprphismes $\alpha_i : C_i \to C_{i-1}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & C_{i-1} \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] \\ C'_i \arrow[r, "d'_i"'] & C'_{i-1} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

5.2 (Co)homologie de Hochschild

On rappelle dans ce paragraphe la définition de l'homologie (resp. la cohomologie) de Hochschild introduite dans [31]. Elles concernent les algèbres associatives et s'étendent naturellemnt aux algèbres de Hopf. Soit A une algèbre associative sur le corps $\mathbb{K}$, μ sa multiplication (on note parfois $\mu(x,y)$ par xy) et M un A-bimodule (A-A-bimodule qui est équivalent à $A\otimes A^{op}$-module à droite et un $A\otimes A^{op}$-module à gauche).

5.2.1 Homologie de Hochschild

On considère, pour $n>0$, les modules $C_n(A,M) := M\otimes A^{\otimes n}$. Un bord de Hochschild est donné par des $\mathbb{K}$-homomorphismes $d : M\otimes A^{\otimes n} \to M\otimes A^{\otimes n-1}$ définies par

$$d(m,a_1,...,a_n) := (ma_1,a_2,...,a_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(m,a_1,...,a_ia_{i+1},...,a_n) + (-1)^n(a_nm,a_1,...,a_{n-1}).$$

On définit le complexe de Hochschild par $C(A,M) = C_*(A,M)$ et

$$...C_n(A,M) \xrightarrow{d} C_{n-1}(A,M)... \xrightarrow{d} C_1(A,M) \xrightarrow{d} M.$$

Les groupes d'homologie (qui sont en fait des $\mathbb{K}$-modules) sont définis par $H_n = Z_n/B_n$, avec $Z_n = Ker(d : C_n(A,M) \to C_{n-1}(A,M))$ et $B_n = Im(d : C_{n+1}(A,M) \to C_n(A,M))$.
En particulier, on a

$$H_0(A,M) = M_A = M/[A,M] = M/\{am - ma : a\in A, m\in M\},$$

qui est appelé module des coinvariants de M par A.

5.2.2 Cohomologie de Hochschild

une cochaine de degré n(ou une n-cochaine) est une application multilinéaire de $A^{\otimes n}$ dans M. Pour $n \geq 1$, on pose $C^n(A, M) = Hom(A^{\otimes n}, M$. En particulier $C^0(A, M) = M$. On pose, pour $n < 0$,$C^n(A, M) = \{0\}$.
L'espace des cochaines de A à valeurs dans M est défini par $C(A, M) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} C^n(A, M)$. L'opérateur cobord d est défini par ses restrictions d^n aux espaces des n-cochaines($n \geq 0$). Il est donné par les homomorphismes

$$\begin{array}{rcl} d^n : C^n(A, M) & \rightarrow & C^{n+1}(A, M) \\ \varphi & \rightarrow & \delta^n \varphi \end{array}$$

définis par tout $(a_1, ..., a_{n+1}) \in A^{\otimes(n+1)}$ et $\varphi \in C^n(A, M)$ par

$$\begin{array}{rl} d^n \varphi(a_1, ..., a_{n+1}) = a_1 \varphi(a_2, ..., a_{n+1}) + + & \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \varphi(a_1, ..., \mu(a_i a_{i+1}), ..., a_p) \\ & +(-1)^{n+1} \varphi(a_1, ..., a_n) a_{n+1}. \end{array}$$

et $d^0 \varphi(a) = a\varphi$ pour tout $\varphi \in C^0(A, M) = M$ et $a \in A$.
Ces opérateurs vérifient $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Les espaces des cobords sont

$$B^n(A, M) = \{\varphi \in C^n(A, M) : d^{n-1}(f), f \in C^{n-1}(A, M)\}.$$

Les espaces des cocycles sont

$$Z^n(A, M) = \{\varphi \in C^n(A, M) : d^n(\varphi) = 0\}.$$

On a $B^n(A, M) \subset Z^n(A, M)$ car $d^2 = 0$.
L'espace quotient $H^n(A, M) = Z^n(A, M)/B^n(A, M)$ est appellé $n^{ième}$ groupe de la cohomologie de Hochschild de A à valeurs dans M. On note la somme directe par $H(A, M) = \oplus_{n \geq 0} H^n_H(A, M)$. En particulier, on a

$$H^0(A, M) = M^A = \{m \in M : am = ma, \forall a \in A\}.$$

Pour $n = 1$, les 1-cocycles sont les homomorphismes de $\mathbb{K}$-modules $D : A \rightarrow M$ vérifiant

$$D(a_1 a_2) = a_1 D(a_2) + D(a_1) a_2, \forall a_1, a_2 \in A.$$

On note $Z^1(A, M)$ par $Der(A, M)$ et ses éléments sont appelés dérivations.

$$H^1(A, M) = Der(A, M)/\{\text{dérivations intérieures}\}.$$

Le groupe $H^1(A, M)$ est parfois appelé groupe des dérivations extérieures

5.2.3 Cohomologie de Hochschild à valeurs dans l'algèbre

La cohomologie de Hochschild à valeurs dans l'algèbre joue un rôle important dans la théorie des déformations formelles. On spécifie les formules dans ce cas particulier $M = A$.
Les opérateurs cobord de Hochschild

$$\begin{array}{rcl} d^n : C^n(A, A) & \rightarrow & C^{n+1}(A, A) \\ \varphi & \rightarrow & d^n \varphi \end{array}$$

sont définis pour tout $(a_1, ..., a_{n+1}) \in A^{\otimes(n+1)}$ par

$$d^n\varphi(a_1, ..., a_{n+1}) = \mu(a_1, \varphi(a_2, ..., a_{n+1})) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi(a_1, ..., \mu(a_i, a_{i+1}), ..., a_n) + (-1)^{n+1}\mu(\varphi(a_1, ..., a_n), ..., a_{n+1})$$

Le noyau de d^n dans $C^n(A, A)$ est le groupe des n-cocycles :

$$Z^n(A, A) = Kerd^n = \{\varphi : A^{\otimes n} \to A : d^n\varphi = 0\}.$$

L'image par d^{n-1} de $C^{n-1}(A, A)$ est le groupe des n-cobord, qui est nul pour $n = 0$:

$$B^n(A, A) = Imd^{n-1} = \{\varphi : A^{\otimes n} \to A : \varphi = d^{n-1}f, f \in C^{n-1}(A, A)\}.$$

L'espace quotient $H^n(A, A) = Z^n(A, A)/B^n(A, A)$ est le n-ième groupe de cohomologie de Hochschild de l'algèbre A à valeurs dans A.
En particulier,

- $H^0(A, A)$ (centre de l'algèbre) :

$$Z(A) = H^0(A, A) = \{a \in A : \mu(a, b) = \mu(b, a), \forall b \in A\}$$

- $H^1(A, A)$ L'algèbre des dérivations :

$$Der(A) = \{f : A \to A, f(\mu(a, b)) = \mu(f(a), b) + \mu(a, f(b)), \forall a, b \in A\}$$

On définit deux applications

$$\circ_G : C^m(A, A) \times C^n(A, A) \to C^{m+n-1}(A, A)$$
$$(\varphi \circ_G \psi)(a_1, ..., a_{m+n-1}) = \sum_{i\geq 0}(-1)^{i(n-1)}\varphi(a_1, ..., a_i, \psi(a_{i+1}, ..., a_{i+n}), ...)$$

et

$$[.,.]_G : C^m(A, A) \times C^n(A, A) \to C^{m+n-1}(A, A)$$
$$[\varphi, \psi]_G = \varphi \circ_G \psi - (-1)^{(n-1)(m-1)}\psi \circ_G \varphi.$$

Remarque 5.2 *L'espace $(C(A, A), \circ_G)$ est une algèbre preLie et $(C(A, A), [.,.]_G)$ est une algèbre de Lie graduée. le crochet $[.,.]_G$ est appelé crochet de Gerstenhaber. Le carré de $[\mu, .]_G$ s'annule et définit un opérateur 2-cobord. La multiplication μ de A est associative si $[\mu, \mu]_G = 0$.*

Les groupe de cohomologie suivants interviennent en théorie des déformations formelles.

- $B^2(A, A) = \{\varphi : A \otimes A \to A : \varphi = d^1f, f \in End(A)\}$
  $\forall a, b \in A$

$$d^1f(a, b) = \mu(f(a), b) + \mu(a, f(b)) - f(\mu(a, b)).$$

- $Z^2(A, A) = \{\varphi \in C^2(A, A) : d^2\varphi = 0\}$
  $\forall a_1, a_2, a_3 \in A$

$$\begin{aligned} d^2\varphi(a_1, a_2, a_3) = \quad & \mu(\varphi(a_1, a_2), a_3) - \mu(a_1, \varphi(a_2, a_3)) + \\ & \varphi(\mu(a_1, a_2), a_3) - \varphi(a_1, \mu(a_2, a_3)). \end{aligned}$$

– $B^3(A, A) = \{\Psi : A \otimes A \otimes A \to A : \psi = d^2\varphi, \varphi \in C^2(A, A)\}$
– $Z^3(A, A) = \{\varphi \in C^3(A, A) : d^3\varphi = 0\}$
$\forall a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$

$$d^3\varphi(a_1, a_2, a_3, a_4) = \mu(a_1, \varphi(a_2, a_3), a_4) - \varphi(\mu(a_1, a_2), a_3, a_4)$$
$$+\varphi(a_1, \mu(a_2, a_3), a_4) - \varphi(a_1, a_2, \mu(a_3, a_4)) + \mu(\varphi(a_1, a_2, a_3), a_4).$$

5.3 Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Cette cohomologie concerne les algèbres de Lie. Soient g une algèbre de Lie sur le corps $\mathbb{K}$ et M un g-module. Notons $C^n_{CE}(g, M)$, l'espace des applications multilinéaires alternées de $g^{\otimes n}$ dans M, c'est à dire $C^n_{CE}(g, M) = Hom(\wedge^n g, M), n \geq 1$, où $\wedge^n g$ désigne le produit extérieur de g.
On pose pour $n = 0$, $C^0_{CE}(g, M) = M$ et pour $n < 0$, $C^n_{CE}(g, M) = \{0\}$.
Une cochaîne pour la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de g (resp. une cochaîne de degré n) à valeurs dans M est un élément de $C_{CE}(g, M) = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} C^k_{CE}(g, M)$ (resp.$C^n_{CE}(g, M)$).
L'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg d_{CE} est défini comme suit : pour $n > 0$ et $\phi \in C^n_{CE}(g, M)$, la $(n + 1)$-cochaîne $d^n_{CE}\phi$ est définie pour $x_1, ..., x_{n+1}$ dans g par

$$d^n_{CE}\phi(x_1, ..., x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot \phi(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_{n+1}) + \sum_{1\leq i\leq j\leq n+1} (-1)^{i+j} \phi([x_i, x_j], ..., \widehat{x_i}, ..., \widehat{x_j}, ..., x_{n+1}).$$

Le symbole "$\widehat{x}$" signifie que le terme correspondant à x est omis.
Notons que $d^0_{CE}\phi(x) = x \cdot \phi$ avec $\phi \in C^0_{CE}(g, M) = M$ et $x \in g$.
On définit naturellement l'espace des n-cocycles

$$Z^n_{CE}(g, M) = \{\phi \in C^n_{CE}(g, M) : d^n_{CE}(\phi) = 0\}$$

ainsi que l'espace des n-cobords

$$B^n_{CE}(g, M) = \{\phi \in C^n_{CE}(g, M) : \phi = d^{n-1}_{CE}(f), f \in C^{n-1}_{CE}(g, M)\}.$$

On a bien $d^{n+1}_{CE} \circ d^n_{CE} = 0$, ce qui induit $B^n_{CE}(g, M) \subset Z^n_{CE}(g, M)$. L'espace quotient $H^n_{CE}(g, M) = Z^n_{CE}(g, M)/B^n_{CE}(g, M)$ est le n^{ime} groupe de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de g à valeurs dans M.
On note $H_{CE}(g, M) = \oplus_{n\geq 0} H^n_{CE}(g, M)$
On a les cas particuliers suivants :

$$H^0_{CE}(g, M) = \{m \in M : x \cdot m = 0, \forall x \in g\},$$

est l'ensemble des vecteurs invariants qui se note également par M^g.

$$H^1_{CE}(g, M) = Der(g, M)/Ider(g, M),$$

avec $Der(g, M)$ l'ensemble des dérivations de g vers M, c'est à dire des applications $\mathbb{K}$-linéaires $f : g \to M$ vérifiant $f([x, y]) = x \cdot f(y) - y \cdot f(x)$ et $Ider(g, M)$ le sous-espace des dérivations intérieurs $f_m (m \in M)$ définies par $f_m(x) = x \cdot m$.

