وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DE DOCTORAT EN MATHEMATIQUES
Option : Mathématiques Appliquées

Opérateur de transport dans l'espace des fonctions vectorielles

Par

LARRIBI Naima

Sous la Direction de

ENCADREUR: **DIABA Fatma Prof. Université B.M. Annaba**

Devant le jury

PRESIDENT	KELAIAIA Smail	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR	LASKRI Yamina	Prof.	EPST ANNABA
EXAMINATEUR	BOUSSETILA Nadjib	Prof.	Univ. de GUELMA

Année 2016

TABLE DES MATIÈRES

Résumé

Dans ce travail, on étudie le spectre ponctuel d'un opérateur de transport avec un potentiel matriciel 2×2, défini par : $L : L^2(D, \mathbb{C}^2) \to L^2(D, \mathbb{C}^2)$

$$\begin{cases} L : L^2(D, \mathbb{C}^2) \to L^2(D, \mathbb{C}^2) \\ Lu = -i\mu \frac{\partial u}{\partial x} + c(x) \int\limits_{-1}^{1} u(x, \mu') d\mu', \end{cases}$$

dans l'espace $L^2(D, \mathbb{C}^2)$, où $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$, avec un domaine de définition maximal et un potentiel matriciel $c(x)$ des fonctions complexes qui décroit exponentiellement et est défini par :

$$c(x) = \begin{pmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

Nous avons utilisé un modèle technique appelé modèle de Friedrichs et la transformée de Fourier appliquée à l'opérateur de transport (voir [15]), où on montre que l'opérateur de transport est unitairement équivalent au modèle de Friedrichs. On a utilisé essentiellement le travail de Mme DIABA F. et CHEREMNIKH E.V. (*see* [15]).

Ceci nous permet d'étudier directement le spectre ponctuel de l'opérateur à l'aide de la résolvante au lieu des calculs compliqués du modèle fonctionnel.

On donne quelques conditions suffisantes pour que le spectre ponctuel soit fini.

Abstract

In this work we study the finteness of the point spectrum transport operator, where the potencial is a matrix 2×2 with determinant equal to zero is considered. The elements of the matrix are complex-valued exponentialy decreasing functions in $(-\infty, \infty)$. This transport operator is defined by $L : L^2(D, \mathbb{C}^2) \to L^2(D, \mathbb{C}^2)$

$$\begin{cases} L : L^2(D, \mathbb{C}^2) \to L^2(D, \mathbb{C}^2) \\ Lu = -i\mu\frac{\partial u}{\partial x} + c(x)\int\limits_{-1}^{1} u(x, \mu')d\mu', \end{cases}$$

on the space $L^2(D, \mathbb{C}^2)$, where $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$, and :

$$c(x) = \begin{pmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

We transform this operator to the Friedrichs' model using Fourie transformation. We have used the work of F.Diaba et E. V. Cheremnikh (*see* [15])

Some sufficient conditions of finiteness of the point spectrum of transport operator are given.

CHAPITRE 1

Introduction

L'objectif principal de cette thèse est l'étude du spectre ponctuel d'un opérateur de transport avec un potentiel matriciel. On transforme l'opérateur de transport sous la forme de modèle de Friedrichs pour simplifier beaucoup de calculs spectraux.

En utilisant la théorie des opérateurs non auto-adjoints qui jouent à présent un grand rôle dans des domaines différents et variés de la physique mathématique où beaucoup de problèmes peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles qui constituent aujourd'hui un des thèmes majeurs.

On s'est aperçu depuis longtemps que la plupart des phénomènes de la physique mathématique sont non linéaires. Le cas parmi les plus célèbres étant l'équation de Boltzmann que nous verons dans le chapitre 2.

La modélisation mathématique par les équations aux dérivées partielles suivie de l'analyse théorique et numérique laquelle à son tour est confrontée à l'expérience, est devenue une démarche de base.

De nombreux problèmes spectraux se rencontrent dans les applications (calcul des niveaux d'énergie et des états en mécanique quantique, criticité en neutronique, transmission dans un guide d'onde, une fibre optique, etc...).

CHAPITRE 2

Ce chapitre est un petit rappel des résultats des travaux relatifs au modèle de Friedrichs et l'opérateur de transport. Il est évident que dans ce domaine riche et fertile mais néanmoins difficile que toute avancée minime soit elle représente un intérêt scientifique certain. Nous y avons également à regrouper les résultats obtenus par d'autres auteurs ainsi que les différentes méthodes utilisées ayant un lien direct avec notre problématique. Dans ce chapitre, notre but est l'inclusion du modèle de Friedrichs de l'opérateur de transport dans une série de modèles déjà élaborés([49], [48], [58], [4]), tirer de cela des résultats sur le spectre.

Ce rappel susdit d'un certain ensemble de résultats et travaux nous a fortement motivé pour envisager cette étude.

Les résultats sont basés essentiellement sur les travaux de Cheremnikh E.V. et F. Diaba ([4], [15], [8], [16]) indispensables pour l'étude des cas plus généraux.

CHAPITRE 3

Dans ce chapitre, on indique les conditions sur le modèle de Friedrichs qui permettent d'écrire la formule pour le saut de la résolvante et la représentation de la projection orthogonale par la résolvante R_ζ d'un opérateur auto-adjoint

$$E(\Delta) = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta + i\epsilon} \left(R_\zeta - R_{\bar{\zeta}} \right) d\zeta, \ \Delta \subset (-\infty, \infty)$$

qui est bien connue depuis longtemps (voir par exemple Yu.M. Berezanski [2] ,p.425). On a envisagé quelques résultats préliminaires et théorèmes concernant le modèle de Friedrichs.

CHAPITRE 4

Dans le dernier chapitre, on a étudié l'opérateur de transport défini par :

$$\begin{cases} L : L^2\left(D, \mathbb{C}^2\right) \to L^2\left(D, \mathbb{C}^2\right) \\ Lu = -i\mu \frac{\partial u}{\partial x} + c(x) \int\limits_{-1}^{1} u(x, \mu') d\mu', \end{cases}$$

dans l'espace $L^2\left(D, \mathbb{C}^2\right)$, où $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$, avec un domaine de définition maximal et un potentiel matriciel $c\left(x\right)$ des fonctions complexes exponentiellement décroissantes et est défini par

$$c(x) = \begin{pmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

On a introduit quelques conditions suffisantes pour que le spectre ponctuel soit fini en utilisant le modèle de Friedrichs.

Cet opérateur a été étudié en détail par F. Diaba, E. V. Cheremnikh dans le cas où le potentiel $c\left(x\right)$ est une fonction complexe exponentiellement décroissante pour le cas scalaire(voir [15]) ce que nous généralisons pour le cas matriciel.

Ces nouveaux résultats ont fait l'objet de plusieurs conférences nationales et internationnales.

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale [18] :

F. Diaba, N. Larribi, E. V. Cheremnikh, Finitness of the point spectrum of transport operator with matricial $2 \times 2 potential. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN$ $1768 Volume 12, Number 3 (2016), pp. 2561 - 2571$.

Ces travaux de recherche nous ont beaucoup aidé pour entamer cette étude concernant un domaine riche par ses applications et difficiles par les outils mathématiques appliqués et utilisés.

CHAPITRE 2

Quelques travaux sur le modèle de Friedrichs et l'opérateur de transport

1 Quelques traveaux sur le modèle de Friedrichs

En 1938, K.O. Friedrichs ([25]) a considéré l'opérateur

$$H = H_0 + \varepsilon V$$

où H_0 est l'opérateur de multiplication par la variable indépendante dans $L^2(-1,1)$;

$$H_0 f(x) = x f(x), \qquad -1 < x < 1 \tag{2.1}$$

et V est un opérateur intégral

$$V f(x) = \int v(x,y) f(y)\, dy$$

Le noyau $v(x,y)$ est une fonction continue, satisfaisant la condition de Hölder et vérifiant

$$v(-1,y) = v(1,y) = v(x,-1) = v(x,1) = 0$$

L'auteur a démontré que pour un ε petit, les opérateurs H_0, H sont unitairement équivalents, c'est-à-dire qu'il existe U tel que

$$U^*U = UU^* = E, \qquad HU = UH_0.$$

Ensuite, en 1948 dans [26] l'auteur a généralisé ce modèle pour l'intervalle non borné et pour les fonctions qui peuvent prendre des valeurs dans un espace d'Hilbert auxiliaire.

Ensuite, en 1964 L.D. Faddeev [24] a considéré le cas auto-adjoint mais sans la condition que ε soit petit et que la condition de Hölder $\geq \frac{1}{2}$, il a démontré que l'opérateur perturbé H possède un nombre fini des valeurs propres et que

$$U^*U = E, UU^* = E - P, \qquad \varphi(H)U = U\varphi(H_0)$$

où P est la projection sur le sous espace engendré par les éléments propres et φ une certaine fonction bornée.

En 1970 (voir [47]), V.E Ljancé a étudié les projecteurs propres de l'opérateur

$$T = S + V$$

où V est une perturbation régulière. En particulier, ici on décrit les vecteurs racines de l'opérateur T et on exprime la dimension de chacun de leurs sous-espaces racines en termes de la multiplicité de la valeur propre (singularité spectrale) comme racine de la perturbation déterminante correspondante.

Nous rappelons que les "projecteurs propres" $P_{\sigma\pm}$ correspondant à une singularité spectrale σ ont été d'origine définis comme opérateurs agissant de l'espace des éléments réguliers à son espace conjugué.

Plus bas, on construit une extension linéaire de l'opérateur $P_{\sigma\pm}$ qui agit dans un espace simple et satisfait la condition $P^2_{\sigma\pm} = P_{\sigma\pm}$, c-à-d, il est réellement un projecteur.

Dans le cas d'une perturbation complètement régulière, il découle de l'équation de Parseval que des fonctions suffisamment lisses dans H sont déterminées d'une manière unique par leur transformée de Fourier T sur le spectre continu et leurs coefficients de Fourier correspondant au spectre discret.

Ceci se produit, par exemple, dans le cas où il y a une singularité spectrale qui n'est pas une valeur propre.

2 Sur les projecteurs de l'opérateur $T = S + V$

Il convient de commencer par une description de racine du sous-espace

$$H_\lambda = \bigcup_k Z\left((T-\lambda)^k\right), \tag{2.2}$$

correspondant à une valeur propre non réelle λ de l'opérateur T, puisque dans ce cas la situation est plus simple que dans le cas d'une singularité spectrale.

Proposition 2.1 *Soit* $a_0, ..., a_{m-1} \in D(S)$ *et*

$$(T-\lambda)a_0 = 0, (T-\lambda)a_j = a_{j-1}, j = 1, ..., m-1, \tag{2.3}$$

où $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. *Posons*

$$c^j = -Ba_j, \;\; j = 0, ..., m-1. \tag{2.4}$$

Alors

$$\frac{1}{j!}K^{(j)}(\lambda)c^0 + ... + K(\lambda)c^j = 0, j = 0, ..., m-1, \tag{2.5}$$

et

$$a_j = S_\lambda^{j+1}A^*c^0 + ... + S_\lambda A^*c^j, j = 0, ..., m-1 \tag{2.6}$$

Réciproquement, soit $c^0, ..., c^{m-1}$ *sont des vecteurs arbitraires dans* G *qui satisfont le système* (2.5)*. En définissant les fonctions* $a_0, ..., a_{m-1}$ *par la formule* (2.6) *, alors ces fonctions appartiennent à* $D(S)$ *et satisfont les relations* (2.3) *et* (2.4) *.*

Théorème 2.1 *Si la perturbation V est complètement régulière, alors chaque fonction $f \in D(D^n)$ est déterminée d'une manière unique par sa T- transformée de Fourier sur le spectre continu et ses T-coefficients de Fourier correspondant à toutes les valeurs propres non réelles λ et les singularités spectrales σ de l'opérateur T.*

En 1976, T. Kako et Yajima [37] considèrent le cas auto-adjoint T_1 dans H avec la mesure spectrale $E_1(.)$ et soit $A, B \in C_0(H, \Re)$. On introduit les conditions suivantes $(A-1)$ et $(A-2)$.
$(A-1)$ $D(A) \cap D(B) \supset D(T)$. Le domaine de l'opérateur fermé $B[R_1(\zeta) A^*]$ est égal à l'espace tout entier $\Re$ pour un certain ζ, $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$, où $R_1(\zeta) = (T_1 - \zeta)^{-1}$.

Notons

$$B[R_1(\zeta) A^*] = Q(\zeta), \qquad A[R_1(\zeta) B^*] = Q^*(\zeta) = Q(\zeta)^*$$

$(A-2)$ Il existe une constante $\delta > 0$ et un ensemble ouvert Δ tel que $(1 + Q(\zeta))$ possède un inverse borné $(1 + Q(\zeta))^{-1}$ pour chaque $\zeta \in \Pi_\delta^\pm(\Delta)$ et $(1 + Q(\zeta))^{-1}$est uniformément borné au point $\zeta \in \Pi_\delta^\pm(\Delta)$ où

$$\Pi_\delta^\pm(\Delta) = \left\{ \begin{array}{r} \zeta \in C^1/ \ \operatorname{Re}\zeta \in \Delta, \\ 0 \lesseqgtr \operatorname{Im}\zeta \lesseqgtr \pm\delta \end{array} \right\} \tag{2.45}$$

et Δ un intervalle ne contenant pas de singularités spectrales.
On note que $(A-2)$ implique que $1 + Q^*(\zeta)$ possède les mêmes propriétés que $1 + Q(\zeta)$ et $(1 + Q(\zeta))^{-1}$ et $(1 + Q^*(\zeta))^{-1}$ sont tous les deux holomorphes en $\zeta \in \Pi_\delta^\pm(\Delta)$.
$(B-1)$ (petite perturbation). Il existe γ, $0 \leq \gamma \leq 1$ tel que

$$\|Q(\zeta)\| \leq \gamma \ , \ \zeta \in \Pi_\delta^\pm(\Delta) \tag{2.46}$$

$(B-2)$ (perturbation Compacte) $Q(\zeta)$ est compacte à un certain $\zeta \in \Pi_\delta^\pm(\Delta)$ et $Q(\zeta)$ possède une valeur limite bornée $Q(\lambda \pm i0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Q(\lambda + i\varepsilon)$ au sens de la norme topologique de l'opérateur lequel est continu au point $\lambda \in \Delta$ et $0 \notin$

$\sigma\left(1+Q\left(\lambda \pm i0\right)\right).$

Sous les conditions $(A-1)$ et $(A-2)$ on définit la résolvante pertubée $R_2\left(\zeta\right)$ comme

$$R_2\left(\zeta\right) = R_1\left(\zeta\right) - \left[R_1\left(\zeta\right) A^*\right]\left(1+Q\left(\zeta\right)\right)^{-1} B R_1\left(\zeta\right), \qquad \zeta \in \Pi_\delta^{\pm}\left(\Delta\right) \tag{2.47}$$

et on démontre que $R_2\left(\zeta\right)$ est la résolvante d'un certain opérateur fermé T_2 et on a obtenu les opérateurs d'ondes

$$\begin{aligned} W_{\pm}\left(\Delta\right) &= s - \lim e^{itT_2} E_2(\Delta) e^{-itT_1} E_1(\Delta) \\ Z_{\pm}\left(\Delta\right) &= s - \lim e^{itT_1} E_1(\Delta) e^{-itT_2} E_2(\Delta) \end{aligned}$$

Ensuite en 1973, B.S. Pavlov [54], a aussi considéré le modèle de Friedrichs pour l'opérateur l_σ défini dans l'éspace $L_2\left(0,\infty\right)$ pour l'expression différentielle

$$l_\sigma u = \frac{1}{i}\frac{du}{dx}$$

qui agit sur les éléments $u \in W_2^1\left(0,\infty\right)$ appartenant aux noyaux d'une fonctionnelle bornée définie sur $W_2^1\left(0,\infty\right)$ par une fonction σ à variation bornée.

$$(u,\bar{\sigma}) = \int_0^\infty u(x)\overline{d\sigma(x)} = 0, \qquad u \in W_2^1\left(0,\infty\right)$$

Il suppose que $\sigma(x)$ est lisse par morceaux et à support compact. Il étudie la nature du spectre ponctuel et les propriétés du système des fonctions propres sur un certain intervalle borné de l'opérateur l_σ.

En 1997, dans Cheremnikh E.V. [5], a repris ce modèle de Friedrichs pour l'opérateur de Sturm-Liouville mais dans l'espace $L^2\left(0,+\infty\right)$ sous des conditions qui le permettent d'étudier la transformée de Fourier d'un certain opérateur de Sturm-Liouville. Il considère l'espace $H = L_\rho^2\left(0,+\infty\right)$ et l'opérateur

$$T = S + V$$

où S est l'opérateur non perturbé défini par $S\varphi(\tau) = \tau\varphi(\tau), \tau > 0$ de domaine maximal $D(S)$ et la perturbation admet la factorisation $V = A^*B$ où les opértaeurs A, B agissent dans un espace d'Hilbert auxiliaire G tels que

$$A\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)\,\alpha(s)\,\rho(s)\,ds, \qquad B\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)\,\beta(s)\,\rho(s)\,ds \tag{2.7}$$

où $\alpha(s), \beta(s) \in G$ sont certaines fonctions vectorielles, soient $\|.\|$, $\|.\|_H$ les normes dans G, H.

On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites

A_1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{\rho(s)(1+s)} < \infty$;

A_2. Les fonctions $\rho(s), \alpha(s), \beta(s)$ admettent n dérivées continues pour un certain $n \geq 1$;

A_3. $\alpha'(s), \beta'(s), \left(\dfrac{1}{\rho(s)}\right)' = o(1)$, $\alpha(s), \beta(s) = o\left(\dfrac{1}{\ln s}\right)$, $s \to \infty$;

A_4. $\sup\limits_{(0,\infty)} \rho(s)\|\alpha(s)\| < \infty$, $\sup\limits_{(0,\infty)} \rho(s)\|\beta(s)\| < \infty$;

A_5. Pour tout $\varphi \in L^2_\rho$ les intégrales (2.7) convergent dans le sens de la norme de G et définissent les opérateurs bornés de $L^2_\rho \to G$ avec $R(A)$, $R(B)$ denses dans G.

