

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

THÈSE

En vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat (LMD) en MATHÉMATIQUES

Présentée par

Ishak DERRARDJIA

**Existence et stabilité par le théorème de point fixe de
Krasnoselskii-Burton pour certaines équations
différentielles fonctionnelles à retard**

Directeur de Thèse : Prof. AHCENE DJOUDI U. Annaba

Année 2014

Remerciements



Tout d'abord Je tiens à remercier Allah pour tout ce que m'a été donné de force, courage et surtout de connaissances.

Je tiens à remercier tout spécialement mon directeur de thèse, Djoudi Ahcène, Professeur au département de mathématiques à l'université Badji-Mokhtar Annaba, pour sa confiance, ses conseils avisés et le temps qu'il m'a accordé et pour la responsabilité de diriger ce travail. Je le remercie d'avoir été toujours disponible pour répondre à mes questions et d'avoir dirigé mes recherches ainsi que de son soutien durant ces années de thèse.

Mes remerciements les plus chaleureux à Monsieur B. Khodja, Professeur à l'université de Annaba qui a accepté de présider le jury de cette thèse.

Je remercie aussi Monsieur S. Kelaiaia, Professeur au département de mathématiques à l'université Badji-Mokhtar Annaba, Monsieur A. Benrad, Professeur à l'université de Reims, France et Monsieur A. Makhoulf, Professeur à l'université de Annaba qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Dr. Ardjouni Abdelouaheb pour son aide et son soutien.

Je remercie mes très chers parents Kaddour et Fatiha, qui ont toujours été là pour moi, « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ».

Je remercie mes frères et mes sœurs pour leur encouragement.

Je remercie très spécialement Chorfi Ilyes et Seriai Abderrahmene, pour leur amitié, leur soutien inconditionnel et leur encouragement.

Je tiens à remercier Kerker Mohamed Amine et Bousetouane Fouad qui ont toujours été là pour moi.

Pour tous mes amis qui m'ont apporté leur soutien moral pendant ces années d'études, je les en remercie sincèrement.

Enfin, mes remerciements les plus sincères vont à celle sans qui cette thèse n'aurait même pas pu avoir lieu et qui m'a épaulé chaque jour : Yasmine.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.



Résumé :

La stabilité de solutions d'équations différentielles à retard joue un rôle important dans l'analyse qualitative des équations différentielles à retard. Dans cette thèse, nous avons utilisé une technique de point fixe et le concept de contraction large pour prouver des résultats de stabilité asymptotique de la solution zéro d'une classe d'équations totalement non linéaires de type neutre à retard fonctionnel. Cette classe d'équations fait partie du nombre de problèmes qui ont résisté à la méthode directe de Liapounov. Ces résultats de stabilité sont exclusivement obtenus par le théorème de Krasnoselskii-Burton.

Mots-clés : *point fixe, stabilité, théorème Krasnoselskii-Burton, contraction large, équation non linéaire neutre, retard.*

Abstract :

Stability of solutions in delay differential equations play an important role in the qualitative analysis of delay differential equations. In this thesis, we have used a fixed point technique and the concept of large contractions to prove asymptotic stability results of the zero solution of a class of a totally nonlinear neutral differential equation with functional delay. This class of equations has proved very challenging in the theory of Liapunov's direct method. The stability results are exclusively obtained by means of Krasnoselskii-Burton's theorem.

Keywords : *fixed point, stability, Krasnoselskii-Burton theorem, large contractions, nonlinear neutral equation, delay.*

Table des matières

Introduction	iii
1 Point fixe, équations à retard et applications	1
1.1 Notions préliminaires	1
1.2 Théorème de point fixe de Krasnoselskii	5
1.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii-Burton	8
1.4 Equations fonctionnelles différentielles à retard	11
1.4.1 Equations différentielles à retard	11
1.4.2 Equations différentielles de type neutre	14
1.5 Modèles avec retard	15
1.5.1 Un problème en économie	15
1.5.2 Contrôle d'un Bateau de Minorsky	16
1.5.3 Epidémiologie et croissance d'une population de Cooke-Yorke	17
1.5.4 Guerre et paix de Richardson	18
1.5.5 Proies prédateurs de Lokta-Volterra	19
1.5.6 Le modèle de tournesol de Somolinos	20
2 Solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles non linéaires de type neutre	21
2.1 Transformation et inversion de l'équation	23
2.2 Existence de solutions périodiques	26
3 Stabilité par le théorème de Krasnoselskii-Burton pour une équation différentielle à retard	33
3.1 Stabilité pour les équations différentielles fonctionnelles à retard	34
3.2 Stabilité par la méthode directe de Liapounov	35
3.3 Stabilité par la méthode de point fixe	35
3.4 Liapounov ou point fixe, une comparaison	36
3.5 Stabilité par le théorème de Krasnoselskii-Burton pour une équation différentielle non linéaire de type neutre	41
3.5.1 Transformation et inversion de l'équation	43
3.5.2 Bornétude et convergence vers zéro des solutions	44
3.5.3 Compacité et stabilité	52
4 Stabilité par le théorème de Krasnoselskii-Burton pour une classe d'équations différentielles fonctionnelle à retard, la suite	55
4.1 Transformation et inversion de l'équation	56
4.2 Bornétude et convergence vers zéro des solutions	58
4.3 Compacité et stabilité	65
Conclusion et Perspectives	67

Bibliographie

69

INTRODUCTION



ette thèse¹ adresse le problème de stabilité par la technique de point fixe pour certaines équations fonctionnelles différentielles non linéaires de type neutre. L'étude de la stabilité faite ici repose sur le théorème de point fixe hybride de Krasnoselskii-Burton. Selon Smart (c.f. [42, p.31]), Krasnoselskii étudia en 1955 un article de Schauder et formula le principe suivant :

L'inversion d'un opérateur différentiel perturbé génère la somme d'une contraction et une application compacte.

Il combina le théorème de point fixe de Banach et celui de Schauder et établit un théorème de point fixe qui porta son nom. Ce théorème de Krasnoselskii est captivant et il a été l'objet de plusieurs articles de recherche et possède de nombreuses applications intéressantes en analyse non linéaire (voir [1], [2], [3], [10], [12], [16]-[18], [21], [27], [28], [29], [30] [42] et [43]).

La théorie de la stabilité a été créée à la fin du XIX^{ème} siècle par Liapounov. Cette théorie a trouvé une large application dans divers domaines de la physique et des sciences mathématiques. D'un point de vue mathématique, la théorie de la stabilité présente un cas particulier de la théorie qualitative des équations différentielles. Dans ce domaine la méthode directe de Liapounov a été, pour plus d'un siècle, l'incontournable outil permettant d'étudier la stabilité pour les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. Néanmoins, cette méthode a rencontré de sérieux obstacles et il existe encore un tas de problèmes qui résistent à cette méthode.

Dans ce projet on va présenter, en utilisant la technique de point fixe, des résultats de stabilité et de stabilité asymptotique pour une classe d'équations totalement non linéaires de type neutre à retard fonctionnel. Cette classe d'équations fait partie du nombre de problèmes qui ont résisté à la méthode de Liapounov. En général, l'insuffisance de la méthode de Liapounov se manifeste lorsque les fonctions utilisées dans les équations ne sont pas bornées en temps ([36]), si le délai n'est pas borné ou si sa dérivée n'est pas petite ([41], [22]). A cela s'ajoute aussi la difficulté traditionnelle celle de la construction de la fonctionnelle de Liapounov et l'aspect ponctuel, défavorable pour les calculs, des conditions imposées aux fonctions des équations différentielles. Cependant les problèmes de monde réel avec toutes leurs incertitudes exigent des conditions en moyennes. Il était donc temps, pour un bon nombre d'investigateurs de rechercher et d'exploiter d'autres voies et ils tentent la technique de point fixe (voir [2]-[14], [17]-[27], [31], [32], [45]). La stabilité par la méthode de point fixe repose sur trois éléments fondamentaux

- Une application de point fixe
- Un espace fonctionnel convenable apte à contenir des solutions souhaitées
- Un théorème de point fixe.

1. 2000 Mathematics Subject Classification. 47H10, 34K20, 34K20, 34K40.

Seulement trois éléments pour conclure en une étape l'existence, bornétude et convergence vers zéro des solutions de problèmes sophistiqués qui ont frustré le public de ce domaine pour des décennies.

En utilisant le théorème de Krasnoselskii-Burton on va étudier la bornétude et la stabilité asymptotique de solutions d'une classe d'équations différentielles fonctionnelles totalement non linéaires à retard et de type neutre qui s'écrit sous la forme

$$x'(t) = -a(t)x^3(t) + c(t)x'(t-r(t)) + b(t)x^3(t-r(t)), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

avec la donnée d'une fonction initiale continue

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [m_0, 0].$$

Plusieurs investigateurs se sont penchés sur des cas spéciaux de cette équation dans l'espoir de réaliser une étude claire et détaillée sur le comportement asymptotique et la stabilité de ses solutions (voir [18], [21]-[22]).

Hormis le travail accompli par Burton sur un cas particulier de cette équation ([18]), on peut affirmer, sans hésitation, que l'étude qu'on va faire est originale et constitue une contribution significative dans le domaine de la stabilité par la technique de point fixe. Plus précisément, on va démontrer que, pour une fonction ψ initialement donnée, une application de point fixe peut être définie sur un espace métrique complet, dépendant de ψ , municieusement choisi dans lequel cette application possède un point fixe offrant une solution bornée convergeant vers zéro à l'infini pour l'équation (1).

Une telle convergence n'a jamais été réalisée auparavant pour une telle classe d'équations et avec une telle méthode. On démontre, en outre, que si au départ, la stabilité de la solution zéro de (1) était le seul objectif alors les restrictions peuvent être amoindris. On utilise pour le faire une norme poids qui permet de garantir la compacité de l'application de point fixe sans encombre en utilisant le théorème de Krasnoselskii-Burton sur un espace rendu de Banach grâce à cette norme poids. Ces propos ont été publiés dans ([2]) et forment la substance du chapitre 3 de ce manuscrit.

On a remarqué que, modulo quelques réparations, l'étude faite dans le chapitre 3 peut s'adapter aussi à l'équation plus générale

$$x'(t) = -a(t)h(x(t)) + c(t)x'(t-r(t)) + G(x(t), x(t-r(t))), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

donnée avec une fonction initiale continue

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [m_0, 0].$$

Ici aussi on voit une équation fonctionnelle différentielle très générale de type neutre totalement non linéaire ne contenant aucun edo terme. Par conséquent, l'inversion va présenter une certaine difficulté. Pour contourner cette difficulté on va transformer l'équation dans le but de l'intégrer par la suite. L'intégration produira une équation intégrale s'exprimant sous forme d'une somme d'une contraction large B et une application compacte A qui conviennent bien au théorème de Krasnoselskii-Burton. Il suffira pour atteindre l'objectif de construire, avec vigilance un certain

ensemble S_ψ , dépendant de ψ , de sorte que $Ax + By$ puisse résider dans S_ψ toute les fois que x et y demeurent dans S_ψ . Par un choix astucieux de constantes on démontre que cela est possible et que les hypothèses de Krasnoselskii-Burton sont aussi valides. En conclusion, on obtient des solutions dans S_ψ qui était dès le départ préconçu et préparé pour réceptionner ces solutions bornées convergeant vers zéro à l'infini. Un résultat de stabilité est aussi obtenu en utilisant un espace de Banach muni d'une norme poids. Ces propos sont publiés dans ([31]) et feront l'objet du chapitre 4.

Le premier chapitre a été consacré pour rappeler les outils dont on a besoin dans ce projet de thèse. Le théorème de point fixe de Krasnoselkii, les équations différentielles fonctionnelles à retard et de type neutre font partie de ce rappel. D'importants modèles d'équations à retard émanant de la biologie, de la physique et de l'économie sont donnés dans cette partie de la thèse.

Le deuxième chapitre est un exposé sur l'existence de solutions périodiques de l'équation différentielle (2) obtenue par ce même théorème de Krasnoselskii- Burton.

Point fixe, équations à retard et applications

Mots clés. Point fixe, Schauder, Krasnoselskii, Contraction large, Equation à retard.



A plupart des phénomènes naturels en physique, en chimie, en économie en biologie ou en mécanique ont un comportement non linéaire. De tels problèmes s'expriment, mathématiquement, sous forme d'équations différentielles non linéaires rendant, ainsi, la branche de l'analyse non linéaire un domaine perpétuellement en activité et d'actualité puisqu'il traite des questions et des applications de la vie réelle. Les équations différentielles non linéaires et intégral-différentielles, les inégalités variationnelles et aussi les problèmes d'optimisation générale, sont des sujets importants dans l'analyse non linéaire. De nombreuses questions, liées à l'existence et à l'unicité de solutions de certains types d'équations (par exemple, des équations différentielles, des équations intégrales) peuvent être ramenées à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe pour une application appropriée définie sur un espace métrique. Un des plus importants outils d'existence en analyse non linéaire est le théorème dit de Krasnoselskii. C'est un théorème hybride (combinant géométrie et topologie) établi en 1955 par Krasnoselskii. Ce résultat est captivant et possède un domaine d'application très étendu (voir [16], [17], [21], [42]). Durant ces dernières années un nombre d'investigateurs ont trouvé dans ce théorème une issue très satisfaisante pour l'étude de la stabilité et le comportement asymptotique de solutions pour certaines équations différentielles à retard qui ont résisté à la méthode directe de Liapunov.

Dans ce chapitre on va consacrer un important espace pour ce théorème de point fixe de Krasnoselskii. Une extension, due à T.A. Burton (c.f., [16], [17], [21]), de ce théorème sera aussi discutée. Un rappel sur les équations différentielles à retard et de type neutre est donné aussi dans cette partie de ce projet.

1.1 Notions préliminaires

Les éléments qu'on va exposer ci-dessous ont été cueilli de plusieurs ouvrages de l'analyse et certains livres de spécialisés sur les équations fonctionnelles à retard et la plupart se trouve dans la bibliographie suivante [21], [33], [35], [37], [38], [39], [40], [44].

Définition 1.1.1 Le couple (S, ρ) est dit un espace métrique si S un ensemble et $\rho : S \times S \rightarrow [0, \infty)$ une application vérifiant pour tout x, y et z de S

- (a) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, x) = 0, \rho(x, y) = 0 \implies x = y,$
- (b) $\rho(x, y) = \rho(y, x),$ et
- (c) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$

Un espace métrique (S, ρ) est dit complet si toute suite de Cauchy dans S converge. Une suite $(x_n) \subset S$ est dite de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, pour tout $n, m > N$.

Définition 1.1.2 Un espace vectoriel $(S, +, \cdot)$ est un espace normé si pour tout $x, y \in S$ il existe un nombre réel non négatif $\|x\|$ dit la norme de x , satisfaisant

- (i) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{K} (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ et
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Un espace normé est un espace métrique dont la distance est définie par $\rho(x, y) := \|x - y\|$. Cependant, un espace métrique n'est pas toujours un espace normé même s'il possède une structure vectorielle car une distance n'est pas souvent associée à une norme.

Définition 1.1.3 Un espace de Banach est un espace normé complet pour la distance associée à sa norme.

Les exemples d'espaces suivants sont très utilisés dans cette thèse.

Définition 1.1.4 Exemple 1.1.5 L'espace $C = C([a, b], \mathbb{R}^n)$ de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel. Le nombre $\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$, où $|\cdot|$ est la norme dans $\mathbb{R}^n$, définit une norme rendant $(C, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Exemple 1.1.6 Soit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et soit S l'ensemble de fonctions continues et bornées $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $f(t) = \psi(t)$ pour $a \leq t \leq b$. Pour $f, g \in S$, on définit

$$\rho(f, g) = \sup_{a \leq t \leq \infty} |f(t) - g(t)| = \|f - g\|.$$

Alors (S, ρ) est un espace métrique complet.

Définissons

$$M := \{\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} / \varphi \in \mathbb{C}, |\varphi(t)| \leq 1, \varphi(t) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty\}$$

et

$$Q := \{\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} / \varphi \in \mathbb{C}, |\varphi(t)| \leq 1\}.$$

Soit $\|\cdot\|$ la norme du supremum et soit $|\cdot|_h$ une norme poids définie par la donnée d'une fonction $h : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $h(0) = 1$, $h(t) \rightarrow \infty$, et pour $\varphi \in M$ ou Q , on pose

$$|\varphi|_h := \sup_{t \geq 0} |\varphi(t)| / |h(t)|.$$

Exemple 1.1.7 $(M, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach.

Exemple 1.1.8 $(Q, | \cdot |_h)$ est un espace de Banach.

Preuve. Supposons que $\{\phi_n\}$ est de Cauchy dans cet espace. La restriction de $\{\phi_n\}$ à l'intervalle $[0, k]$ reste de Cauchy et admet donc une limite continue définie sur ce dernier intervalle. Mais ceci est vrai pour tout $k = 1, 2, 3, \dots$ alors on obtient ainsi une limite continue sur $[0, \infty)$ qui appartient clairement à Q . ■

Exemple 1.1.9 $(M, | \cdot |_h)$ n'est pas un espace complet.

Preuve. Soit $\{\phi_n\}$ la suite de fonctions continue définie par

$$\phi_n(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq n,$$

$$\phi_n(t) = 0, \quad n+1 \leq t < \infty,$$

ϕ_n est linéaire et continue sur $[n, n+1]$.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre choisi arbitrairement. On doit trouver un indice N tel que $n, m \geq N$ et $t \in \mathbb{R}$ implique que

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| < \varepsilon h(t). \quad (1.1)$$

Choisissons T tel que $\varepsilon h(T) > 2$. De toute évidence, pour tout n, m et pour tout $t \geq T$ on a (1.1). Le choix de $N > T$ implique que pour $n, m \geq N$ et $0 \leq t \leq N$ on aura $\phi_n(t) = \phi_m(t) = 1$ de sorte que (1.1) est valide. Cela démontre que la suite est, en effet, de Cauchy. Cependant pour un t fixé on a $\phi_n(t) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, or 1 n'est pas un élément de M . D'où la conclusion. ■

Définition 1.1.10 Une partie M d'un espace métrique (S, d) est dite compacte si toute suite $\{x_n\}$ de M admet une sous suite convergeant vers une limite appartenant à M . M est relativement compacte si toute suite de M admet une sous suite convergeant vers une limite appartenant à S (i.e. si la fermeture de M est compacte).

Définition 1.1.11 Soit U un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions avec $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $|\cdot|$ une norme quelconque $\mathbb{R}^p$.

- (a) $\{f_n\}$ est uniformément bornée sur U s'il existe un $M > 0$ tel que $|f_n(t)| \leq M$ pour tout n et tout $t \in U$.
- (b) $\{f_n\}$ est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $t_1, t_2 \in U$ et $|t_1 - t_2| < \delta$ alors, $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon$ quelque soit n .

Théorème 1.1.12 [Ascoli-Arzelà] Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions réelles uniformément bornée et équicontinue définie sur un intervalle $[a, b]$, alors la suite admet une sous suite convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction continue.

Mais les problèmes qu'on va manipuler dans ce projet sont définis sur des intervalles infinis en temps, par conséquent une extension du théorème précédent s'impose. Le théorème (1.1.12) peut être étendu par l'utilisation d'une norme poids ou bien en suivant la procédure donnée ci-dessous (voir [21]).

Théorème 1.1.13 ([21, p. 20, Théorème 1.2.2]) *Considérons $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ et soit $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $q(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Si $\{\phi_k\}$ est une suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ équicontinue avec $|\phi_k(t)| \leq q(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, alors il existe une sous suite convergeant uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction ϕ telle que $|\phi(t)| \leq q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, où $|\cdot|$ dénote la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^p$.*

Exemple 1.1.14 *Considérons l'espace de Banach $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ muni de la norme du supremum $\|f\| = \max_{0 \leq t \leq b} |f(t)|$, avec $|\cdot|$ une norme de $\mathbb{R}^n$. Etant données deux constantes positives α et β , l'ensemble*

$$L := \{f \in C([a, b], \mathbb{R}^n) / \|f\| \leq \alpha, |f(u) - f(v)| \leq \beta |u - v|\},$$

est compact. C'est une conséquence du Théorème (1.1.12) d'Ascoli.

Exemple 1.1.15 *Soit (S, ρ) l'espace de fonctions bornées $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ muni de la distance du supremum. (S, ρ) est un Banach. Le sous ensemble*

$$L = \{f \in S / \|f\| \leq 1, |f(u) - f(v)| \leq |u - v|\},$$

n'est pas compact. Néanmoins, en restreignant L en imposant une condition supplémentaire celle de l'existence d'une fonction $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ telle que $g(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ avec $|f(t)| \leq g(t)$ pour chaque $f \in L$ on peut alors faire usage du Théorème (1.1.13) pour conclure que L est compact.

Exemple 1.1.16 *Soit $h : [-r, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $r > 0$ une fonction continue et strictement croissante, avec $h(-r) = 1$ et $h(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Soit $(S, |\cdot|_h)$ l'espace de fonctions continues $f : [-r, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour lesquelles*

$$|f|_h := \sup_{-r \leq t < \infty} |f(t)/h(t)| < \infty.$$

Alors, $(S, |\cdot|_h)$ est un espace de Banach. En outre, pour des constantes positives M et K , l'ensemble

$$L = \{f \in S / |f(t)| \leq M \text{ sur } [-r, \infty), |f(u) - f(v)| \leq K |u - v|\},$$

est compact dans $(S, |\cdot|_h)$.