Remarque 5.3

1. *Si g est de dimension finie d, alors $H^n_{CE}(g,M)$ est nul pour tous les $n > d$.*
2. *Si g est une algèbre de Lie abélienne de dimension finie et M un g-module trivial, les opérateurs cobord sont tous nuls et on a $H^n_{CE}(g,M) = C^n(g,M) = \Lambda^n(g^*) \otimes M$.*
3. *(Premier lemme de Whitehead) Si g est une algèbre de Lie semi-simple alors*
$$H^1_{CE}(g,M) = 0.$$
4. *(Deuxième lemme de Whitehead) Si g est une algèbre de Lie semi-simple et M est un g-module de dimension finie alors*
$$H^2_{CE}(g,M) = 0.$$
5. *Le théorème de Cartan-Eilenberg établit une correspondance entre la cohomologie de Chevalley-Eilenberg d'une algèbre de Lie et la cohomologie de Hochschild de son algèbre enveloppante.*

5.4 Cohomologie des algèbres ternaires de type Lie

Dans cette partie, on présente les différentes cohomologies et homologies liées aux algèbres ternaires de type Lie. La cohomologie des systèmes triples de Lie a été l'objet d'étude de Yamaguti et Harris, celle des algèbres de Nambu ternaires et de Nambu-Lie ternaires a été étudiée par Gautheron et Takhtajan.

5.4.1 Cohomologie des systèmes triples de Lie

Dans ce paragraphe on présente l'essentiel des résultats liés à la cohomologie des systèmes triples de Lie traitée par Harris [29] et Yamaguti [45] dans les années soixantes.

Soient $\mathcal{T}$ un système triple de Lie et M un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'espace M est appelé un $\mathcal{T}$ -module s'il existe une application bilinéaire $\mu : (x_1,x_2) \longrightarrow \mu(x_1,x_2)$ de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ dans $End(M)$ l'algèbre associative des transformations linéaires de V satisfaisant les conditions suivantes :

$$\mu(x_3,x_4)\mu(x_1,x_2) - \mu(x_2,x_4)\mu(x_1,x_3) - \mu(x_1,[x_2,x_3,x_4]) + D(x_2,x_3)\mu(x_1,x_4) = 0,$$
$$\mu(x_3,x_4)D(x_1,x_2) - D(x_1,x_2)\mu(x_3,x_4) + \mu([x_1,x_2,x_3],x_4) + \mu(x_3,[x_1,x_2,x_4]) = 0,$$

où $D(x_1,x_2) = \mu(x_2,x_1) - \mu(x_1,x_2)$.

Le système triple de Lie $\mathcal{T}$ est considéré aussi comme un $\mathcal{T}$-module par l'action $\mu(x_1,x_2)(x) = [x,x_1,x_2]$.

On considère un $\mathcal{T}$-module et on désigne par $\mathfrak{C}^{2n+1}(\mathcal{T},V), n \geq 0$ le $\mathbb{K}-$espace vectoriel des (2n+1)-cochaînes de $\mathcal{T}$ à coefficients dans M . Une cochaîne $\varphi \in \mathfrak{C}^{2n+1}(\mathcal{T},M)$ est la donnée d'une fonction multilinéaire à $(2n+1)$ variables
$$\varphi : \mathcal{T} \times ... \times \mathcal{T} \longrightarrow M$$

satisfaisant

$$\varphi(x_1,...,x_{2n-2},x,x,y) = 0$$

et

$$\varphi(x_1,...,x_{2n-2},x,y,z)+\varphi(x_1,...,x_{2n-2},y,z,x)+\varphi(x_1,...,x_{2n-2},z,x,y)=0,$$

pour tout $x_i,x,y,z\in\mathcal{T}$.

Proposition 5.1 *Le cobord de Yamaguti est donné par*

$$\begin{gathered}\delta^{2n+1}\varphi(x_1,...,x_{2n+1})=\\ m(x_{2n},x_{2n+1})\varphi(x_1,...,x_{2n-1})-m(x_{2n-1},x_{2n+1})\varphi(x_1,...,x_{2n-2},x_{2n})+\\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}D(x_{2i-1},x_{2i})\varphi(x_1,...,\widehat{x_{2i-1}},\overset{\curlywedge}{x_{2i}},...,x_{2n+1})+\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2i+1}^{2n+1}(-1)^{n+i+1}\varphi(x_1,...,\widehat{x_{2i-1}},\overset{\curlywedge}{x_{2i}},...,[x_{2i-1},x_{2i},x_j],...,x_{2n+1}),\end{gathered}$$

telle que

$$\mathtt{C}^1(\mathcal{T},M)\xrightarrow{\delta^1}\mathtt{C}^3(\mathcal{T},M)\xrightarrow{\delta^3}\mathtt{C}^5(\mathcal{T},M)\longrightarrow...,$$

vérifie

$$\delta^{2n+1}\circ\delta^{2n-1}=0,\ \ \textit{pour tout } n=1,2,...$$

Démonstration. Pour la preuve voir [45]. □

Les groupes de cohomologie de Yamaguti sont donnés par

$$H^\bullet(\mathcal{T},V)=\frac{Z^\bullet(\mathcal{T},V)}{B^\bullet(\mathcal{T},V)}.$$

Remarque 5.4 *Dans le cas où M est un système triple de Lie, l'opérateur δ s'écrit*

$$\delta^1\varphi(x_1,x_2,x_3)=[\varphi(x_1),x_2,x_3]-[x_1,\varphi(x_2),x_3]+[x_1,x_2,\varphi(x_3)]-\varphi([x_1,x_2,x_3]).$$

$$\begin{gathered}\delta^3\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\ =[\varphi(x_1,x_2,x_3),x_4,x_5]-[\varphi(x_1,x_2,x_4),x_3,x_5]\\ -[x_1,x_2,\varphi(x_3,x_4,x_5)]-[x_3,x_4,\varphi(x_1,x_2,x_5)]\\ +\varphi([x_1,x_2,x_3],x_4,x_5)+\varphi(x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5)\\ +\varphi(x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5])-\varphi(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]).\end{gathered}$$

Pour tout $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in\mathcal{T}$.

5.4.2 Homologie des algèbres de Nambu-Lie ternaires

Dans ce paragraphe on présente l'essentiel des résultats liés a la généralisation du complexe de Chevalley-Eilenberg dans le cas des algèbres de Nambu-Lie ternaires traitée par Takhtajan [43] en 1995.

Soient $\mathcal{A}=(V,[.,.,.])$ une algèbre de Nambu-Lie ternaire et

$$\mathtt{C}_p(\mathcal{A},\mathcal{A})=V^{\times(2p+1)}=\underbrace{V\times V\times...\times V}_{2p+1\ fois}.$$

On désigne pour simplifier par $(x_1,...,x_{2p+1})$ l'élément $x_1\otimes...\otimes x_{2p+1}$.

L'opérateur bord $\delta_p : \mathtt{C}_p \to \mathtt{C}_{p-1}$ est défini par

$$\begin{gathered}\delta_p(x_1,...,x_{2p+1}) = \\ ([x_1,x_2,x_3],...,x_{2p+1}) + ... + (x_3,...,[x_1,x_2,x_{2p+1}]) \\ -(x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5],...,x_{2p+1}) - ... - (x_1,x_2,...,[x_3,x_4,x_{2p+1}]) \\ +... + (-1)^{p+1}(x_1,x_2,...,[x_{2p-1},x_{2p},x_{2p+1}]).\end{gathered}$$

Pour tout $(x_1,...,x_{2p+1})$ dans $V^{\times(2p+1)}$.

On considère les deux applications $\pi(y) : \mathtt{C}_p \to \mathtt{C}_p$ et $\rho(y) : \mathtt{C}_p \to \mathtt{C}_{p+1}$ définies par

$$\pi(y)(x_1,...,x_{2p+1}) = \sum_{i=1}^{2p+1}(x_1,...,[y_1,y_2,x_i],...,x_{2p+1})$$

et

$$\rho(y)(x_1,...,x_{2p+1}) = (y_1,y_2,x_1,...,x_{2p+1}))$$

où $y = (y_1,y_2) \in V \times V$.

Rappelons que la dérivée de Lie généralise aux variétés différentielles la notion de dérivée directionnelle d'une fonction numérique. Si f est une fonction différentiable de la variété différentielle M dans $\mathbb{R}$, si X est un champ de vecteurs sur M, la dérivée de Lie de f au point p est donnée par

$$\mathcal{L}_X f(p) = X_p \cdot f = df(p)[X(p)].$$

La dérivée de Lie d'un crochet de champ de vecteurs X et Y est donnée par

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_{\mathcal{L}_X Y} = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X = -\mathcal{L}_{\mathcal{L}_Y X}.$$

La formule de Cartan liée à la dérivée de Lie est la suivante

$$\mathcal{L}_X = i_X d + d i_X = df(p)[X(p)].$$

Application :

$$\mathcal{L}_{fX}\omega = f \cdot \mathcal{L}_X\omega + df \wedge i_X\omega.$$

Lemme 5.1 *On a les généralisations des formules de Cartan suivantes :*
(1) $\delta_n\rho(y) + \rho(y)\delta_{n-1} = \pi(y)$,
(2) $\pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x) = \pi(y_1^x) + \pi(y_2^x)$,
(3) $\pi(x)\rho(y) - \rho(y)\pi(x) = \rho(y_1^x) + \rho(y_2^x)$,
(4) $\pi(x)\delta_n = \delta_n\pi(x)$,
(5) $\delta_n\delta_{n+1} = 0$,
où $x = (x_1,x_2) \in V \times V$ *et* $y_1^x = ([x_1,x_2,y_1],y_2), y_2^x = (y_1,[x_1,x_2,y_2]) \in V \times V$.

Démonstration. Cette preuve est basée essentiellement sur l'identité fondamentale sans prendre en considération la propriété de l'antisymétrie du crochet Nambu-Lie.

Les définitions de l'opérateur δ et des applications π, ρ nous donnent la propriété (1).

Pour la propriété (2) et (3) on utilise l'identité fondamentale en considérant le commutateur $[\pi(x), \pi(y)] = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x)$ tel que

$$\begin{aligned}
&[\pi(x), \pi(y)](z_1, ..., z_p) \\
&= \sum_{i=1}^{p} (z_1, ..., [x_1, x_2, [y_1, y_2, z_i]] - [y_1, y_2, [x_1, x_2, z_i]], ..., z_p) \\
&= (\pi(y_1^x) + \pi(y_2^x))(z_1, ..., z_p).
\end{aligned}$$

Pour prouver la propriété (4) on utilise les propriété précédentes en l'occurence (1), (2) et (3).

Soit $\delta_{n-1}\pi(x) = \pi(x)\delta_{n-1}$ d'où

$$(\delta_n \pi(x) - \pi(x)\delta_n)\rho(y) = 0,$$

pour tout $(x, y) \in V \times V$.

On a

$$\begin{aligned}
(\delta_n \pi(x) - \pi(x)\delta_n)\rho(y) &= \delta_n \pi(x)\rho(y) + \pi(x)\rho(y)\delta_{n-1} - \pi(x)\pi(y) \\
&= \delta_n(\rho(y)\pi(x) + \rho(y_1^x) + \rho(y_2^x) + \pi(x)\rho(y)\delta_{n-1} - \pi(x)\pi(y) \\
&= -\rho(y)\delta_{n-1}\pi(x) + \pi(x)\rho(y)\delta_{n-1} + \pi(y)\pi(x) - \pi(x)\pi(y) \\
&\quad + \pi(y_1^x) + \pi(y_2^x) - (\rho(y_1^x) + \rho(y_2^x)\delta_{n-1} \\
&= (\pi(x)\rho(y) - \rho(y)\pi(x) - \rho(y_1^x) - \rho(y_2^x))\delta_{n-1} = 0.
\end{aligned}$$

Pour vérifier la propriété (5) il suffit, d'utiliser les deux propriété (1) et (4) et l'hypothèse d'induction

$$\delta_n \delta_{n+1} \rho(x) = \delta_n \pi(x) - \delta_n \rho(x) \delta_n =$$

$$\delta_n \pi(x) + \rho(x)\delta_{n-1}\delta_n - \pi(x)\delta_n = 0, \forall x \in V \times V.$$

□

5.4.3 Cohomologie de Takhtajan des algèbres de Nambu et de Nambu-Lie ternaires

Dans ce paragraphe on donne quelques remarques concernant la cohomologie des algèbres de Nambu-Lie ternaire introduite par Takhtajan. La construction suit la procédure décrite dans la section précédente.

Soient $\mathcal{A} = (V, [.,.,.])$ une algèbre de Nambu ternaire et $W = V \times V$. On définit un produit sur W par

$$\begin{aligned}
&(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) \\
&= ([x_1, x_2, y_1], y_2) + (y_1, [x_1, x_2, y_2]).
\end{aligned}$$

Ce produit vérifie la propriété suivante qui est en fait la condition de Jacobi

$$X \cdot (Y \cdot Z) - Y \cdot (X \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z, \quad \forall X, Y, Z \in W.$$

En effet, ce produit est nonassociatif et on ne peut pas doter W d'une structure d'algèbre de Lie.

