

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur
et la recherche scientifique

Université Badji Mokhtar
– Annaba –

Badji Mokhtar University
– Annaba –



جامعة باجي مختار

– عنابة –

Année 2016

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

SUR UNE CLASSE DE PROBLÈMES MAL-POSÉS

Option

Mathématiques Appliquées

Présentée par

Djemoui Sebti

DIRECTEUR DE THÈSE : Zouyed Fairouz

MC(A), U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : Chorfi Lahcène

PROF. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Rebbani Faouzia

PROF. EPST. ANNABA

EXAMINATEUR : Boussetila Nadjib

PROF. U. GUELMA

EXAMINATEUR : Nouar Ahmed

MC(A). U. SKIKDA

EXAMINATEUR : Alem Leila

MC(A). U.B.M. ANNABA

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

THÈSE

En vue de l'obtention du Diplôme de
Doctorat en Mathématiques

Présentée par
Djemoui Sebti

Sur Une Classe de Problèmes Mal-posés

Directeur de Thèse : Dr. Zouyed Fairouz U. Annaba

Jury :

<i>Président :</i>	Chorfi Lahcene	Prof.	U. Annaba
<i>Examineur :</i>	Rebbani Faouzia	Prof.	EPST. Annaba
<i>Examineur :</i>	Boussetila Nadjib	Prof.	U. Guelma
<i>Examineur :</i>	Nouar Ahmed	MCA.	U. Skikda
<i>Examineur :</i>	Alem Leila	MCA.	U. Annaba

Année 2016

Remerciements

C'est avec beaucoup de reconnaissance que j'exprime mes remerciements à mon directeur de thèse, Dr. Fairouz Zouyed, pour m'avoir encadré pendant ces années de thèse. Sa disponibilité et ses encouragements ont permis d'instaurer les bonnes conditions de travail.

Je tiens également à remercier les membres de jury, d'avoir accepté de relire mon manuscrit, le professeur Lahcène Chorfi de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse, le professeur Faouzia Rebbani directrice de l'école préparatoire aux sciences et techniques de Annaba , le professeur Nadjib Boussetila de l'université de Guelma, le docteur Ahmed Nouar de l'université de Skikda et le docteur Leila Alem de l'université de Annaba pour leur participation au jury. Je voudrais en profiter pour remercier chaleureusement le professeur Nadjib Boussetila pour les discussions et conseils avisés au cours des différentes rencontres qui m'ont permis d'enrichir considérablement ma vision scientifique.

ملخص

يتناول موضوع هذه الأطروحة دراسة ثلاثة مسائل عكسية معتلة. الصنف الأول و هو مسألة عكسية نهتم فيها بتحديد المصدر في معادلة تفاضلية مجردة من الدرجة الثانية. بالإرتكاز على طريقة كوزلوف - مازيا التكرارية تم إنشاء حلا مقربا للمسألة المطروحة واستخلاص بعض تقديرات الأخطاء الناتجة عن استعمال الطريقة. في المسألة الثانية درسنا جملة معادلات انتشار معتلة، حيث بفضل طريقة القيم الحدية المضافة تم تعديل المسألة و من خلال ذلك توصلنا إلى استنتاج بعض نتائج التقارب. النوع الثالث من هذه المسائل كرس لإعادة إنشاء الحد المجهول في جملة معادلات تفاضلية جزئية و المتمثل في المصدر باعتماد طريقة الإقتطاع الطيفي. في نهاية هذا العمل أدرجنا بعض الأمثلة العددية التوضيحية.

الكلمات المفتاحية: المسائل العكسية، المسائل المعتلة، جملة معادلات تفاضلية جزئية، معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، الطريقة التكرارية، طريقة القيم الحدية المضافة، طريقة الإقتطاع الطيفي.

ABSTRACT

In the present work we investigate three classes of ill posed problems, using different methods of regularization. In the first class, we study the inverse problem of determining an unknown source in a second order abstract differential equation. An iterative method is proposed in order to construct an approximate solution and to establish error estimates. The second class is devoted to the study of an ill posed diffusion system with a non diagonal matrix. By using the quasi-boundary value method, we regularize the problem and we establish some convergence results. In the third class we reconstruct the source term in a system of partial differential equation by using a truncation method. Finally, we put an end to this study by introducing some numerical examples.

Key words : *Inverse problems, ill-posed problems, system of partial differential equations, second order differential equation, regularization, iterative regularization method, quasi-boundary value method, truncation method.*

RÉSUMÉ

Dans le présent travail, on traite trois classes de problèmes inverses mal posés. La première classe, est consacrée à l'étude d'un problème inverse qui consiste à l'identification de source pour une équation abstraite de second ordre. En se basant sur la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya on construit une approximation de la solution et on établit certaines estimations d'erreurs. Dans la deuxième classe on étudie un système de diffusion mal-posé. En utilisant la méthode des valeurs aux limites auxiliaires, on régularise le problème et on établit certains résultats de convergence. Dans la troisième classe on reconstruit le terme source dans un système d'équations aux dérivées partielles en utilisant la méthode de troncature spectrale. Enfin on achève cette étude par quelques expérimentations numériques justifiant les résultats théoriques.

Mots clés : *Problèmes inverses, problèmes mal posés, système d'équations aux dérivées partielles, équation différentielle du second ordre, méthode itérative, méthode des valeurs aux limites auxiliaires, méthode de troncature spectrale.*

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
0.1 Problématique	1
0.2 Motivation et organisation de la thèse	3
1 RAPPELS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES	5
1.1 Eléments de la théorie spectrale	5
1.1.1 Opérateurs linéaires	5
1.1.2 Opérateurs linéaires bornés	6
1.1.3 Opérateurs linéaires fermés	7
1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non-borné	7
1.1.5 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints	8
1.1.6 Opérateurs compacts	8
1.1.7 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts	9
1.1.8 Opérateurs auto-adjoints à résolvante compacts	10
1.2 Semi-groupes	10
1.2.1 Semi-groupes fortement continus	10
1.2.2 Opérateurs sectoriels	12
1.2.3 Semi-groupes analytiques	13
1.2.4 Semi-groupes compacts	13
1.3 Généralités sur les problèmes inverses	13
1.3.1 Problèmes inverses	13
1.3.2 Problèmes mal-posés	14
1.3.3 La décomposition en valeurs singulières	15
1.3.4 Régularisation des problèmes inverses	17
2 IDENTIFICATION DE SOURCE POUR UNE ÉQUATION BIPARABOLIQUE	21
2.1 Formulation du problème	21
2.2 Préliminaires	22
2.2.1 Problème direct	23
2.2.2 Caractère mal-posé du problème inverse	24
2.3 Procédure itérative (Kozlov-Maz'ya) et résultats de convergence	25
2.4 Implémentation Numérique	30
3 ETUDE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS MAL POSÉ	39
3.1 Introduction	39
3.2 Préliminaires	40
3.3 Instabilité du problème	42

3.4	Méthode des valeurs aux limites auxiliaires	43
3.5	Exemple numérique	50
4	ETUDE D'UN PROBLÈME INVERSE POUR UN SYSTÈME DE DIFFUSION	54
4.1	Formulation du problème	54
4.2	Problème direct	55
4.3	Méthode de troncature spectrale	55
4.4	Implementation numérique	58
	Programmes Matlab	76
	Conclusion et perspectives	80
	Publications	81
	Bibliographie	110

INTRODUCTION GÉNÉRALE

We call two problems inverses of one another if the formulation of each involves all or part of the solution of the other. Often, for historical reasons, one of the two problems has been studied extensively for some time, while the other is newer and not so well understood. In such cases, the former is called the direct problem, while the latter is called the inverse problem.

J. B. Keller. Inverse problems. The American Mathematical Monthly, 83(2) : 107-118, 1976

0.1 Problématique

Pour décrire le comportement de phénomènes physiques, les physiciens et les ingénieurs élaborent des modèles dits de «connaissances». Une étape initiale de modélisation des phénomènes, qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement est dite problème direct. Ce dernier consiste à prédire les effets d'un phénomène connaissant les causes qui en sont à l'origine.

Par opposition, le problème inverse a pour objectif de déterminer les causes d'un phénomène à partir de l'observation de ses effets. Un problème inverse est donc une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou de mesures).

En général, problème inverse et problème direct sont complémentaires, en effet, la résolution du problème inverse ne se fait pas sans une modélisation préalable du phénomène étudié, autrement dit sans la résolution du problème direct correspondant qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables. Ensuite, à partir des mesures expérimentales obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à valider le modèle par résolution du problème inverse.

La problématique inverse constitue une thématique extrêmement vaste, présente dans de nombreux domaines qui peuvent être très différents les uns des autres : en sismologie, la

localisation de l'épicentre d'un tremblement de terre est possible grâce à des mesures faites par plusieurs stations sismiques réparties sur la surface du globe terrestre, tout autour du séisme. Ainsi, à partir de ces diverses observations l'origine du séisme peut être, à posteriori déterminée précisément. En météorologie [64] : l'évolution de la météo à plus au moins long terme repose sur l'identification des conditions initiales grâce à l'ensemble des données disponibles : les données d'observation (observées directement (température, vent,...) ou déduites (radiances)), et les données issues de précédentes prévisions météorologiques. Grâce à cet ensemble d'informations disponibles, on remonte aux conditions initiales qui vont permettre ensuite, par une intégration classique d'un modèle physique, de prédire l'évolution de différents paramètres météorologiques (température, humidité, etc...). Un autre exemple de discipline qui est une source abondante de problèmes inverses est l'hydrogéologie, ou l'étude des nappes phréatiques. En effet, l'accès aux couches du sous-sol pour la mesure des propriétés aqueuses des roches étant difficile, les scientifiques ont souvent recours à des systèmes de mesures placés à la surface de la terre pour pouvoir remonter à certaines propriétés de l'eau souterraine. Toutes ces situations sont des cas typiques de problèmes inverses. Toutefois, malgré son omniprésence dans les problèmes de physiques, la résolution des problèmes inverses est une problématique qui reste encore aujourd'hui très complexe. Cette complexité provient de leur caractère mal-posé.

La notion de problèmes bien et mal posés a été introduite par le mathématicien français Jacques Hadamard au début du siècle dernier. Un problème est dit bien-posé au sens d'Hadamard lorsque les trois conditions suivantes sont satisfaites : la solution existe, elle est unique et est stable, c'est à dire elle dépend continûment des données. Si l'une de ces trois conditions n'est pas satisfaite, le problème est considéré mal-posé.

Assurer l'existence d'une solution est de loin ce qui est le plus aisé. Si la solution d'un problème inverse n'existe pas, il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution. Par contre rétablir l'unicité et la stabilité de la solution s'avère plus délicat. Tout d'abord, l'absence de la stabilité de la solution peut engendrer d'importantes erreurs dans la résolution, en particulier en vue d'une résolution numérique. En effet, si la solution ne dépend pas continûment des données d'entrée du problème, alors cela signifie qu'une faible variation de ces données d'entrée peut générer d'importantes variations de la solution. Quant à la non unicité de la solution, elle constitue également un problème sérieux : lorsque plusieurs solutions sont possibles, il devient nécessaire de trouver un moyen de choisir la meilleure, c'est à dire la plus exacte d'un point de vue physique. Afin de pallier à ces problèmes de stabilité et de non unicité, on a recours à l'utilisation des méthodes dites de régularisation.

L'objectif de toute méthode de régularisation d'un problème inverse mal-posé est d'approcher le problème considéré par un autre bien-posé, tout en incorporant les informations supplémentaires dont on dispose et qui proviennent de considérations physiques, afin d'obtenir une solution approchée stable par rapport aux mesures.

Dans la littérature mathématique différentes méthodes ont été proposées pour résoudre les problèmes inverses mal-posés. On cite la méthode de régularisation de Tikhonov [108]. La méthode de quasi-réversibilité (Q.R. method) introduite par Lattes et Lions [74] et développée dans les travaux de L. E. Payne [93], [92], R.E Showaler [105], [106], [107], K. Miller [88]. La régularisation par conditions non locales (Q.B.V. method), introduite par Abdulkarimov [1] et utilisée par P.N. Vabishchevich [117], I.V. Melnikova et al ([62], [84], [85]), D.N Hào [57], R.E. Showalter ([107], 1982) , G.W. Clark([23], 1994) et V.K. Ivanov ([62], 1995). La méthode

itérative alternative proposée par Kozlov et Maz'ya ([69], [68]).

D'un point de vue mathématique il sera commode de distinguer entre deux classes de problèmes inverses, les problèmes linéaires et non linéaires. Dans le cas des problèmes linéaires, le recours à l'algèbre linéaire et à l'analyse fonctionnelle permet d'obtenir des résultats précis, et des algorithmes efficaces. Par contre les problèmes non linéaires sont plus difficiles, et il existe moins de résultats généraux [Kern, 2002].

0.2 Motivation et organisation de la thèse

Il arrive fréquemment qu'une ou plusieurs grandeurs physiques d'intérêt (termes sources, conditions aux limites, condition initiale...) ne soient pas directement mesurables à partir de leur nature physique, l'accissibilité à la mesure ou à cause d'un environnement «agressif» pour les capteurs, par exemples les hautes températures et la difficulté d'accès dans la chambre de combustion d'un moteur [29], dans une enceinte contenant un feu [100] ou sur les faces actives d'outils d'usinage [72] sont des cas où le recourt aux problèmes inverses (appelés aussi problèmes d'identification) est nécessaire. On s'efforce alors d'atteindre ces grandeurs par l'intermédiaire d'autres grandeurs observables et reliées aux inconnues à travers les lois de physique concernées.

C'est dans ce contexte que l'objectif de ce travail est d'apporter une contribution à la résolution des problèmes d'identification, en se basant sur certaines méthodes de régularisation.

La thèse est composée d'une introduction et de quatre chapitres et est organisée comme suit :

- Dans l'introduction on décrit le contexte de l'étude abordée, on développe la problématique et on cite certaines approches proposées dans la littérature pour traiter les problèmes considérés dans le manuscrit.
- Le premier chapitre a pour but dans un premier temps de rappeler certains outils d'analyse fonctionnelle servant aux différents développements proposés dans ce manuscrit, puis dans un second temps d'introduire le concept de problèmes inverses et les outils d'analyse des problèmes mal-posés.
- Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème inverse d'identification de source pour une équation différentielle d'ordre 2. La résolution est basée sur un procédé itératif initialement proposé par Kozlov-Maz'ya qui consiste à résoudre une suite de problèmes bien-posés dont les solutions convergent vers la solution du problème considéré. L'étude est achevée par des résultats numériques illustrant la précision et l'efficacité de la méthode utilisée.
- Dans le troisième chapitre, on traite un système d'équations de diffusion, où l'objectif est de reconstruire les données initiales à partir des données finales. On montre tout d'abord que le problème est mal-posé, puis en se basant sur la méthode des valeurs aux limites auxiliaires, on construit une solution approchée du problème considéré et on établit certaines estimations d'erreurs.

- Dans le chapitre quatre, on s'intéresse à l'identification du terme source dans un système d'équations aux dérivées partielles. Grâce à la troncature spectrale, on construit une solution régularisée du problème et on établit certains résultats de convergence. Le chapitre se termine par des exemples numériques justifiant les résultats théoriques obtenus.

Notans ici que malgré que la problématique inverse a connu un essort considérable ces dernières décennies. On ne trouve pas beaucoup de travaux concernant les systèmes d'équations aux dérivées partielles ce qui a motivé notre étude.

Chapitre 1

RAPPELS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre on rappelle quelques définitions, notions et résultats qui seront utilisés par la suite dans nos études ou qui seront nécessaires à une bonne compréhension de celles-ci. Pour plus détails nous renvoyons le lecteur aux références : Kress [71], Engl [37], Kern [66], Brezis [18], Dautray [28], Dunford-Schwartz [31], Edmunds [32], Pazy [94].

1.1 Éléments de la théorie spectrale

Dans ce qui suit E et F désignent des espaces de Banach et H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et de la norme correspondante $\|\cdot\|$.

1.1.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.1.1 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ est une application linéaire A définie d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ et à valeurs dans F , $D(A)$ est appelé le domaine de A .*

On dit que A est à domaine dense ou (densément défini) si $\overline{D(A)} = E$.

- *On appelle noyau de A le sous-espace de E , défini par*

$$N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}.$$

- *On appelle image de A le sous-espace de F , défini par*

$$R(A) = A(D(A)).$$

- *On appelle graphe de A le sous-espace de $E \times F$, défini par*

$$G(A) = \{(x, Ax) \in E \times F : x \in D(A)\}.$$

Définition 1.1.2 *Soient $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ et $B : D(B) \subset E \rightarrow F$, deux opérateurs linéaires. On dit que B est une extension de A et on note $A \subset B$ si $D(A) \subset D(B)$ et $\forall x \in D(A), Ax = Bx$.*

Définition 1.1.3 *Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$ dense dans H , et soit $D(A^*)$ l'ensemble des vecteurs $v \in H$ pour lesquels il existe $h \in H$ tel que*

$$(Au, v) = (u, h), \forall u \in D(A).$$

Pour tout $v \in D(A^*)$, on pose

$$A^*v = h.$$

On appelle A^* l'opérateur adjoint de A .

Définition 1.1.4 L'opérateur $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est dit

- symétrique lorsque $(Au, v) = (u, Av)$, $\forall u, v \in D(A)$,
- aut-adjoint si $A = A^*$, i.e $D(A) = D(A^*)$ et $(u, Av) = (Au, v)$, $\forall u, v \in D(A)$.

1.1.2 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.5 On dit qu'un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est borné s'il est continu, autrement dit :

$$\exists c > 0, \forall x \in E, \|Ax\| \leq c\|x\|.$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de E dans F , muni de la norme

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}(E)$.

Théorème 1.1.1 (Théorème de l'isomorphisme)

Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijectif alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Proposition 1.1.1 Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. Si $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, alors $I - A$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n.$$

Proposition 1.1.2 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Il existe un unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\forall u, v \in H$, $(Au, v) = (u, A^*v)$. De plus,

1. $\|A^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$,
2. Si A est inversible dans $\mathcal{L}(H)$, alors A^* est aussi inversible dans $\mathcal{L}(H)$ et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Définition 1.1.6 Un opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ est appelé un projecteur lorsque $P^2 = P$. Si de plus $P^* = P$, on dit que P est un projecteur orthogonal.

Proposition 1.1.3 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors pour tout $u \in H$,

1. $(Au, u) \in \mathbb{R}$,
2. $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup\{(Au, u) : \|u\| = 1\}$.

1.1.3 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.1.7 Un opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ est dit fermé si son graphe est fermé dans $E \times F$, i.e, pour toute suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que $x_n \rightarrow x \in E$ et $Ax_n \rightarrow y \in F$. Alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$.

Un opérateur linéaire est dit fermable s'il admet une extension fermée.

Théorème 1.1.2 (Théorème du graphe fermé)

Soit A un opérateur linéaire défini de E dans F , alors A est continu si et seulement s'il est fermé.

Théorème 1.1.3 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et soit $A : D(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur fermé, avec $\overline{D(A)} = H_1$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $R(A)$ est fermé.
- (ii) $R(A^*)$ est fermé.
- (iii) $R(A) = N(A^*)^\perp$.
- (iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$.

1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non-borné

Définition 1.1.8 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur fermé à domaine dense.

- On appelle spectre de A la partie de $\mathbb{C}$ défini par

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{L}(H)\}.$$

Les éléments de $\sigma(A)$ sont appelés valeurs spectrales de A .

- L'ensemble $\mathbb{C} - \sigma(A)$ est appelé ensemble résolvant de A et est noté $\rho(A)$, qui est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante de A au point λ par $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$

Pour tout $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a la formule de l'identité de la résolvante ;

$$R_\lambda(A)R_\mu(A) = (\mu - \lambda)(R_\lambda(A) - R_\mu(A)).$$

- L'application $\lambda \rightarrow R_\lambda(A)$ ($\lambda \in \rho(A)$) est analytique sur $\rho(A)$.
- L'opérateur $(\lambda I - A)$ peut ne pas être injectif et dans ce cas λ est une valeur propre. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre ponctuel de A et est noté $\sigma_p(A)$.

Un vecteur x non nul tel que $Ax = \lambda x$ est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

La multiplicité de la valeur propre λ est la dimension de $N(\lambda I - A)$.

- Si $\lambda \in \sigma(A) - \sigma_p(A)$, alors $R(\lambda I - A)$ est injectif mais non surjectif.

Deux cas se présentent :

- ▷ Si $R(\lambda I - A)$ n'est pas dense, on dit que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre résiduel de A .
- ▷ Si $R(\lambda I - A)$ est dense, on dit que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre continu de A .

1.1.5 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints

Théorème 1.1.4 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint. Alors

1. $\sigma(A) \in \mathbb{R}$.
2. $\sigma_r(A) = \emptyset$.
3. Si A est coercif i.e il existe $m > 0$ telle que

$$\forall x \in D(A), (Ax, x) \geq m\|x\|^2,$$

alors $\sigma(A) \subset [m, +\infty[$.

Théorème 1.1.5 Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Alors

- 1) $m, M \in [-\|A\|, \|A\|]$.
- 2) $m, M \in \sigma(A)$.
- 3) $\sigma(A) \subset [m, M]$.
- 4) $\|A\| = \sup\{|(Ax, x)|, x \in H \text{ et } \|x\| = 1\}$, en particulier $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Corollaire 1.1.1 Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint, alors

$$\|A\| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Proposition 1.1.4 Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, $\sigma(A)$ le spectre de A . Pour $f, g \in C(\sigma(A), \mathbb{K})$, on a :

- 1) $(\lambda f + \mu g)(A) = \lambda f(A) + \mu g(A)$.
- 2) $(f.g)(A) = f(A).g(A)$.
- 3) $(f(A))^* = \overline{f(A)}$.
- 4) $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$.
- 5) L'opérateur $f(A)$ est auto-adjoint positif si et seulement si f est à valeurs réelles.

1.1.6 Opérateurs compacts

Définition 1.1.9 Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, on dit que A est compact si $\overline{A(B_E)}$ est une partie compacte de F , où B_E est la boule unité fermée de E .

On note par $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F .

- ▷ Dans le cas où $E = F$, on note simplement cet espace par $\mathcal{K}(E)$.
- ▷ L'ensemble des opérateurs compacts $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 1.1.5 Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

1. A est compact,
2. Pour tout ensemble B borné, $\overline{A(B)}$ est compact,

3. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de E , alors $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

Proposition 1.1.6 Soient E, F et G trois espaces de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$, alors si A ou B est compact, $A \circ B \in \mathcal{K}(E, G)$.

Corollaire 1.1.2 Si E est de dimension infinie. Alors l'opérateur identité n'est pas compact.

Définition 1.1.10 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite de rang fini si $\dim R(A) < \infty$.

Remarque 1.1.1 Tout opérateur de rang fini est compact : $\overline{A(B_E)}$ est un fermé borné de l'espace de dimension fini $R(A)$ est donc compact.

Proposition 1.1.7 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Alors $A \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ si et seulement s'il existe une suite $A_n \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ de rang fini telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = 0.$$

1.1.7 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

Un résultat classique d'algèbre linéaire affirme qu'en dimension finie tout opérateur auto-adjoint est diagonalisable dans une base orthonormée. Le but de cette section est de généraliser ce résultat en dimension infinie mais, pour ce faire, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse de compacité et donc de considérer des opérateurs auto-adjoints compacts.

Théorème 1.1.6 (Spectre d'un opérateur compact)

Soit $A \in \mathcal{K}(H)$, avec $\dim(H) = \infty$. Alors, on a :

1. $0 \in \sigma(A)$,
2. $\sigma(A) - \{0\} = \sigma_p(A) - \{0\}$,
3. l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(A) = \{0\}$,
 - ou bien $\sigma(A) - \{0\}$ est fini,
 - ou bien $\sigma(A) - \{0\}$ est une suite qui tend vers zéro.

Définition 1.1.11 Soit $(H, (.,.))$ un espace de Hilbert. Une famille $((e_i)_{i \in I})$ de vecteurs de H est dite

1. orthonormée si $(e_i, e_j) = 0$ pour tous $i, j \in I$, tels que $i \neq j$, et $(e_i, e_i) = 1$ pour tout $i \in I$,
2. totale si $\text{vect}((e_i)_{i \in I})$ (le sous espace engendré par $(e_i)_{i \in I}$) est dense dans H . On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H .

Théorème 1.1.7 Tout espace de Hilbert séparable i.e (admettant un sous ensemble dense et dénombrable) admet une base hilbertienne.

Théorème 1.1.8 (Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints)

Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit $A \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors H admet une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ formée de vecteurs propres de A , de sorte que

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, e_n)e_n, \quad \forall x \in H,$$

où λ_n est la valeur propre associée à e_n pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1.8 Opérateurs auto-adjoints à résolvante compacts

Définition 1.1.12 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non borné. On dit que A est à résolvante compacte s'il existe $\lambda \in \rho(A)$ tel que $R_\lambda(A)$ soit compacte.

► Le résultat suivant nous permet de déterminer le spectre des opérateurs dont la résolvante est compacte. Plus précisément, il affirme que le spectre de tels opérateurs est discret. (valeurs propres isolées et espaces propres de dimension finie).

Théorème 1.1.9 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte. Alors il existe une base hilbertienne dans H , $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset D(A)$ et une suite réelle $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $|\mu_n| \rightarrow \infty$ et $A\varphi_n = \mu_n\varphi_n$, pour $n \geq 1$.

De plus

$$D(A) = \left\{ u \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 < \infty \right\},$$

$$Au = \sum_{n \geq 1} \mu_n (u, \varphi_n) \varphi_n.$$

1.2 Semi-groupes

Cette classe d'opérateurs développée dans les années quarante, permet de résoudre plusieurs types d'équations aux dérivées partielles.

Notons par E l'espace de Banach et $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés définis sur E .

1.2.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.2.1 La famille $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est appelée semi-groupe si on a :

1. $T(0) = I$,
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, T(t+s) = T(t)T(s)$.

Définition 1.2.2 Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est dit fortement continu, et est noté C_0 -semi-groupe, si $T(t)$ est continue pour la topologie forte d'opérateurs sur $\mathcal{L}(E)$, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \text{ pour tout } x \in E.$$

Proposition 1.2.1 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Alors il existe des constantes réelles $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ telle que

$$\forall t \geq 0, \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\omega t}.$$

- Si $\omega = 0$, $M = 1$, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est dit C_0 -semi-groupe de contractions.

Corollaire 1.2.1 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe. Alors pour tout $x \in E$, $t \rightarrow T(t)x$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans E , i.e pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|T(t)x - T(t_0)x\| = 0.$$

1. Notons que dans ce résultat, il est important que l'opérateur A soit non-borné. En effet l'opérateur $(\lambda I - A)$ ne peut pas être compact si A est borné.

Définition 1.2.3 Le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est l'opérateur A défini par :

$$D(A) := \{x \in E : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe dans } E\},$$

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}, \quad x \in D(A).$$

$D(A)$ est non vide ($0 \in D(A)$) et est un sous-espace vectoriel de E . A est clairement linéaire de $D(A)$ dans E .

Proposition 1.2.2 Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dans E . Alors on a les propriétés suivantes :

$$(i) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in E, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x;$$

$$(ii) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in E, \quad \text{on a :}$$

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A), \quad \text{et} \quad A\left(\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x, \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq t < \infty,$$

$$(iii) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in D(A), \quad T(t)x \in D(A) \quad \text{et} \quad t \rightarrow T(t)x \text{ est différentiable sur } \mathbb{R}^+ \text{ avec}$$

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax;$$

$$(iv) \quad \forall s, t \geq 0, \quad \forall x \in D(A),$$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_0^t T(\tau)Ax d\tau;$$

$$(v) \quad A \text{ est un opérateur fermé à domaine dense.}$$

Proposition 1.2.3 Soit A de domaine $D(A)$ le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Alors on a :

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)} = E,$$

où $D(A^n)$ est le domaine de A^n .

Définition 1.2.4 Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est dit semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

Remarque 1.2.1 Soit A un opérateur linéaire borné sur E . Alors

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

► Le théorème suivant détermine la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A soit le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction.

Théorème 1.2.1 (*Théorème de Hille-Yosida*)

Un opérateur linéaire A de domaine $D(A)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, sur E si et seulement si

- (1) A est fermé et $\overline{D(A)} = E$;
- (2) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Corollaire 1.2.2 Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur E . Alors

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \subset \rho(A),$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$,

$$\|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}.$$

Corollaire 1.2.3 Un opérateur linéaire A de domaine $D(A)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur E , vérifiant $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{\omega t}$ si et seulement si

- (1) A est fermé et $\overline{D(A)} = E$;
- (2) $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in]\omega, \infty[$, on a

$$\|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Pour un semi-groupe fortement continu quelconque, on donne le théorème suivant

Théorème 1.2.2 Un opérateur linéaire A de domaine $D(A)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur E vérifiant $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M e^{\omega t}$ si et seulement si

- (1) A est fermé et $\overline{D(A)} = E$;
- (2) $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in]\omega, \infty[$, on a

$$\|(R_\lambda(A))^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

1.2.2 Opérateurs sectoriels

Il est important de préciser qu'il existe de nombreuses définitions équivalentes pour les opérateurs sectoriels. On utilisera ici celle donnée dans [50].

Définition 1.2.5 Un opérateur linéaire A sur E est dit sectoriel s'il est fermé et s'il existe $\theta \in]0; \pi[$ tel que $\sigma(A) \subset \overline{S_\theta}$ et $\sup_{\lambda \in \mathbb{C} - \overline{S_\theta}} \|(\lambda A - \lambda I)^{-1}\| < \infty$,

S_θ est le secteur défini par

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \theta\}.$$

Corollaire 1.2.4 .[58]

- (1) Si A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach, alors A est sectoriel.
- (2) Si A est un opérateur auto-adjoint à domaine dense dans un espace de Hilbert, et s'il est borné inférieurement, alors A est sectoriel.

1.2.3 Semi-groupes analytiques

Définition 1.2.6 Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on dit que l'application $S : S_\theta \cup \{0\} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ est un semi-groupe analytique si

1. $S(0) = Id$,
2. $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$ pour tout z_1, z_2 dans S_θ ,
3. Pour tout $x \in E$, $S(z)x$ est continue en 0,
4. L'application $z \rightarrow S(z)$ est analytique dans S_θ .

Théorème 1.2.3 Si A est un opérateur sectoriel, alors $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique noté $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$, tel que

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

où Γ est un contour dans l'ensemble résolvant $\rho(-A)$ avec $\arg \lambda \rightarrow \pm\theta$ quand $|\lambda| \rightarrow +\infty$ pour certain $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

1.2.4 Semi-groupes compacts

Définition 1.2.7 Un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est dit compact pour $t > t_0$ si pour tout $t > t_0$, $T(t)$ est un opérateur compact.

Théorème 1.2.4 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe. Si $T(t)$ est compact pour $t > t_0$, alors $T(t)$ est continu au sens de la topologie uniforme pour $t > t_0$.

Théorème 1.2.5 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe et A son générateur, alors $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est compact si et seulement si $T(t)$ est continu au sens topologique uniforme pour $t > 0$, et $R_\lambda(A)$ est compact pour $\lambda \in \rho(A)$, tel que

$$R_\lambda(A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds.$$

Corollaire 1.2.5 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Si $R_\lambda(A)$ est compact pour un $\lambda \in \rho(A)$ et $T(t)$ est continu dans $\mathcal{L}(E)$ pour $t > t_0$, alors $T(t)$ est compact pour $t > t_0$.

Corollaire 1.2.6 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe tel que son générateur infinitésimal A est borné. Alors $T(t)$ est compact si et seulement si $R_\lambda(A)$ est compact pour tout $\lambda \in \rho(A)$.

1.3 Généralités sur les problèmes inverses

1.3.1 Problèmes inverses

Pour analyser un phénomène physique, l'usage veut que nous relions les paramètres P qui caractérisent le phénomène aux informations mesurables d qui en résultent à partir d'un modèle, que l'on note M . Cette relation entre les grandeurs d'entrée et sortie d'un modèle peut s'écrire sous la forme suivante

$$M(P) = d, \tag{1.1}$$

où M peut s'exprimer sous de nombreuses formes, comme par exemple un système linéaire ou non linéaire d'équations différentielles.