L'auteur a besoin de la fonction $K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*$ où $S_\zeta = (S-\zeta)^{-1}$, cette fonction est connue dans la théorie des opérateurs $T = S + A^*B$

Soit $\Omega_+(\delta) = \{\zeta : |\zeta| \leqslant \delta, Im\zeta > 0, |\zeta - \sigma| < \delta\}$ et $F_+(\sigma) = \lim\limits_{\tau \searrow 0} F(\sigma + i\tau)$ pour une fonction analytique $F(s)$ dans $\Omega_+(\delta)$.

$$F(\zeta) = \int_a^b \frac{f(s)}{s-\zeta} ds, f \in C^1[a,b], \zeta \notin [a,b].$$

Lemme 2.1 *Soient $f(s), f'(s), s > 0$ sont des fonctions différentiables et* $\dfrac{F(s)}{1+s} \in$

$L^1(0,\infty), f(s) = o\left(\frac{1}{\ln s}\right), f'(s) = o(1), s \longrightarrow \infty$. *Alors la fonction*

$$F(\zeta) = \int_0^\infty \frac{f(s)}{s-\zeta} ds$$

a la limite $\lim\limits_{|\zeta| \longrightarrow \infty} F(\zeta) = 0$ *uniformément lorsque* $\arg \zeta \in [a,b]$.

Considérons de nouveau, $S_\zeta = (S-\zeta)^{-1}, \zeta \notin [0,\infty)$ et $K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*$. Il est évident que $A^*c(s) = (c, \alpha(s))$, où $(.,.)$ est le produit scalaire dans G. Alors

$$(K(\zeta)c, d) = (c,d) + \int_0^\infty \frac{(c,\alpha(s))\,(\beta(s),d)}{s-\zeta} \rho(s) ds, \qquad \zeta \notin [0,\infty)$$

Nous posons $c \in D(K_\pm(\sigma))$ si la fonctionnelle $d \longrightarrow (K(\sigma)c,d)_\pm$ est bornée dans G et nous définissons $K_\pm(\sigma) : G \longrightarrow G$ par la relation

$$(K_\pm(\sigma)c, d) = (K(\sigma)c, d)_\pm \, , c, d \in G.$$

1. $\lim\limits_{\zeta \longrightarrow \sigma \pm i0} \|K(\zeta) - K_\pm(\sigma)\| = 0$ *et les opérateurs* $K(\zeta) - 1, \zeta \notin [0,\infty)$ *et* $K_\pm(\sigma) - 1, \sigma > 0$, *sont complètement continus.*
2. $\lim\limits_{\zeta \longrightarrow \infty} \|K(\zeta) - 1\| = 0$ *uniformément pour* $\arg \zeta \in [0, 2\pi]$.

L'auteur passe à l'étude du modèle de Friedrichs de l'opérateur maximal, il introduit une notion abstraite de l'opérateur maximal.

Définition 2.1 *L'opérateur $\tilde{S}$ est appelé maximal correspondant à l'opérateur S si*

$$D(\tilde{S}) = \left\{ \varphi \in H : \exists c = c(\varphi) : \int_0^\infty |\tau\varphi(\tau) + c(\varphi)|^2 \rho(\tau) d\tau < \infty \right\}$$

et

$$\tilde{S}\varphi(\tau) = \tau\varphi(\tau) + c(\varphi)$$

evidemment, pour $\varphi \in D(\tilde{S})$ *le nombre* $c(\varphi)$ *est unique et en plus,* $\varphi \in D(S) \Leftrightarrow c(\varphi) = 0$.

En 1962, J. lehner [49] a étudié l'opérateur de transport neutronique proposé par K. O. Friedrichs. Cet opérateur est défini comme suit

$$L = L_0 + iV = -i\ \mu\frac{\partial}{\partial x} + i\ c(x)\int_{-1}^{1} .d\mu \tag{2.8}$$

où $c(x)$ est une fonction proportionnelle à la fonction indicatrice d'un certain intervalle. Il a démontré que le spectre continu coincide avec l'axe réel et l'ensemble des valeurs propres est fini.

En 1999, Stepin [57] a repris ce modèle dans l'espace $H = L^2(\mathbb{R},]-1;1[)$ avec le domaine

$$\{\psi \in H : \psi\,(.,\mu)\ \text{est absolument continu presque pour tout}\ \mu \in [-1,1]\ \}$$

où $L_0 = i\mu\partial/\partial x$, $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ *et* $c(x) \geq 0$ *pp* $x \in \mathbb{R}$. il a démontré les résultats suivants

Théorème 2.2 *Si* $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *et* $c(x) \geq 0$ *presque partout pour* $x \in \mathbb{R}$ *alors* $\sigma(L) = \sigma_c(L) \cup \sigma_p(L)$, *où* $\sigma_c(L) = \mathbb{R}$ *et* $\sigma_p(L) \subset i\mathbb{R}_+$. $V \geq 0$; *on a* $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_- = \phi$. *Pour* $\lambda \in \mathbb{C}_+\backslash\sigma(L)$; *on a l'égalité suivante (voir [49], [45])*

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) - iR_0\sqrt{V}\,(I + Q(\lambda))^{-1}\sqrt{V}R_0(\lambda) \tag{2.9}$$

Où $R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$; $R_0(\lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1}$; *et* $Q(\lambda)$ *est l'opérateur intégral dans* $L^2(\mathbb{R})$ *de noyau*

$$q(x,y;\lambda) := \frac{1}{2}\sqrt{c(x)}\,\mathrm{Ei}(i\lambda\,|x-y|)\sqrt{c(y)}$$

et $Ei(z)$ est une fonction intégrale exponentielle

$$Ei(z) = -\int \frac{e^{zt}}{t} dt, \qquad \operatorname{Re} z < 0$$

Si les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites, alors $Q(\lambda)$ est une fonction opératorielle holomorphe sur $\mathbb{C}_+$ et $Q^2(\lambda) \in \vartheta_\infty$; où ϑ_∞est la classe des opérateurs compacts. D'après l'alternative de Fredholm, la fonction opératorielle $(I+Q(\lambda))^{-1}$est méromorphique sur $\mathbb{C}_+$, et ses résidus aux pôles sont des opérateurs de rang fini ; et comme $R(\lambda)$ est donné par (2.9) alors on a le même résultat et de plus $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_+$ est formé de valeurs propres isolées de multiplicité finie. Pour toute fonction arbitraire $0 \leq c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ on a $\mathbb{R} \subset \sigma_c(L)$ et $\sigma_p(L) \subset i\mathbb{R}_+$. Ensuite, ils introduisent la classe des fonctions $c(x) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ qui contienent des fonctions non à support compact pour $N(c) < \infty$.

Où $N(c)$ est la dimension du sous espace propre (*voir* [45])

$$N(c) \leq 1 + \frac{1}{4} \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} c(x)(\ln|x-y|)^2 c(y) dx dy \tag{2.10}$$

Théorème 2.3 *Soit $c(x) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$; avec $c(x) \geq 0$ presque partout pour tout $x \in \mathbb{R}$; et de plus soit $\sqrt{c(x)}\,(\ln|x-y|)\,\sqrt{c(y)} \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Si*

$$\varkappa := \limsup_{t\to\infty} (\ln t)^2 \int\limits_{|x|>t} c(x) dx < \infty$$

alors le spectre ponctuel $\sigma_p(L)$ est fini et l'estimation de $N(c)$ est donnée par

$$N(c) \leq 1 + \left\{ \left(\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} c(x)(\ln|x-y|)^2 c(y) dx dy \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\varkappa \int c(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \tag{2.11}$$

On introduit maintenant une famille paramétrée des opérateurs $L(k) = L_0 + ikV$;

$k \in \mathbb{R}_+$; où la fonction $c(x)$ satisfait les conditions du théorème précédent ; on note que $N(kc)$ est croissante par rapport à k : On pose $\gamma \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\gamma = \{c(x) \geq 0 : N(kc) > N(c) \text{ pour } k > 1\}$$

Si $c(x)$ est positive dans un ensemble de mesure positive alors pour $k > 0$ suffisamment petit, l'opérateur $L(k)$ admet une seule valeur propre. Si k croit, $N(ck)$ augmente seulement pour k tel que $kc(x) \in \gamma$.

Dans le théorème précédent la condition $c(x) \notin \gamma$ est nécessaire et suffisante pour l'absence des singularities spectrales de l'opérateur $L = L_0 + iV$.

En 2005, F. Diaba et E. V. Cheremnikh [15] ont considéré dans l'espace $L^2(D)$ où $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$, l'opérateur

$$(Lf)(x,\mu) = i\mu f_x(x,\mu) + c_0(x) \int_{-1}^{1} f(x,\mu)d\mu, \quad x \in \mathbb{R},\ \mu \in (-1,1) \tag{2.12}$$

où le potentiel $c_0(x)$ vérifie la condition

$$|c_0(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|},\ \varepsilon > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Ils ont étudié le spectre de cet opérateur, pour cela ils ont commencé par transformer l'opérateur initial pour obtenir le modèle de Friedrichs. En appliquant la transformation de Fourier

$$(Ff)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t)dt, t \in \mathbb{R}.$$

Ils obtienent

$$(FLf)(x) = \tau\mu u(\tau,\mu) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} c_0(x) \int_{-1}^{1} f(t,\mu)e^{-ix\tau}dxd\mu$$

3 Notations

Soit l'espace H défini par

$$H = \left\{ \varphi(s,\mu) : \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^{1} |\varphi(s,\mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu < \infty \right\}$$

L'opérateur $Z : L^2(\mathbb{R}) \to H$, son adjoint

$$(Zc)(s,\mu) = c\left(\frac{s}{\mu}\right), c \in L^2(\mathbb{R}), (Z^*\varphi) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\tau\mu,\mu) d\mu$$

Et le changement de variables

$$(s,\mu) \to (\tau,\mu) \quad \left\{ \begin{array}{c} \tau = \frac{s}{\mu}, \mu \neq 0 \\ \mu = \mu \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{c} s = \tau\mu \\ \mu = \mu \end{array} \right\}$$

Ce changement de variables définit l'opérateur $F_0 : L^2(D) \to H$ par

$$(F \circ u)(s,\mu) = u(\frac{s}{\mu},\mu)$$

Il a été supposé que le potentiel est factorisé de façon que

$$C_0(x) = C_{01}(x)C_{02}(x), \quad |C_{01}(x)| = |C_{02}(x)| = \sqrt{|C_0(x)|}$$

Les opérateurs $C_{01}, C_{02} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ sont des opérateurs de multiplication par les fonctions respectivement $c_{01}(x), c_{02}(x)$

$$(C_{01}\varphi)(x) = c_{01}(x)\varphi(x), (C_{02}\varphi)(x) = c_{02}(x)\varphi(x)$$

Le modèle de Friedrichs sera défini dans l'espace H comme une certaine perturbation de l'opérateur de multiplication par la variable indépendante

$$\begin{aligned} S \quad &: \quad H \to H \\ (S\varphi)(\tau,\mu) \quad &= \quad \tau\varphi(\tau,\mu), \tau \in \mathbb{R}, \mu \in (-1,1) \end{aligned}$$

avec le domaine de définition maximal $D(S)$.

Lemme 3.1 *Soit $L : L^2(D) \to L^2(D)$ l'opérateur de domaine de définition maximal défini par* (2.12)*. Alors*

$$ULU^{-1} = S + V : H \to H$$

où l'opérateur

$$\begin{aligned} (V\varphi)(s,\mu) \quad &= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu'}{|\mu'|}\int_{\mathbb{R}}\tilde{c}_0(x)\left(\frac{s'}{\mu'}-\frac{s}{\mu}\right)\varphi(s',\mu')ds' \\ \tilde{c}_0(y) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}} c_0(x)e^{ixy}dx \end{aligned}$$

est borné dans H et admet la factorisation $V = A^*B$ avec $A, B : H \to L^2(\mathbb{R})$ où

$$A = C_{01}F^{-1}Z^*, B = C_{02}F^{-1}Z^* \tag{2.13}$$

Définition 3.1 *Nous appelons l'opérateur*

$$T = S + V, V = A^*B \tag{2.14}$$

modèle de Friedrichs dans l'espace H.

Corollaire 3.1 *On obtient*

$$L = U^{-1}TU$$

l'opérateur $L : L^2(D) \to L^2(D)$ (voir (2.12)*) est unitairement équiavalent au modèle de Friedrichs* (2.14)*.*

4 Etude de la résolvante dans le cas $\zeta \to \infty$

L'étude du spectre de l'opérateur L se réduit à celle de l'opérateur T sera donnée directement à partir de la résolvante

$$T_\zeta \psi = (T - \zeta)^{-1} \psi = \varphi = S_\zeta \psi - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta \psi$$

Par conséquent, les propriètés de la résolvante dépendent de celles de l'opérateur

$$K(\zeta) - 1 = B S_\zeta A^* = C_{02} F^{-1} Z^* S_\zeta F C_{01}^*$$

Les prolongements analytiques de $K(\zeta)$ de part et d'autre de l'axe réel seront notés $K_\pm(\zeta)$ et leurs noyaux respectivement par $k_\pm(x, y, \zeta)$.

Lemme 4.1 1. *L'opérateur $K(\zeta) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \zeta \notin \mathbb{R}$ est complètement continu et*

$$\|K(\zeta) - 1\| \to 0, r \to \infty$$

uniformément dans le domaine $|\zeta| > r, |\operatorname{Im} \zeta| > \nu_0$ pour chaque $\nu_0 > 0$.

2. *L'opérateur $K(\zeta) - 1$ admet un prologement analytique au-dessus des demi-axes $(-\infty, 0), (0, \infty)$ et*

$$\|K_\pm(\zeta) - 1\| \to 0, |\zeta| \to \infty,$$

uniformément dans le domaine $|\operatorname{Im} \zeta| < \varepsilon_1$ pour chaque $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$

5 Etude de la résolvante dans le cas $\zeta \to 0$

On va obtenir la limite principale du comportement asymptotiques du noyau de l'opérateur $K(\zeta) - 1$ si $\zeta \to 0$ et étudier l'opérateur inverse $K^{-1}(\zeta)$ avec la condition supplémentaire sur le potentiel $c_0(x)$ (voir (2.12)).

Ce noyau est donné par

$$
\begin{aligned}
k(x,y,\zeta) &= \frac{1}{2\pi} C_{02}(y)\overline{C_{01}(y)} I(u,\zeta), u = y - x \\
I(u,\zeta) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-\tau}^{\tau} \frac{dt}{t-\zeta} \right) \frac{e^{i\tau u}}{\tau} d\tau
\end{aligned}
$$

Soit $\delta > 0$ une valeur arbitraire et

$$
\Omega_- = \{\zeta : |\zeta| \leq \delta, \operatorname{Im} \zeta \leq 0, \zeta \neq 0\}
$$

(respectivement Ω_+ pour $\operatorname{Im} \zeta \geq 0$).

Lemme 5.1 *Soit $p > 0$ et $\zeta = \sigma + i\nu \in \Omega_\pm$, alors il existe la constante $C > 0$ telle que*

$$
I(u,\zeta) = \gamma(\zeta) + I_0(u,\zeta) \quad (I_0 \text{ est bornée par rapport à } \zeta)
$$

où

$$
\gamma(\zeta) = -\pi i sign\nu \ln \zeta
$$

et

$$
I_0(u,\zeta) \leq C \left(\frac{1}{|u|^{\frac{1}{p}}} + |u| \right), \zeta \in \Omega_\pm, |u| \in (0,\infty)
$$

Lemme 5.2 *Soient les domaines $\Omega_\pm$ donnés avec le rayon ε, alors il existe $C_0(\varepsilon)$ tel que*

$$
\begin{aligned}
K(\zeta) - 1 &= \gamma(\zeta)(., C_{01})_{L^2(\mathbb{R})} C_{02} + Q(\zeta), \\
\gamma(\zeta) &= -\pi i sign\nu \ln \zeta, \quad \zeta = \sigma + i\nu \in \Omega_\pm
\end{aligned}
$$

où l'opérateur $Q(\zeta) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ admet l'estimation

$$
Q(\zeta) \leq C_0(\varepsilon) \left\| C_0 \right\|_\varepsilon, \zeta \in \Omega_\pm
$$

où

$$\|C_0\|_{\varepsilon} = \left(\int_{\mathbb{R}} |C_0(x)|^2 \, e^{2\varepsilon|x|} dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.15}$$

6 Spectre ponctuel de l'opérateur L

A noter que la constante $C_0(\varepsilon)$ dans (2.15) ne dépend pas de l'opérateur L. On introduit la constante $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{3C_0(\varepsilon)}$ laquelle définit le sous ensemble $N \subset L^2(\mathbb{R})$:

$$N = \left\{ h \in L^2(\mathbb{R}) : \|h\|_{\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \left| \int_{\mathbb{R}} h(x)dx \right| \diagup \int_{\mathbb{R}} |h(x)| \, dx \right\} \tag{2.16}$$

Théorème 6.1 *Pour chaque potentiel* $c_0 \in N$ *, il existe* $\delta > 0$ *tel que l'opérateur* T *(voir* (2.14)*) n'a pas de spectre ponctuel dans le domaine* $0 < |\zeta| < \delta$.

Définition 6.1 *On appelle la singularité spectrale de l'opérateur* T *un pôle généralisé* $\sigma_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ *des fonctions* $\sigma \to (T_\sigma \varphi, \psi)_{\pm}$ *, où* $(T_\sigma \varphi, \psi)_{\pm} = \lim\limits_{\varepsilon \to \pm 0} (T_{\sigma + i\varepsilon} \varphi, \psi)_H$ *,* $T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$ *et les fonctions* φ, ψ *sont indéfiniment dérivables sur* $\mathbb{R}$.