Soit H un $W-$module, on a la propriété suivante :

$$X \cdot (Y \cdot h) - Y \cdot (X \cdot h) = (X \cdot Y) \cdot h, \quad \forall X, Y, Z \in W, \forall h \in H.$$

On considère $\varphi : W^{\times p} \to H$ une application p-linéaire.

L'opérateur cobord δ défini par

$$\delta^p\varphi(X_1,...,X_{p+1}) = \sum_{1\leq i<j\leq p+1}(-1)^{i+1}\varphi(X_1,...,X_{j-1},X_i\cdot X_j,...,X_{p+1}) + \sum_{1\leq i\leq p+1}(-1)^i X_i\cdot\varphi(X_1,...,X_{p+1}).$$

Vérifie $\delta^2 = 0$. Ainsi, la cohomologie des algèbres de Nambu ternaires ou de Nambu-Lie ternaires découlent de la cohomologie des algèbres de Lie. Pour $H = V^*$, cette construction donne le dual du complexe homologique présenté par Takhtajan [43].

Soient V une algèbre de Nambu ternaire et $W = V\times V$. On considère les deux applications linéaires $f : V\to V$ et $\varphi : W\to W$ tel que

$$\varphi(y_1,y_2) = (f(y_1),y_2) + (y_1,f(y_2)).$$

Notons que l'ensemble des applications linéaires φ forme une sous-algèbre de Lie L.

Soit $\delta : \mathsf{C}_p(W)\to\mathsf{C}_{p+1}(W)$ une application linéaire définie par

$$\delta h(X_1,...,X_{p+1}) = \sum_{1\leq i<j\leq p+1}(-1)^{i+1}h(X_1,...,X_{j-1},X_i.X_j,...,X_{p+1}) + \sum_{1\leq i\leq p}(-1)^i X_i.h(X_1,...,X_{p+1}) + (-1)^p h(X_1,...,X_p).X_{p+1}.$$

où $\mathsf{C}_k(W)$ est l'espace vectoriel des applications $\mathbf{K}$-linéaires de W dans W. On a $\delta^2 h = 0$. Soient $\mathcal{A}_0 = W$ et $\mathcal{A}_p$ l'espace des applications de $W^{\otimes p}$ dans $\mathsf{C}(V)$. Toute application ψ de $\mathcal{A}_p$ peut s'étendre à une application $\overline{\psi}$ dans $\mathsf{C}_i(W)$ telle que $\overline{\psi}(X_1,...,X_{p-1},.)$ est dans L. On considère $\delta : \mathcal{A}_p\to\mathcal{A}_{p+1}$, on obtient l'opérateur cohomologique sur $\mathcal{A}_i$ de la manière suivante :

$$\delta^0(x_1,x_2) = [x_1,x_2,.].$$

$$\delta^1\psi(x_1,x_2)(x_3) = \psi(x_1,x_2,x_3) - [\psi(x_1),x_2,x_3] - [x_1,\psi(x_2),x_3] - [x_1,x_2,\psi(x_3)].$$

$$\begin{aligned}\delta^2\psi(x_1,x_2,y_1,y_2)(x_3) &= \psi([x_1,x_2,y_1],y_2,y_3) + \psi(y_1,[x_1,x_2,y_2],y_3)\\ &+\psi(y_1,y_2,[x_1,x_2,y_3]) + [\psi(x_1,x_2,y_1),y_2,y_3] + [y_1,\psi(x_1,x_2,y_2),y_3]\\ &+[y_1,y_2,\psi(x_1,x_2,y_3)] - [x_1,x_2,\psi(y_1,y_2,y_3)] - \psi(x_1,x_2,[y_1,y_2,y_3]).\end{aligned}$$

5.5 Cohomologie de Poisson

Nous définissons maintenant la Cohomologie de Poisson pour une algèbre de Poisson $(A,\cdot,\{.,.\})$; Le crochet de Poisson sur A sera également désigné par π,pour que $\pi(F,G) = \{F,G\}$, pour $F,G\in A$. Pour $k\in\mathbb{N}$, l'espace des k-cochaînes de la cohomologie de Poisson est par définition le complexe $\chi^k(A)$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ des k-dérivations antisymétriques de A. L'opérateur de cobord de Poisson est le Poisson analogue de l'opérateur de cobord de Chevalley-Eilenberg, où $Hom(\wedge^k g, g)$ a été remplacé par $\chi^k(A)$, et où le crochet de Lie $[.,.]$ est le crochet de Poisson $\{.,.\}$. A savoir, l'application linéaire graduée sur $\mathbb{F}$ (de degré 1) $\delta_p : \chi^\bullet(A)\to\chi^{\bullet+1}(A)$ est défini, pour $Q \in \chi^q(A)$, où $q \in \mathbb{N}$, par

$$\delta_\pi^q(Q)[F_0, ..., F_q] := \sum_{i=0}^{q}(-1)^i\{F_i, Q[F_0, ..., \widehat{F_i}, ..., F_q]\}+ \tag{5.1}$$

$$\sum_{0\leq i<j\leq q}(-1)^{i+j}Q[\{F_i, F_j\}, F_0, ..., \widehat{F_i}, ..., \widehat{F_j}, ..., F_q], \tag{5.2}$$

pour tout $F_0, ..., F_q \in A$. Afin d'établir que $\delta_\pi^q(Q)$ est en effet une multi-dérivation antisymétrique de A et que $\delta_\pi^{q+1} \circ \delta_\pi^q = 0$, pour $q \in \mathbb{N}$, nous relions l'opérateur de cobord au crochet de Schouten. En fait, la formule explicite pour le crochet de Schouten $[.,.]_S$, implique que

$$\delta_\pi^q(Q) = -[Q, \pi]_S, \tag{5.3}$$

pour $Q \in \chi^q(A)$. Ainsi, $\delta_\pi^q(Q)$ est le crochet de Schouten de deux multi-derivations antisymétriques, de sorte qu'il est lui-même une multi-dérivation antisymétrique. Afin de voir que $\delta_\pi^{q+1} \circ \delta_\pi^q = 0$, nous écrivons l'identité de Jacobi graduée du crochet de Schouten pour le triplet (Q, π, π),

$$(-1)^{q-1}[Q, [\pi, \pi]_S]_S - [\pi, [Q, \pi]_S]_S + (-1)^{q-1}[\pi, [\pi, Q]_S]_S = 0, \tag{5.4}$$

où nous avons utilisé le degré q décalé d'un q-dérivation est $q-1$, en particulier le degré décalée de p est 1. Etant donné $[\pi, \pi]_S = 0$ (car p est un crochet de Poisson) et comme $[Q, p]S = -(-1)^{\overline{q}}[\pi, Q]_S$ (l'anti-symétrie graduée de $[.,.]_S$), l'identité (5.4) se réduit à $[\pi, [\pi, Q]_S]_S = 0$, pour tout $Q \in \chi^q(A)$, montrant que $\delta_\pi^{q+1} \circ \delta_\pi^q = 0$, pour tout $q \in \mathbb{N}$. Ainsi, nous avons un complexe, le complexe de cohomologie de Poisson de A,

$$...\chi^{q-1}(A) \xrightarrow{\delta_\pi^{q-1}} \chi^q(A) \xrightarrow{\delta_\pi^q} X^{q+1}(A) \xrightarrow{\delta_\pi^{q+1}} ...$$

Les éléments de $Ker\delta_\pi^q$ sont appelés les q-cocycles de Poisson, tandis que les éléments de $Im\delta_\pi^{q-1}$ sont appelés les q-cobords de Poisson. Les éléments du q-ième espace de cohomologie de Poisson sont les q-cocycles de Poisson modulo les q-cobords de Poisson,

$$H_\pi^q(A) := Ker\delta_\pi^q / Im\delta_\pi^{q-1}$$

Pour $q \in \mathbb{N}^* et H_\pi^0(A) := Ker\delta_\pi^0$. L'espace vectoriel gradué

$$H_\pi^\bullet(A) := \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} H_\pi^q(A)$$

est dite cohomologie de Poisson de A.
Dans le cas d'une variété de Poisson (M, π), on remplace dans la construction au-dessus des multi-dérivations de A par les champs de multivecteur sur M, ce qui conduit au complexe suivant

$$...\chi^{q-1}(M) \xrightarrow{\delta_\pi^{q-1}} \chi^q(M) \xrightarrow{\delta_\pi^q} X^{q+1}(M) \xrightarrow{\delta_\pi^{q+1}} ...$$

où l'opérateur de cobord δ_π est défini par (5.3), pour $Q \in \chi^q(M)$ (un q-champ vecteur sur M). Ce complexe est appelé complexe de cohomologie de Poisson de M. Le q-ème espace de cohomologie de Poisson de(M, π), respectivement la cohomologie de Poisson de (M, π), est désigné par $H^q_\pi(M)$ respectivement $H^\bullet_\pi(M)$.

Remarque 5.5 *Soit $(A, \cdot, \{.,.\})$ une algèbre de Poisson sur $\mathbb{F}$. Oubliant le produit associative, $(A, \{.,.\})$ est tout simplement une algèbre de Lie et il est logique de considérer $C^\bullet(A, A)$, avec l'opérateur de cobord de Chevalley-Eilenberg. Cela donne précisément* (5.1), *de sorte que l'opérateur de cobord de Poisson $(A, \cdot, \{.,.\})$ est l'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg, restreinte aux multi-dérivations de $(A, \cdot)$.*

Pour des valeurs petits de q, l'opérateur cobord de Poisson δ^q_π a une interprétation naturelle, qui donne une interprétation naturelle pour l'espace de cohomologie de Poisson $H^q_\pi(A)$. On peut lire facilement décollé de (5.1) que pour $F \in \chi^0(A) = A$ et $V \in \chi^1(A)$,

$$\delta^0_\pi(F) = \chi_F, \delta^1_\pi(V) = -\mathfrak{l}_V \pi, \tag{5.5}$$

où nous rappelons que χ_F est la dérivation hamiltonienne associée à $F \in A$, et $\mathfrak{l}_V$ désigne la dérivée de Lie par rapport à V . En outre, pour $Q \in \chi^2(A)$ et $F, G, H \in A$,

$$\delta^2_\pi(Q)[F, G, H] = \{F, Q[G, H]\} + Q[F, \{G, H\}] + \circlearrowleft (F, G, H).$$

Il résulte de (5.5) que Poisson 0-cocycles sont Casimirs,

$$H^0_\pi(A) = Cas(A),$$

les 1-cocycles de Poisson sont des dérivations de Poisson et les 1-cobords de Poisson sont les dérivations hamiltoniennes. En désignant l'espace de toutes les dérivations de Poisson de A par $P(A)$, il en résulte que

$$H^1_\pi(A) = \frac{P(A)}{Ham(A)}$$

Les 2-cocycles de Poisson $Q \in \chi^2(A)$ sont des bidérivations anti-symétrique qui satisfont $[\pi, Q]_S = 0$, autrement dit, ils sont ceux qui sont compatibles avec $\{.,.\}$, les 2-cocycles de Poisson sont les bidérivations, obtenus comme une dérivé de Lie de la structure de Poisson. Il en résulte que

$$H^2_\pi(A) = \frac{biderivations\ anti-symetrique\ compatible\ avec\{.,.\}}{derivations\ de\ Lie\{.,.\}}$$

$H^2_\pi(A)$ et $H^3_\pi(A)$ apparaît naturellement dans la théorie de la déformation. Il existe un morphisme naturel de la cohomologie de de Rham vers la cohomologie de Poisson, ce morphisme est défini de la même manière dans le cas d'une variété lisse. Nous construisons d'abord une application linéaire

$$\pi^\sharp : \Omega^1(A) \to \chi^1(A) GdF \mapsto G\chi_F. \tag{5.6}$$

Il est clair que cette application est bien définie ; par exemple, on a pour tout $F, G \in A$ qui $\pi^\sharp(Dd(FG) - FdG - GdF) = \chi_{FG} - F\chi_G - G\chi_F = 0$, où nous avons utilisé (3) de la Proposition 1.4 dans la dernière étape. L'application $\pi^\sharp$ étend naturellement à une Une A-application linéaire

$$\wedge^\bullet \pi^\sharp : \Omega^\bullet(A) \to \wedge^\bullet \chi^1(A) \to \chi^\bullet(A),$$

qui est explicitement donnée par

$$\wedge^q \pi^\sharp(FdG_1 \wedge \ldots \wedge dG_q) = F\chi_{G_1} \wedge \ldots \wedge \chi_{G_q},$$

pour tout $F, G_1, \ldots, G_q \in A$. Elle conduit à un morphisme naturel entre la cohomologie de de Rham et la cohomologie de Poisson (A, π).