Dans la plupart des cas, nous cherchons à calculer la réponse (en général mesurable) d'un système physique à des sollicitations connues, à partir de la donnée des paramètres qui le caractérisent. En revanche l'évaluation des paramètres du système à partir de la mesure de sa réponse aux sollicitations implique la résolution des équations de la physique en sens inverse de celui habituellement pratiqué. Cela constitue un problème inverse. Afin de mieux cerner les difficultés inhérentes à la résolution des problèmes inverses, on introduit la notion de problème bien et mal-posé.

1.3.2 Problèmes mal-posés

En étudiant la résolution d'équations aux dérivées partielles, le mathématicien **Jacques Hadamard** (1902,[52]) a exprimé le concept de problème bien-posé.

Définition 1.3.1 Soient X et Y deux espaces de Banach, $K : X \rightarrow Y$ un opérateur. Le problème $Kx = y$ est dit bien-posé au sens de Hadamard si :

- Pour tout $y \in Y$, il existe au moins $x \in X$, tel que $Kx = y$ (existence).
- Pour tout $y \in Y$, il y a au plus une solution $x \in X$ (unicité).
- La solution $x \in X$ dépend continûment de la donnée y , i.e. pour toute suite $(x_n) \subset X$, avec $Kx_n \rightarrow Ky$, alors $x_n \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$ (stabilité).

► Ces trois conditions reflètent les contraintes pour qu'un modèle en physique mathématique ait un sens et conduise à une résolution du problème posé. Si l'une de ces trois conditions n'est pas satisfaite, le problème est dit mal-posé.

Remarque 1.3.1 Dans la définition précédente, il est important de spécifier le triplet (K, X, Y) et leur normes, car l'existence et l'unicité de la solution dépendent de la nature algébrique des espaces et de l'opérateur K (bijectivité de K), par contre la stabilité dépend de la topologie des espaces (continuité ou non de l'opérateur inverse).

Les problèmes inverses sont souvent mal-posés, ne vérifient pas donc l'une ou l'autre des trois conditions citées dans la définition précédente.

- Le problème d'existence peut être restauré en élargissant l'espace de recherche de la solution.
- La perte de l'unicité est la conséquence d'un manque d'information sur le modèle qu'il faut enrichir en apportant des informations supplémentaires, telles que par exemple le signe de la solution.
- La stabilité semble la propriété la plus importante dans l'étude de problèmes inverses. Lorsque cette propriété est perdue, la moindre erreur sur les données peut entraîner une erreur incontrôlée sur la solution et donc à avoir des difficultés pour obtenir des processus numériques convergents.

Dans ce qui suit, nous présentons un exemple sur les problèmes mal-posés.

Exemple.

On considère le problème qui consiste à déterminer une fonction $u(x, y)$ définie sur $\mathbb{R} \times [0, \infty)$

et vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{1}{n} \sin(nx) = g_n(x), \end{cases} \quad (1.2)$$

il est facile de montrer par séparation de variables que $u(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$ est la solution du problème (1.2).

On remarque que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

par contre

$$\sup |u(x, y)| = \frac{1}{n^2} \sinh(ny) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \text{ pour tout, } y > 0.$$

Ce qui prouve que le problème est mal-posé.

Avant de traiter un problème inverse il convient de disposer d'éléments précis pour évaluer et juger les instabilités causées par l'opérateur associé au problème considéré. Pour ce but, on introduit la méthode de la décomposition en valeurs singulières.

1.3.3 La décomposition en valeurs singulières

Soient X et Y deux espaces de Hilbert. Considérons le problème inverse

$$Kx = y, \quad (1.3)$$

où $K : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire compact².

Définition 1.3.2 Soit $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur compact. On appelle valeur singulière de l'opérateur K , le nombre réel positif $\mu = \sqrt{\lambda}$, où λ est valeur propre de l'opérateur auto-adjoint compact K^*K .

Théorème 1.3.1 Soient $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur compact et $(\mu_n)_n$ la suite des valeurs singulières de K . Alors il existe deux systèmes orthonormés $(\varphi_n) \subset X$ et $(\psi_n) \subset Y$ tels que

$$K\varphi_n = \mu_n\psi_n, \text{ et, } K^*\psi_n = \mu_n\varphi_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout $u \in X$, on a la décomposition suivante

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \varphi_n) \varphi_n + Pu,$$

où P désigne la projection de X sur $N(K)$ (noyau de K) et

$$Ku = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (u, \varphi_n) \psi_n.$$

$(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)$ est appelé système singulier de K .

2. La considération de cette classe d'opérateurs (opérateurs compacts) découle du fait qu'un grand nombre de problèmes inverses linéaires implique de tels opérateurs. De plus un opérateur compact ne mène jamais à un problème bien-posé. .

Remarque 1.3.2 *Le comportement de valeurs singulières aide à déterminer le degré de complexité du problème mal-posé :*

- Si la suite des valeurs singulières $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède un comportement polynomial, i.e.

$$(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \sim \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}^{-\beta}, \quad \beta > 0,$$

le problème est dit moyennement mal-posé.

- Si la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît exponentiellement vers zéro, i.e.

$$\mu_n \leq (e^{-n^\beta}), \quad \beta > 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

on parlera d'un problème sévèrement mal-posé.

On présente dans ce qui suit un exemple d'un opérateur pour lequel on peut déterminer les valeurs singulières.

Exemple.

Soit $A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$, l'opérateur défini par

$$Ax(t) = \int_0^t x(s) ds.$$

Pour tout $y \in L^2(0, 1)$, on a

$$(Ax, y) = \int_0^1 \int_0^t x(s) y(t) ds dt = \int_0^1 \left(\int_s^1 y(t) dt \right) x(s) ds = (x, A^* y).$$

D'où l'opérateur adjoint est donnée par

$$A^* y(t) = \int_t^1 x(s) ds.$$

Pour tout $u \in L^2(0, 1)$, on définit

$$A^* A u(t) = \int_t^1 \int_0^s u(\tau) d\tau ds.$$

Il est alors possible de démontrer que le système singulier $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ associé à cet opérateur est défini par

$$\mu_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right), \quad \psi_n(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right),$$

on remarque que $(\mu_n) \sim (\frac{1}{n})$ la décroissance des valeurs singulières est polynomiale, donc le problème est moyennement mal-posé.

Théorème 1.3.2 (Picard, [71])

Soit $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire compact de système singulier $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)$. L'équation

$$Kx = y$$

est résoluble si et seulement si $y \in N(K^*)^\perp = \overline{R(K)}$ et vérifie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(y, \psi_n)_Y|^2 < \infty.$$

Dans ce cas

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} |(y, \psi_n)_Y| \varphi_n, \quad (1.4)$$

est la solution de l'équation (1.3)

Le théorème de Picard illustre bien la nature mal-posé de l'équation (1.3). En effet, un second membre perturbé

$$y^\delta = y + \delta \psi_n,$$

donne la solution

$$x^\delta = x + \delta \frac{\varphi_n}{\mu_n}.$$

Alors le rapport

$$\frac{\|x^\delta - x\|_X}{\|y^\delta - y\|_Y} = \frac{1}{\mu_n},$$

veut dire que l'erreur sur la solution est amplifiée par l'inverse de la plus petite valeur singulière par rapport à l'erreur sur la donnée. Dans le cas où cette petite valeur singulière est petite, cette amplification peut devenir dramatique, ce qui explique l'instabilité rencontrée lors de la résolution du problèmes mal-posés.

1.3.4 Régularisation des problèmes inverses

Pour résoudre les problèmes inverses et contourner leurs instabilités, on a recours à l'utilisation des méthodes dites de régularisation dont le principe consiste à substituer au problème mal-posé une suite de problèmes bien-posés dépendant d'un paramètre dit de régularisation. Les solutions approchées de ces derniers deviennent stables vis à vis des données perturbées.

Avant d'introduire certaines méthodes de régularisation utilisées dans le présent travail, on commence par introduire la notion de schéma régularisant.

Schéma régularisant

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire.

Idéalement, on souhaite utiliser une donnée $y \in H_2$ pour trouver la solution du problème (1.3). d'un point de vu pratique, ce n'est pas malheureusement toujours possible, seule une mesure approximative de y est disponible. Donc, connaissant la donnée y à une erreur δ près, notée y^δ , i.e.,

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta,$$

on souhaite résoudre le problème

$$Kx^\delta = y^\delta. \quad (1.5)$$

La résolution de l'équation (1.5) préserve des difficultés de stabilité liée à l'opérateur inverse K^{-1} . Pour pallier à ce problème une approximation R_α est introduite, telle que $x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta$ soit une solution approchée stable du problème (1.5).

Définition 1.3.3 (*Stratégie de régularisation*)

Soient X et Y deux espaces normés, $K : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné injectif. La famille des opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : Y \rightarrow X, \alpha > 0$, telle que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Kx = x, \quad x \in X \quad (1.6)$$

est appelée «Schéma régularisant» de l'opérateur K , α est le paramètre de régularisation.

Remarque 1.3.3 Pour un opérateur compact K en dimension infinie :

- la famille d'opérateurs (R_α) ne peut pas être uniformément bornée par rapport à α , autrement dit, il existe une suite (α_k) telle que $\|R_{\alpha_k}\| \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$.
- La convergence $R_\alpha y \rightarrow K^{-1}y$ n'est pas uniforme, c'est à dire qu'il n'y a pas de convergence de $R_\alpha K$ vers l'identité au sens de la norme des opérateurs.

► Soit $x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta$ une approximation de la solution x au problème $y = Kx$. On a

$$\|x_\alpha^\delta - x\| = \|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y + R_\alpha Kx - x\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha Kx - x\|.$$

Cette inégalité montre que l'erreur se compose de deux termes :

- (i) Un premier terme dû aux erreurs sur la donnée multiplié par $\|R_\alpha\|$, qui tend vers l'infini lorsque $\alpha \rightarrow 0$.
- (ii) Un second terme dû à l'approximation de la solution exacte et qui tend vers zéro avec α . Nous voyons donc bien la nécessité d'adapter le paramètre de régularisation au niveau de bruit présent dans les données.

• Une stratégie de régularisation peut se concevoir de deux façon :

- Une stratégie de régularisation à priori : si l'on possède une estimation du niveau de bruit, on peut en déduire comment il faut choisir $\alpha = \alpha(\delta)$, dans ce cas le choix de α ne dépend pas de la donnée perturbée.
- Une stratégie de régularisation à posteriori : elle consiste à estimer au cours de calcul la valeur convenable du paramètre, en utilisant les données disponibles, $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter ([36],[56]).

• Si K est un opérateur compact dont le système singulier est $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. L'idée de régularisation dans ce cas est de régulariser le problème en amortissant ou en filtrant l'influence du rapport $\frac{1}{\mu}$ dans l'identité(1.4).

En effet on a le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire injectif compact de système singulier $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et soit $q : (0, \infty) \times (0, \|K\|) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante positive $C(\alpha)$, vérifiant

$$|q(\alpha, \mu)| \leq C(\alpha)$$

et

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} q(\alpha, \mu) = 1,$$

avec $0 \leq \mu \leq \|K\|$. Alors la famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : H_2 \rightarrow H_1, \alpha > 0$, définis par

$$R_\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} q(\alpha, \mu_n) (y, \psi_n) \varphi_n, \quad y \in H_2,$$

décrit un schéma régularisant avec $\|R_\alpha\| \leq C(\alpha)$.

Donc $q(\alpha, \mu)$ joue le rôle d'un filtre : on la souhaite proche de 1 si μ est grand, et telle que $\frac{q(\alpha, \mu)}{\mu}$ reste borné lorsque $\mu \rightarrow 0$.

Pour le choix du paramètre de régularisation de nombreuses stratégies ont été proposées, ce sont pour la plupart des méthodes d'estimation à posteriori. Parmi ces stratégies on cite le principe de Morozov [89], consistant à rechercher un résidu $\|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|$ égal au niveau de bruit δ .

A la fin de ce chapitre, on représente quelques méthodes de régularisation.

Méthodes de régularisation

- **Méthode de régularisation de Tikhonov** : Pour résoudre le problème mal-posé $Kx = y$, où $K : H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur compact, cette méthode consiste à minimiser la fonctionnelle : $\|Kx - y\|^2$ par rapport à x . Si H_1 est de dimension infinie le problème de minimisation est aussi mal-posé d'après le lemme suivant

Lemme 1.3.1 *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire borné et $y \in H_2$. Alors $\hat{x}$ est solution du problème de minimisation, i.e.*

$$\|K\hat{x} - y\| \leq \|Kx - y\|, \text{ pour tout } x \in H_1$$

si et seulement si $\hat{x}$ résout l'équation normale

$$K^*K\hat{x} = Ky,^3$$

où $K^* : H_2 \rightarrow H_1$ désigne l'opérateur adjoint de K .

La régularisation de Tikhonov mène alors à la détermination de $x^\alpha \in H_1$ minimisant la fonctionnelle (dite de Tikhonov) définie par

$$J_\alpha(x) = \|Kx - y\|^2 + \alpha\|x\|^2, \quad \forall x \in H_1.$$

Le théorème suivant détermine une forme explicite minimisant la fonctionnelle de Tikhonov.

Théorème 1.3.4 *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire borné et $\alpha > 0$. Alors la fonctionnelle de Tikhonov admet un minimum unique $x^\alpha \in H_1$, qui est la solution de l'équation normale*

$$\alpha x^\alpha + K^*Kx^\alpha = K^*y \tag{1.7}$$

La solution de (1.7) s'écrit donc $x^\alpha = R_\alpha y = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^*y$.

La famille d'opérateurs $R_\alpha = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^* : H_2 \rightarrow H_1$, décrit un schéma régularisant, avec

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

- Si K est compact, en choisissant un système singulier $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour K , alors $R_\alpha y$ admet la représentation

$$R_\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_n)}{\mu_n} (y, \psi_n) \varphi_n, \quad y \in H_2,$$

avec $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2}$ est la fonction filtre.

$q(\alpha, \mu)$ est bornée : $0 < q(\alpha, \mu) < 1$ et vérifiée $q(\alpha, \mu) \leq C(\alpha)\mu$, avec $C(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}$.

3. L'opérateur K^*K est compact, d'où le problème de minimisation est mal-posé.

- **La méthode de quasi-réversibilité (Q.R. method)** : La méthode de quasi-réversibilité introduite par R. Lattes et J.L. Lions [74] et qui a été développée dans les travaux de L.E. Payne [93], [92], R. Showalter [105], [106], [107] et K. Miller [88]. Cette méthode consiste à remplacer le problème original mal-posé par un problème approché bien-posé au sens d'Hadamard et à rechercher des quasi-solutions stables vis-à-vis de faibles variations des données.
- **Régularisation avec conditions non-locales (Q.B.V. method)** : Due initialement à L. Abdulkirimov [1], son principe consiste à perturber les conditions aux limites en lui ajoutant un terme correcteur pour obtenir un problème non-local bien-posé, elle a été développée ensuite par R. E. Showalter [107], I.V. Melnikova et al. [62], [84], [85], G. W. Clark [23] et D. N. hào [57].
- **Régularisation par troncature spectrale** : Si l'on connaît la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur K , on peut proposer une méthode de régularisation appelée troncature spectrale. Cette méthode consiste à tronquer le développement spectral à un certain rang. Ce rang joue le rôle de paramètre de régularisation. Cette méthode est aujourd'hui très largement utilisée puisqu'elle fait partie des outils les plus performants pour résoudre les problèmes inverses mal-posés ([34], [44], [99], [101]).
- **Les méthodes itératives** : Les méthodes itératives consistent à générer une succession de problèmes bien-posés dont les solutions convergent vers la solution du problème considéré et où l'indice d'itération joue le rôle de paramètre de régularisation. Dans leurs travaux ([69], [68]) Kozlov et Maz'ya ont proposé une méthode itérative alternative, la convergence de cette méthode est basée sur la notion d'opérateur quasi-contractant dans le cadre hilbertien. Par la suite, le principe de cette méthode a été utilisé pour la résolution de différentes classes de problèmes mal-posés (elliptiques, paraboliques et hyperboliques), voir les travaux de G. Bastay ([12], 1995), J. Baumeister et A. Leita ([14], 2001), A. Bouzitouna, N. Boussetila et F. Rebbani ([16]).

Chapitre 2

IDENTIFICATION DE SOURCE POUR UNE ÉQUATION BIPARABOLIQUE

2.1 Formulation du problème

Soit H un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire $(.,.)$ et de la norme $\|.\|$. Considérons le problème biparabolique inverse suivant : déterminer la fonction $f \in H$ vérifiant le système

$$\begin{cases} u''(t) + 2Au'(t) + A^2u(t) = (\partial_t + A)^2u(t) = f, & 0 < t < T, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

à partir de la donnée supplémentaire

$$u(T) = g, \quad (2.2)$$

où $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire auto-adjoint positif et à résolvante compacte¹, on note par $\sigma(A)$ le spectre de l'opérateur A .

Le problème (2.1) est une version abstraite du système

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - 2\Delta u_t(x, t) + \Delta^2 u(x, t) = f(x), & 0 < t < T, \quad x \in \Omega, \\ u(x, t) = \Delta u(x, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

qui modélise un phénomène de vibrations structurelles amorties de ficelle ou un faisceau [75, 76, 81]. En outre, ce problème peut être considéré comme un problème biparabolique dans un cadre abstrait. Pour la motivation physique, le lecteur pourra consulter [45].

1. Le spectre de tels opérateurs est discret : valeurs propres isolées et espaces propres de dimension finie.

2.2 Préliminaires

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset H$ une base orthonormée formée de vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+$, i.e.,

$$\begin{aligned} A\varphi_n &= \lambda_n \varphi_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 &< \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty. \\ \forall \xi \in H, \quad \xi &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \xi, \quad E_n \xi = (\xi, \varphi_n) \varphi_n. \end{aligned}$$

On note $\{T(t) = e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ le semi-groupe analytique engendré par $-A$ sur H ,

$$T(t)\xi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} E_n \xi, \quad \forall \xi \in H.$$

Pour $\alpha > 0$, l'espace H^α est défini par

$$H^\alpha = \{\xi \in H : \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n^2)^\alpha \|E_n \xi\|^2 < \infty\},$$

muni de la norme

$$\|\xi\|_{H^\alpha} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n^2)^\alpha \|E_n \xi\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \xi \in H^\alpha.$$

On termine cette section par un résultat concernant les opérateurs quasi- contractants .

Définition 2.2.1 *Un opérateur linéaire borné $L : H \rightarrow H$ est dit quasi-contractant si*

$$\|L\| \leq 1.$$

Soit L un opérateur quasi-contractant, pour résoudre l'équation

$$(I - L)\varphi = \psi, \tag{2.4}$$

nous énonçons un théorème de convergence pour une méthode d'approximations successives.

Théorème 2.2.1 [70, p. 66] *Soit L un opérateur auto-adjoint, positif et quasi-contractant sur H . Soit $\psi \in H$ de telle sorte que l'équation (2.4) a une solution. Si 1 n'est pas une valeur propre de L , alors les approximations successives*

$$\varphi_{n+1} = L\varphi_n + \psi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

convergent vers une solution de (2.4) pour toute donnée initiale $\varphi_0 \in H$. De plus, $L^n \varphi \rightarrow 0$ pour tout $\varphi \in H$, quand $n \rightarrow \infty$.

2.2.1 Problème direct

Soit $Z = D(A) \times H$ muni de la norme $\|U\|_Z^2 = \|A\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2$, $U = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in Z$.

Pour une donnée $f \in H$, on considère le problème direct

$$\begin{cases} w''(t) + 2Aw'(t) + A^2w(t) = f, & 0 < t < T, \\ w(0) = 0, \\ w'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Faisons le changement de variable $w' = v$, nous pouvons écrire l'équation du second ordre dans (2.5) sous la forme d'un système du premier ordre dans l'espace Z comme suit

$$\begin{cases} z'(t) = \mathcal{A}z(t) + F, & 0 < t < T, \\ z(0) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

où $z = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ et $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & -2A \end{pmatrix}$.

L'opérateur linéaire non-borné $\mathcal{A}$ de domaine $D(\mathcal{A}) = D(A^2) \times D(A)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\{S(t) = e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$. De plus $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est analytique (voir [75]) et admet la forme explicite suivante

$$S(t)U = \sum_{n=1}^{\infty} e^{tB_n} P_n U, \quad U = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in Z,$$

où

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_n^2 & -2\lambda_n \end{pmatrix}$$

et $\{P_n\}_{n \geq 1}$ est une famille complète de projections orthogonales dans Z donnée par

$$P_n = \text{diag}(E_n, E_n).$$

D'après les résultats d'algèbre matricielle, on obtient

$$e^{tB_n} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -\lambda_n^2 t e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

De la théorie des semi-groupes (voir [94]), le problème (2.6) admet une solution unique $z \in C([0, T], Z)$ donnée par

$$z = \int_0^t S(t-s) F ds.$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned} z &= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{(t-s)B_n} P_n F ds \\ &= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \sigma_n^1(t, s) & \sigma_n^2(t, s) \\ \sigma_n^3(t, s) & \sigma_n^4(t, s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (f, \varphi_n) \varphi_n \end{pmatrix} ds, \end{aligned}$$

telle que

$$\sigma_n^1(t, s) = e^{-\lambda_n(t-s)} + \lambda_n(t-s)e^{-\lambda_n(t-s)},$$

$$\begin{aligned}\sigma_n^2(t, s) &= (t - s)e^{-\lambda_n(t-s)}, \\ \sigma_n^3(t, s) &= -\lambda_n^2(t - s)e^{-\lambda_n(t-s)}, \\ \sigma_n^4(t, s) &= -\lambda_n(t - s)e^{-\lambda_n(t-s)} + e^{-\lambda_n(t-s)}.\end{aligned}$$

En conséquence, nous obtenons le résultat suivant

Théorème 2.2.2 *Le problème (2.5) admet une solution unique $w \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], H)$ donnée par*

$$w(t) = K(t)f = A^{-2}(I - (I + tA)e^{-tA})f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (1 + t\lambda_n)e^{-t\lambda_n})}{\lambda_n^2} (f, \varphi_n) \varphi_n. \quad (2.7)$$

Remarque 2.2.1 *Comme de nombreux problèmes inverses l'étude du problème (2.1) est réduite à l'étude de l'équation $K(T)f = g$, où $K(T)$ est un opérateur auto-adjoint et compact dans l'espace de Hilbert H . Cette équation peut être réécrite sous la forme $f = (I - \gamma K(T))f + \gamma g = Lf + \gamma g$,*

où γ est un nombre positif satisfaisant $\gamma < 1/\|K(T)\|$.

Dans la section suivante, nous montrons que l'opérateur linéaire L est quasi-contractant et que 1 n'est pas une valeur propre de L , ainsi il résulte du théorème (2.2.1) que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ converge et $(I - \gamma K(T))^n f \rightarrow 0$, pour tout $f \in H$, quand $n \rightarrow \infty$.*

2.2.2 Caractère mal-posé du problème inverse

Notre objectif est de déterminer f à partir de donnée supplémentaire (2.2). Pour ce but définissons l'opérateur $K(T) : f \rightarrow K(T)f = g$, on a

$$g = u(T) = K(T)f = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n E_n f,$$

$$\text{où } \sigma_n = \frac{(1 - (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})}{\lambda_n^2}.$$

Il est facile de vérifier que $K(T)$ est un opérateur linéaire, auto-adjoint, compact et injectif. D'autre part,

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} E_n g = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n E_n f,$$

ainsi

$$\sigma_n E_n f = E_n g,$$

cela implique

$$E_n f = \frac{1}{\sigma_n} E_n g,$$

donc

$$f = K(T)^{-1}g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} E_n g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} (g, \varphi_n) \varphi_n,$$

sous la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n^2}{(1 - (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})} \right)^2 |(g, \varphi_n)|^2 < \infty.$$

Notons que $\frac{1}{\sigma_n} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, ainsi le problème inverse est instable donc mal-posé.

2.3 Procédure itérative (Kozlov-Maz'ya) et résultats de convergence

La méthode itérative est basée sur une réduction du problème mal-posé (2.1) à une suite de problèmes aux limites bien-posé et se compose des étapes suivantes d'abord, nous commençons par un choix arbitraire de $f_0 \in H$, l'approximation initiale u_0 est solution du problème direct

$$\begin{cases} u_0'' + 2Au_0' + A^2u_0 = f_0, & 0 < t < T, \\ u_0(0) = 0, \\ u_0'(0) = 0. \end{cases}$$

Si la paire (f_k, u_k) a été construite, on définit f_{k+1} par

$$f_{k+1} = f_k - \gamma(u_k(T) - g), \quad (2.8)$$

où γ vérifie

$$0 < \gamma < \frac{1}{\|K(T)\|},$$

avec

$$\|K(T)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(1 - (1 + T\lambda_n)e^{-\lambda_n T})}{\lambda_n^2}.$$

Finalement, on obtient u_{k+1} en résolvant le problème

$$\begin{cases} u_{k+1}'' + 2Au_{k+1}' + A^2u_{k+1} = f_{k+1}, & 0 < t < T, \\ u_{k+1}(0) = 0, \\ u_{k+1}'(0) = 0. \end{cases}$$

On itère l'expression (2.8) on obtient

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k - \gamma K(T)f_k + \gamma g \\ &= (I - \gamma K(T))f_k + \gamma g \\ &= (I - \gamma K(T))^{k+1}f_0 + \gamma \sum_{j=0}^k (I - \gamma K(T))^j g. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Introduisons à présent certaines propriétés et estimations nécessaires pour la suite.

Lemme 2.3.1 *La norme de l'opérateur $K(t)$ est donnée par*

$$\begin{aligned} \|K(t)\| &= \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(1 - (1 + t\lambda_n)e^{-\lambda_n t})}{\lambda_n^2} \\ &= \frac{(1 - (1 + t\lambda_1)e^{-\lambda_1 t})}{\lambda_1^2}. \end{aligned}$$

Preuve. On vise à déterminer le supremum de la fonction $\frac{(1 - (1 + t\lambda_n)e^{-\lambda_n t})}{\lambda_n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, pour cela, on fixe t , on pose $\mu = \lambda t$ et on définit la fonction

$$G_1(\mu) = \frac{(1 - (1 + \mu)e^{-\mu})}{\mu^2}, \quad \text{pour } \mu \geq \mu_1 = \lambda_1 t.$$

On a

$$G'_1(\mu) = \frac{(\mu^2 + 2\mu + 2)e^{-\mu} - 2}{\mu^3}.$$

Posons

$$h(\mu) = (\mu^2 + 2\mu + 2)e^{-\mu} - 2,$$

par conséquent

$$G'_1(\mu) = \frac{h(\mu)}{\mu^3}.$$

Pour étudier la monotonie de G_1 , il suffit de déterminer le signe de h . On a

$$h'(\mu) = -\mu^2 e^{-\mu} < 0, \quad \forall \mu > 0,$$

alors, h est décroissante, de plus $h(\mu) \in]-2, 0[$, $\forall \mu > 0$. D'où $G'_1(\mu) < 0$, $\forall \mu \geq \mu_1$, ce qui implique que G_1 est décroissante et

$$\sup_{\mu \geq \mu_1} G_1(\mu) = G_1(\mu_1).$$

Donc,

$$\sup_{n \geq 1} \frac{(1 - (1 + \lambda_n t)e^{-\lambda_n t})}{\lambda_n^2} = \frac{(1 - (1 + \lambda_1 t)e^{-\lambda_1 t})}{\lambda_1^2}.$$

Proposition 2.3.1 *Pour l'opérateur linéaire $L = I - \gamma K(T)$, on a les propriétés suivantes*

1. L est positif et auto-adjoint ,
2. L est quasi-contractant,
3. 1 n'est pas une valeur propre de L .

Preuve. D'après les propriétés de l'opérateur A et la définition de L il en résulte que l'opérateur L est auto-adjoint, positif et quasi-contractant et de l'inégalité

$$0 < 1 - \gamma \frac{(1 - (1 + T\lambda)e^{-\lambda T})}{\lambda^2} < 1, \quad \text{pour } \lambda \in \sigma(A),$$

il s'ensuit que le spectre ponctuel de L , $\sigma_p(L) \subset]0, 1[$. D'où 1 n'est pas une valeur propre de L .

Lemme 2.3.2 *Si $\lambda > 0$, on a les estimations*

$$\frac{1}{1 + \lambda^2} \leq \max\left(\frac{3}{T^2}, 1\right) \frac{(1 - (1 + T\lambda)e^{-\lambda T})}{\lambda^2}. \quad (2.10)$$

$$0 < \frac{(1 - (1 + t\lambda)e^{-\lambda t})}{\lambda^2} < T^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.11)$$

Preuve. Pour établir (2.10), établissons d'abord l'estimation

$$\frac{1}{3 + \mu^2} \leq \frac{(1 - (1 + \mu)e^{-\mu})}{\mu^2}, \quad \forall \mu > 0, \quad (2.12)$$

qui est équivalent à prouver que

$$G_2(\mu) = 3 - (3 + \mu^2)(1 + \mu)e^{-\mu} \geq 0, \quad \forall \mu > 0.$$

On a

$$G'_2(\mu) = \mu(\mu - 1)^2 e^{-\mu} \geq 0, \quad \forall \mu > 0.$$

Alors, G_2 n'est pas décroissante et il en résulte que $G_2(\mu) \subset]0, 3[$. Ainsi

$$G_2(\mu) \geq 0, \quad \forall \mu > 0.$$

On choisit $\mu = T\lambda$ dans (2.12), on obtient

$$\frac{1}{3 + (T\lambda)^2} \leq \frac{(1 - (T\lambda + 1)e^{-T\lambda})}{(T\lambda)^2}.$$

D'où,

$$\frac{T^2}{\max(3, T^2)(1 + \lambda^2)} \leq \frac{(1 - (1 + T\lambda)e^{-T\lambda})}{\lambda^2}. \quad (2.13)$$

De (2.13), on déduit (2.10).

Maintenant, prouvons l'estimation (2.11). Il est facile de vérifier que

$$G_3(\mu) = (1 - (1 + \mu)e^{-\mu}) - \mu^2 < 0, \quad \forall \mu > 0.$$

Alors, si on choisit $\mu = t\lambda$, il vient

$$(1 - (1 + t\lambda)e^{-t\lambda}) < t^2\lambda^2, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.14)$$

Par conséquent, à partir de (2.14), il en résulte (2.11).

Théorème 2.3.1 *Soit u une solution du problème inverse (2.1). Soit $f_0 \in H$ une donnée initiale arbitraire pour la procédure itérative proposée ci-dessus et u_k la $k^{\text{ème}}$ solution approchée. Alors*

i)

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\| \rightarrow 0, \text{ quand } k \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

ii) *En outre, si pour $\alpha = 1 + \theta$, $\theta > 0$, $f_0 - f \in H^\alpha$, i.e. $\|f_0 - f\|_{H^\alpha} \leq E$, alors l'ordre de convergence de la méthode est donné par*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\| \leq T^2 C E k^{-\alpha/2},$$

où C est une constante positive indépendante de k .