Preuve. En effet, Soit $\{f_n\}$ une suite arbitraire de L . On doit montrer qu'il existe une fonction f et une sous suite notée encore $\{f_n\}$ telle que $|f_n - f|_h \rightarrow 0$. Or, si on considère $\{f_n\}$ sur un compact $[-r, 0]$ on voit qu'elle est uniformément bornée et équicontinue. Le théorème d'Ascoli-Arzelà implique qu'on peut extraire une sous suite $\{f_n^1\}$ qui converge uniformément vers une fonction continue sur $[-r, 0]$. On vérifie aussi que $|f(t)| \leq M$ et $|f(u) - f(v)| \leq K |u - v|$ sur $[-r, 0]$. La suite $\{f_n^1\}$ considérée à son tour sur $[-r, 2]$ est

uniformément bornée et équicontinue. Il existe une sous suite $\{f_n^2\}$ extraite de cette dernière convergente vers une f sur $[-r, 0]$. En continuant dans ce sens, on obtient une suite $F_n = f_n^n$ qui est extraite de $\{f_n\}$ et qui converge uniformément sur les compacts de $[-r, \infty)$ vers une fonction $f \in L$. On démontre que

$$\eta_n = |F_n - f|_h := \sup_{-r \leq t < \infty} |F_n(t) - f(t)/h(t)| \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Vers cette fin, soit $\varepsilon > 0$ il existe un $T > 0$ tel que $2M/g(T) < \varepsilon/2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \eta_n &\leq \max_{-r < t \leq T} |F_n(t) - f(t)/h(t)| + (\varepsilon/2) \\ &\leq (\varepsilon/2) + \max_{-r < t \leq T} |F_n(t) - f(t)|, \end{aligned}$$

puisque la convergence est uniforme sur $[-r, T]$, il existe N tel que $n \geq N$ implique que $\max_{-r < t \leq T} |F_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. ■

En 1922 Stefan Banach établit un théorème qui s'applique aux fonctions contractantes définies sur des espaces métriques complets. Ce théorème a fait preuve d'une grande utilité en analyse. En particulier il a donné des résultats concluant dans le domaine de l'existence de solutions et le calcul approché pour de nombreux problèmes émanant de l'analyse non linéaire.

Théorème 1.1.17 (Principe de l'application contractante) *Soit (X, d) un espace métrique complet non vide et soit $f : X \rightarrow X$ une contraction i.e., il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que $d(fx, fy) \leq kd(x, y)$, pour tout $x, y \in X$. Alors f admet un et seul point fixe $x^* \in X$ ($: f x^* = x^*$).*

En règle générale, il est évident que, pour résoudre un problème de point fixe on doit identifier trois éléments fondamentaux, à savoir,

1. Un ensemble convenable S apte pour contenir les solutions du problème ;
2. Une application $P : S \rightarrow S$ ayant la particularité qu'un point fixe est solution du problème ;
3. Un théorème de point fixe qui assure l'existence d'un tel point fixe de P sur S .

1.2 Théorème de point fixe de Krasnoselskii

Définition 1.2.1 *Soit M un sous ensemble d'un espace de Banach S et soit $A : M \rightarrow S$ une application. Si A est continue et AM est contenu dans un sous ensemble compact de S , alors on dit que A est une application compacte (on dit aussi que A est complètement continue).*

Théorème 1.2.2 *[Schauder]([21], [42], [44]) Soit M un sous ensemble convexe d'un espace de Banach S et $A : M \rightarrow S$ une application compacte. Alors A possède un point fixe.*

En 1955 Krasnoselskii (voir [21], [42]) a observé que dans un bon nombre de problèmes, l'intégration d'un opérateur différentiel perturbé donne naissance à une somme de deux applications, une contraction et une application compacte. Il déclare alors

Principe. L'intégration d'un opérateur différentiel perturbé peut produire une somme de deux applications, une contraction et un opérateur compact.

Pour mieux comprendre cette observation de Krasnoselskii on considère l'équation différentielle suivante.

$$x'(t) = -a(t)x(t) - g(t, x), \quad (1.2)$$

où $a(t+T) = a(t)$ et $g(t+T, x) = g(t, x)$ pour un certain $T > 0$.

On peut transformer cette équation sous une autre forme en écrivant,

$$x'(t) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right) = -a(t)x(t) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right) - g(t, x) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right).$$

Par conséquent,

$$\left(x(t) \exp \int_0^t a(s) ds \right)' = -g(t, x(t)) \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right).$$

Une intégration de $t-T$ à t donne

$$\int_{t-T}^t \left(x(u) \exp \int_0^u a(s) ds \right)' du = - \int_{t-T}^t g(u, x(u)) \left(\exp \int_0^u a(s) ds \right) du.$$

Ainsi,

$$x(t) = x(t-T) \exp \left(- \int_{t-T}^t a(s) ds \right) - \int_{t-T}^t g(u, x(u)) \exp \left(- \int_u^t a(s) ds \right) du. \quad (1.3)$$

Si on suppose que $\exp \left(- \int_{t-T}^t a(s) ds \right) := \alpha < 1$, et si $(S, \|\cdot\|)$ est l'espace de Banach de fonctions $\phi : R \rightarrow R$ continues et T -périodique, alors l'équation (1.3) peut se mettre sous la forme

$$\phi(t) = (B\phi)(t) + (A\phi)(t) \quad (:= P\phi(t)),$$

avec B est une contraction de constante $\alpha < 1$ et A est une application compacte.

Cet exemple montre bien la naissance de l'application $P\phi := B\phi + A\phi$ qui s'identifie à une somme d'une contraction et une application compacte.

La recherche d'une solution pour (1.3) exige donc un théorème adéquat qui s'applique à cet opérateur hybride P et qui peut conclure l'existence d'un point fixe

qui sera, à son tour, solution de l'équation initiale (1.2). Krasnoselskii trouva la solution en combinant les deux théorèmes de Banach et celui de Schauder en un seul théorème hybride mais puissant qui porte son nom. En clair, il établit le résultat suivant ([42], [21]).

Théorème 1.2.3 [*Krasnoselskii*] Soit $(S, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe et fermée de S . On suppose $A, B : M \rightarrow S$ sont deux applications satisfaisant,

- i. $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$;
- ii. A est continue et AM est contenu dans un ensemble compact;
- iii. B est une contraction de constante $\alpha < 1$.

Alors $\exists x^* \in M, Ax^* + Bx^* = x^*$.

Remarque 1.2.4 Si $A = 0$ alors ce théorème coïncide avec le principe de l'application contractante de Banach et si $B = 0$ il coïncide avec le théorème de Schauder.

Les détails de la preuve reposent sur le lemme suivant.

Lemme 1.2.5 Si $(S, \|\cdot\|)$ est un espace normé, $M \subset S$ et $B : M \rightarrow S$ une application contractante, alors $(I - B)$ est un homéomorphisme de M sur $(I - B)M$. En outre, si $(I - B)M$ est précompact, alors M l'est également.

Preuve. Il est clair que $I - B$ est continue. Comme B est une contraction, alors pour tout $x, y \in M, x \neq y$

$$\begin{aligned} \|(I - B)x - (I - B)y\| &= \|(x - y) - (Bx - By)\| \\ &\geq \|x - y\| - \|Bx - By\| \\ &\geq \|x - y\| - \alpha \|x - y\| \\ &\geq (1 - \alpha) \|x - y\|, \end{aligned}$$

où $\alpha \in (0, 1)$. Ceci montre que $(I - B)^{-1}$ existe et est continue. Cette dernière inégalité montre aussi que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ est un ε -net pour M , alors

$$(I - B)x_1, (I - B)x_2, \dots, (I - B)x_n,$$

est un $(1 - \alpha)\varepsilon$ -net pour $(I - B)M$. ■

Preuve. (du théorème 1.2.3)

Pour chaque $y \in M$ fixé, l'application

$$z = Bz + Ay$$

possède une solution unique $z \in M$, puisque $z \rightarrow Bz + Ay$ définit une contraction de M dans lui même. Ainsi, $z := (I - B)^{-1}Ay$ est un élément de M . Par le lemme (1.2.5), l'application $(I - B)^{-1}A$ est continue et compacte de M dans M . D'après le Théorème (1.2.2), $(I - B)^{-1}A$ possède un point fixe y dans M . Ce point y est l'élément cherché. ■

1.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii-Burton

Burton ([16]) à remarqué que dans certains problèmes la situation ne se présente pas sous forme d'une contraction. Par exemple, si on considère l'équation $x' = x^3 = -x + (x - x^3)$. Alors le terme $(x - x^3)$ est presque une locale contraction. Cependant, lorsque x voisine 0 (voire $x = 0$) il y a échec. Par conséquent, si on souhaite surmonter une telle difficulté on aura besoin d'élargir la notion de contraction pour pouvoir prendre en charge cet exemple ainsi que des cas similaires. Une telle solution a été pensée et établie par Burton ([16], [21]) rendant ainsi le théorème de Krasnoselskii plus apte et plus captivant.

Définition 1.3.1 (Contraction large) Soit (S, d) un espace métrique et $B : S \rightarrow S$ Une application. B est une contraction large si pour tout $\varphi, \psi \in S$ avec $\varphi \neq \psi$ alors $d(B\varphi, B\psi) < d(\varphi, \psi)$ et si pour tout chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta < 1$ tel que

$$[\varphi, \psi \in S, d(\varphi, \psi) \geq \varepsilon] \Rightarrow d(B\varphi, B\psi) \leq \delta d(\varphi, \psi).$$

Exemple 1.3.2 Si $\|\cdot\|$ est la norme du supremum et si

$$M := \left\{ \varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in C, \|\varphi\| \leq \sqrt{3}/3 \right\},$$

alors l'application $(B\varphi)(t) := \varphi(t) - \varphi^3(t)$, est une contraction large sur M .

Preuve. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$ on a pour φ, ψ de M évaluées en t ,

$$\begin{aligned} |(B\varphi)(t) - (B\psi)(t)| &= |\varphi(t) - \varphi^3(t) - \psi(t) + \psi^3(t)| \\ &= |\varphi(t) - \psi(t)| |1 - (\varphi^2(t) + \varphi(t)\psi(t) + \psi^2(t))|. \end{aligned}$$

Or,

$$|\varphi(t) - \psi(t)|^2 = \varphi^2(t) - 2\varphi(t)\psi(t) + \psi^2(t) \leq 2(\varphi^2(t) + \psi^2(t))$$

et comme $\varphi^2(t) + \psi^2(t) < 1$, on obtient

$$\begin{aligned} |(B\varphi)(t) - (B\psi)(t)| &= |\varphi(t) - \psi(t)| [1 - (\varphi^2(t) + \psi^2(t)) + |\varphi(t)\psi(t)|] \\ &\leq |\varphi(t) - \psi(t)| \left[1 - (\varphi^2(t) + \psi^2(t)) + \frac{\varphi^2(t) + \psi^2(t)}{2} \right] \\ &\leq |\varphi(t) - \psi(t)| \left[1 - \frac{\varphi^2(t) + \psi^2(t)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Cette dernière majoration montre que B est ponctuellement (simplement) une contraction large. Mais l'application B reste une contraction large pour la norme du supremum. En effet, soit $\varepsilon \in (0, 1)$ un nombre donné et soient $\varphi, \psi \in M$ avec $\|\varphi - \psi\| \geq \varepsilon$.

(a) Supposons que pour un certain t on a

$$\varepsilon/2 \leq |\varphi(t) - \psi(t)|.$$

Alors,

$$(\varepsilon/2)^2 \leq |\varphi(t) - \psi(t)|^2 \leq 2(\varphi^2(t) + \psi^2(t)),$$

D'où

$$\varphi^2(t) + \psi^2(t) \geq \varepsilon^2/8.$$

Pour de tels t on aura

$$\begin{aligned} |(B\varphi)(t) - (B\psi)(t)| &\leq |\varphi(t) - \psi(t)| \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{16} \right] \\ &\leq \|\varphi - \psi\| \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{16} \right]. \end{aligned}$$

(b) Supposons que pour certains t on a

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \varepsilon/2.$$

Alors,

$$|(B\varphi)(t) - (B\psi)(t)| \leq |\varphi(t) - \psi(t)| \leq (1/2) \|\varphi - \psi\|.$$

Par conséquent, on obtient pour t ,

$$\|B\varphi - B\psi\| \leq \min \left[1/2, 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} \right] \|\varphi - \psi\|.$$

■

Théorème 1.3.3 [Burton ([16])] Soit (S, d) un espace métrique complet et soit $B : S \rightarrow S$ une contraction large. On suppose qu'il existe $x \in S$ et $L > 0$ tq $d(x, B^n x) \leq L \forall n \geq 1$. Alors B admet un point fixe unique dans S .

Preuve. Soit $x \in S$ et engendrons la suite $\{B^n x\}_{n \geq 1}$. de toute évidence si cette suite est de Cauchy. Alors la limite sera un point fixe pour B .

Supposons alors que $\{B^n x\}_{n \geq 1}$ n'est pas de Cauchy, alors

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ tel que pour } K \in \mathbb{N}, \exists n_k, m_k \geq K \text{ avec } m_k > n_k \text{ et } d(B^{m_k} x, B^{n_k} x) \geq \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d(B^{m_k} x, B^{n_k} x) \leq d(B^{m_k-1} x, B^{n_k-1} x) \\ &\leq \dots \leq d(B^{m_k-n_k} x, x) \end{aligned}$$

Comme B est une contraction large, alors pour cet $\varepsilon > 0$, $\exists \delta < 1$ tels que

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d(B^{m_k} x, B^{n_k} x) \leq \delta d(B^{m_k-1} x, B^{n_k-1} x) \\ &\leq \dots \leq \delta^{n_k} d(B^{m_k-n_k} x, x) \leq \delta^{n_k} L, \end{aligned}$$

mais $\delta < 1$, cela produira, pour n_k assez large, une contradiction. D'où la conclusion. ■

Lemme 1.3.4 ([16]) Si $(S, \|\cdot\|)$ est un espace normé, si $M \subset S$ et $B : M \rightarrow S$ une contraction large, alors $(I - B)$ est un homéomorphisme de M dans $(I - B)M$.

Preuve. De toute évidence $I - B$ est continue. D'autre part, pour tout $x, y \in M$ avec $x \neq y$, on voit que

$$\begin{aligned}\|(I - B)x - (I - B)y\| &= \|(x - y) - (Bx - By)\| \\ &\geq \|x - y\| - \|Bx - By\| \\ &> \|x - y\| - \|x - y\| = 0.\end{aligned}$$

En conclusion $I - B$ est injective et donc $(I - B)^{-1}$ existe. Si $(I - B)^{-1}$ n'était pas continue, alors $\exists (I - B)y$ et $(I - B)x_n \rightarrow (I - B)y$ mais $x_n \not\rightarrow y$.

Or, pour

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow \quad (1.4)$$

$$\varepsilon \geq \|(I - B)x_n - (I - B)y\| \geq \|x_n - y\| - \|Bx_n - By\|,$$

comme $x_n \not\rightarrow y, \exists \varepsilon_0 > 0$ et $\{x_{n_k}\}_k$ telle que $\|x_{n_k} - y\| \geq \varepsilon_0$, et comme B est une contraction alors

$$\exists \delta < 1 \text{ avec } \|Bx_{n_k} - By\| \leq \delta \|x_{n_k} - y\|.$$

Ainsi, en utilisant (1.4), on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon &\geq \|(I - B)x_{n_k} - (I - B)y\| \\ &\geq \|x_{n_k} - y\| - \|Bx_{n_k} - By\| \\ &\geq \|x_{n_k} - y\| - \delta \|x_{n_k} - y\| \\ &= (1 - \delta) \|x_{n_k} - y\| \\ &\geq (1 - \delta)\varepsilon_0.\end{aligned}$$

Mais ε_0 est fixé, $\delta < 1$, par conséquent on aura une contradiction lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. $I - B$ est bien un homéomorphisme. ■

Pour de amples informations sur le théorème suivant on conseille de voir ([16], [18] et [21]).

Théorème 1.3.5 [Krasnoselskii-Burton ([16])] Soit S un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe, bornée et fermée de S .

On suppose $A, B : M \rightarrow M$ sont deux applications telles que

- i $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$;
- ii A est continue et AM est contenu dans un compact ;
- iii B est une contraction large.

Alors $\exists x^* \in M, Ax^* + Bx^* = x^*$.

Preuve. Pour chaque $y \in M$ fixé l'application $Hx = Bx + Ay$ est une contraction large sur M possédant un point fixe unique z (comme M est bornée l'existence du nombre L du Théorème (1.3.3) est assurée). Donc $z = Bz + Ay$ possède une unique solution. Ainsi, $(I - B)z = Ay$. Par le Lemme (1.3.4) $Py := (I - B)^{-1}Ay$ est continue de M dans M . Mais, AM est contenu dans un sous ensemble compact de M et $(I - B)^{-1}$ est continue de AM dans M , il est alors bien connu que $(I - B)^{-1}AM$ est contenu dans un sous ensemble compact de M . Selon le Théorème (1.2.2) de Schauder, il existe un point fixe $x^* = (I - B)^{-1}Ax^* i.e., Ax^* + Bx^* = x^*$. ■

1.4 Equations fonctionnelles différentielles à retard

Qu'est-ce qu'une équation différentielle à retard ?.

Une équation différentielle à retard est une équation différentielle dont la dérivée par rapport au temps présent de la solution dépend d'une donnée (de cette solution) sur un temps postérieurs. Une équation différentielle à retard est un model spécifique d'équations différentielles fonctionnelles, dans lesquelles la partie fonctionnelle de l'équation est l'évaluation d'une fonctionnelle sur une étape postérieur (le passé) du processus ([33], [35], [40]).

1.4.1 Equations différentielles à retard

Étant donné un nombre $r > 0$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n muni de la norme euclidienne $|\cdot|$, $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Si $[a, b] = [-r, 0]$ on pose $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ et on désigne la norme d'un élément $\varphi \in C$ par $\|\varphi\| = \sup_{-r \leq t \leq 0} |\varphi|$. Si

$$t_0 \in \mathbb{R}, A \geq 0 \text{ et } x \in C([t_0 - r, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$$

alors pour $t \in [t_0, t_0 + A]$ on définit $x_t \in C$ par $x_t(s) := x(s + t)$ pour tout $s \in [-r, 0]$.

Définition 1.4.1 Si D est un sous ensemble de $\mathbb{R} \times C$, et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction donnée, la relation

$$x'(t) := f(t, x_t) \tag{1.5}$$

ou

$$x_t(s) := x(t + s), \quad s \in [-r, 0]$$

est une équation différentielle fonctionnelle à retard sur D notée parfois EDR(f). Le nombre r est appelé le retard. En clair, le cas $r = 0$ correspond au cas des équations différentielles ordinaires.

Il est évident qu'une condition initiale appropriée au temps $t = t_0$ exige la détermination de la fonction x sur tout l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$, i.e.,

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [t_0 - r, t_0].$$

Ou $\psi : [t_0 - r, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée supposée continue appelée la condition initiale de l'équation à retard (1.5). Ainsi, l'équation (1.5) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} x'(t) &:= f(t, x_t), \quad t \geq t_0 \\ x(t) &= \psi(t), \quad t \in [t_0 - r, t_0], \end{aligned}$$

avec ψ une fonction donnée continue sur tout l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$.

L'équation (1.5) est dite linéaire si $f(t, \varphi) = L(t)\varphi$, où $L(t)$ est linéaire en chaque t : L'équation (1.5) est dite non homogène si $f(t, \varphi) = L(t)\varphi + h(t)$, où $h(t) \neq 0$. L'équation (1.5) est dite autonome si $f(t, \varphi) = g(\varphi)$, g indépendante de t .

A titre d'exemple, les équations suivantes sont des équations différentielles à retard

$$x'(t) = 2x(t) + 5x(t-1), \quad (1.6)$$

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x'(t-r(t)) + h(t), \quad (1.7)$$

$$x'(t) = \int_{-r}^0 x(t+s)ds, \quad (1.8)$$

$a(t)$, $b(t)$, $r(t)$ sont des fonctions continues. L'équation (1.6) représente une équation différentielle linéaire autonome à retard constant $r = 1$, l'équation (1.7) est une équation différentielle linéaire à retard fonctionnelle non homogène non autonome et l'équation (1.8) représente une équation intégro-différentielle linéaire à retard.

Définition 1.4.2 *Étant donnés $\psi \in C$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, une solution de l'Equation (1.5) est une fonction notée $x(t)$ telle que $x(t) = \psi(t)$ si $t \in [t_0 - r; t_0]$ et satisfaisant (1.5) si $t \in [t_0; t_0 + A]$; $A > 0$. Une telle fonction $x(t)$ est dite solution de (1.5) à travers (t_0, ψ) et est notée souvent par $x(t) = x(t, t_0, \psi)$.*

Lemme 1.4.3 ([35]) *Étant données une fonction $\psi \in C$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $f(t, \psi)$ une fonction continue. La recherche d'une solution de l'équation (1.5) à travers (t_0, ψ) est équivalente à la résolution de l'équation intégrale*

$$x_{t_0} = \psi, \\ x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^t f(u, x_u)du, \quad t \geq t_0.$$

Définissons l'application Ax par l'expression

$$Ax(t) := f(t, x_t), \quad t \geq t_0, \\ x_{t_0} = \psi.$$

Pour démontrer l'existence d'une solution à travers $(t_0, \psi) \in \mathbb{R} \times C$, on considère un nombre $\sigma > 0$, et toutes les fonctions définies sur $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$ qui sont continues et qui coïncident avec ψ sur $[t_0 - r, t_0]$, qui est, $x_{t_0} = \psi$. On demande que les valeurs de ces fonctions sur $[t_0, t_0 + \sigma]$ répondent à la condition $|x(t) - \psi(0)| \leq \beta$. La fonction usuelle obtenue A correspondant à l'équation intégrale est définie et on démontre que σ et β peuvent être choisis de sorte que A envoie cette classe (de fonctions continues) dans elle-même, qu'elle est continue et à image compacte. Dans ce contexte, le théorème du point fixe de Schauder peut s'appliquer et implique l'existence d'une solution (pour de amples détails on renvoi aux livres ([35] et [40])).

Théorème 1.4.4 (Existence) *Pour l'équation (1.5), supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f(t, \varphi)$ une application continue sur Ω . Si $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution de l'équation (1.5) passant par (t_0, ψ) .*

Définition 1.4.5 *On dit que la fonction $f(t, \varphi)$ est Lipschitzienne par rapport à φ sur un compact K de $\mathbb{R} \times C$ s'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $(t, \varphi_i) \in K$, $i = 1, 2$ on a*

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| \leq \kappa |\varphi_1 - \varphi_2|. \quad (1.9)$$

Théorème 1.4.6 (Unicité) *Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, $f(t, \varphi)$ est Lipschitzienne par rapport à φ sur tout sous ensemble compact de Ω . Si $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une unique solution pour l'équation (1.5) passant par (t_0, ψ) .*

Dans l'exemple suivant on va utiliser la méthode dites des étapes pour résoudre une équation à retard.