Nous n'étudions pas $\zeta = 0$ comme point du spectre.

Lemme 6.1 *La valeur propre* $\zeta_0, \operatorname{Im} \zeta_0 \neq 0$ *et la singularité spectrale* $\sigma_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ *de l'opérateur sont respectivement pôles de la fonction opératorielle* $K(\zeta)^{-1}$*,* $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ *et son prolongement analytique* $K_+(\sigma)^{-1}$ *ou* $K_-(\sigma)^{-1}, \sigma \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Théorème 6.2 *Le spectre ponctuel de l'opérateur* L *est fini pour tout potentiel* $c_0(t)$ *exponentiellement décroissant de l'ensemble* $N \subset L^2(0, \infty)$ *(voir* (2.16)).

Comme suite de l'article précédent, en 2010, Diaba F. et Cheremnikh E.V., Ivasyk G. V.[11] ont étudié les opérateurs d'évolution. Ils ont considéré dans l'espace $L^2(D), D = \mathbb{R} \times [-1,1]$ l'opérateur de transport

$$Lf = -i\mu \frac{\partial f}{\partial x} + a(x)b_1(\mu) \int_{-1}^{1} b(\mu')f(x,\mu')d\mu'. \tag{2.17}$$

avec le domaine de définition maximal $D(L)$ sous les conditions suivantes : Il existe des constantes $M > 0$, $\epsilon > 0$ telles que

$$|a(x)| < Me^{-\epsilon|x|}, x \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

et les fonctions $b(\mu), b_1(\mu)$ admettent un prolongement analytique de l'intervalle $(-1,1)$ dans le cercle $|z| < 1+\epsilon$. Notons que $b_1(\mu) \equiv 1$ et $b_0(\mu) \equiv b(\mu) \equiv 1$.

Ils ont étudié l'équation d'évolution de transport suivante

$$\begin{cases} \dot{u} = iLu, t > 0 \\ u\mid_{t=0} = u(0), u(0) \in D(L) \end{cases} \tag{2.19}$$

et ils ont obtenu le terme principal du comportement asymptotique des solutions de ces équations correspondant aux valeurs propres de l'opérateur L. Ils supposent que l'opérateur L n'a pas des singularités spectrales.

6.1 Modèle de Friedrichs de l'opérateur de transport

On transforme l'opérateur L en modèle de Friedrichs.

Soit H l'espace de Hilbert des fonctions $\varphi(s,\mu)$, $(s,\mu) \in D$, $D = \mathbb{R} \times [-1,1]$ avec la norme

$$\|\varphi\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |\varphi(s,\mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu.$$

Soit l'opérateur $F_0 : L^2(D) \to H$, où

$$(F_0u)(\tau,\mu) = u\left(\frac{\tau}{\mu},\mu\right), u \in L^2(D), \tau \in \mathbb{R} \tag{2.20}$$

et l'opérateur $Z : L^2(\mathbb{R}) \to H$, où

$$(Zc)(\tau,\mu) = c\left(\frac{\tau}{\mu}\right), c \in L^2(\mathbb{R}). \tag{2.21}$$

On peut vérifier que

$$\|F_0u\|_H = \|u\|_{L^2(D)},$$

que F_0 est un opérateur unitaire et que l'opérateur Z est borné, à savoir $\|z\| \leq \sqrt{2}$. La transformation de Fourier est notée par

$$(Ff)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-is\tau} f(\tau)d\tau, s \in \mathbb{R}$$

dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et dans l'espace $L^2(D)$ aussi.

Maintenant, on applique à l'égalité (2.17) la transformation de Fourier par rapport à la variable x, alors

$$(FLf)(\tau,\mu) = \tau\mu u(\tau,\mu) + \frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-1}^{1} a(x)b(\mu')f(x,\mu')d\mu'\right) e^{-ix\frac{s}{\mu}}dx,$$

où $u = Ff$.

Ensuite, on applique l'opérateur F_0 (voir (2.20)), c'est-à-dire la substitution $\tau = \frac{s}{\mu}$ alors

$$(F_0FLf)(s,\mu) = su(\frac{s}{\mu},\mu) + \frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-1}^{1} a(x)b(\mu')f(x,\mu')d\mu'\right) e^{-ix\frac{s}{\mu}}dx$$

Notons par $\varphi(s,\mu) = u\left(\frac{s}{\mu},\mu\right)$ ou $\varphi = F_0 u = F_0 F f$. Soit $\frac{s}{\mu} = \tau$, alors $u(\tau,\mu) = \varphi(\tau\mu,\mu) = \left(F_0^{-1}\varphi\right)(\tau,\mu)$. C'est pourquoi

$$f(x,\mu) = \left(F^{-1}F_0^{-1}\varphi\right)(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\left(\tau\mu,\mu\right) e^{i\tau x} d\tau.$$

Le changement de variable $s' = \mu\tau$ (les cas $\mu > 0$ et $\mu < 0$) donne

$$f(x,\mu') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\left(s', \mu^{\prime i \frac{s'}{\mu'}}\right)\frac{ds'}{|\mu'|}$$

Finallement, on obtient

$$\left(F_0 F L F^{-1} F_0^{-1}\varphi\right)(s,\mu) = s\varphi\left(s,\mu\right) + V\varphi(s,\mu), \tag{2.22}$$

où

$$V\varphi(s,\mu) = \frac{b_1(\mu)}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1} a(x)b(\mu')\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\left(s', \mu^{\prime i \frac{s'}{\mu'}}\right)\right)\frac{d\mu'}{|\mu'|} e^{-ix\frac{s}{\mu}} dx \tag{2.23}$$

On choisit une certaine factorisation pour la fonction $a(x)$ telle que

$$a(x) = \overline{a_1(x)} a_2(x), |a_1(x)| = |a_2(x)| \tag{2.24}$$

Soit $G = L^2(\mathbb{R})$ alors $V = A^* B$ (voir (2.23)), où les opérateurs $A, B : H \to G$

sont donnés par les expressions

$$\begin{cases} A^*c(s,\mu) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} b_1(\mu) \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \overline{a_1(x)} c(x) e^{-ix\frac{s}{\mu}} dx \\ B\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} a_2(x) \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} b(\mu')\varphi\left(s', \mu^{\prime i\frac{s'}{\mu'}}\right) \dfrac{d\mu'}{|\mu'|} ds' \end{cases} \tag{2.25}$$

Evidemment, l'opérateur $U = F_0 F : L^2(D) \to H$ (voir (2.20)) est unitaire. Alors, le théorème suivant est prouvé.

Théorème 6.3 *Soit $L : L^2(D) \to L^2(D)$ l'opérateur avec domaine de définition maximal donné par l'expression* (2.17). *Alors*

$$ULU^{-1} = T : H \to H$$

où

$$T = S + V, V = A^*B$$

$(S\varphi)(\tau,\mu) \equiv \tau\varphi(\tau,\mu), \tau \in \mathbb{R}, \mu \in (-1,1)$ *et les opérateurs A, B sont définis de H vers $G = L^2(\mathbb{R})$. (voir* (2.25)) .

Lemme 6.2 *Les opérateurs $A, B : H \to G$, à savoir*

$$\begin{cases} A\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} a_1(x) \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} b_1(\mu)\varphi(s,\mu)\, e^{ix\frac{s}{\mu}} \dfrac{d\mu}{|\mu|} ds \\ B\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} a_2(x) \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} b(\mu)\varphi(s',\mu)\, e^{ix\frac{s}{\mu}} \dfrac{d\mu}{|\mu|} ds \end{cases} \tag{2.26}$$

sont bornés.

Proposition 6.1 *Si $a(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$ et $b_1(\mu) = b(\mu), \mu \in (-1,1)$, alors le modèle de Friedrichs $T = S + V$ est un opérateur auto-adjoint $T^* = T$.*

6.2 Spectre de modèle de Friedrichs

On considère la résolvante de l'opérateur

$$T = S + A^*B$$

L'équation

$$(T - \zeta)\,\varphi = \psi, \psi \in H, \zeta \notin \mathbb{R},$$

prend la forme

$$(S - \zeta)\,\varphi + A^*B\varphi = \psi.$$

Notons

$$S_\zeta = (S - \zeta)^{-1}, T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}.$$

Comme $\zeta \notin \mathbb{R}$, alors l'opérateur S_ζ existe et est borné et l'équation prend la forme

$$\varphi + S_\zeta A^*B\varphi = S_\zeta\psi \tag{2.27}$$

En appliquant l'opérateur B, on obtient $(1 + BS_\zeta A^*)\,B\varphi = BS_\zeta\psi$. Soit

$$K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*, \zeta \notin \mathbb{R} \tag{2.28}$$

Alors pour l'expression $B\varphi$ dans (2.27) , on obtient

$$B\varphi = K^{-1}(\zeta)BS_\zeta\psi.$$

En prenant en considération la bornitude des opérateurs A et B, on a la proposition suivante.

Proposition 6.2 *Si l'opérateur $K(\zeta)$, $\zeta \notin \mathbb{R}$ a un opérateur inverse borné $K(\zeta)^{-1}$, alors la valeur ζ appartient à l'ensemble résolvant de l'operateur T et*

$$T_\zeta = S_\zeta - S_\zeta A^*K(\zeta)^{-1}BS_\zeta \tag{2.29}$$

Lemme 6.3 *L'opérateur $K(\zeta)$ (voir (2.28)) admet la représentation*

$$((K(\zeta)-1)\,c)\,(x)=\int_{\mathbb{R}}k(x,y,\zeta)c(y)dy, \zeta\notin\mathbb{R}, \tag{2.30}$$

où

$$k(x,y,\zeta)=\frac{1}{2}a_2(x)\overline{a_1(y)}I(x-y,\zeta)$$

et

$$I(u,\zeta)=\int_{\mathbb{R}}l(\tau,\zeta)e^{iu\tau}d\tau, l(\tau,\zeta)=\int_{-1}^{1}\frac{b(\mu')b_1(\mu')}{\tau\mu'-\zeta}d\mu' \tag{2.31}$$

Théorème 6.4 *L'opérateur $K(\zeta)-1: L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R}), \zeta\notin\mathbb{R}$ est compact et*

$$\|K(\zeta)-1\|\to 0, |\zeta|\to\infty$$

uniformément dans le domaine $|\operatorname{Im}\zeta|>0$ pour chaque $\nu>0$.

Théorème 6.5 *L'opérateur $K(\zeta)-1$ admet un prolongement analytique l'opérateur $K_{\pm}(\zeta)-1$ au-dessus des demi-axes $(-\infty,0)$ et $(0,\infty)$ et*

$$\|K_{\pm}(\zeta)-1\|\to 0, |\zeta|\to\infty$$

uniformément dans le domaine $|\operatorname{Im}\zeta|<\epsilon$ pour chaque $\epsilon_1<\frac{\epsilon}{2}$.

7 Construction du semi-groupe $\exp(itT)$

Il est connu que le problème de Cauchy $\dot u=Mu$, $u\,|_{t=0}=u(0)$, où l'opérateur M est tel que le demi plan $\operatorname{Re}\zeta>\gamma>0$ appartient à son ensemble résolvant, admet sous une certaine condition près la représentation de la solution

$$u(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{\zeta t}R(\zeta,M)u(0)d\zeta,\quad R(\zeta,M)=(M-\zeta)^{-1}$$

Considérons le problème

$$\begin{cases} \dot{u} = iTu, t > 0 \\ u\mid_{t=0} = u(0), u(0) \in D(T) \end{cases} \tag{2.32}$$

Notons $\zeta = \gamma + i\theta, -\infty < \theta < \infty$, alors $(iT - \zeta)^{-1} = -iT_{\theta - i\gamma}$.

Au lieu de cela, une vérification difficile d"une certaine condition suffisante sur l'opérateur T, on propose directement de choisir la solution sous la forme

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\gamma+i\theta)t} T_{\theta-i\gamma} u(0) d\theta \tag{2.33}$$

Notons par

$$h(t,\theta) = e^{(\gamma+i\theta)t}$$

et l'élément $u(0) = \varphi(\tau,\mu) \in H$ simplement par $u(0) = \varphi$. Alors, on doit prouver que l'opérateur

$$U(t)\varphi = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\theta) T_{\theta-i\gamma} d\theta, t > 0 \tag{2.34}$$

définit le semi-groupe correspondant au problème (2.32).

Théorème 7.1 *Si $\varphi \in D(T)$ alors l'intégrale (2.34) admet la représentation*

$$U(t)\varphi = \varphi - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t,\theta)}{\theta - i\gamma} T_{\theta-i\gamma} T\varphi d\theta, t > 0 \tag{2.35}$$

où l'intégrale converge au sens de la norme de H.

Lemme 7.1 *Si $\varphi \in D(T)$ alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t,\theta)}{\theta - i\gamma} T_{\theta-i\gamma} T\varphi d\theta = T\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t,\theta)}{\theta - i\gamma} T_{\theta-i\gamma}\varphi d\theta \tag{2.36}$$

Lemme 7.2 *Si* $\varphi \in H$, *alors*

$$s - \lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta - i\gamma} \frac{\Delta h}{\Delta t} T_{\theta - i\gamma} \varphi d\theta = i \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \theta) T_{\theta - i\gamma} d\theta \tag{2.37}$$

Théorème 7.2 *Let* $\varphi \in D(T)$, *alors*

$$U'(t)\varphi = iTU(t)\varphi, t > 0, \tag{2.38}$$

où $U'(t)$ *signifie la dérivée forte.*

Théorème 7.3 *Soit* $\varphi \in D(T)$, *alors*

$$\lim_{t \to 0} \|U(t)\varphi - \varphi\| = 0 \tag{2.39}$$

Théorème 7.4 *Le problème*

$$\begin{cases} \dot{u} = iTu, t > 0 \\ u \mid_{t=0} = \varphi, \quad \varphi \in D(T) \end{cases}$$

a une solution unique $u(t) = U(t)\varphi$ *, donnée par le semi-groupe*

$$U(t)\varphi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\gamma + i\theta)t} T_{\theta - i\gamma} \varphi d\theta$$

En 2014, F. Diaba, A. Zemmouri, E. V. Cheremnikh [17] ont étudié l'opérateur de Sturm-Liouville perturbé par un opérateur intégral, défini par l'expression :

$$Ly = -y'' + q(x)y(x - \Delta), -\infty < x < \infty, x \in (-\infty, \infty)$$

Où $q(x)$ est une fonction à valeur complexe qui satisfait la condition

$$|q(x)| \leq C \exp(-\varepsilon |x|), \varepsilon > 0, C = const, x \in (-\infty, \infty)$$

Ils ont trouvé la décomposition spectrale de l'opérateur perturbé sur l'axe tout entier en utilisant le modèle de Friedrichs.

Le résultat essentiel établit l'existence du spectre ponctuel de l'opérateur de Sturm-Liouville et qui est fini. Ce résultat est donné par :

Lemme 7.3 *le point unique $\zeta = 0$ peut être le point d'accumulation du spectre continu de l'opérateur L.*

Théorème 7.5 *Supposons que les conditions*

1− *s'il existe $N > 0$ tel que*

$$\operatorname{supp} q(x) \subset [-N, N] \tag{2.40}$$

2−

$$C(N) \|\sqrt{q}\|^2 < 1 \tag{2.41}$$

sont vérifiées où

$$C(N) = \frac{1}{2} \sup_{|s|,|t|<N} \left| \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \left[\exp\left(i|s - t - \Delta|\sqrt{\zeta} \right) - 1 \right] \right|, \quad |\sqrt{\zeta}| < a \quad \textit{est finie}$$

Et

$$\left((1 + Q(0))^{-1} \overline{q}_1, q_2 \right) \neq 0 \tag{2.42}$$

où l'opérateur $Q(0)$ *est donné par*

$$Q(0)c(s) = -\frac{1}{2}q_1(s)\int_{-\infty}^{\infty} c(t)q_2(t)|s-t-\Delta|dt$$

Alors il existe a_1 *tel que le cercle* $|\zeta| < a_1$ *ne contient pas un point du spectre continu de l'opérateur* L.

Théorème 7.6 *D'après les conditions* (2.40), (2.41) *et* (2.50), *l'opérateur* L *a un spectre ponctuel fini.*

8 Quelques propriétés spectrales du modèle de Friedrichs

En 2005, A. V. Kiselev [41] a donné quelques propriétés spectrales du modèle de Friedrichs dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$

$$(Lu)(x) = xu(x) + (u,\varphi)\psi(x) \tag{2.43}$$

Dans les travaux ([38]; [39]; [40]; [51]; [52]; [60]) , des résultats sur les conditions suffisantes de similarité de l'opérateur L à un opérateur auto-adjoint sont donnés par

Un opérateur L est similaire à un opérateur auto-adjoint si est seulement si il existe une constante c telle que :

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon>0}\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|(L-k-i\varepsilon)^{-1}u\right\|^2 dk &\le c\|u\|^2 \\ \sup_{\varepsilon>0}\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|(L^*-k-i\varepsilon)^{-1}u\right\|^2 dk &\le c\|u\|^2 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Le résultat le plus important dans les problèmes de similarité et la structure du spectre sont donnés par la condition (LRG)

$$\left\|(L-\lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{c}{|\operatorname{Im}\lambda|}, \qquad \operatorname{Im}\lambda \neq 0 \tag{2.45}$$

L'implication de la condition (2.45) sur les problèmes de similarités a été étudiée dans [53].