Preuve.

i) De (2.9), on obtient

$$f_k = (I - \gamma K(T))^k f_0 + (I - (I - \gamma K(T))^k)(K(T))^{-1} g,$$

d'où

$$f_k = (I - \gamma K(T))^k (f_0 - f) + f, \quad (2.16)$$

ce qui implique que

$$u_k(t) - u(t) = K(t)(f_k - f) = K(t)(I - \gamma K(T))^k (f_0 - f).$$

D'où il s'ensuit

$$\|u_k(t) - u(t)\| \leq \|K(t)\|(I - \gamma K(T))^k(f_0 - f). \quad (2.17)$$

Du lemme 2.3.1 et (2.11) on a

$$\sup_{t \in [0, T]} \|K(t)\| = \sup_{t \in [0, T]} \frac{(1 - (1 + t\lambda_1)e^{-t\lambda_1})}{\lambda_1^2} < T^2. \quad (2.18)$$

Combinons (2.17) et (2.18) et par passage au supremum par rapport à $t \in [0, T]$, on obtient

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\| \leq T^2 \|(I - \gamma K(T))^k(f_0 - f)\| \rightarrow 0, \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

ii) De la partie i), on a

$$\|u_k(t) - u(t)\|^2 \leq T^4 \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \gamma(\frac{1 - (1 + \lambda_n T)e^{-\lambda_n T}}{\lambda_n^2}))^{2k} |(f_0 - f, \varphi_n)|^2,$$

et par conséquent

$$\|u_k(t) - u(t)\|^2 \leq T^4 \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \gamma(\frac{1 - (1 + \lambda_n T)e^{-\lambda_n T}}{\lambda_n^2}))^{2k} (1 + \lambda_n^2)^{-\alpha} (1 + \lambda_n^2)^{\alpha} |(f_0 - f, \varphi_n)|^2.$$

Utilisons l'inégalité (2.10), il vient

$$\|u_k(t) - u(t)\|^2 \leq T^4 (\max(\frac{3}{T^2}, 1))^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \gamma\beta_n)^{2k} \beta_n^{\alpha} (1 + \lambda_n^2)^{\alpha} |(f_0 - f, \varphi_n)|^2,$$

où

$$\beta_n = (\frac{1 - (1 + \lambda_n T)e^{-\lambda_n T}}{\lambda_n^2}).$$

Ainsi, il en résulte que

$$\|u_k(t) - u(t)\|^2 \leq T^4 (\max(\frac{3}{T^2}, 1))^{\alpha} \sup_{0 \leq \beta_n \leq T^2} (1 - \gamma\beta_n)^{2k} \beta_n^{\alpha} \|f_0 - f\|_{H^{\alpha}}^2. \quad (2.19)$$

Posons

$$\phi(\beta) = (1 - \gamma\beta)^{2k} \beta^{\alpha}, \quad 0 \leq \beta \leq T^2.$$

On a

$$\phi'(\beta) = (1 - \gamma\beta)^{2k-1} \beta^{\alpha-1} (-\gamma(2k + \alpha)\beta + \alpha).$$

On pose $\phi'(\beta) = 0$, il s'ensuit que $\beta^* = \frac{\alpha}{(2k + \alpha)\gamma}$ est le point critique de ϕ . Il est facile de voir que le maximum de ϕ est atteint en β^* . D'où

$$\sup_{0 \leq \beta \leq T^2} \phi(\beta) \leq \phi(\beta^*) = (1 - \gamma\beta^*)^{2k} (\beta^*)^{\alpha} \leq (\beta^*)^{\alpha} = (\frac{\alpha}{(2k + \alpha)\gamma})^{\alpha},$$

et par conséquent

$$\sup_{0 \leq \beta \leq T^2} \phi(\beta) \leq \left(\frac{\alpha}{2\gamma}\right)^\alpha k^{-\alpha}. \quad (2.20)$$

En combinant (2.19) et (2.20), on obtient

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\|^2 \leq T^4 \left(\frac{\alpha}{2\gamma} \max\left(\frac{3}{T^2}, 1\right)\right)^\alpha \left(\frac{1}{k}\right)^\alpha E^2.$$

Généralement la donnée g est issue de l'expérience et n'est pas connue exactement, ce qui entraîne l'existence d'erreurs de mesure, alors pour résoudre l'équation $K(T)f = g$, on suppose qu'on a une donnée bruitée g^δ , satisfaisant

$$\|g - g^\delta\| < \delta, \quad (2.21)$$

où $\delta > 0$ désigne le niveau de bruit. Dans le théorème suivant, nous considérons le cas de données bruitées.

Théorème 2.3.2 *Soit $\alpha = 1 + \theta$, ($\theta > 0$), f_0 un élément quelconque de la procédure itérative proposée ci-dessus tel que $(f_0 - f) \in H^\alpha$, u_k est la k^{eme} solution approchée correspondante à la donnée exacte g , et u_k^δ est la k^{eme} solution approchée correspondante à la donnée perturbée g^δ telle que (2.21) est vérifiée. Alors, on a l'estimation suivante*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k^\delta(t) - u(t)\| \leq T^2(\delta\gamma k + CE\left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha/2}). \quad (2.22)$$

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} f_k &= (I - \gamma(K(T)))^k f_0 + \gamma \sum_{j=0}^{k-1} (I - \gamma K(T))^j g, & u_k(t) &= K(t)f_k, \\ f_k^\delta &= (I - \gamma(K(T)))^k f_0 + \gamma \sum_{j=0}^{k-1} (I - \gamma K(T))^j g^\delta, & u_k^\delta(t) &= K(t)f_k^\delta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

On utilise l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|u_k^\delta - u\| \leq \|u_k^\delta - u_k\| + \|u_k - u\|.$$

En vertu du théorème 2.3.1, on a

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\| \leq T^2 CE \left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha/2}. \quad (2.24)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|u_k^\delta(t) - u_k(t)\| &= \|K(t)(f_k^\delta - f_k)\| \\ &\leq T^2 \gamma \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (I - \gamma K(T))^j (g^\delta - g) \right\| \\ &\leq T^2 \delta \gamma \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (I - \gamma K(T))^j \right\| \\ &\leq T^2 \delta \gamma \sum_{j=0}^{k-1} \|(I - \gamma K(T))^j\|. \end{aligned}$$

Comme

$$\|(I - \gamma K(T))\| \leq 1,$$

il en résulte que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k^\delta(t) - u_k(t)\| \leq T^2 \delta \gamma k. \quad (2.25)$$

En combinant (2.24) et (2.25), on obtient l'estimation (2.22).

Remarque 2.3.1 Si on choisit le nombre d'itérations $k(\delta)$ de telle sorte $k(\delta) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$, on obtient

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k^\delta(t) - u(t)\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

2.4 Implémentation Numérique

Considérons le problème qui consiste à déterminer le couple fonctions $(u(x, t), f(x))$, dans le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) = f(x), & (t, x) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \\ u(x, 1) = g(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (2.26)$$

On note

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \text{ avec } \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1) \subset H = L^2(0, 1).$$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad \varphi_n = \sqrt{2} \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots$$

sont les valeurs et les fonctions propres orthonormées, qui forment une base dans H .

La solution du problème ci-dessus est donnée par

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (1 + (n\pi)^2 t) e^{-(n\pi)^2 t}}{(n\pi)^4} \right) f_n \varphi_n,$$

où

$$f_n = (f, \varphi_n) = \sqrt{2} \int_0^1 f(s) \sin(n\pi s) ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

Maintenant, nous proposons d'approcher la dérivée première u_x et seconde u_{xx} en utilisant les différences finies centrées et nous considérons une grille équidistante de points $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = 1$, ($h = \frac{1}{N+1}$), où N est un entier positif. On obtient le problème semi-discret suivant

$$\begin{cases} u''(x_i, t) + 2A_h u'(x_i, t) + A_h^2 u(x_i, t) = f(x_i), & x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N, \quad 0 < t < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(x_i, 0) = u'(x_i, 0) = 0, & x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N, \\ u(x_i, 1) = g(x_i), & x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.27)$$

où A_h est la matrice de discrétisation découlant de l'opérateur $A = -\frac{d^2}{dx^2}$,

$$A_h = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1)$$

qui est symétrique définie positive, dont les valeurs propres sont (voir [49])

$$\mu_j = 4(N+1)^2 \sin^2 \frac{j\pi}{2(N+1)}, \quad j = 1, \dots, N,$$

et les fonctions propres orthonormées

$$v_j = \left(\sin \frac{mj\pi}{(N+1)} \right)_{1 \leq m \leq N}, \quad j = 1, \dots, N.$$

On suppose que la discrétisation est assez fine de sorte que les erreurs sont petites par rapport à l'incertitude δ au niveau de chaque donnée; cela signifie que A_h est une bonne approximation de l'opérateur différentiel A dans le sens signifiant que le caractère non-borné de l'opérateur est équivalent à la plus grande norme de la matrice A_h (voir [35]).

L'approximation itérative discrète est donnée par

$$f_k^\delta(x_i) = (I - \gamma K_h)^k f_0(x_i) + \gamma \sum_{j=0}^{k-1} (I - \gamma K_h)^j g^\delta(x_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

où

$$K_h = A_h^{-2} (I_N - (I_N + A_h) e^{-A_h}),$$

et

$$\gamma < \frac{1}{\|K_h\|} = \left(\frac{\mu_1^2}{1 - (1 + \mu_1) e^{-\mu_1}} \right).$$

Exemple. Il est facile de vérifier que pour $f(x) = \sin(\pi x)$,

$$u(x, t) = \frac{(1 - (1 + \pi^2 t) e^{-\pi^2 t})}{\pi^4} \sin(\pi x)$$

est la solution exacte du problème (2.26), par conséquent $g(x) = \frac{(1 - (1 + \pi^2) e^{-\pi^2})}{\pi^4} \sin(\pi x)$.

Pour obtenir des données bruitées, on utilise la commande Matlab «randn(.)» :

$$g^\delta = g + \epsilon \text{randn}(\text{size}(g)),$$

où ϵ indique le niveau du bruit aléatoire distribué selon la loi normale avec la moyenne 0, la variance $\sigma^2 = 1$ et l'écart type $\sigma = 1$. La fonction «randn(size(g))» renvoie un tableau d'entrées aléatoires qui est de même taille que g .

Le niveau de bruit δ peut être calculé au sens de l'erreur moyenne quadratique (RMSE) selon la relation

$$\delta = \|g^\delta - g\|_{l^2} = \left(\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N+1} (g(x_i) - g^\delta(x_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'erreur relative est donnée par

$$Er(f) = \frac{\|f_k^\delta - f\|_{l^2}}{\|f\|_{l^2}}.$$

Tableaux et figures

Cas de données exactes :

On considère tout d'abord le cas d'une donnée exacte (non bruitée). Les résultats obtenus sont illustrés par les figures et les tableaux ci-dessous, qui représentent l'erreur relative pour un nombre d'itération $k = 4$ et $k = 8$ respectivement en fonction de différentes valeurs de N .

N	$\gamma = 0.6.\ K(T)\ ^{-1}$	$Er(f)$
20	58.2611	0.0533
40	58.4213	0.0023
70	58.4593	0.0280
100	58.4685	0.0386

Tableau 2.1. Erreur relative $Er(f)$ pour une donnée exacte avec $k = 4$.

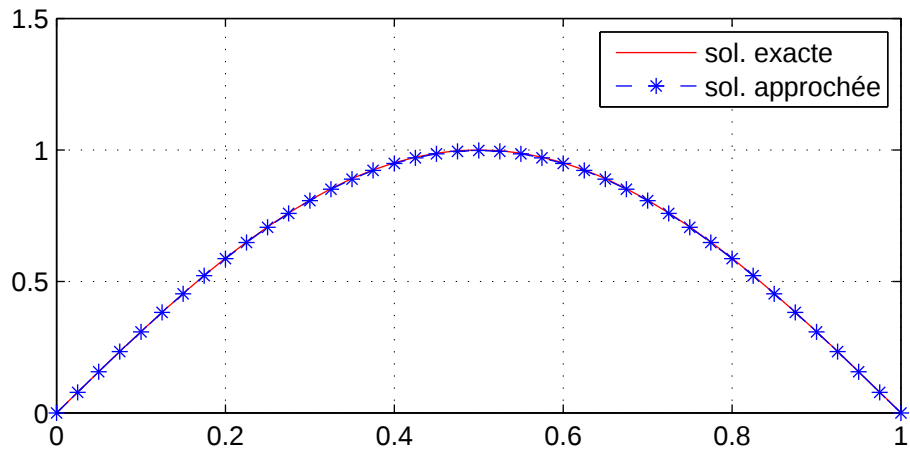


FIGURE 2.1 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 40$, $k = 4$, $\gamma = 58.4213$.

N	$\gamma = 0.7.\ K(T)\ ^{-1}$	$Er(f)$
20	67.9713	0.1181
40	68.1582	0.0485
70	68.2025	0.0163
100	68.2137	0.0033

Tableau 2.2. Erreur relative $Er(f)$ pour une donnée exacte avec $k = 4$.

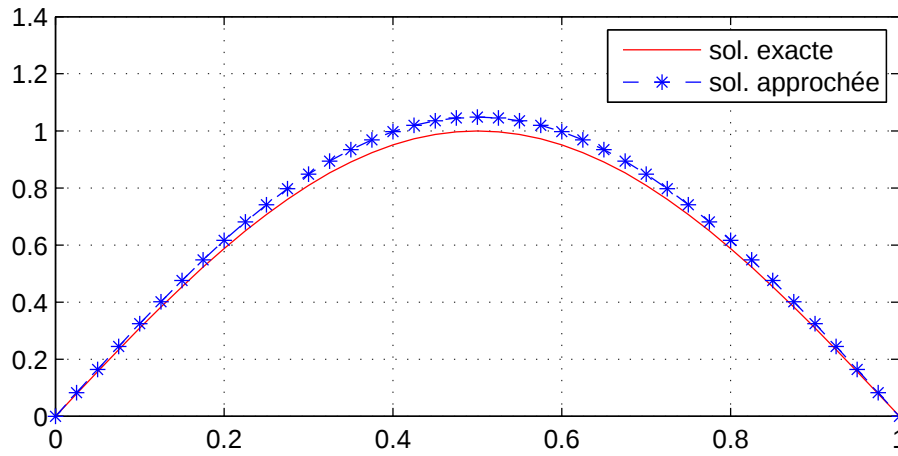


FIGURE 2.2 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 40$, $k = 4$, $\gamma = 68.1582$.

N	$\gamma = 0.3.\ K(T)\ ^{-1}$	$Er(f)$	$\gamma = 0.4.\ K(T)\ ^{-1}$	$Er(f)$
20	29.1306	0.0440	38.8407	0.1362
40	29.2106	0.0172	38.9475	0.0553
70	29.2297	0.0447	38.9729	0.0198
100	29.2200	0.0559	38.8793	0.0055

Tableau 2.3. Erreur relative $Er(f)$ pour une donnée exacte avec $k = 8$.

Cas de données bruitées :

Dans ce deuxième cas, on considère une donnée bruitée et on calcule l'erreur relative pour un niveau de bruit $\epsilon = 10^{-3}$ puis pour $\epsilon = 10^{-4}$.

N	$\gamma = 0.6.\ K(T)\ ^{-1}$	$Er(f)$
20	58.2611	0.2254
40	58.4213	0.1994
60	58.4525	0.2328
100	58.4685	0.2398

Tableau 2.4. Erreur relative $Er(f)$ pour $k = 4$, $\epsilon = 10^{-3}$.

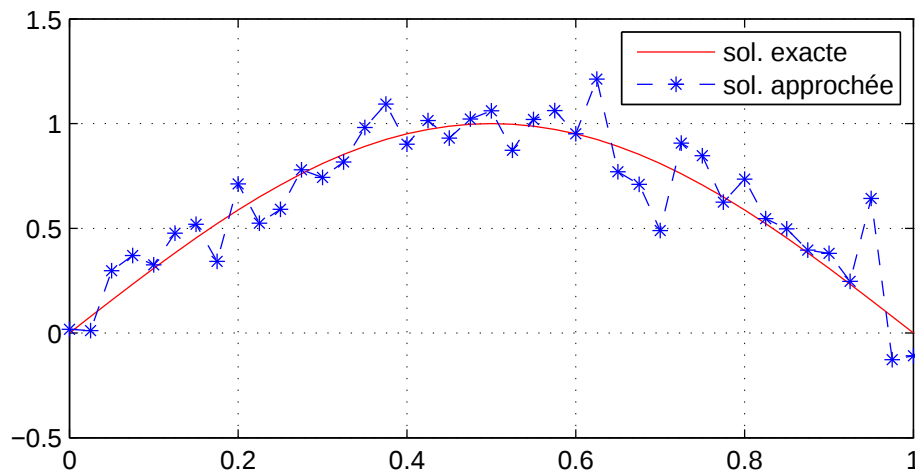


FIGURE 2.3 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 40$, $k = 4$, $\gamma = 58.4213$, $\epsilon = 10^{-3}$.

N	$\gamma = 0.4. \ K(T)\ ^{-1}$	$Er(f)$
20	38.8407	0.2492
40	38.5475	0.2159
60	38.5684	0.1593
100	38.3733	0.2675

Tableau 2.5. Erreur relative $Er(f)$ pour $k = 6$, $\epsilon = 10^{-3}$.

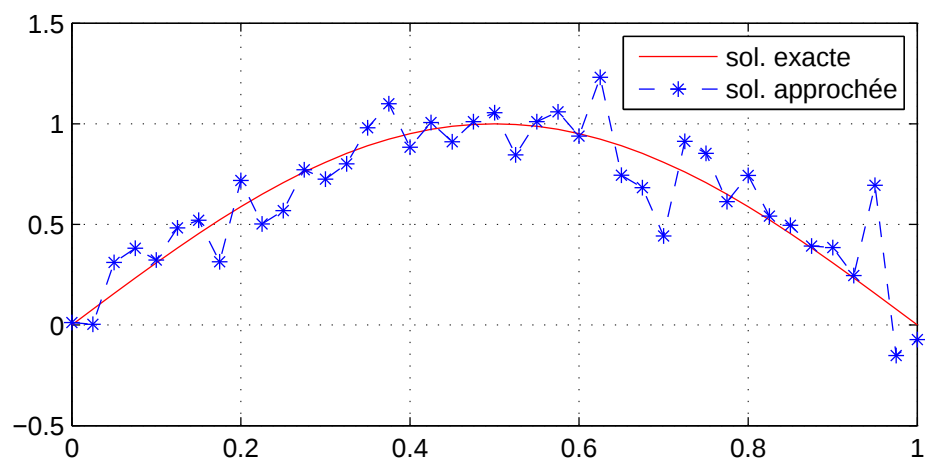


FIGURE 2.4 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 40$, $k = 6$, $\gamma = 38.5475$, $\epsilon = 10^{-3}$.

N	$\gamma = 0.6.\ K(T)\ ^{-1}$	$Er(f)$
20	58.2611	0.0568
40	58.4213	0.0261
60	58.4526	0.0362
100	58.4689	0.0455

Tableau 2.6. Erreur relative $Er(f)$ pour $k = 4$, $\epsilon = 10^{-4}$.

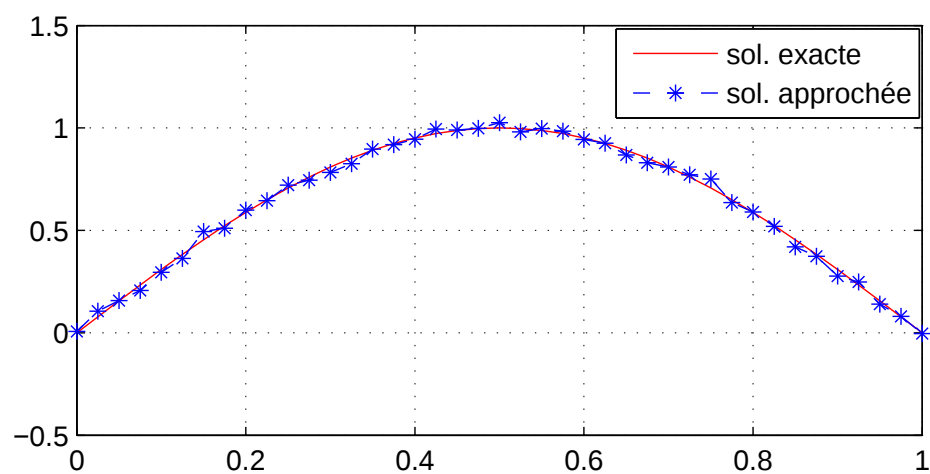


FIGURE 2.5 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 40$, $k = 4$, $\gamma = 58.4213$, $\epsilon = 10^{-4}$.

N	$\gamma = 0.4. \ K(T)\ ^{-1}$	$Er(f)$
20	38.8407	0.0526
40	38.9475	0.0350
60	38.5684	0.0456
100	38.9793	0.0581

Tableau 2.7. Erreur relative $Er(f)$ pour $k = 6$, $\epsilon = 10^{-4}$.

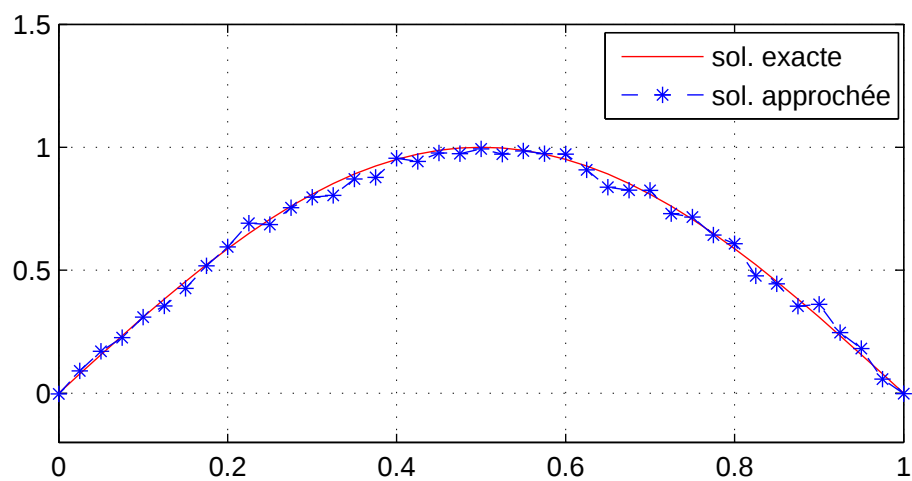


FIGURE 2.6 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 40$, $k = 6$, $\gamma = 38.9475$, $\epsilon = 10^{-4}$.

► D'après les résultats obtenus on remarque :

- L'influence du choix du paramètre γ sur la convergence².
 - En absence du bruit et après seulement quelques itérations la solution approchée et la solution exacte sont très proches.
 - En présence du bruit la solution régularisée converge vers la solution exacte lorsque le bruit diminue. Mais lorsque le nombre d'itérations augmente, la solution approchée s'éloigne légèrement de la solution exacte.
- Ce pendant, les résultats obtenus sont globalement satisfaisants.

2. La constante C dans la formule $\gamma = C\|K(T)\|^{-1}$ est choisie après différents tests

Chapitre 3

ETUDE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS MAL POSÉ

3.1 Introduction

De nombreux phénomènes physique ou biologique tels que la diffusion et les vibrations structurales, sont mathématiquement modélisés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Dès 1950 certains résultats sont apparus dans la littérature, on cite les travaux pionniers de G. Fichera ([41],[42]) pour les systèmes elliptiques. Plus récemment, une importante contribution a été apportée par H. Amann dans l'étude des systèmes paraboliques ([3],[4],[5],[6]), auxquels on s'intéresse dans les chapitres trois et quatre.

On considère le problème inverse qui consiste à déterminer la condition initiale $u(0, x)$ dans le système de diffusion suivant

$$\begin{cases} u_t(t, x) - D\Delta u(t, x) = 0, & 0 < t < T, & x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & 0 \leq t < T, & x \in \partial\Omega, \\ u(T, x) = f(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

où Ω est un domaine borné suffisamment régulier dans $\mathbb{R}^N$ et D est une matrice diagonalisable ("équations couplées") dont les valeurs propres sont strictement positives. L'étude de ce type de problèmes est motivée d'une part par le fait que l'équation et les systèmes de diffusion interviennent dans beaucoup de domaines : finance, chimie, biologie et en sciences d'environnement [9],[10],[24],[43],[54],[91]. D'autre part par la rareté des résultats concernant les systèmes dans la problématique inverse.

On note ici que malgré que la plupart des auteurs qui ont traité les systèmes tel que le problème (3.1) ont considéré que la matrice D était diagonale, il existe plusieurs modèles (vibration) dans lesquels la matrice D n'est pas diagonale, voir [75],[81] et les références qui y sont.

3.2 Préliminaires

Comme l'analyse du problème considéré est basée sur la théorie des semi-groupes, on commence cette section par introduire certaines propriétés permettant de donner une caractérisation du C_0 -semi-groupe engendré par certaines classes de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette caractérisation permet d'étudier l'existence et l'unicité de la solution ainsi que sa stabilité ([75], [81]).

Soit $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. On considère le problème aux valeurs propres suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ est un domaine borné suffisamment régulier et $\mathcal{D}(-\Delta) = \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Le problème (3.2) admet un ensemble dénombrable de valeurs propres

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_j \rightarrow +\infty \text{ quand } j \rightarrow +\infty.$$

Chaque valeur propre λ_j a une multiplicité finie γ_j égale à la dimension de l'espace propre correspondant S_j .

1. Par conséquent, il existe un ensemble complet orthonormé $\{\varphi_{jk}\}_{k=1}^{k=\gamma_j}$ de vecteurs propres de $-\Delta$ tel que,
 - pour tout $w \in \mathcal{D}(-\Delta)$, on a

$$-\Delta w = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j w,$$

où

$$E_j w = \sum_{k=1}^{\gamma_j} (w, \varphi_{jk}) \varphi_{jk}.$$

Ainsi, $\{E_j\}$ est une famille complète de projections orthogonales dans $\mathcal{H}$ et pour tout $w \in \mathcal{H}$, on a

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} E_j w.$$

2. L'opérateur Δ engendre un semi-groupe analytique $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geq 0}$ sur $\mathcal{H}$, défini par

$$\mathcal{T}(t)w = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} E_j w.$$

Maintenant, on note par Z l'espace de Hilbert $(L^2(\Omega))^n$ des fonctions à carré intégrable $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire usuel

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (u_1(x) \overline{v_1(x)} + \dots + u_n(x) \overline{v_n(x)}) dx.$$

On définit l'opérateur non-borné

$$A : \mathcal{D}(A) \subset Z \rightarrow Z,$$

$$Au = -D\Delta u, \quad u \in \mathcal{D}(A),$$

avec

$$\mathcal{D}(A) = (\mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega))^n.$$

Par conséquent, pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, on obtient,

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j D P_j u,$$

où

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} P_j u, \quad \|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j u\|^2, \quad u \in Z,$$

et

$$P_j = \text{diag}(E_j, E_j, \dots, E_j)$$

est une famille complète de projections orthogonales dans Z .

Lemme 3.2.1 ([75], Lemma 2.1, p.250) *Soit $\mathcal{Z}$ un espace de Hilbert séparable et soient $\{A_n\}_{n \geq 1}, \{P_n\}_{n \geq 1}$ deux familles d'opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{Z}$ avec $\{P_n\}_{n \geq 1}$ une famille complète de projections orthogonales telles que*

$$A_n P_n = P_n A_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

On définit la famille d'opérateurs linéaires suivante

$$S(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n z, \quad t \geq 0.$$

Alors

1. *$S(t)$ est un opérateur linéaire borné si*

$$\|e^{A_n t}\| \leq g(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

pour certaine fonction continue à valeurs réelles positives $g(t)$.

2. *Sous la condition (3.3), $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe dans l'espace de Hilbert $\mathcal{Z}$, dont le générateur infinitésimal $\mathcal{A}$ est donné par*

$$\mathcal{A}z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

avec

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{z \in Z : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 < \infty\}.$$

3. *Le spectre $\sigma(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est donné par $\sigma(\mathcal{A}) = \cup_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n)$.*

Théorème 3.2.1 [81, Théorème 1, p.2] *On suppose que $d > 0$ pour tout $d \in \sigma(D)$. Alors*

1. A est un opérateur sectoriel, de plus $-A$ est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe analytique $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, sur Z donné par

$$S(t)x = e^{-At}x = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j x, \text{ pour tout } t \geq 0, \text{ et } x \in Z,$$

où $A_j = -\lambda_j D$.

2. $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe compact dans $\mathcal{L}(Z)$ et il existe des constantes $C \geq 1$ et $\beta > 0$ tels que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq C e^{-\beta t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

3.3 Instabilité du problème

Dans l'espace de Hilbert Z , le système (3.1) peut être écrit comme une équation différentielle abstraite

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(T) = f, & f \in Z. \end{cases} \quad (3.4)$$

Etant donné une fonction $g \in Z$.

Considérons le problème direct suivant correspondant au problème inverse (3.4)

$$\begin{cases} v_t(t) + Av(t) = 0, & 0 < t < T, \\ v(0) = g. \end{cases} \quad (3.5)$$

Comme A est le générateur d'un semi-groupe analytique, alors pour tout $g \in Z$, le problème (3.5) admet une solution unique $v \in C([0, T], Z)$ donnée par

$$v(t) = S(t)g = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j D t} P_j g, \quad (3.6)$$

où $g = \sum_{j=1}^{\infty} P_j g$, (voir [94], Chap. 4, théorème 1.4, p. 104).

Remarque 3.3.1 la matrice D n'a pas nécessairement des valeurs propres distinctes. Soient $0 < d_1 < \dots < d_s$, $s \leq n$ les valeurs propres distinctes de D , alors on a la décomposition spectrale suivante

$$D = \sum_{i=1}^s d_i Q_i,$$

où $\{Q_i\}_{1 \leq i \leq s}$ est une famille complète de projections.

A partir de la remarque ci-dessus la solution du problème (3.5) peut être écrite comme suit

$$v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j D t} P_j g = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} Q_i \right) P_j g.$$

Pour le problème (3.4), on introduit le théorème suivant

Théorème 3.3.1 *Le problème (3.4) admet une solution si et seulement si*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|e^{\lambda_j D T} P_j f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i T} Q_i P_j f \right\|^2 < \infty. \quad (3.7)$$

Preuve. Si le problème (3.4) admet une solution u alors, $u(t) = S(t)u(0)$, d'où il en résulte que

$$f = u(T) = S(T)u(0) = e^{-TA}u(0).$$

Ce qui implique que

$$\|u(0)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|e^{\lambda_j D T} P_j f\|^2 < \infty.$$

Inversement, si (3.7) est satisfaite, on définit

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i T} Q_i P_j f \in Z,$$

et on considère le problème

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = w. \end{cases} \quad (3.8)$$

Comme (3.8) est le problème direct bien-posé, donc il admet une solution unique donnée par

$$u(t) = S(t)w = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i (T-t)} Q_i P_j f = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j D (T-t)} P_j f. \quad (3.9)$$

En posant $t = T$ dans (3.9), on obtient

$$u(T) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j f = f.$$

D'où, u est la solution unique de (3.4). □

D'après l'expression (3.9), on remarque que pour $t < T$, les termes $e^{\lambda_j d_i (T-t)}$ sont la cause d'instabilité, donc pour pallier à ce problème de stabilité, on introduit dans la section suivante la méthode de régularisation avec condition non locale.

3.4 Méthode des valeurs aux limites auxiliaires

On régularise le problème (3.4) en utilisant la méthode des valeurs aux limites auxiliaires. Considérons le problème approché suivant

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0, & 0 < t < T, \\ \alpha u_\alpha(0) + u_\alpha(T) = f, \end{cases} \quad (3.10)$$

où $\alpha > 0$

Définition 3.4.1 *On définit*

$$\begin{aligned}
 u_\alpha(t) &= S(t)(\alpha I + S(T))^{-1}f \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j D t} (\alpha I_n + e^{-\lambda_j D T})^{-1} P_j f \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} Q_i P_j f,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

pour $\alpha > 0$ et $t \in [0, T]$.

Théorème 3.4.1 *La fonction $u_\alpha(t)$ est une solution unique de (3.10) et dépend continûment de f .*

Preuve. On considère le problème

$$\begin{cases} w'_\alpha(t) + Aw_\alpha(t) = 0, & 0 < t < T, \\ w_\alpha(0) = f_\alpha, \end{cases} \tag{3.12}$$

où $f_\alpha = (\alpha I + S(T))^{-1}f$.