Exemple 1.4.7 *Considérons l'équation différentielle à retard suivante*

$$x'(t) = 2x(t-7), \quad t \geq t_0.$$

Comment résoudre une telle équation ?.

Il existe une méthode appelée la **Méthode des étapes** et elle fonctionne de la façon suivante. On suppose par exemple que $t_0 = 0$. Si on veut résoudre le système au temps $t = 0$, il est clair qu'on aura besoin de connaître la valeur du système au temps $t = -7$. Pour connaître le système au temps $t = 7$, il est indispensable de savoir sa valeur au temps $t = 0$. Par conséquent, pour avoir une solution complète de $t = 0$ à $t = 7$, on est obligé de connaître toute une solution initiale de $t = -7$ à $t = 0$. Ainsi donc, on doit se doter d'une fonction initiale définie sur $[-7, 0]$. Soit alors ψ une donnée initiale et supposons que $\psi(t) = 4$, $t \in [-7, 0]$. Maintenant, on a suffisamment d'informations pour trouver une solution, disant $x(t, 0, \psi)$, sur $[0, 7]$. Or $0 \leq t \leq 7$ implique $-7 \leq t-7 \leq 0$ et donc $x(t-7) = \psi(t-7) = 4$.

L'équation devient $x'(t) = 8$ et la solution générale sera

$$x(t) = 8t + c, \quad c = \text{constante}.$$

En remplaçant t par zéro dans cette dernière équation, on constate que $c = 4$. Ainsi, on aura

$$x(t) = 8t + 4 \quad t \in [0, 7].$$

Maintenant, on peut exploiter ces informations pour progresser et résoudre l'équation pour des temps futurs, par exemple pour $t \in [7, 14]$. Ici on voit que

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2(8(t-7) + 4) \\ &= 16t - 103. \end{aligned}$$

Elle possède la solution générale

$$x(t) = 8t^2 - 103t + d, \quad d = \text{constante}.$$

En utilisant la solution que nous avons trouvée pour $t \in [0, 7]$, et exactement en $t = 7$ on obtient la valeur $d = 389$. Par conséquent,

$$x(t) = 8t^2 - 103t + 389, \quad t \in [7, 14].$$

On peut progresser dans ce sens et résoudre l'équation à retard comme une série infinie d'EDO.

1.4.2 Equations différentielles de type neutre

On donne ici la définition d'une équation différentielle de type neutre et on donne quelques exemples. Ici aussi on conseille de voir ([35] et [40]) pour plus d'informations sur ce type d'équations.

Définition 1.4.8 Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ d'éléments (t, φ) . Une fonction $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite atomique au point β de Ω si D est continue ainsi que sa première et seconde dérivée au sens de Fréchet par rapport à φ et D_φ , sa dérivée par rapport à φ , est atomique en β de Ω .

Définition 1.4.9 Supposons que Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$, $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions données continues avec D atomique en zéro. La relation

$$\frac{d}{dt}D(t, x_t) = f(t, x_t), \quad (1.10)$$

est dite une équation différentielle de type neutre EDTN.

Définition 1.4.10 Une fonction x est dite solution de l'équation (1.10) sur $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$, s'il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ tels que

$$x \in C([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n), \quad (t, x_t) \in \Omega, \quad t \in [t_0, t_0 + \sigma],$$

$D(t, x_t)$ est continument différentiable et satisfait (1.10) sur $[t_0, t_0 + \sigma]$. Etant donné $t \in \mathbb{R}$, $\psi \in C$ et $(t_0, \psi) \in \Omega$ on dit que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (1.10) passant par (t_0, ψ) s'il existe $\sigma > 0$ telle que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (1.10) sur $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$ et $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$; on dit que $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (1.10) sur $[t_0 - r, \infty)$ si pour tout $\sigma > 0$, $x(t, t_0, \psi)$ est une solution de (1.10) sur $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$ et $x_{t_0}(t_0, \psi) = \psi$.

Théorème 1.4.11 (Existence) *Si Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $(t_0, \psi) \in \Omega$, alors il existe une solution pour l'équation (1.10) passant par (t_0, ψ) .*

Théorème 1.4.12 (Existence et Unicité) *Si Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f(t, \varphi)$ est Lipschitzienne sur tout sous ensemble compact Ω , alors pour tout $(t_0, \psi) \in \Omega$ il existe une unique solution pour l'équation (1.10) passant par (t_0, ψ) .*

Par exemple

$$x'(t) = -x'(t-1),$$

$$x'(t) = x(t-1) + [x'(t-3) + 1]^3,$$

$$x''(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) + x'(t-1) - x'(t-3),$$

sont des équations différentielles à retard de type neutre.

1.5 Modèles avec retard

L'utilisation des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles pour modéliser les phénomènes naturels physiques ou biologiques possède une longue histoire et remonte à Lokta et Volterra. Les équations différentielles sont faites pour un but, celui de mieux comprendre les phénomènes compliqués de la nature. Il s'est avéré, par l'expérience, que les simples modèles n'arrivent pas à cerner la variété riche de la dynamique observée dans les systèmes naturels. Il est devenu clair que pour bien comprendre ces phénomènes un terme avec retard doit être inclus. Dans une équation différentielle, un retard peut représenter l'arrivée à maturité d'un produit, une période d'incubation, temps de gestations, délais de transport ou simplement représenter des processus compliqués qui mettent un temps pour réagir après une action. Les problèmes à retard sont innombrables en littérature. Certains de ces problèmes ont connu un intérêt particulier. On a choisi dans cette thèse quelques modèles intervenant dans des domaines différents monde réel.

1.5.1 Un problème en économie

Le problème s'inspire d'une situation réelle. Il est tiré du livre sur les équations différentielles de Boyce et DiPrima (c.f., [15]).

Une jeune personne sans capital initial investi k dollars par an pour un taux r d'intérêt annuel. On suppose que ses investissements sont faits continument et que les intérêts sont composés continument. Si $r = 7,5\%$, on souhaite déterminer k pour qu'au bout de quarante ans cette personne encaissera un million de dollars.

Le problème est formulé par l'équation

$$S' = 0,075S + k \quad \text{avec } S(0) = 0$$

et la solution est donnée en calculant $S(40)$.

Maintenant les quarante années sont achevées. On suppose que cette personne possède une somme d'argent et souhaite l'investir et vivre au dépend de son investissement bancaire. Pendant les mauvaises périodes de taux d'intérêts réduits, un conseiller financier recommande aux clients des certificats bancaires qui arrivent à maturité après 90 jours et qui sont systématiquement renouvelés (réinvestis) au taux d'intérêt existant. Intérêt et principal sont donc réinvestis. Cette procédure permettra aux investisseurs de prendre de l'avantage pendant les périodes à taux d'intérêt élevés. On s'aperçoit que cette procédure devient aussi un réinvestissement continu comme dans le cas de k dollars par an.

Si la valeur totale est $S(t)$, alors de l'investissement pur on aura

$$S'(t) = b(t)S(t - \frac{1}{4}).$$

Le facteur $S(t - (1/4))$, est le montant total qui a été investi trois mois auparavant et qui arrive à maturité aujourd'hui. Le facteur $b(t)$ est le taux d'intérêt offert en ce temps. En outre notre homme retire continuellement un pourcentage du total $S(t)$ pour ses dépenses et ses besoins courants. Il en résulte une équation

$$S'(t) = -a(t)S(t) + b(t)S(t - \frac{1}{4}), \quad S(t) = \psi(t) \text{ pour } -1/4 \leq t \leq 0.$$

Ici la condition initiale est une fonction donnée $\psi : [-1/4, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ où $\psi(t)$ est exactement le montant $S(t)$ investi au temps t .

On peut tracer plusieurs conclusions pour cette personne. Premièrement, si les solutions sont bornées alors le temps va vraisemblablement devenir difficile car l'inflation va éroder les valeurs, et les factures de soins vont augmenter avec le temps. Actuellement, quelques études ont montré que les retraités qui ont un salaire qui voisine trois fois ses dépenses courants au début de sa retraite arrivent au désespoir au bout de quinze ans. En revanche, si les solutions ont tendance à s'approcher de zéro, alors la destinée de cette personne sera la pauvreté. Les retraités, au moins, auront l'avantage d'ajuster leurs dépenses avec les exigences de l'époque.

Evidemment, cet exemple garde le sens si a et b varient. Par exemple $a(t)$ peut être négatif le jour où on percevra des (taxes de) remboursements et $b(t)$ peut être négatif le jour où la banque subira un échec.

1.5.2 Contrôle d'un Bateau de Minorsky

En 1962 Minorsky (voir ([20])) a conçu un dispositif pour le contrôle automatique de la direction pour un bateau. Le modèle se décrit comme suit. Soit $x(t)$ une position angulaire fixée du gouvernail de direction du bateau et supposons qu'il existe une force de frottement proportionnelle à la vitesse, $-cx'(t)$. On suppose qu'il existe un dispositif qui indique la direction du mouvement du bateau en temps réel et qu'il existe aussi un autre dispositif qui pointe la direction désirée. Ces deux instruments sont reliés à un appareil connecté à un moteur électrique qui produit une certaine force agissant sur le gouvernail dans le but de le faire pivoter (orienter) pour ramener le bateau sur le chemin désirée. De toute évidence il y a un décalage (retard) de magnitude $h > 0$ en

temps entre le moment où le moteur électrique exerce la force pour redresser le bateau et le moment où le bateau réagit pour se réorienter. Minorsky décrit cela par l'équation suivante donnée sur $x(t)$

$$x''(t) + cx'(t) + g(x(t-h)) = 0, \quad (1.11)$$

où il considère que $xg(x) > 0$, si $x \neq 0$ et c une constante positive. L'objectif du problème est de chercher des conditions qui assurent le maintien de $x(t)$ près de zéro de sorte que le bateau suivra étroitement son cours approprié pour arriver à sa destination fixé.

1.5.3 Epidémiologie et croissance d'une population de Cooke-Yorke

En 1973 Cooke et Yorke ([20]) présentent un modèle d'épidémiologie traduit en termes d'une équation différentielle à retard. Plus précisément, le croquis du problème est le suivant. Si $x(t)$ représente le nombre d'individus dans une population au temps t , le nombre de nouveaux nés $B(t)$ est une certaine fonction de $x(t)$, disant $B(t) = g(x(t))$. Supposons que chaque individu possède une durée de vie notée L , une constante. Comme chaque individu meurt à l'âge L , alors le nombre de décès par unité de temps est $g(x(t-L))$: La différence

$$g(x(t)) - g(x(t-L))$$

représente le taux de change de cette population par unité de temps. Ainsi, la croissance de cette population est donc gouvernée par l'équation différentielle à retard

$$x'(t) = g(x(t)) - g(x(t-L)), \quad L > 0,$$

où g est une certaine fonction différentiable. Sous des conditions convenables trois propriétés dominantes émergent,

- (i) Toute fonction constante est solution
- (ii) l'équation possède une première intégrale i.e.,

$$x(t) = \int_{t-L}^t g(x(s)) ds + c$$

où on prend, pour des considérations biologiques, $c = 0$,

- (ii) toute solution tend vers une constante.

1.5.4 Guerre et paix de Richardson

Certains modèles de guerre et de paix ont été considérés par L.R. Richardson (1881-1953, voir ([20])). Il a affirmé que les hommes, selon ses propos, sont guidés par leurs traditions qui sont fixés et leurs instincts qui sont mécaniques.

Il suppose que les guerres commencent lorsque la course aux armements prend fin et il a estimé que la dynamique internationale pourrait être modélisée mathématiquement en raison des motivations humaines. Il estime que sur une grande échelle de temps les hommes sont incapables de distinguer le bien du mal. Avec ces idées, Richardson essaya de développer une théorie sur la dynamique internationale pour servir de guide aux hommes d'état pour ajuster et bien gérer la politique intérieure et extérieure. Soient X et Y deux nations qui se suspectent mutuellement. Supposons que X et Y créent des stocks d'armes x et y respectivement. En général, x et y représentent " les menaces moins la coopération " de sorte que des valeurs négatives possèdent aussi un sens.

Trois choses affectent l'accumulation des armes de X ;

1. la charge économique,
2. la menace observée (lors des manifestations nationales) de $y(t)$,
3. les soupçons et la peur de Y .

La même chose s'applique, bien sûr, à Y .

Richardson admit que chaque côté X comme Y possède une connaissance parfaite et instantanée de l'arsenal militaire que détient l'adversaire et que la réaction de chaque coté peut se faire instantanément.

De (1) il obtient

$$\frac{dx}{dt} = -a_1 x,$$

car la charge est proportionnelle à la taille x , et de (2) il soutient que

$$\frac{dx}{dt} = -a_1 x + b_1 y,$$

puisque la terreur est proportionnelle à la taille y . En conclusion, Richardson aboutit au système

$$\begin{aligned} x' &= -a_1 x + b_1 y + g_1, \\ y' &= -a_2 y + b_2 x + g_2. \end{aligned}$$

avec a_i, b_i , et g_i $i = 1, 2$ sont des constantes positives où g_i représentent la méfiance constante et où a_i, b_i sont affectées et fixées par la politique intérieure et extérieure. En 1978 Hill, a révisé ce problème et a reconnu des lacunes dans le modèle de Richardson. Il a estimé que ça va prendre du temps pour répondre à une situation observée et propose le modèle suivant

$$\begin{aligned}x' &= -a_1 x(t-T) + b_1 y(t-T) + g_1 \\y' &= -a_2 y(t-T) + b_2 x(t-T) + g_2,\end{aligned}$$

où T est une constante positive choisie de sorte que les solutions du système s'approchent de l'équilibre.

1.5.5 Proies prédateurs de Lokta-Volterra

Le modèle prédateur-proie classique a été proposé par Volterra et Lotka en 1920, dans un ouvrage intitulé "Théorie mathématique de la lutte pour la vie" qui est probablement le premier traité d'écologie mathématique. Le modèle s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}x'(t) &= a_1 x(t) - b_1 x(t)y(t) \\y'(t) &= a_2 y(t) - b_2 x(t)y(t),\end{aligned}\tag{1.12}$$

avec la condition initiale

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,\tag{1.13}$$

où $x(t)$ représente la population de proies et $y(t)$ la population de prédateurs à l'instant t et a_1, a_2, b_1, b_2 sont des constantes positives. Si on suppose que le fait d'un changement dans la population de proies n'affectera pas immédiatement la population des prédateurs et, inversement, le système (1.12) avec la condition initiale (1.13) devient une équation différentielle à retard de la forme

$$\begin{aligned}x'(t) &= a_1 x(t) - b_1 x(t)y(t-r_1) \\y'(t) &= a_2 y(t) - b_2 x(t-r_2)y(t),\end{aligned}$$

avec des conditions initiales

$$x(0) = x_0, \quad x(s) = \psi(s), \quad y(0) = y_0, \quad y(s) = \varphi(s), \quad -\tau < s < 0,$$

où $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$, sont des retards et les fonctions $\psi(\cdot)$ et $\varphi(\cdot)$ sont les fonctions initiales de l'histoire antérieure, $\tau = \max\{r_1, r_2\}$ (pour de amples détails, exemple et informations, on conseille de consulter ([33], [34], et [40])).

1.5.6 Le modèle de tournesol de Somolinos

La fleur de la plante de tournesol tourne d'un côté vers l'autre d'une façon périodique. Ceci est due à une hormone qui réagit au contact de rayon solaire. En 1978 Somolinos modélisa ce mouvement par l'équation

$$x'' + (a/r)x' + (b/r)\sin x(t-r) = 0,$$

dit l'équation de tournesol. Il obtient des résultats intéressants sur l'existence de solutions périodiques ([20]).

Solutions périodiques pour une classe d'équations différentielles non linéaires de type neutre

Mots clés. Point fixe, Contraction large, Solution périodique, équation totalement non linéaire, équation de type neutre.



Ans ([18]), Burton a considéré l'équation différentielle à retard

$$x'(t) = -a(t)x^3(t) + b(t)x^3(t - r(t)), \quad (2.1)$$

pour étudier les conditions de la stabilité et de la stabilité asymptotique de sa solution triviale par la méthode de point fixe. Motivé par ce dernier travail Deham et Djoudi ont présenté dans [29] des hypothèses pour l'existence de solutions périodiques la classe élargie

$$x'(t) = -a(t)x^3(t) + G(t, x^3(t - r(t))). \quad (2.2)$$

Plus tard, dans une autre publication Deham et Djoudi ont présenté dans [30] le model plus générale exprimé par l'équation non linéaire de type neutre suivante

$$x'(t) = -a(t)x^3(t) + c(t)x'(t - r(t)) + G(t, x^3(t - r(t))). \quad (2.3)$$

Il est clair que (2.2) s'obtient de l'équation (2.3) lorsqu'on laisse $c(t) = 0$. Cette équation a présenté un vrai défi aussi bien pour l'étude de la stabilité de sa solution nulle (lorsque $G(t, 0) = 0$) que pour l'étude de l'existence et la périodicité de probables solutions. La difficulté provient du fait que (2.3) (comme d'ailleurs (2.2)) est totalement non linéaire en x . La présence du terme $a(t)x^3(t)$ empêche la méthode de variation de paramètres de s'appliquer dans ce cas. Burton, dans ([18]), a fait recours à une méthode classique qui consiste à ajouter aux deux membres de (2.1) un terme linéaire $a(t)x(t)$ avant de la transformer pour y appliquer la technique de point fixe et aboutir à des résultats de stabilité jamais atteints avant la parution de cette oeuvre ([18]). Cependant, l'addition d'un tel terme détruit, au voisinage de zéro, toute chance pour qu'une contraction puisse exister. Néanmoins la transformation de l'équation en une équation intégrale a, par bonheur, produit une application pas tout à fait une contractante mais un autre type nouveau de fonctions que Burton lui attribua le nom de contraction large [16]-[18], [23]. Deham et djoudi (voir [29]) obtiennent, en utilisant le théorème (1.3.5), l'important résultat suivant.

Théorème 2.0.1 Soit $(S, \|\cdot\|)$ l'espace de Banach de fonctions réelles continues T -périodique et soit $M = \{\varphi \in S / \|\varphi\| \leq L, \varphi' \text{ bornée}\}$, où $L = \sqrt{3}/3$. On suppose que

$$a(t+T) = a(t), \quad c(t+T) = c(t), \quad G(t+T, x) = G(t, x), \quad r(t+T) = r(t),$$

que $G(t, \cdot)$ est Lipschitzienne i.e., il existe une constante positive k telle que,

$$|G(t, x) - G(t, y)| \leq k|x - y|,$$

et

$$\int_0^T a(s) ds > 0.$$

On suppose en outre que les conditions suivantes sont satisfaites

$$(KL^3 + |G(t, 0)| \leq \beta La(t)), \quad |h(t)| \leq \delta a(t),$$

$$\max_{t \in [0, T]} \left| \frac{c(t)}{(1 - r'(t))} \right| = \alpha,$$

et

$$J(\beta + \alpha + \delta) \leq 1,$$

où α, β, δ et J sont des constantes avec $J \geq 3$ où

$$h(u) = \frac{(c'(u) - a(u)c(u))(1 - r'(u)) + c(u)r''(u)}{(1 - r'(u))^2}, \quad 0 \leq u \leq T, \quad r'(u) \neq 1.$$

Alors l'équation (2.3) admet une solution périodique φ appartenant au sous ensemble M .

Dans le chapitre 3 on va appliquer le théorème (1.3.5) pour établir la stabilité asymptotique de la solution triviale de l'équation (2.3). Mais ici on va commencer par présenter une étude sur l'existence de solutions périodiques d'une équation différentielle un peu plus étendue que l'équation (2.3). Cette étude est un travail due à E. Yankson [43] qui s'est inspiré des articles ([29]-[30], [1]). Yankson ([43]) considère l'équation

$$x'(t) = -a(t)h(x(t)) + c(t)x'(t - r(t)) + G(t, x(t), x(t - r(t))), \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

Cette équation possède une longue histoire et a présenté un vrai défi aussi bien pour l'étude de la stabilité de sa solution nulle lorsque $G(t, 0, 0) = 0$, que pour l'étude de la périodicité de ses solutions. En clair l'équation (2.4) est totalement non linéaire en x . La présence du terme $a(t)h(x(t))$ rend difficile l'application de variation des paramètres. Burton, dans ([18]), a surmonté cet obstacle en faisant recours à une méthode classique qui consiste à rajouter aux deux membres de l'équation un terme linéaire $a(t)x(t)$ pour transformer l'équation avant son intégration. Mais l'addition d'un tel terme détruit, au voisinage de zéro, toute chance pour qu'une contraction puisse exister. Pour mieux comprendre, considérons l'exemple simple de l'équation scalaire suivante

$$x' = -x^3 = -x + (x - x^3).$$

Le terme $(x - x^3)$ est presque une contraction locale mais qui cesse de l'être au voisinage $x = 0$ car

$$(x - x^3) - (y - y^3) = (x - y) [1 - (x^2 + xy + y^2)].$$

Ceci est une difficulté typique que l'on rencontre assez souvent et on aura donc besoin d'une contraction qui prend en charge cette situation. La transformation en rajoutant $a(t)x(t)$ n'a pas que de mauvaises conséquences elle produit, néanmoins, une application pas tout à fait contractante mais presque une contraction et Burton lui attribua le nom de contraction large (voir [16]-[18], [23]) dont on va rappeler la définition et donner quelques propriétés dans ce chapitre.

Après la transformation on va inverser (2.4) pour produire une nouvelle équation intégrale, mais équivalente ayant les mêmes propriétés. Cette équation se met sous forme d'une somme de deux applications, une contraction et une application continue à image compact. Cette écriture avantageuse convient pour définir une application dont le point fixe est solution de notre problème. On va voir que le théorème de Krasnoselskii-Burton s'adapte bien cette équation de sorte qu'une solution périodique existe sur un ensemble que l'on précisera. Malheureusement, on est incapable de trouver des conditions convenables pour l'unicité de cette solution.