A. V Kiselev a distingué deux cas dans l'étude des propriétés spectrales de L.

8.1 Le cas des supports disdjoints

On détermine deux fonctions φ et ψ avec des supports disdjoints c'est-à-dire $\overline{\varphi}\psi = 0$ *pp*. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$, et A un opérateur de multiplication défini sur son domaine maximal par $(Au)(x) := xu(x)$. On considère la famille d'opérateurs intégraux bornés T_ε dans H, de noyau

$$n_\varepsilon := \frac{\psi(x)\,\overline{\varphi}(y)}{x-y-i\varepsilon},$$

et l'opérateur T de noyau

$$n := \frac{\psi(x)\,\overline{\varphi}(y)}{x-y}$$

Il est clair que T est borné si est seulement si la norme des opérateurs T_ε est uniformément bornée, dans ce cas $T_\varepsilon \to T$ (D'après le théorème de Banach-Steinhaus); alors l'opérateur L avec $\overline{\varphi}\psi = 0$ *pp*, est similaire à un opérateur auto-adjoint si est seulement si T est borné. De plus, on a la mesure spectrale non orthogonale P de L est donnée par la formule suivante

$$P(\delta) = E(\delta) - (TE(\delta) - E(\delta)T)$$

où δ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E est la mesure spectrale associée à A; alors L est représenté par

$$L = A - TA + AT$$

Proposition 8.1 *On suppose que* $\overline{\varphi}\psi = 0$ *pp alors*

(i) Si l'opérateur T est borné dans $L^2(\mathbb{R})$, alors l'opérateur L est similaire à un opérateur A, c'est-à-dire, $L = X^{-1}AX$, où $X = T + 1$,

(ii) Si l'opérateur T est non borné dans $L^2(\mathbb{R})$, alors il existe une suite d'opérateurs L_n de la forme (2.43), telle que les opérateurs L_n sont similaires à A; $L - L_n$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R})$; et $\|L - L_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$

Soit $L = \operatorname{Re} L + i \operatorname{Im} L$, où $\operatorname{Re} L = (L + L^*)/2$ et $\operatorname{Im} L = (L - L^*)/2i$ sont des opérateurs auto-adjoints.(Pour simplifier et sans perdre de généralité, on pose que L est complètement non auto-adjoint c'est-à-dire que L n'est pas réduit par des parties auto-adjointes). On considère la décomposition polaire de l'opérateur $V = \operatorname{Im} L$ par la forme suivante $V = J\frac{\alpha^2}{2}$, où $J = signV$ et $\alpha = \sqrt{2|V|}$. Soit de plus, $E = clos(Range(\alpha))$ un espace de Hilbert auxiliare et $\chi_{\pm} = (I \pm J)/2$ est le projecteur dans E.

On considère le sous espace $\widetilde{N}_{\pm}$ de H, défini par

$$\widetilde{N}_{\pm} = \left\{u \in H : \chi_{\pm}\alpha (L - \lambda)^{-1} u \in H_2^{\pm}(E)\right\} \tag{2.46}$$

où $H_2^{\pm}(E)$ est la classe de Hardy des fonctions analytiques à valeurs dans E dans le plan complexe supérieur (resp inférieur) voir [43]. Soit $\widetilde{N}_{\varepsilon} = \widetilde{N}_{+} \cap \widetilde{N}_{-}$, l'ensemble $\widetilde{N}_{\varepsilon}$ est appelé l'ensemble des vecteurs lisses associés à l'opérateur L voir [50]. On définit le sous espace absolument continu N_{ε} de l'opérateur L par $N_{\varepsilon} = clos\left(\widetilde{N}_{\varepsilon}\right)$, où $clos$ est la fermeture de $\widetilde{N}_{\varepsilon}$ dans H. De plus, on définit le sous espace singulier N_i de L par suite $N_i = H \ominus N_{\varepsilon}^*$, où N_{ε}^* est le sous espace absolument continu de l'opérateur adjoint L^*. Soit $N_i^0 = H \ominus \left(N_+^* \wedge N_-^*\right)$, où

$$\widetilde{N}_{\pm}^* = \left\{u \in H : \chi_{\pm}\alpha (L^* - \lambda)^{-1} u \in H_2^{\pm}(E)\right\}$$

dans le cas où $\overline{\varphi(x)}\psi(x) \geq 0$, il est clair que $N_i^0 = N_i$ [60].

Proposition 8.2 *Supposons que $\overline{\varphi}\psi = 0$ c'est-à-dire l'opérateur T est borné dans $L^2(\mathbb{R})$ alors* *(i)* $N_\varepsilon = L^2(\mathbb{R})$ *et on peut choisir le sous espace dense* $\widetilde{N}_\varepsilon$ *comme suit*

$$\widetilde{N}_\varepsilon = (T+1)\, L^\infty(\mathbb{R}).$$

(ii) $N_\varepsilon^* = L^2(\mathbb{R})$ *et on peut choisir le sous espace dense* $\widetilde{N}_\varepsilon^*$ *comme suit*

$$\widetilde{N}_\varepsilon^* = (1-T^*)\, L^\infty(\mathbb{R}).$$

Proposition 8.3 *Si* $\overline{\varphi}\psi = 0$ *alors les deux inégalités de* (2.44) *sont équivalentes.*

8.2 Le cas $\overline{\varphi}\psi \geq 0$

On considère $\overline{\varphi}\psi \geq 0$ dans l'axe réel, alors le déterminant de perturbation $D(\lambda)$ est une fonction de Nevanlinna [41].

Théorème 8.1 *Soit* $\overline{\varphi(x)}\psi(x) \geq 0$ *pp* $x \in \mathbb{R}$. *Alors*

(i) Si $u \in N_i^0$ *et* $\operatorname{supp} u \neq \mathbb{R}$, *alors* u *est une solution de l'équation intégrale singulière dans* $L^2(\mathbb{R})$

$$u(k)\,\overline{\varphi(k)} = \frac{\overline{\varphi(x)}\psi(x)}{1 + V.P\int \frac{\overline{\varphi(t)}\psi(t)}{t-k}dt} V.P\int \frac{u(t)\,\overline{\varphi(t)}}{t-k} \tag{2.47}$$

(ii) Si $u \in L^2(\mathbb{R})$ *est une solution de* (2.47) *alors* $u \in N_i^0$.

Proposition 8.4 *L'ensemble* $\widetilde{N}_\varepsilon$ *est admet la représentation suivante*

$$\widetilde{N}_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^2(\mathbb{R}) : \left\langle \frac{u(x)}{x-\lambda}, \psi(x) \right\rangle + \\ \frac{1}{D(\lambda)} \left\langle \frac{u(t)}{t-\lambda}, \varphi(t) \right\rangle \left[a \pm ib - \left\langle \frac{\psi(x)}{x-\lambda}, \psi(x) \right\rangle \right] \in H_2^{\pm} \end{array} \right\} \tag{2.48}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{c} a = \frac{\operatorname{Re}\langle\varphi,\psi\rangle}{\|\varphi\|^2}; \\ b = \frac{\left(\|\varphi\|^2\|\psi\|^2 - (\operatorname{Re}\langle\varphi,\psi\rangle)^2\right)^{1/2}}{\|\varphi\|^2} \end{array} \right.$$

.

Théorème 8.2 *Soit u le vecteur propre associé à la valeur propre λ_0 de l'opérateur L, et $\overline{\varphi(x)}\psi(x) \geq 0$ pp $x \in \mathbb{R}$. Alors la condition* (2.45) *de la résolvante implique qu'il existe un vecteur propre v associe à la valeur propre λ_0 de l'opérateur L^*.*

8.3 Le cas spécial du spectre riche

On considère que les sous espaces N_i et N_i^* qui sont engendrés par les vecteurs propres des opérateurs L et L^* respectivement.

Soient (A) les hypothèses suivantes

$$\overline{\varphi(x)}\psi(x) \geq 0pp\ x \in \mathbb{R}$$

et $\{u_n\}$ une suite dénombrable des fonctions propres normalisées de l'opérateur L associé à l'ensemble des valeurs propres réelles $\{\lambda_n\}$ et $\{u_n^*\}$ une suite dénombrable des fonctions propres normalisées de l'opérateur L^*. Soient les sous espaces $N_i = N_i^0$ et $N_i^* = N_i^0(L^*)$ coincidant respectivement avec les espaces linéaires de $\{u_n\}$ et $\{u_n^*\}$.

Lemme 8.1 *Soient les fonctions φ, ψ telles que les hypothèses (A) sont satisfaites alors la condition LRG implique*

$$|\langle u_n, u_n^* \rangle| \geq c > 0 \tag{2.49}$$

Lemme 8.2 *Sous les hypothèses (A) et si l'estimation* (2.49) *est satisfaite, alors*

(i) $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une base de Riesz du sous espace N_i.

(ii) l'angle entre le sous espace spectral de N_ε et N_i est positif.

Théorème 8.3 *Si les hypothèses (A) et la condition LRG sont satisfaites alors les angles entre les sous espaces spectraux de N_ε et N_i; N_ε^* et N_i^* sont positifs.*

En 2014, Diaba. F, Zemmouri. A, Cheremnikh E. V, ont étudié le spectre ponctuel et continu de l'opérateur de Sturm-Liouville L en utilusant le modèle de Friedrichs

$$Ly = -y'' + q(x)y(x - \Delta), -\infty < x < \infty, x \in (-\infty, \infty)$$

Où $q(x)$ est une fonction à valeur complexe qui satisfait la condition

$$|q(x)| \leq C \exp(-\varepsilon |x|), \varepsilon > 0, C = const, x \in (-\infty, \infty)$$

Les résultats essentiels sont établis par les théorèmes suivants

Théorème 8.4 *le point unique $\zeta = 0$ peut être le point d'accumulation du spectre continu de l'opérateur L.*

Théorème 8.5 *Supposons que les conditions* (2.40), (2.41) *sont vérifiées et*

$$\left((1 + Q(0))^{-1} \overline{q}_1, q_2\right) \neq 0 \tag{2.50}$$

où l'opérateur $Q(0)$ est donné dans (**??**). *Alors il existe a_1 tel, que le cercle $|\zeta| < a_1$ ne contient pas un point de spectre continu de l'opérateur L.*

Théorème 8.6 *D'après les conditions* (2.40), (2.41) *et* (2.50), *l'opérateur L a un spectre ponctuel fini.*

9 Quelques travaux sur l'opérateur transport

Ici on donne quelques résultats concernant l'opérateur de transport établis par Lehner [49], Lehner et Wing [48], Friedrichs [25], [26] ,Umeda [58] etc....
Le problème de transport des neutrons dans une plaque infinie conduit , lorsque des suppositions simples convenables sont faites, à l'équation opératorielle

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A\psi \tag{2.51}$$

En 1955, Wing et Lehner [48] ont étudié le spectre de l'opérateur A défini comme suit

$$Af = -\mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} f(x, \mu') d\mu' \tag{2.52}$$

où c est une constante qui caractérise les propriétés des neutrons.
Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} \psi(-a, \mu, t) = 0, & \mu > 0, \quad t > 0 \\ \psi(+a, \mu, t) = 0, & \mu < 0, \quad t < 0 \end{cases} \tag{2.53}$$

Dans un espace d'Hilbert H_a sur lui même

$$H_a = \left\{ f(x, \mu) / \ \|f\| = \left[\int_{-1}^{1} \int_{-a}^{+a} |f(x, \mu)|^2 \, dx d\mu \right]^{\frac{1}{2}} < \infty \right\} \tag{2.54}$$

A admet le domaine

$$D(A) = \left\{ f \in H_a / \ Af \in H_a, \ f(\mp a, \mu) = 0, \ \text{pour } \mu \gtrless 0 \right\} \tag{2.55}$$

En particulier, la condition $Af \in H_a$ signifie que f est absolument continue sur $(-a, a)$ pour $\forall \mu \in (-1, 1)$. Il a été démontré que le spectre de A se compose du spectre ponctuel qui est un ensemble fini des nombres positifs, du demi-plan $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ qui est le spectre continu et du spectre résiduel qui est vide .

Ayant pris connaissance de ces résultats en 1954, Friedrichs [25], [26]proposa une nouvelle formulation du problème dans l'objectif de simplifier le spectre et de construire la décomposition spectrale de l'opérateur A. Friedrichs définit le problème comme suit

$$\begin{gathered} \frac{\partial \psi}{\partial t} = B\psi \\ Bf = -\mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{c(x)}{2} \int_{-1}^{1} f(x, \mu') \, d\mu' \end{gathered} \tag{2.56}$$

où $c(x)$ est continu par morceaux et borné dans $(-\infty, +\infty)$; l'opérateur B agit de H_1 dans lui même où

$$H_1 = \left\{ f(x,\mu) / \ \|f\| = \left[\int_{-1}^{1} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,\mu)|^2 \, dx d\mu \right]^{\frac{1}{2}} < \infty \right\} \tag{2.57}$$

et le domaine de B est

$$D(B) = \left\{ \begin{array}{c} f \in H_1 / \ f \text{ est absolument continue pour } x \in (-\infty, +\infty), \\ \forall \mu \in (-1,1), \ Bf \in H_1 \end{array} \right\} \tag{2.58}$$

Au lieu des conditions aux limites, on pose

$$c(x) = \left\{ \begin{array}{c} c, \ \ |x| \leqq a, \\ 0, |x| > a, \end{array} \right. \tag{2.59}$$

et dans ce cas le sens physique ne change pas.
L'opérateur B possède les mêmes spectres ponctuel et résiduel que l'opérateur A. Cependant le spectre continu se trouve maintenant sur l'axe imaginaire. Le résultat est résumé par le théorème suivant.

Théorème 9.1 *Le spectre ponctuel de B est égal au spectre ponctuel de A i.e. $\sigma_p(A) = \sigma_p(B)$, le spectre continu $\sigma_c(B)$ coincide avec l'axe imaginaire et le spectre résiduel $\sigma_r(B)$ est vide.*

L'auteur considère l'ensemble résolvant et pour la suite du travail, il suit les méthodes développées dans [2] .

D'abord, il faut trouver l'expression de l'opérateur résolvant c-à-d résoudre l'équation

$$(\lambda - B) g = f, \quad f \in H_1, \quad \lambda \in \rho(B) \tag{2.60}$$

où $\rho(B)$ est l'ensemble résolvant de B .

Il introduit la densité

$$\xi\left(x\right)=\int\limits_{-1}^{1}g\left(x,\mu'\right)d\mu'$$

et on note que ξ appartient à $L_2(-\infty,+\infty)$ si $g\in D\left(B\right)$.

L'équation (2.60) conduit aux relations formelles

$$g\left(x,\mu\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{\lambda}{\mu}\left(x-x'\right)\right)\left[\frac{c\left(x'\right)}{2}\xi\left(x'\right)+f\left(x,\mu'\right)\right]dx', & \dfrac{\beta}{\mu}>0\\ -\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int\limits_{x}^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda}{\mu}\left(x-x'\right)\right)\left[\frac{c\left(x'\right)}{2}\xi\left(x'\right)+f\left(x,\mu'\right)\right]dx', & \dfrac{\beta}{\mu}<0\end{cases}\tag{2.61}$$

où $\lambda=\beta+i\tau$.

Ensuite, l'auteur obtient et étudie l'équation intégrale pour la fonction $\xi(x)$

$$\xi(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E(\lambda|x-y|)\,c(y)\,\xi(y)\,dy+F_\lambda(x)\tag{2.62}$$

où

$$E(u)=\int\limits_{1}^{\infty}e^{-ut}t^{-1}dt,\qquad \operatorname{Re}u>0\tag{2.63}$$

et $F_\lambda(x)$ est une fonction définie par la fonction $f(x,\mu)$.

En 1984 Umeda [58], a étudie le Scattering et la théorie spectrale de l'opérateur linéaire de Boltzmann

Il considère l'équation linéaire de Boltzmann

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}n\left(x,v,t\right)=-v grad_x n\left(x,v,t\right)+\int k\left(x,v',v\right)n\left(x,v',t\right)dv'\\ \qquad -\sigma_a\left(x,v\right)n\left(x,v,t\right), \qquad \left(x\in R^d,v\in R^d,t\in R\right)\end{cases}\tag{2.64}$$

où la fonction positive $n\left(x,v,t\right)$ représente la densité du neutron au temps t avec la position x et la vitesse v.

Pour la suite, l'auteur introduit

$$\sigma_p(x,v) = \int_{R^d} k(x,v',v)\,dv' \tag{2.65}$$

dans l'espace de Banach $L^1\left(R^{2d}_{x,v}\right)$. En effet, $L^1\left(R^{2d}_{x,v}\right)$ est un espace naturel pour l'opérateur linéaire de Boltzmann.
Comme nous allons voir, sous certaines hypothèses, l'opérateur linéaire de Boltzmann

$$(Bn)(x,v) = v.grad_x n(x,v) - \int k(x,v',v)\,n(x,v')\,dv' + \sigma_a(x,v)\,n(x,v) \tag{2.66}$$

engendre un groupe fortement continu $\left\{e^{-tB}/\ -\infty < t < \infty\right\}$.

Il est connu que l'opérateur dynamique e^{-tB} est conservatif .
D'autre part, l'opérateur $B_0 = v.grad_x$ engendre le groupe fortement continu $\left\{e^{-tB_0}/\ -\infty < t < \infty\right\}$ où l'opérateur dynamique e^{-tB_0} est conservatif.

Les objets essentiels de la théorie du Scattering sont

$$\begin{aligned} w_- &= s - \lim_{t\to-\infty} e^{tB}e^{-tB_0} \\ \widetilde{w}_+ &= s - \lim_{t\to+\infty} e^{tB_0}e^{-tB} \end{aligned} \tag{2.67}$$

et l'opérateur de Scattering $S = \widetilde{w}_+ w_-$.

L'auteur développe les idées de Enss [23]. Les opérateurs de décomposition utilisés pour décrire la décomposition principale Enss sont des opérateurs de multiplication, tandis qu'ils sont des opérateurs pseudo-différentiels dans le cas du potentiel Scattering de la mécanique quantique.

La démonstration de la décomposition principale Enss pour le cas de Boltzmann est plus facile et élémentaire que pour le cas de Schrödinger.

On définit l'opérateur linéaire de collision de Boltzmann B_0 comme la fermeture de l'opérateur défini sur $C_0^\infty\left(R^{2d}_{x,v}\right)$par

$$(B_0 n)(x,v) = (v.grad_x n)(x,v) \tag{2.68}$$

Il est connu que $(-B_0)$ est le générateur d'un groupe fortement continu des isométries conservatives sur $L^1\left(R^{2d}_{x,v}\right)$ et que

$$\left[e^{-tB_0}n\right](x,v) = n(x - tv, v) \tag{2.69}$$

(voir [31], [55], [56]).