Le problème (3.12) est bien-posé, sa solution est donnée par

$$w_\alpha(t) = S(t)f_\alpha = S(t)(\alpha I + S(T))^{-1}f. \tag{3.13}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
 w_\alpha(T) + \alpha w_\alpha(0) &= S(T)(S(T) + \alpha I)^{-1}f + \alpha(S(T) + \alpha I)^{-1}f \\
 &= (S(T) + \alpha I)(S(T) + \alpha I)^{-1}f = f.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Grâce à (3.14) et l'unicité de la solution du problème direct (3.12), on déduit que le problème (3.10) admet une solution unique u_α donnée par (3.11). Pour démontrer que u_α dépend

continûment de f , on calcule

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(t)\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j Dt} (\alpha I_n + e^{-\lambda_j DT})^{-1} P_j f \right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} Q_i P_j f \right\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \left(\sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} Q_i \right) \right\|^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} M^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j f\|^2 \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} M^2 \|f\|^2,
\end{aligned}$$

où $M = \sum_{i=1}^s \|Q_i\|$, ($\|\cdot\|$ est une norme matricielle.) □

Théorème 3.4.2 Pour tout $f \in Z$, $\alpha > 0$ et $t \in [0, T]$, on a

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \alpha^{\frac{t}{T}-1} M \|f\|.$$

Preuve. Soit $f = \sum_{j=1}^{\infty} P_j f$, alors

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(t)\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j Dt} (\alpha I + e^{-\lambda_j DT})^{-1} P_j f \right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} Q_i P_j f \right\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} \{ (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{\frac{t}{T}} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{1-\frac{t}{T}} \}^{-1} \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-(1-\frac{t}{T})} \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha^2} \right)^{1-\frac{t}{T}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha^2} \right)^{1-\frac{t}{T}} M^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j f\|^2,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \alpha^{\frac{t}{T}-1} M \|f\|.$$

□

Théorème 3.4.3 *Pour tout $f \in Z$, $u_\alpha(T)$ converge vers f dans Z quand α tend vers zéro.*

Preuve. Soit $f = \sum_{j=1}^{\infty} P_j f$, alors

$$\begin{aligned}
 \|u_\alpha(T) - f\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \| [e^{-\lambda_j DT} (\alpha I_n + e^{-\lambda_j DT})^{-1} - I_n] P_j f \|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s (e^{-\lambda_j d_i T} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} - 1) Q_i P_j f \right\|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \alpha (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} Q_i P_j f \right\|^2 \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \alpha (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2
 \end{aligned}$$

On fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit $\aleph$ de sorte que

$$M^2 \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \|P_j f\|^2 < \varepsilon/2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \|u_\alpha(T) - f\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{\aleph} \left(\sum_{i=1}^s \alpha (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
 &\quad + \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \alpha (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\aleph} \alpha^2 e^{2\lambda_j d_s T} \left(\sum_{i=1}^s \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 + \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
 &\leq \alpha^2 M^2 \sum_{j=1}^{\aleph} e^{2\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2 + M^2 \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \|P_j f\|^2. \\
 &\leq \alpha^2 M^2 \sum_{j=1}^{\aleph} e^{2\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

Maintenant, soit α est telle que

$$\alpha^2 < \varepsilon (2M^2 \sum_{j=1}^{\aleph} e^{2\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2)^{-1}.$$

Ceci termine la preuve.

□

Définition 3.4.2 *On définit l'ensemble*

$$C_\theta(A) = \{ \phi \in Z, \| \phi \|_\theta^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{2T\theta\lambda_j d_s} \|P_j f\|^2 < \infty \}, \quad \theta \geq 0.$$

Théorème 3.4.4 *S'il existe $0 < \theta < 2$ telle que $f \in C_\theta(A)$, alors $\|u_\alpha(T) - f\|$ converge vers zéro avec l'ordre α^θ .*

Preuve. Soient $k \in (0, 2)$, j fixé, on pose $\gamma_j = \lambda_j d_s$ et

$$h_j(\alpha) = \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\gamma_j T})^2}.$$

On dérive par rapport à α , on obtient

$$h'_j(\alpha) = \alpha^{k-1} \frac{(k-2)\alpha + k e^{-\gamma_j T}}{(\alpha + e^{-\gamma_j T})^3}.$$

Ainsi $h'_j(\alpha) = 0$, si $\alpha = 0$ où

$$\alpha = \frac{k}{2-k} e^{-\gamma_j T}.$$

Comme $h_j(\alpha) > 0$, $h_j(0) = 0$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} h_j(\alpha) = 0$, on conclut que $\alpha' = \frac{k}{2-k} e^{-\gamma_j T}$ est le point critique pour lequel h_j atteint son maximum. Ainsi, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} h_j(\alpha) \leq h_j(\alpha') &= \frac{(\frac{k}{2-k})^k e^{-kT\gamma_j}}{(\alpha' + e^{-\gamma_j T})^2} \\ &\leq \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(2-k)T\gamma_j} (\alpha'^2 + 2\alpha' e^{\gamma_j T} + 1)^{-1} \\ &\leq \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(2-k)T\gamma_j}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - f\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \frac{\alpha}{(\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})} \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\alpha + e^{-\lambda_j d_s T})^2} \left(\sum_{i=1}^s \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \alpha^{2-k} M^2 \sum_{j=1}^{\infty} h_j(\alpha) \|P_j f\|^2 \\ &\leq \alpha^{2-k} M^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(2-k)T\lambda_j d_s} \|P_j f\|^2. \end{aligned}$$

Si on choisit $k = 2 - \theta$, on obtient

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq \left(\frac{2-\theta}{\theta}\right)^{2-\theta} \alpha^\theta M^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{\theta T \lambda_j d_s} \|P_j f\|^2.$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Lemme 3.4.1 *Pour tout $f \in Z$, le problème (3.4) admet une solution $u(t)$ si $u_\alpha(0)$ converge dans Z . En outre, $u_\alpha(t)$ converge uniformément par rapport à t , vers $u(t)$ quand le paramètre α tend vers zéro.*

Preuve. On suppose que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(0) = \xi$ existe et soit $u(t) = S(t)\xi$. On a

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t) - u(t)\| &= \|u_\alpha(t) - S(t)\xi\| \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \|(\alpha I + S(T))^{-1}f - \xi\|. \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \|u_\alpha(0) - \xi\|. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq C \|u_\alpha(0) - \xi\| \rightarrow 0, \text{ quand } \alpha \rightarrow 0. \quad (3.15)$$

Comme $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(T) = f$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(T) = u(T)$, alors $u(T) = f$. Ainsi $u(t) = S(t)\xi$ résout le problème (3.4). $\square$

Théorème 3.4.5 *On suppose que le problème (3.4) admet une solution $u(t)$ et soit $f \in C_1(A)$. Alors $u_\alpha(0)$ converge dans Z .*

Preuve. Comme $f \in C_1(A)$, on peut fixer $\varepsilon > 0$ et choisir $\aleph$ telle que

$$M^2 \sum_{j=1+\aleph}^{\infty} e^{2\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s [(\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} - e^{\lambda_j d_i T}] \mathcal{Q}_i P_j f \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \left[\frac{\alpha e^{\lambda_j d_i T}}{\alpha + e^{-\lambda_j d_i T}} \right] \mathcal{Q}_i P_j f \right\|^2 \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{j=1}^{\aleph} \left\| \sum_{i=1}^s \left[\frac{\alpha e^{\lambda_j d_i T}}{\alpha + e^{-\lambda_j d_i T}} \right] \mathcal{Q}_i P_j f \right\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\aleph} \left(\sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i T} \left(\frac{\alpha e^{\lambda_j d_i T}}{1 + \alpha e^{\lambda_j d_i T}} \right) \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \alpha^2 \sum_{j=1}^{\aleph} \left(\sum_{i=1}^s e^{2\lambda_j d_i T} \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \alpha^2 M^2 \sum_{j=1}^{\aleph} e^{4\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \left[\frac{\alpha e^{\lambda_j d_i T}}{\alpha + e^{-\lambda_j d_i T}} \right] Q_i P_j f \right\|^2 \\
&\leq \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i T} \left(\frac{\alpha e^{\lambda_j d_i T}}{1 + \alpha e^{\lambda_j d_i T}} \right) \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1+\aleph}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i T} \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq M^2 \sum_{j=1+\aleph}^{\infty} e^{2\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Si on choisit α telle que

$$\alpha^2 < \varepsilon (2M^2 \sum_{j=1}^{\aleph} e^{4\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2)^{-1},$$

on obtient

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 = I_1 + I_2 < \varepsilon.$$

Qui montre que $u_\alpha(0)$ converge vers $u(0)$ quand α tend vers zéro. $\square$

Théorème 3.4.6 *On suppose que le problème (3.4) admet une solution $u(t)$. S'il existe $0 < \theta < 2$ telle que $f \in C_\theta(A)$, alors $\|u_\alpha(0) - u(0)\|$ converge vers zéro avec un ordre α^θ .*

Preuve. En utilisant la même démarche utilisée dans la preuve du théorème (3.4.5) on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 &\leq \alpha^{2-k} M^2 \sum_{j=1}^{\infty} h_j(\alpha) e^{2\lambda_j d_s T} \left(\sum_{i=1}^s \|Q_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k} \right)^k M^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{(4-k)\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2,
\end{aligned}$$

En posant $k = 2 - \theta$, on obtient le résultat. $\square$

A partir de l'inégalité (3.15) et du théorème 3.4.6, on a le résultat suivant

Corollaire 3.4.1 *On suppose que le problème (3.4) admet une solution $u(t)$. S'il existe $0 < \theta < 2$ telle que $f \in C_\theta(A)$, alors $u_\alpha(t)$ converge uniformément par rapport à t vers $u(t)$ quand le paramètre α tend vers zéro avec un ordre α^θ .*

Notre but à présent est de construire une famille d'opérateurs régularisant pour le problème (3.4).

Définition 3.4.3 *Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha(t) : Z \rightarrow Z$, $\alpha > 0$, $t \in [0, T]$ est appelée une famille d'opérateurs de régularisation pour le problème (3.4) si pour chaque $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$) solution du problème (3.4) avec la donnée finale f et pour tout $\delta > 0$, il existe $\alpha(\delta) > 0$, tels que*

1. $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$,
2. $\|R_{\alpha(\delta)}(t)f_\delta - u(t)\| \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$,
pour tout $t \in [0, T]$, dès que f_δ satisfait $\|f_\delta - f\| \leq \delta$.

On définit $R_\alpha(t) = e^{-tA}(\alpha + e^{-TA})^{-1}$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$. Il est clair que $\{R_\alpha(t), t \in [0, T], \alpha > 0\} \subset \mathcal{L}(Z)$.

Théorème 3.4.7 *On suppose que f satisfait (3.7). Alors la famille $\{R_\alpha(t)\}$ défini ci-dessus est une famille d'opérateurs régularisants pour (3.4).*

Preuve. On a

$$\|R_\alpha(t)f_\delta - u(t)\| \leq \|R_\alpha(t)(f_\delta - f)\| + \|R_\alpha(t)f - u(t)\|,$$

où

$$\|R_\alpha(t)(f_\delta - f)\| \leq \frac{1}{\alpha}\delta. \quad (3.16)$$

On choisit $\alpha = \sqrt{\delta}$, alors $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, et

$$\|R_\alpha(t)(f_\delta - f)\| \leq \sqrt{\delta} \rightarrow 0, \text{ quand } \delta \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

D'autre part et en vertu du théorème 3.4.5, on a

$$\|R_\alpha(t)f - u(t)\| = \|u_\alpha(t) - u(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0, \quad (3.18)$$

uniformement par rapport à t . Combinant (3.17) et (3.18) on obtient

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|R_\alpha(t)(f_\delta - f)\| \leq \sqrt{\delta}, \text{ quand } \delta \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

Ensuite, on en déduit que $\{R_\alpha(t)\}$ est une famille d'opérateurs de régularisation pour (3.4). $\square$

Remarque 3.4.1 *Tous les résultats qui ont été obtenus précédemment restent valables si*

1. *la matrice D possède des valeurs propres dans le demi-plan $\{d \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} d > 0\}$.*
2. *l'opérateur $-\Delta$ dans (4.1) est remplacé par un opérateur linéaire auto-adjoint positif et à résolvante compacte. Cette considération peut être utilisé pour l'étude des problèmes dans le cas abstrait.*

3.5 Exemple numérique

Dans cette section on introduit un exemple pour vérifier l'efficacité de la méthode proposée. On considère l'opérateur

$$\mathcal{B} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \text{ avec } \mathcal{D}(\mathcal{B}) = H_0^1(0, \pi) \subset \mathcal{H} = L^2(0, \pi).$$

$$\lambda_j = j^2, \quad \phi_j = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(jx), \quad j = 1, 2, \dots$$

sont les valeurs et les fonctions propres orthonormales, qui forment une base dans l'espace $\mathcal{H}$.

Soit $D = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont $d_1 = 1$ et $d_2 = 2$.

$\{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2\} \in (M_2(\mathbb{R}))^2$ est la famille complète de projections dans $\mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

telle que

$$D = d_1 \mathcal{Q}_1 + d_2 \mathcal{Q}_2,$$

alors, il s'ensuit que

$$e^{-\lambda_j D t} = e^{-\lambda_j d_1 t} \mathcal{Q}_1 + e^{-\lambda_j d_2 t} \mathcal{Q}_2.$$

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ la solution du système suivant

$$\begin{cases} \partial_t U(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, 1) \times (0, \pi), \\ U(t, 0) = U(t, \pi) = 0, & t \in (0, 1), \\ U(1, x) = f(x), & x \in (0, \pi), \end{cases} \quad (3.20)$$

où

$$f(x) = \begin{pmatrix} (6e^{-1} - 5e^{-2}) \sin x \\ (-4e^{-1} + 5e^{-2}) \sin x \end{pmatrix}.$$

La solution exacte de (3.20) est donnée par

$$U(t, x) = \begin{pmatrix} (6e^{-t} - 5e^{-2t}) \sin x \\ (-4e^{-t} + 5e^{-2t}) \sin x \end{pmatrix}.$$

Pour montrer le caractère mal-posé du problème (3.20), on considère la donnée perturbée

$$f_m(x) = \begin{pmatrix} (6e^{-1} - 5e^{-2}) \sin x + \frac{1}{m} \sin mx \\ (-4e^{-1} + 5e^{-2}) \sin x + \frac{1}{m} \sin mx \end{pmatrix}.$$

La solution exacte du problème (3.20) correspondante à la donnée perturbée est

$$U_m(t, x) = \begin{pmatrix} (6e^{-t} - 5e^{-2t}) \sin x + (6 \frac{e^{(1-t)m^2}}{m} - 5 \frac{e^{2(1-t)m^2}}{m}) \sin(mx) \\ (-4e^{-t} + 5e^{-2t}) \sin x + (-4 \frac{e^{(1-t)m^2}}{m} + 5 \frac{e^{2(1-t)m^2}}{m}) \sin(mx) \end{pmatrix}$$

L'erreur donnée en $t = 1$,

$$\|f_m(x) - f(x)\|^2 = 2 \int_0^\pi \frac{1}{m^2} \sin^2(mx) dx = \frac{2}{m^2} \frac{\pi}{2},$$

On note que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_m(x) - f(x)\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2}{m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

par contre

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|U_m(0, x) - U(0, x)\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{m^2}}{m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \infty.$$

Ainsi de petites erreurs arbitraires dans les données peuvent conduire aux grandes erreurs dans la solution. De la méthode des valeurs aux limites auxiliaires, la solution régularisée est donnée par

$$U_\alpha(t, x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{-t\lambda_j^2}}{(e^{-\lambda_j^2} + \alpha)} Q_1 + \frac{e^{-2t\lambda_j^2}}{(e^{-2\lambda_j^2} + \alpha)} Q_2 \right) P_j f,$$

$$U_\alpha(t, x) = \begin{pmatrix} u_1^\alpha(t, x) \\ u_2^\alpha(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(6 \frac{e^{-(1+t)}}{(\alpha + e^{-1})} - 5 \frac{e^{-2(1+t)}}{(\alpha + e^{-2})} \right) \sin x + \frac{1}{m} \left(6 \frac{e^{-tm^2}}{(\alpha + e^{-m^2})} - 5 \frac{e^{-2tm^2}}{(\alpha + e^{-2m^2})} \right) \sin mx \\ \left(-4 \frac{e^{-(1+t)}}{(\alpha + e^{-1})} + 5 \frac{e^{-2(1+t)}}{(\alpha + e^{-2})} \right) \sin x + \frac{1}{m} \left(-4 \frac{e^{-tm^2}}{(\alpha + e^{-m^2})} + 5 \frac{e^{-2tm^2}}{(\alpha + e^{-2m^2})} \right) \sin mx \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que

$$U_\alpha\left(\frac{1}{2}, x\right) = \begin{pmatrix} \left(6 \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{(\alpha + e^{-1})} - 5 \frac{e^{-3}}{(\alpha + e^{-2})} \right) \sin x + \frac{1}{m} \left(6 \frac{e^{-\frac{m^2}{2}}}{(\alpha + e^{-m^2})} - 5 \frac{e^{-m^2}}{(\alpha + e^{-2m^2})} \right) \sin mx \\ \left(-4 \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{(\alpha + e^{-1})} + 5 \frac{e^{-3}}{(\alpha + e^{-2})} \right) \sin x + \frac{1}{m} \left(-4 \frac{e^{-\frac{m^2}{2}}}{(\alpha + e^{-m^2})} + 5 \frac{e^{-m^2}}{(\alpha + e^{-2m^2})} \right) \sin mx \end{pmatrix}.$$

Si on choisit $m = 300$, l'erreur est donnée dans le tableau 1.

α	$U_\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha)^\top$	$b_\alpha = \ U_\alpha\left(\frac{1}{2}, \cdot\right) - U\left(\frac{1}{2}, \cdot\right)\ $
$10^{-2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$(1, 83579453285757870327 \sin x +$ $8, 93890683320693679259 \times 10^{-19544} \sin(300x),$ $-0, 66269894986764767505 \sin x$ $-5, 95927122213795786173 \times 10^{-19544} \sin(300x))^\top$	0, 10537186355054932809
$10^{-4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$(1, 80024920972532375106 \sin(x) +$ $8, 93890683320693679259 \times 10^{-19542} \sin(300x),$ $-0, 58760102268700560842 \sin x$ $-5, 95927122213795786173 \times 10^{-19542} \sin(300x))^\top$	0, 0012410493990990877
$10^{-8} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$(1, 7997867987796889995 \sin x +$ $8, 93890683320693679259 \times 10^{-19538} \sin(300)x,$ $-0, 58760102268700560842 \sin x$ $-5, 95927122213795786173 \times 10^{-19542} \sin(300)x)^\top$	1, 24315933188250963919 $\times 10^{-7}$
$10^{-16} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$(1, 79978675241858939726 \sin x +$ $8, 93890683320693679259 \times 10^{-19530} \sin(300)x,$ $-0, 58672543299332296332 \sin x$ $-5, 95927122213795786173 \times 10^{-19530} \sin(300)x)^\top$	1, 24315954313594822062 $\times 10^{-15}$

Le tableau 1. montre que les solutions régularisées convergent vers la solution exacte quand α tend vers zéro.

Chapitre 4

ETUDE D'UN PROBLÈME INVERSE POUR UN SYSTÈME DE DIFFUSION

4.1 Formulation du problème

On considère le problème inverse qui consiste à déterminer le terme source $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ dans le système de diffusion suivant.

$$\begin{cases} u_t(x, t) - D\Delta u(x, t) = f(x), & 0 < t < 1, \ x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & 0 \leq t < 1, \ x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

avec la donnée supplémentaire

$$u(x, 1) = g(x), \quad (4.2)$$

où Ω un domaine borné suffisamment régulier dans $\mathbb{R}^p$, D est une $m \times m$ matrice réelle diagonalisable dont les valeurs propres sont strictement positives¹. On note par $\mathcal{X}$ l'espace de Hilbert $(L^2(\Omega))^m$ des fonctions à carré intégrable $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ muni du produit scalaire usuel.

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (u_1(x)v_1(x) + \dots + u_m(x)v_m(x))dx.$$

On définit l'opérateur non-borné A comme suit

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X},$$

$$Au = -D\Delta u, \ u \in \mathcal{D}(A),$$

avec

$$\mathcal{D}(A) = (\mathcal{H}(\Omega)^2 \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega))^m.$$

- Le spectre $\sigma(A)$ de l'opérateur A est donné par

$$\sigma(A) = \cup_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sigma(D).$$

1. On se place dans le même cadre Hilbertien du chapitre précédent.

- L'opérateur $\mathcal{A} = -A$ engendre un semi-groupe analytique $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sur $\mathcal{X}$ donné par

$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n x, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathcal{X},$$

où

$$A_n = -\lambda_n D.$$

4.2 Problème direct

Etant donné $f \in \mathcal{X}$, le problème direct associé au problème inverse (4.1) écrit sous forme abstraite est donné par

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f, & 0 < t \leq 1, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Pour le problème (4.3), on a le théorème suivant

Théorème 4.2.1 *Pour tout $f \in \mathcal{X}$, le problème (4.3) admet une solution unique $u \in C([0, T], D(A)) \cup C([0, T], \mathcal{X})$ donnée par*

$$u(t) = \int_0^t S(t-s)f ds.$$

► Par conséquence, pour toute donnée f la solution du système (4.1) est

$$u(x, t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n D(t-s)} P_n f ds, \quad (4.4)$$

où

$$P_n = \text{diag}(E_n, E_n, \dots, E_n), n = 1, 2, \dots$$

Soit $l \leq m$, si $D = \sum_{i=1}^l d_i Q_i$ la décomposition spectrale de D , où $\{Q_i\}_{1 \leq i \leq l}$ est une famille complète de projections. Alors la solution (4.4) peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^l \int_0^t e^{-\lambda_n d_i (t-s)} Q_i \right) P_n f(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^l \frac{1 - e^{-\lambda_n d_i t}}{\lambda_n d_i} Q_i P_n f(x). \end{aligned}$$

4.3 Méthode de troncature spectrale

Notre objectif à présent est de déterminer f à partir de la donnée g . Donc le problème inverse se reformule comme suit. Soit l'opérateur $K : f \rightarrow g$, déterminer f à partir de l'équation

$$g(x) = u(x, 1) = Kf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^l \sigma_{n,i} Q_i P_n f(x),$$

où $\sigma_{n,i} = \frac{1-e^{-\lambda_n d_i}}{\lambda_n d_i}$.

Il est facile de voir que K est un opérateur linéaire compact et injectif. D'autre part,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n g = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^l Q_i P_n g.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^l \sigma_{n,i} Q_i P_n f = \sum_{i=1}^l Q_i P_n g,$$

ce qui implique que

$$Q_i P_n f = \frac{1}{\sigma_{n,i}} Q_i P_n g,$$

et par conséquent

$$f(x) = K^{-1}g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_{n,i}} Q_i P_n g(x). \quad (4.5)$$

Comme pratiquement la donnée g est souvent entachée d'erreur de mesure. Donc il est notre objectif de résoudre l'équation (4.5) à partir d'une donnée perturbée g^δ vérifiant

$$\|g - g^\delta\| < \delta, \quad (4.6)$$

où $\delta > 0$ représente le niveau de bruit.

On note que $\frac{1}{\sigma_{n,i}} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, donc le problème est mal-posé i.e., la solution ne dépend pas continûment de la donnée. Par conséquent le problème (4.5) ne peut être résolu en utilisant les méthodes numériques classiques. On essaye alors de régulariser l'équation (4.5) en neutralisant l'influence du facteur $\frac{1}{\sigma_{n,i}}$ dans la formule de la solution. L'idée essentielle pour stabiliser le problème est d'éliminer les hautes fréquences (les composantes dont le nombre n est suffisamment grand) de la solution et on considère (4.5) seulement pour $n \leq N$. Définissons à cet effet la solution régularisée (tronquée) comme suit :

$$f_N^\delta = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_{n,i}} Q_i P_n g^\delta. \quad (4.7)$$

Définition 4.3.1 Pour $\alpha > 0$, on définit l'ensemble

$$C_{\alpha,E} = \{f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T \in (\mathcal{D}(B^\alpha))^m : (\sum_{k=1}^m \|f_k\|_\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \leq E\},$$

où $E > 0$ est une constante.

Théorème 4.3.1 Soient f_N^δ la solution régularisée donnée par (4.7), la solution exacte donnée par (4.5) et $g^\delta(x)$ la donnée mesurée en $t = 1$ vérifiant (4.6). Si $f \in C_{\alpha,E}$ et $\lambda_{N+1} \approx (\frac{E}{\delta})^{\frac{1}{1+\alpha}}$, alors on a l'estimation d'erreur suivante

$$\|f(\cdot) - f_N^\delta(\cdot)\| \leq E^{\frac{1}{1+\alpha}} \delta^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} (1 + \theta), \quad (4.8)$$

où $\theta = d_l(1 - \lambda_1 d_1)^{-1}$.

Preuve. De (4.7) et (4.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\|f(\cdot) - f_N^\delta(\cdot)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} P_n f - \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_{n,i}} Q_i P_n g^\delta \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} P_n f - \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_{n,i}} Q_i P_n g \right\| \\
&\quad + \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_{n,i}} Q_i P_n g - \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_{n,i}} Q_i P_n g^\delta \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} P_n f \right\| + \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_{n,i}} Q_i P_n (g - g^\delta) \right\|. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

En estime le membre droit comme suit

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} P_n f \right\| &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} (\lambda_n)^{-\alpha} (\lambda_n)^\alpha P_n f \right\| \\
&\leq (\lambda_{N+1})^{-\alpha} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{n=N+1}^{\infty} (\lambda_n)^{2\alpha} \|E_n f_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\lambda_{N+1})^{-\alpha} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^{2\alpha} \|E_n f_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\lambda_{N+1})^{-\alpha} \left(\sum_{k=1}^m \|f_k\|_\alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_{n,i}} Q_i P_n (g - g^\delta) \right\| &\leq \lambda_{N+1} d_l \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^l \frac{1}{1 - e^{-\lambda_n d_i}} Q_i P_n (g - g^\delta) \right\| \\
&\leq \lambda_{N+1} d_l (1 - e^{-\lambda_1 d_1})^{-1} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \|E_n (g_k - g_k^\delta)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \lambda_{N+1} d_l (1 - e^{-\lambda_1 d_1})^{-1} \left(\sum_{k=1}^m \|g_k - g_k^\delta\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \lambda_{N+1} d_l (1 - e^{-\lambda_1 d_1})^{-1} \|g - g^\delta\| \tag{4.11}
\end{aligned}$$

En tenant compte de (4.10) et (4.11), il vient

$$\begin{aligned}
\|f(\cdot) - f_N^\delta(\cdot)\| &\leq (\lambda_{N+1})^{-\alpha} E + \delta \lambda_{N+1} \theta \approx \left(\left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right)^{-\alpha} E + \theta \delta \left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \\
&\leq E^{\frac{1}{1+\alpha}} \delta^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} (1 + \theta)
\end{aligned}$$

□

D'où le résultat.

4.4 Implementation numérique

Dans cette section, on introduit quelques exemples numériques en dimension 1 pour valider la précision et l'efficacité de la méthode proposée.

Pour cela on considère le problème inverse suivant : déterminer $(U(x, t), f(x))$, où $U(x, t) = (U_1(x, t), U_2(x, t))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ vérifiant le système

$$\begin{cases} \partial_t U(x, t) - D\mathcal{B}U(x, t) = f(x), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ U(0, t) = U(1, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ U(x, 1) = g(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (4.12)$$

où

$$\mathcal{B} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \text{ de domaine } \mathcal{D} = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1) \subset \mathcal{H} = L^2(0, 1).$$

et $\lambda_n = n^2\pi^2$, $\phi_n = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \dots$ sont respectivement les valeurs propres et les fonctions propres, qui forment une base pour $\mathcal{H}$.

On suppose que la donnée g est entachée d'erreur i.e. On dispose de la fonction $g_\delta = (g_{1\delta}, g_{2\delta}) \in (L^2(0, 1))^2$ vérifiant

$$\|g - g_\delta\|_{(L^2(0, 1))^2} < \delta. \quad (4.13)$$

On choisit la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont $d_1 = 2$ et $d_2 = 3$.

$\{Q_1, Q_2\} \in (M_2(\mathbb{R}))^2$, est famille complète de projections sur $\mathbb{R}^2$,

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

d'où

$$e^{Dt} = e^{d_1 t} Q_1 + e^{d_2 t} Q_2.$$

On note

$$\sum_{i=1}^2 \frac{n^2 \pi^2 d_i}{1 - e^{-n^2 \pi^2 d_i}} Q_i = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^n & \alpha_{12}^n \\ \alpha_{21}^n & \alpha_{22}^n \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^n &= n^2 \pi^2 \frac{(1 + 3\beta_1 - 4\beta_2)}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}, \quad \alpha_{12}^n = 2n^2 \pi^2 \frac{(\beta_2 - \beta_1)}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)} \\ \alpha_{21}^n &= n^2 \pi^2 \frac{(\beta_1 - \beta_2)}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}, \quad \alpha_{22}^n = n^2 \pi^2 \frac{(1 - 2\beta_1 + \beta_2)}{(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}, \\ \beta_1 &= e^{-2n^2 \pi^2}, \quad \beta_2 = e^{-3n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent la solution du problème (4.12) est donnée par

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{1 - e^{-n^2 \pi^2 d_i t}}{n^2 \pi^2 d_i} Q_i \right) P_n f,$$

où $P_n = \text{diag}(E_n, E_n)$, $E_n h = h_n \phi_n$ et $h_n = (h, \phi_n) = \sqrt{2} \int_0^1 h(s) \sin(n\pi s) ds$, $n = 1, 2, \dots$
En utilisant la condition supplémentaire, on a :

$$g(x) = U(x, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{1 - e^{-n^2 \pi^2 d_i}}{n^2 \pi^2 d_i} Q_i P_n f(x).$$

Soit l'opérateur $K : f \rightarrow g$ défini par

$$K f(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{1 - e^{-n^2 \pi^2 d_i}}{n^2 \pi^2 d_i} Q_i P_n f(x).$$

Il est clair que K est un opérateur linéaire compact et injectif, il s'ensuit que

$$f(x) = K^{-1} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{n^2 \pi^2 d_i}{1 - e^{-n^2 \pi^2 d_i}} Q_i P_n g(x). \quad (4.14)$$

D'où la solution régularisée correspondante à la donnée perturbée est définie par

$$f_N^\delta = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^2 \frac{n^2 \pi^2 d_i}{1 - e^{-n^2 \pi^2 d_i}} Q_i P_n g^\delta. \quad (4.15)$$

Définition 4.4.1 Pour $r > 0$, on note par $H^r(0, 1)$ l'espace de Sobolev de toutes les fonctions $g \in L^2(0, 1)$ avec la propriété

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + n^2)^r |g_n|^2 < \infty,$$

où $g_n = \sqrt{2} \int_0^1 g(s) \sin(n\pi s) ds$. On définit aussi la norme de $H^r(0, 1)$ par

$$\|g\|_{H^r(0,1)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + n^2)^r |g_n|^2$$

Théorème 4.4.1 Soient f_N^δ la solution régularisée donnée par (4.15), $f(x)$ la solution exacte donnée par (4.14) vérifiant $\|f\|_{(H^\alpha(0,1))^2} \leq E$ et soit $g^\delta(x)$ la donnée mesurée en $t = 1$ satisfaisant (4.13). Si $N = [b]$, $b = (\frac{E}{\delta})^{\frac{1}{\alpha+2}}$, alors on a l'estimation suivante :

$$\|f(\cdot) - f_N^\delta(\cdot)\|_{(L^2(0,1))^2} \leq E^{\frac{2}{2+\alpha}} \delta^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} (1 + 2\pi^2 d_l). \quad (4.16)$$

Preuve. On suit les mêmes démarches qui ont été utilisée pour établir (4.8) et à l'aide de l'inégalité $\frac{1}{1 - e^{-n^2 \pi^2}} \leq 2$, on obtient l'estimation (4.16). $\square$

On revient à présent à (4.15), d'après ce qui précède on peut écrire

$$\begin{aligned} f_N^\delta &= \begin{pmatrix} f_{1,N}^\delta \\ f_{2,N}^\delta \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^2 \frac{n^2 \pi^2 d_i}{1 - e^{-n^2 \pi^2 d_i}} Q_i P_n g^\delta \\ &= \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} \alpha_{11}^n & \alpha_{12}^n \\ \alpha_{21}^n & \alpha_{22}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^\delta \\ g_2^\delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N (\alpha_{11}^n E_n g_1^\delta + \alpha_{12}^n E_n g_2^\delta) \\ \sum_{n=1}^N (\alpha_{21}^n E_n g_1^\delta + \alpha_{22}^n E_n g_2^\delta) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

d'où, on a

$$f_{k,N}^\delta(x) = 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^N (\alpha_{k1}^n g_1^\delta(s) \sin(n\pi s) + \alpha_{k2}^n g_2^\delta(s) \sin(n\pi s)) \sin(n\pi x) ds, \quad (4.18)$$

$k=1,2$.