2.1 Transformation et inversion de l'équation

Considérons l'équation différentielle (2.4) et supposons que $a(\cdot)$ est une fonction continue à valeurs réelles, $c(\cdot)$ une fonction continuellement différentiable, $r(\cdot)$ une fonction positive de classe C^2 , $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à ses arguments.

Soit $T > 0$ et définissons le sous espace

$$P_T := \{\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \varphi(t + T) = \varphi(t)\},$$

où $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace de fonctions réelles continues. Muni de la norme

$$\|\varphi\| := \max_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t)|,$$

P_T est un espace de Banach.

Nous supposons que a , c , G et r sont des fonctions périodiques en t . Plus explicitement,

$$a(t + T) = a(t), c(t + T) = c(t), r(t + T) = r(t), r(t) \geq r^* > 0, \quad (2.5)$$

où r^* est une constante,

Nous supposons aussi que,

$$\int_0^T a(s) ds > 0, \quad (2.6)$$

que $G(t, x, y)$ est continue, périodique en t et Lipschitzienne en x et y , respectivement, i.e.,

$$G(t + T, x, y) = G(t, x, y) \quad (2.7)$$

et qu'il existent certaines constantes positives K et E telles que,

$$|G(t, x, y) - G(t, z, w)| \leq K \|x - z\| + E \|y - w\|. \quad (2.8)$$

Aussi, on suppose que pour tout t , $0 \leq t \leq T$,

$$r'(t) \neq 1. \quad (2.9)$$

Comme $r(t)$ est périodique, la condition (2.9) implique que $r'(t) < 1$.

Lemme 2.1.1 *Supposons que les conditions (2.5), (2.6) et (2.9) sont vérifiées. Si $x(t) \in P_T$, alors $x(t)$ est une solution de (2.4) si seulement si*

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{c(t)}{1 - r'(t)} x(t - r(t)) + (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s) ds})^{-1} \\ & \times \int_{t-T}^t \{ a(u)H(x(u)) - g(u)x(u - r(u)) \\ & + G(u, x(u), x(u - r(u))) \} e^{-\int_u^t a(s) ds} du, \end{aligned} \quad (2.10)$$

où

$$g(u) = \frac{(c'(u) - a(u)c(u))(1 - r'(u)) + c(u)r''(u)}{(1 - r'(u))^2}. \quad (2.11)$$

et

$$H(x(t)) := x(t) - h(x(t)). \quad (2.12)$$

Preuve. Soit $x(t)$ une solution de (2.4). Premièrement, réécrivons (2.4) sous la forme

$$x'(t) + a(t)x(t) = a(t)H(x(t)) + c(t)x'(t - r(t)) + G(t, x(t), x(t - r(t))). \quad (2.13)$$

Multiplions les deux membres de (2.13) par $e^{\int_0^t a(s) ds}$ et puis en intégrons de $t - T$ à t . On obtient,

$$\begin{aligned} & \int_{t-T}^t \left[x(u) e^{\int_0^u a(s) ds} \right]' du \\ &= \int_{t-T}^t [a(u)H(x(u)) + c(u)x'(t - r(u)) + G(u, x(u), x(u - r(u)))] e^{\int_0^u a(s) ds} du. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous arrivons à

$$\begin{aligned} & x(t)e^{\int_0^t a(s)ds'} - x(t-T)e^{\int_0^{t-T} a(s)ds'} \\ &= \int_{t-T}^t [a(u)H(x(u)) + c(u)x'(t-r(u)) + G(u, x(u), x(u-r(u)))] e^{\int_0^u a(s)ds} du. \end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'équation ci-dessus par $\exp(\int_0^t a(s)ds)$, et en tenant compte du fait que $x(t) = x(t-T)$, on arrive à,

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right)^{-1} \\ &\times \int_{t-T}^t \{ a(u)H(x(u)) + c(u)x'(t-r(u)) \\ &+ G(u, x(u), x(u-r(u))) \} e^{-\int_u^t a(s)ds} du. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} & \int_{t-T}^t c(u)x'(u-r(u))e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\ &= \int_{t-T}^t \frac{c(u)x'(u-r(u))(1-r'(u))}{(1-r'(u))} e^{-\int_u^t a(s)ds} du. \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par partie avec

$$U = \frac{c(u)}{1-r'(u)} e^{-\int_u^t a(s)ds} du \text{ et } dV = x'(u-r(u))(1-r'(u))du$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{t-T}^t c(u)x'(u-r(u))e^{-\int_u^t a(s)ds} du = \\ & \frac{c(t)}{1-r'(t)} x(t-r(t)) \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right) \\ & - \int_{t-T}^t g(u) e^{-\int_u^t a(s)ds} x(u-r(u)) du, \end{aligned} \quad (2.15)$$

où $g(u)$ est donnée par l'expression (2.11). Alors la substitution de (2.15) dans (2.14) achève la démonstration. ■

2.2 Existence de solutions périodiques

Définissons l'application $P : P_T \rightarrow P_T$ comme suit

$$(P\varphi)(t) = \frac{c(t)}{1 - r'(t)} \varphi(t - r(t)) + (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s) ds})^{-1} \times \\ \int_{t-T}^t \{ a(u) H(\varphi(u)) - g(u) \varphi(u - r(u)) \\ + G(u, \varphi(u), \varphi(u - r(u))) \} e^{-\int_u^t a(s) ds} du, \quad (2.16)$$

ou g et H sont données respectivement par (2.11) et (2.12). Pour étudier l'existence de solutions on va appliquer le Théorème (1.3.5) de Krasnoselskii-Burton. Pour cela, on aura besoin de définir un sous ensemble convexe et bornée M de P_T . Pour cela, on choisit

$$M := \{ \varphi \in P_T : \|\varphi\| \leq L \}, \text{ avec } L > 0.$$

Aussi, nous devons construire deux applications, une contraction large et une application continue dont l'image est contenue dans un ensemble compact. Exprimons, alors, l'équation (2.16) sous la forme

$$(P\varphi)(t) = (A\varphi)(t) + (B\varphi)(t),$$

avec $A, B : P_T \rightarrow P_T$ sont définies par

$$(B\varphi)(t) := (1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s) ds})^{-1} \int_{t-T}^t [a(u) H(\varphi(u))] e^{-\int_u^t a(s) ds} du, \quad (2.17)$$

et

$$(A\varphi)(t) := \frac{c(t)}{1 - r'(t)} \varphi(t - r(t)) + \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s) ds} \right)^{-1} \\ \times \int_{t-T}^t \{ -g(u) \varphi(u - r(u)) \\ + G(u, \varphi(u), \varphi(u - r(u))) \} e^{-\int_u^t a(s) ds} du. \quad (2.18)$$

On suppose en outre que les conditions suivantes sont satisfaites

$$(K + E) L + |G(t, 0, 0)| \leq \beta L a(t), \quad (2.19)$$

$$|g(t)| \leq \delta a(t), \quad (2.20)$$

$$\max_{t \in [0, T]} \left| \frac{c(t)}{(1 - r'(t))} \right| = \alpha, \quad (2.21)$$

et

$$J(\beta + \alpha + \delta) \leq 1, \quad (2.22)$$

où α, β, δ et J sont des constantes avec $J \geq 3$.

Dans le lemme suivant on montre que l'application H donnée par (2.12) est une contraction large sur M . Pour cela, on suppose les hypothèses suivantes sont vérifiées pour la fonction h

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue sur } [-L, L] \text{ et différentiable sur } (-L, L), \quad (2.23)$$

$$h \text{ est strictement croissante sur } [-L, L], \quad (2.24)$$

$$\sup_{s \in (-L, L)} (h'(s)) \leq 1. \quad (2.25)$$

Lemme 2.2.1 Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant (2.23)-(2.25). Alors pour $L > 0$, l'application H est une contraction large sur l'ensemble M .

Preuve. Soit $\phi, \varphi \in S_\psi$ avec $\phi \neq \varphi$. Alors $\phi(t) \neq \varphi(t)$ pour certains $t \in \mathbb{R}$.

Dénotons l'ensemble de tels point par $D(\phi, \varphi)$ i.e.,

$$D(\phi, \varphi) := \{t \in \mathbb{R} : \phi(t) \neq \varphi(t)\}.$$

Pour chaque $t \in D(\phi, \varphi)$, on a

$$\begin{aligned} |H\phi(t) - H\varphi(t)| &= |\phi(t) - h(\phi(t)) - \varphi(t) + h(\varphi(t))| \\ &= |\phi(t) - \varphi(t)| \left| 1 - \left(\frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} \right) \right|. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Comme h est une fonction strictement croissante, on a

$$\frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} > 0 \text{ pour chaque } t \in D(\phi, \varphi). \quad (2.27)$$

Pour chaque $t \in D(\phi, \varphi)$ fixé, définissons l'intervalle $U_t \subset [-L, L]$ par

$$U_t := \begin{cases} (\varphi(t), \phi(t)) & \text{si } \phi(t) > \varphi(t), \\ (\phi(t), \varphi(t)) & \text{si } \phi(t) < \varphi(t). \end{cases}$$

Le théorème des accroissements finis implique que pour chaque $t \in D(\phi, \varphi)$ fixé, il existe un nombre réel $c_t \in U_t$ tel que

$$\frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} = h'(c_t).$$

par (2.24) et (2.24), on a

$$0 \leq \inf_{u \in (-L, L)} h'(u) \leq \inf_{u \in U_t} h'(u) \leq h'(c_t) \leq \sup_{u \in U_t} h'(u) \leq \sup_{u \in (-L, L)} h'(u) \leq 1. \quad (2.28)$$

Ainsi, par (2.26) et (2.28), on obtient

$$|H\phi(t) - H\varphi(t)| \leq \left| 1 - \inf_{u \in (-L, L)} h'(u) \right| |\phi(t) - \varphi(t)|, \quad (2.29)$$

pour tout les $t \in D(\phi, \varphi)$. Ceci montre bien que H est une contraction large pour la norme du supremum. En effet, soit $\varepsilon \in (0, 1)$ un nombre donné et supposons que ϕ et φ , sont deux fonctions dans M telles que

$$\varepsilon \leq \sup_{t \in D(\phi, \varphi)} |\phi(t) - \varphi(t)| = \|\phi(t) - \varphi(t)\|.$$

a) Supposons que pour certain $t \in D(\phi, \varphi)$ on a

$$|\phi(t) - \varphi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, par les expressions (2.28) et (2.29), on obtient

$$|H\phi(t) - H\varphi(t)| \leq |\phi(t) - \varphi(t)| \leq \frac{1}{2} \|\phi - \varphi\|. \quad (2.30)$$

Comme h est continue et strictement croissante, la fonction

$$h\left(u + \frac{\varepsilon}{2}\right) - h(u),$$

atteint son minimum sur l'intervalle fermé et borné $[-L, L]$.

b) Supposons que pour certains $t \in D(\phi, \varphi)$ on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq |\phi(t) - \varphi(t)|.$$

Alors, par les hypothèses (2.24) et (2.25), on conclut que

$$1 \geq \frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} > \lambda,$$

où

$$\lambda := \frac{1}{2L} \min \left\{ h\left(u + \frac{\varepsilon}{2}\right) - h(u) : u \in [-L, L] \right\} > 0.$$

Par conséquent, l'expression (2.26) on en déduit

$$|H\phi(t) - H\varphi(t)| \leq (1 - \lambda) \|\phi - \varphi\|. \quad (2.31)$$

De (2.30) et (2.31) on conclut que pour tout t

$$|H\phi(t) - H\varphi(t)| \leq \xi \|\phi - \varphi\|,$$

$$\text{où } \xi = \max \left[\frac{1}{2}, 1 - \lambda \right] < 1.$$

La démonstration est achevée. ■

Il est clair que, d'après le Lemme (2.1.1), que si on arrive à démontrer que l'application P admet un point fixe alors celui-ci sera solution de l'équation (2.4).

Lemme 2.2.2 *Supposons que les hypothèses (2.5)-(2.7) et (2.19)-(2.22) sont vérifiés. Alors l'application $A : M \rightarrow M$ définie par (2.18) est continue pour la norme du supremum et envoie M dans un sous ensemble compact de M .*

Preuve. Un changement de variable dans (2.18) montre que $(A\varphi)(t+T) = \varphi(t)$.

Montrons d'abord que A envoie M vers lui-même. Pour cela, pour chaque $\varphi \in M$, on

a

$$\begin{aligned}
|(A\varphi)(t)| &\leq \left| \frac{c(t)\varphi(t-r(t))}{1-r'(t)} \right| + \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right)^{-1} \\
&\quad \times \int_{t-T}^t |g(u)\varphi(u-r(u))| e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
&\quad + \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right)^{-1} \int_{t-T}^t |G(u, \varphi(u), \varphi(u-r(u)))| e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
&\leq \alpha L + \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right)^{-1} \int_{t-T}^t \delta a(u) L e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
&\quad + \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right)^{-1} \int_{t-T}^t (KL + EL + |G(t, 0, 0)|) e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
&\leq \alpha L + \delta L \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right)^{-1} \int_{t-T}^t a(u) e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
&\quad + \beta L \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right)^{-1} \int_{t-T}^t a(u) e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
&\leq (\alpha + \delta + \beta) L \leq \frac{L}{J} < L.
\end{aligned}$$

Ceci montre bien que A envoie M vers lui-même.

Montrons que A est continue. Pour cela, considérons $\varphi, \psi \in M$, et posons

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \max_{t \in [0, T]} \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right)^{-1}, \quad \beta' = \max_{u \in [t-T, t]} e^{-\int_u^t a(s)ds}, \\
\sigma &= \max_{t \in [0, T]} \{g(t)\}, \quad \rho = \max_{t \in [0, T]} |G(t, 0, 0)|, \\
v &= \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{c'(t)}{(1-r'(t))} \right|, \quad \mu = \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{r''(t)c(t)}{(1-r'(t))^2} \right|.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, posons $\delta := \frac{\varepsilon}{F}$ où $F := \alpha + T\alpha'\beta'[\sigma + K + E]$ avec K et E sont les

constantes données par (2.8), Alors, si $\|\varphi - \psi\| < \delta$, on aura

$$\begin{aligned}
 & \| (A\varphi)(t) - (A\psi)(t) \| \\
 & \leq \left| \frac{c(t)\varphi(t-r(t))}{(1-r'(t))} - \frac{c(t)\psi(t-r(t))}{(1-r'(t))} \right| \\
 & + \left\{ \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right)^{-1} \right. \\
 & \times \int_{t-T}^t |G(u, \varphi(u), \varphi(u-r(u))) - G(u, \psi(u), \psi(u-r(u)))| e^{-\int_u^t a(s)ds} du \} \\
 & + \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right)^{-1} \int_{t-T}^t |g(u)| |(\varphi(u-r(u)) - \psi(u-r(u)))| e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
 & \leq \alpha \|\varphi - \psi\| + \alpha' \beta' \int_{t-T}^t [L \|\varphi - \psi\| + E \|\varphi - \psi\| + \sigma \|\varphi - \psi\|] du \\
 & \leq F \|\varphi - \psi\| < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Ainsi, A est une application continue.

Montrons maintenant que A est compacte. Soit $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ une suite. Compte tenu de la condition (2.8) nous avons

$$\begin{aligned}
 |G(t, x, y)| & \leq |G(t, x, y) - G(t, 0, 0)| + |G(t, 0, 0)| \\
 & \leq K \|x\| + E \|y\| + \rho,
 \end{aligned}$$

où ρ est donné par (2.32). Un calcul direct montre que

$$\|A\varphi_n\| \leq L. \quad (2.33)$$

Ceci montre que $(A\varphi_n)$ est uniformément borné. De l'autre coté, avec un calcul non compliqué, on s'aperçoit que

$$\begin{aligned}
 (A\varphi_n)'(t) & = G(t, \varphi_n(t), \varphi_n(t-r(t))) - g(t)\varphi_n(t-r(t)) \\
 & - \left\{ a(t) \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s)ds} \right)^{-1} \right. \\
 & \times \int_{t-T}^t [G(u, \varphi_n(u), \varphi_n(u-r(u))) - g(u)\varphi_n(u-r(u))] e^{-\int_u^t a(s)ds} du \} \\
 & + \frac{c'(t)\varphi_n(t) + c(t)\varphi_n'(t)}{1-r'(t)} + \frac{r''(t)c(t)\varphi_n(t)}{(1-r'(t))^2}.
 \end{aligned}$$

En invoquant les conditions (2.8), (2.19)-(2.21), (2.32) et (2.33) on obtient,

$$\begin{aligned}
 |(A\varphi_n)'(t)| & \leq KL + EL + \rho + \delta \|a\| L + \|a\| L + \nu L + \alpha L' + \mu L \\
 & \leq D,
 \end{aligned}$$

pour une certaine constante D . Ainsi, la suite $\{A\varphi_n\}$ est uniformément bornée et équicontinue. Le Théorème d'Ascoli-Arzelà implique que la suite $\{A\varphi_n\}$ admet une sous suite $\{A\varphi_{n_k}\}$ qui converge uniformément vers une fonction continue périodique de période T . En conclusion, A est une application continue et AM est un ensemble compact. ■

Lemme 2.2.3 *On suppose que les conditions (2.5)-(2.8) et (2.19)-(2.22) sont vérifiées. Si $\varphi, \psi \in M$ sont arbitraires, alors*

$$A\varphi + B\psi : M \rightarrow M.$$

où A, B sont les applications définies par (2.8) et (2.13) respectivement. En outre, B est une contraction large sur M avec un point fixe unique appartenant à M .

Preuve. Soient $\varphi, \psi \in M$ quelconques. En utilisant la définition de B , et le résultat du Lemme (2.2.2), on obtient

$$\begin{aligned} & |(A\varphi)(t) + (B\psi)(t)| \\ & \leq \left| \frac{c(t)}{1 - r'(t)} \varphi(t - r(t)) \right| + \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s) ds} \right)^{-1} \\ & \quad \times \int_{t-T}^t \left[|g(u)\varphi(u - r(u))| + |G(u, \varphi(u), \varphi(u - r(u)))| \right] e^{-\int_u^t a(s) ds} du \\ & \quad + \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s) ds} \right)^{-1} \int_{t-T}^t |a(u)H(\varphi(u))| e^{-\int_u^t a(s) ds} du \\ & \leq \frac{L}{J} + \frac{(J-1)L}{J} = L. \end{aligned}$$

Ainsi, $A\varphi + B\psi \in M$.

On démontre que B est une contraction large avec un point fixe unique dans M . On sait depuis Le lemme (2.2.1) que $H = \varphi - h(\varphi)$ est une contraction large admettant un point fixe unique dans M . Pour $\varepsilon > 0$ fixé arbitrairement, soit $\xi < 1$ le nombre dépendant de cet ε déterminé dans la démonstration du Lemme (2.2.1). Alors pour φ et ψ telles que $\|\varphi - \psi\| \geq \varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} & |(B\varphi)(t) - (B\psi)(t)| \\ & \leq \left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s) ds} \right)^{-1} \int_{t-T}^t a(u) |H(\varphi(u)) - H(\psi(u))| e^{-\int_u^t a(s) ds} du \\ & \leq \xi \frac{\|\varphi - \psi\|}{\left(1 - e^{-\int_{t-T}^t a(s) ds} \right)} \int_{t-T}^t a(u) e^{-\int_u^t a(s) ds} du \\ & \leq \xi \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$; il existe un $\xi < 1$ tel que

$$\|\varphi - \psi\| \geq \varepsilon \implies \|B\varphi - B\psi\| \leq \xi \|\varphi - \psi\|.$$

B est aussi contractive et en conclusion une contraction large. ■

Théorème 2.2.4 *Soit $(P_T, \|\cdot\|)$ l'espace de Banach de fonctions réelles continues T -périodique et soit $M = \{\varphi \in P_T : \|\varphi\| \leq L\}$, où $L > 0$. On suppose que (2.5)-(2.7) et (2.19)-(2.22) sont vérifiés. Alors l'équation (2.4) admet une solution périodique φ appartenant au sous ensemble M .*

Preuve. Par le Lemme (2.1.1), φ est une solution de (2.4) si

$$\varphi = A\varphi + B\varphi,$$

où A et B sont données par (2.18) et (2.17) respectivement.

Par le Lemme (2.2.2), $A : M \rightarrow M$ est continue et AM est contenu dans un sous ensemble compact de M .

Du Lemme (2.2.3), $A\varphi + B\varphi \in M$ pour tout $\varphi, \psi \in M$ et $B : M \rightarrow M$ est une contraction large. En clair que toutes les hypothèses du Théorème (1.3.5) de Krasnoselskii-Burton sont vérifiées. Ainsi, il existe un point fixe $\varphi \in M$ tel que $\varphi = A\varphi + B\varphi$, et par conséquent solution aussi pour (2.4). ■

Stabilité par le théorème de Krasnoselskii-Burton pour une équation différentielle à retard

Mots clés. Point fixe, Stabilité, Equation non linéaire, Fonctionnelle de Liapunov, Théorème de Krasnoselskii's-Burton.



'objectif principal de ce chapitre est de présenter le travail qu'on a publié dans [31], à savoir,

Derrardja, I., Ardjouni, A., and Djoudi, A. Stability by krasnoselskii's theorem in totally nonlinear neutral differential equations, *Opuscula Mathematica*, Vol. 33, No. 2, 2013, pp. 255-272.

La théorie de la stabilité a été créée à la fin du XIXème siècle par Liapounov . Cette théorie a trouvé une large application dans divers domaines de la physique et des sciences mathématiques. D'un point de vue mathématique, la théorie de la stabilité présente un cas particulier de la théorie qualitative des équations différentielles. La méthode de Liapounov a été l'ultime objet permettant d'étudier la stabilité pour les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. Néanmoins, cette méthode a rencontré de sérieux obstacles et il existe encore un tas de problèmes qui résistent à cette technique. Ce travail contient des résultats de stabilité pour une classe d'équations totalement non linéaires de type neutre à retard fonctionnel.