Proposition 5.2 *Soit $(A, \cdot, \{.,.\})$ une algèbre de Poisson. Les applications $\wedge^q \pi^\sharp : \Omega^q(A) \to \chi^q(A)$ définir une application de la chaîne à partir de $(\Omega^\bullet(A), d)$ de $(\chi^\bullet(A), \delta_\pi)$, soit, pour chaque $q \in \mathbb{N}$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\Omega^q(A) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\wedge^q \pi^\sharp"'] & \Omega^{q+1}(A) \arrow[d, "\wedge^{q+1} \pi^\sharp"] \\
\chi^q(A) \arrow[r, "\delta_\pi^q"'] & \chi^{q+1}(A)
\end{tikzcd}$$

Elle conduit pour chaque $q \in \mathbb{N}$ à une application $\mathbb{F}$-linéaire $H^q_{dR}(A) \to H^q_\pi(A)$.

5.6 Cohomologie des algèbres Hom-Poisson

Soit $(A, \cdot, \{.,.\}, \alpha)$ une algèbre Hom-Poisson multiplicative. Pour tout entier non négatif k, notons par α^k la k-ème composition de α, i.e. $\alpha^k = \alpha \circ \ldots \circ \alpha(\text{k}-fois)$.

En particulier, $\alpha^0 = Id$ et $\alpha^1 = \alpha$. Si $(A, \cdot, \{.,.\}, \alpha)$ est une algèbre Hom-Poisson régulière, on note par α^k la k-ème composition de α et α^{-k} l'inverse de α.

Définition 5.2 *Pour tout entier non négatif k, une application linéaire $Q : A \to A$ est appelée α^k-dérivation d'une algèbre Hom-Poisson multiplicative $(A, \cdot, \{.,.\}, \alpha)$, si*

$$Q \circ \alpha = \alpha \circ Q$$

et

$$Q(x \cdot y) = Q(x) \cdot \alpha^k(y) + \alpha^k(x) \cdot Q(y)$$

avec $x, y \in A$.

Généralement α^n-n-dérivation est une application n linéaire $Q : A \wedge \ldots \wedge A \to A$ tel que

$$Q(x_1 \cdot x'_1, \alpha(x_2), \ldots, \alpha(x_n)) = \alpha^n(x_1) \cdot Q(x'_1, x_2, \ldots, x_n) + Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \alpha^n(x'_1) \tag{5.7}$$

avec $x'_1, x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$

Définition 5.3 *Une n-cochaine de Hom-Poisson est une application n linéaire ϕ : $\underbrace{A \wedge A \wedge ... \wedge A}_{nfois} \to A$ qui satisfait*

- $\alpha \circ \phi = \phi \circ \alpha^{\otimes n}$
- *ϕ is an α^n-$(n+1)$-dérivation.*

On note par $\chi^n(A)$ l'ensemble des n-cochaines de Hom-Poisson, et $\chi(A) = \bigoplus_{n \geq 0} A$.

Pour $n \geq 1$, on appelle un opérateur n-cobord d'une algèbre Hom-Poisson $(A, \cdot, \{.,.\}, \alpha)$ une application linéaire $\delta^n : \chi^n(A) \to \chi^{n+1}(A)$ définie par

$$\delta^n(Q)(x_0, ..., x_n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \{\alpha^{n-1}(x_j), Q(x_0, ..., \widehat{x_j}, ..., x_n)\} \tag{5.8}$$

$$+ \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} Q(\{x_i, x_j\}, \alpha(x_0), ..., \widehat{\alpha(x_i)}, ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha(x_n)) \tag{5.9}$$

Lemme 5.2 *Si Q est une α^{n-1}-n-dérivation alors $\delta^n(Q)$ est une α^n-$(n+1)$-dérivation.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\delta^n Q(x_0 \cdot x_0', \alpha(x_1), ..., \alpha(x_n)) &= \alpha^n(x_0) \cdot \delta^n Q(x_0', x_1, ..., x_n) + \delta^n Q(x_0, x_1, ..., x_n) \cdot \alpha^n(x_0') \\
&= \alpha^n(x_0) \cdot (\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \{\alpha^{n-1}(x_j), Q(x_0', ..., \widehat{x_j}, ..., x_n)\} \\
&+ \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} Q(\{x_i, x_j\}, \alpha(x_0'), ..., \widehat{\alpha(x_i)}, ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha(x_n))) \\
&+ (\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \{\alpha^{n-1}(x_j), Q(x_0, ..., \widehat{x_j}, ..., x_n)\} \\
&+ \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} Q(\{x_i, x_j\}, \alpha(x_0), ..., \widehat{\alpha(x_i)}, ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha(x_n))) \cdot \alpha^n(x_0')
\end{aligned} \tag{5.10}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
&\delta^n Q(x_0 \cdot x_0', \alpha(x_1), ..., \alpha(x_n)) = \\
&\sum_{j=1}^{n} (-1)^j \{\alpha^n(x_j), Q(x_0 \cdot x_0', \alpha(x_1), ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha(x_n))\} + \\
&\{\alpha^{n-1}(x_0 \cdot x_0'), Q(\alpha(x_1), ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha(x_n))\} \\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} Q(\{\alpha(x_i), \alpha(x_j)\}, \alpha(x_0) \cdot \alpha(x_0'), \alpha^2(x_1), ..., \widehat{\alpha^2(x_i)}, ..., \widehat{\alpha^2(x_j)}, ..., \alpha^2(x_n))) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j Q(\{x_0 \cdot x_0, \alpha(x_j)\}, \alpha^2(x_1), \alpha^2(x_2), ..., \widehat{\alpha^2(x_j)}, ..., \alpha^2(x_n))
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\alpha^n(x_0)\cdot\{\alpha^{n-1}(x_j), Q(x'_0, x_1, ..., \widehat{x_j}, ..., x_n)\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\{\alpha^{n-1}(x_j), \alpha^{n-1}(x_0)\}\cdot\alpha(Q(x'_0, x_1, ..., \widehat{x_j}, ..., x_n)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\alpha^n(x'_0)\cdot\{\alpha^{n-1}(x_j), Q(x_0, x_1, ..., \widehat{x_j}, ..., x_n)\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\{\alpha^{n-1}(x_j), \alpha^{n-1}(x'_0)\}\cdot\alpha(Q(x_0, x_1, ..., \widehat{x_j}, ..., x_n)) \\
&\quad + \alpha^n(x_0)\cdot\{\alpha^{n-1}(x'_0), Q(x_1, ..., \widehat{x_j}, ..., x_n)\} \\
&\quad + \{\alpha^{n-1}(x_0), Q(x_1, ..., \widehat{x_j}, ..., x_n)\}\cdot\alpha^n(x'_0) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\alpha^n(x_0)\cdot Q(\{x'_0, x_j\}, \alpha(x_1), ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha(x_n)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j Q(\alpha(x_0), \alpha(x_1), ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha(x_n))\cdot\{\alpha^{n-1}(x'_0), \alpha^{n-1}(x_j)\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\alpha^n(x'_0)\cdot Q(\{x_0, x_j\}, \alpha(x_1), ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha(x_n)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j Q(\alpha(x'_0), \alpha(x_1), ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha(x_n))\cdot\{\alpha^{n-1}(x_0), \alpha^{n-1}(x_j)\} \\
&\quad + \sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j}\alpha^n(x_0)\cdot Q(\{x_i, x_j\}, \alpha(x'_0), \alpha(x_1), ..., \widehat{\alpha(x_i)}, ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha(x_n)) \\
&\quad + \sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j} Q(\{x_i, x_j\}, \alpha(x_0), \alpha(x_1), ..., \widehat{\alpha(x_i)}, ..., \widehat{\alpha(x_j)}, ..., \alpha(x_n))\cdot\alpha^n(x'_0).
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

À partir de (5.10), (5.12) et en utilisant le fait que Q est une α^{n-1}-n-dérivation et l'identité Hom-Leibniz, nous pouvons conclure que δ^n est une α^n-$(n+1)$-dérivation. □

Théorème 5.1 *Soit $(A, \cdot, \{.,.\}, \alpha)$ une algèbre Hom-Poisson et $\delta^n : \chi^n(A) \to \chi^{n+1}(A)$ un opérateur défini par* (5.14) *alors*

$$\delta^{n+1}\circ\delta^n = 0 \tag{5.13}$$

pour $n \geq 1$.

Démonstration. Voir [1] □

Par conséquent, $\chi(A)$ avec ces opérateurs on définit un complexe de cohomologie d'une algèbre Hom-Poisson.

L'espace des n-cocycles est défini par

$$Z^n(A) = \{Q \in \chi^n(A) : \delta^n Q = 0\}$$

et l'espace des cobords est défini par

$$B^n(A) = \{\psi = \delta^{n-1}Q : Q \in \chi^{n-1}(A)\}$$

On appele le n^{ime} groupe de cohomologie d'une algèbre Hom-Poisson $(A, \cdot, \{.,.\}, \alpha)$ le quotient

$$H^n = \frac{Z^n}{B^n}.$$

5.7 Cohomologie des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson

Définition 5.4 *On appele une p-cochaine ternaire une application linéaire $\psi : A^{\otimes 2p+1} \to A$, l'ensemble des p-cochaines sur A est*

$$\chi^p = \{\psi : A \wedge A \wedge ... \wedge A \to A, \psi \textit{ est une } \alpha^p \textit{ drivation}\}$$

Définition 5.5 *On appele, pour $n \geq 1$, l'opérateur n-cobord d'une algèbre ternaire Hom-Poisson $(A, \mu, \{.,.,.\}, \alpha)$ l'application linéaire $\delta^n : \chi^n(A) \to \chi^{n+1}(A)$ définie par*

$$\delta^n(Q)(x_1, ..., x_{2n+1}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2j+1}^{2n+1} (-1)^j Q(\alpha(x_1, ..., \{x_{2j-1}, x_{2j}, x_k\}, ..., \alpha(x_{2n+1})) +$$
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \{\alpha^{n-1}(x_{2k-1}), \alpha^{n-1}(x_{2k}, Q(x_1, ..., \widehat{x_{2k-1}}, \widehat{x_{2k}}, ..., x_{2p+1}))\} +$$
$$(-1)^{n+1} \{\alpha^{n-1}(x_{2n-1}), Q(x_1, ..., x_{2n-1}, x_{2n}), \alpha^{n-1}(x_{2n-1})\} +$$
$$(-1)^{n+1} \{Q(x_1, ..., x_{2n-1}), \alpha^{n-1}(x_{2n}), \alpha^{n-1}(x_{2n-1})\} \quad (5.14)$$

Proposition 5.3 *Si Q est une $\alpha^{(n-1)}$-$(n+2)$-dérivation alors $\delta^n(Q)$ est une α^n-$(n+4)$-dérivation si est seulement si*

$$\alpha \circ \mu(Q \otimes \alpha^{n-2} \circ \{.,.,.\}) = (-1)^{Sgn\tau} \alpha \circ \mu(Q \otimes \alpha^{n-2} \circ \{.,.,.\}) \circ \tau. \quad (5.15)$$

pour tout $\tau \in S_n$, où S_n est le groupe de permutation et $(-1)^{Sgn(\tau)}$ est le signe de permutation de τ.