En utilise la règle de trapèze pour approcher l'intégrale dans (4.18). Après avoir considéré une grille équidistante $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 1, (x_i = \frac{i}{M}, i = 0, \dots, M)$. On obtient

$$f_{k,N}^\delta(x_j) = 2h \sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^N (\alpha_{k1}^n g_1^\delta(x_i) \sin(n\pi x_i) + \alpha_{k2}^n g_2^\delta(x_i) \sin(n\pi x_i)) \sin(n\pi x_j), \quad (4.19)$$

$k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, M, \quad h = \frac{1}{M}$.

Exemple 1.

Il est clair que

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} (\frac{1}{3})(2 - 3e^{-2\pi^2 t} + e^{-3\pi^2 t}) \sin(\pi x) + (\frac{1}{12})(-1 + 3e^{-8\pi^2 t} - 2e^{-12\pi^2 t}) \sin(2\pi x) \\ (\frac{1}{6})(1 - 3e^{-2\pi^2 t} + 2e^{-3\pi^2 t}) \sin(\pi x) + (\frac{1}{24})(1 + 3e^{-8\pi^2 t} - 4e^{-12\pi^2 t}) \sin(2\pi x). \end{pmatrix}$$

et

$$f(x) = (\pi^2 \sin \pi x, \pi^2 \sin 2\pi x)^T$$

sont les solutions exactes du problème (4.12). D'où la fonction donnée g est donnée par

$$g(x) = U(x, 1) = \begin{pmatrix} (\frac{1}{3})(2 - 3e^{-2\pi^2} + e^{-3\pi^2}) \sin(\pi x) + (\frac{1}{12})(-1 + 3e^{-8\pi^2} - 2e^{-12\pi^2}) \sin(2\pi x) \\ (\frac{1}{6})(1 - 3e^{-2\pi^2} + 2e^{-3\pi^2}) \sin(\pi x) + (\frac{1}{24})(1 + 3e^{-8\pi^2} - 4e^{-12\pi^2}) \sin(2\pi x). \end{pmatrix}$$

Ajoutant une perturbation aléatoire distribuée selon la loi normale à chaque fonction donnée g , on obtient

$$g_k^\delta = g_k + \epsilon \text{randn}(\text{size}(g_k)), k = 1, 2, \quad ^2$$

où ϵ indique le niveau de bruit des données mesurées. Le niveau de bruit δ_k peut être mesuré dans le sens de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) en utilisant la relation

$$\delta_k = \|g_k^\delta - g_k\|_{l^2} = \left(\frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^M (g_k(x_i) - g_k^\delta(x_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, k = 1, 2.$$

L'erreur relative s'obtient par la relation suivante :

$$RE(f_k) = \frac{\|f_{k,N}^\delta - f_k\|_{l^2}}{\|f_k\|_{l^2}}, k = 1, 2.$$

2. Voir la définition de la fonction randn(size(.)) dans la page 31 du chapitre 2.

Tableaux et figures

Cas des données exactes :

Pour des données non bruitées, on considère les discrétisations $N = 4$ et $N = 8$ respectivement. Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux et les figures suivants ;

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	$2.3973e - 015$	$6.5800e - 016$
40	$1.0611e - 015$	$5.2807e - 016$
60	$9.2023e - 016$	$8.7409e - 016$
100	$8.7954e - 016$	$1.5128e - 015$
200	$1.2868e - 015$	$7.2320e - 015$

Tableau 4.1 Erreur relative pour des données exactes avec $N = 4$.

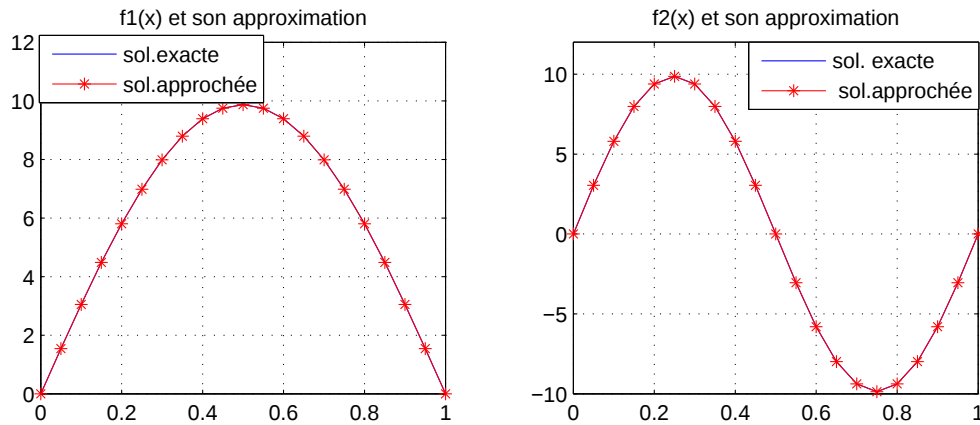
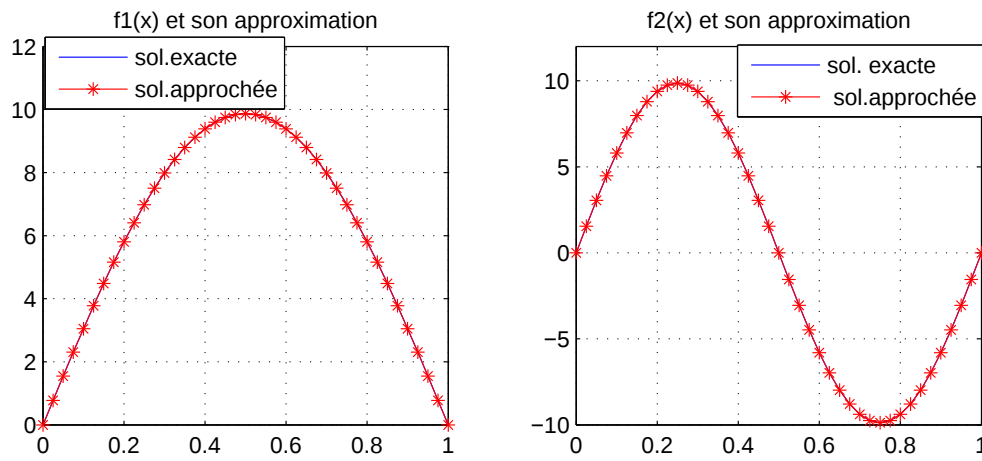


FIGURE 4.1 – La comparaison entre la solution exacte (non bruitées) et la solution approchée pour $M = 20$, $N = 4$.

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	$2.2544e - 014$	$4.6476e - 015$
40	$1.0024e - 014$	$1.0048e - 015$
60	$8.0442e - 015$	$2.4560e - 015$
100	$1.1503e - 014$	$3.6223e - 015$
200	$3.1862e - 015$	$1.4168e - 015$

Tableau 4.2 Erreur relative pour des données exactes avec $N = 8$.FIGURE 4.2 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 8$.

► D'après les résultats obtenus, on remarque que les solutions approchées sont presque identiques aux solutions exactes.

Cas de données bruitées :

On considère à présent des données bruitées. On calcule l'erreur relative correspondante à $N = 4$ et pour différentes valeurs de M et pour un niveau de bruit $\epsilon = 10^{-2}$ et $\epsilon = 10^{-3}$ respectivement, les résultats obtenus sont présentés par les tableaux et les figures suivants :

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	0.1078	0.3038
50	0.0703	0.1181
100	0.0431	0.0304
200	0.0405	0.0844

Tableau 4.3 Erreur relative pour des données bruitées avec $N = 4$, $\epsilon = 10^{-2}$.

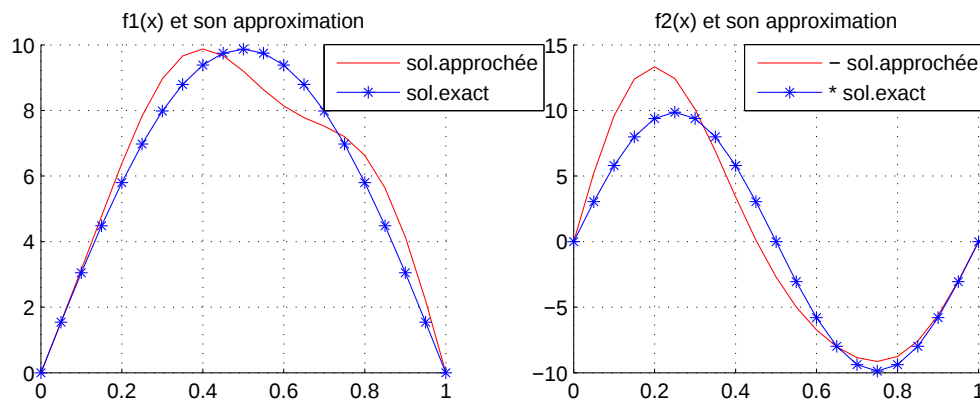


FIGURE 4.3 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 20$, $N = 4$, $\epsilon = 10^{-2}$.

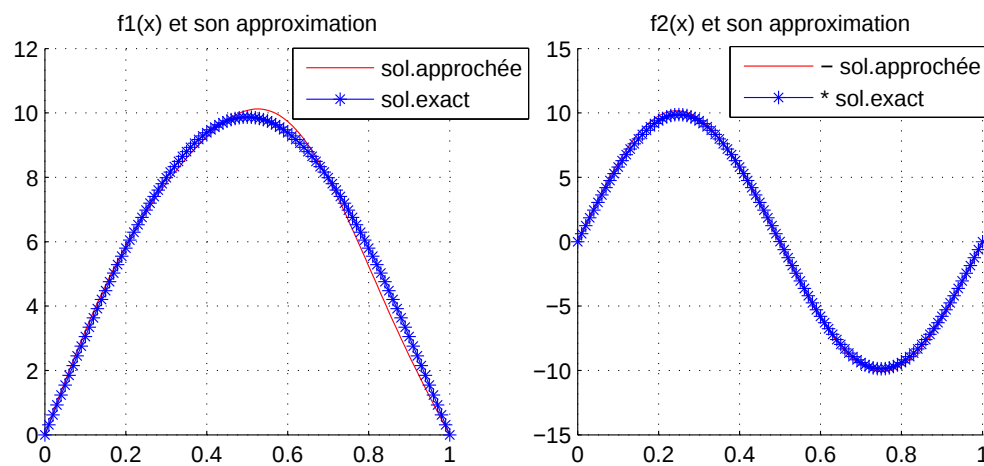


FIGURE 4.4 – La comparaison entre la solution exacte et le solution approchée pour $M = 100$, $N = 4$, $\epsilon = 10^{-2}$.

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	0.0108	0.0304
50	0.0070	0.0118
100	0.0043	0.0030
200	0.0041	0.0081

Tableau 4.4 Erreur relative pour des données bruitées avec $N = 4$, $\epsilon = 10^{-3}$.

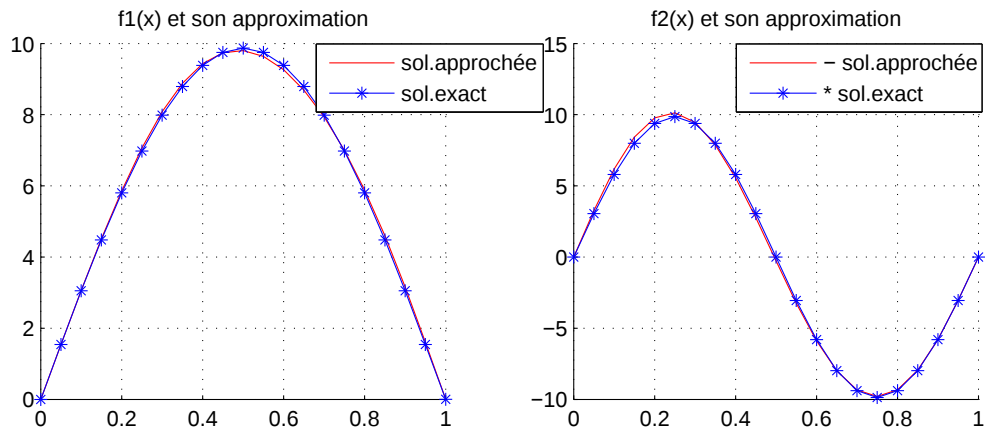


FIGURE 4.5 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 20$, $N = 4$, $\epsilon = 10^{-3}$.

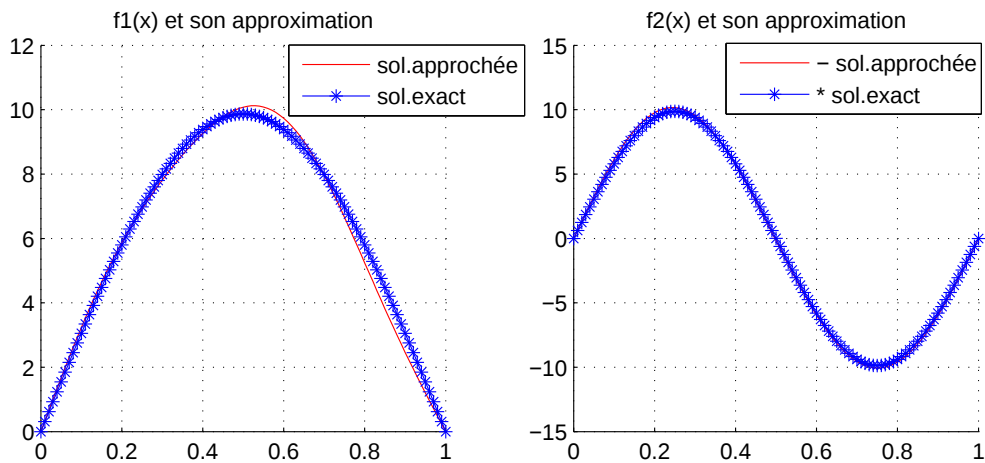


FIGURE 4.6 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 100$, $N = 4$, $\epsilon = 10^{-3}$.

► D'après les calculs effectués, on remarque que malgré les données bruitées, les résultats de l'identification de source obtenus pour cet exemple sont satisfaisants.

Dans les deux exemples qu'on va introduire, le problème direct n'admet pas de solution analytique, pour cela les données g_1 et g_2 sont obtenues en résolvant le problème direct.

Exemple 2. Choisissons dans ce deuxième exemple

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 4x - 1, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 3 - 4x, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{5}, \\ 5x - 1, & \frac{1}{5} \leq x \leq \frac{2}{5}, \\ 3 - 5x, & \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}, \\ 0, & \frac{3}{5} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Cas de données exactes :

On génère des données exactes. Les résultats obtenus sont illustrés par les tableaux et les figures suivants ;

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	0.2135	0.2261
40	0.2036	0.2115
60	0.2016	0.2089
100	0.2005	0.2073
200	0.2001	0.2066

Tableau 4.5 Erreur relative pour des données exactes avec $N = 4$.

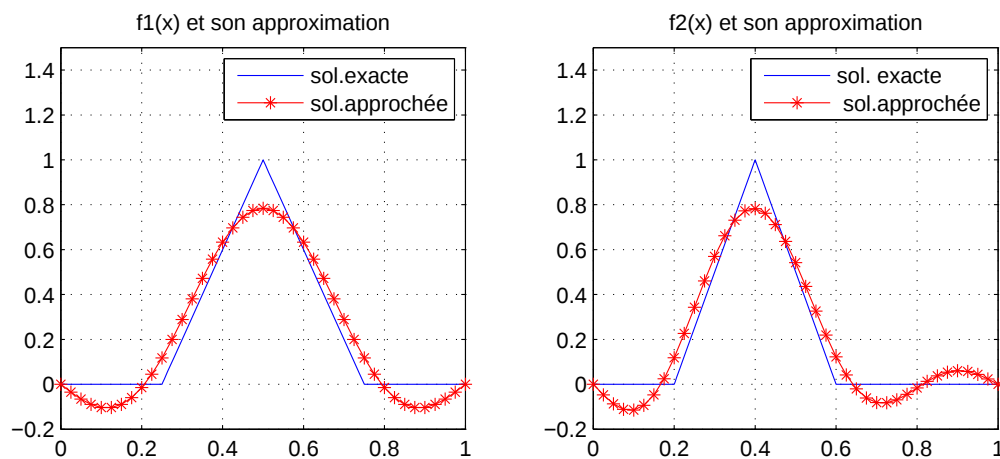


FIGURE 4.7 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 4$.

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	$3.2316e - 013$	$2.7995e - 013$
40	0.0221	0.0296
60	0.0195	0.0259
100	0.0175	0.0231
200	0.0164	0.0216

Tableau 4.6 Erreur relative pour des données exactes avec $N = 20$.

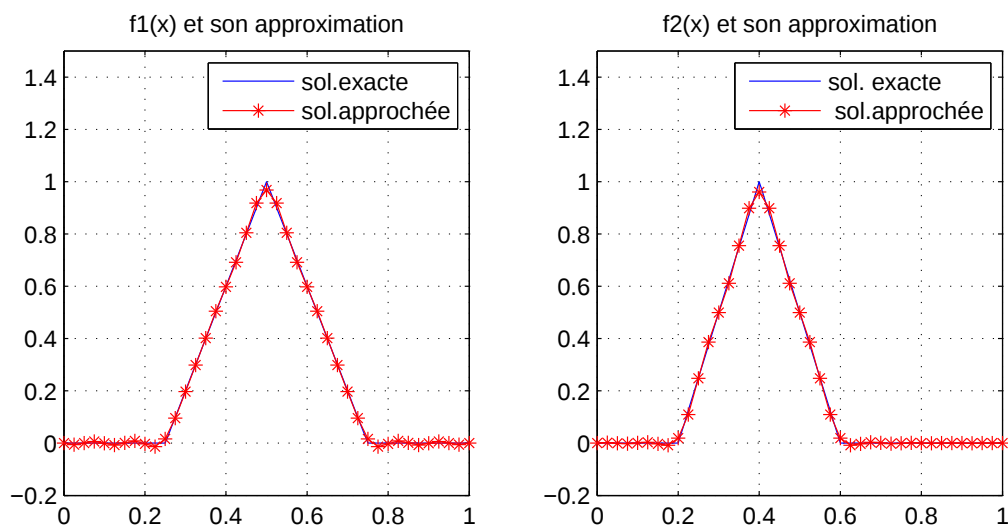


FIGURE 4.8 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 20$.

Cas de données bruitées :

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	0.2808	0.6149
40	0.2230	0.2640
60	0.2652	0.3223
100	0.2022	0.2312
200	0.2346	0.3135

Tableau 4.7 Erreur relative pour des données bruitées avec $N = 4$, $\epsilon = 10^{-3}$.

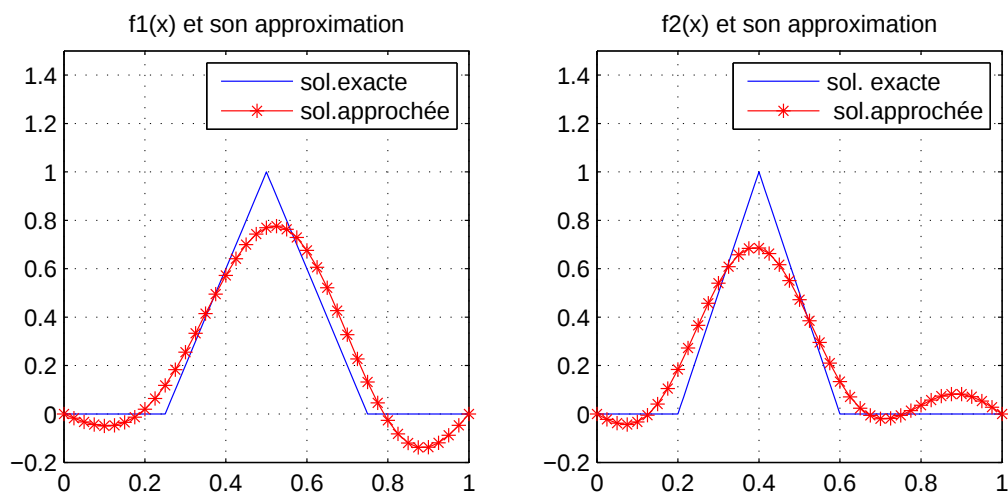


FIGURE 4.9 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 4$, $\epsilon = 10^{-3}$.

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	0.1117	0.1947
40	0.0776	0.1550
60	0.0700	0.0985
100	0.0600	0.0903
200	0.0587	0.0910

Tableau 4.8 Erreur relative pour des données bruitées avec $N = 6$, $\epsilon = 10^{-4}$.

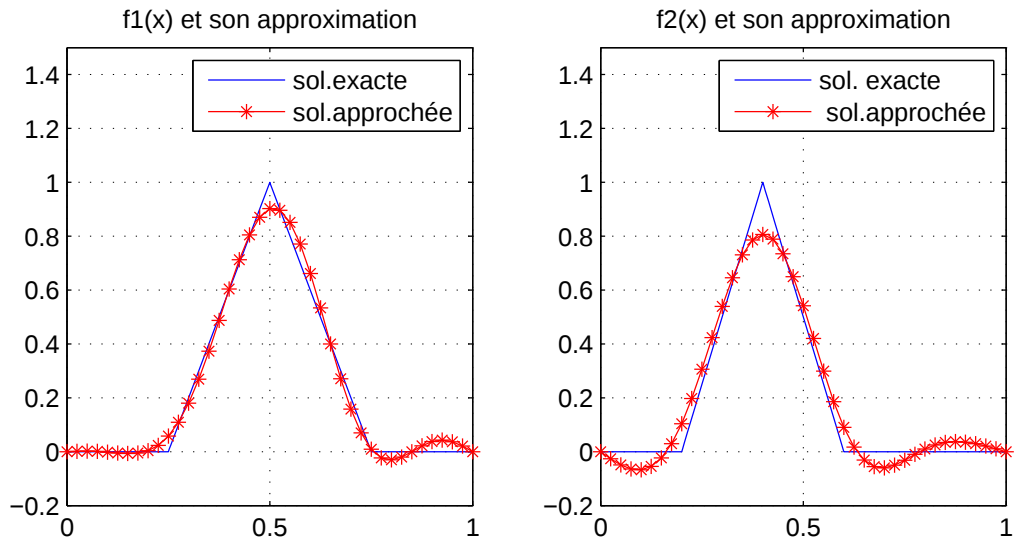


FIGURE 4.10 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 6$, $\epsilon = 10^{-4}$.

Exemple 3. Choisissons dans cet exemple

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 0, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 1, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Cas de données exactes :

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	0.3255	0.3616
40	0.3553	0.3708
60	0.3475	0.3739
100	0.3520	0.3763
200	0.3474	0.3782

Tableau 4.9 Erreur relative pour des données exactes avec $N = 4$.

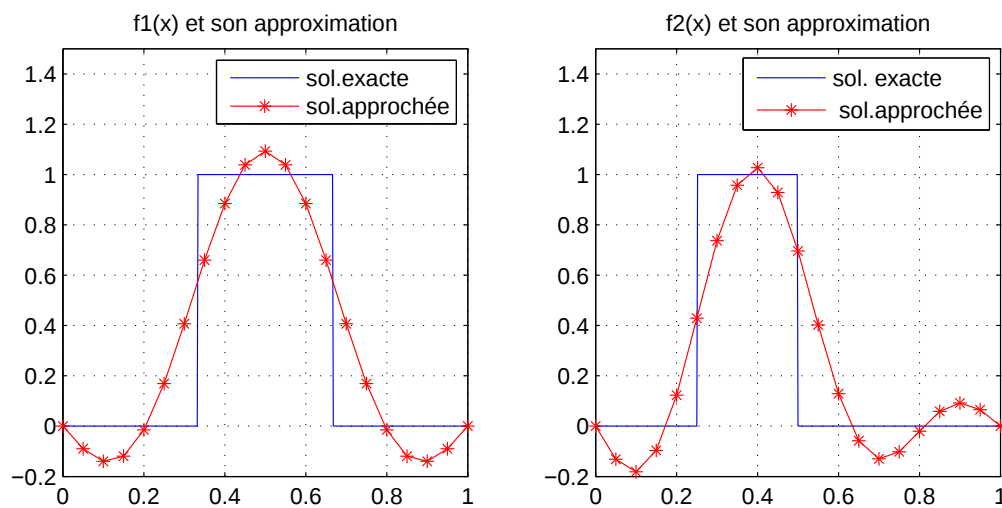
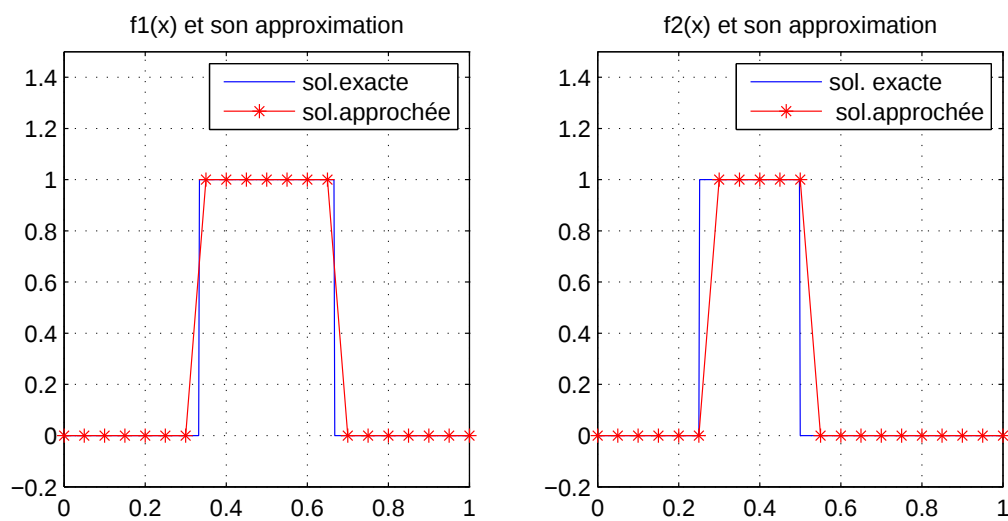


FIGURE 4.11 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 4$, $M = 20$.

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	$3.0851e - 013$	$2.4708e - 013$
40	0.1634	0.1653
60	0.1685	0.1817
100	0.1773	0.1875
200	0.1773	0.1908

Tableau 4.10 Erreur relative pour des données exactes avec $N = 20$.FIGURE 4.12 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 20$, $M = 20$.

Cas de données bruitées :

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	0.3494	0.5574
40	0.3613	0.3883
60	0.3683	0.4147
100	0.3525	0.3837
200	0.3580	0.4176

Tableau 4.11 Erreur relative pour des données exactes avec $N = 4$, $\epsilon = 10^{-3}$.

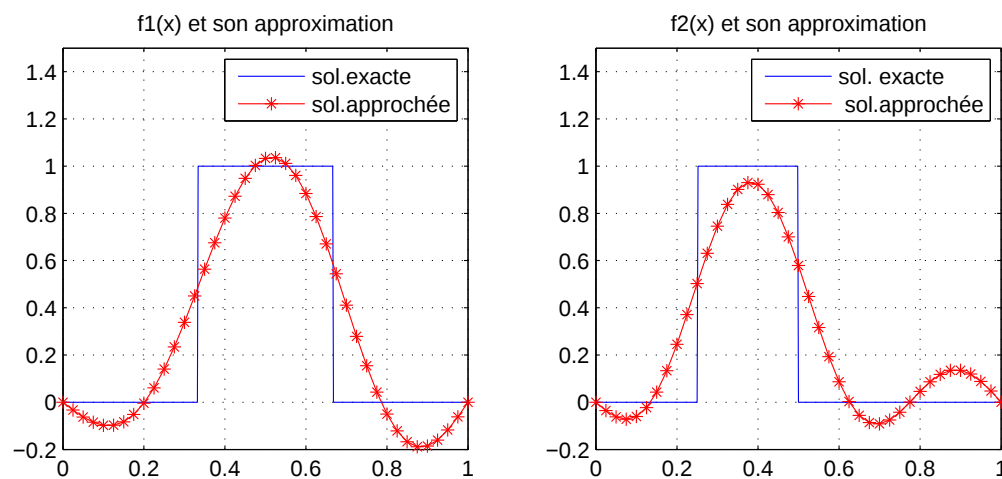


FIGURE 4.13 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 4$, $M = 40$, $\epsilon = 10^{-3}$.

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	0.3261	0.3705
40	0.3554	0.3716
60	0.3478	0.3754
100	0.3521	0.3768
200	0.3475	0.3784

Tableau 4.12 Erreur relative pour des données exactes avec $N = 4$, $\epsilon = 10^{-4}$.

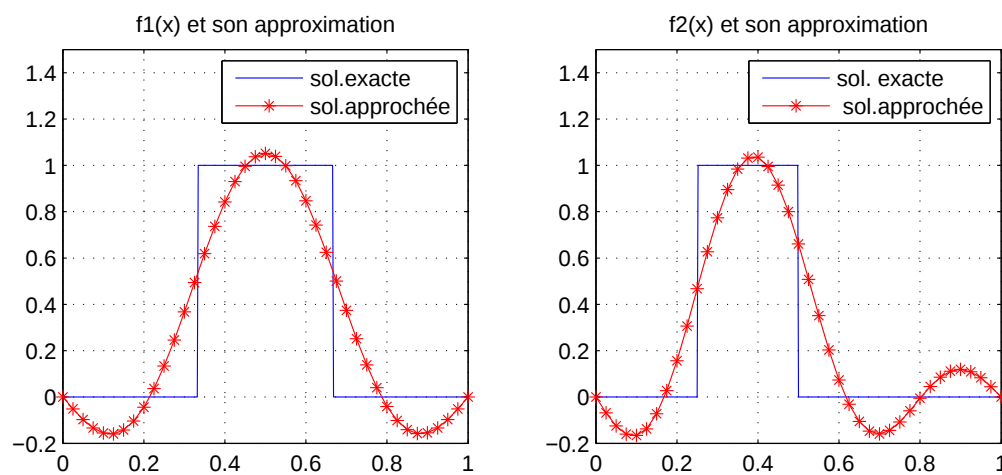


FIGURE 4.14 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 4$, $M = 40$, $\epsilon = 10^{-4}$.

M	$\text{Er}(f_1)$	$\text{Er}(f_2)$
20	0.2460	0.4316
40	0.2422	0.3217
60	0.2362	0.3514
100	0.2420	0.3124
200	0.2355	0.2591

Tableau 4.13 Erreur relative pour des données exactes avec $N = 10$, $\epsilon = 10^{-4}$.

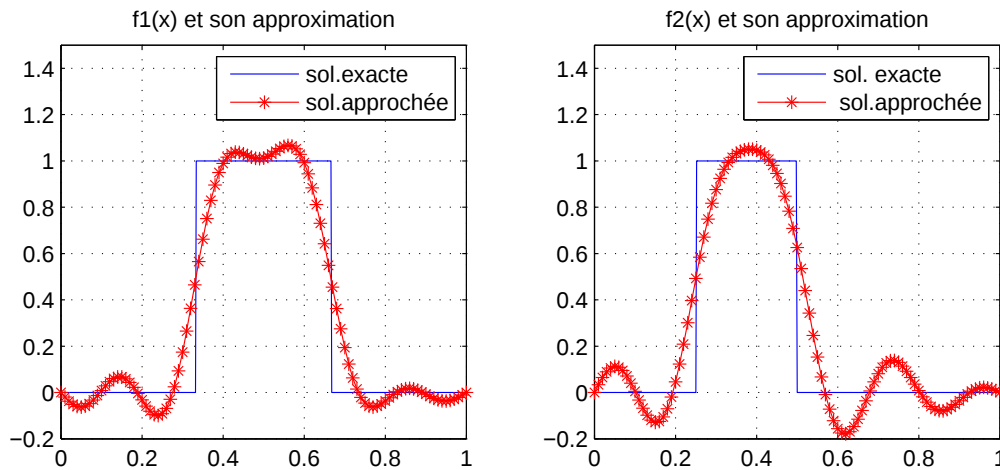


FIGURE 4.15 – La comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 10$, $M = 100$, $\epsilon = 10^{-4}$.