Cette classe d'équations fait partie du nombre de problèmes qui ont résisté à la méthode directe de Liapounov. En général l'inefficacité de la méthode de Liapounov se manifeste lorsque les fonctions utilisées dans les équations ne sont pas bornées en temps ([36]), si le délai n'est pas borné ou si sa dérivée n'est pas petite ([41], [18]).

Récemment, un nombre d'investigateurs spécialistes dans ce domaine, comme Burton, Furumuchi, Zhang, Hatvani, Djoudi, Ardjouni et autres, se sont penchés sur le problème dans l'espoir de trouver une autre issue pour contourner ces difficultés. Ils ont constaté, en utilisant des exemples concrets, que la technique de point fixe peut servir pour alternative à la méthode directe. Ils ont remarqué aussi que cette dernière méthode ne résout pas uniquement des problèmes qui ont jusque là frustré les investigateurs en fréquentant la méthode directe de Liapounov, mais la méthode possède aussi d'autres avantages. En particulier, les conditions de la dernière méthode sont souvent exprimés

en moyenne par contre ceux de Liapounov se présentent sous des formes ponctuelles (voir [3]-[14], [18], [20]-[23], [25]-[27], [31], [32], [45]).

3.1 Stabilité pour les équations différentielles fonctionnelles à retard

Pour $r > 0$, considérons $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ l'espace de fonctions continues sur $[-r, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Ce dernier espace est de Banach lorsque on le muni de la norme $\|\phi\| = \sup_{-r \leq t \leq 0} |\phi(t)|$, $\phi \in C$. On considère le problème à valeur initiale à retard (voir 2.5)

$$x'(t) = f(t, x_t), \text{ pour } t \geq t_0, \quad (3.1)$$

$$x(t) = \psi(t) \text{ pour } t_0 - r \leq t \leq t_0 \quad (3.2)$$

où $\psi : [t_0 - r, t_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, supposée continue et $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. La fonction $f(t, x)$ est supposée satisfaire les conditions nécessaires qui garantissent l'existence de la solution $x(t, t_0, \psi)$ à travers (t_0, ψ) du problème (3.1)-(3.2) et d'être continue en (t, t_0, ψ) du domaine de définition de f (voir Hale [35]).

Définition 3.1.1 Supposons que $f(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La solution triviale $x = 0$ de (3.1) est dite stable en t_0 ($t_0 \in \mathbb{R}$) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que si $\|\psi\| < \delta$, la solution (3.1)-(3.2) existe sur $[t_0 - r, \infty)$ et $|x(t, t_0, \psi)| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$. Dans le cas contraire on dira que la solution est instable en t_0 . La solution $x = 0$ de (3.1) est dite uniformément stable si le nombre δ est indépendant de t_0 .

Définition 3.1.2 La solution triviale $x = 0$ de (3.1) est dite asymptotiquement stable en t_0 si elle est stable en t_0 et si il existe $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ tel que toutes les fois que $\|\psi\| < \delta_1$, la solution du problème (3.1)-(3.2) satisfait

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, \psi) = 0.$$

La solution triviale $x = 0$ de (3.1) est dite uniformément asymptotiquement stable si elle est uniformément stable et si il existe un $\delta_1 > 0$ (indépendant de t_0) tel que pour tout t_0 et $\|\psi\| < \delta_1$ la solution x du problème (3.1)-(3.2) satisfait la condition $x(t, t_0, \psi) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ de la manière suivante : pour tout $\eta > 0$ il existe un $T = T(\eta) > 0$ tel que $|x(t, t_0, \psi)| < \eta$ pour $t \geq t_0 + T$.

Exemple 3.1.3 Considérons, pour $t \geq 1$, l'équation différentielle à retard

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{t}x(t) - \frac{27t}{(t+2)^3}x^3\left(\frac{t+2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{t}x(t) - \frac{27t}{(t+2)^3}x^3(t - \tau(t)), \end{aligned}$$

avec $\tau(t) = \frac{2}{3}(t-1)$, avec la condition initiale $x(1) = x_0$. On vérifie facilement que la solution unique de ce problème est

$$x(t) = x_0 t e^{-x_0^2(t-1)}, \quad t \geq 1.$$

Ainsi, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ pour tout x_0 . Supposons que $|x_0| = \delta$, alors

$$\left| x \left(1 + \frac{1}{\delta^2} \right) \right| = \frac{1}{e} \left(\delta + \frac{1}{\delta} \right) \geq \frac{2}{e}.$$

Par conséquent, pour tout δ la solution se trouve en dehors de la boule $|x| = \frac{2}{e}$ en temps $t = 1 + \frac{1}{\delta^2}$, et la solution est donc instable.

3.2 Stabilité par la méthode directe de Liapounov

Supposons que $V : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$ est fonction continue et que $x(t, t_0, \psi)$ est la solution, à travers (t_0, ψ) de l'équation à retard

$$x'(t) := f(t, x_t), \quad f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

(voir équation 3.1). On définit

$$V'(t, \varphi) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t+h, x_{t+h}(t, \varphi)) - V(t, \varphi)].$$

$V'(t, \varphi)$ est la dérivée supérieure à droite de V le long de solution de l'équation (3.3).

Théorème 3.2.1 (voir [35]) *Supposons que la fonction $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ transforme $\mathbb{R} \times \{\text{borné}\}$ de $\mathbb{R} \times C$ en un borné de $\mathbb{R}^n$, et que $u, v, w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonctions continues non décroissantes telles que $u(s), v(s)$ sont positives pour $s > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. Alors il existe une fonction $V : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{aligned} u(|\varphi(0)|) &\leq V(t, \varphi) \leq v(|\varphi|), \\ V'(t, \varphi) &\leq -w(|\varphi(0)|), \end{aligned}$$

alors, la solution $x = 0$ de l'équation (3.3) est uniformément stable. Si $w(s) > 0$ pour $s > 0$, alors $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.

3.3 Stabilité par la méthode de point fixe

Lorsqu'on veut étudier la stabilité de la solution triviale d'une équation différentielle à retard par la méthode de point fixe il va falloir procéder comme suit

- (i) Une équation différentielle à retard exige avant tout une donnée (une fonction) initiale définie sur un intervalle initial approprié I_{t_0} i.e. $\psi : I_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On doit choisir aussitôt après un espace convenable S de fonctions $\varphi : I_{t_0} \cup [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$

qui coïncident sur I_{t_0} avec ψ . Selon les cas de besoins on peut toujours ajouter d'autres restrictions aux fonctions φ de S comme la bornétude par exemple ou la condition $\varphi(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$: Cette dernière condition s'impose si on souhaite étudier la stabilité asymptotique.

- (ii) Ensuite on doit inverser l'équation différentielle pour définir ce qu'on appelle une application de point fixe i.e., une application $P : S \rightarrow S$ dont le point fixe est solution de l'équation à retard donnée (l'équation originale). Néanmoins, cette inversion peut s'avérer une tâche délicate dans plusieurs cas. Par exemple si l'équation ne possède pas un EDO terme linéaire dans sa structure on ne pourra pas utiliser la variation des paramètres. Il est donc indispensable d'agir autrement et essayer si une transformation de cette équation est possible.
- (iii) A l'image de l'application $P : S \rightarrow S$ obtenu en ii., un théorème de point fixe doit être choisi permettant à l'équation $Px = x$ d'avoir une solution. En particulier si P est une contraction on pourra appliquer le théorème de point fixe de Banach, si P est compacte alors on appliquera le théorème de Schauder ou Schaeffer et si P se met sous forme d'une somme d'une contraction et d'une application compacte alors le théorème hybride de Krasnoselskii peut donner satisfaction. Il devient donc clair que la méthode de stabilité par la méthode de point fixe repose sur trois choses essentielles, la variation des paramètres, un espace complet et un théorème de fixe. En une étape on peut conclure l'existence (voire l'unicité) et la stabilité. En outre, on verra que cette méthode exige toujours des conditions en moyenne cependant les conditions de la méthode de Lyapounov sont toujours ponctuelles.

3.4 Liapounov ou point fixe, une comparaison

Ci-dessous on va rappeler des exemples de comparaison des deux méthodes copiés de l'article de Burton ([22]).

Soient $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, r une constante positive, et considérons

$$x'(t) = -a(t)x(t-r), \quad (3.4)$$

Cherchons la solution $x(t) = x(t, 0, \psi)$ de cette équation avec $\psi : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction initiale continue telle que $x(t, 0, \psi) = \psi(t)$ sur $[-r, 0]$. On sait d'après la théorie d'existence qu'il existe une unique solution continue $x(t)$ satisfaisant (3.4) pour $t > 0$ et telle que $x(t) = \psi(t)$ sur $[-r, 0]$.

Avec une telle donnée ψ , on peut mettre (3.4) sous la forme

$$x'(t) = -a(t+r)x(t) + (d/dt) \int_{t-r}^t a(s+r)x(s)ds. \quad (3.5)$$

L'utilisation des variations de paramètre suivies par une intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned}
x(t) = & x(0)e^{-\int_0^t a(s+r)ds} + \int_{t-r}^t a(u+r)x(u)du \\
& - e^{-\int_0^t a(u+r)du} \int_{-r}^0 a(u+r)x(u)du \\
& - \int_0^t a(s+r)e^{-\int_s^t a(u+r)du} \int_{s-r}^s a(u+r)x(u)duds.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

On souhaite définir un espace convenable et une application extraite de (3.6) qui soit contractante si nombre $\alpha < 1$ est correctement défini. Pour cela, admettons que

$$\int_{t-r}^t |a(u+r)| du + \int_0^t |a(s+r)| e^{-\int_s^t a(u+r)du} \int_{s-r}^s |a(u+r)| duds \leq \alpha. \tag{3.7}$$

Mais on souhaite conclure la stabilité asymptotique pour cela on exige que

$$\int_0^t a(s+r)ds \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty. \tag{3.8}$$

Dans [22], Burton se base, dans sa comparaison, sur la définition de l'application de point fixe et celle de la fonction de Liapounov. On sait qu'une fonctionnelle, d'un certain type, existe derrière toute stabilité forte d'un quelconque système. Le fait qu'on ne soit pas capable de fabriquer ou trouver une fonctionnelle de Liapounov ouvre la voix pour une telle comparaison. Ceci en esprit, de (3.7) il est facile de constater un des avantages de la méthode de point fixe sur celle de Liapounov. La dernière exige $a(t+r) > 0$. Cependant, si $a(t+r) \geq 0$, alors une bonne borne est obtenue de (3.7) avec peu d'effort (voir Exemple 4.4.1). Si $a(t+r)$ change de signe alors (3.7) peut toujours tenir, malgré la relative difficulté d'avoir une borne pour la seconde intégrale (voir Exemple 4.4.3).

Burton a essayé, dans [22], de prouver le résultat suivant mais en vain et se contenta de laisser la difficulté essentielle comme hypothèse. C'était insatisfaisant et pourtant il existe une preuve simple.

Théorème 3.4.1 *Supposons valides (3.7) et (3.8). Alors, pour toute fonction initiale continue $\psi : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ la solution $x(t, 0, \psi)$ est bornée et tend vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Preuve. Soit $(B, \|\cdot\|)$ l'espace de fonctions bornées continues et bornées $\phi : [-r, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme du supremum. Soit $(S, \|\cdot\|)$ l'espace de Banach de fonctions $\phi \in B$ telles que

$$\phi(t) = \psi(t) \text{ sur } [-r, 0] \text{ et } \phi(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty.$$

Définissons $P : S \rightarrow S$ par

$$(P\phi)(t) = \psi(t) \text{ sur } [-r, 0],$$

$$\begin{aligned} (P\phi)(t) &= \psi(0)e^{-\int_0^t a(s+r)ds} + \int_{t-r}^t a(u+r)\phi(u)du \\ &\quad - e^{-\int_0^t a(u+r)du} \int_{-r}^0 a(u+r)\psi(u)du \\ &\quad - \int_0^t a(s+r)e^{-\int_s^t a(u+r)du} \int_{s-r}^s a(u+r)\phi(u)duds. \end{aligned}$$

En clair, $P\phi$ est continue, $(P\phi)(0) = \psi(0)$, et de (3.7) on voit que $P\phi$ est bornée. Aussi, P est une contraction selon (3.7).

On démontre que le dernier terme tend vers zéro. Soit $\phi \in S$ et soit $0 < T < t$. Dénotons le supremum de $|\phi|$ par $\|\phi\|$ et le supremum de $|\phi|$ sur $[T, \infty)$ par $\|\phi\|_{[T, \infty)}$. Considérons (3.7) et (3.8). On a

$$\begin{aligned} &\int_0^t |a(s+r)| e^{-\int_s^t a(u+r)du} \int_{s-r}^s |a(u+r)\phi(u)| duds \\ &\leq \int_0^T |a(s+r)| e^{-\int_s^T a(u+r)du} \int_{s-r}^s |a(u+r)| duds \|\phi\| e^{-\int_T^t a(u+r)du} \\ &\quad + \int_T^t |a(s+r)| e^{-\int_s^t a(u+r)du} \int_{s-r}^s |a(u+r)| duds \|\phi\|_{[T-r, \infty)} \\ &\leq \alpha \|\phi\| e^{-\int_T^t a(u+r)du} + \alpha \|\phi\|_{[T-r, \infty)}. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ prenons T assez grand tel que $\alpha \|\phi\|_{[T-r, \infty)} < \varepsilon/2$. Pour le T fixé, choisissons

t^* assez grand de sorte que $\alpha \|\phi\| e^{-\int_T^t a(u+r)du} < \varepsilon/2$ pour tout $t > t^*$. On voit donc que le dernier

terme est plus petit que pour tout $t > t^*$. Ainsi, $P : S \rightarrow S$ est une contraction possédant un point fixe dans S . ■

L'exemple suivant est à comparer avec son analogue Exemple 4.4.4 qui traite la question en utilisant la méthode de Liapounov.

Exemple 3.4.2 Si dans (3.4), on pose

$$a(t) = 1, 1 + \sin t,$$

alors les conditions du Théorème 3.4.1 sont satisfaites si

$$2(1, 1r + 2\sin(r/2)) < 1.$$

Ceci donne approximativement $0 < r < 0,2$. On obtient la conclusion de Théorème 3.4.1 i.e la solution zéro de (3.4) est asymptotiquement stable.

Exemple 3.4.3 Si dans (3.4), on remplace

$$a(t) = 1 + \sin t,$$

alors les conditions du Théorème 3.4.1 sont satisfaites si

$$2(r + 2\sin(r/2)) < 1.$$

Ceci est approximativement équivalent à $r < 1/4$. i.e la solution zéro de (3.4) est asymptotiquement stable.

Exemple 3.4.4 Si on pose dans (3.4),

$$a(t) = (1 + 2\sin t),$$

avec $0 < r < 1$. Alors les conditions du Théorème 3.4.1 sont satisfaites si

$$(r + 4\sin(r/2))(2 + 2e^2) < 1. \quad (3.9)$$

Ceci est approximativement donné par $0 \leq r < 0.02$. i.e la solution zéro de (3.4) est asymptotiquement stable.

L'équation (3.4) peut être mise sous la forme

$$x'(t) = -a(t+r)x(t) + (d/dt) \int_{t-r}^t a(s+r)x(s)ds. \quad (3.10)$$

Cette dernière est équivalente à

$$\left(x(t) - \int_{t-r}^t a(s+r)x(s)ds \right)' = -a(t+r)x(t),$$

Choisissons la fonctionnelle de Liapounov $V(t, x_t) = V_1(t, x_t) + V_2(t, x_t)$, où

$$V_1(t, x_t) = \left(x(t) - \int_{t-r}^t a(s+r)x(s)ds \right)^2 + \int_{-r}^0 \left(\int_{t+s}^t a(u+r)x^2(u)du \right) ds,$$

et

$$V_2(t, x_t) = \gamma \left[x^2(t) + \int_{t-r}^t a(s+r)x^2(s)ds \right].$$

Théorème 3.4.5 *Supposons que*

$$a(t+r) \geq 0, \text{ pour tout } t \geq 0, \text{ et } \int_0^\infty a(s) ds = \infty \quad (3.11)$$

et qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec

$$a(t+r) \int_{t-r}^t a(s+r) ds - 2 + r \leq -\varepsilon \text{ pour tout } t \geq 0, \quad (3.12)$$

et qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\gamma [a(t) + a(t+r)] \leq (\varepsilon/2) a(t+r) \text{ pour tout } t \geq 0, \quad (3.13)$$

alors la solution zéro de (3.4) est asymptotiquement stable.

Exemple 3.4.6 *Si on laisse*

$$a(t) = 1, 1 + \sin t,$$

alors l'équation (3.4) devient

$$x'(t) = (1, 1 + \sin t)x(t-r)$$

Le Théorème 3.4.5 reste valide s'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$2.1(1, 1 + 2\sin(r/2)) - 2 + r < -\varepsilon.$$

En prenant $\sin(r/2) = (r/2)$, on obtient de la dernière inégalité l'estimation $r < 0,37$: Donc, si $r < 0,37$ la solution zéro de (3.4) est asymptotiquement stable.

Remarque 3.4.7 *Dans Exemple (3.4.2) on a vu que la solution de l'équation (3.4) avec $a(t) = 1, 1 + \sin t$ est asymptotiquement stable si $r < 0,2$ avec la méthode de point fixe. Cependant la même conclusion s'obtient avec $r < 0,37$ par la méthode de Laipounov selon l'exemple (3.4.6). En outre $1 + 2\sin t$ change de signe pour $t \geq 0$ et par suite Théorème (3.4.5) relatif à la méthode de Liapounov n'est pas applicable dans ces conditions pour cet exemple. Cependant, d'après l'exemple (3.4.4) on obtient par la méthode de point fixe la stabilité asymptotique de la solution triviale de l'équation (3.4) si $(r + 4\sin(r/2))(2 + 2e^2) < 1$.*

En plus de cela on sait aussi que la construction de fonctionnelles de Liapounov n'est pas une chose facile. Il n'y a pas une méthode générale valable pour toutes les équations différentielles. Pour plus d'informations et exemples de cette comparaison on réfère au livre de Burton ([21]).

3.5 Stabilité par le théorème de Krasnoselskii-Burton pour une équation différentielle non linéaire de type neutre

L'étude de la stabilité qu'on va faire concerne une classe d'équations différentielles totalement non linéaires de type neutre avec retard fonctionnel. Dans notre situation, il est nécessaire d'inverser l'équation pour obtenir une équation intégrale qui produira une application de point fixe. Malheureusement, notre équation ne contient aucun terme non trivial qui soit linéaire.

Donc, la méthode de variation des paramètres ne peut être utilisée. On va devoir recourir à une méthode classique celle de rajouter un terme linéaire et puis le soustraire. Néanmoins, cette procédure n'est pas sans effet, car rajouter puis soustraire un terme linéaire va affecter l'équation en détruisant une contraction qui existe déjà. Heureusement, cette action va, néanmoins, faire naître un autre type d'applications celui de contraction large.

Notre équation s'identifie sous la forme suivante

$$x'(t) = -a(t)x^3(t) + c(t)x'(t-r(t)) + b(t)x^3(t-r(t)), \quad t \geq 0, \quad (3.14)$$

avec une condition initiale

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [m_0, 0], \quad (3.15)$$

et

$$\psi \in C([m_0, 0], \mathbb{R}), [m_0, 0] = \{u \leq 0 \mid u = t - r(t), t \geq 0\}.$$

On suppose que $a, b \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec $a(t) \geq 0$, $c \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $r \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tel que

$$r'(t) \neq 1, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3.16)$$

Des cas particuliers de l'équation (3.14) ont été considéré et examiné sous conditions différentes et avec plusieurs méthodes. En particulier, lorsque $c(t) = 0$ on obtient l'équation à retard suivante

$$x'(t) = -a(t)x^3(t) + b(t)x^3(t-r(t)), \quad t \geq 0. \quad (3.17)$$

Dans la page 117 de ([35]), J. Hale a utilisé la méthode de Liapunov pour l'équation (3.17) lorsque $a(t)$ et $b(t)$ sont deux fonctions bornées et $r(t) = r$, r correspond à une constante. Dans ([18]), Burton a reconsidéré cette équation en supposant que $a(t)$ est non bornée mais que $b(t)$ est bornée. Plus précisément, il supposa

$$b(t) \text{ borné}, \quad r(t) = r, \quad r \text{ une constante et } a(t) \geq |b(t+r)| + k,$$

avec $k > 0$ une constante. Il définit la fonctionnelle de Liapunov suivante

$$V(t, x_t) = |x(t)| + \int_{t-r}^t |b(s+r)| |x^3(s)| ds.$$

Cette fonctionnelle admet une dérivée le long des solutions de (3.17) satisfaisant

$$\begin{aligned} V'(t, x_t) &\leq -a(t) |x^3(t)| + |b(t)| |x^3(t-r)| \\ &\quad + |b(t+r)| |x^3(t)| - |b(t)| |x^3(t-r)| \\ &\leq -k |x^3|. \end{aligned}$$

Il obtient, en utilisant des arguments se trouvant dans ([18]) la stabilité asymptotique de la solution nulle.

On peut obtenir encore ce même résultat de stabilité pour (3.17) en considérant $b(t)$ non bornée. Mais cela n'est possible que si on augmente les conditions sur $a(t)$. En clair si $r(t) = r$ une constante et si il existe $k > 0$ tel que

$$-a(t) + \frac{1}{4} |b(t)|^2 + 1 \leq -k,$$

pour tout $t \geq 0$, alors si on définit la fonctionnelle de Liapunov par

$$V(t, x_t) = \frac{1}{4} x^4(t) + \int_0^t x^6(s) ds$$

alors sa dérivée donne

$$\begin{aligned} V'(t, x_t) &\leq -a(t) x^6 + \left(\frac{|b(t)|}{\sqrt{2}} \right) |x^3| \sqrt{2} |x^3(t-r)| + x^6 - x^6(t-r) \\ &\leq -a(t) x^6 + \frac{1}{4} |b(t)|^2 x^6 + x^6(t-r) + x^6 - x^6(t-r) \\ &\leq \left[-a(t) + \frac{1}{4} |b(t)|^2 + 1 \right] x^6 \\ &\leq -k x^6. \end{aligned}$$

La même conclusion de stabilité asymptotique s'obtient de façon analogue à la précédente.