Dans l'article en question, l'auteur suppose que la paire (k, σ_a) est régulière, i.e.,

(i) $k(x, v', v)$ est une fonction mesurable non négative sur R^{3d} et $\sigma_a(x,v)$ une fonction mesurable non négative sur R^{2d}

(ii) Pour chaque (x, v'), $k(x, v', .)$ est dans $L^1\left(R^d_v\right)$

(iii) $\sigma_a(x,v)$, $\sigma_p(x,v) = \int k(x, v', v)\, dv'$ sont des fonctions essentiellement bornées sur R^{2d}

(iv) Il existe un ensemble compact D dans R^d_x tel que $k(x, v', v)$ et $\sigma_a(x,v)$ s'annulent si $x \notin D$.

L'opérateur linéaire A de collision est la somme des deux opérateurs

$$\begin{array}{c} (A_1 n)(x,v) = -\int k(x, v', v)\, n(x, v')\, dv' \\ (A_2 n)(x,v) = \sigma_a(x,v)\, n(x,v) \end{array} \tag{2.70}$$

On peut vérifier que A_1 et A_2, et, par conséquent A sont des opérateurs bornés respectivement par rapport aux normes $\|\sigma_p\|_\infty$ et $\|\sigma_a\|_\infty$. Ici $\|.\|_\infty$ signifie la norme dans $L^\infty\left(R^{2d}_{x,v}\right)$.

Ensuite, l'auteur définit l'opérateur linéaire de Boltzmann B par

$$B = B_0 + A \tag{2.71}$$

Pour montrer que $(-B)$ engendre un groupe fortement continu, on a besoin de la proposition suivante.

Proposition 9.1 *Soit $(-T)$ l'opérateur qui engendre une contraction de groupe sur l'espace de Banach X.*

Si A est l'opérateur borné sur X, alors $-(T + A)$ engendre un groupe fortement *continu avec*

$$\left\| e^{-t(T+A)} \right\| \leq e^{|t|\|A\|} \tag{2.72}$$

pour t réel.

(Une estimation plus précise que (2.72) peut être trouvée dans Reed-Simon [55]). Simon [56] montre que e^{-tB} est conservatif pour $t > 0$.

L'existence de W_- et $\widetilde{W}_+$ a éte étudiée par Hejtmanek [31], Simon [56],,Voigt [61]. Dans [31], l'auteur ne va pas examiner l'existence de W_- et $\widetilde{W}_+$.

Avant d'énoncer les principaux théorèmes, on introduit certaines notations . Soit T un opérateur linéaire dans un espace de Banach. Alors $\sigma(T), \sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T)$ représentent respectivement , le spectre, le spectre ponctuel, le spectre continu et le spectre residuel de T. Pour ces définitions, voir Yoshida $([62], p.209)$.

Les théorèmes suivants représentent des résultats de l'article de Umeda [58]

Théorème 9.2 *Soit (k, σ_a) une paire régulière . Supposons que les opérateurs d'ondes inverses $\widetilde{W}_+$ existent . Alors Ran $\left(\widetilde{W}_+\right)$ est un sous espace dense de $L^1\left(R^{2d}_{x,v}\right)$.*

On étudie le spectre de l'opérateur B_0 dans le théorème suivant.

Théorème 9.3 *Le spectre $\sigma(B_0)$ comprend l'axe imaginaire et coïncide avec le spectre restant $\sigma_r(B_0)$.*
D'après le théorème 2.1.4, $\sigma_p(B_0), \sigma_c(B_0)$ sont vides.

Maintenant on passe au spectre de l'opérateur B.

Théorème 9.4 *Soit (k, σ_a) une paire régulière et supposons que $\widetilde{W}_+$ existe. Alors le spectre $\sigma(B)$ est inclu dans la bande*

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}/\ 0 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \|\sigma_p\|_\infty + \|\sigma_a\|_\infty\right\} \tag{2.73}$$

D'ailleurs, le spectre residuel $\sigma_r(B)$ comprend les axes imaginaires.

Dans Umeda [59], une nouvelle méthode est développée pour établir la similarité pour une paire d'opérateurs linéaires dans un espace de Banach ordonné X sur $\mathbb{C}$. Soit une paire (en général non bornée) d'opérateurs linéaires B_1 et $B_2 = B_1 + A$ avec

A un opérateur borné, et que $(-B_1)$ et $(-B_2)$ engendrent ensemble les C_0-groupes bornés sur X. En outre, e^{-tB_1} et $(-A)$ sont conservatifs, et que A est $(-iB_1, I)-$lisse. Alors l'auteur montre que B_2 est similaire à B_1. La similarité de B_2 à B_1 est établie par la construction de l'opérateur d'onde

$$W_+(B_2, B_1) = s - \lim_{t\to\infty} e^{tB_2} e^{-tB_1}$$

et l'opérateur d'onde inverse $W_+(B_1, B_2) = s - \lim_{t\to\infty} e^{tB_1} e^{-tB_2}$.

Il existe quelques références sur la théorie des perturbations lisses : Kato [34] s'est occupé de l'opérateur pertubé de la forme $T(k) = T + kV$ (k est un petit paramètre complexe) dans un espace d'Hilbert et a établi la similarité de $T(k)$ à T.

L'auteur utilise la factorisation de la perturbation V sous la forme D^*C, où C est $T-$lisse et T^*-lisse. A propos, Umeda [59] n'utilise pas cette factorisation.

Cette théorie des perturbations lisses est applicable à l'opérateur linéaire de transport (opérateur de Boltzmann) dans de multiples problèmes de Scattering

$$\begin{aligned}(-Bu)(x,\xi) &= -\xi\nabla_x u(x,\xi) - \sigma(x,\xi)\, u(x,\xi) \\ &\quad + \int_{R^d} k(x,\xi',\xi)\, u(x,\xi')\, d\xi' \quad \left(x\in R^d, \xi \in R^d\right)\end{aligned} \tag{2.74}$$

comme une perturbation de l'opérateur de transport $-B_0 = -\xi\nabla_x$. Ici σ et k désignent respectivement la fréquence de collision et le noyau de Scattering. (Pour plus de détails , on renvoie aux références sur l'opérateur de transport dans de multiples problèmes de Scattering, tels que Kaper-Lekkerkerker-Hejtmanek [45], Reed-Simon [55]). L'auteur suppose que la paire (k, σ) est régulière.

Bien que la théorie de Scattering pour l'opérateur de transport a reçu beaucoup d'attention dans les dernières années, il n'existe pas de résutats connus concernant la similarité des opérateurs de transport . Comme l'indique Umeda [59], il est difficile d'établir la similarité des opérateurs de transport $(-B)$ à l'opérateur de transport $(-B_0)$, car le travail considéré est situé en dehors de l'espace de Banach non-réflexif L^1.

Comme déjà signalé, on travaille dans l'espace complexe de Banach L^1 que l'on munit de la norme usuelle $\|.\|_1$ coïncidant avec la complexification de l'espace de Banach ordonné $\left(L^1_R, L^1_+, \|.\|_1\right)$ L^1_R et L^1_+ désignent respectivement l'espace des fonctions réelles dans L^1 et le cône des fonctions positives dans L^1.

La paire (k, σ) du noyau de Scattering et de la fréquence de la collision est définie pour être admissible si les conditions suivantes sont satisfaites

(i) $k(x, \xi', \xi)$ est une fonction mesurable non négative sur R^{3d} et $\sigma(x, \xi)$ est une fonction mesurable non négative sur R^{2d};

(ii) Pour chaque (x, ξ') , $k(x, \xi', .)$ est dans $L^1\left(R^d_\xi\right)$

(iii) $\sigma(x, \xi)$ et $\sigma_s(x, \xi) = \int k(x, \xi', \xi)\, d\xi'$ sont des fonctions bornées sur R^{2d}.

L'auteur impose les conditions suivantes pour une paire admissible

(A) $\qquad F(\sigma) = ess \sup\limits_{x,\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x - \tau\xi, \xi)\, d\tau < +\infty$

(B) $\qquad F(\sigma_s) < +\infty$

Il définit l'opérateur de transport $(-B_0)$ comme la fermeture de l'opérateur défini sur $C_0^\infty\left(R^{2d}_{x,\xi}\right)$ par

$$(-B_0 u)(x, \xi) = -\xi \nabla_x u(x, \xi) \tag{2.75}$$

Il est bien connu ([55], $p.244$) que $(-B_0)$ est un générateur infinitésimal de C_0 qui est un groupe des isométries conservatives sur $L^1\left(R^{2d}\right)$ et que

$$\left(e^{-tB_0} u\right)(x, \xi) = u(x - t\xi, \xi) \tag{2.76}$$

L'opérateur de pénétration $(-B_1)$ est défini comme la perturbation de l'opérateur de transport $(-B_0)$ par l'opérateur borné

$$(-A_1 u)(x, \xi) = -\sigma(x, \xi)\, u(x, \xi) \qquad u \in L^1\left(R^{2d}\right) \tag{2.77}$$

i.e., $-B_1 = -B_0 - A_1$. Alors on peut voir que e^{-tB_1} est donné par l'expression

$$\left(e^{-tB_1} u\right)(x, \xi) = u(x - t\xi, \xi) \exp\left(-\int_0^t \sigma(x - \tau\xi, \xi)\, d\tau\right) \tag{2.78}$$

pour tout $t \in R$.

Finalement, l'auteur définit l'opérateur de transport $(-B)$ comme la perturbation de l'opérateur de pénétration $(-B_1)$ par l'opérateur borné

$$(-A_2 u)(x,\xi) = \int k(x,\xi',\xi)\, u(x,\xi')\, d\xi', \qquad u \in L^1\left(R^{2d}\right) \tag{2.79}$$

i.e., $-B = -B_1 - A_2$.
Le théorème suivant établit la similarité de l'opérateur de transport $(-B)$ et l'opérateur de transport $(-B_0)$.

Théorème 9.5 *Soit (k,σ) admissible. Supposons que les conditions (A)et (B) soient satisfaites ainsi que*

$$F(\sigma_s)\exp(F(\sigma)) < 1 \tag{2.80}$$

alors les opérateurs d'ondes $W_+(B,B_0)$, $W_+(B_0,B)$ existent et possèdent les propriétés suivantes

(i) $W_+(B,B_0)\,W_+(B_0,B) = W_+(B_0,B)\,W_+(B,B_0) = I$
(ii) $B = W_+(B,B_0)\,B_0 W_+(B,B_0)^{-1}$

Dans Kato [34], les problèmes de transport des neutrons sont considérés .
Dans [12], l'équation de transport décrit l'évolution d'une population de neutrons dans un domaine X de $\mathbb{R}^3$ occupé par un milieu en interaction avec les neutrons . Un neutron est répéré par sa position $x \in X \subset \mathbb{R}^3$, la direction ω de sa vitesse v ($\omega \in S^2$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$) et son énergie cinétique $E = \dfrac{m|v|^2}{2}$ (m est la masse du neutron et v son vecteur vitesse) avec $E \in [\alpha,\beta]$. On pose $\Omega_E = X \times S^2 \times [\alpha,\beta]$.
Les fonctions $\sum_t$ et $\sum_s$ sont ici supposées données positives et bornées.
L'interaction entre les neutrons et les noyaux atomiques du milieu, est décrite par deux fonctions notées $\sum_t(x,E)$ et $\sum_s(x,\omega' \to \omega, E' \to E)$ appelées respectivement section efficace totale et section efficace différentielle de diffusion.
Il existe une source de neutrons décrite par une fonction scalaire donnée $S(x,\omega,E,t)$.
La population de neutrons est décrite par une fonction scalaire $\overline{u}(x,\omega,E,t)$ qui est la densité angulaire du nombre de neutrons en $(x,\omega,E) \in \Omega_E$ à l'instant t .

On définit également la densité de flux angulaire $\varphi(x, \omega, E, t)$ par

$$\varphi(x, \omega, E, t) \overset{déf}{=} |v| \overline{u}(x, \omega, E, t) \tag{2.81}$$

La densité de flux angulaire φ vérifie l'équation (d'évolution) du transport

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{|v|} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x, \omega, E, t) + \omega \nabla_x \varphi(x, \omega, E, t) \\ + \sum_t (x, E) \varphi(x, \omega, E, t) \\ - \int_\alpha^\beta dE' \int_{s^2} \sum_s (x, \omega' \to \omega, E' \to E) \varphi(x, \omega', E', t) d\omega' \\ \dfrac{-\varkappa(E)}{4\pi} \int_\beta^\alpha v(x, E') \sum_f (x, E') dE' \int_{s^2} \varphi(x, \omega', E', t) d\omega' \\ = S(x, \omega, E, t) \end{array} \right. \tag{2.82}$$

Notons par

$$\left\{ \begin{array}{c} u(x, v, t) \overset{déf}{=} \dfrac{m}{|v|} \overline{u}(x, \omega, E, t) \qquad \text{avec} \qquad E = \dfrac{m |v|^2}{2} \\ \sum(x, v) \overset{déf}{=} |v| \sum_t (x, E), \qquad \omega = \dfrac{v}{|v|} \\ f(v, v', v) \overset{déf}{=} m \dfrac{|v'|}{|v|} [\sum_s (x, \omega' \to \omega, E' \to E) + \\ \dfrac{\varkappa(E) v(x, E') \sum_f (x, E')}{4\pi}] q(x, v, t) \overset{déf}{=} \dfrac{m}{|v|} = \\ S(x, \omega, E, t) \end{array} \right. \tag{2.83}$$

Compte tenu de (2.33), la fonction inconnue $u(x, v, t)$ doit vérifier l'équation (d'évolution) de transport

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, v, t) + v.\nabla u(x, v, t) + \sum(x, v) u(x, v, t) \\ - \int_v f(x, v', v) u(x, v', t) dv' = q(x, v, t) \\ \text{avec } (x, v) \in \Omega \overset{déf}{=} X \times V \text{ et } \quad t > 0 \end{array} \right. \tag{2.84}$$

Le problème d'évolution pour l'équation du transport, dit problème de Cauchy, consiste à déterminer la fonction inconnue $\varphi(x, \omega, E, t)$ vérifiant (2.32) avec la condition initiale

$$\varphi(x, \omega, E,) = \varphi_0(x, \omega, E), \tag{2.85}$$

φ_0 étant le flux angulaire en $t = 0$ avec des conditions aux limites sur la frontière ∂X du domaine X (respectivement : déterminer $u(x, v, t)$ vérifiant (2.32) avec la condition initiale $u(x, v, 0) = u_0(x, v)$, $u_0(x, v)$ étant la densité des neutrons en $t = 0$ et avec des conditions aux limites convenables).

Pour les milieux hétérogènes et de grande taille par rapport aux grandeurs caractéristiques de l'équation de transport, on peut obtenir une solution approchée de l'équation de transport avec une équation dite de diffusion dont les coefficients sont calculés à partir de ceux de l'équation de transport. Par exemple, le flux total tend vers la solution d'une équation de diffusion lorsque $\frac{1}{\sum_t}$ et $\frac{1}{\sum_s}$, tendent vers 0.

Le calcul des réacteurs nucléaires est généralement divisé en deux parties : des calculs de transport permettent d'obtenir des quantités caractéristiques homogénéisées pour chaque assemblage combustible du réacteur. Ces données homogénéisées sont utilisées dans les calculs de diffusion à une, deux ou trois dimensions d'espace pour traiter le réacteur entier.

Dans le récent travail [45], utilisant le modèle fonctionnel de l'opérateur de transport est aussi considéré. Ce travail est consacré à l'analyse spectrale de l'opérateur non auto-adjoint de transmission en utilisant le modèle fonctionnel.
On note par $x \in \mathbb{R}$-la coordonnée de l'espace, $\mu \in \Omega$ où $\Omega = [-1, 1]$, μ est le cosinus de l'angle de la vitesse d'une particule et l'axe des abscisses.
Considérons le domaine $\Gamma = \mathbb{R} \times \Omega$ et $H = L^2(\Gamma)$
Soit la fonction $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $c \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Dans cette étude, on suppose que c est à support compact
On pose :

$$T = i\mu\partial_x + iKc(x) \text{ où } K = \frac{1}{2}\int \cdot d\mu' \tag{2.86}$$

Le modèle fonctionnel est utilisé seulement dans la démonstration mais non dans la formulation des résultats finaux. Remarquons que l'apparition de la singularité a un caractère non pathologique. Plus précisément, pour chaque $c \in L^\infty(\mathbb{R})$ positive à support compact la fonction $Kc \in \mathcal{E}$ pour certaines valeurs de K . L'auteur décrit plus précisément T_{ess} qui agit dans un complémentaire de l'espace des éléments propres de l'opérateur T .

Le domaine de définition est donné par

$$D = \left\{ \begin{array}{c} f \in H : f(\cdot, \mu) \\ \mu \in \Omega \ , \ \mu \partial_x f \in H \end{array} \right\} \tag{2.87}$$

Les auteurs démontrent qu'il existe un sous ensemble $\mathcal{E} \subset L^\infty(0, \infty)$ tel que si $c \in \mathcal{E}$ alors pour chaque δ suffisamment petit $\delta \neq 0$ l'opérateur T_{ess} peut être présenté sous la forme

$$T_{ess} = T_1 + T_2 \tag{2.88}$$

où les opérateurs T_1, T_2 agissent sur les espaces invariants $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ tels que
i) T_1 a le spectre $\sigma(T_1) = [-\delta, \delta]$ de multiplicité finie
ii) T_2 est similaire à un opérateur auto-adjoint et $\sigma(T_2) = \mathbb{R}$
Si $c \notin \mathcal{E}$ alors l'opérateur T_{ess} est similaire à l'opérateur auto-adjoint et possède le spectre absolument continu.

CHAPITRE 3

Calcul du saut de la résolvante dans le cas du modèle de Friedrichs

Dans ce Chapitre, on indique les conditions sur le modèle de Friedrichs qui permettent d'écrire la formule pour le saut de la résolvante.