Démonstration. On a

$$\delta^n Q(x_1\cdot x'_1,\alpha(x_2),...,\alpha(x_{2n+1}))=\alpha^n(x_1)\cdot\delta^n Q(x'_1,x_2,...,x_{2n+1})+\delta^n Q(x_1,x_2,...,x_{2n+1})\cdot\alpha^n(x'_1)$$
$$=\alpha^n(x_1)\cdot(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2j+1}^{2n+1}(-1)^j Q(\alpha(x'_1,...,\{x_{2j-1},x_{2j},x_k\},...,\alpha(x_{2n+1}))+$$
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\{\alpha^{n-1}(x_{2k-1}),\alpha^{n-1}(x_{2k},Q(x'_1,...,\widehat{x_{2k-1}},\widehat{x_{2k}},...,x_{2p+1}))\}+$$
$$(-1)^{n+1}\{\alpha^{n-1}(x_{2n-1}),Q(x'_1,...,x_{2n-1},x_{2n}),\alpha^{n-1}(x_{2n-1})\}+$$
$$(-1)^{n+1}\{Q(x'_1,...,x_{2n-1}),\alpha^{n-1}(x_{2n}),\alpha^{n-1}(x_{2n-1})\})$$
$$+(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2j+1}^{2n+1}(-1)^j Q(\alpha(x_1,...,\{x_{2j-1},x_{2j},x_k\},...,\alpha(x_{2n+1}))+$$
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\{\alpha^{n-1}(x_{2k-1}),\alpha^{n-1}(x_{2k},Q(x_1,...,\widehat{x_{2k-1}},\widehat{x_{2k}},...,x_{2n+1}))\}+$$
$$(-1)^{n+1}\{\alpha^{n-1}(x_{2n-1}),Q(x_1,...,x_{2n-1},x_{2n}),\alpha^{n-1}(x_{2n-1})\}+$$
$$(-1)^{n+1}\{Q(x_1,...,x_{2n-1}),\alpha^{n-1}(x_{2n}),\alpha^{n-1}(x_{2n-1})\})\cdot\alpha^n(x'_1)\quad(5.16)$$

D'autre part pour $n>1$

$$\delta^n Q(x_1\cdot x'_1,\alpha(x_2),...,\alpha(x_{2n+1}))=-Q(\{x_1\cdot x'_1,\alpha(x_2),\alpha(x_3)\})+\{x_1\cdot x'_1,\alpha(x_2),Q(\alpha(x_3))\}+$$
$$\{x_1\cdot x'_1,Q(\alpha(x_2)),\alpha(x_3)\}+\{Q(x_1\cdot x'_1),\alpha(x_2),\alpha(x_3)\}+$$
$$\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2j+1}^{2n+1}(-1)^j Q(\alpha(x_1\cdot x'_1,...,\{\alpha(x_{2j-1}),\alpha(x_{2j}),\alpha(x_k)\},...,\alpha^2(x_{2n+1}))-$$
$$\sum_{k=3}^{2n+1}Q(\alpha(\{x_1\cdot x'_1,\alpha(x_2),\alpha(x_k)\},...,\alpha^2(x_{2n+1}))+$$
$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\{\alpha^{n-1}(\alpha(x_{2k-1})),\alpha^{n-1}(\alpha(x_{2k}),Q(x_1\cdot x'_1,...,\alpha(\widehat{x_{2k-1}}),\alpha(\widehat{x_{2k}}),...,\alpha(x_{2n+1})))\}+$$
$$\{\alpha^{n-1}(x_1\cdot x'_1),\alpha^{n-1}(\alpha(x_2),Q(\alpha(x_3),...,\alpha(x_{2n+1})))\}+$$
$$(-1)^{n+1}\{\alpha^{n-1}(x_{2n-1}),Q(x_1\cdot x'_1,...,\alpha(x_{2n-1}),\alpha(x_{2n})),\alpha^{n-1}(\alpha(x_{2n+1}))\}+$$
$$(-1)^{n+1}\{Q(x_1\cdot x'_1,...,\alpha(x_{2n-1})),\alpha^{n-1}(\alpha(x_{2n})),\alpha^{n-1}(\alpha(x_{2n+1}))\}\quad(5.17)$$

À partir de (5.16), (5.17) et en utilisant le fait que Q est une $\alpha^{(n-1)}$-$(n+2)$-dérivation, l'identité Hom-Leibniz et la condition , nous pouvons conclure que δ^n est une α^n-$(n+4)$-dérivation. □

Théorème 5.2 *Soit $(A,\mu,\{.,.,.\},\alpha)$ une algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson et $\delta^n:\chi^n(A)\to\chi^{n+1}(A)$ l'opérateur défini par (5.14) alors*

$$\delta^{n+1}\circ\delta^n=0\quad(5.18)$$

pour $n\geq 1$.

D'où $\chi(A)$ avec ces opérateurs définie un complexe de cohomologie d'une algèbre ternaire Hom-Nambu-Poisson.

L'espace des n-cocycles est défini par

$$Z^n(A) = \{Q \in \chi^n(A) : \delta^n Q = 0\}$$

et l'espace des cobords est défini par

$$B^n(A) = \{\psi = \delta^{n-1}Q : Q \in \chi^{n-1}(A)\}$$

On appele le n^{ime} groupe de cohomologie d'une algèbre Hom-Poisson $(A, \cdot, \{.,.\}, \alpha)$ le quotient

$$H^n = \frac{Z^n}{B^n}.$$

Annexes

A

A.1 Classification des algèbres ternaires non-commutatives de Nambu-Poisson en dimension 3

On considère l'algèbre de Lie engendrée par $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec le crochet $\{e_1, e_2, e_3\} = e_1$. On cherche la multiplication μ qui vérifie la condition d'associativité et la compatibilité. En outre, elle définira une algèbre non-commutative ternaire de Nambu-Poisson $(A, \{.,.,.\}, \mu)$

A.1.1 Déroulement du programme

Rentrer la dimension et déclarer les constantes de structure du crochet de Lie et de la multiplication

```
n = 3;

PP = Flatten[Table[P[i, j, k, s],
     {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {s, 1, n}]];
CC = Flatten[Table[c[i, j, k], {i, 1, n},
     {j, 1, n}, {k, 1, n}]];
```

Rentrer les constantes de structure du crochet de Lie

```
For [i = 1, i ≤ n, i ++,
  For [j = 1, j ≤ n, j ++, For [k = 1, k ≤ n, k ++,
    For [s = 1, s ≤ n, s ++, P[i, j, k, s] = 0]]]];

P[1, 2, 3, 1] = 1;

For [i = 1, i ≤ n - 2, i ++, For [j = i, j ≤ n - 1, j ++,
   For [k = j, k ≤ n, k ++, For [s = 1, s ≤ n, s ++,
     P[i, k, j, s] = -P[i, j, k, s];
     P[j, i, k, s] = -P[i, j, k, s];
     P[j, k, i, s] = P[i, j, k, s];
     P[k, i, j, s] = P[i, j, k, s];
     P[k, j, i, s] = -P[i, j, k, s]]]]];
```

Vérification de l'identité de Nambu

```
Namb[i1_, i2_, i3_, i4_, i5_, k_] :=
  Sum[(P[i3, i4, i5, s] P[i1, i2, s, k] -
     P[i1, i2, i3, s] P[s, i4, i5, k] - P[i1, i2, i4, s]
      P[i3, s, i5, k] - P[i1, i2, i5, s] P[i3, i4, s, k]), {s, 1, n}];

NambSyst =
 Union[Flatten[Table[Namb[i, j, k, l, s, p],
    {i, n}, {j, n}, {k, n}, {l, n}, {s, n}, {p, n}]]]
{0}
```

Vérification de la condition d'associativité

```
Asso[i_, j_, k_, l_] :=
  Sum[(c[i, j, p] c[p, k, l] - c[j, k, p] c[i, p, l]), {p, 1, n}];

AssoSyst = Union[Flatten[Table[
     Asso[i, j, k, l], {i, n}, {j, n}, {k, n}, {l, n}]]];
```

Vérification de la condition de compatibilité

```
Comp[i_, j_, k_, l_, t_] :=
  Sum[(P[s, k, l, t] c[i, j, s] - P[j, k, l, s] c[i, s, t] -
     P[i, k, l, s] c[s, j, t]), {s, 1, n}];

CompSyst = Union[Flatten[Table[Comp[i, j, k, l, s],
     {i, n}, {j, n}, {k, n}, {l, n}, {s, n}]]];
```

Résolution (rechercher les constantes de structure de la mutiplication qui vérifient les deux conditions d'associativité et la compatibilité)

```
Syst = Union[Flatten[{AssoSyst, CompSyst}]]

sol = Reduce[Syst == 0, Variables[Syst]]
(c[1, 1, 1] == 0 && c[1, 1, 2] == 0 &&
   c[1, 1, 3] == 0 && c[1, 2, 1] == 0 && c[1, 2, 2] == 0 &&
   c[1, 2, 3] == 0 && c[1, 3, 1] == 0 && c[1, 3, 2] == 0 &&
   c[1, 3, 3] == 0 && c[2, 1, 2] == 0 && c[2, 1, 3] == 0 &&
   c[2, 2, 1] == 0 && c[2, 2, 2] == c[2, 1, 1] &&
   c[2, 2, 3] == 0 && c[2, 3, 1] == 0 &&
   c[2, 3, 2] == 0 && c[2, 3, 3] == c[2, 1, 1] &&
   c[3, 1, 2] == 0 && c[3, 1, 3] == 0 &&
   c[3, 2, 1] == 0 && c[3, 2, 2] == c[3, 1, 1] &&
   c[3, 2, 3] == 0 && c[3, 3, 1] == 0 &&
   c[3, 3, 2] == 0 && c[3, 3, 3] == c[3, 1, 1]) ||
 (c[1, 1, 1] == 0 && c[1, 1, 2] == 0 && c[1, 1, 3] == 0 &&
   c[1, 2, 2] == 0 && c[1, 2, 3] == 0 && c[1, 3, 2] == 0 &&
   c[1, 3, 3] == 0 && c[1, 2, 1] ≠ 0 && c[2, 1, 1] == 0 &&
   c[2, 1, 2] == 0 && c[2, 1, 3] == 0 && c[2, 2, 1] == 0 &&
   c[2, 2, 2] == c[1, 2, 1] && c[2, 2, 3] == 0 &&
   c[2, 3, 1] == 0 && c[2, 3, 2] == c[1, 3, 1] &&
   c[2, 3, 3] == 0 && c[3, 1, 1] == 0 && c[3, 1, 2] == 0 &&
   c[3, 1, 3] == 0 && c[3, 2, 1] == 0 && c[3, 2, 2] == 0 &&
   c[3, 2, 3] == c[1, 2, 1] && c[3, 3, 1] == 0 &&
   c[3, 3, 2] == 0 && c[3, 3, 3] == c[1, 3, 1]) ||
 (c[1, 1, 1] == 0 && c[1, 1, 2] == 0 && c[1, 1, 3] == 0 &&
   c[1, 2, 1] == 0 && c[1, 2, 2] == 0 && c[1, 2, 3] == 0 &&
   c[1, 3, 2] == 0 && c[1, 3, 3] == 0 && c[1, 3, 1] ≠ 0 &&
   c[2, 1, 1] == 0 && c[2, 1, 2] == 0 && c[2, 1, 3] == 0 &&
   c[2, 2, 1] == 0 && c[2, 2, 2] == 0 && c[2, 2, 3] == 0 &&
   c[2, 3, 1] == 0 && c[2, 3, 2] == c[1, 3, 1] &&
   c[2, 3, 3] == 0 && c[3, 1, 1] == 0 &&
   c[3, 1, 2] == 0 && c[3, 1, 3] == 0 && c[3, 2, 1] == 0 &&
   c[3, 2, 2] == 0 && c[3, 2, 3] == 0 && c[3, 3, 1] == 0 &&
   c[3, 3, 2] == 0 && c[3, 3, 3] == c[1, 3, 1])
```

Nombre de résultats trouvés

```
Length[sol]
3
```

```
solRule = Table[ToRules[sol[[i]]], {i, Length[sol]}]
{{c[1, 1, 1] → 0, c[1, 1, 2] → 0, c[1, 1, 3] → 0,
  c[1, 2, 1] → 0, c[1, 2, 2] → 0, c[1, 2, 3] → 0,
  c[1, 3, 1] → 0, c[1, 3, 2] → 0, c[1, 3, 3] → 0,
  c[2, 1, 2] → 0, c[2, 1, 3] → 0, c[2, 2, 1] → 0,
  c[2, 2, 2] → c[2, 1, 1], c[2, 2, 3] → 0,
  c[2, 3, 1] → 0, c[2, 3, 2] → 0, c[2, 3, 3] → c[2, 1, 1],
  c[3, 1, 2] → 0, c[3, 1, 3] → 0, c[3, 2, 1] → 0,
  c[3, 2, 2] → c[3, 1, 1], c[3, 2, 3] → 0, c[3, 3, 1] → 0,
  c[3, 3, 2] → 0, c[3, 3, 3] → c[3, 1, 1]},
 {c[1, 1, 1] → 0, c[1, 1, 2] → 0, c[1, 1, 3] → 0,
  c[1, 2, 2] → 0, c[1, 2, 3] → 0, c[1, 3, 2] → 0,
  c[1, 3, 3] → 0, c[2, 1, 1] → 0, c[2, 1, 2] → 0,
  c[2, 1, 3] → 0, c[2, 2, 1] → 0, c[2, 2, 2] → c[1, 2, 1],
  c[2, 2, 3] → 0, c[2, 3, 1] → 0, c[2, 3, 2] → c[1, 3, 1],
  c[2, 3, 3] → 0, c[3, 1, 1] → 0, c[3, 1, 2] → 0,
  c[3, 1, 3] → 0, c[3, 2, 1] → 0, c[3, 2, 2] → 0,
  c[3, 2, 3] → c[1, 2, 1], c[3, 3, 1] → 0,
  c[3, 3, 2] → 0, c[3, 3, 3] → c[1, 3, 1]},
 {c[1, 1, 1] → 0, c[1, 1, 2] → 0, c[1, 1, 3] → 0,
  c[1, 2, 1] → 0, c[1, 2, 2] → 0, c[1, 2, 3] → 0,
  c[1, 3, 2] → 0, c[1, 3, 3] → 0, c[2, 1, 1] → 0,
  c[2, 1, 2] → 0, c[2, 1, 3] → 0, c[2, 2, 1] → 0,
  c[2, 2, 2] → 0, c[2, 2, 3] → 0, c[2, 3, 1] → 0,
  c[2, 3, 2] → c[1, 3, 1], c[2, 3, 3] → 0, c[3, 1, 1] → 0,
  c[3, 1, 2] → 0, c[3, 1, 3] → 0, c[3, 2, 1] → 0,
  c[3, 2, 2] → 0, c[3, 2, 3] → 0, c[3, 3, 1] → 0,
  c[3, 3, 2] → 0, c[3, 3, 3] → c[1, 3, 1]}}
```