La technique de point fixe qui sera utilisée ci-dessous sera beaucoup moins exigeante que celle de Liapounov. On va admettre que $r(t) \geq 0$ et pas nécessairement constante et permettre à $a(t)$ et $b(t)$ de n'être pas bornées et on demandera, simplement, à ce que ces dernières répondent à la condition supplémentaire $b(t)/a(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Dans son livre [21], Burton a consacré plusieurs pages pour cette équation (3.17) et l'a étudié sous diverses hypothèses. Burton a réussi à montrer à l'aide d'une nouvelle version du théorème de point fixe de Krasnoselskii, développée par lui, comment surmonter certaines difficultés. Il a pu éviter la dérivée $r'(t)$ du retard qui, en général, complique le travail. Plus précisément, il a établi le théorème suivant (voir [18] ou [21], théorème 2.8.1, p.196) affirmant la stabilité asymptotique de la solution zéro de (3.17).

Théorème 3.5.1 (*Burton*). *Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

$$\int_0^t a(u) du = \infty \text{ lorsque } t \rightarrow \infty,$$

$$J|b(t)| \leq a(t), \text{ avec } J > 1,$$

et que

$$\frac{b(t)}{a(t)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Si $L = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et si ψ est une fonction initiale continue telle que

$$\|\psi\| + \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{9J} \right) \leq L,$$

alors il existe une solution $x(t, 0, \psi)$ de (3.17), avec $|x(t, 0, \psi)| < L$ pour tout $t \geq 0$ et $x(t, 0, \psi) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Motivé par ce travail de Burton on a présenté dans [31] une étude plus avancée de bornétude et de stabilité asymptotique de la solution zéro qui concerne une classe plus sophistiquée d'équations différentielles fonctionnelles de type neutre décrite par (3.14).

3.5.1 Transformation et inversion de l'équation

Nous allons inverser (3.14) et au cours de cette procédure une intégration par partie va être effectuée sur le terme neutre $x'(t - r(t))$. Malheureusement, en faisant cela, une dérivée $r'(t)$ du retard va apparaître sur le chemin et nous devons donc la supporter.

Lemme 3.5.2 *Supposons que la condition (3.16) est vérifiée. Si $x(t)$ est solution de l'équation (3.14) sur un intervalle $[0, \sigma)$ et satisfait la condition $x(t) = \psi(t)$ pour $t \in [m_0, 0]$ alors $x(t)$ est solution de l'équation intégrale*

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[\psi(0) - \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \psi(-r(0)) \right] e^{-\int_0^t a(u) du} \\ & + \frac{c(t)}{1 - r'(t)} x(t - r(t)) - \int_0^t \mu(s) x(s - r(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ & + \int_0^t b(s) x^3(s - r(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ & + \int_0^t a(s) [x(s) - x^3(s)] e^{-\int_s^t a(u) du} ds, \end{aligned} \quad (3.18)$$

sur $[0, \sigma)$ où

$$\mu(t) = \frac{(c'(t) + a(t)c(t))(1 - r'(t)) + c(t)r''(t)}{(1 - r'(t))^2} \quad (3.19)$$

Inversement, si une fonction continue $x(t)$ est égale à $\psi(t)$ sur $[m_0, 0]$ et est solution de (3.18) sur un intervalle $[0, \sigma)$ alors $x(t)$ est solution de l'équation (3.14) sur $[0, \sigma)$.

Preuve. Supposons que $x(t)$ est une solution de l'équation (3.14) sur $[0, \sigma)$. Mettons l'équation (3.14) sous la forme

$$x'(t) + a(t)x(t) = a(t)x(t) - a(t)x^3(t) + c(t)x'(t-r(t)) + b(t)x^3(t-r(t))$$

En multipliant les deux côtés de cette équation par $e^{\int_0^t a(u)du}$ et puis en intégrant de 0 à $t \in [0, \sigma)$, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= \psi(0) e^{-\int_0^t a(u)du} + \\ &\int_0^t a(s) [x(s) - x^3(s)] e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \int_0^t c(s)x'(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &+ \int_0^t b(s)x^3(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u)du} ds. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Réécrivons

$$\begin{aligned} &\int_0^t c(s)x'(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &= \int_0^t \frac{c(s)}{(1-r'(s))} (1-r'(s)) x'(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u)du} ds. \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^t c(s)x'(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &= \frac{c(t)}{1-r'(t)} x(t-r(t)) - \frac{c(0)}{1-r'(0)} \psi(-r(0)) e^{-\int_0^t a(u)du} \\ &- \int_0^t \mu(s)x(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u)du} ds, \end{aligned} \quad (3.21)$$

où $\mu(s)$ est donnée par l'expression (3.19). Enfin, en substituant (3.21) dans (3.20) on arrive à la conclusion souhaitée. Inversement, supposons qu'une fonction continue $x(t)$ est égale à $\psi(t)$ sur $[m_0, 0]$ et est solution de (3.18) sur un intervalle $[0, \tau)$. Alors, $x(t)$ est différentiable sur $[0, \tau)$. La dérivée de (3.18) redonne (3.14). ■

Compte tenu de la théorie d'existence vu au premier chapitre, on conclut que pour chaque fonction initiale continue $\psi : [m_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une solution $x(t, 0, \psi)$ sur un intervalle $[0, \sigma)$ où $\sigma > 0$ avec $x(t, 0, \psi) = \psi(t)$ sur $[m_0, 0]$.

3.5.2 Bornétude et convergence vers zéro des solutions

Soit S l'espace de Banach des fonctions continues bornées $\varphi : [m_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ avec la norme supremum $\|\cdot\|$. Définissons l'ensemble

$$\begin{aligned} S_\psi &:= \{ \varphi \in S / \varphi \text{ est Lipschitzienne, } |\varphi(t)| \leq L, t \in [m_0, \infty), \\ &\varphi(t) = \psi(t) \text{ si } t \in [m_0, 0] \text{ et } \varphi(t) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty \}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\text{où } L = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

On affirme que si $\{\varphi_n\}$ est une suite de fonctions k -lipschitzienne convergeant vers une fonction φ alors

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(v)| &\leq |\varphi(u) - \varphi_n(u)| + |\varphi_n(u) - \varphi_n(v)| + |\varphi_n(v) - \varphi(v)| \\ &\leq \|\varphi - \varphi_n\| + k|u - v| + \|\varphi - \varphi_n\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque $n \rightarrow \infty$, nous voyons que φ est k -lipschitzienne. Il est clair que l'ensemble S_ψ est convexe, bornée et complet par rapport la norme supremum $\|\cdot\|$.

Pour $\varphi \in S_\psi$ et $t \geq 0$, on définit les applications A et B sur S_ψ respectivement par

$$\begin{aligned} A\varphi(t) &:= \frac{c(t)}{1-r'(t)}\varphi(t-r(t)) + \int_0^t b(s)\varphi^3(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\ &\quad + \int_0^t \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} B\varphi(t) &:= \left[\psi(0) - \frac{c(0)}{1-r'(0)}\psi(-r(0)) \right] e^{-\int_0^t a(u)du} \\ &\quad + \int_0^t a(s)[\varphi(s) - \varphi^3(s)]e^{-\int_s^t a(u)du}ds, \end{aligned} \quad (3.24)$$

et

$$F\varphi(t) := A\varphi(t) + B\varphi(t). \quad (3.25)$$

D'après le lemme (3.5.2) si on sera capable de prouver que l'application F de (3.25) admet un point fixe φ sur S_ψ alors $x(t, 0, \psi) = \varphi(t)$ sur $[m_0, 0]$ et $x(t, 0, \psi)$ va satisfaire (3.14) lorsque elle est dérivable et $x(t, 0, \psi) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$.

Posons $\alpha(t) := \frac{c(t)}{1-r'(t)}$ et supposons qu'il existe des constantes $k_1, k_2, k_3 > 0$ telles que pour $0 \leq t_1 < t_2$ on a

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} a(u) du \right| \leq k_1 |t_2 - t_1|, \quad (3.26)$$

$$|r(t_2) - r(t_1)| \leq k_2 |t_2 - t_1|, \quad (3.27)$$

et

$$|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \leq k_3 |t_2 - t_1|. \quad (3.28)$$

On suppose aussi que pour tout $t \geq 0$

$$|\mu(t)| \leq \delta a(t), \quad (3.29)$$

$$|b(t)| L^2 \leq \beta a(t), \quad (3.30)$$

$$\sup_{t \geq 0} |\alpha(t)| = \alpha, \quad (3.31)$$

et

$$J(\alpha + \beta + \delta) < 1, \quad (3.32)$$

où α, β, δ et J sont des constantes avec $J > 3$.

Choisissons $\gamma > 0$ assez petit tel que

$$\left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \gamma e^{-\int_0^t a(u) du} + \frac{L}{J} + \frac{2L}{3} \leq L. \quad (3.33)$$

Le choix de γ dans l'expression (3.33) va servir dans le lemme (4.5.3), pour montrer que si $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et si $\|\psi\| < \gamma$, alors la solution de (3.14) vérifie $|x(t, 0, \psi)| < \varepsilon$.

Supposons en outre que les conditions suivantes sont satisfaites

$$t - r(t) \rightarrow \infty \text{ lorsque } t \rightarrow \infty \text{ et } \int_0^t a(u) du \rightarrow \infty \text{ lorsque } t \rightarrow \infty, \quad (3.34)$$

$$\alpha(t) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty, \quad (3.35)$$

$$\frac{\mu(t)}{a(t)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty, \quad (3.36)$$

et

$$\frac{b(t)}{a(t)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty. \quad (3.37)$$

Proposition 3.5.3 Soit $\|\cdot\|$, la norme de supremum et

$$M := \left\{ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in C, \|\varphi\| \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \right\},$$

alors l'application $(H\varphi)(t) := \varphi(t) - \varphi^3(t)$ est une contraction large sur l'ensemble M .

Preuve. voir (1.3.2). ■

Dans une série d'étapes on va démontrer que les conditions i., ii. et iii. du théorème (1.3.5) sont vérifiées.

Lemme 3.5.4 Supposons que (3.29) - (3.32) et (3.34) sont satisfaites. Si $\varphi \in S_\psi$, alors $|A\varphi(t)| \leq L/J < L$ où A est l'application définie par 3.23. En outre, $A\varphi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Preuve. En utilisant les conditions (3.29) - (3.32) et l'expression (3.23) de l'application A , on obtient

$$\begin{aligned}
 |A\varphi(t)| &\leq \left| \frac{c(t)}{1-r'(t)} \varphi(t-r(t)) \right| + \int_0^t |b(s)\varphi^3(s-r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 &\quad + \int_0^t |\mu(s)\varphi(s-r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 &\leq \alpha L + L \int_0^t L^2 |b(s)| e^{-\int_s^t a(u)du} ds + L \int_0^t |\mu(s)| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 &\leq L \left\{ \alpha + \int_0^t \beta a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \int_0^t \delta a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right\} \\
 &\leq L(\alpha + \beta + \delta) \leq L/J < L.
 \end{aligned}$$

Ceci montre bien que AS_ψ est bornée par L .

D'autre part, soit $\varphi \in S_\psi$ fixée, et montrons que $A\varphi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Compte tenu des conditions $t-r(t) \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$ dans (3.34) et (3.31), on voit clairement que le premier terme de la partie droite de l'application A définie par (3.23) tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, i.e.,

$$\left| \frac{c(t)}{1-r'(t)} \varphi(t-r(t)) \right| \leq \alpha |\varphi(t-r(t))| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Reste à prouver que les deux autres termes intégraux de A tendent aussi vers zéro quand $t \rightarrow \infty$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$ donné. Choisissons T tel que $|\varphi(t-r(t))| < \varepsilon$, pour $t \geq T$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_0^t \mu(s)\varphi(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \\
 &\leq \int_0^T |\mu(s)\varphi(s-r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \int_T^t |\mu(s)\varphi(s-r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 &\leq L e^{-\int_T^t a(u)du} \int_0^T |\mu(s)| e^{-\int_s^T a(u)du} ds + \varepsilon \int_T^t |\mu(s)| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 &\leq L\delta e^{-\int_T^t a(u)du} + \varepsilon\delta.
 \end{aligned}$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, le terme $L\delta e^{-\int_T^t a(u)du}$ est arbitrairement petit en raison de (3.34). Le terme intégral qui reste dans A tend vers zéro par une procédure analogue. Ceci achève cette preuve. ■

Lemme 3.5.5 *On suppose que les conditions (3.29)-(3.32) et (3.34) sont vérifiées. Si $\phi, \varphi \in S_\psi$ sont arbitraires, alors pour A, B données par (3.23) et (3.24) on a l'inégalité*

$$|B\varphi + A\phi| \leq L.$$

En outre, B est une contraction large sur S_ψ avec un point fixe unique dans S_ψ et $B\varphi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Preuve. Notons d'abord que la condition $|\varphi(t)| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ implique que $|\varphi(t) - \varphi(t)^3| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{3}L$.

Maintenant, en utilisant les définitions (3.23) et (3.24) de A et B respectivement et appliquant les conditions (3.29) - (3.32), on obtient

$$\begin{aligned}
 & |B\varphi(t) + A\phi(t)| \\
 & \leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \|\psi\| e^{-\int_0^t a(u)du} + \alpha L + L \int_0^t |\mu(s)| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & + \frac{2L}{3} \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \int_0^t |b(s)| L^3 e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \|\psi\| e^{-\int_0^t a(u)du} + (\alpha + \beta + \delta) L + \frac{2L}{3} \\
 & \leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \|\psi\| e^{-\int_0^t a(u)du} + \frac{L}{J} + \frac{2L}{3}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Ainsi, si l'on choisit $\|\psi\| < \gamma$, alors d'après (3.33) il vient,

$$\begin{aligned}
 |B\varphi(t) + A\phi(t)| & \leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \gamma e^{-\int_0^t a(u)du} + \frac{L}{J} + \frac{2L}{3} \\
 & \leq L.
 \end{aligned}$$

De plus, Puisque $0 \in S_\psi$ on a, en remplaçant ϕ par 0, démontré aussi que $|B\varphi(t)| \leq L$.

Pour vérifier que B est une contraction large avec un point fixe unique dans S_ψ , on sait de la proposition (3.5.3) que $\varphi - \varphi^3$ est une contraction large admettant un point fixe unique dans M . Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ de la démonstration de la Proposition (3.5.3), on a trouvé un nombre η tel que

$$\begin{aligned}
 & |B\varphi(t) - B\phi(t)| \\
 & \leq \int_0^t a(s) |F\varphi(s) - F\phi(s)| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \leq \eta \int_0^t a(s) \|\varphi - \phi\| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \leq \eta \|\varphi - \phi\|.
 \end{aligned}$$

Pour voir que $B\varphi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, on utilise la condition (3.34) pour le premier terme de B et pour le second terme on suit le même raisonnement que celui utilisé dans la preuve du lemme (3.5.4) appliqué à A . ■

Lemme 3.5.6 *Supposons que les conditions (3.29)-(3.32) sont valides. Alors l'application A est continue sur S_ψ .*

Preuve. Soient $\varphi, \phi \in S_\psi$, alors

$$\begin{aligned}
 & |A\varphi(t) - A\phi(t)| \\
 & \leq \left\{ \alpha |\varphi(t-r(t)) - \phi(t-r(t))| \right. \\
 & + \left| \int_0^t b(s) [\varphi^3(s-r(s)) - \phi^3(s-r(s))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \\
 & + \left| \int_0^t \mu(s) [\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right\} \\
 & \leq \alpha \|\varphi - \phi\| + 3 \int_0^t L^2 |b(s)| |\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & + \|\varphi - \phi\| \int_0^t |\mu(s)| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \leq (\alpha + 3\beta + \delta) \|\varphi - \phi\| \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \leq (\alpha + 3\beta + \delta) \|\varphi - \phi\| \\
 & \leq (3/J) \|\varphi - \phi\|.
 \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Définissons $\eta = \frac{\varepsilon J}{3}$. Alors si $\|\varphi - \phi\| \leq \eta$, on aura

$$\|A\varphi - A\phi\| \leq \frac{3}{J} \|\varphi - \phi\| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, A est continue. ■

Lemme 3.5.7 *Supposons que les hypothèses (3.26)-(3.31) et (3.35)-(3.37) sont valides. La fonction $A\varphi$ est Lipschitzienne et l'application A envoie S_ψ dans un sous ensemble compact de S_ψ .*

Preuve. Soit $\varphi \in S_\psi$ et soient $0 \leq t_1 < t_2$. Alors,

$$\begin{aligned}
 & |A\varphi(t_2) - A\varphi(t_1)| \\
 & \leq \left| \frac{c(t_2)}{1-r'(t_2)} \varphi(t_2-r(t_2)) - \frac{c(t_1)}{1-r'(t_1)} \varphi(t_1-r(t_1)) \right| \\
 & + \left| \int_0^{t_2} \mu(s) \varphi(s-r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right. \\
 & - \left. \int_0^{t_1} \mu(s) \varphi(s-r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right| \\
 & + \left| \int_0^{t_2} b(s) \varphi^3(s-r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right. \\
 & - \left. \int_0^{t_1} b(s) \varphi^3(s-r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right|.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Par les hypothèses (3.27)-(3.28), on aura

$$\begin{aligned}
 & \left| \alpha(t_2) \varphi(t_2 - r(t_2)) - \alpha(t_1) \varphi(t_1 - r(t_1)) \right| \\
 & \leq |\alpha(t_2)| \left| \varphi(t_2 - r(t_2)) - \varphi(t_1 - r(t_1)) \right| \\
 & + \left| \varphi(t_1 - r(t_1)) \right| |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \\
 & \leq \alpha k |(t_2 - t_1) - (r(t_2) - r(t_1))| + L k_3 |t_2 - t_1| \\
 & \leq (\alpha k + \alpha k k_2 + L k_3) |t_2 - t_1|,
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

où k est la constante de Lipschitz de φ . Par les hypothèses (3.26) et (3.29),

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^{t_2} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds - \int_0^{t_1} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} ds \right| \\
 & = \left| \int_0^{t_1} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} \left(e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} - 1 \right) ds \right. \\
 & + \left. \int_{t_1}^{t_2} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \right| \\
 & \leq L \left| e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u) du} - 1 \right| \int_0^{t_1} \delta a(s) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} + L \int_{t_1}^{t_2} |\mu(s)| e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \\
 & \leq L \delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + L \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} d \left(\int_{t_1}^s |\mu(v)| dv \right) \\
 & \leq L \delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + L \left\{ e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} \int_{t_1}^s |\mu(v)| dv \right\}_{t_1}^{t_2} \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} a(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} \int_{t_1}^s |\mu(v)| dv ds \} \\
 & \leq L \delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + L \int_{t_1}^{t_2} |\mu(s)| ds \left(1 + \int_{t_1}^{t_2} a(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \right) \\
 & \leq L \delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + 2L \int_{t_1}^{t_2} |\mu(s)| ds \\
 & \leq L \delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + 2L \delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds \\
 & \leq 3L \delta k_1 |t_2 - t_1|.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

De même, par les conditions (3.26) et (3.30), on en déduit

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^{t_2} b(s) \varphi^3(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds - \int_0^{t_1} b(s) \varphi^3(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} ds \right| \\
 &= \left| \int_0^{t_1} b(s) \varphi^3(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} \left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u) du} - 1 \right) ds \right. \\
 &+ \left. \int_{t_1}^{t_2} b(s) \varphi^3(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \right| \\
 &\leq L \left| e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u) du} - 1 \right| \int_0^{t_1} \beta a(s) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} + L^3 \int_{t_1}^{t_2} |b(s)| e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \\
 &\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u) du + L^3 \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} d \left(\int_{t_1}^s |b(v)| dv \right) \\
 &\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u) du + L^3 \left\{ \left[e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} \int_{t_1}^s |b(v)| dv \right]_{t_1}^{t_2} \right. \\
 &+ \left. \int_{t_1}^{t_2} a(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} \int_{t_1}^s |b(v)| dv ds \right\} \\
 &\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u) du + L^3 \int_{t_1}^{t_2} |b(s)| ds \left(1 + \int_{t_1}^{t_2} a(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \right) \\
 &\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u) du + 2L^3 \int_{t_1}^{t_2} |b(s)| ds \\
 &\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u) du + 2L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds \\
 &\leq 3L\beta k_1 |t_2 - t_1|.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Ainsi, en substituant (3.40) - (3.42) dans (3.39), on obtient

$$\begin{aligned}
 & |A\varphi(t_2) - A\varphi(t_1)| \\
 &\leq (\alpha k + \alpha k k_2 + L k_3) |t_2 - t_1| + 3L\delta k_1 |t_2 - t_1| + 3L\beta k_1 |t_2 - t_1| \\
 &\leq K |t_2 - t_1|,
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

pour une certaine constante positive K . Cela montre que si φ est lipschitzienne, $A\varphi$ l'est également et que AS_ψ est équicontinu. La preuve que $B\varphi$ est lipschitzienne se démontre de la même manière à celle effectuée pour l'application $A\varphi$.