La représentation de la projection orthogonale par la résolvante R_ζ d'un opérateur auto-adjoint

$$E(\Delta) = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta + i\epsilon} \left(R_\zeta - R_{\overline{\zeta}} \right) d\zeta, \ \Delta \subset (-\infty, \infty) \tag{3.1}$$

est bien connue depuis longtemps (voir par exemple Yu.M. Berezanski [2] ,p.425).

Evidemment le saut de la résolvante $\lim\limits_{\epsilon \to +0} ((R_\zeta - R_{\overline{\zeta}})\varphi, \psi), \ \zeta = \sigma + i\epsilon, \ \sigma \in (-\infty, \infty)$ est important dans la théorie de la perturbation non auto-adjointe du spectre continu aussi. Dans le travail de Ljancé [47], concernant le modèle de Friedrichs non auto-adjoint, l'auteur utilise une extension de l'opérateur dans un espace assez large. Dans le travail de Cheremnikh E.V., un opérateur auxiliaire (comme l'opérateur différentiel maximal) a été considéré. Dans ce travail, nous précisons les calculs du saut de la résolvante.

1 Préliminaire et théorème principal

Soit $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $H = L^2(\mathbb{R}, H_1)$, où H_1 est un certain espace d'Hilbert avec le produit scalaire $(\bullet, \bullet)_{H_1}$. Nous considérons le modèle de Friedrichs

$$T = S + V,\ V = A^*B,\ D(T) = D(S),\ A, B : H \to G, \tag{3.2}$$

où S est l'opérateur de multiplication par la variable indépendante (c'est–à-dire $(S\varphi)(\tau) = \tau\varphi(\tau),\ \tau \in \mathbb{R}$) de domaine de définition maximal $D(S)$ et A, B sont des opérateurs bornés de H vers G. L'espace G est un espace d'Hilbert auxiliaire. Nous utilisons respectivement les notations $\varphi, \psi, f, g \in H,\ c, d \in G$ pour les éléments et $(\bullet, \bullet), (\bullet, \bullet)_G$ pour le produit scalaire. Nous notons

$$S_\zeta = (S - \zeta)^{-1},\ T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$$

La relation

$$(T - \zeta)\psi = \varphi$$

ou bien

$$(S - \zeta)\psi + A^*B\psi = \varphi$$

donne

$$T_\zeta\varphi = S_\zeta\varphi - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta\varphi,\ \mathrm{Im}\zeta \neq 0 \tag{3.3}$$

pour chaque valeur ζ telle qu' il existe l'opérateur inverse borné $K(\zeta)^{-1}$.

Nous notons par $K_+(\zeta),\ \mathrm{Im}\zeta > -\epsilon$ et $K_-(\zeta),\ \mathrm{Im}\zeta < \epsilon$ les extentions de la fonction opératorielle $K(\zeta)$ au dessus de l'axe $\mathrm{Im}\zeta = 0,\ \zeta \neq 0$ des domaines $\mathrm{Im}\zeta > 0$ et $\mathrm{Im}\zeta < 0$ respectivement pour un certain $\epsilon > 0$.

Nous supposons que :

C1) Il existe les extensions $K_\pm(\zeta)$ et $\|K_\pm(\zeta) - 1\| \to 0, \zeta \to \infty$ uniformément dans le domaine $|\mathrm{Im}\zeta| < \epsilon$;

C2) Les opérateurs $K_\pm(\zeta)^{-1}$ existent et sont holomorphes dans le domaine $|\mathrm{Im}\zeta| < \epsilon,\ \mathrm{Re}\zeta \neq 0$ excepté peut être un ensemble fini de points.

Notons

$$\mathbf{B}(\zeta)\varphi = \varphi - A^*K(\zeta)^{-1}BS_\zeta\varphi,\ \mathbf{A}(\zeta)\psi = \psi - B^*K(\overline{\zeta})^{-1*}AS_\zeta\psi. \tag{3.4}$$

Soit

$$h(\tau,\zeta) = ((\mathbf{B}(\zeta)\varphi)(\tau), (\mathbf{A}(\zeta)\psi)(\tau)),\ \tau \in R,\ \mathrm{Im}\zeta > 0. \tag{3.5}$$

Nous avons besoin des limites fortes dans l'espace G

$$(AS_\sigma)_\pm\varphi = \lim_{\nu\to+0} AS_\zeta\varphi,\ (BS_\sigma)_\pm\varphi = \lim_{\nu\to+0} BS_\zeta\varphi,\ \zeta = \sigma + i\nu \tag{3.6}$$

et correspondant aux limites fortes dans H

$$\mathbf{B}_+(\sigma)\varphi = \varphi - A^*K_+(\sigma)^{-1}(BS_\sigma)_+\varphi,\ \mathbf{A}_-(\sigma)\varphi = \varphi - B^*K_-(\sigma)^{-1*}(AS_\sigma)_+\varphi,\ \varphi \in H^0 \tag{3.7}$$

pour les éléments φ d'un certain sous-espace $H^0 \subset H$ dense dans H, $\overline{H^0} = H$.

Nous supposons que

C3) Les limites fortes (3.6) existent excepté peut être un ensemble fini $D \subset R$ des valeurs σ pour les éléments $\varphi \in H^0$ et la fonction $h(\tau,\zeta)$ (voir (3.5)) pour $0 \le \mathrm{Im}\zeta < \epsilon_0$, pour un certain $\epsilon_0 > 0$ est différentiable en τ dans $\mathbb{R}$ et

$$\int_R |h(\tau,\zeta)|\, d\tau \le M,\ 0 \le \mathrm{Im}\zeta < \epsilon_0, \tag{3.8}$$

où $M = \mathrm{const}$

C4) Pour chaque intervalle fini (a,b) nous avons

$$|h(\tau,\zeta) - h(\tau,\sigma)| \le C\,|\zeta - \sigma|,\ |\tau - \sigma| < \delta,\ \tau \in (a,b),\ \zeta = \sigma + i\nu, \tag{3.9}$$

où $\sigma \in R \setminus D$ (voir C_3) et $C = \mathrm{const}$ ne dépend pas de δ_0.

Le résultat principal de ce travail est donné par le théorème suivant . Notons (voir C3))

$$(T_\sigma\varphi,\psi)_\pm = \lim_{\nu\to+0}(T_{\sigma+i\nu}\varphi,\psi),\ \varphi,\psi \in H^0,\ \sigma \in R \setminus D. \tag{3.10}$$

Théorème 1.1 *Il existe un sous espace $H^1 \subset H^0$ dense dans H, $\overline{H^1} = H$ tel que*

1. *Les valeurs limites $(T_\sigma \varphi, \psi)_\pm$ existent si $\sigma \in R \setminus D$, $\varphi, \psi \in H^1$;*
2. *Le saut de la résolvante au point $\sigma \in R \setminus D$ est*

$$(T_\sigma \varphi, \psi)_+ - (T_\sigma \varphi, \psi)_- = 2\pi i \left((\mathbf{B}_+(\sigma)\varphi)(\sigma), (\mathbf{A}_-(\sigma)\psi)(\sigma) \right)_{H_1}, \tag{3.11}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_+(\sigma)\varphi &= \varphi - A^* K_+(\sigma)^{-1}(BS_\sigma)_+\varphi, \\ \mathbf{A}_-(\sigma)\varphi &= \varphi - B^* K_-(\sigma)^{-1*}(AS_\sigma)_+\varphi, \ \ \varphi \in H^1 \end{aligned} \tag{3.12}$$

3. *Si $\varphi, \psi \in D(T) \cap H^1$ alors*

$$\left(\mathbf{A}_-(\sigma)(T^* - \sigma)\psi\right)(\sigma) = 0, \quad \left(\mathbf{B}_+(\sigma)(T - \sigma)\varphi\right)(\sigma) = 0 \tag{3.13}$$

et si $\{e_k\} \subset H_1$ est une base orthonormale arbitraire dans H_1 alors les fonctionnelles

$$(a_{\sigma,k}, \psi) = (e_k, (\mathbf{A}_-(\sigma)\psi)(\sigma))_{H_1}, \ (\varphi, b_{\sigma,k}) = \left((\mathbf{B}_+(\sigma)\varphi)(\sigma), e_k\right)_{H_1}, \ k = 1, 2, ... \tag{3.14}$$

sont les fonctionnelles propres des opérateurs T et T^* respectivement.

2 Notations

Notons que les opérateurs $\mathbf{B}(\zeta)$, $\mathbf{A}(\zeta) : H \to H$ (voir (3.4)) ne dépendent pas du choix de la factorisation $V = A^* B$, la comparison (3.4) avec (3.3) donne

$$(S - \zeta) T_\zeta \varphi = \mathbf{B}(\zeta)\varphi, \quad (S - \zeta) T^*_{\overline{\zeta}} \psi = \mathbf{A}(\zeta)\psi, \tag{3.15}$$

où $T^*_{\overline{\zeta}}$ est la résolvante de l'operateur T^* au point $\overline{\zeta}$. Dans le cas

$$\overline{R(A^*)} = \overline{R(B^*)} = H, \tag{3.16}$$

le calcul du saut de la résolvante est plus simple. Autrement nous remplaçons la factorisation $V = A^*B$ par une certaine factorisation spéciale qui satisfait la condition (3.16). Alors, supposons maintenant que

$$\overline{\beta}R(A^*) \neq H \ ou \ \overline{R(B^*)} \neq H$$

Nous notons

$$Z(A) = \{f \in H : Af = 0\}$$

On sait que si $A, B : H \to G$ sont des opérateurs bornés alors

$$\overline{R(A^*)} \oplus Z(A) = H, \ \overline{R(B^*)} \oplus Z(B) = H. \tag{3.17}$$

Définition 2.1 *Soit $\tilde{G} = G \oplus Z(A) \oplus Z(B)$. L'espace $\tilde{G}$ est un espace d'Hilbert et le produit scalaire pour les éléments*

$$\tilde{c} = \{c, g_\alpha, g_\beta\}, \ \tilde{d} = \{d, h_\alpha, h_\beta\} \in \tilde{G} \tag{3.18}$$

avec éléments arbitraires $g_\alpha, h_\alpha \in Z(A)$, $g_\beta, h_\beta \in Z(B)$ est defini par l' expression

$$(\tilde{c}, \tilde{d})_{\tilde{G}} = (c, d)_G + (g_\alpha, h_\alpha) + (g_\beta, h_\beta). \tag{3.19}$$

Soient $P_\alpha : H \to Z(A), P_\beta : H \to Z(B)$ sont des projections orthogonales.

Définition 2.2 *Les opérateurs $\tilde{A}, \tilde{B} : H \to \tilde{G}$ sont définis par la relation*

$$\tilde{A}f = \{Af, P_\alpha f, 0\}, \ \tilde{B}f = \{Bf, 0, P_\beta f\}. \tag{3.20}$$

Comme $\tilde{G}$ est espace d'Hilbert alors $\tilde{A}^*$, $\tilde{B}^* : \tilde{G} \to H$.

Lemme 2.1 *Les relations suivantes sont vérifiées :*

1. $\tilde{A}^*\tilde{B} = A^*B$

2. $\overline{R(\tilde{A}^*)} = \overline{R(\tilde{B}^*)} = H$

Preuve.

1. Soit $f \in H$ un élément arbitraire, d'après (3.19) − (3.20) nous avons

$$(\tilde{A}f, \tilde{c})_{\tilde{G}} = (Af, c)_G + (P_\alpha f, g_\alpha) = (f, A^*c) + (f, g_\alpha) = (f, A^*c + g_\alpha).$$

   Par conséquent, si $\tilde{c} = \{c, g_\alpha, g_\beta\}$ alors

$$\tilde{A}^*\tilde{c} = A^*c + g_\alpha. \tag{3.21}$$

   En substituant (voir (3.20)) $\tilde{c} = \tilde{B}f = \{Bf, 0, P_\beta f\} \equiv \{c, g_\alpha, g_\beta\}$ dans (3.21) , nous obtenons l'assertion 1).

2. Comme un élément $g_\alpha \in Z(A)$ dans la relation (3.21) est arbitraire alors $\overline{R(\tilde{A}^*)} = H$ (voir (3.17)). L'opérateur B est considéré par analogie ce qui prouve l'assertion 2).
   Le lemma 2.1 est prouvé. Nouvelle factorisation $V = \tilde{A}^*\tilde{B}$ satisfait la condition (3.16).

■

Lemme 2.2 *Soit* $\varphi = A^*c,\ \psi = B^*d, c, d \in G$ *alors*

$$\left(\left(T_\zeta - T_{\overline{\zeta}}\right)\varphi, \psi\right) = \left(\left(S_\zeta - S_{\overline{\zeta}}\right)\mathtt{B}(\zeta)\varphi, \mathtt{A}(\zeta)\psi\right) \tag{3.22}$$

et

$$\mathtt{B}(\zeta)(T - \zeta)\varphi = (S - \zeta)\varphi,\ \mathtt{A}(\zeta)(T^* - \overline{\zeta})\psi = (S - \overline{\zeta})\psi. \tag{3.23}$$

Preuve. Selon (3.2) − (3.3)

$$BT_\zeta A^* = BS_\zeta A^* - BS_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} BS_\zeta A^* = K(\zeta) - 1 - (K(\zeta)-1)K(\zeta)^{-1}(K(\zeta)-1) = 1 - K(\zeta)^{-1}$$

et d'après la présentation $\varphi = A^*c,\ \psi = B^*d$ nous avons

$$(T_\zeta\varphi, \psi = (BT_\zeta A^*c, d)_G = (c,d)_G - \left(K(\zeta)^{-1}c, d\right)_G.$$

Parconséquent

$$\left((T_\zeta - T_{\overline{\zeta}})\varphi, \psi\right) = -\left(\left(K(\zeta)^{-1} - K(\overline{\zeta})^{-1}\right)c, d\right)_G = \left(K(\overline{\zeta})^{-1}\left[K(\zeta) - K(\overline{\zeta})\right]K(\zeta)^{-1}c, d\right)_G =$$

$$= \left(\left(BS_\zeta A^* - BS_{\overline{\zeta}}A^*\right)K(\zeta)^{-1}c, K(\overline{\zeta})^{-1*}d\right)_G = \left(\left(S_\zeta - S_{\overline{\zeta}}\right)A^*K(\zeta)^{-1}c, B^*K(\overline{\zeta})^{-1*}d\right)_G. \tag{3.24}$$

Multiplions $K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*$ par $A^*K(\zeta)^{-1}$ nous obtenons

$$A^*c = A^*K(\zeta)^{-1}c + A^*K(\zeta)^{-1}BS_\zeta A^*c$$

Comme $\varphi = A^*c$ alors $A^*K(\zeta)^{-1}c = \varphi - A^*K(\zeta)^{-1}BS_\zeta\varphi = \mathbf{B}(\zeta)\varphi$ (voir (3.4)). Par analogie $B^*K(\zeta)^{-1*}d = \mathbf{A}(\zeta)\psi$ alors (3.22) résulte de (3.24). Le changement $T_\zeta\varphi \to \varphi$ et $T^*_{\overline{\zeta}}\psi \to \psi$ transforme (3.15) vers (3.23).
Le lemma 2.2 est prouvé.

■

Lemme 2.3 *Si la fonctionnelle $h(\tau,\zeta)$ satisfait les conditions $C_3) - C_4)$ alors*

$$\lim_{\nu\to+0}\int_R \left(\frac{1}{\tau-\zeta} - \frac{1}{\tau-\overline{\zeta}}\right)h(\tau,\zeta)d\tau = 2\pi i h(\sigma,\sigma),\ \zeta = \sigma + i\nu. \tag{3.25}$$

Preuve. nous avons

$$\begin{aligned}\int_R \left(\frac{1}{\tau-\zeta} - \frac{1}{\tau-\overline{\zeta}}\right)h(\tau,\zeta)d\tau &= \int_R \left(\frac{1}{\tau-\zeta} - \frac{1}{\tau-\overline{\zeta}}\right)\left(h(\tau,\zeta) - h(\tau,\sigma)\right)d\tau \\ &+ \int_R \left(\frac{1}{\tau-\zeta} - \frac{1}{\tau-\overline{\zeta}}\right)h(\tau,\sigma)d\tau.\end{aligned}$$

Alors, pour prouver la relation (3.25) il suffit de prouver que

$$I(\nu) \equiv \int\limits_R \left(\frac{1}{\tau - \zeta} - \frac{1}{\tau - \overline{\zeta}} \right) (h(\tau, \zeta) - h(\tau, \sigma))\, d\tau \to 0, \;\; \nu \to +0, \tag{3.26}$$

où $\mathrm{Re}\zeta = \sigma = \mathrm{const}$. Soit $\delta > 0$ et

$$I(\nu) = \int\limits_{|\tau-\sigma|<\delta} + \int\limits_{|\tau-\sigma|>\delta} \equiv I_1(\nu) + I_2(\nu)$$

1) Comme $|\tau - \zeta| = \left|\tau - \overline{\zeta}\right| \geq |\zeta - \sigma|$ alors (voir (3.9))

$$\begin{aligned} |I_1(\nu)| &\leq \int\limits_{|\tau-\sigma|<\delta} \left(\frac{1}{|\tau - \zeta|} + \frac{1}{\left|\tau - \overline{\zeta}\right|} \right) |h(\tau, \zeta) - h(\tau, \sigma)|\, d\tau \\ &\leq \frac{2}{|\zeta - \sigma|} \int\limits_{|\tau-\sigma|<\delta} |h(\tau, \zeta) - h(\tau, \sigma)|\, d\tau \leq 4C\delta \end{aligned}$$

2) Si $|\tau - \sigma| > \delta$ alors $|\zeta - \tau| > \delta$ et

$$\left| \frac{1}{\tau - \zeta} - \frac{1}{\tau - \overline{\zeta}} \right| = \left| \frac{2i\nu}{(\tau - \zeta)(\tau - \overline{\zeta})} \right| \leq \frac{2\nu}{\delta^2}$$

Par conséquent (voir (3.8))

$$|I_2(\nu)| \leq \int\limits_{|\tau-\sigma|>\delta} \left| \frac{1}{\tau - \zeta} - \frac{1}{\tau - \overline{\zeta}} \right| (|h(\tau, \zeta)| + |h(\tau, \sigma)|)\, d\tau \leq 4M \frac{\nu}{\delta^2}.$$

Si nous choisissons $\delta = \sqrt[3]{\nu}$ alors $I_1(\nu), I_2(\nu) \to 0, \nu \to +0$, ce qui prouve la relation (3.26).