Affichage des résultats

```
For[q = 1, q ≤ Length[sol], q++, Print["Algèbre (", q, ")"];
 For [i = 1, i ≤ n, i ++,
  For [j = 1, j ≤ n, j ++, Print["e", i, "*", "e", j, "=",
    Sum[(c[i, j, k] /. solRule[[q]] ) "e"[k], {k, 1, n}]]]]]
Algèbre (1)
e1*e1=0
e1*e2=0
e1*e3=0
e2*e1=e[1] c[2, 1, 1]
e2*e2=e[2] c[2, 1, 1]
e2*e3=e[3] c[2, 1, 1]
e3*e1=e[1] c[3, 1, 1]
e3*e2=e[2] c[3, 1, 1]
e3*e3=e[3] c[3, 1, 1]
Algèbre (2)
e1*e1=0
e1*e2=e[1] c[1, 2, 1]
e1*e3=e[1] c[1, 3, 1]
e2*e1=0
e2*e2=e[2] c[1, 2, 1]
e2*e3=e[2] c[1, 3, 1]
e3*e1=0
e3*e2=e[3] c[1, 2, 1]
e3*e3=e[3] c[1, 3, 1]
Algèbre (3)
e1*e1=0
e1*e2=0
e1*e3=e[1] c[1, 3, 1]
e2*e1=0
e2*e2=0
e2*e3=e[2] c[1, 3, 1]
e3*e1=0
e3*e2=0
e3*e3=e[3] c[1, 3, 1]
```

Remarque A.1 *la multiplication ne doit pas vérifier la commutativité.*

A.2 Classification des algèbres ternaires non-commutatives Hom-Nambu-Poisson en dimension 3

A partir des algèbres ternaires non-commutatives de Nambu-Poisson $(A, \{.,.,.\}, \mu)$ obtenu dans la classification au dessus, on va chercher les constantes de structures du morphisme α qui vérifient les deux conditions suivantes

1. $\alpha\{x, y, z\} = \{\alpha(x), \alpha(y), \alpha(z)\}, \forall x, y, z \in A$
2. $\alpha \circ \mu = \mu \circ \alpha^{\otimes 2}$

pour obtenir par twist des algèbres ternaires non-commutatives Hom-Nambu-Poisson $(A, \{.,.,.\}, \mu, \alpha)$

A.2.1 Déroulement du programme

Rentrer la dimension et déclarer les constantes de structure du crochet de Lie et de la multiplication

```
n = 3;
PP = Flatten[Table[P[i, j, k, s],
     {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {s, 1, n}]];
MM = Flatten[Table[M[i, j, k], {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}]];
```

Rentrer les constantes de structure du crochet de Lie

```
For [i = 1, i ≤ n, i ++,
  For [j = 1, j ≤ n, j ++, For [k = 1, k ≤ n, k ++,
    For [s = 1, s ≤ n, s ++, P[i, j, k, s] = 0]]]];
P[1, 2, 3, 1] = 1;
For [i = 1, i ≤ n - 2, i ++, For [j = i, j ≤ n - 1, j ++,
   For [k = j, k ≤ n, k ++, For [s = 1, s ≤ n, s ++,
     P[i, k, j, s] = -P[i, j, k, s];
     P[j, i, k, s] = -P[i, j, k, s];
     P[j, k, i, s] = P[i, j, k, s];
     P[k, i, j, s] = P[i, j, k, s];
     P[k, j, i, s] = -P[i, j, k, s]]]]];
```

Rentrer les constantes de structure de la multiplication obtenues auparavent

```
For [i = 1, i ≤ n, i ++, For [j = 1, j ≤ n,
   j ++, For [k = 1, k ≤ n, k ++, M[i, j, k] = 0]]];
M[2, 1, 1] = a; M[2, 2, 2] = a; M[2, 3, 3] = a;
M[3, 1, 1] = b; M[3, 2, 2] = b; M[3, 3, 3] = b;
```

Déclarer les constantes de structure du morphisme α

```
F = Array[f, {3, 3}]
var = Flatten[F];
{{f[1, 1], f[1, 2], f[1, 3]}, {f[2, 1], f[2, 2], f[2, 3]}, {f[3, 1], f[3, 2], f[3, 3]}}
```

Vérification de la première condition (Multiplicativité par rapport au crochet)

$$\text{Eq[i\_, j\_, s\_] := }\left(\sum_{k=1}^{n} \text{M[i, j, k]} * \text{f[s, k]}\right) - \left(\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \text{f[p, i]} * \text{f[q, j]} * \text{M[p, q, s]}\right)$$

```
liste = Union[Flatten[ Table[Eq[i, j, s], {i, 1, n}, {j, 1, n}, {s, 1, n}]]]
```

Vérification de la deuxième condition (multiplicatvité par rapport à la multiplication)

$$\text{Eq2[i\_, j\_, k\_, s\_] :=}$$
$$\left(\sum_{m=1}^{n} \text{P[i, j, k, m]} * \text{f[s, m]}\right) - \left(\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} \text{f[p, i]} * \text{f[q, j]} * \text{f[t, k]} * \text{P[p, q, t, s]}\right)$$

```
liste1 =
 Union[Flatten[ Table[Eq2[i, j, k, s], {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {s, 1, n}]]]
```

Résolution

```
Syst = Union[Flatten[{liste, liste1}]]
```

```
sol = Reduce[Syst == 0, var]
(b == 0 && a == 0 && f[1, 1] == 0 && f[2, 1] == 0 && f[3, 1] == 0) ||
 (b == 0 && a == 0 && f[2, 1] == 0 && f[3, 1] == 0 &&
   f[1, 1] f[2, 2] ≠ 0 && f[3, 3] == (1 + f[2, 3] f[3, 2])/f[2, 2]) ||
 (a == 0 && f[2, 1] == 0 && b f[1, 1] ≠ 0 && f[2, 2] == 1 && f[3, 1] == 0 &&
   f[3, 2] == 0 && f[3, 3] == 1) || (a == 0 && b ≠ 0 && f[1, 1] == 0 &&
   f[2, 1] == 0 && f[3, 1] == 0 && f[3, 2] == 0 && f[3, 3] == 1) ||
 (b == 0 && f[1, 1] == 0 && f[2, 1] == 0 && f[2, 2] == 1 && f[2, 3] == 0 &&
   f[3, 1] == 0 && a ≠ 0) || (b == 0 && f[2, 1] == 0 && f[2, 2] == 1 &&
   f[2, 3] == 0 && f[3, 1] == 0 && f[3, 3] == 1 && a f[1, 1] ≠ 0) ||
 (f[1, 1] == 0 && f[2, 1] == 0 && f[3, 1] == 0 && b ≠ 0 &&
   f[3, 2] == (a - a f[2, 2])/b && f[3, 3] == (b - a f[2, 3])/b && a ≠ 0) ||
 (f[2, 1] == 0 && a f[1, 1] ≠ 0 && f[2, 3] == (-b + b f[2, 2])/a && f[3, 1] == 0 &&
   b ≠ 0 && f[3, 2] == (a - a f[2, 2])/b && f[3, 3] == (b - a f[2, 3])/b) ||
 (b == 0 && a == 0 && f[2, 1] == 0 && f[1, 1] ≠ 0 && f[2, 2] == 0 &&
   f[3, 1] == 0 && f[2, 3] ≠ 0 && f[3, 2] == -1/f[2, 3]) ||
 (f[1, 1] == 0 && f[1, 2] == 0 && f[1, 3] == 0 && f[2, 1] == 0 && f[2, 2] == 0 &&
   f[2, 3] == 0 && f[3, 1] == 0 && f[3, 2] == 0 && f[3, 3] == 0)

Length[sol]
10
```

Affichage des résultats

```
solEqual = Table[{}, {Length[sol]}];
solUnequal = Table[{}, {Length[sol]}];
For[i = 1, i ≤ Length[sol], i ++,
  For[j = 1, j ≤ Length[sol[[i]]], j ++,
   If[Head[sol[[i]][[j]]] == Equal,
    solEqual[[i]] = Flatten[
      Append[solEqual[[i]], ToRules[sol[[i]][[j]]]]]];
   If[Head[sol[[i]][[j]]] == Unequal, solUnequal[[i]] =
     Append[solUnequal[[i]], sol[[i]][[j]]]]
  ]];

For[i = 1, i ≤ Length[sol], i ++,
 Print["Solution ", i, " Conditions ", solUnequal[[i]]];
 Print["{a,b}= ", {a, b} /. solEqual[[i]]];
 Print[(F /. solEqual[[i]]) // MatrixForm]]
```

Solution 1 Conditions {}

{a,b}= {0, 0}

$$\begin{pmatrix} 0 & f[1,2] & f[1,3] \\ 0 & f[2,2] & f[2,3] \\ 0 & f[3,2] & f[3,3] \end{pmatrix}$$

Solution 2 Conditions {f[1, 1] f[2, 2] ≠ 0}

{a,b}= {0, 0}

$$\begin{pmatrix} f[1,1] & f[1,2] & f[1,3] \\ 0 & f[2,2] & f[2,3] \\ 0 & f[3,2] & \frac{1+f[2,3]\,f[3,2]}{f[2,2]} \end{pmatrix}$$

Solution 3 Conditions {b f[1, 1] ≠ 0}

{a,b}= {0, b}

$$\begin{pmatrix} f[1,1] & f[1,2] & f[1,3] \\ 0 & 1 & f[2,3] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 4 Conditions {b ≠ 0}

{a,b}= {0, b}

$$\begin{pmatrix} 0 & f[1,2] & f[1,3] \\ 0 & f[2,2] & f[2,3] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 5 Conditions {a ≠ 0}

{a,b}= {a, 0}

$$\begin{pmatrix} 0 & f[1,2] & f[1,3] \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & f[3,2] & f[3,3] \end{pmatrix}$$

Solution 6 Conditions {a f[1, 1] ≠ 0}

{a,b}= {a, 0}

$$\begin{pmatrix} f[1,1] & f[1,2] & f[1,3] \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & f[3,2] & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 7 Conditions {b ≠ 0, a ≠ 0}

{a,b}= {a, b}

$$\begin{pmatrix} 0 & f[1,2] & f[1,3] \\ 0 & f[2,2] & f[2,3] \\ 0 & \frac{a-a\,f[2,2]}{b} & \frac{b-a\,f[2,3]}{b} \end{pmatrix}$$

Solution 8 Conditions {a f[1, 1] ≠ 0, b ≠ 0}

{a,b}= {a, b}

$$\begin{pmatrix} f[1,1] & f[1,2] & f[1,3] \\ 0 & f[2,2] & \frac{-b+b\,f[2,2]}{a} \\ 0 & \frac{a-a\,f[2,2]}{b} & \frac{b-a\,f[2,3]}{b} \end{pmatrix}$$

Solution 9 Conditions {f[1, 1] ≠ 0, f[2, 3] ≠ 0}

{a,b}= {0, 0}

$$\begin{pmatrix} f[1,1] & f[1,2] & f[1,3] \\ 0 & 0 & f[2,3] \\ 0 & -\frac{1}{f[2,3]} & f[3,3] \end{pmatrix}$$

Solution 10 Conditions {}

{a,b}= {a, b}

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.3 Classification des algèbres de Poisson-Lie résolubles en dimension 4

Étant donnée une algèbre de Lie M définie par

$$M_a^3 : \{e_1, e_4\} = e_1; \{e_2, e_4\} = e_3; \{e_3, e_4\} = -ae_2 + (a+1)e_3.$$

Nous construisons toutes les multiplications associatives qui munissent M d'une structure d'algèbre de Poisson.