D'autre part, notons que pour $\varphi \in S_\psi$ arbitraire, nous avons

$$\begin{aligned}
 & |A\varphi(t)| \\
 & \leq \left| \frac{c(t)}{1-r'(t)} \varphi(t-r(t)) \right| + \int_0^t |b(s)\varphi^3(s-r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & + \int_0^t |\mu(s)\varphi(s-r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \leq L\alpha(t) + L^3 \int_0^t a(s) [|b(s)|/a(s)] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & + L \int_0^t a(s) [|\mu(s)|/a(s)] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & := q(t),
 \end{aligned}$$

puisque par les hypothèses (3.35) et (3.37) et en utilisant une procédure analogue à celle effectuée pour l'application A , on s'aperçoit que $q(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

L'application du théorème (1.1.13), montre que AS_ψ réside dans un compact. ■

Théorème 3.5.8 Soit $L = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et supposons que les conditions (3.16) et (3.26)-(3.37) sont valides. Si ψ est une fonction initiale continue et suffisamment petite, alors il existe une solution $x(t, 0, \psi)$ de (3.14) telle que $|x(t, 0, \psi)| \leq L$ et $x(t, 0, \psi) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Preuve. D'après les lemmes (3.5.4) et (3.5.7), on en déduit que A est bornée par L , Lipschitzienne et $A\phi(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. Donc, A applique S_ψ vers S_ψ . D'après le lemme (3.5.5) et le lemme (3.5.7), on a, pour $\phi, \varphi \in S_\psi$ arbitrairement, $B\varphi + A\phi \in S_\psi$, car $A\phi$ et $B\varphi$ sont Lipschitzienne, $A\phi + B\varphi$ bornée par L et $B\varphi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Enfin le lemme (3.5.6) et le lemme (3.5.7), montrent que A est continue et AS_ψ réside dans un compact. Il est clair que toutes les hypothèses du Théorème (1.3.5) de Krasnoselskii-Burton sont vérifiées. Ainsi, il existe une solution de (3.14) avec $|x(t, 0, \psi)| \leq L$ et $x(t, 0, \psi) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. ■

3.5.3 Compacité et stabilité

Faisant fois à Burton (voir [18], [21]), apart la technique de point fixe, on ne connaît pas d'autre moyen pour prouver la convergence vers zéro des solutions de l'équation (3.14) (et en particulier (3.17)).

Cependant, si tout ce qu'on cherche est seulement la stabilité et non pas la stabilité asymptotique, alors on peut éviter les conditions (3.35)-(3.37) et encore utiliser le théorème Krasnoselskii-Burton sur un espace de Banach muni d'une norme pondérée.

Soit $h : [m_0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ une fonction continue et strictement croissante telle que $h(m_0) = 1$, $h(s) \rightarrow \infty$ quand $s \rightarrow \infty$ (par exemple $h(t) = t + 1$).

Considérons S l'espace de Banach de fonctions continues $\varphi : [m_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$|\varphi|_h := \sup_{t \geq m_0} |\varphi(t)/h(t)| < \infty.$$

$(S, |\cdot|_h)$ est un espace de Banach. On continuera d'utiliser la norme du supremum $\|\varphi\|$ lorsque $\varphi \in S$ est bornée. Aussi, $\|\varphi\|$ symbolisera la norme de la fonction initiale ψ . En outre, on peut, modulo quelques réparations, prouver que $\varphi - \varphi^3$ reste une contraction large relativement à la norme $|\cdot|_h$.

Théorème 3.5.9 *Si les hypothèses du Théorème (3.5.8) sont satisfaites, sans même que les conditions (3.35) et (3.37) soit vérifiées, alors la solution triviale de l'équation (3.14) est stable.*

Preuve. On démontre la stabilité en $t_0 = 0$. Vers cette fin. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre donné tel que $0 < \varepsilon < \sqrt{3}/3$. Alors pour $|x| \leq \varepsilon$, on peut trouver un nombre γ^* satisfaisant $|x - x^3| \leq \gamma^*$. Choisissons $\gamma > 0$ tel que

$$\gamma + \gamma^* + (\varepsilon^3/J) \leq \varepsilon. \quad (3.44)$$

En vérité, puisque la fonction $x - x^3$ est croissante sur $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ on peut prendre γ^* comme suit $0 \leq x - x^3 \leq \varepsilon - \varepsilon^3 =: \gamma^*$. Ainsi, l'inégalité (3.44) permet γ d'être positif.

Maintenant, on retire la condition $\varphi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$ de S_ψ défini précédemment et on considère l'ensemble

$$M_\psi := \{ \varphi \in S \mid \varphi \text{ Lipschitzienne, } |\varphi(t)| \leq \varepsilon, t \in [m_0, \infty) \\ \text{et } \varphi(t) = \psi(t) \text{ si } t \in [m_0, 0] \}.$$

Définissons sur M_ψ les applications A, B respectivement, comme précédemment, par (3.23), (3.24).

On vérifie sans difficulté que si $\varphi \in M_\psi$ alors $|A\varphi(t)| < \varepsilon$, et que B est une contraction large pour la norme $|\cdot|_h$ admettant un point fixe unique appartenant à M_ψ . En outre, en choisissant $\|\psi\| < \gamma$ et en invoquant la condition (3.44), s'aperçoit que pour $\varphi, \phi \in M_\psi$, $|B\varphi(t) + A\phi(t)| \leq \varepsilon$ et $|B\varphi(t)| < \varepsilon$.

Ainsi, AM_ψ est équicontinu. Dans $(S, |\cdot|_h)$, compte tenu de l'exemple (1.1.16), AM_ψ réside dans un sous ensemble compact de M_ψ .

En outre, l'application $A : M_\psi \rightarrow M_\psi$ est continue. En effet, si $\varphi, \phi \in S_\psi$, alors

$$\begin{aligned}
 & |A\varphi(t) - A\phi(t)| / h(t) \\
 & \leq (1/h(t)) \{ \alpha |\varphi(t-r(t)) - \phi(t-r(t))| \\
 & + \left| \int_0^t b(s) [\varphi^3(s-r(s)) - \phi^3(s-r(s))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \\
 & + \left| \int_0^t \mu(s) [\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \} \\
 & \leq \alpha |\varphi - \phi|_h + 3 \int_0^t L^2 |b(s)| |\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))| / h(t) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & + \int_0^t |\mu(s)| |\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))| / h(t) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \leq \alpha |\varphi - \phi|_h + 3\beta |\varphi - \phi|_h \int_0^t a(s) [h(s-r(s)) / h(t)] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & + \delta |\varphi - \phi|_h \int_0^t a(s) [h(s-r(s)) / h(t)] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \leq (3/J) |\varphi - \phi|_h.
 \end{aligned}$$

Toutes les conditions du Théorème (1.3.5) de Krasnoselskii-Burton sont satisfaites et par conséquent il existe une solution de (3.14) qui appartient à M_ψ . ■

Stabilité par le théorème de Krasnoselskii-Burton pour une classe d'équations différentielles fonctionnelle à retard, la suite

Mots clés. Théorème de Krasnoselskii's-Burton, Stabilité, Point fixe, Large contraction, équation non linéaire neutre.



Le but de ce chapitre est d'exposer les travaux publiés par

A. Ardjouni, I. Derrardjia, A. Djoudi

Stability in totally nonlinear neutral differential equations with variable delays, Acta. Math. Univ. Comenianae. Vol. LXXXIII, 1 (2014), pp. 119-134.

L'étude de la stabilité de certaines équations différentielles fonctionnelles qui ne possèdent pas un terme linéaire non trivial par la méthode directe de Liapounov s'est avéré très délicate voire même sans issue parfois. Les équations différentielles à retard ont montré une grande résistance à cette méthode lorsque les fonctions utilisées dans l'équation sont non bornées en temps, si le retard est non borné ou si la dérivée du retard n'est pas petite. A tout cela s'ajoute aussi la difficulté de construire la fonctionnelle de Liapounov et l'aspect ponctuel, défavorable dans les calculs, des conditions imposées aux fonctions des équations différentielles. Cependant les problèmes de monde réel avec toutes leurs incertitude exigent des conditions en moyennes. Il était donc temps, pour un bon nombre d'investigateurs clairvoyants, de rechercher et d'exploiter d'autres voies et ils tentent la technique de point fixe.

Le contenu de ce chapitre va montrer, une fois de plus, l'efficacité de la technique de point fixe dans le domaine de la stabilité. Elle surmonte, en effet, des problèmes qui ont jusque là frustré les investigateurs qui fréquentent la méthode directe de Liapunov.

Concrètement, ce travail concerne une classe d'équations qui s'exprime sous la forme suivante

$$x'(t) = -a(t)h(x(t)) + c(t)x'(t-r(t)) + b(t)G(x(t), x(t-r(t))), \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

avec une condition initiale

$$x(t) = \psi(t), t \in [m_0, 0],$$

et

$$\psi \in C([m_0, 0], \mathbb{R}), [m_0, 0] = \{u \leq 0 \mid u = t - r(t), t \geq 0\}.$$

On suppose que $a, b \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec $a(t) \geq 0$, $c \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à ses arguments, on suppose aussi que $h(0) = 0$ et $r \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tq

$$r'(t) \neq 1, t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.2)$$

On suppose aussi que $G(t, x, y)$ est globalement Lipschitzienne par rapport à x et y , i.e., il existe des constantes positives N_1 et N_2 telles que

$$|G(t, x, y) - G(t, z, w)| \leq N_1 \|x - z\| + N_2 \|y - w\|.$$

Il est clair que cette équation est totalement non linéaire car elle ne contient aucun terme linéaire non trivial et donc la méthode de variation de paramètres ne peut être utilisée dans ce cas pour définir une application de point fixe pour pouvoir utiliser la théorie de point fixe.

En s'appuyant sur le théorème de point fixe de Krasnoselskii-Burton sous des hypothèses que l'on précisera plus bas, des conditions nécessaires et suffisantes pour la bornétude et la stabilité asymptotique de la solution zéro de l'équation (4.1) seront élucidées. En arrivant à cette fin beaucoup de travaux antérieurs, comme ([2], [18], [31]) deviennent corollaires.

Comme pour le cas de l'équation (4.1) étudiée dans le chapitre précédent, on va devoir recourir à la méthode classique celle de rajouter un terme linéaire et puis le soustraire. Néanmoins cette procédure n'est pas sans effet. Car rajouter puis soustraire un terme linéaire va infecter l'équation en détruisant une contraction qui existe déjà mais, heureusement, elle va la remplacer par un autre type d'applications semblable à une contraction celui de contraction large. On va, dans une première étape inverser l'équation (4.1) pour définir notre trio : une application de point fixe, un espace et un théorème de point fixe.

4.1 Transformation et inversion de l'équation

On doit donc inverser (4.1). Pour le faire, on va l'écrire sous une forme plus attractive afin d'exprimer l'équation sous une forme d'une équation intégrale à partir de laquelle on va définir une application de point fixe qui convient au théorème de point fixe de Krasnoselskii-Burton. Au cours de cette procédure une intégration par partie va être effectuée sur le terme neutre $x'(t - r(t))$ et une dérivée $r'(t)$ du retard apparaîtra sur le chemin et nous devons donc la supporter.

Lemme 4.1.1 *Supposons vraie la condition (4.2). Si $x(t)$ est solution de l'équation (4.1) sur un intervalle $[0, \sigma)$ et satisfait la condition $x(t) = \psi(t)$ pour $t \in [m_0, 0]$ alors $x(t)$ est*

solution de l'équation intégrale

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \left[\psi(0) - \frac{c(0)}{1-r'(0)} \psi(-r(0)) \right] e^{-\int_0^t a(u) du} \\
 & + \frac{c(t)}{1-r'(t)} x(t-r(t)) - \int_0^t \mu(s) x(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\
 & + \int_0^t b(s) G(x(s), x(s-r(s))) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\
 & + \int_0^t a(s) H(x(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds,
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

où

$$\mu(t) = \frac{(c'(t) + a(t)c(t))(1-r'(t)) + c(t)r''(t)}{(1-r'(t))^2}, \tag{4.4}$$

et

$$H(x(t)) = x(t) - h(x(t)). \tag{4.5}$$

Inversement, si une fonction continue $x(t)$ est égale à $\psi(t)$ sur $[m_0, 0]$ et est solution de (4.3) sur un intervalle $[0, \tau)$ alors $x(t)$ est solution de l'équation (4.1) sur $[0, \tau)$.

Preuve. En rajoutant aux deux membres de l'équation (4.1) le terme $a(t)x(t)$ on aura

$$x'(t) + a(t)x(t) = a(t)x(t) - a(t)h(x(t)) + c(t)x'(t-r(t)) + b(t)G(x(t), x(t-r(t)))$$

Multiplions les deux côtés de (4.1) par $(e^{\int_0^t a(u) du})$ et puis en intégrant de 0 à t on obtient,

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \psi(0) e^{-\int_0^t a(u) du} + \\
 & \int_0^t a(s) [H(x(s))] e^{-\int_s^t a(u) du} ds + \int_0^t c(s) x'(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\
 & + \int_0^t b(s) G(x(s), x(s-r(s))) e^{-\int_s^t a(u) du} ds.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

On réécrit

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t c(s) x'(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\
 & = \int_0^t \frac{c(s)}{(1-r'(s))} (1-r'(s)) x'(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds
 \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t c(s) x'(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\
 & = \frac{c(t)}{1-r'(t)} x(t-r(t)) - \frac{c(0)}{1-r'(0)} \psi(-r(0)) e^{-\int_0^t a(u) du} \\
 & - \int_0^t \mu(s) x(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds,
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

où $\mu(s)$ est donnée par l'expression (4.4). Enfin, en substituant (4.7) dans (4.6) on aboutit à (4.3). Inversement, supposons qu'une fonction continue $x(t)$ est égale à $\psi(t)$ sur

$[m_0, 0]$ et est solution de (4.3) sur un intervalle $[0, \tau)$. Alors, $x(t)$ est différentiable sur $[0, \tau)$. La dérivé de (4.3) redonne (4.1). ■

Compte tenu de la théorie d'existence vu au premier chapitre, on conclut que pour chaque fonction initiale continue $\psi : [m_0, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une solution $x(t, 0, \psi)$ sur un intervalle $[0, \sigma)$ où $\sigma > 0$ avec $x(t, 0, \psi) = \psi(t)$ sur $[m_0, 0]$.

4.2 Bornétude et convergence vers zéro des solutions

Pour appliquer le théorème 1.3.5, on doit choisir un espace de Banach convenable dépendant sur la donnée initiale ψ et construire deux applications, une contraction large et une application compacte qui obéissent aux conditions du théorème. Pour cela, considérons S l'espace de Banach de fonctions continues et bornées $\varphi : [m_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme du suprémum $\|\cdot\|$.

Soit $L > 0$ et définissons l'ensemble

$$S_\psi := \{ \varphi \in S / \varphi \text{ Lipschitzienne, } |\varphi(t)| \leq L, t \in [m_0, \infty), \varphi(t) = \psi(t) \text{ si } t \in [m_0, 0] \text{ et } \varphi(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty \}. \quad (4.8)$$

On vu (voir 2.3.2) que S est convexe, borné et de Banach avec la norme $\|\cdot\|$.

Pour $\varphi \in S_\psi$ et $t \geq 0$, définissons les applications A, B et F sur S_ψ par

$$\begin{aligned} A\varphi(t) &:= \frac{c(t)}{1-r'(t)} \varphi(t-r(t)) + \int_0^t b(s) G(\varphi(s), \varphi(s-r(s))) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ &+ \int_0^t \mu(s) \varphi(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} B\varphi(t) &:= \left[\psi(0) - \frac{c(0)}{1-r'(0)} \psi(-r(0)) \right] e^{-\int_0^t a(u) du} \\ &+ \int_0^t a(s) H(\varphi(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds, \end{aligned} \quad (4.10)$$

et

$$F\varphi(t) := A\varphi(t) + B\varphi(t). \quad (4.11)$$

Si on sera capable de montrer que F possède un point fixe φ sur l'espace S_ψ , alors ce point φ va vérifier automatiquement, $x(t, 0, \psi) = \varphi(t)$ pour $t \geq 0$, $x(t, 0, \psi) = \psi(t)$ sur $[m_0, 0]$, $x(t, 0, \psi)$ et sera solution de (4.1) et aussi $x(t, 0, \psi) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$.

Soit

$$\alpha(t) := \frac{c(t)}{1-r'(t)}$$

et supposons qu'il existe des constantes $k_1, k_2, k_3 > 0$ qui, pour $0 \leq t_1 < t_2$, vérifient

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} a(u) du \right| \leq k_1 |t_2 - t_1|, \quad (4.12)$$

$$|r(t_2) - r(t_1)| \leq k_2 |t_2 - t_1|, \quad (4.13)$$

et

$$|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \leq k_3 |t_2 - t_1|. \quad (4.14)$$

Supposons que pour $t \geq 0$,

$$|\mu(t)| \leq \delta a(t), \quad (4.15)$$

$$(N_1 + N_2) |b(t)| \leq \beta a(t), \quad (4.16)$$

$$\sup_{t \geq 0} |\alpha(t)| = \alpha, \quad (4.17)$$

et que

$$J(\alpha + \beta + \delta) < 1, \quad (4.18)$$

$$\max(|H(-L)|, |H(L)|) \leq \frac{2L}{J}, \quad (4.19)$$

avec α, β, δ et J sont des constantes avec $J > 3$.

Choisissons $\gamma > 0$ assez petite de sorte que

$$\left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \gamma e^{-\int_0^t a(u) du} + \frac{3L}{J} \leq L. \quad (4.20)$$

Ce choix de γ dans la relation (4.20) sera utilisé dans le lemme 5.2.2 pour prouver que, si $\varepsilon = L$ et si $\|\psi\| < \gamma$, alors les solutions vont satisfaire $|x(t, 0, \psi)| < \varepsilon$.

Supposons aussi que

$$t - r(t) \rightarrow \infty \text{ lorsque } t \rightarrow \infty \text{ et } \int_0^t a(u) du \rightarrow \infty \text{ lorsque } t \rightarrow \infty, \quad (4.21)$$

$$\alpha(t) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty, \quad (4.22)$$

$$\frac{\mu(t)}{a(t)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty, \quad (4.23)$$

et que

$$\frac{b(t)}{a(t)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty. \quad (4.24)$$

Nous rappelons que l'application H définie par l'équation (4.5) est une large contraction sur S_ψ lorsque la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie

(H.1) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[-L, L]$ et différentiable sur $(-L, L)$,

(H.2) h est strictement croissante sur $[-L, L]$,

$$(H.3) \sup_{t \in (-L, L)} (h'(t)) \leq 1.$$

voir le lemme (3.2.1).

Par plusieurs étapes on va montrer que les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème (1.3.5) sont vérifiées.

Lemme 4.2.1 *Supposons que (4.15) - (4.18) et (4.21) sont valides. Si $\varphi \in S_\psi$ alors $|A\varphi(t)| \leq L/J < L$ où A est l'application donnée par (4.9). En outre, $A\varphi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Preuve. En utilisant les conditions (4.15) - (4.18) et l'expression (4.9) de A , on obtient

$$\begin{aligned} |A\varphi(t)| &\leq \left| \frac{c(t)}{1-r'(t)} \varphi(t-r(t)) \right| + \int_0^t |b(s)| |G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ &\quad + \int_0^t |\mu(s) \varphi(s-r(s))| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ &\leq \alpha L + \int_0^t (N_1 + N_2) |b(s)| L e^{-\int_s^t a(u) du} ds + L \int_0^t |\mu(s)| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ &\leq L \left\{ \alpha + \int_0^t \beta a(s) e^{-\int_s^t a(u) du} ds + \int_0^t \delta a(s) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \right\} \\ &\leq L(\alpha + \beta + \delta) \leq L/J < L. \end{aligned}$$

Par conséquent, AS_ψ est bornée par L comme prévu.