► Les résultats obtenus attestent que la méthode de troncature spectrale peut s'adapter avec succès à l'identification du couple de fonctions.

Ils montrent aussi une convergence satisfaisante en présence de bruit de mesure dans le cas de fonctions régulières (exemple 1) et même dans le cas de fonctions non-lisse (exemple 2).

Par contre ces résultats semblent moins satisfaisants dans l'exemple 3 à cause de la discontinuité.

Programmes Matlab

Méthode de Kozlov-Maz'ya

```
%( * ::Package:: *)

function [er2]= kozlovmazya(N,epsi,it,c1)
N=0;epsi=10^(-3);it=4;c1=0.6;
x=linspace(0,1,N+1);
h=1/(N+1);
f1=sin(pi*x');
g=(1/pi^(4))*(1-(1+pi^(2))*exp(-pi^(2)))*(sin(pi*x'));
gn=g+epsi*randn(size(g));
g=gn;
A=(1/h^2)*(diag(2*ones((N-1),1))-diag(ones(N-2,1),1)-diag(ones(N-2,1),-1));
K=A^(-2)*(eye(N-1)-((eye(N-1)+A)*expm(-(A)))));
c=4*((N+1)*(sin(pi/(2*(N+1))))))^2;
gamma=c1*(c^2/(1-(1+c)*exp(-c)));
gamma,
f(:,1)=zeros(N+1,1);
for k=2:it
    F=(eye(N-1)-gamma*K)*f(2:N,k-1);
    f(:,k)=[0;F;0]+gamma*g;
end
er2=(norm(f1-f(:,it),2))/norm(f1,2);
er2,
plot(x,f1,'r',x,f(:,it),'b*--')
grid
legend('sol. approach\[\AAcute]e', 'sol. exacte'),
```

Méthode de Troncature spectrale

```

function [er1, er2,fa1,fa2 ] = Methode_troncature(M,N,epsi,f1,f2,g1,g2)
M=20;
N=4;
epsi=10^-2;h=1/M;
x=0:h:1;
f1=(pi^2)*sin(pi*x);
f2=(pi^2)*sin(2*pi*x);
g1=(1/3)*(2-3.*exp(-2.*pi^2)).*sin(pi.*x)+(1/12).*(-1+3.*exp(-8.*pi^2)-2.*exp(-12.*pi^2)).*sin
g2=(1/6)*(1-3*exp(-2*pi^2)+2*exp(-3*pi^2))*sin(pi*x)+(1/24)*(1+3*exp(-8*pi^2)-4*exp(-12*pi^2))
g1n=g1+epsi*randn(size(g1));
g2n=g2+epsi*randn(size(g2));
g1=g1n;
g2=g2n;
S2=0;
for n=1:N
a2n= (2*(n^2)*(pi^2))/ (1-exp(-2*(n^2)*(pi^2)));
a3n=(3*(n^2)*(pi^2))/(1-exp(-3*(n^2)*(pi^2)));
S1=g1.*sin(n*pi*x);
S1=sum(S1);
S2=S2+(2*a2n-a3n)*S1*sin(n*pi*x);
end
S4=0;
for n=1:N
a2n=(2*(n^2)*(pi^2))/ (1-exp(-2*(n^2)*(pi^2)));
a3n=(3*(n^2)*(pi^2))/(1-exp(-3*(n^2)*(pi^2)));
S3=g2.*sin(n*pi*x);
S3=sum(S3);
S4=S4+((-2)*a2n+(2)*a3n)*S3*sin(n*pi*x);
end
fa1=2*h*(S2+S4);
er1=(norm(f1-fa1,2))/norm(f1,2);
l2=0;
for n=1:N;
a2n= (2*(n^2)*(pi^2))/ (1-exp(-2*(n^2)*(pi^2)));
a3n=(3*(n^2)*(pi^2))/(1-exp(-3*(n^2)*(pi^2)));
l1=g1.*sin(n*pi*x);
l1=sum(l1);
l2=l2+(a2n-a3n)*l1*sin(n*pi*x);
end
l4=0;
for n=1:N;
a2n=(2*(n^2)*(pi^2))/ (1-exp(-2*(n^2)*(pi^2)));
a3n=(3*(n^2)*(pi^2))/(1-exp(-3*(n^2)*(pi^2)));
l3=g2.*sin(n*pi*x);
l3=sum(l3);
l4=l4+((-1)*a2n+(2)*a3n)*l3*sin(n*pi*x);
end

```

```

fa2=2*h*(l2+l4);
er2=(norm(f2-fa2,2))/norm(f2,2)
subplot (1,2,1);
plot (x,f1,'b',x, fa1,'r*-');grid;
title('f1(x) et son approximation');
legend('sol.exacte', 'sol.approchée');
subplot (1,2,2);
plot (x,f2,'b', x, fa2,'r*-');grid;
title('f2(x) et son approximation');
legend('sol. exacte', ' sol.approchée' );
end

```

Exemple2

```

function y=funct_cre1(t)
if t>=0 && t<=1/4
    y=0;
else if t>=1/4 && t<=1/2
    y=((4)*t-1);
    else if t>=1/2 && t<=3/4
    y=(3-(4)*t);
    else
        y=0;
end
end
end

```

```

function y=funct_cre2(t)
if t>=0 && t<=1/5
    y=0;
else if t>=1/5 && t<=2/5
    y=5*t-1;
    else if t>=2/5 && t<=3/5
    y=-5*t+3;
    else
        y=0;
end
end
end

```

Exemple3

```
%function y=functdisc1(t)
t=0:0.2:1;
if (t>=0 &t<=1/3);
    y=0;
end
else
    if (t>=1/3 & t<=2/3);
        y=1;
    end
    else
        if (t>=2/3)
            y=0;
        end
    end
end
```

```
function y=functdisc2(t)
if t>=0 && t<=1/4
    y=0;
else if t>=1/4 && t<=2/4
    y=1;
else
    y=0;
end
end
end
end
```

Conclusion et perspectives

Dans le présent travail on a traité trois problèmes inverses, en utilisant différentes méthodes de régularisation.

Dans l'étude du premier problème, on a utilisé une méthode itérative basée sur l'algorithme de Kozlov-Mazia pour identifier le terme source dans une équation différentielle du second ordre. Dans le deuxième problème on a déterminé la condition initiale pour un système de diffusion en utilisant la méthode des valeurs aux limites auxiliaires, dans le troisième on a identifié le terme source pour le même système, où la méthode de troncature a été introduite pour la construction d'une solution régularisée.

Dans ces études des résultats de convergence ont été établis et des estimations d'erreur ont été obtenus en vertu d'une estimation a priori de la solution exacte. Certains tests numériques ont été illustrés pour vérifier la validité de chaque méthode proposée.

Comme perspectives on se propose de démontrer des inégalités de Carleman globales pour un système linéaire composé de deux équations paraboliques couplées avec des coefficients de diffusion non réguliers dans un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. Ces inégalités seront utilisées pour démontrer des résultats de stabilité et d'unicité pour certains problèmes inverses.

PUBLICATIONS

Research Article

An Iterative Regularization Method for Identifying the Source Term in a Second Order Differential Equation

Fairouz Zouyed and Sebti Djemoui

Applied Math Lab, University Badji Mokhtar Annaba, P.O. Box. 12, 23000 Annaba, Algeria

Correspondence should be addressed to Fairouz Zouyed; fzouyed@gmail.com

Received 28 May 2015; Accepted 21 September 2015

Academic Editor: Peter Dabnichki

Copyright © 2015 F. Zouyed and S. Djemoui. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

This paper discusses the inverse problem of determining an unknown source in a second order differential equation from measured final data. This problem is ill-posed; that is, the solution (if it exists) does not depend continuously on the data. In order to solve the considered problem, an iterative method is proposed. Using this method a regularized solution is constructed and an a priori error estimate between the exact solution and its regularized approximation is obtained. Moreover, numerical results are presented to illustrate the accuracy and efficiency of this method.

1. Introduction

Let H be a separable Hilbert space with the inner product $(\cdot, \cdot)$ and the norm $\|\cdot\|$. Consider the problem of finding the source term $f \in H$ in the following system:

$$\begin{aligned} u''(t) + 2Au'(t) + A^2u(t) &= f, \quad 0 < t < T, \\ u(0) &= 0, \\ u'(0) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

with the additional data

$$u(T) = g, \quad (2)$$

where $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ is a positive self-adjoint linear operator with a compact resolvent; we denote by $\sigma(A)$ the spectrum of the operator A .

The problem (1) is an abstract version of the system

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - 2\Delta u_t(x, t) + \Delta^2 u(x, t) &= f(x), \\ 0 < t < T, \quad x \in \Omega, \\ u(x, t) = \Delta u(x, t) &= 0, \\ 0 \leq t \leq T, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) &= 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

which arises in the mathematical study of structural damped vibrations of string or a beam [1–3]. Also this problem can be considered as a biparabolic problem in the abstract setting. For physical motivation we cite the biparabolic model proposed in [4] for more adequate mathematical description of heat and diffusion processes than the classical heat equation. For other models we refer the reader to [5–7].

For most classical partial differential equations, the reconstruction of source functions from the final data or a partial boundary data is an inverse problem with many applications in several branches of sciences and engineering, such as geophysical prospecting and pollutant detection [8–12].

The main difficulty of inverse source identification problems is that they are ill-posed, that is, even if a solution exists, it does not depend continuously on the data; in other words, small error in the data measurement can induce enormous error to the solution. Thus, special regularization methods that restore the stability with respect to measurements errors are needed. In the present work, we focus on an iterative method proposed by Kozlov and Maz'ya [13, 14] for solving the problem; it is based on solving a sequence of well-posed boundary value problems such that the sequence of solutions converges to the solution for the original problem. It has been successfully used for solving various classes of ill-posed elliptic, parabolic, and hyperbolic problems [5, 15–21].

We note that although the interest in inverse problem has rapidly increased during this decade, the literature devoted to the class of problems (1) is quite scarce.

The paper is organized as follows. Section 2 gives some tools which are useful for this study; in Section 3 we introduce some basic results and we show the ill-posedness of the inverse problem; Section 4 gives a regularization solution and error estimation between the approximate solution and the exact one; the numerical implementation is described in Section 5 to illustrate the accuracy and efficiency of this method.

2. Preliminaries

Let $(\varphi_n)_{n \geq 1} \subset H$ be an orthonormal eigenbasis corresponding to the eigenvalues $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ such that

$$\begin{aligned} A\varphi_n &= \lambda_n \varphi_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 < \lambda_1 &\leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty. \\ \xi &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \xi, \\ E_n \xi &= (\xi, \varphi_n) \varphi_n, \quad \forall \xi \in H. \end{aligned} \quad (4)$$

We denote by $\{T(t) = e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ the analytic semigroup generated by $-A$ on H ,

$$T(t)\xi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} E_n \xi, \quad \forall \xi \in H. \quad (5)$$

For $\alpha > 0$, the space H^α is given by

$$H^\alpha = \left\{ \xi \in H : \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n^2)^\alpha \|E_n \xi\|^2 < \infty \right\}, \quad (6)$$

with the norm

$$\|\xi\|_{H^\alpha} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n^2)^\alpha \|E_n \xi\|^2 \right)^{1/2}, \quad \xi \in H^\alpha. \quad (7)$$

We achieve this section by a result concerning nonexpansive operators.

Definition 1. A linear bounded operator $L : H \rightarrow H$ is called nonexpansive if $\|L\| \leq 1$.

Let L be a nonexpansive operator; to solve the equation

$$(I - L)\varphi = \psi, \quad (8)$$

we state a convergence theorem for a successive approximation method.

Theorem 2 (see [22], p. 66). *Let L be a nonexpansive, self-adjoint positive operator on H . Let $\psi \in H$ be such that (8) has a solution. If 1 is not eigenvalue of L , then the successive approximations*

$$\varphi_{n+1} = L\varphi_n + \psi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

converge to a solution to (8) for any initial data $\varphi_0 \in H$. Moreover, $L^n \varphi \rightarrow 0$ for every $\varphi \in H$, as $n \rightarrow \infty$.

3. Basic Results

3.1. The Direct Problem. Let $Z = D(A) \times H$ with the norm $\|U\|_Z^2 = \|A\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2$, $U = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in Z$.

For a given $f \in H$, consider the direct problem

$$\begin{aligned} w''(t) + 2Aw'(t) + A^2w(t) &= f, \quad 0 < t < T, \\ w(0) &= 0, \\ w'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Making the change of variable $w' = v$, we can write the second order equation in (10) as a first order system in the space Z as follows:

$$\begin{aligned} z'(t) &= \mathcal{A}z(t) + F, \quad 0 < t < T, \\ z(0) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

where $z = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$, and $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & -2A \end{pmatrix}$.

The linear operator $\mathcal{A}$ is unbounded with the domain $D(\mathcal{A}) = D(A^2) \times D(A)$ and it is the infinitesimal generator of strongly continuous semigroup $\{S(t) = e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$. Moreover $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ is analytic (see [1]) and it admits the following explicit form:

$$S(t)U = \sum_{n=1}^{\infty} e^{tB_n} P_n U, \quad U = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in Z, \quad (12)$$

where $B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_n^2 & -2\lambda_n \end{pmatrix}$ and $\{P_n\}_{n \geq 1}$ is a complete family of orthogonal projections in Z given by $P_n = \text{diag}(E_n, E_n)$.

Using matrix algebra, we obtain

$$e^{tB_n} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -\lambda_n^2 t e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

From the semigroup theory (see [23]), the problem (11) admits a unique solution $z \in C([0, T], Z)$ given by

$$z = \int_0^t S(t-s) F ds. \quad (14)$$

Hence,

$$\begin{aligned} z &= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} e^{(t-s)B_n} P_n F ds \\ &= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \sigma_n^1(t, s) & \sigma_n^2(t, s) \\ \sigma_n^3(t, s) & \sigma_n^4(t, s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (f, \varphi_n) \varphi_n \end{pmatrix} ds, \end{aligned} \quad (15)$$

such that

$$\begin{aligned} \sigma_n^1(t, s) &= e^{-\lambda_n(t-s)} + \lambda_n(t-s) e^{-\lambda_n(t-s)}, \\ \sigma_n^2(t, s) &= (t-s) e^{-\lambda_n(t-s)}, \\ \sigma_n^3(t, s) &= -\lambda_n^2(t-s) e^{-\lambda_n(t-s)}, \\ \sigma_n^4(t, s) &= -\lambda_n(t-s) e^{-\lambda_n(t-s)} + e^{-\lambda_n(t-s)}. \end{aligned} \quad (16)$$

As a consequence, we obtain the following theorem.

Theorem 3. The problem (10) admits a unique solution $w \in C([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], H)$ given by

$$w(t) = K(t)f = A^{-2}(I - (I + tA)e^{-tA})f \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (1 + t\lambda_n)e^{-t\lambda_n})}{\lambda_n^2} (f, \varphi_n) \varphi_n. \quad (17)$$

3.2. Ill-Posedness of the Inverse Problem. Now, we wish to solve the inverse problem, that is, find the source term f in the system (1). Making use of the supplementary condition (2) and defining the operator $K(T) : f \rightarrow g$, we have

$$g = u(T) = K(T)f = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n E_n f, \quad (18)$$

where $\sigma_n = (1 - (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})/\lambda_n^2$.

It is easy to see that $K(T)$ is a self-adjoint compact linear operator. On the other hand,

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} E_n g = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n E_n f, \quad (19)$$

so

$$\sigma_n E_n f = E_n g, \quad (20)$$

which implies

$$E_n f = \frac{1}{\sigma_n} E_n g, \quad (21)$$

and therefore

$$f = K(T)^{-1}g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} E_n g. \quad (22)$$

Note that $1/\sigma_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$, so the inverse problem is ill-posed; that is, the solution does not depend continuously on the given data. Hence this problem cannot be solved by using classical numerical methods.

Remark 4. As many boundary inverse value problems for partial differential equations which are ill-posed, the study of the problem (1) is reduced to the study of the equation $K(T)f = g$, where $K(T)$ is a compact self-adjoint operator in the Hilbert space H . This equation can be rewritten in the following way:

$$f = (I - \gamma K(T))f + \gamma g = Lf + \gamma g, \quad (23)$$

where γ is a positive number satisfying $\gamma < 1/\|K(T)\|$.

In the next section, we will show that the operator L is nonexpansive and 1 is not eigenvalue of L , so it follows from Theorem 2 that $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converges and $(I - \gamma K(T))^n f \rightarrow 0$, for every $f \in H$, as $n \rightarrow \infty$.

4. Iterative Procedure and Convergence Results

The alternating iterative method is based on reducing the ill-posed problem (1) to a sequence of well-posed boundary value problems and consists of the following steps.

First, we start by letting $f_0 \in H$ be arbitrary; the initial approximation u_0 is the solution to the direct problem

$$u_0'' + 2Au_0' + A^2u_0 = f_0, \quad 0 < t < T, \\ u_0(0) = 0, \\ u_0'(0) = 0. \quad (24)$$

Then, if the pair (f_k, u_k) has been constructed, let

$$f_{k+1} = f_k - \gamma(u_k(T) - g), \quad (25)$$

where γ is such that

$$0 < \gamma < \frac{1}{\|K(T)\|}, \quad (26)$$

and $\|K(T)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (1 - (1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n})/\lambda_n^2$.

Finally, we get u_{k+1} by solving the problem

$$u_{k+1}'' + 2Au_{k+1}' + A^2u_{k+1} = f_{k+1}, \quad 0 < t < T, \\ u_{k+1}(0) = 0, \\ u_{k+1}'(0) = 0. \quad (27)$$

Let us iterate backwards in (25) to obtain

$$f_{k+1} = f_k - \gamma K(T)f_k + \gamma g = (I - \gamma K(T))f_k + \gamma g \\ = (I - \gamma K(T))^{k+1}f_0 + \gamma \sum_{j=0}^k (I - \gamma K(T))^j g. \quad (28)$$

Now, we introduce some properties and tools which are useful for our main theorems.

Lemma 5. The norm of the operator $K(t)$ is given by

$$\|K(t)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(1 - (1 + t\lambda_n)e^{-t\lambda_n})}{\lambda_n^2} \\ = \frac{(1 - (1 + t\lambda_1)e^{-t\lambda_1})}{\lambda_1^2}. \quad (29)$$

Proof. We aim to find the supremum of the function $(1 - (1 + t\lambda_n)e^{-t\lambda_n})/\lambda_n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, and for this purpose, fix t , let $\mu = \lambda t$, and define the function

$$G_1(\mu) = \frac{(1 - (1 + \mu)e^{-\mu})}{\mu^2}, \quad \text{for } \mu \geq \mu_1 = \lambda_1 t. \quad (30)$$

We compute

$$G_1'(\mu) = \frac{(\mu^2 + 2\mu + 2)e^{-\mu} - 2}{\mu^3}. \quad (31)$$

Put

$$h(\mu) = (\mu^2 + 2\mu + 2)e^{-\mu} - 2. \quad (32)$$

Hence,

$$G'_1(\mu) = \frac{h(\mu)}{\mu^3}. \quad (33)$$

To study the monotony of G_1 , it suffices to determine the sign of h . We have

$$h'(\mu) = -\mu^2 e^{-\mu} < 0, \quad \forall \mu > 0, \quad (34)$$

and then h is decreasing; moreover $h(\mu) \in]-2, 0[$, $\forall \mu > 0$. Hence $G'_1(\mu) < 0$, $\forall \mu \geq \mu_1$, which implies that G_1 is decreasing and

$$\sup_{\mu \geq \mu_1} G_1(\mu) = G_1(\mu_1). \quad (35)$$

Therefore,

$$\sup_{n \geq 1} \frac{(1 - (1 + \lambda_n t)e^{-\lambda_n t})}{\lambda_n^2} = \frac{(1 - (1 + \lambda_1 t)e^{-\lambda_1 t})}{\lambda_1^2}. \quad (36)$$

Proposition 6. For the linear operator $L = I - \gamma K(T)$, one has the following properties:

- (1) L is positive and self-adjoint,
- (2) L is nonexpansive,
- (3) 1 is not an eigenvalue of L .

Proof. Form properties of operator A and the definition of L it follows that L is self-adjoint and nonexpansive positive operator and from the inequality

$$0 < 1 - \gamma \frac{(1 - (1 + T\lambda)e^{-\lambda T})}{\lambda^2} < 1, \quad \text{for } \lambda \in \sigma(A), \quad (37)$$

it follows that the point spectrum of L , $\sigma_p(L) \subset]0, 1[$. Then 1 is not eigenvalue of the operator L . $\square$

Lemma 7. If $\lambda > 0$, one has the estimates

$$\frac{1}{1 + \lambda^2} \leq \max\left(\frac{3}{T^2}, 1\right) \frac{(1 - (1 + T\lambda)e^{-\lambda T})}{\lambda^2}, \quad (38)$$

$$0 < \frac{(1 - (1 + t\lambda)e^{-\lambda t})}{\lambda^2} < T^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (39)$$

Proof. To establish (38), let us first prove that

$$\frac{1}{3 + \mu^2} \leq \frac{(1 - (1 + \mu)e^{-\mu})}{\mu^2}, \quad \forall \mu > 0, \quad (40)$$

which is equivalent to prove that

$$G_2(\mu) = 3 - (3 + \mu^2)(1 + \mu)e^{-\mu} \geq 0, \quad \forall \mu > 0. \quad (41)$$

We have

$$G'_2(\mu) = \mu(\mu - 1)^2 e^{-\mu} \geq 0, \quad \forall \mu > 0. \quad (42)$$

Then, G_2 is nondecreasing and it follows that $G_2(\mu) \in]0, 3[$. So $G_2(\mu) \geq 0$, $\forall \mu > 0$.

Choosing $\mu = T\lambda$ in (40), we obtain

$$\frac{1}{3 + (T\lambda)^2} \leq \frac{(1 - (T\lambda + 1)e^{-T\lambda})}{(T\lambda)^2}. \quad (43)$$

So,

$$\frac{T^2}{\max(3, T^2)(1 + \lambda^2)} \leq \frac{(1 - (1 + T\lambda)e^{-T\lambda})}{\lambda^2}. \quad (44)$$

From (44), we deduce (38).

Now, we prove the estimate (39). It is easy to verify that

$$G_3(\mu) = (1 - (1 + \mu)e^{-\mu}) - \mu^2 < 0, \quad \forall \mu > 0. \quad (45)$$

Then, if we choose $\mu = t\lambda$, we get

$$(1 - (1 + t\lambda)e^{-t\lambda}) < t^2 \lambda^2, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (46)$$

Hence, from (46), (39) follows. $\square$

Theorem 8. Let u be a solution to the inverse problem (1). Let $f_0 \in H$ be an arbitrary initial data element for the iterative procedure proposed above and let u_k be the k th approximate solution. Then

- (i) The method converges; that is,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\| \longrightarrow 0, \quad \text{as } k \longrightarrow \infty. \quad (47)$$

- (ii) Moreover, if, for some $\alpha = 1 + \theta$, $\theta > 0$, $f_0 - f \in H^\alpha$, that is, $\|f_0 - f\|_{H^\alpha} \leq E$, then the rate of convergence of the method is given by

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\| \leq T^2 C E k^{-\alpha/2}, \quad (48)$$

where C is a positive constant independent of k .

Proof. (i) From (28), we get

$$f_k = (I - \gamma K(T))^k f_0 + \left(I - (I - \gamma K(T))^k\right) (K(T))^{-1} g, \quad (49)$$

and then

$$f_k = (I - \gamma K(T))^k (f_0 - f) + f, \quad (50)$$

which implies that

$$\begin{aligned} u_k(t) - u(t) &= K(t)(f_k - f) \\ &= K(t)(I - \gamma K(T))^k (f_0 - f). \end{aligned} \quad (51)$$

Hence,

$$\|u_k(t) - u(t)\| \leq \|K(t)\| \|(I - \gamma K(T))^k (f_0 - f)\|. \quad (52)$$

From Lemma 5 and (39) we have

$$\sup_{t \in [0, T]} \|K(t)\| = \sup_{t \in [0, T]} \frac{(1 - (1 + t\lambda_1)e^{-t\lambda_1})}{\lambda_1^2} < T^2. \quad (53)$$

Combining (52) and (53) and passing to the supremum with respect to $t \in [0, T]$, we obtain

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\| &\leq T^2 \|(I - \gamma K(T))^k (f_0 - f)\| \\ &\longrightarrow 0, \quad \text{as } k \longrightarrow \infty. \end{aligned} \quad (54)$$

(ii) By part (i), we have

$$\begin{aligned} \|u_k(t) - u(t)\|^2 &\leq T^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \gamma \left(\frac{1 - (1 + \lambda_n T)e^{-\lambda_n T}}{\lambda_n^2} \right) \right)^{2k} \\ &\quad \cdot |(f_0 - f, \varphi_n)|^2, \end{aligned} \quad (55)$$

and hence

$$\begin{aligned} \|u_k(t) - u(t)\|^2 &\leq T^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \gamma \left(\frac{1 - (1 + \lambda_n T)e^{-\lambda_n T}}{\lambda_n^2} \right) \right)^{2k} \\ &\quad \cdot (1 + \lambda_n^2)^{-\alpha} (1 + \lambda_n^2)^{\alpha} |(f_0 - f, \varphi_n)|^2. \end{aligned} \quad (56)$$

Using the inequality (38), we obtain

$$\begin{aligned} \|u_k(t) - u(t)\|^2 &\leq T^4 \left(\max \left(\frac{3}{T^2}, 1 \right) \right)^{\alpha} \\ &\quad \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \gamma \beta_n)^{2k} \beta_n^{\alpha} (1 + \lambda_n^2)^{\alpha} |(f_0 - f, \varphi_n)|^2, \end{aligned} \quad (57)$$

where $\beta_n = ((1 - (1 + \lambda_n T)e^{-\lambda_n T})/\lambda_n^2)$.

So, it follows that

$$\begin{aligned} \|u_k(t) - u(t)\|^2 &\leq T^4 \left(\max \left(\frac{3}{T^2}, 1 \right) \right)^{\alpha} \\ &\quad \cdot \sup_{0 \leq \beta_n \leq T^2} (1 - \gamma \beta_n)^{2k} \beta_n^{\alpha} \|f_0 - f\|_{H^{\alpha}}^2. \end{aligned} \quad (58)$$

Put

$$\phi(\beta) = (1 - \gamma\beta)^{2k} \beta^{\alpha}, \quad 0 \leq \beta \leq T^2. \quad (59)$$

We compute

$$\phi'(\beta) = (1 - \gamma\beta)^{2k-1} \beta^{\alpha-1} (-\gamma(2k + \alpha)\beta + \alpha). \quad (60)$$

Setting $\phi'(\beta) = 0$, it follows that $\beta^* = \alpha/(2k + \alpha)\gamma$ is the critical point of ϕ . It is easy to see that the maximum of ϕ is attained at β^* . So

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \beta \leq T^2} \phi(\beta) &\leq \phi(\beta^*) = (1 - \gamma\beta^*)^{2k} (\beta^*)^{\alpha} \leq (\beta^*)^{\alpha} \\ &= \left(\frac{\alpha}{(2k + \alpha)\gamma} \right)^{\alpha}, \end{aligned} \quad (61)$$

and hence

$$\sup_{0 \leq \beta \leq T^2} \phi(\beta) \leq \left(\frac{\alpha}{2\gamma} \right)^{\alpha} k^{-\alpha}. \quad (62)$$

Combining (58) and (62), we obtain

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\|^2 &\leq T^4 \left(\frac{\alpha}{2\gamma} \max \left(\frac{3}{T^2}, 1 \right) \right)^{\alpha} \left(\frac{1}{k} \right)^{\alpha} E^2. \end{aligned} \quad (63)$$

Since in practice the measured data g is never known exactly but only up to an error of, say, $\delta > 0$, it is our aim to solve the equation $K(T)f = g$ from the knowledge of a perturbed right-hand side g^{δ} satisfying

$$\|g - g^{\delta}\| < \delta, \quad (64)$$

where $\delta > 0$ denotes a noise level. In the following theorem, we consider the case of inexact data. $\square$

Theorem 9. Let $\alpha = 1 + \theta$, ($\theta > 0$), f_0 be an arbitrary initial data element for the iterative procedure proposed above such that $(f_0 - f) \in H^{\alpha}$, let u_k be the k th approximations solution for the exact data g , and let u_k^{δ} be the k th approximations solution corresponding to the perturbed data g^{δ} such that (64) holds. Then one has the following estimate:

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\| \leq T^2 \left(\delta\gamma k + CE \left(\frac{1}{k} \right)^{\alpha/2} \right). \quad (65)$$

Proof. Let

$$\begin{aligned} f_k &= (I - \gamma K(T))^k f_0 + \gamma \sum_{j=0}^{k-1} (I - \gamma K(T))^j g, \\ u_k(t) &= K(t) f_k, \end{aligned} \quad (66)$$

$$f_k^{\delta} = (I - \gamma K(T))^k f_0 + \gamma \sum_{j=0}^{k-1} (I - \gamma K(T))^j g^{\delta},$$

$$u_k^{\delta}(t) = K(t) f_k^{\delta}.$$

Using the triangle inequality, we obtain

$$\|u_k^{\delta} - u\| \leq \|u_k^{\delta} - u_k\| + \|u_k - u\|. \quad (67)$$

From Theorem 8, we have

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k(t) - u(t)\| \leq T^2 C E \left(\frac{1}{k} \right)^{\alpha/2}. \quad (68)$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} \|u_k^\delta(t) - u_k(t)\| &= \|K(t)(f_k^\delta - f_k)\| \\ &\leq T^2 \gamma \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (I - \gamma K(T))^j (g^\delta - g) \right\| \\ &\leq T^2 \delta \gamma \left\| \sum_{j=0}^{k-1} (I - \gamma K(T))^j \right\| \\ &\leq T^2 \delta \gamma \sum_{j=0}^{k-1} \|(I - \gamma K(T))^j\|. \end{aligned} \quad (69)$$

Since

$$\|(I - \gamma K(T))\| \leq 1, \quad (70)$$

it follows that

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k^\delta(t) - u_k(t)\| \leq T^2 \delta \gamma k. \quad (71)$$

Combining (68) and (71) and passing to the supremum with respect to $t \in [0, T]$, we obtain the estimate (65). $\square$

Remark 10. If we choose the number of the iterations $k(\delta)$ so that $k(\delta) \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow 0$, we obtain

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_k^\delta(t) - u(t)\| \rightarrow 0, \quad \text{as } k \rightarrow +\infty. \quad (72)$$

5. Numerical Implementation

In this section, an example is devised for verifying the effectiveness of the proposed method. Consider the problem of finding a pair of functions $(u(x, t), f(x))$, in the system

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) \\ = f(x), \quad (t, x) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, 1), \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1), \\ u(x, 1) = g(x), \quad x \in (0, 1). \end{aligned} \quad (73)$$

Denote

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$\text{with } \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1) \subset H = L^2(0, 1). \quad (74)$$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2,$$

$$\varphi_n = \sqrt{2} \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots$$

are eigenvalues and orthonormal eigenfunctions, which form a basis for H .

The solution of the above problem is given by

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (1 + (n\pi)^2 t) e^{-(n\pi)^2 t}}{(n\pi)^4} \right) f_n \varphi_n, \quad (75)$$

where $f_n = (f, \varphi_n) = \sqrt{2} \int_0^1 f(s) \sin(n\pi s) ds$, $n = 1, 2, \dots$

Now, to solve the inverse problem, making use of the supplementary condition and defining the operator $K : f \rightarrow g$, we have

$$\begin{aligned} g(x) &= u(x, 1) = Kf(x) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (1 + (n\pi)^2) e^{-(n\pi)^2}}{(n\pi)^4} \right) \\ &\quad \cdot \left(\int_0^1 f(s) \sin(n\pi s) ds \right) \sin(n\pi x). \end{aligned} \quad (76)$$

Example 11. In the following, we first selected the exact solution $f(x)$ and obtained the exact data function $g(x)$ through solving the forward problem. Then we added a normally distributed perturbation to each data function and obtained vectors $g^\delta(x)$. Finally we obtained the regularization solutions through solving the inverse problem with noisy data $g^\delta(x)$ satisfying

$$\|g - g^\delta\|_{(L_2(0,1))^2} \leq \delta. \quad (77)$$

It is easy to see that if $f(x) = \sin \pi x$, then

$$u(x, t) = \frac{(1 - (1 + \pi^2 t) e^{-\pi^2 t})}{\pi^4} \sin(\pi x) \quad (78)$$

is the exact solution of the problem (73). Consequently, $g(x) = ((1 - (1 + \pi^2) e^{-\pi^2})/\pi^4) \sin(\pi x)$.