Le lemme 2.3 est prouvé. ■

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2.1

1. **Preuve.** 1- En raison de (3.3) et la condition C_3) la valeur limite $(T_\sigma \varphi, \psi)_\pm$ existe si nous choisissons $H^1 \subset H^0$ comme un sous espace de fonctions diffé-

rentables.

2- Selon (3.15) les expressions $\mathbf{B}(\zeta)\varphi$, $\mathbf{A}(\zeta)\psi$ ne dépendent pas du choix de la factorisation. Nous posons $V = \tilde{A}^*\tilde{B}$ (voir Lemme 2.1) et nous obtenons la relation (3.22) pour un certain sous espace dense dans H. Tous les opérateurs dans la relation (3.22) sont bornés, donc (3.22) est vérifiée pour les éléments $\varphi, \psi \in H$. En utilisant le Lemme 2.3, nous obtenons les relation (3.11) de la relation (3.22).

3- Considérons la relation (3.23), où

$$\mathrm{Im}\zeta \to +0 \text{ et } \mathrm{Re}\zeta = \sigma = \mathrm{const}$$

Le côté droit $(S - \sigma)\varphi$ est une fonction vectorielle à valeurs dans l'espace H_1. Evidemment

$$||[(\tau - \sigma)\,\varphi(\tau)]||_{\tau=\sigma} = 0.$$

Ainsi, les relations $(3.13) - (3.14)$ résultent de (3.23).

Le théorème est prouvé. ■

Notons qu'on peut obtenir la formule du saut de la résolvante (voir (3.11))

$$(T_\sigma\varphi, \psi)_+ - (T_\sigma\varphi, \psi)_- = 2\pi i\left(\left(\mathbf{B}_+(\sigma)\varphi\right)(\sigma), \left(\mathbf{A}_-(\sigma)\psi\right)(\sigma)\right)_{H_1} \tag{3.27}$$

Si 1) Les conditions sur les éléments φ, ψ qui donnent $C_3) - C_4)$ sont indiquées ;
2) Les conditions sur φ, ψ qui permettent de prolonger continuellement les deux côtés de (3.11) dans un sous espace plus large sont données.

Notons que le signe $\pm$ dans les notations $\mathbf{B}_+(\sigma), \mathbf{A}_-(\sigma)$ correspond au signe des valeurs limites $K_+(\sigma)^{-1}$, $K_-(\sigma)^{-1}$ dans les expressions $\mathbf{B}_+(\sigma)$, $\mathbf{A}_-(\sigma)$.

CHAPITRE 4

Etude du spectre ponctuel d'un opérateur de transport avec un potentiel matriciel 2×2

Dans ce chapitre, on étudie le spectre de l'opérateur de Transport directement à l'aide de la résolvante en utilisant le modèle de Friedrichs au lieu de considérer l'étude d'une équation intégro-différentielle.

Pour cela considérons d'abord le modèle de Friedrichs [18].

1 Le cadre fonctionnel du problème :

On utilise $\mathbb{C}^2$ avec la norme $|Z|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2$, $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Soit $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ et $D = \mathbb{R} \times [-1,1]$. On note les éléments $u \in L^2(D, \mathbb{C}^2)$ par :

$$u(x,\mu) = \begin{pmatrix} u_1(x,\mu) \\ u_2(x,\mu) \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R},\ \mu \in [-1,1] \tag{4.1}$$

On considère l'opérateur $L : L^2(D, \mathbb{C}^2) \to L^2(D, \mathbb{C}^2)$ défini par la formule suivante

$$Lu = -i\mu\frac{\partial u}{\partial x} + c(x)\int_{-1}^{1} u(x,\mu')d\mu', \tag{4.2}$$

avec un domaine de définition maximal.

Et soit le potentiel matriciel $c(x)$ donné par

$$c(x) = \begin{pmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

On suppose que

$$\det c(x) = 0 \tag{4.4}$$

et

$$|c_{ik}(x)| \leq M \exp(- \in |x|), \ x \in \mathbb{R}, \ i,k = 1,2 \tag{4.5}$$

pour $M > 0$ et $\epsilon > 0$. D'aprés (4.1) $c(x)$ s'écrit sous la forme

$$c(x) = \begin{pmatrix} p_1(x)\, q_1(x) & p_1(x)\, q_2(x) \\ p_2(x)\, q_1(x) & p_2(x)\, q_2(x) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Soit

$$|c_{11}(x)| = \max_{i,k} |c_{ik}(x)|$$

alors, on suppose

$$p_1(x) = \sqrt{|c_{11}(x)|}, q_1(x) = \frac{c_{11}(x)}{p_1(x)}$$

Donc

$$c_{11}(x) = p_1(x)\, q_1(x), \text{ et } q_2(x) = \frac{c_{12}(x)}{p_1(x)}, p_1(x) = \frac{c_{21}(x)}{q_1(x)}$$

et d'après(4.4) , on obtient $c_{22}(x) = p_2(x)\, q_2(x)$. Et d'après (4.5) . On suppose que

$$|p_i(x)|, |q_i(x)| < M \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|x|\right), x \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

On note A^* l'opérateur adjoint de la matrice $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. On définit la matrice

$$C_1(x) = \begin{pmatrix} \overline{p_1(x)} & \overline{P_2(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C_2(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ O & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

L'équation (4.6) signifie que la factorisation suivante est satisfaite

$$C(x) = C_1(x)^* C_2(x) \tag{4.9}$$

D'après (4.1), (4.3) on peut réécrire l'opérateur $L : L^2(D, \mathbb{C}^2) \to L^2(D, \mathbb{C}^2)$ sous la forme

$$\begin{cases} (Lu_1) = -i\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_{-1}^{1} c_{11}(x) u_1(x, \mu') + c_{12}(x) u_2(x, \mu') d\mu' \\ (Lu_2) = -i\mu \frac{\partial u_2}{\partial x} + \int_{-1}^{1} c_{21}(x) u_1(x, \mu') + c_{22}(x) u_2(x, \mu') d\mu' \end{cases} \tag{4.10}$$

2 Modèle de Friedrichs' :

On va utiliser les résultats dans [15], et on premier lieu, on va introduire quelques notions qui seront utilisées dans la suite. On note par F la transformation de Fourier dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$Fu(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} u(\tau)\, d\tau, \qquad s \in \mathbb{R},$$

et dans l'espace $L^2(D, \mathbb{C}^2)$ par

$$F \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (s) = \begin{pmatrix} Fu_1(s) \\ Fu_2(s) \end{pmatrix}.$$

On note par H_1 l'espace d'Hilbert des fonctions scalaires

$$\varphi(s, \mu), \; (s, \mu) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$$

avec la norme

$$\|\varphi\|_{H_1}^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |\varphi(s,\mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu.$$

(On garde le même H pour notre cas des fonctions vectorielles $\varphi(s,\mu)$).

Soit $F_0 : L^2(D) \to H_1$, l'opérateur défini par $F_0 u(s,\mu) = u\left(\frac{s}{\mu}, \mu\right)$, et introduisons l'opérateur unitaire $U = F_0 F : L^2(D) \to H_1$.

Dans le travail [15] , il prouve que l'opérateur intégral $v : L^2(D) \to L^2(D)$ donné par

$$vf(x,\mu) = c(x) \int_{-1}^{1} f(x,\mu')\, d\mu',$$

admet la transformation

$$V : \ H_1 \to H_1$$

si

$$c(x) = \overline{c_1(x)} c_2(x)$$

alors

$$V\varphi = UvU^{-1}\varphi = A^* B\varphi, \ \ \varphi = Uf$$

où

$$A, \ B : \ H_1 \to L^2(\mathbb{R})$$

$$A\varphi(x) = c_1(x) W\varphi(x), \qquad B\varphi(x) = c_2(x) W\varphi(x)$$

et

$$W\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \varphi(s,\mu) e^{-ix\frac{s}{\mu}} \frac{1}{|\mu|} ds d\mu \tag{4.11}$$

Le modèle de Friedrichs est

$$UL^1U^{-1} = S + A^* B$$

où

$$S\varphi(\tau,\mu)=\begin{pmatrix}\tau\varphi_1(\tau)\\ \tau\varphi_1(\tau)\end{pmatrix},\ \varphi(\tau)=\begin{pmatrix}\varphi_1(\tau)\\ \varphi_1(\tau)\end{pmatrix}.$$

En revenant à l'opérateur (4.1), on introduit l'espace d'Hilbert H des fonctions vectorielles $\varphi(x,\mu)$ à valeurs dans $\mathbb{C}^2$ et la norme

$$\|\varphi\|_H^2=\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{-1}^{1}|\varphi(s,\mu)|_{\mathbb{C}^2}^2\frac{1}{|\mu|}dsd\mu.$$

On considère l'espace $L^2(D,\mathbb{C}^2)$ comme somme directe de

$$L^2(D,\mathbb{C})\oplus L^2(D,\mathbb{C})$$

et de même pour

$$H=H_1\oplus H_1,\ \text{et } L^2(D)=L^2(D,\mathbb{C}).$$

On peut définir l'opérateur unitaire

$$U\ :\ L^2\left(D,\mathbb{C}^2\right)\to H$$

en utilisant l'opérateur unitaire

$$U:\ L^2(D)\to H_1$$

On note

$$A_i,\ B_k:H_1\to L^2(\mathbb{R})$$

les opérateurs définis par

$$A_i\varphi(x)=\overline{p_i(x)}W\varphi(x),\ B_k\varphi(x)=q_k(x)W(x),\ i,k=\overline{1,2}\ \text{(see (2.1))}$$

Introduisons maintenant, les opérateurs matriciels

$$A, B : H \to L^2\left(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2\right)$$

comme suit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Lemme 2.1 *Soit*

$$T = ULU^{-1} : H \to H$$

alors

$$T = S + V,\ V = A^*B$$

où

$$S\varphi(\tau) = \begin{pmatrix} \tau\varphi_1(\tau) \\ \tau\varphi_2(\tau) \end{pmatrix},\ \varphi(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) \end{pmatrix}$$

Preuve. En utilisant l'opérateur unitaire

$$U : L^2\left(D, \mathbb{C}^2\right) \to H,$$

et transformons maintenant le système (4.10).

$$\begin{cases} (T\varphi_1) = S\varphi_1 + A_1^*B_1\varphi_1 + A_1^*B_2\varphi_2 \\ (T\varphi_2) = S\varphi_2 + A_2^*B_1\varphi_1 + A_2^*B_2\varphi_2 \end{cases}$$

où

$$\varphi_i = Uu_i, i = \overline{1,2}$$

. et d'après (4.12) on a

$$\begin{pmatrix} A_1^*B_1 & A_1^*B_2 \\ A_2^*B_1 & A_2^*B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^*B$$

qui prouve le Lemme (2.1) ■

3 L'opérateur $K(\xi)$ et le spectre dans le domaine $\xi \neq 0$

On note

$$S_\xi = (S-\xi)^{-1}, \operatorname{Im}\xi \neq 0$$

et

$$T_\xi = (T-\xi)^{-1},\ \xi \in \rho(T)$$

On cherche la représentation de T_ξ par S_ξ. Soit

$$(T-\xi)\psi = \varphi$$

alors (see Lemma (3.1))

$$(S-\xi)\psi + A^* B\psi = \varphi$$

donc

$$\psi + S_\xi A^* B\psi = S_\xi \varphi$$

Multiplions par B, on trouve

$$B\psi + BS_\xi A^* B\psi = BS_\xi\varphi$$

alors

$$K(\xi) B\psi = BS_\xi\varphi$$

où

$$K(\xi) = 1 + BS_\xi A^* \tag{4.13}$$

Substituons

$$B\psi = K(\xi)^{-1} BS_\xi\varphi,$$

on obtient

$$T_\xi\varphi = S_\xi\varphi - S_\xi A^* K(\xi)^{-1} BS_\xi\varphi \tag{4.14}$$

toutes les valeurs propres λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ de l'opérateur T est un pôle de la fonction $K(\xi)^{-1}$ i.e l'opérateur $K(\lambda)$ est non-inversible. Comme conséquence, l'équation

$$K(\xi)\, h = 0 \tag{4.15}$$

admet une solution unique $h = 0$, les transformations $(4.13)-(4.14)$ sont évidemment vérifiées non seulement dans l'espace H_1 mais aussi dans l'espace H .

Théorème 3.1 *Soit l'opérateur* $K(\xi) : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ *défini par* (4.12), (4.13) *alors*

1) *L'opérateur*

$$K(\xi) - 1, \xi \notin \mathbb{R}$$

est complètement continu et $\|K(\xi) - 1\| \to 0$, $r \to \infty$ *uniformément dans le domaine* $|\xi| > r$, $|\operatorname{Im}\xi| > \gamma_0$ *pour toutes* $\gamma_0 > 0$

2) *L'opérateur* $K(\xi) - 1$ *admet an un prolongement analytique sur le demi axe* $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ *et*

$$\|K_{\pm}(\xi) - 1\| \to 0, |\xi| \to \infty$$

uniformément dans le domaine $|\operatorname{Im}\xi| < \epsilon_1$ *pour toutes* $\epsilon_1 < \dfrac{\epsilon}{2}$. $K_{\pm}(\xi)$ *sont les prolongements analytiques respectivement dans le domaine* $\operatorname{Im}\xi > 0$ $(\operatorname{Im}\xi < 0)$.

Preuve. On suit la même procédure de la preuve du travail [15] dans l'espace H_1

$$\begin{aligned}
K(\xi) - 1 &= BS_\xi A^* \\
&= \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_\xi & 0 \\ 0 & S_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B_1 S_\xi A_1^* + B_2 S_\xi A2^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et l'opérateur $B_1 S_\xi A_1^*$ considéré dans [15], alors le théorème est prouvé. ■

On conclut du théorème (3.1) que le point $\xi = 0$ est l'unique point d'accummulation du spectre ponctuel .

4 Etude du spectre au voisinage de $\xi = 0$

On considère l'opérateure $K(\xi)$ (pour plus de détails voir [58]), et on note

$$\ell(\tau,\xi) = \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\tau\mu - \xi},\ \xi \notin [-|\tau|, |\tau|]$$

et

$$I(u,\xi) = \int_{\mathbb{R}} \ell(\tau,\xi) e^{i\tau u} d\tau = \gamma(\xi) + I_0(u,s) \tag{4.16}$$

où

$$\gamma(\xi) = -\pi i \ signv \ \ln\xi,\ \xi = \alpha + iv \tag{4.17}$$

et $\ln\xi$ est la branche continue des fonctions dans le domaine $\xi \notin [0,\infty)$ telle que $\ln(-1) = \pi i$. La fonction $I_0(u,\xi)$ est un opérateur intégral de noyau $\exp\left(\frac{-\epsilon}{4}(|x|+|y|)\right)|I_0(x-y,\xi)|$ est uniformément borné dans le domaine $|\xi| < \delta$ où $\delta > 0$ est une petite constante. On note

$$n(x,y) = p_1(x) q_1(y) + p_2(x) q_2(y) \tag{4.18}$$

Lemme 4.1 *Soit* $K(\xi) : L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2) \to L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^2)$, *alors l'équation*

$$K(\xi) h = 0,\ |\xi| < \delta,\ h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

est équivalente au système

$$\begin{cases} h_1 + \dfrac{\gamma(\xi)}{2\pi}\left[(h_1,\overline{p_1})q_1 + (h_1,\overline{p_2})q_2\right] + Q(\xi)h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

où l'opérateur $Q(\xi)$ est uniformément borné si $|\xi| < \delta$

Preuve. Par analogie à la relation (3.5) de [15] on a

$$\begin{aligned}(K(\xi)-1)\,h(y) &= \left(C_2(y)\,F^{-1}l(.,s)\,FC_1^*(x)\,h\right)(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} k(x,y,\xi)\,h(x)\,dx.\end{aligned}$$

où

$$k(x,y,\xi) = \frac{1}{2\pi}C_2(y)\,C_1^*(x)\,I(y-x,\xi)$$

et d'après (4.6) et (4.18)

$$C_2(y)\,C_1^*(x) = \begin{pmatrix} q_1(y) & q_2(y) \\ O & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ p_2(x) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n(x,y) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc l'équation (4.19) sera le système

$$\begin{cases} h_1(y) + \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} n(x,y)\left[\gamma(\xi) + I_0(y-x,s)\right]h_1(x)\,dx = 0 \\ h_2(x) = 0 \end{cases}$$

et on obtient l'équation (4.20) où

$$Q(s)\,h_1(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} n(x,y)\,I_0(y-x,s)\,h_1(x)\,dx, \qquad |s| < \delta \tag{4.21}$$

alors le Lemme est prouvé. ■

Soit

$$p = \begin{pmatrix} (q_1,\overline{p_1}) & (q_1,\overline{p_2}) \\ (q_2,\overline{p_1}) & (q_2,\overline{p_2}) \end{pmatrix}$$

où

$$(q_k,\overline{p_i}) = \int_{\mathbb{R}} q_k(x)\,p_i(x)\,dx$$

est le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$.

On introduit la condition

$$\det p \neq 0 \tag{4.22}$$

et on note

$$\Gamma(\xi) = 1 + \frac{\gamma(\xi)}{2\pi} p \tag{4.23}$$

Lemme 4.2 *Soit la condition* (4.22) *est vérifiée alors*

1) *On a pour la solution de l'équation* (4.20)

$$\Gamma(\xi) \begin{pmatrix} (h_1, \overline{p_1}) \\ (h_1, \overline{p_2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (Q(s) h_1, \overline{p_1}) \\ (Q(s) h_1, \overline{p_2}) \end{pmatrix} = 0 \tag{4.24}$$

où l'opérateur $Q(s)$ *est défini dans* (4.21).