Soit $\varphi \in S_\psi$ un élément fixée. On démontre que $A\varphi(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. Il est clair que, due aux conditions $t-r(t) \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$ de (4.21) et (4.17), le premier terme sur le coté droit de A tends vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

C'est à dire

$$\left| \frac{c(t)}{1-r'(t)} \varphi(t-r(t)) \right| \leq \alpha |\varphi(t-r(t))| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Il reste à montrer que les deux autres termes intégraux de A tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$. Vers cela, soit $\varepsilon > 0$ donné. Choisissons T de telle façon que $|\varphi(t-r(t))| < \varepsilon$, pour $t \geq T$. Il vient

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \mu(s) \varphi(s-r(s)) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \right| \\ &\leq \int_0^T |\mu(s) \varphi(s-r(s))| e^{-\int_s^t a(u) du} ds + \int_T^t |\mu(s) \varphi(s-r(s))| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ &\leq L e^{-\int_T^t a(u) du} \int_0^T |\mu(s)| e^{-\int_s^T a(u) du} ds + \varepsilon \int_T^t |\mu(s)| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ &\leq L \delta e^{-\int_T^t a(u) du} + \varepsilon \delta. \end{aligned}$$

Le terme $L \delta e^{-\int_T^t a(u) du}$ est, lorsque $t \rightarrow \infty$, arbitrairement petit due à la condition (4.21). Le terme intégral restant de A converge vers zéro par une procédure similaire. Ceci achève la démonstration. ■

Lemme 4.2.2 *Supposons que les conditions (4.15)-(4.19) et (4.21) sont valides. Pour A, B définies par (4.9) et (4.10) on a, si $\phi, \varphi \in S_\psi$ sont arbitraires, alors*

$$|B\varphi + A\phi| \leq L.$$

En outre, B est une contraction large sur S_ψ possédant un point fixe unique dans S_ψ et $B\varphi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Preuve. En utilisant les définitions (4.9) et (4.10) de A et B et en appliquant (4.15) - (4.19), on obtient

$$\begin{aligned} & |B\varphi(t) + A\phi(t)| \\ & \leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \|\psi\| e^{-\int_0^t a(u) du} + \alpha L + L \int_0^t |\mu(s)| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ & \quad + \int_0^t (N_1 + N_2) |b(s)| L e^{-\int_s^t a(u) du} ds + \frac{2L}{J} \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ & \leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \|\psi\| e^{-\int_0^t a(u) du} + (\alpha + \beta + \delta) L + \frac{2L}{J} \\ & \leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \|\psi\| e^{-\int_0^t a(u) du} + \frac{L}{J} + \frac{2L}{J}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en choisissant une fonction initiale ψ avec une amplitude assez réduite, disant $\|\psi\| < \gamma$, alors, de l'inégalité précédente et faisons référence à (4.20), on obtient

$$|B\varphi(t) + A\phi(t)| \leq \left(1 + \left| \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \right| \right) \gamma e^{-\int_0^t a(u) du} + \frac{3L}{J} \leq L.$$

Mais $0 \in S_\psi$, on a aussi prouvé que $|B\varphi(t)| \leq L$. La preuve que $B\varphi$ est Lipschitzienne est similaire à celle de l'application $A\varphi$ ci-dessous. Pour s'en convaincre que B est une contraction large sur S_ψ ayant un point fixe unique, on sait depuis le lemme 2.2.1 que $H(\varphi) = \varphi - h(\varphi)$ est une contraction large en intégrale. Ainsi, pour ε de la preuve de ce dernier lemme, on a trouvé ξ tel que

$$\begin{aligned} & |B\varphi(t) - B\phi(t)| \\ & \leq \int_0^t a(s) |(H\varphi)(s) - (H\phi)(s)| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ & \leq \xi \int_0^t a(s) \|\varphi - \phi\| e^{-\int_s^t a(u) du} ds \\ & \leq \xi \|\varphi - \phi\|. \end{aligned}$$

Pour démontrer que $B\varphi(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$, on applique (4.21) pour le premier terme et pour le deuxième terme on argumente par une méthode analogue à celle utilisée pour A . ■

Lemme 4.2.3 *Si les conditions (4.15)-(4.18) sont satisfaites. Alors, l'application A est continue sur S_ψ .*

Preuve. Soient $\varphi, \phi \in S_\psi$, alors

$$\begin{aligned}
 & |A\varphi(t) - A\phi(t)| \\
 & \leq \{ \alpha |\varphi(t-r(t)) - \phi(t-r(t))| \\
 & + \left| \int_0^t b(s) [G(\varphi(s), \varphi(s-r(s))) - G(\phi(s), \phi(s-r(s)))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \\
 & + \left| \int_0^t \mu(s) [\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \} \\
 & \leq \alpha \|\varphi - \phi\| + \int_0^t (N_1 + N_2) |b(s)| \|\varphi - \phi\| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & + \|\varphi - \phi\| \int_0^t |\mu(s)| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \leq (\alpha + \beta + \delta) \|\varphi - \phi\| \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \leq (\alpha + \beta + \delta) \|\varphi - \phi\| \leq (1/J) \|\varphi - \phi\|.
 \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, définissons $\eta = \varepsilon J$. Alors si $\|\varphi - \phi\| \leq \eta$, on aura

$$\|A\varphi - A\phi\| \leq \frac{1}{J} \|\varphi - \phi\| \leq \varepsilon.$$

Cela montre bien que A est continue. ■

Lemme 4.2.4 *Supposons que les conditions (4.12)-(4.17) et (4.22)-(4.24) sont satisfaites. Alors, la fonction $A\varphi$ est Lipschitzienne et l'application A envoie S_ψ dans un sous ensemble compact de S_ψ .*

Preuve. Soit $\varphi \in S_\psi$ et soient $0 \leq t_1 < t_2$. Alors

$$\begin{aligned}
 & |A\varphi(t_2) - A\varphi(t_1)| \\
 & \leq \left| \frac{c(t_2)}{1-r'(t_2)} \varphi(t_2-r(t_2)) - \frac{c(t_1)}{1-r'(t_1)} \varphi(t_1-r(t_1)) \right| + \\
 & + \left| \int_0^{t_2} \mu(s) \varphi(s-r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds - \int_0^{t_1} \mu(s) \varphi(s-r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right| \\
 & + \left| \int_0^{t_2} b(s) G(\varphi(s), \varphi(s-r(s))) e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right. \\
 & \left. - \int_0^{t_1} b(s) G(\varphi(s), \varphi(s-r(s))) e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right| \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

Des hypothèses (4.13)-(4.14), on a

$$\begin{aligned}
 & |\alpha(t_2) \varphi(t_2-r(t_2)) - \alpha(t_1) \varphi(t_1-r(t_1))| \\
 & \leq |\alpha(t_2)| |\varphi(t_2-r(t_2)) - \varphi(t_1-r(t_1))| \\
 & + |\varphi(t_1-r(t_1))| |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \\
 & \leq \alpha k |(t_2-t_1) - (r(t_2)-r(t_1))| + Lk_3 |t_2-t_1| \\
 & \leq (\alpha k + \alpha k k_2 + Lk_3) |t_2-t_1|, \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

où k est la constante de Lipschitz de φ . Des hypothèses (4.12) et (4.15), on en déduit

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{t_2} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds - \int_0^{t_1} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} ds \right| \\
&= \left| \int_0^{t_1} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} \left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u) du} - 1 \right) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} \mu(s) \varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \right| \\
&\leq L \left| e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u) du} - 1 \right| \int_0^{t_1} \delta a(s) e^{-\int_s^{t_1} a(u) du} + L \int_{t_1}^{t_2} |\mu(s)| e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \\
&\leq L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + L \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} d \left(\int_{t_1}^s |\mu(v)| dv \right) \\
&\leq L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + L \left\{ e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} \int_{t_1}^s |\mu(v)| dv \right\}_{t_1}^{t_2} \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} a(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} \int_{t_1}^s |\mu(v)| dv ds \} \\
&\leq L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + L \int_{t_1}^{t_2} |\mu(s)| ds \left(1 + \int_{t_1}^{t_2} a(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u) du} ds \right) \\
&\leq L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + 2L \int_{t_1}^{t_2} |\mu(s)| ds \\
&\leq L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + 2L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds \\
&\leq 3L\delta k_1 |t_2 - t_1|.
\end{aligned}$$

De même, de (4.12) et (4.16), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^{t_2} b(s)G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds - \int_0^{t_1} b(s)G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right| \\
 &= \left| \int_0^{t_1} b(s)G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} \left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du} - 1 \right) ds \right. \\
 & \quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} b(s)G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right| \\
 &\leq L \left| e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du} - 1 \right| \int_0^{t_1} \beta a(s)e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} + (N_1 + N_2) L \int_{t_1}^{t_2} |b(s)| e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \\
 &\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + (N_1 + N_2) L \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} d \left(\int_{t_1}^s |b(v)| dv \right) \\
 &\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + (N_1 + N_2) L \left\{ e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du} \int_{t_1}^s |b(v)| dv \right\}_{t_1}^{t_2} \\
 & \quad + \int_{t_1}^{t_2} a(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} \int_{t_1}^s |b(v)| dv ds \} \\
 &\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + (N_1 + N_2) L \int_{t_1}^{t_2} |b(s)| ds \left(1 + \int_{t_1}^{t_2} a(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right) \\
 &\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + 2(N_1 + N_2) L \int_{t_1}^{t_2} |b(s)| ds \\
 &\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + 2L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds \\
 &\leq 3L\beta k_1 |t_2 - t_1|.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ainsi, en substituant (4.26) - (4.27) dans (4.25), il vient

$$\begin{aligned}
 & |A\varphi(t_2) - A\varphi(t_1)| \\
 &\leq (\alpha k + \alpha k k_2 + L k_3) |t_2 - t_1| + 3L\delta k_1 |t_2 - t_1| + 3L\beta k_1 |t_2 - t_1| \\
 &\leq K |t_2 - t_1|,
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Pour une certaine constante positive $K > 0$. Ceci montre bien que $A\varphi$ est lipschitzienne si φ l'est et que AS_ψ est équicontinue. Aussi, on remarque que pour une fonction arbitraire $\varphi \in S_\psi$ on aura

$$\begin{aligned}
 & |A\varphi(t)| \\
 &\leq \left| \frac{c(t)}{1-r'(t)} \varphi(t-r(t)) \right| + \int_0^t |b(s)| |G(\varphi(s), \varphi(s-r(s)))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \quad + \int_0^t |\mu(s)\varphi(s-r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 &\leq L\alpha(t) + \int_0^t (N_1 + N_2) L \int_0^t a(s) [|b(s)|/a(s)] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 & \quad + L \int_0^t a(s) [|\mu(s)|/a(s)] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
 &:= q(t),
 \end{aligned}$$

En raison de (4.22) et (4.24) et en adoptant une méthode analogue à celle utilisée pour l'application A on voit que $q(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Par le théorème (1.1.13) on conclut que l'ensemble AS_ψ réside dans un ensemble compact. ■

Théorème 4.2.5 *Soit $L > 0$. Supposons que les conditions (H.1) – (H.3), (4.2) et (4.12)-(4.24) sont satisfaites. Si ψ est une fonction initiale d'amplitude assez petite alors il existe une solution $x(t, 0, \psi)$ pour (4.1) satisfaisant $|x(t, 0, \psi)| \leq L$ et telle que $x(t, 0, \psi) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Preuve. Du lemmes (4.2.1) et (4.2.4) on a vu A est bornée par L , Lipschitzienne et $A\phi(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. Donc, A envoie S_ψ dans S_ψ . Des lemmes (4.2.2) et (4.2.4), on a, pour des fonctions arbitraire $\phi, \varphi \in S_\psi$, $B\varphi + A\phi \in S_\psi$, car $A\phi$ et $B\varphi$ sont Lipschitziennes, $A\phi + B\varphi$ bornées par L et $B\varphi(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. Des lemmes (4.2.3) et (4.2.4), on a démontré que A est continue et AS_ψ réside dans un ensemble compact. Ainsi, toutes les conditions du Théorème (1.3.5) sont remplies. Par conséquent, il existe une solution pour (4.1) vérifiant $|x(t, 0, \psi)| \leq L$ et telle que $x(t, 0, \psi) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$. ■

Remarque 4.2.6 *Le théorème (4.2.5) améliore le théorème (3.5.8)*

4.3 Compacité et stabilité

Selon les propos de Burton ([18], [21]), hormis la méthode de point fixe, on ne connaît aucune autre méthode pour prouver la convergence vers zéro des solutions de (4.1). Néanmoins, si c'est seulement la stabilité qu'on cherche alors on peut s'en passer des conditions (4.22)-(4.24) et continuer d'utiliser le théorème de Krasnoselskii-Burton sur un espace de Banach muni d'une norme poids.

Soit $g : [m_0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ une fonction strictement croissante avec $g(m_0) = 1$, $g(s) \rightarrow \infty$ lorsque $s \rightarrow \infty$. Soit $(S, |\cdot|_g)$ l'espace de Banach de fonctions continues $\varphi : [m_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles

$$|\varphi|_g := \sup_{t \geq m_0} |\varphi(t) / g(t)| < \infty,$$

existe. On continue d'utiliser $\|\cdot\|$ la norme du supremum si $\varphi \in S$, et φ est bornée. Aussi, $\|\cdot\|_\psi$ indique la norme de la fonction initiale donnée. Aussi, on peut, modulo des modifications mineurs, prouver que la fonction $H(\varphi) = \varphi - h(\varphi)$ est une contraction large relativement à $|\cdot|_g$.

Théorème 4.3.1 *Si toutes les conditions du Théorème (4.2.5) sont vérifiées sauf (4.22)-(4.24), alors la solution zéro de (4.1) est stable.*

Preuve. On démontre la stabilité de la solution zéro en $t_0 = 0$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$ un nombre tel que $0 < \varepsilon < L$. Alors pour $|x| \leq \varepsilon$, on peut trouver γ^* avec $|x - h(x)| \leq \gamma^*$, et choisir γ tel que

$$\gamma + \gamma^* + (\varepsilon / J) \leq \varepsilon. \quad (4.29)$$

En vérité, puisque la fonction $x - h(x)$ est croissante sur $] -L, L[$ on peut prendre $\gamma^* = \frac{2\varepsilon}{J}$. Ainsi, l'inégalité (4.29) permet à γ d'être positive i.e., $\gamma > 0$.

Maintenant, si on retire de l'espace S_ψ la condition $\varphi(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$ on obtient le sous espace suivant

$$M_\psi := \{ \varphi \in S / \varphi \text{ Lipschitzienne, } |\varphi(t)| \leq \varepsilon, t \in [m_0, \infty) \\ \text{et } \varphi(t) = \psi(t) \text{ si } t \in [m_0, 0] \}.$$

Définissons A, B on M_ψ , comme dans (4.9), (4.10). On vérifie aisément que, si $\varphi \in M_\psi$ alors $|A\varphi(t)| < \varepsilon$, et que B est une contraction large sur M_ψ . Aussi, en choisissant $\|\psi\| < \gamma$ et en faisant référence à (4.29), on vérifie que pour $\varphi, \phi \in M_\psi$, $|B\varphi(t) + A\phi(t)| \leq \varepsilon$ et $|B\varphi(t)| < \varepsilon$. AM_ψ est équicontinu. Compte tenu de l'exemple (1.1.16), Dans l'espace $(S, |\cdot|_g)$, AM_ψ réside dans un sous ensemble compact de M_ψ . Aussi, l'application $A : M_\psi \rightarrow M_\psi$ est continue. En effet, pour $\varphi, \phi \in S_\psi$, alors

$$\begin{aligned} & |A\varphi(t) - A\phi(t)| / g(t) \\ & \leq (1/g(t)) \{ \alpha |\varphi(t-r(t)) - \phi(t-r(t))| \\ & + \left| \int_0^t b(s) [G(\varphi(s), \varphi(s-r(s))) - G(\phi(s), \phi(s-r(s)))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \\ & + \left| \int_0^t \mu(s) [\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \} \\ & \leq \alpha |\varphi - \phi|_g \\ & + \int_0^t |b(s)| \{ [N_1 |\varphi(s) - \phi(s)| / g(t)] \\ & + [N_2 |\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))| / g(t)] \} e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ & + \int_0^t |\mu(s)| |\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))| / g(t) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ & \leq \alpha |\varphi - \phi|_g \\ & + \int_0^t |b(s)| \{ \left[\frac{N_1 |\varphi(s) - \phi(s)|}{g(s)} \frac{g(s)}{g(t)} \right] \\ & + \left[\frac{N_2 |\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))|}{g(s-r(s))} \frac{g(s-r(s))}{g(t)} \right] \} e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ & + \int_0^t |\mu(s)| |\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))| / g(t) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ & \leq \alpha |\varphi - \phi|_g + |\varphi - \phi|_g \int_0^t |b(s)| \left[\frac{N_1 g(s) + N_2 g(s-r(s))}{g(t)} \right] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ & + \delta |\varphi - \phi|_g \int_0^t a(s) [g(s-r(s)) / g(t)] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ & \leq \alpha |\varphi - \phi|_g + \beta |\varphi - \phi|_g \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \delta |\varphi - \phi|_g \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ & \leq (1/J) |\varphi - \phi|_g. \end{aligned}$$

Les conditions du théorème 1.3.5 sont réunies sur M_ψ et par suite il existe un point fixe qui résoud (4.1) et qui appartient à M_ψ . ■

Remarque 4.3.2 *Le théorème 4.3.1 améliore et généralise le théorème 3.5.9.*

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce travail de recherche on a abordé des questions sur la stabilité par la technique de point fixe. Appliquée aux problèmes à retard non borné, la méthode s'est montrée efficace et avantageuse dans la mesure où ses conditions sont données en moyennes contrairement à ceux de Liapunov qui sont ponctuelles. Cette remarque est fondamentale, car les problèmes du monde réel sont incertains et chaotiques et par conséquent, des conditions en moyennes semblent plus convenables. Aussi, les espaces utilisés par la méthode sont des espaces fonctionnels de dimension infinie permettant de contenir des solutions raisonnables pour ces problèmes de vie courante. La littérature contemporaine montre aussi que la méthode reste applicable pour les problèmes à retard perturbés pour des termes stochastiques. De ce point de vue là, cette technique semble avoir de bon jours devant elle.

Bibliographie

- [1] Adivar,M., Islam, M.N., and Raffoul, Y. N. Separate contraction and existence of periodic solutions in totally nonlinear delay differential equations, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Vol 41 (1) (2012), 1 – 13.
- [2] Ardjouni A., Derardjia I., Djoudi A., Stability in totally nonlinear neutral differential equations with variable delays, Acta. Math.Univ.Comenianae. Vol. LXXXIII, 1 (2014), pp. 119-134.
- [3] Ardjouni A., A Contribution to the existence, boundedness and stability by fixed point theory in delay functional differential equations. A doctoral thesis presented at the Badji-Mokhtar university of Annaba in 2013.
- [4] Ardjouni A., Djoudi A., Fixed points and stability in linear neutral differential equations with variable delays. Nonlinear Analysis 74 (2011)2062-2070.
- [5] Ardjouni A., Djoudi A., Stability in nonlinear neutral integro-differential equations with variable delay using fixed point theory. Journal of Applied Mathematics and Computing, February 2014, Volume 44, Issue 1-2, pp 317-336. Springer.
- [6] Ardjouni A., Djoudi A., Stability in linear neutral differential equation with variable delays. Mathematica Bohemica, Vol. 138, No. 3 (2013), 245.258.
- [7] Ardjouni A., Djoudi A., Stability in Nonlinear Neutral Difference Equations with Variable Delays. Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics (TJMM) 5 (2013), N0.1, 1-10.
- [8] Ardjouni A., Djoudi A., Fixed point and stability in nonlinear neutral volterra integro-differential equations with variable delays. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2013, No. 28, 1-13.
- [9] Ardjouni A., Djoudi A., Fixed point technique and stability in nonlinear neutral differential equation with variable delays. MATEMATI-QKI VESNIK 65, 2 (2013), 271.284 June 2013.
- [10] Ardjouni A., Djoudi A., Stability by Krasnoselskii fixed point theorem for neutral nonlinear differential equations with variable delays. Acta Universitatis Upulensis, No. 32/2012 pp. 17-30.
- [11] Ardjouni A., Djoudi A., Stability in neutral nonlinear dynamic equations on time scale with unbounded delay. Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 57(2012), No. 4, 481.496.
- [12] Ardjouni A., Djoudi A., Fixed point and stability in neutral nonlinear differential equations with variable delays, Opuscula Mathematica. Vol 32, N° 1, 2012, pp 5-19.
- [13] Ardjouni A., Djoudi A., Stability in nonlinear neutral differential equation with variable delays using fixed point theory. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2011, N° 43, 1-11.
- [14] Ardjouni A., Djoudi A., Soualhia I., Stability for linear neutral integro-differential Equations with variable delays. EJDE, Vol. 2012(2012), N° 172 pp. 1-14.
- [15] Boyce, W. E. and DiPrima, R. C., Elementary differential equations and boundary value problems, Sixth Edition, Wiley, NY 1997.
- [16] Burton, T. A., Integral equations, implicit functions, and fixed points, Proc. Amer. Math. Soc.,124 (1996), 2383-2390.

- [17] Burton, T. A., Krasnoselskii's inversion principle and fixed points, *Nonlinear Anal.* 30 (1997), 3975–3986.
- [18] Burton, T. A., Liapunov functionals, fixed points and stability by Krasnoselskii's theorem. *Nonlinear studies* 9 (2002), 181-190.
- [19] Burton, T. A., *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations*, Academic Press, NY, (2005).
- [20] Burton, T. A., *Stability and periodic solutions of ordinary functional differential equations*, Academic Press. NY, 1985.
- [21] Burton, T. A., *Stability by fixed point theory for functional differential equations*, Dover Publications, Inc. (2006).
- [22] Burton, T. A., *Stability by fixed point theory or Liapunov theory : A Comparaison*, *Fixed point theory* 4 (2003), 15-32.
- [23] Burton, T. A., The case for stability by fixed point theory, *Dynamics of continuous, Discrete and impulsive Systems, Ser. A Math. Anal.* 13B (2006), suppl., 253-263.
- [24] Burton, T. A., *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press. Inc, 1983.
- [25] Burton, T. A. and Furumochi, T., Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems, *Dynamic Systems and Applications* 11 (2002) 499–519.
- [26] Burton, T. A. and Furumochi, T., Fixed points and problems in stability theory for ordinary and functional differential equations. *Dynamic Systems and Appl.* 10 (2001), 89-116.
- [27] Burton, T. A and Furumochi, T., Krasnoselskii fixed point theorem and stability. *Nonlinear Analysis* 49 (2002), 445-454.
- [28] Burton, T. A. and Kirk, C., A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, *Math. Nachr.* 189 (1998), 23–31.
- [29] Deham, H. and Djoudi, A., Existence of periodic solutions for neutral nonlinear differential equations with variable delay. *Electron J. Diff. Equ.*, Vol 2010(2010) No. 127, 1-8.
- [30] Deham, H. and Djoudi, A., Periodic solutions for nonlinear differential equation with functional delay. *Georgian Math. J.* 15 (2008), No 4, 635-642.
- [31] Derrardjia, I., Ardjouni, A., and Djoudi, A. Stability by krasnoselskii's theorem in totally nonlinear neutral differential equations, *Opuscula Mathematica*, Vol. 33, No. 2, (2013), 255-272.
- [32] Djoudi, A., and Khemis, R., Fixed point techniques and stability for neutral nonlinear differential equations with unbounded delays, *Georgian Math. J.* Vol 13 No. 1 (2006), 25-34.
- [33] Driver, R. D. *Ordinary and delay differential equation*, Springer Verlag, New York, 1977.
- [34] Gopalsamy, K., *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, Kluwer, Dordrecht, 1992.
- [35] Hale, J., *Theory of functional differential equations*, Springer Verlag, NY, 1977.
- [36] Hatvani, L., Annulus arguments in stability theory for functional differential equations, *Differential and integral equations*, 10 (1997), 975-1002.
- [37] Kolmogorov, A., Fomine, S., *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*, Mir, Moscou, 1973.

- [38] Krasnov, M., Kisselev, A., and Makarenko, G., *Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires*, Traduit du russe. Editions de Moscou 1978.
- [39] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [40] Kuang, Y., *Delay differential equations with applications to population dynamics*, Academic Press, Boston, 1993.
- [41] Seifert, G., Liapunov-Razumikhin conditions for stability and boundness of functional differential equations of Volterra type, *J. Differential equations* 14 (1973), 424-430.
- [42] Smart, D. R., *Fixed Point Theorems*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 66, Cambridge University Press, London-New York, 1974.
- [43] Yankson, E., Existence of periodic solutions for totally nonlinear neutral differential equations with functional delay, *Opuscula Mathematica* Vol. 32 No. 3 (2012), 617-627.
- [44] Zeidler, E., *Applied functional analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [45] Zhang, B., Fixed points and stability in differential equations with variable delays, *Nonlinear Anal.* 63 (2005) 233-242.