Now, we propose to approximate the first and second space derivatives by using central difference and we consider an equidistant grid points to a spatial step size $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = 1$, ($h = 1/(N+1)$), where N is a positive integer. We get the following semidiscrete problem:

$$\begin{aligned} u''(x_i, t) + 2A_h u'(x_i, t) + A_h^2 u(x_i, t) &= f(x_i), \\ x_i &= ih, \quad i = 1, \dots, N, \quad 0 < t < 1, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \\ 0 < t < 1, \\ u(x_i, 0) &= u'(x_i, 0) = 0, \\ x_i &= ih, \quad i = 1, \dots, N, \\ u(x_i, 1) &= g(x_i), \\ x_i &= ih, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (79)$$

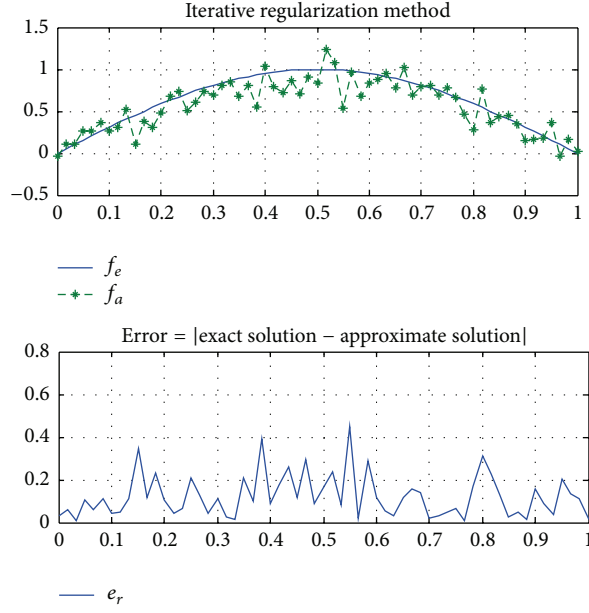


FIGURE 1: The comparison between the exact solution f_e and its computed approximations f_a for $N = 60$ $k = 4$ and noisy level $\varepsilon = 10^{-3}$.

where A_h is the discretisation matrix stemming from the operator $A = -d^2/dx^2$, and

$$A_h = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1) \quad (80)$$

is a symmetric, positive definite matrix, with eigenvalues

$$\mu_j = 4(N+1)^2 \sin^2 \frac{j\pi}{2(N+1)}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (81)$$

and orthonormal eigenvalues

$$v_j = \left(\sin \frac{mj\pi}{(N+1)} \right)_{1 \leq m \leq N}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (82)$$

We assume that it is fine enough so that the discretization errors are small compared to the uncertainty δ of the data; this means that A_h is a good approximation of the differential operator A whose unboundedness is reflected in a large norm of A_h (see [24]).

Adding a random distributed perturbation to each data function, we obtain

$$g^\delta = g + \varepsilon \text{randn}(\text{size}(g)), \quad (83)$$

where ε indicates the noise level of the measurements data and the function $\text{randn}(\cdot)$ generates arrays of random numbers whose elements are normally distributed with mean 0, variance $\sigma^2 = 1$, and standard deviation $\sigma = 1$. $\text{randn}(\text{size}(g))$ returns an array of random entries that is of the same size as g . The noise level δ can be measured in the sense of root mean square error (RMSE) according to

$$\delta = \|g^\delta - g\|_{l^2} = \left(\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (g(x_i) - g^\delta(x_i))^2 \right)^{1/2}. \quad (84)$$

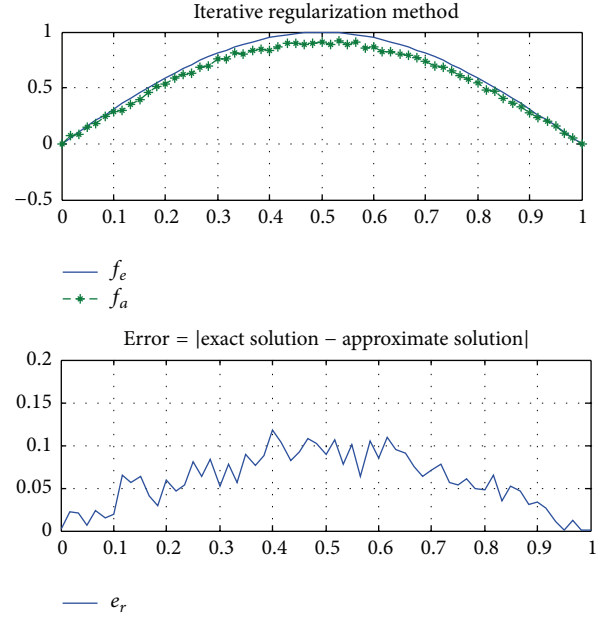


FIGURE 2: The comparison between the exact solution f_e and its computed approximations f_a for $N = 60$ $k = 4$ and noisy level $\varepsilon = 10^{-4}$.

TABLE 1: Relative error $\text{RE}(f)$.

N	k	ε	$\text{RE}(f)$
60	4	10^{-3}	0.2039
60	4	10^{-4}	0.0945
60	5	10^{-3}	0.3032
60	5	10^{-4}	0.0305

The relative error is given as follows:

$$\text{RE}(f) = \frac{\|f_{\text{approximate}} - f_{\text{exact}}\|_{l^2}}{\|f_{\text{exact}}\|_{l^2}}. \quad (85)$$

The discrete iterative approximation of (66) is given by

$$f_k^\delta(x_i) = (I - \gamma K_h)^k f_0(x_i) + \gamma \sum_{j=0}^{k-1} (I - \gamma K_h)^j g^\delta(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (86)$$

where $K_h = A_h^{-2}(I_N - (I_N + A_h)e^{-A_h})$ and $\gamma < 1/\|K_h\| = (\mu_1^2/(1 - (1 + \mu_1)e^{-\mu_1}))$.

Figures 1–4 display that as the amount of noise ε decreases, the regularized solutions approximate better the exact solution.

Table 1 shows that for $k = 4$ or $k = 5$ the relative error decreases with the decrease of epsilon which is consistent with our regularization.

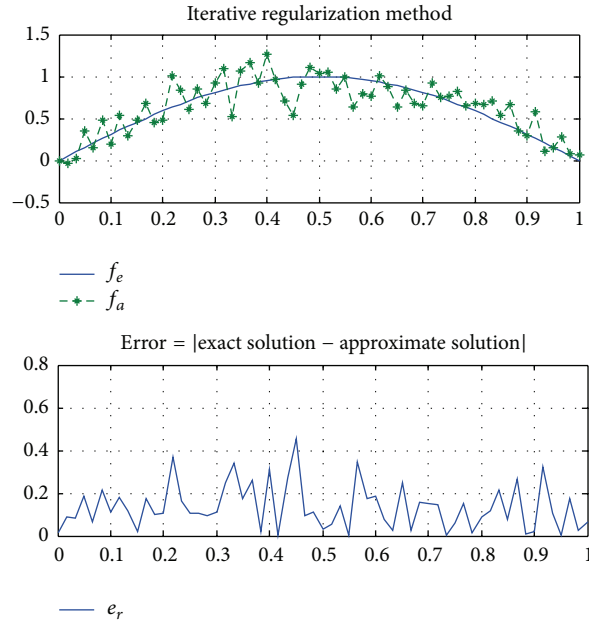


FIGURE 3: The comparison between the exact solution f_e and its computed approximations f_a for $N = 60$ $k = 5$ and noisy level $\varepsilon = 10^{-3}$.

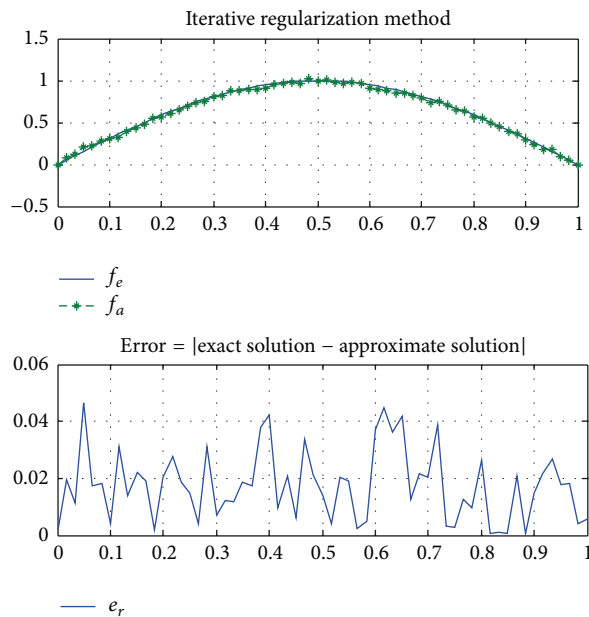


FIGURE 4: The comparison between the exact solution f_e and its computed approximations f_a for $N = 60$ $k = 5$ and noisy level $\varepsilon = 10^{-4}$.

6. Conclusion

In this paper, we have extended the iterative method to identify the unknown source term in a second order differential equation, convergence results were established, and error estimates have been obtained under an a priori bound of the exact solution. Some numerical tests have been given to verify the validity of the method.

Conflict of Interests

The authors declare that they have no conflict of interests.

Authors' Contribution

All authors read and approved the paper.

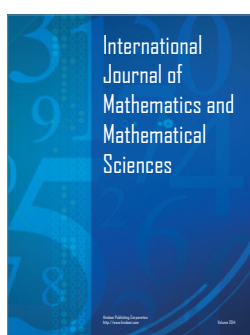
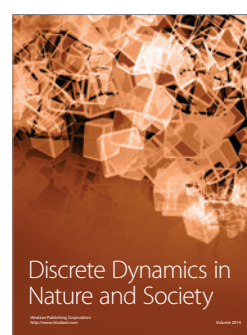
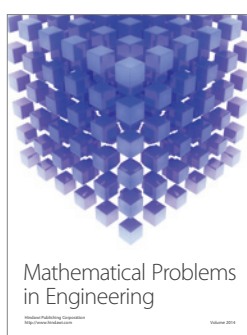
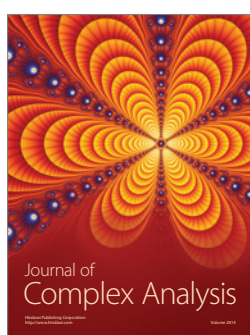
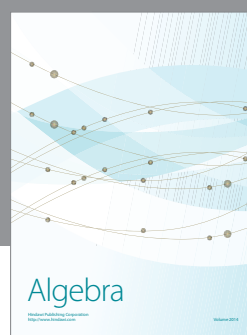
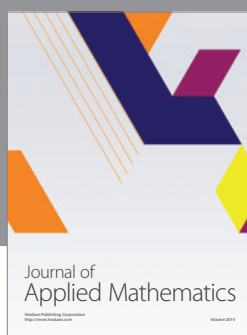
Acknowledgments

The authors would like to thank the anonymous referees for their suggestions.

References

- [1] H. Leiva, "A lemma on C_0 -semigroups and applications," *Quaestiones Mathematicae*, vol. 26, no. 3, pp. 247–265, 2003.
- [2] H. Leiva, *Linear Reaction-Diffusion Systems*, Notas de Mathematica, No. 185, Merida, 1999.
- [3] L. F. de Oliveira, "On reaction-diffusion systems," *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 1998, no. 24, 10 pages, 1998.
- [4] V. L. Fushchich, A. S. Galitsyn, and A. S. Polubinskii, "A new mathematical model of heat conduction processes," *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 42, no. 2, pp. 210–216, 1990.
- [5] G. Bastay, "Iterative methods for ill-posed boundary value problems. Linköping studies in science and technology," Dissertations 392, Linköping University, Linköping, Sweden, 1995.
- [6] A. S. Carasso, "Bochner subordination, logarithmic diffusion equations, and blind deconvolution of hubble space telescope imagery and other scientific data," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 3, no. 4, pp. 954–980, 2010.
- [7] L. Wang, X. Zhou, and X. Wei, *Heat Conduction: Mathematical Models and Analytical Solutions*, Springer, 2008.
- [8] M. Andrie and A. El Badia, "Identification of multiple moving pollution sources in surface waters or atmospheric media with boundary observations," *Inverse Problems*, vol. 28, no. 7, Article ID 075009, 2012.
- [9] H. W. Engl and C. Groetsch, *Inverse and Ill-Posed Problems*, vol. 4 of *Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering*, Academic press, New York, NY, USA, 1987.
- [10] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, Heidelberg, Germany, 1996.
- [11] D. Mace and P. Lailly, "Solution of the VSP one-dimensional inverse problem," *Geophysical Prospecting*, vol. 34, no. 7, pp. 1002–1021, 1986.
- [12] N. Magnoli and G. A. Viano, "The source identification problem in electromagnetic theory," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 38, no. 5, pp. 2366–2388, 1997.
- [13] V. A. Kozlov and V. G. Maz'ya, "On iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations," *Lenningrad Mathematics Journal*, vol. 1, pp. 1207–1228, 1990.
- [14] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, and A. V. Fomin, "An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations," *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 31, no. 1, pp. 45–52, 1991.
- [15] A. B. Bakushinsky and M. Y. Kokurin, *Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems*, vol. 577 of *Mathematics and Its Applications*, Springer, Berlin, Germany, 2004.

- [16] J. Baumeister and A. Leitao, "On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations," *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, vol. 9, no. 1, pp. 13–29, 2001.
- [17] F. Berntsson, V. A. Kozlov, L. Mpinganzima, and B. O. Turesson, "An alternating iterative procedure for the Cauchy problem for the Helmholtz equation," *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 22, no. 1, pp. 45–62, 2014.
- [18] A. Bouzitouna, N. Boussetila, and F. Rebbani, "Two regularization methods for a class of inverse boundary value problems of elliptic type," *Boundary Value Problems*, vol. 2013, article 178, 2013.
- [19] A. Lakhdari and N. Boussetila, "An iterative regularization method for an abstract ill-posed biparabolic problem," *Boundary Value Problems*, vol. 2015, article 55, 2015.
- [20] J.-G. Wang and T. Wei, "An iterative method for backward time-fractional diffusion problem," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 30, no. 6, pp. 2029–2041, 2014.
- [21] H. W. Zhang and T. Wei, "Two iterative methods for a Cauchy problem of the elliptic equation with variable coefficients in a strip region," *Numerical Algorithms*, vol. 65, no. 4, pp. 875–892, 2014.
- [22] M. A. Krasnosel'skii, G. M. Vainikko, P. P. Zabreiko, and Y. U. B. Rutitskii, *Approximate Solutions of Operator Equations*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 1972.
- [23] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations*, Springer, New York, NY, USA, 1983.
- [24] L. Eldén and V. Simoncini, "A numerical solution of a Cauchy problem for an elliptic equation by Krylov subspaces," *Inverse Problems*, vol. 25, no. 6, Article ID 065002, 2009.



QUASI-BOUNDARY VALUE METHOD FOR AN ILL POSED DIFFUSION SYSTEM

Sebti Djemoui¹, Fairouz Zouyed^{2 §}

^{1,2}Applied Mathematics Laboratory

University Badji Mokhtar Annaba

P.O. Box 12, El Hadjar, Annaba, 23000, ALGERIA

Abstract: In this paper we investigate an ill posed diffusion system with a non diagonal diffusion matrix. Based on the quasi-boundary value method, we regularize the problem, we prove that the approximate solutions depend continuously on the data and we establish some convergence results. Finally numerical results are presented to illustrate the accuracy and efficiency of the proposed method.

AMS Subject Classification: 35F35, 65F22

Key Words: system of partial differential equations, ill-posed problem, regularization

1. Introduction

In this paper we consider the inverse problem of determining the source term $u(0, x)$ in a system of partial differential equations of the form

$$\begin{cases} u_t(t, x) - D\Delta u(t, x) = 0, & 0 < t < T, & x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & 0 \leq t < T, & x \in \partial\Omega, \\ u(T, x) = f(x), & & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

where Ω is a sufficiently regular bounded domain in $\mathbf{R}^N$ and D is an $n \times n$

Received: July 5, 2015

© 2015 Academic Publications, Ltd.
url: www.acadpubl.eu

[§]Correspondence author

real matrix with semi-simple and positive eigenvalues. The diffusion equation together with their modified forms and systems of diffusion equations have many important applications in mathematical physics, mathematical finance, chemistry, biology and environmental science [2], [3], [5], [6], [7]. In this study as previously mentioned, our purpose is to identify $u(0, x)$ from the final data $u(T, x)$, this problem is ill posed, even a unique solution exists it does not depend continuously on the data. Hence, a regularization is in order. In the mathematical literature various methods have been proposed for solving ill-posed problems, we can notably mention the quasi-boundary value method (QBVM). It has been used by many authors, such as L.S. Abdulkerimov [1], P.N. Vabishchevich et al [15], I.V. Melnikova et al [8], [11], [12], R.E. Showalter [14], G.W. Clark and S.F. Oppenheimer [4] and it has been successfully applied to various classes of elliptic and parabolic ill-posed problems.

In the present work, we extend the QBVM to systems of partial differential equations of the form (1.1) The study is based on the semigroups theory precisely the characterization of the C_0 - semigroup generated by the system (1.1) which is given and analyzed by Leiva [9] and Oliveira [10].

We note that though the diffusion systems forward in time have been extensively studied in literature, the case of diffusion systems backward in time does not seem have been widely investigated in spite of their physical and practical importance.

The paper is organized as follows, in Section 2 we introduce some preliminary results, Section 3 gives an abstract formulation of the problem and shows the ill posed-ness of the problem. In Section 4, we introduce the regularized solution and we give some convergence results. Finally numerical implementation is described in Section 5.

2. Preliminaries

Let $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ with the inner product $(., .)$ and consider the following classical boundary-eigenvalue problem for the laplacien:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{on } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

where Ω is sufficiently regular bounded domain in $\mathbf{R}^N (N \geq 1)$, and $\mathcal{D}(-\Delta) = \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. The problem (2.1) has a countable set of eigenvalues

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_j \rightarrow +\infty \text{ as } j \rightarrow +\infty.$$

Each eigenvalue λ_j with finite multiplicity γ_j equal to the dimension of the corresponding eigenspace S_j .

1. Therefore, there exists a complete orthonormal set $\{\varphi_{jk}\}_{k=1}^{k=\gamma_j}$ of eigenvectors of $-\Delta$ such that, • for all $w \in \mathcal{D}(-\Delta)$, we have

$$-\Delta w = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j E_j w,$$

where

$$E_j w = \sum_{k=1}^{\gamma_j} (w, \varphi_{jk}) \varphi_{jk}.$$

So, $\{E_j\}$ is a family of complete orthogonal projections in $\mathcal{H}$ and for all $w \in \mathcal{H}$, we have $w = \sum_{j=1}^{\infty} E_j w$.

2. The operator Δ generates an analytic semigroup $\{\mathcal{T}(t)\}_{t \geq 0}$ on $\mathcal{H}$, defined by

$$\mathcal{T}(t)w = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} E_j w.$$

Now, we denote by Z the Hilbert space $(L^2(\Omega))^n$ of the square integrable functions $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^N$ with the usual inner product

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (u_1(x) \overline{v_1(x)} + \dots + u_n(x) \overline{v_n(x)}) dx.$$

We define the following unbounded operator

$$A : \mathcal{D}(A) \subset Z \rightarrow Z,$$

$$Au = -D\Delta u, \quad u \in \mathcal{D}(A),$$

with

$$\mathcal{D}(A) = (\mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega))^n.$$

Therefore, for all $u \in \mathcal{D}(A)$ we obtain,

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j D P_j u,$$

and

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} P_j u, \quad \|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j u\|^2, \quad u \in Z,$$

where

$$P_j = \text{diag}(E_j, E_j, \dots, E_j)$$

is a family of complete orthogonal projections in Z .

Theorem 2.1. [10, Theorem 1, p. 2] Assume that $d > 0$ for all $d \in \sigma(D)$. Then

1. A is a sectorial operator and therefore, $-A$ is the infinitesimal generator of an analytic C_0 -semigroup $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, on Z .

$$S(t)x = \sum_{j=1}^{\infty} e^{A_j t} P_j x, \quad t \geq 0, \quad x \in Z,$$

where $A_j = -\lambda_j D$.

2. $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ is a compact C_0 -semigroup in $\mathcal{L}(Z)$ and there exist constants $C \geq 1$ and $\beta > 0$ such that

$$\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq C e^{-\beta t}, \quad \text{for all } t \geq 0.$$

3. Ill-Posedness of the Problem

In the Hilbert space Z , the system (1.1) can be written as an abstract functional differential equation

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(T) = f, & f \in Z. \end{cases} \quad (3.1)$$

Let us consider the following direct problem corresponding to the backward Cauchy problem (3.1)

$$\begin{cases} v_t(t) + Av(t) = 0, & 0 < t < T, \\ v(0) = g, & g \in Z. \end{cases} \quad (3.2)$$

Since A is the generator of an analytic semigroup, then for all $g \in Z$, the problem (3.2) has a unique solution $v \in C([0, T], Z)$ given by

$$v(t) = S(t)g = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j D t} P_j g, \quad (3.3)$$

where $g = \sum_{j=1}^{\infty} P_j g$, see [13], Chap. 4, theorem 1.4, p. 104).

Remark The matrix D does not necessarily have distinct eigenvalues. Let $0 < d_1 < \dots < d_s$, $s \leq n$ be the distinct eigenvalues, then D admits the following spectral decomposition

$$D = \sum_{i=1}^s d_i Q_i,$$

where $\{Q_i\}_{1 \leq i \leq s}$ is a complete family of projections.

Then the solution of the problem (3.2) can be written as follows

$$v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j D t} P_j g = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} Q_i \right) P_j g.$$

Theorem 3.1. *The problem (3.1) admits a solution if and only*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| e^{\lambda_j D T} P_j f \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i T} Q_i P_j f \right\|^2 < \infty. \quad (3.4)$$

Proof. If the problem (3.1) admits a solution u then $u(t) = S(t)u(0)$. So, $f = u(T) = S(T)u(0) = e^{-TA}u(0)$. It follows that

$$\|u(0)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \| e^{\lambda_j D T} P_j f \|^2 < \infty.$$

Now, if we get (3.4) we can define

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i T} Q_i P_j f \in Z,$$

and consider the problem

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = w. \end{cases} \quad (3.5)$$

Since (3.5) is the direct well-posed, so it has a unique solution given by

$$u(t) = S(t)w = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i (T-t)} Q_i P_j f = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j D (T-t)} P_j f. \quad (3.6)$$

Let $t = T$ in (3.6), we obtain

$$u(T) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j f = f.$$

Hence, u is the unique solution to (3.1). $\square$

Since $t < T$, we can see from (3.6) that the terms $e^{\lambda_j d_i (T-t)}$ are the instability causes. In the following section, it is our aim to restore the stability of the problem (3.1) by using a regularization method.

4. Quasi-Boundary Value Method

We shall regularize problem (3.1) using the quasi-boundary value method. Let us consider the approximate problem

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0, & 0 < t < T, \\ \alpha u_\alpha(0) + u_\alpha(T) = f, & f \in Z. \end{cases} \quad (4.1)$$

Definition 4.1. Define

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} f \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j D t} (\alpha I_n + e^{-\lambda_j D T})^{-1} P_j f \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} Q_i P_j f, \end{aligned} \quad (4.2)$$

for $f \in Z$, $\alpha > 0$ and $t \in [0, T]$.

Theorem 4.1. *The function $u_\alpha(t)$ is the unique solution of (4.1) and it depends continuously on f .*

Proof. Consider the problem:

$$\begin{cases} w'_\alpha(t) + Aw_\alpha(t) = 0, & 0 < t < T, \\ w_\alpha(0) = f_\alpha, \end{cases} \quad (4.3)$$

where $f_\alpha = (\alpha I + S(T))^{-1} f$.

This problem is well-posed and its solution is given by

$$w_\alpha(t) = S(t)f_\alpha = S(t)(\alpha I + S(T))^{-1}f. \quad (4.4)$$

Observe that

$$\begin{aligned} w_\alpha(T) + \alpha w_\alpha(0) &= S(T)(S(T) + \alpha I)^{-1}f + \alpha(S(T) + \alpha I)^{-1}f \\ &= (S(T) + \alpha I)(S(T) + \alpha I)^{-1}f = f. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Thanks to (4.5) and uniqueness of solution to direct problem (4.3), we deduce that the problem (4.1) admits the unique solution u_α given by (4.2).

To show the continuous dependence of u_α on f , we compute

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t)\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j D t} (\alpha I_n + e^{-\lambda_j D T})^{-1} P_j f \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \mathcal{Q}_i P_j f \right\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \left(\sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \mathcal{Q}_i \right) \right\|^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} M^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j f\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} M^2 \|f\|^2, \end{aligned}$$

where $M = \sum_{i=1}^s \|\mathcal{Q}_i\|$, $(\|\cdot\|)$ is norm matrix.) □

Theorem 4.2. For all $f \in Z$, $\alpha > 0$ and $t \in [0, T]$, we have that

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \alpha^{\frac{t}{T}-1} M \|f\|.$$

Proof. Let $f = \sum_{j=1}^{\infty} P_j f$, then

$$\begin{aligned}
\|u_{\alpha}(t)\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j D t} (\alpha I + e^{-\lambda_j D T})^{-1} P_j f \right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} Q_i P_j f \right\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{-\lambda_j d_i t} \{(\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{\frac{t}{T}} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{1-\frac{t}{T}}\}^{-1} \|Q_i\|^2 \right) \|P_j f\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-(1-\frac{t}{T})} \|Q_i\|^2 \right) \|P_j f\|^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha^2} \right)^{1-\frac{t}{T}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \|Q_i\|^2 \right) \|P_j f\|^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha^2} \right)^{1-\frac{t}{T}} M^2 \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j f\|^2,
\end{aligned}$$

which implies that

$$\|u_{\alpha}(t)\| \leq \alpha^{\frac{t}{T}-1} M \|f\|.$$

□

Theorem 4.3. For all $f \in Z$, $u_{\alpha}(T)$ converges to f in Z as α tends to zero.

Proof. Let $\sum_{j=1}^{\infty} P_j f$, then

$$\begin{aligned}
\|u_{\alpha}(T) - f\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| [e^{-\lambda_j D T} (\alpha I_n + e^{-\lambda_j D T})^{-1} - I_n] P_j f \right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s (e^{-\lambda_j d_i T} (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} - 1) Q_i P_j f \right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \alpha (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} Q_i P_j f \right\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \alpha (\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \|Q_i\|^2 \right) \|P_j f\|^2
\end{aligned}$$

Fix $\varepsilon > 0$ and choose $\aleph$ so that $M^2 \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \|P_j f\|^2 < \varepsilon/2$. Thus

$$\begin{aligned}
 \|u_\alpha(T) - f\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{\aleph} \left(\sum_{i=1}^s \alpha(\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
 &+ \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \alpha(\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\aleph} \alpha^2 e^{2\lambda_j d_s T} \left(\sum_{i=1}^s \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 + \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
 &\leq \alpha^2 M^2 \sum_{j=1}^{\aleph} e^{2\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2 + M^2 \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \|P_j f\|^2 \\
 &\leq \alpha^2 M^2 \sum_{j=1}^{\aleph} e^{2\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}.
 \end{aligned}$$

Now, let α be such that $\alpha^2 < \varepsilon(2M^2 \sum_{j=1}^{\aleph} e^{2\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2)^{-1}$.

Hence we are done. $\square$

Definition 4.2. Define the set

$$C_\theta(A) = \{\phi \in Z, \|\phi\|_\theta^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{2T\theta\lambda_j d_s} \|P_j f\|^2 < \infty\}, \quad \theta \geq 0.$$

Theorem 4.4. If there exists $0 < \theta < 2$, such that $f \in C_\theta(A)$ then $\|u_\alpha(T) - f\|$ converge to zero with order α^θ .

Proof. Let $k \in (0, 2)$. Fix natural number j , put $\gamma_j = \lambda_j d_s$, and

$$h_j(\alpha) = \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\gamma_j T})^2},$$

Differentiating with respect to α , once obtain

$$h'_j(\alpha) = \alpha^{k-1} \frac{(k-2)\alpha + k e^{-\gamma_j T}}{(\alpha + e^{-\gamma_j T})^3}.$$

Thus $h'_j(\alpha) = 0$, if $\alpha = 0$ or

$$\alpha = \frac{k}{2-k} e^{-\gamma_j T}.$$

Since $h_j(\alpha) > 0$, $h_j(0) = 0$ and $\lim_{\alpha \rightarrow 0} h_j(\alpha) = 0$, we have that $\alpha' = \frac{k}{2-k}e^{-\gamma_j T}$ is the critical point at which h_j achieves its maximum. Thus we have

$$\begin{aligned} h_j(\alpha) \leq h_j(\alpha') &= \frac{\left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{-kT\gamma_j}}{(\alpha' + e^{-\gamma_j T})^2} \\ &\leq \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(2-k)T\gamma_j} (\alpha'^2 + 2\alpha' e^{\gamma_j T} + 1)^{-1} \\ &\leq \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(2-k)T\gamma_j}. \end{aligned}$$

We calculate

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - f\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s \frac{\alpha}{(\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})} \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\alpha + e^{-\lambda_j d_s T})^2} \left(\sum_{i=1}^s \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \alpha^{2-k} M^2 \sum_{j=1}^{\infty} h_j(\alpha) \|P_j f\|^2 \\ &\leq \alpha^{2-k} M^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2-k}\right)^k e^{(2-k)T\lambda_j d_s} \|P_j f\|^2. \end{aligned}$$

If we choose $k = 2 - \theta$, we obtain

$$\|u_\alpha(T) - f\|^2 \leq \left(\frac{2-\theta}{\theta}\right)^{2-\theta} \alpha^\theta M^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{\theta T \lambda_j d_s} \|P_j f\|^2.$$

This completes the proof. $\square$

Lemma 4.1. *For all $f \in Z$, the problem (3.1) has a solution $u(t)$ if $u_\alpha(0)$ converges in Z . Furthermore, we then have that $u_\alpha(t)$ converges to $u(t)$ as the parameter α tends to zero uniformly in t .*

Proof. Assume that $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(0) = \xi$ exists and let $u(t) = S(t)\xi$. We compute

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t) - u(t)\| &= \|u_\alpha(t) - S(t)\xi\| \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \|(\alpha I + S(T))^{-1} f - \xi\|. \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \|u_\alpha(0) - \xi\|. \end{aligned}$$

Which implies that

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq C \|u_\alpha(0) - \xi\| \rightarrow 0, \text{ as } \alpha \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Since $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(T) = f$ and $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(T) = u(T)$, then $u(T) = f$. Thus $u(t) = S(t)\xi$ solves the problem (3.1). $\square$

Theorem 4.5. Assume that the problem (3.1) admits a solution $u(t)$ and let $f \in C_1(A)$. Then $u_\alpha(0)$ converges in Z .