2) *Alors il existe une constante* $\delta > 0$ *telle que*

$$\left\| \Gamma(\xi)^{-1} \right\| \leq \frac{4\pi}{\gamma(\xi)} \left\| p_{-1} \right\| \tag{4.25}$$

Preuve. 1) En multipliant (4.20) par p_1 et p_2 dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$, on obtient

$$\begin{cases} (h_1, \overline{p_1}) + \frac{\gamma(s)}{2\pi} \left[(h_1, \overline{p_1}) (q_1, \overline{p_1}) + (h_1, \overline{p_2}) (q_2, \overline{p_1}) \right] + (Q(\xi) h_1, \overline{p_1}) = 0 \\ (h_1, \overline{p_2}) + \frac{\gamma(s)}{2\pi} \left[(h_1, \overline{p_1}) (q_1, \overline{p_2}) + (h_1, p_2) (q_2, \overline{p_2}) \right] + (Q(\xi) h_1, \overline{p_2}) = 0 \end{cases}$$

qui coïncide avec (4.24)

2) Rappelons que B est un opérateur borné petit et

$$\|B\| < 1 \quad \text{alors} \quad \left\| (1 - B)^{-1} \right\| \leq (1 - \|B\|)^{-1}$$

Maintenant si (*voir* (4.16))

$$\Gamma(\xi) = \frac{\gamma(\xi)}{2\pi} p \left(\frac{2\pi}{\gamma(\xi)} p^{-1} + 1 \right)$$

et

$$(\gamma(\xi) \to \infty, \ \xi \to 0)$$

$(voir\ \ (4.17)$, alors choisissons $\delta_1 > 0$ tel que)

$$\frac{2\pi}{|\gamma(\xi)|}\left\|p^{-1}\right\| < \frac{1}{2} \qquad |\xi| < \delta_1$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\Gamma(\xi)^{-1}\right\| &= \frac{2\pi}{|\gamma(\xi)|}\left\|p^{-1}\right\|\left\|\left(\frac{2\pi}{\gamma(\xi)}p^{-1}+1\right)^{-1}\right\| \\
&\leq \frac{2\pi}{|\gamma(\xi)|}\left\|p^{-1}\right\|\left(1-\left\|\frac{2\pi}{\gamma(\xi)}\right\|\left\|p^{-1}\right\|\right)^{-1} \\
&\leq \frac{2\pi}{|\gamma(\xi)|}\left\|p^{-1}\right\|\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{4\pi}{|\gamma(\xi)|}\left\|p^{-1}\right\|
\end{aligned}$$

alors le Lemme est prouvé. ■

On note

$$\|p\|_\epsilon = \max_k \sup_x \left[|p_k(x)|\, e^{\frac{\epsilon}{4}|x|}\right], \|q\|_\epsilon = \max_k \sup_x \left[|q_k(x)|\, e^{\frac{\epsilon}{4}|x|}\right] \tag{4.26}$$

et par $M(\xi)$ la norme dans $L^2(\mathbb{R})$ de l'opérateur intégral de noyau

$$k(x,y,\xi) = \exp\left(-\frac{\epsilon}{4}(|x|+|y|)\right) I_0(y-x,\xi) \tag{4.27}$$

et

$$M_0(\xi) = M(\xi)\|p\|_\epsilon \|q\|_\epsilon \left[2\left\|p^{-1}\right\|\sqrt{\|p_1\|^2+\|p_2\|^2}\sqrt{\|q_1\|^2+\|p_2\|^2}+\sqrt{2}\right] \tag{4.28}$$

Théorème 4.1 *On suppose que la condition* (4.7) *et* (4.22) *sont vérifiées. Alors l'opérateurr* L $(voir\ \ (4.10))$ *n'admet pas un spectre ponctuel. Donc, il est suffisant de prouver que l'équation* (4.15) *dans le domaine* $|\xi| < \delta_0$ *est definie par la condition*

$$|M_0(\xi)| < 1, \ \ |\xi| < \delta_0 \tag{4.29}$$

pour $\delta_0 > 0$ $(voir\ \ (4.28),\ \ (4.26))$.

Preuve. Les opérateurs L et T admettent le même spectre ponctuel. Donc, il suffit de prouve que l'équation (4.15) admet une unique solution $h = 0$ pour la condition $|\xi| < \delta_0$. On estime tous les termes de l'équation (4.20)

1) On réécrit (4.21) comme

$$\begin{aligned} Q(\xi) h_1(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} n(x,y) I_0(y-x,\xi) h_1(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\epsilon}{4}(|x|+|y|)\right) I_0(y-x,\xi) \exp\left(\frac{\epsilon}{4}(|x|+|y|)\right) n(x,y) h_1(x)\, dx \end{aligned}$$

d'après la définition de $M(\xi)$ et en utilisant l'inégalité

$$(a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right), \ a,b>0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|Q(\xi) h_1\|^2 &\leq M(\xi)^2 \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{\epsilon}{2}(|x|+|y|)\right) |n(x,y)|^2 |h_1(x)|^2\, dx \\ &\leq 2M(\xi)^2 \|p\|_\epsilon^2 \|q\|_\epsilon^2 \|h_1\|^2 \end{aligned}$$

Donc,

$$\|Q(\xi) h_1\| \leq \sqrt{2} M(\xi) \|p\|_\epsilon \|q\|_\epsilon \|h_1\| \tag{4.30}$$

2) Le premier terme dans (4.20) est estimé (4.30) et (4.24) − (4.25) :

$$\begin{aligned} \|(h_1,p_1) q_1 + (h_1,p_2) q_2\| &\leq |(h_1,p_1)| \|q_1\| + |(h_1,p_2)| \|q_2\| \\ &\leq \sqrt{\|q_1\|^2+\|q_2\|^2} \sqrt{|(h_1,p_1)|^2+|(h_1,p_2)|^2} \\ &\leq \sqrt{\|q_1\|^2+\|q_2\|^2} \left\|\Gamma^{-1}(\xi)\right\| \sqrt{|(Q(\xi) h_1,p_1)|^2+|(Q(\xi) h_1,p_2)|^2} \\ &\leq \sqrt{\|q_1\|^2+\|q_2\|^2} \sqrt{\|p_1\|^2+\|p_2\|^2} \left\|\Gamma^{-1}(\xi)\right\| \|Q(\xi)\| \|h_1\| \end{aligned}$$

On prend le facteur $\dfrac{\gamma(\xi)}{2\pi}$, on obtient

$$\left\| \frac{\gamma(\xi)}{2\pi} \left[(h_1, p_1)\, q_1 + (h_1, p_2)\, q_2 \right] \right\| \leq 2M(\xi) \left\| p^{-1} \right\| \|p\|_\epsilon \|q\|_\epsilon \sqrt{\|q_1\|^2 + \|q_2\|^2} \sqrt{\|p_1\|^2 + \|p_2\|^2}$$

et d'après (4.20), on a $\|h_1\| \leq M_0(\xi) \|h_1\|$ qui est impossible (*voir* (4.29)) si

$$\delta_0 = \min(\delta_1, \delta)$$

le théorème est prouvé. ■

D'après le théorème 4.1 , sous certaines conditions l'opérateur L admet un spectre ponctuel fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. I. Akhiezer, *Lessons on integral transformations*, Vissha scola, 1984, 120 pp.(russia).

[2] Yu. Berezansky, Decomposition on eigenvalues of selfadjoint operators, 1965, 748 p. (Russian).

[3] E. V. Cheremnikh. *On time asymptotic of the solutions of some Cauchy's problem with spectral singularities,* Math. Study, 1993, n. 2, p. 64-72 (ukrain).

[4] E. V. Cheremnikh, *Sur les valeurs limites de la résolvante dans le spectre*, Visnik Lviv polytechnic, Appl.Math.1997. No 320. C. 196-202

[5] E. V. Cheremnikh. *Asymptotic behaviour of the solution of some evolution equations*, Math.meth. and phys. mec. .elds, 1997, v. 40, n. 4, p. 75-85 (ukrain).

[6] E. V. Cheremnikh. *On estimate of norm of the function of the operator with spectral singularities*, Math. methods and phys.-mec. .eld, Math. methods and phys.-mech..elds. 1999. 42, No 4. P. 56-63.

[7] E. V. Cheremnikh. *Friedrichs model and problems with non-local boundary conditions*,Method. mathem. and phys. mech. .elds (2000), v.43, n.3, p.143-156 (Ukrain.).

[8] E. V. Cheremnikh. *Non-selfadjoint Friedrichs model and Weyl function*, Reports Nation. Acad. Sci. Ukraine, 2001, n. 8, p. 22-29 (ukrain)

[9] E. V. Cheremnikh, *On normal eigenvalue embedded in continuous spectrum*, Meth. Func. Anal. Topol.. 2001. vol. 7., No 1, P.1-16.

[10] E. V. Cheremnikh. *On time stability of space asymptotic behaviour of the solutions of evolution equations,* Ukrain. Math. J., 2002, v. 54, n. 3, p. 395-401 (ukrain).

[11] E. V. Cheremnikh, F. Diaba, G.V. Ivasyk, On time asymptotic of the solutions of transport evolution equation, Math. And comp. modeling, Phys. Math. Sciences 4 (2010) 208-223.

[12] R. Dautray et J.Lions, *Analyse mathématiques et calcul numérique*, 1987,p.128-143.

[13] R. Dautray et J.Lions, *Analyse mathématiques et calcul numérique*,1988, p.672

[14] C. Davis and C. Foia»s, Operators with bounded characteristic functions and their J-unitary dilatation, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) 32 (1-2) (1971), 127{39.

[15] F. Diaba. E. V. Cheremnikh. *On The point spectrum of transport operator* , Methods of Functional analysis and Topology (MFAT), vol 11, no. 1, 2005

[16] F. Diaba. E. V. Cheremnikh, *On time asymptotic for an evolution equation with non-local boundary condition*, Journal dynamical systems and geometric theories, vol. 4, No. 1. (2006).

[17] F. Diaba. A, Zemmouri. Cheremnikh E. V, Sturm-Liouville operator on the line with retarded potential, Advanced Research in Dynamical and Control Systems, Vol. 6, Issue. 3, 2014, pp. 53-61 Online ISSN : 1943-023X.

[18] F. Diaba, N. Larribi, E. V. Cheremnikh, Finitness of the point spectrum of transport operator with matricial 2×2 potential. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768 Volume 12, Number 3 (2016), pp. 2561-2571.

[19] T.Dreyfus, *The determinant of Scattering Matrix and its relation to the number of Eigenvalues*, J.Math.Analy.and Appl.64, 114-134 (1978).

[20] L. I. Dugenkova, Niznik L.P. *Extension analytique de la résolvante d'un opérateur auto-ajoint sur le spectre continu*, Ukr. math. journ., 1968, v.20, No.6, 759-765

[21] L. E. Elsgoltz, S.B. Norkin. *Introduction in the theory of differential equations with deviated argument.* M. : Nauka, 1971, 296 pp.

[22] H. Emamirad, *On the Lax-phillips Scattering theory for transport equation*, J.Funct.Anal., 62 (1985).

[23] V. Enss, *Asymptotic completeness for quantum mechanical potentiel Scattering*, Comm-Math.Phys., 61, (1978), 285-291

[24] L.D.Faddeev, *Sur le modèle de Friedrichs dans la théorie de perturbation du spectre continu*, Travaux de l'Inst.Math.Academic des Sciences l'URSS, 1964, V.73, p.292-313.

[25] K.O.Friedrichs. *Uber die Spectralzerlegungeines Integral operators.* Math.Annal. 115, $N^0$2,1938, 249-300.

[26] K.O.Friedrichs, *On the perturbation of continuous spectrum*,Comm.pure .appl.math., 1, $N^0$4, 1948, 361-406.

[27] K. O. Friedrichs, Perturbation of spectra in Hilbert space, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1965 ; Russian transl., Mir, Moscow 1969.

[28] M. G. Gasumov, F.G. Maxudov. *On principal part of the resolvent of nonselfadjoint operators in neighbourhood of spectral singularities,* Func.anal. and appl., No.3, v.6, (1972), 16-24.

[29] I. Z. Gohberg and M. Krein, An introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators, Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).

[30] I. Z. Gohberg, Krein M.G. *Introduction to theory of linear non-selfadjoint operators in Hilbert space*, Nauka Moscou 1965, pp.448. English transl. Transl. Math.Mnographs, vol 18, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1969.

[31] J.Hejtmanek, *Scattering theory of the linear Boltzmann operator*, Comm-Math.Phys., 43 (1975), 109-120.

[32] J. Hejtmanek, *The problem of reconstructing objects from projections as an inverse problem in Scattering theory of linear transport operator*, G.T.Herman and F.Naher ed., Mathematical aspects of computirized Tomography, Lecture Notes in Medical Informatics, 8, Springer, 1981, pp. 29-35.

[33] H. G. Kaper, C.G.Lekkerkerker and J.Hejtmanek, *Spectral Methods in linear transport theory*, Birkhauser,Basel,1982.

[34] T.Kato, *wave operators and Similarity for some non-selefadjoint operators*, Math.Ann., 162 (1966), 258-279.

[35] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators,* Springer-Verlag, 1966.

[36] T.Kato and S.T.Kuroda, *The abstract theory of Scattering*, Rocky Mountain J.Math, 1(1971), 127-171.

[37] T.Kato et Yajima, *Spectral and Scattering theory for a class of Non-Selfadjoint Operators*, Sci.pap.coll.Gen.Educ.Univ.Tokyo, V, 26,1976, N^{o}2, p.73-89.

[38] A.V. Kiselev, On the similarity problem for the Friedrichs model operators, Vestnik St. Pe-tersburg University series 1, 22 (4) (1998), 24-32 (in Russian)

[39] A.V. Kiselev and M.M. Faddeev, On the similarity problem for a class of non-self-adjoint operators, Vestnik St. Petersburg University series 1, 15 (3) (1996), 115{17 (in Russian).

[40] A.V. Kiselev and M.M. Faddeev, The similarity problem for non-self-adjoint operators with absolutely continuous spectrum, Functional Analysis and its Applications, 34, (2) (2000), 140{2.

[41] A.V. Kiselev, Some spectral propertiese of non-self adjoint Friedrichs model operator, School of Mathematical Sciences, Dublin Institute of Technology, 2005.

[42] V. M. Kolesnik, Ljance V.E. *Operators, related to Sturm-Liouville operator*, Math.sbornik, Kiev, 1976. P. 171-174.

[43] P. Koosis, Introduction to Hp spaces, Cambridge University Press, 1980.

[44] A. M. Krall. *On non-selfadjoint ordinary differential operators of second order*, Dokl. Acad. Sci.USSR 1965. vol. 165. No 6. C. 1235-1237.

[45] Yu. A. Kuperin, S.N. Naboko, R.V. Romanov *Spectral analysis of a transmission operator to a speed and the functional model,* Funct.anal. and its appl (1999), v.33, n.3, p.47-58 (Russian).

[46] S. T .Kuroda, *An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectrum and Scattering theory,* J. Analyse Math., 20 (1967), 51-117.

[47] W. E. Ljancé, *Completely regular perturbation of a continuous spectrum* ; IMath.Sbornik, (1970), v. 82, n.1, p.126-156 ; IIMath. Sbornik, (1971), v.84,n.1,p.141-158(Russian) ; English transl.I.Math.URSSSB.11(1970),115-143 ; II.Math.URSSSB.13(1971),137-154.

[48] J. Lehner & G.M.Wing, *On the spectrum of an symmetric operator arising in the transport theory of neutrons*, Communications on pure and Applied Mathematics, 8 (1955), 217-234.

[49] J. Lehner, *The spectrum of neutron transport operator for the slab*, J.Math.Mech (1962), v.11, n.2, p.173-181

[50] S.N. Naboko, On the singular spectrum of non-self-adjoint operator, Zapiski nauchnyh sem-inarov 113, (1981), 149-77 (English translation).

[51] S. N. Naboko, The conditions for similarity to unitary and self-adjoint operators, Functional Analysis and its Applications 18 (1984), 16-27.

[52] S. N. Naboko and M. M. Faddeev, Friedrichs model operators, similar to self-adjoint ones, Vestnik St. Petersburg University, series 4, 25 (1990), 78-82, (in Russian).

[53] N. Nikolski and S. Treil, Linear resolvent growth of rank one perturbation of a unitary operator does not imply its similarity to a normal operator, Journal d'Analyse Mathematique 87 (2002), 415-31.

[54] B. S. Pavlov *Spectral analysis of an differential operator with "spreaded" boundary condition*, Prob. Math. Phys., 1973, n. 6, p. 101–119 (russia)

[55] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, III.Scattering theory,* Academic Press, New York, 1979

[56] B. Simon, *Existence de la matrice Scattering pour l'équation linéarisée de Boltzmann*, Comm-Math.Phys., 41 (1975), 99-108

[57] S. A. Stepin, Perturbation of the spectrum and wave operateurs in linear transport theory, Communication of the Moscow MahematicalSociety (1999)

[58] T. Umeda, *Scattering and spectral theory for the linear Boltzmann operator*, J.Math.Kyoto Univ. (JMKYAZ), 24-2 (1984), 205-218.

[59] T.Umeda, *Smooth perturbation in ordred Banach spaces and Similarity for the linear transport operators*, J.Math. Japon, Vol.38, N04, 1986

[60] V.F. Veselov and S.N. Naboko, Characteristic function determinant and the singular spectrum of non-self-adjoint operator, Matematicheskii Sbornik 129 (171), (1) (1986), 20-39.

[61] J.Voigt, *On the existence of Scattering operator for linear Boltzmann equation*, J.Math.Anal.Appl., 58 (1977), 541-558.

[62] Yosido K. *Functional analysis, Third edition,* Springer-Heidelberg, New York,1971.