A.3.1 Déroulement du programme

Rentrer la dimension et déclarer les constantes de structure du crochet de Lie et de la multiplication

```
n = 4;
PP = Flatten[
    Table[P[i, j, k], {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}]];
CC = Flatten[Table[c[i, j, k], {i, 1, n},
     {j, 1, n}, {k, 1, n}]];
```

Rentrer les constantes de structure du crochet de Lie

```
For [i = 1, i ≤ n, i ++, For [j = 1, j ≤ n,
    j ++, For [k = 1, k ≤ n, k ++, P[i, j, k] = 0]]];
P[1, 4, 1] = 1; P[2, 4, 3] = 1;
P[3, 4, 2] = -a; P[3, 4, 3] = (a + 1);
For [i = 1, i ≤ n - 1, i ++,
   For [j = i, j ≤ n, j ++, For [k = 1, k ≤ n, k ++,
     P[j, i, k] = -P[i, j, k]]]];
```

Imposer la condition de commutativité de la multiplication recherchée

```
For [i = 1, i ≤ n, i ++,
   For [j = i, j ≤ n, j ++, For [k = 1, k ≤ n, k ++,
     c[j, i, k] = c[i, j, k]]]];(*commutativité*)
```

Vérification de la condition d'associativité

```
Asso[i_, j_, k_, l_] :=
```

$$\sum_{p=1}^{n} (c[i, j, p]\, c[p, k, l] - c[j, k, p]\, c[i, p, l]);$$

```
AssoSyst = Union[Flatten[Table[
     Asso[i, j, k, l], {i, n}, {j, n}, {k, n}, {l, n}]]];
```

Vérification de la condition de compatibilité

```
Comp[i_, j_, k_, q_] := Sum[(c[i, j, p] P[p, k, q] -
      P[j, k, p] c[i, p, q] - P[i, k, p] c[p, j, q]), {p, 1, n}];
CompSyst = Union[Flatten[Table[
      Comp[i, j, k, q], {i, n}, {j, n}, {k, n}, {q, n}]]];

Syst = Union[Flatten[{AssoSyst, CompSyst}]]
```

Résolution

```
sol = Reduce[Syst == 0, Variables[Syst]]
(a == 0 && c[1, 1, 1] == 0 && c[1, 1, 2] == 0 &&
   c[1, 1, 3] == 0 && c[1, 1, 4] == 0 && c[1, 2, 1] == 0 &&
   c[1, 2, 2] == 0 && c[1, 2, 3] == 0 && c[1, 2, 4] == 0 &&
   c[1, 3, 1] == 0 && c[1, 3, 2] == 0 && c[1, 3, 3] == 0 &&
   c[1, 3, 4] == 0 && c[1, 4, 1] == 0 && c[1, 4, 2] == 0 &&
   c[1, 4, 3] == 0 && c[1, 4, 4] == 0 && c[2, 2, 1] == 0 &&
   c[2, 2, 2] == 0 && c[2, 2, 3] == 0 && c[2, 2, 4] == 0 &&
   c[2, 3, 1] == 0 && c[2, 3, 2] == 0 && c[2, 3, 3] == 0 &&
   c[2, 3, 4] == 0 && c[2, 4, 1] == 0 && c[2, 4, 2] == 0 &&
   c[2, 4, 3] == -c[2, 4, 2] && c[2, 4, 4] == 0 &&
   c[3, 3, 1] == 0 && c[3, 3, 2] == 0 && c[3, 3, 3] == 0 &&
   c[3, 3, 4] == 0 && c[3, 4, 1] == 0 && c[3, 4, 2] == 0 &&
   c[3, 4, 3] == 0 && c[3, 4, 4] == 0 && c[4, 4, 1] == 0 &&
   c[4, 4, 3] == -c[4, 4, 2] && c[4, 4, 4] == 0) ||
 (a == 0 && c[1, 1, 1] == 0 && c[1, 1, 2] == 0 &&
   c[1, 1, 3] == 0 && c[1, 1, 4] == 0 && c[1, 2, 1] == 0 &&
   c[1, 2, 2] == 0 && c[1, 2, 3] == 0 && c[1, 2, 4] == 0 &&
   c[1, 3, 1] == 0 && c[1, 3, 2] == 0 && c[1, 3, 3] == 0 &&
   c[1, 3, 4] == 0 && c[1, 4, 1] == 0 && c[1, 4, 2] == 0 &&
   c[1, 4, 3] == 0 && c[1, 4, 4] == 0 && c[2, 2, 1] == 0 &&
   c[2, 2, 3] == -c[2, 2, 2] && c[2, 2, 4] == 0 &&
   c[2, 3, 1] == 0 && c[2, 3, 2] == 0 && c[2, 3, 3] == 0 &&
   c[2, 3, 4] == 0 && c[2, 4, 1] == 0 && c[2, 4, 2] == 0 &&

 c[2, 4, 3] == -c[2, 4, 2] && c[2, 4, 4] == 0 &&
 c[3, 3, 1] == 0 && c[3, 3, 2] == 0 && c[3, 3, 3] == 0 &&
 c[3, 3, 4] == 0 && c[3, 4, 1] == 0 && c[3, 4, 2] == 0 &&
 c[3, 4, 3] == 0 && c[3, 4, 4] == 0 && c[4, 4, 1] == 0 &&
 c[4, 4, 2] == 0 && c[4, 4, 3] == 0 && c[4, 4, 4] == 0) ||
(a == 0 && c[1, 1, 1] == 0 && c[1, 1, 2] == 0 &&
 c[1, 1, 3] == 0 && c[1, 1, 4] == 0 &&
 c[1, 2, 1] == 0 && c[1, 2, 2] == 0 && c[1, 2, 3] == 0 &&
 c[1, 2, 4] == 0 && c[1, 3, 1] == 0 && c[1, 3, 2] == 0 &&
 c[1, 3, 3] == 0 && c[1, 3, 4] == 0 && c[1, 4, 1] == 0 &&
 c[1, 4, 2] == 0 && c[1, 4, 3] == 0 && c[1, 4, 4] == 0 &&
 c[2, 2, 1] == 0 && c[2, 2, 3] == -c[2, 2, 2] &&
 c[2, 2, 4] == 0 && c[2, 3, 1] == 0 && c[2, 3, 2] == 0 &&
 c[2, 3, 3] == 0 && c[2, 3, 4] == 0 && c[2, 4, 1] == 0 &&
 c[2, 4, 3] == -c[2, 4, 2] && c[2, 4, 4] == 0 &&
 c[3, 3, 1] == 0 && c[3, 3, 2] == 0 && c[3, 3, 3] == 0 &&
 c[3, 3, 4] == 0 && c[3, 4, 1] == 0 && c[3, 4, 2] == 0 &&
 c[3, 4, 3] == 0 && c[3, 4, 4] == 0 && c[4, 4, 1] == 0 &&
 c[2, 2, 2] ≠ 0 && c[4, 4, 2] == c[2, 4, 2]^2 / c[2, 2, 2] &&
 c[4, 4, 3] == -c[4, 4, 2] && c[4, 4, 4] == 0) ||
(a == 0 && c[1, 1, 1] == 0 && c[1, 1, 2] == 0 && c[1, 1, 3] == 0 &&
```

Nombre de résultats

```
Length[sol]
6
```

Affichage des résultats

```
solRule = Table[ToRules[sol[[i]]], {i, Length[sol]}]

For[q = 1, q ≤ Length[sol], q++, Print["Algèbre (", q, ")"];
 For [i = 1, i ≤ n, i++, For [j = 1, j ≤ n, j++,

   Print["e", i, "*", "e", j, "=", Sum[
     (c[i, j, k] //. solRule[[q]] ) "e"[k], {k, 1, n}]]]]]

Algèbre (1)
e1*e1=0
e1*e2=0
e1*e3=0
e1*e4=0
e2*e1=0
e2*e2=0
e2*e3=0
e2*e4=0
e3*e1=0
e3*e2=0
e3*e3=0
e3*e4=0
e4*e1=0
e4*e2=0
e4*e3=0
e4*e4=e[2] c[4, 4, 2] - e[3] c[4, 4, 2]
Algèbre (2)
e1*e1=0
e1*e2=0
e1*e3=0
e1*e4=0
e2*e1=0
e2*e2=e[2] c[2, 2, 2] - e[3] c[2, 2, 2]
e2*e3=0
e2*e4=0
e3*e1=0
```

```
e3*e2=0
e3*e3=0
e3*e4=0
e4*e1=0
e4*e2=0
e4*e3=0
e4*e4=0
Algèbre (3)
e1*e1=0
e1*e2=0
e1*e3=0
e1*e4=0
e2*e1=0
e2*e2=e[2] c[2, 2, 2] - e[3] c[2, 2, 2]
e2*e3=0
e2*e4=e[2] c[2, 4, 2] - e[3] c[2, 4, 2]
e3*e1=0
e3*e2=0
e3*e3=0
e3*e4=0
e4*e1=0
e4*e2=e[2] c[2, 4, 2] - e[3] c[2, 4, 2]
e4*e3=0
```

$$e4 \star e4 = \frac{e[2]\, c[2, 4, 2]^2}{c[2, 2, 2]} - \frac{e[3]\, c[2, 4, 2]^2}{c[2, 2, 2]}$$

```
Algèbre (4)
e1*e1=0
e1*e2=e[1] c[1, 2, 1]
e1*e3=0
e1*e4=e[1] c[1, 4, 1]
e2*e1=e[1] c[1, 2, 1]
e2*e2=e[2] c[1, 2, 1] + e[3] c[1, 2, 1]
e2*e3=e[3] c[1, 2, 1]
e2*e4=e[4] c[1, 2, 1] + e[3] c[1, 4, 1]
e3*e1=0
```

e3⋆e2=e[3] c[1, 2, 1]
e3⋆e3=0
e3⋆e4=e[3] c[1, 4, 1]
e4⋆e1=e[1] c[1, 4, 1]
e4⋆e2=e[4] c[1, 2, 1] + e[3] c[1, 4, 1]
e4⋆e3=e[3] c[1, 4, 1]

$$e4\star e4=2\, e[4]\, c[1,4,1]-\frac{e[2]\, c[1,4,1]^2}{c[1,2,1]}+\frac{e[3]\, c[1,4,1]^2}{c[1,2,1]}$$

Algèbre (5)
e1⋆e1=0
e1⋆e2=e[1] c[1, 2, 1]
e1⋆e3=0
e1⋆e4=0
e2⋆e1=e[1] c[1, 2, 1]
e2⋆e2=e[2] c[1, 2, 1] + e[3] c[1, 2, 1]
e2⋆e3=e[3] c[1, 2, 1]
e2⋆e4=e[4] c[1, 2, 1]
e3⋆e1=0
e3⋆e2=e[3] c[1, 2, 1]
e3⋆e3=0
e3⋆e4=0
e4⋆e1=0
e4⋆e2=e[4] c[1, 2, 1]
e4⋆e3=0
e4⋆e4=0
Algèbre (6)
e1⋆e1=0
e1⋆e2=0
e1⋆e3=0
e1⋆e4=0
e2⋆e1=0
e2⋆e2=0
e2⋆e3=0
e2⋆e4=0
e3⋆e1=0

e3⋆e2=0
e3⋆e3=0
e3⋆e4=0
e4⋆e1=0
e4⋆e2=0
e4⋆e3=0
e4⋆e4=0

Bibliographie

[1] F. Ammar, Z. Ejbehi, and A. Makhlouf. Cohomology and deformations of Hom-algebras. *J. Lie Theory*, 21(4) :813–836, 2011. (Cité page 78.)

[2] F. Ammar, S. Mabrouk, and A. Makhlouf. Representations and cohomology of n-ary multiplicative Hom-Nambu-Lie algebras. *J. Geom. Physics*, 61(10) :590–595, 2011. (Cité page 2.)

[3] F. Ammar, A. Makhlouf, and S. Silvestrov. Ternary q-Virasoro-Witt Hom-Nambu-Lie algebras. *Journal of Physics A-Mathematical and Theoretical*, 26 :265204, 2010. (Cité page 2.)

[4] H. Amri and A. Makhlouf. Non-commutative ternary Nambu-Poisson algebras, and ternary Hom-Nambu-Poisson algebras. *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, 9 :221, 2015. (Cité page 60.)

[5] H. Amri and A. Makhlouf. Structure and cohomology of ternary Nambu-Poisson (resp. ternary Hom-Nambu-Poisson) algebras induced by Poisson (resp. Hom-Poisson) algebras. *Preprint*, 2016.

[6] J. Arnlind, A. Makhlouf, and S. Silvestrov. Ternary hom-nambu-lie algebras induced by Hom-Lie algebras. *J. Math. Phys.*, 11(51) :043515, 2010. (Cité pages 2 et 58.)

[7] H. Ataguema and A. Makhlouf. Deformations of ternary algebras. *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, 1 :41–45, 2007.

[8] H. Ataguema and A. Makhlouf. Notes on cohomologies of ternary algebras of associative type. *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, (3) :157–174, 2009.

[9] H. Ataguema, A. Makhlouf, and S. Silvestrov. Generalization of n-ary Nambu algebras and Beyond. *J. Math. Physd*, (50) :DOI :10.1063/1.3167801, 2009. (Cité pages 2 et 29.)

[10] H. Awata, M. Li, D. Minic, and T. Yoneya. On the quantization of Nambu brackets. *J. High Energy Phys*, 2(17), 2001. (Cité page 45.)

[11] F. Bayen and M. Flato. Remarks concerning Nambu's generalized mechanics. *Phys. Rev.D*, (11) :3049–3053, 1975.

[12] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Deformation theory and quantization. *I. Deformations of Symplectic Structures.Ann. Phys.*, (111) :61–110, 1978. (Cité page 19.)

[13] F. Bayen, M. Flato, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics. *Lett. Math. Phys*, 1(6) :521–530, 1975/77. (Cité page 19.)

[14] R. Chatterjee. Dynamical symmetries and Nambu mechanics. *Lett. Math. Phys*, (36) :117–126, 1996.

[15] R. Chatterjee and L. Takhtajan. Aspects of classical and quantum Nambu mechanics. *lett. Math. Phys.*, (37) :475–482, 1995. (Cité page 18.)

[16] C. Cuvier. Leibnitz algebras. *Ann. Sc. E.N.S.*, 1999. (Cité page 6.)

[17] J.A. de Azcárraga and J. M. Izquierdo. n-ary algebras : a review with applications. *J. Phys. A43*, pages 293001–1–117., 2010.

[18] A.W. de Graaf. Classification of solvable Lie algebras. *Experiment. Math.*, (14) :15–25, 2005. (Cité page 49.)

[19] A.W. de Graaf. Classification of 6-dimentional nilpotent Lie algebra over fields of characteritic not 2. *Journal of Algebra*, (309) :640–653, 2007. (Cité page 46.)

[20] G. Dito. Star-product approach to quantum field theory. *The Free Scalar Field.Lett. Math. Phys*, (20) :125–134, 1990. (Cité page 21.)

[21] G. Dito, M. Flato, D. Sternheimer, and L. Takhtajan. Deformation quantization and Nambu mechanics. *Commun. Math. Phys.*, (183) :1–22, 1997. (Cité pages 1, 2, 22 et 25.)

[22] V.T. Filippov. n-Lie algebras. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 26(6) :126–140, 1985. (Cité pages 1, 7, 17 et 40.)

[23] M. Flato, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Crochets de Moyal-Vey et quantification. *C.R. Acad. Sci. Paris*, (283) :A 19–24, 1976.

[24] M. Flato and D. Sternheimer. Closedness of star-products and cohomologies. *In : Brylinsky, J. L. et al. (eds.)* Lie *Theory and Geometry : In Honor of Bertram Kostant. Progress in Mathematics*, pages 241–259, 1994.

[25] Ph. Gautheron. Some remarks concerning Nambu mechanics. *lett. Math. Phys*, 1996. (Cité page 18.)

[26] Ph. Gautheron. Simple facts concerning Nambu algebras. *Commun. Math. Phys.*, (195) :417–434, 1998.

[27] M. Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. *Ann. of Math.*, 2(79) :59–103, 1964. (Cité page 7.)

[28] A.V. Gnedbaye. Operades des algebres $k+1$-aires. *Proceedings of Renaissance Conferences(Hartford, CT/Luminy, 1995), 83(113), Contemp. Math., 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI,).* (Cité page 7.)

[29] B. Harris. Cohomology of lie triple systems and Lie algebras with involution. *Trans. Amer. Math. Soc*, (98) :148–162, 1961. (Cité page 69.)

[30] J.T. Hartwig, D. Larsson, and S.D. Silvestrov. Deformations of Lie algebras using σ-derivations. *Journal of Algebra*, 295(2) :314–361, 2006. (Cité page 2.)

[31] G. Hochschild. On the cohomology groups of an associative algebra. *Annals of Math. Second Series*, (46) :58–67, 1945. (Cité page 65.)

[32] A. Kitouni and A. Makhlouf. On structure and central extensions of $(n+1)$- lie algebras induced by n-Lie algebras. *arXiv :1405.5930*, 2014. (Cité page 49.)

[33] A.G. Kurosh. A cycle of papers on multioperator rings and algebras : multioperator rings and algebras. *Russian Math.Surveys*, 24(1) :1–13, 1969. (Cité page 1.)

[34] Camille Laurent-Gengoux, Anne Pichereau, and Pol Vanhaecke. *Poisson Structures*.

[35] A. Makhlouf and S. Silvestrov. Hom-algebra structures. *Journal of Generalized* Lie *Theory and Applications*, 2(2) :51–64, 2008. (Cité page 2.)

[36] Y. Nambu. Generalized Hamiltonian mechanics. *Phys. Rev.*, 7(4) :2405–2412, 1973. (Cité pages 1, 16 et 28.)

[37] E. Remm and N. Goze. The n-ary algebra of tensors and of cubic and hypercubic matrices. *arXiv : math.RA 0902.2757.*, pages 126–140. (Cité page 7.)

[38] D. Sahoo and M.C. Valsakumar. Nambu mechanics and its quantization. *Phys. Rev. A*, (46) :4410–4412, 1992. (Cité page 17.)

[39] J.A. Schouten. Tensor analysis for physicists. *New-York : Dover*, (Second edition), 1989. (Cité page 18.)

[40] P. Sharan. Product representation of path integrals. *Phys. Rev*, (D 20) :414–426, 1979. (Cité page 21.)

[41] Y. Sheng. Representation of Hom-Lie algebras. *Algebr. Represent.Theory*, 15(6) :1081–1098, 2012.

[42] L. Takhtajan. On foundation of the generalized Nambu mechanics. *Comm. Math. Phys*, (160) :295–315, 1994. (Cité pages 1, 17 et 18.)

[43] L. Takhtajan. A higher order analog of Chevalley-Eilenberg complex and deformation theory of n-algebras. *St. Petersburg Math. J*, (6) :429–438, 1995. (Cité pages 70 et 73.)

[44] R. Weitzenböck. Invariantentheorie. *P. Noordhoff*, 1923. (Cité page 18.)

[45] K. Yamaguti. On the cohomologie space of Lie triple systems. *Kumamoto J. Sci. Ser*, (A 5) :44–52, 1960. (Cité pages 69 et 70.)

[46] D. Yau. Enveloping algebra of Hom-Lie algebras. *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, (2) :95–108, 2008.

[47] D. Yau. A Hom-associatve analogue of n-ary Hom-Nambu algebras. *arXiv :1005.2373v1*, 2010. (Cité page 2.)

[48] D. Yau. Non-commutative Hom-Poisson algebras. *arXiv :1010.3408 v1 [math.RA]*, 2010. (Cité page 2.)

[49] D. Yau. On n-ary Hom-Nambu and Hom-Nambu-Lie algebras. *arXiv :1004.2080v1*, 2010. (Cité page 2.)

Titre Déformation et quantification des algèbres n-aires

Résumé Une algèbre n-aire est un espace vectoriel sur lequel est définie une multiplication avec n arguments. Classiquement les multiplications sont binaires, mais depuis la mécanique de Nambu et l'utilisation en physique théorique de multiplications ternaires, comme les produits de Nambu, de nombreux travaux mathématiques se sont focalisés sur ce type d'algèbres. Deux classes d'algèbres n-aires sont essentielles : les algèbres n-aires associatives et les algèbres n-aires de Lie. Les algèbres de Nambu ont été étudiées comme une généralisation naturelle d'une algèbre de Lie pour les opérations algébriques d'ordre supérieur. Par définition, une algèbre de Nambu d'ordre n sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle se compose d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$ avec une opération $\mathbb{K}$-multilinéaire antisymétrique , appelé le crochet de Nambu, qui satisfait la généralisation suivante de l'identité de Jacobi. A savoir, pour tout $x_1, ..., x_{n-1} \in V$

$$\begin{aligned}\{x_1, ..., x_{n-1}, \{x_n, ..., x_{2n-1}\}\} &= \{\{x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}, x_{n+1}, ..., x_{2n-1}\} \\ &+ \{x_n, \{x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}\}, x_{n+2}, ..., x_{2n-1}\} \\ &+ ... + \{x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n-2}, \{x_1, ..., x_{n-1}, x_{2n-1}\}\}, \quad \text{(A.1)}\end{aligned}$$

Cette dernière notion, très importante dans l'étude de la mécanique de Nambu-Poisson est une généralisation naturelle des algèbres de Lie. Différents aspects de la mécanique de Nambu, y compris la quantification, la déformation et diverses constructions algébriques pour les algèbres de Nambu ont été récemment étudiés. En outre, une généralisation twisté, appelée algèbres Hom-Nambu, est apparue dans les déformations des algèbres de champs de vecteurs utilisant des σ-dérivations.

Dans cette thèse, on s'est intéressé aux algèbres n-aires de Nambu-Poisson, particulièrement aux algèbres ternaires de Nambu-Poisson. On a introduit les algèbres ternaires (non-commutatives) de Nambu-Poisson et le type Hom de ces dernières. On a défini et caractérisé aussi la somme directe et le produit tensoriel de deux algèbres ternaires (non-commutatives) Hom-Nambu-Poisson. On a établi des théorèmes de constructions des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson en utilisant le principe de twist. Ce processus est utilisé pour construire des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson correspondantes à l'algèbre ternaire des polynômes où le crochet est défini par le Jacobien. On a obtenu la classification en dimension trois des algèbres ternaires non-commutatives de Nambu-Poisson. En outre nous avons proposé une procédure de construction d'une algèbre ternaire de Nambu-Poisson à partir d'un crochet binaire, d'une algèbre de Poisson et une fonction trace qui satisfait certaines conditions de compatibilité. De nombreux exemples en dimension 4 sont produits en utilisant cette procédure de construction qui nous a permis par ailleurs d'établir une classification en dimension 4 des algèbres de Poisson à partir des algèbres de Lie résolubles. La même procédure de construction a été appliquée pour construire des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson à partir des algèbres Hom-Poisson. Enfin, Nous avons étudié la cohomologie des algèbres Hom-Poisson et la cohomologie des algèbres ternaires Hom-Nambu-Poisson.

Mots-clés Algèbre n-aire, algèbre de Nambu-Poisson, algèbre Hom-Nambu-Poisson, classification, twist, déformation, algèbre non-commutative de Poisson

Title Quantization and deformation of n-ary algebras

Abstract An n-ary algebra is a vector space on which is defined a multiplication of n arguments. Classically multiplications are binary, but since the use in Nambu Mechanics and theoretical physics of ternary products, many mathematical works have been focused on this type of algebra. Two n-ary algebra classes are essential : the associative n-ary algebra and n-ary Lie algebra. Nambu algebras have been studied as a natural generalization of a Lie algebra for higher- order algebraic operations. By definition, Nambu algebra of order n over a field $\mathbb{K}$ of characteristic zero consists of a vector space V over $\mathbb{K}$ together with a $\mathbb{K}$-multilinear skew-symmetric operation, called the Nambu bracket that satisfies the following generalization of the Jacobi identity. Namely, for any $x_1, ..., x_{n-1} \in V$

$$\begin{aligned}\{x_1, ..., x_{n-1}, \{x_n, ..., x_{2n-1}\}\} &= \{\{x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}, x_{n+1}, ..., x_{2n-1}\} \\ &+ \{x_n, \{x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}\}, x_{n+2}, ..., x_{2n-1}\} \\ &+ ... + \{x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n-2}, \{x_1, ..., x_{n-1}, x_{2n-1}\}\}, \quad \text{(A.2)}\end{aligned}$$

When $n = 2$, the fundamental identity becomes the Jacobi identity and we get a definition of a Lie algebra. Different aspects of Nambu mechanics, including quantization, deformation and various algebraic constructions for Nambu algebras have recently been studied. Moreover, a twisted generalization called Hom-Nambu algebras have been also developed. This kind of algebras called Hom-algebras appeared as a deformation of algebras of vector fields using σ-derivations.

In this thesis, we were interested by n-ary Nambu-Poisson algebras, particularly by the ternary Nambu-Poisson algebras. We introduced (non-commutative) ternary Nambu-Poisson algebras and a Hom-type of (non-commutative) ternary Nambu-Poisson algebras. We also defined direct sum and tensor product of two (non-commutative) ternary Hom-Nambu-Poisson algebras, provide construction theorems of ternary Hom-Nambu-Poisson algebras using the twisting principle. This process is used to construct ternary Hom-Nambu-Poisson algebras corresponding to the ternary algebra of polynomials where the bracket is defined by the Jacobian. We provide a classification of 3-dimensional ternary Nambu-Poisson algebras and then computed corresponding Hom-Nambu-Poisson algebras using twisting principle. In addition, we proposed a construction procedure of a ternary Nambu-Poisson algebra from a binary bracket of a Poisson algebra and a trace function that satisfies some compatibility conditions. We established a classification of Poisson algebras from Solvable Lie algebras (binary). Applying the construction procedure described above, we have established a classification of ternary Nambu-Poisson algebras constructed from solvable Poisson algebras in dimension 4. The same construction procedure is applied to construct ternary Hom-Nambu-Poisson algebras from Hom-Poisson algebras. Finally, we studied cohomology of Hom-Poisson algebras and cohomology of ternary Hom-Nambu-Poisson algebra.

Keywords n-ary algebra, Nambu-Poisson algebra, Hom-Nambu-Poisson algebra, classification, twisting, deformation, non-commutative Poisson algebra