Proof. Since $f \in C_1(A)$, we can fix $\varepsilon > 0$ and choose $\aleph$ so that

$$M^2 \sum_{j=1+\aleph}^{\infty} e^{2\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

We compute

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s [(\alpha + e^{-\lambda_j d_i T})^{-1} - e^{\lambda_j d_i T}] \mathcal{Q}_i P_j f \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \left[\frac{\alpha e^{\lambda_j d_i T}}{\alpha + e^{-\lambda_j d_i T}} \right] \mathcal{Q}_i P_j f \right\|^2 \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{j=1}^{\aleph} \left\| \sum_{i=1}^s \left[\frac{\alpha e^{\lambda_j d_i T}}{\alpha + e^{-\lambda_j d_i T}} \right] \mathcal{Q}_i P_j f \right\|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{\aleph} \left(\sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i T} \left(\frac{\alpha e^{\lambda_j d_i T}}{1 + \alpha e^{\lambda_j d_i T}} \right) \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \alpha^2 \sum_{j=1}^{\aleph} \left(\sum_{i=1}^s e^{2\lambda_j d_i T} \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\ &\leq \alpha^2 M^2 \sum_{j=1}^{\aleph} e^{4\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2, \end{aligned}$$

and

$$I_2 = \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \left[\frac{\alpha e^{\lambda_j d_i T}}{\alpha + e^{-\lambda_j d_i T}} \right] \mathcal{Q}_i P_j f \right\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=\aleph+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i T} \left(\frac{\alpha e^{\lambda_j d_i T}}{1 + \alpha e^{\lambda_j d_i T}} \right) \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1+\aleph}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{\lambda_j d_i T} \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq M^2 \sum_{j=1+\aleph}^{\infty} e^{2\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

If we choose α such that $\alpha^2 < \varepsilon(2M^2 \sum_{j=1}^{\aleph} e^{4\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2)^{-1}$, we obtain

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 = I_1 + I_2 < \varepsilon.$$

This shows that $u_\alpha(0)$ converges to $u(0)$ as α tends to zero. $\square$

Theorem 4.6. Assume that the problem (3.1) admits a solution $u(t)$. If there exists $0 < \theta < 2$ so that $f \in C_\theta(A)$, then $\|u_\alpha(0) - u(0)\|$ converges to zero with order α^θ .

Proof. Working as in the proof of theorem 4.5 we obtain

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 &\leq \alpha^{2-k} M^2 \sum_{j=1}^{\infty} h_j(\alpha) e^{2\lambda_j d_s T} \left(\sum_{i=1}^s \|\mathcal{Q}_i\| \right)^2 \|P_j f\|^2 \\
&\leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k} \right)^k M^2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{(4-k)\lambda_j d_s T} \|P_j f\|^2,
\end{aligned}$$

as above, letting $k = 2 - \theta$ we obtain the result. $\square$

From the inequality (4.6) and theorem 4.6, we arrive at the following

Corollary 4.1. Assume that the problem (3.1) admits a solution $u(t)$. If there exists $0 < \theta < 2$ so that $f \in C_\theta(A)$, then $u_\alpha(t)$ converges to $u(t)$ as the parameter α tends to zero with order α^θ uniformly in t .

Let us now construct a family of regularizing operators for the problem (3.1).

Definition 4.3. A family of bounded linear operators $R_\alpha(t) : Z \rightarrow Z$, $\alpha > 0$, $t \in [0, T]$ is called a family of regularizing operators for the problem

(3.1) if for each $u(t)$ ($0 \leq t \leq T$) solution of the problem (3.1) with the final element f , and for any $\delta > 0$, there exists $\alpha(\delta) > 0$, such that

1. $\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$
2. $\|R_{\alpha(\delta)}(t)f_\delta - u(t)\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0$, for each $t \in [0, T]$, on condition that f_δ satisfies $\|f_\delta - f\| \leq \delta$.

Define $R_\alpha(t) = e^{-tA}(\alpha + e^{-TA})^{-1}$, $t \geq 0$, $\alpha > 0$. It is clear that $\{R_\alpha(t), t \in [0, T], \alpha > 0\} \subset \mathcal{L}(Z)$.

Theorem 4.7. *Assuming that f satisfies (3.4). Then the family $\{R_\alpha(t)\}$ defined above is a family of regularizing operators for (3.1).*

Proof. We have

$$\|R_\alpha(t)f_\delta - u(t)\| \leq \|R_\alpha(t)(f_\delta - f)\| + \|R_\alpha(t)f - u(t)\|,$$

where

$$\|R_\alpha(t)(f_\delta - f)\| \leq \frac{1}{\alpha}\delta. \quad (4.7)$$

Choose $\alpha = \sqrt{\delta}$, then $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, and

$$\|R_\alpha(t)(f_\delta - f)\| \leq \sqrt{\delta} \rightarrow 0, \text{ as } \delta \rightarrow 0. \quad (4.8)$$

On the other hand and by virtue of theorem 4.5, we have

$$\|R_\alpha(t)f - u(t)\| = \|u_\alpha(t) - u(t)\| \rightarrow 0 \text{ as } \delta \rightarrow 0, \quad (4.9)$$

uniformly in t . Combining (4.8) and (4.9) we obtain

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|R_\alpha(t)(f_\delta - f)\| \leq \sqrt{\delta}, \text{ as } \delta \rightarrow 0. \quad (4.10)$$

Then, we deduce that $\{R_\alpha(t)\}$ is a family of regularizing operators for (3.1). $\square$

Remark All the previous results obtained in this note remain true if

1. the matrix D has semi-simple eigenvalues in the half plane $\operatorname{Re} \sigma(D) > 0$.
2. the $-\Delta$ in (1.1) is replaced by a positive self-adjoint linear operator with compact resolvent. This consideration should be useful to study abstract versions of the problem.

5. Numerical Results

In this section, an example is devised for verifying the effectiveness of the proposed method. Consider the operator

$$\mathcal{B} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \text{ with } \mathcal{D}(\mathcal{B}) = H_0^1(0, \pi) \subset \mathcal{H} = L^2(0, \pi).$$

$\lambda_j = j^2$, $\phi_j = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(jx)$, $j = 1, 2, \dots$ are eigenvalues and orthonormal eigenfunctions, which form a basis for $\mathcal{H}$.

Let $D = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, whose eigenvalues are $d_1 = 1$ and $d_2 = 2$.

$\{\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2\} \in (M_2(\mathbf{R}))^2$ is the set of complementary projections on $\mathbf{R}^2$,

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

such that

$$D = d_1 \mathcal{Q}_1 + d_2 \mathcal{Q}_2,$$

hence

$$e^{-\lambda_j D t} = e^{-\lambda_j d_1 t} \mathcal{Q}_1 + e^{-\lambda_j d_2 t} \mathcal{Q}_2.$$

Consider the problem of finding $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ from the system

$$\begin{cases} \partial_t U(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, 1) \times (0, \pi), \\ U(t, 0) = U(t, \pi) = 0, & t \in (0, 1), \\ U(1, x) = f(x), & x \in (0, \pi), \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

where $f(x) = \begin{pmatrix} (6e^{-1} - 5e^{-2}) \sin x \\ (-4e^{-1} + 5e^{-2}) \sin x \end{pmatrix}$. The exact solution of this problem is

$$U(t, x) = \begin{pmatrix} (6e^{-t} - 5e^{-2t}) \sin x \\ (-4e^{-t} + 5e^{-2t}) \sin x \end{pmatrix}.$$

To see the ill-posed nature of problem $(\mathcal{P})$, we consider the perturbed data function

$$f_m(x) = \begin{pmatrix} (6e^{-1} - 5e^{-2}) \sin x + \frac{1}{m} \sin mx \\ (-4e^{-1} + 5e^{-2}) \sin x + \frac{1}{m} \sin mx \end{pmatrix}.$$

The exact solution of problem $(\mathcal{P})$ corresponding to the perturbed data is

$$U_m(t, x) = \begin{pmatrix} (6e^{-t} - 5e^{-2t}) \sin x + (6\frac{e^{(1-t)m^2}}{m} - 5\frac{e^{2(1-t)m^2}}{m}) \sin(mx) \\ (-4e^{-t} + 5e^{-2t}) \sin x + (-4\frac{e^{(1-t)m^2}}{m} + 5\frac{e^{2(1-t)m^2}}{m}) \sin(mx) \end{pmatrix}$$

The data error at $t = 1$,

$$\|f_m(x) - f(x)\|^2 = 2 \int_0^\pi \frac{1}{m^2} \sin^2(mx) dx = \frac{2}{m^2} \frac{\pi}{2},$$

Notice that

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f_m(x) - f(x)\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2}{m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

but

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|U_m(0, x) - U(0, x)\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{m^2}}{m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \infty.$$

Thus, arbitrarily small data errors can lead to arbitrarily large errors in the result. By applying the quasi-boundary value method, the regularized solution is given by

$$U_\alpha(t, x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{-t\lambda_j^2}}{(e^{-\lambda_j^2} + \alpha)} Q_1 + \frac{e^{-2t\lambda_j^2}}{(e^{-2\lambda_j^2} + \alpha)} Q_2 \right) P_j f,$$

$$U_\alpha(t, x) = \begin{pmatrix} u_1^\alpha(t, x) \\ u_2^\alpha(t, x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(6 \frac{e^{-(1+t)}}{(\alpha + e^{-1})} - 5 \frac{e^{-2(1+t)}}{(\alpha + e^{-2})} \right) \sin x + \frac{1}{m} \left(6 \frac{e^{-tm^2}}{(\alpha + e^{-m^2})} - 5 \frac{e^{-2tm^2}}{(\alpha + e^{-2m^2})} \right) \sin mx \\ \left(-4 \frac{e^{-(1+t)}}{(\alpha + e^{-1})} + 5 \frac{e^{-2(1+t)}}{(\alpha + e^{-2})} \right) \sin x + \frac{1}{m} \left(-4 \frac{e^{-tm^2}}{(\alpha + e^{-m^2})} + 5 \frac{e^{-2tm^2}}{(\alpha + e^{-2m^2})} \right) \sin mx \end{pmatrix}$$

It follows that

$$U_\alpha\left(\frac{1}{2}, x\right) = \begin{pmatrix} \left(6 \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{(\alpha + e^{-1})} - 5 \frac{e^{-3}}{(\alpha + e^{-2})} \right) \sin x + \frac{1}{m} \left(6 \frac{e^{-\frac{m^2}{2}}}{(\alpha + e^{-m^2})} - 5 \frac{e^{-m^2}}{(\alpha + e^{-2m^2})} \right) \sin mx \\ \left(-4 \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{(\alpha + e^{-1})} + 5 \frac{e^{-3}}{(\alpha + e^{-2})} \right) \sin x + \frac{1}{m} \left(-4 \frac{e^{-\frac{m^2}{2}}}{(\alpha + e^{-m^2})} + 5 \frac{e^{-m^2}}{(\alpha + e^{-2m^2})} \right) \sin mx \end{pmatrix}.$$

If we choose $n = 300$, the error of the quasi-boundary value method is given in the table 1.

Table 1 shows that the approximate solutions converge to the exact solution as epsilon tends to zero.

α	$U_\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha)^\top$	$b_\alpha = \ U_\alpha(\frac{1}{2}, \cdot) - U(\frac{1}{2}, \cdot)\ $
$10^{-2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$(1, 83579453285757870327 \sin x +$ $8, 93890683320693679259 \times 10^{-19544} \sin(300x),$ $-0, 66269894986764767505 \sin x$ $-5, 95927122213795786173 \times 10^{-19544} \sin(300x))^\top$	0, 10537186355054932809
$10^{-4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$1, 80024920972532375106 \sin(x) +$ $8, 93890683320693679259 \times 10^{-19542} \sin(300x),$ $-0, 58760102268700560842 \sin x$ $-5, 95927122213795786173 \times 10^{-19542} \sin(300x))^\top$	0, 0012410493990990877
$10^{-8} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$1, 7997867987796889995 \sin x +$ $8, 93890683320693679259 \times 10^{-19538} \sin(300)x,$ $-0, 58760102268700560842 \sin x$ $-5, 95927122213795786173 \times 10^{-19542} \sin(300)x)^\top$	1, 24315933188250963919 $\times 10^{-7}$
$10^{-16} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$1, 79978675241858939726 \sin x +$ $8, 93890683320693679259 \times 10^{-19530} \sin(300)x,$ $-0, 58672543299332296332 \sin x$ $-5, 95927122213795786173 \times 10^{-19530} \sin(300)x)^\top$	1, 24315954313594822062 $\times 10^{-15}$

Table 1

Conclusion

In this paper, we considered a quasi boundary value method to solve an ill posed diffusion system. In the theoretical results, it was shown that under certain conditions stability estimate was obtained and convergence results were established. Meanwhile, the numerical results verified the efficiency of this method.

Acknowledgments

The authors would like to thank the referees for their comments and suggestions on the manuscript.

References

- [1] L.S. Abdulkirimov, Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space, *Azerbaijan. Gos. Univ. Ucen. Zap. Fiz. Mat.*, **1** (1977), 32-36 (MR0492645) (in Russian).
- [2] R. Aris, *The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts*, Clarendon Press, Oxford (1976). DOI: 10.1137/1018132.
- [3] D.G. Aronson, The role of diffusion in mathematical population biology, *Lecture Notes in Biomathematics*, vol. **57** (1985), 2-6. DOI:10.1007/978 - 3 - 642 - 93287 - 8_1.
- [4] G. W. Clark, S. F. Oppenheimer, Quasi-reversibility methods for non- well posed problems, *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. **1994**, No. 8 (1994) 1-9.
- [5] A.D. Cliff, P. Haggett, J.K. Ord, G.R. Versey, *Spatial Diffusion. An Historical Geography of Epidemics in an Island Community*. Cambridge University Press, Cambridge (1981).
- [6] P.C. Fife, *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*. Lecture Notes in Biomathematics, vol. **28**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1979). DOI: 10.1007/978 - 3 - 642 - 93111 - 6.
- [7] K.P. Hadeler, Diffusion Equations in Biology. *Mathematics of Biology*. vol. **80** (2011), 149-177. DOI: 10.1007/978 - 3 - 642 - 11069 - 6_3
- [8] V.K. Ivanov, I.V. Mel'nikova, A.I. Flinkov, *Differential-operator equations and ill-posed problems*, Nauka, Moscow (1994) (in Russian).
- [9] H. Leiva, A lemma on C0-semigroups and applications PDEs systems, *Quaestiones Mathematicae*, vol. **26**, No. 3 (2003), 247-265.
- [10] L. F. de Oliveira, On reaction-diffusion systems. *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. **1998**, No. 24 (1998), 1-10.

- [11] I.V. Melnikova, A. I. Filinkov, *Abstract Cauchy Problems : Three Approaches*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 120, Chapman and Hall, Boca Raton, FL (2001).
- [12] I.V. Melnikova, Regularization of ill-posed differential problems, *Siberian Math. J.* **33** (1992), 289-298, DOI: 10.1007/BF00971100.
- [13] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-verlag New York,(1983). DOI: 10.1007/978 – 1 – 4612 – 5561 – 1.
- [14] R. E. Showalter, Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations, *Trends in the theory and practice of non-linear analysis, North-Holland Math. Stud.*, vol. **110** (1985), 421-425. DOI: 10.1016/S0304 – 0208(08)72739 – 7.
- [15] P.N. Vabishchevich, Non-local parabolic problems and the inverse heat-conduction problem, *Differentsial'nye Uravnenija*, **17** (1981), 1193-1199 (Russian); English transl. *Differential Equations*, **17** (1981), 761-765.
- [16] I. Vrabie , *$C0$ -semigroups and Applications*, North-Holland Publishing, Amsterdam (2003).

Bibliographie

- [1] L. Abdulkirimov : Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space, Azerdaidzan. Gos. Univ. Ucen. Zap.,Fiz. i. Mat. 32-36(MR0492645) 1977, (in Russian).
- [2] G. Alessandrini, E. Beretta, S. Vessella : Determining linear cracks by boundary measurements : Lipschitz stability, SIAM J. Math. Anal. 27, 2, (1996), 361-375.
- [3] H. Amann : Global existence for semilinear parabolic systems, J. Reine Angew. Math., 360, 47-83, 1985.
- [4] H. Amann : Dynamic theory of quasilinear parabolic systems. III. Global existence, Math. Z. 202, 2, 219-250, 1989 and Math. Z. 205, 2, 231, 1990.
- [5] H. Amann : Highly degenerate quasilinear parabolic systems, Ann. Scuola Sup. Pisa, Cl. Sci.(4) 18, 135-166, 1991.
- [6] H. Amann : Hopf bifurcation in quasilinear reaction-diffusion systems, Delay differential equations and dynamical systems (Claremont, CA, 1990), Lecture Notes in Math. 1475, Springer- Verlag, 1991.
- [7] AK. Ames, B. Straughan : Non-Standard and Improperly Posed Problems, Academic Press (1997).
- [8] M. Andrieu, AE. Badia : Identification of multiple moving pollution sources in surface waters or atmospheric media with boundary observations, Inverse Problems, vol. 28, No. 2, Article ID 075009, (2012).
- [9] R. Aris : The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts, Clarendon Press, Oxford, (1976). DOI : 10.1137/1018132.
- [10] D.G. Aronson : The role of diffusion in mathematical population biology, Lecture Notes in Biomathematics, vol. 57, (1985), 2-6. DOI :10.1007/978 - 3 - 642 - 93287 - 8_1.
- [11] S.A. Atanbaev : On the quasi-inversion method for second-order evolution equations, Vestn. Minist. Nauki Vyssh. Obraz. Nats. Akad. Nauk Resp. Kaz., (1999), No. 1, 30-36, (Russian).
- [12] G. Bastay : Iterative Methods for Ill-posed Boundary Value Problems. Linköping Studies in Science and Technology, Dissertations No. 392, Linköping Univ, Linköping (1995)
- [13] AB. Bakushinsky, MYu. Kokurin : Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems. Springer (2004)
- [14] J. Baumeister, A. Leitao : On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations. J. Inverse Ill-Posed Probl, 9 No. 1, 13-29 (2001)
- [15] F. Berntsson, VA. Kozlov, L. Mpinganzima, BO. Turesson : An alternating iterative procedure for the Cauchy problem for the Helmholtz equation, Inverse Problems in Science and Engineering 22(2014), No. 1, 4562.2

- [16] A. Bouzitouna, N. Boussetila, F. Rebbani : Two regularization methods for a class of inverse boundary value problems of elliptic type, *Boundary Value Problems* (2013), 2013 :178
- [17] A. Bouzitouna : Sur Quelques Méthodes Itératives Appliquées à Certains Problèmes Inverses. Université Badji Mokhtar, Annaba. 2014.
- [18] H. Brezis : Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson. Paris, (1983).
- [19] J.R. Cannon, D. R. Dunninger : Determination of an unknown forcing function in a hyperbolic equation from overspecified data, *Ann. Mat. Pure Appl.* 85(4)(1970)49 – 62.
- [20] J.R. Cannon, P. DuChateau : An inverse problem for determination an unknown source term in a heat equation, *J. Math. Appl.* 75(2)(1980)465 – 485.
- [21] Y. Ching-Yu : Solution of an inverse vibration problem using a linear least- squares error method. *Applied Mathematical Modelling*, 20(10) :785 - 788, 1996.
- [22] V. Capasso, A. Di Liddo : Global attractivity for reaction-diffusion systems. The case of nondiagonal matrices, *J. Math. Anal. Appl.* 177, 510 – 529
- [23] G. W. Clark, S. F. Oppenheimer : Quasireversibility methods for non-well posed problems. *Elect. J. Dif. Eqns.* 8(1994), 1 – 9.
- [24] A.D. Cliff, P. Haggett, J.K. Ord, G.R. Versey : *Spatial Diffusion. An Historical Geography of Epidemics in an Island Community.* Cambridge University Press, Cambridge, (1981).
- [25] A. W. Conway, J. Grünwald, A. Signorini, O. Tedoni, A. Tonolo : The propagation of light in a uniaxial crystal, *Proceedings of the London Mathem. Soc.* (1902), pp. 220 – 245.
- [26] R. Courant , D. Hilbert : *Methods of mathematical physics. Vol. II.* Wiley Classics Library. John Wiley and Sons Inc., New York, 1989. Partial differential equations, Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [27] C. Cosner, W. Rundell : Extension of solutions to second-order partial differential equations by the method of quasireversibility, *Houston J. Math.*, 10 (1984), No. 3, 357-370.
- [28] R. Dautray, J.L. Lions : *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, Vol.3, *Spectral theory and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [29] B. Dellatre, D. Ivaldi et C. Stolz : Application du contrôle optimal à l'identification d'un chargement thermique. Pages 393,404 of REEF, Gien's 01 2001.
- [30] S. Djemoui, F. Zouyed : Quasi-boundary value method for an ill posed diffusion system. *International journal of pure and applied mathematics.* Volume 105 No. 3 2015, 359-376
- [31] N. Dunford, J. Schwartz : *Linear operators, part II.* John Wiley and sons, Inc, New York, (1967).
- [32] D.E. Edmunds, and W.D. Evans : *Spectral Theory and Differential Operators*, Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [33] A. El Badia and T. Ha-Duong : On an inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem, *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 585-599, 2002.
- [34] L. Eldén, F. Berntsson, T. Regin' ska : Wavelet and Fourier methods for solving the sideways heat equation, *SIAMJ. Sci. Comput.* 21 (6) (2000) 2187-2205.
- [35] L. Eldén, V. Simoncini : Numerical solution of a Cauchy problem for an elliptic equation by Krylov subspaces, *Inverse Problems*, Vol. 25, (2009) 065002(6).
- [36] H. W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer : *Regularisation of inerse problems.* Kluwer, dro-drecht, 1991.

- [37] H. W. Engl, C. Groetsch : Inverse and ill-posed problems. Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering. Vol. 4. Academic press. (1987).
- [38] A. Erdélyi : The analytic theory of systems of partial differential equations. California Institute of Technology, (1951).
- [39] HO. Fattorini : The Cauchy Problem, Cambridge University Press (1983).
- [40] O. Faugeras, F. Clment, R. Deriche, R. Kerivien, T. Papadoupolo, J. Roberts, T. Viville, F. Devernay, J. Gomes, G. Hermosillo, P. Kornprobst, and D. Lingrand : The inverse EEG and MEG problems : The adjoint space approach I : The continuous cas, Tech. Rep. 3673, INRIA, may 1999.
- [41] G. Fichera : Analisi esistenziali per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi allequazioni e ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico, autoaggiunti, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 1 (1947) 75- 100, 1949.
- [42] G. Fichera : Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems, . Lecture Notes in Math. 8, Springer-Verlag, 1965
- [43] P.C. Fife : Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems. Lecture Notes in Biomathematics, vol. 28, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1979). DOI : 10.1007/978 – 3 – 642 – 93111 – 6.
- [44] C. L. Fu, X. T. Xiong, Z. Qian : Fourier regularization for a backward heat equation, J. Math. Anal. Appl. 331 (2007) 472–480.
- [45] VL. Fushchich, AS. Galitsyn, AS. Polubinskii : A new mathematical model of heat conduction processes, Ukrainian Math. J. 42, 210-216 (1990).
- [46] J. I. Frankel : Residual-minimization least-squares method for inverse heat conduction. Comput. Math. Appl., 32(4) :117-130, 1996.
- [47] A.N. Galybin : An inverse problem of elastostatics in mechanics of composites. Composites Science and Technology, 68(5) :1188 - 1197, 2008.
- [48] E. Gandino, L. Garibaldi, and S. Marchesiello. Pescara benchmarks : nonlinear identification. In Journal of Physics : Conference Series, volume 305. IOP Publishing, 2011. article n 012132.
- [49] S. Granville : The numerical solutions of ordinary and partial differential equations. A weily-intercience series of texts, Monographs and tracts. (2005).
- [50] M. Haase : The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods, Thesis, Universität Ulm, Germany, (2003).
- [51] J. Hadamard : Le problème de Cauchy et les equation aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, (1932).
- [52] J. Hadamard : Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Princeton University Bulletin. Vol. 13, p.49-52.
- [53] J. Hadamard : Lecture note on Cauchy’s problem in linear partial differential equations, Yale Uni Press, New Haven, 1923.
- [54] K.P. Hadeler : Diffusion Equations in Biology. Mathematics of Biology. vol. 80, (2011), 149-177. DOI : 10.1007/978 – 3 – 642 – 11069 – 6_3
- [55] M. Hämäläinen, R. Hari, R. J. Ilmoniemi, J. Knuutila J and O. V. Lounasmaa : Magnetoencephalography - theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain, Reviews of modern physics, 65, 413-497, 1993.

- [56] P. C. Hansen : Rank- deficient and discrete ill-posed problems : numerical aspects of linear inversion. SIAM, Philadelphia, 1998.
- [57] D.N. Hào, V.D. Nguyen and D. Lesnic : A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations, *Inverse Problems*, 25(2009)055002 (27).
- [58] D. Henry : Geometric theory of semilinear parabolic equations, Springer, New York, 1981.
- [59] V. Isakov : *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, New York, 1998
- [60] V. Isakov : *Inverse problems for partial differential equations*, volume 127 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [61] V. Isakov : *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag , New York, 1998.
- [62] V. K. Ivanov, I.V. Mel'nikova, A.I. Flinkov : *Operator-Differential equations and Ill-posed Problems*, (Moscow : Nauka)(in Russian), (1995).
- [63] I.M. Johnstone and B.W. Silverman : Speed of estimation in positron emission tomography and related inverse problems. *The Annals of Statistics*, pages 251- 280, 1990.
- [64] K. Judd : Forecasting with imperfect models, dynamically constrained inverse problems, and gradient descent algorithms. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 237(2) :216 - 232, 2008.
- [65] J. B. Keller : Inverse problems. *Amer. Math. Monthly*, 83 :107-118, (1976).
- [66] M. Kern : *Problèmes inverses*. Syllabus du cours à l'Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci,(2002).
- [67] A. Kirsch : *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Springer, Heidelberg, 1996.
- [68] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya : On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations, *Leningrad Math. J*, 1 (1990), No. 5, 1207-1228.
- [69] VA. Kozlov, VG. Maz'ya, A. V. Fomin : An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic eqations. *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 31, No. 1, 45-52 (1991).
- [70] MA. Krasnosel'skii, GM. Vainikko, PP. Zabreiko, YuB. Rutitskii : *Approximate solutions of operator equations*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (1972).
- [71] R. Kress, D. Colton : *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, *Applies Mathematical Sciences*, Springer(2010).
- [72] G. A. Kriegsmann and W. E. Olmstead : Source identification for the heat equation. *Appl. Math. Lett*, 1(3) :241-245, 1988.
- [73] A. Lakhdari, N. Boussetila : An iterative regularization method for an abstract ill-posed biparabolic problem. *Boundary Value Problems*. DOI 10.1186/s13661-015-0318-4
- [74] R. Lattès, J. L. Lions : *The Method of Quasireversibility, Applications to Partial Differential Equations*, Amer. Elsevier, New-York, (1969).
- [75] H. Leiva : A lemma on C_0 -semigroups and applications PDEs systems, *Quaestiones Mathematicae*, vol. 26, No. 3, (2003), 247-265.
- [76] H. Leiva : *Linear Reaction-Diffusion Systems*, *Notas de Mathematica*, No 185. Mereida January 1999.
- [77] G.S. Li, Y. Ma, Y.Di. Zhang : An inverse problem of finding the nonlinear source term for a parabolic equation, *Math.Appl. (Wuham)* 12(4)(1999)111 – 116.

- [78] D. T.W. Lin, C.C. Wang, C.Y. Yang, and J.C. Li : Inverse estimation of temperature boundary conditions with irregular shape of gas tank. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(21-22) :4651 - 4662, 2010.
- [79] S. Liu : Inverse problem for structural acoustic interaction. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications*, 74(7) :2647 - 2662, 2011.
- [80] L. F. de Oliveira : A note on reaction-diffusion systems. *Universidades São paulo, SP 05508-900, Brazil*, (1997),
- [81] L. F. de Oliveira : On reaction-diffusion systems. *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 1998, No. 24, (1998), 1-10.
- [82] D. Mace, P. Lailly : Solution of the VSP one-dimensional inverse problems. *Geophysical Prospecting*, 34 pp. 1002-1021
- [83] N. Magnoli, G.A. Viano : The source identification problem in electromagnetic theory, *Journal of Mathematical physics*, vol. 38, No.5, pp. 2366-2388, (1997).
- [84] I.V. Melnikova, A. I. Filinkov : *Abstract Cauchy Problems : Three Approaches*, Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 120, Chapman and Hall, Boca Raton, FL, 2001.
- [85] I.V. Melnikova : Regularization of ill-posed differential problems, *Siberian Math. J.* 33 289-98, 1992.
- [86] I.V. Mel'nikova, V.K. Ivanov, A.I. Flinkov : *Differential-operator equations and ill-posed problems*, Nauka, Moscow, (1994) (in Russian).
- [87] P. Méray : Nouveau précis d'analyse infinitésimale, 1872, p. 143. 20. , Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles, *Journal de Mathématiques* (3) vol. 6 (1880) pp. 235-266.
- [88] K. Miller : Stabilized quasi-reversibility and other nearly-best-possible methods for non-well posed problems, *Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes in Mathematics*, 316 (1973), Springer-Verlag, Berlin, 161-176.
- [89] V. A. Morozov : On the solution of functional equations by the method of regularization, *Soviet Math. Doklady*, 7(1966), 414-417.
- [90] B. F. Nielsen, X. Cai, and M. Lysaker : On the possibility for computing the transmbrane potential in the heart with a one shot method : An inverse problem. *Mathematical Biosciences*, 210(2) :523 - 553, 2007.
- [91] A. Okubo : *Diffusion and Ecological Problems : Mathematical Models*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1980.
- [92] L. Payne : *Improperly Posed Problems in Patial Differential Equations*, PHiladelphia : SIAM, 1975.
- [93] L. Payne : Bounds in the Cauchy problem for Laplace's equation, *Arch. Rational Mech. Anal.* 5, 35-45, 1960.
- [94] A. Pazy : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-verlag New York,(1983). DOI : 10.1007/978 - 1 - 4612 - 5561 - 1.
- [95] N.H. Pollack, S. Huang : Climate reconstruction from subsurface temperatures. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, (2000), 28, 339-65.
- [96] A. I. Prilepko, D. S. Tkachenko, Zh. Vychislit : *Mat. Mat. Fiz.* 2003, vol. 43, No. 4, pp. 564 - 572.

- [97] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin : Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York ; Basel, 2000
- [98] A. I. Prilepko, A. B. Kostin : Some inverse problems for parabolic equations with final and integral observation. Mat. Sb., 1992, vol. 183, No. 4, pp. 49 – 68.
- [99] Z. Qian, C.L. Fu, X.T. Xiong, T. Wei : Fourier truncation method for high order numerical derivatives, Appl. Math. Comput. 181 (2006) 940-948.
- [100] M. Raynaud, J. Bransier : A new finite-difference method for the nonlinear heat conduction problem. Numerical Heat Transfer 27-42, (1986).
- [101] T. Regińska, K. Regiński : Approximate solution of a Cauchy problem for the Helmholtz equation, Inverse Problems 22 (2006) 975-989.
- [102] C. Riquier : Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Gauthier Villars. Paris, 1910.
- [103] A. Shidfar, G.R. Karamali : Numerical solution of inverse heat conduction problem with nonstationary measurements, Appl. Math. Comput. 168(1)(2005)540 – 548.
- [104] F. Santosa et M. Vogelius : A computational algorithm for determining cracks from electrostatic boundary measurements, Int. J. Eng. Science, 29, no 8, (1991), 917-939.
- [105] R.E. Showalter : The final value problem for evolution equations, J. Math. Anal. Appl, 4 (1974), 563-572.
- [106] R.E. Showalter : Quasi-reversibility of first and second order parabolic evolution equations. Improperly posed boundary value problems (Conf., Univ. New Mexico, Albuquerque, N.M., 1974), 76-84. Res. Notes in Math., No. 1, Pitman, London, (1975).
- [107] R.E. Showalter : Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations, Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis, Elsevier (1983).
- [108] A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin : Solutions to ill-posed problems. Winston-Wiley, New York (1977).
- [109] A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, A. G. Yagola : Nelineinye nekorrektnye zadachi (Nonlinear Ill-Posed Problems), Moscow, 1995
- [110] J. M. Thomas : Riquier's existence theorems, Ann. of Math. (2) vol. 30 (1929) pp. 285-310.
- [111] J. M. Thomas : The condition for an orthonomic differential system, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 34, (1932) pp. 332-338.
- [112] J. M. Thomas : Riquier's existence theorems, Ann. of Math. (2) vol. 35 (1934) pp. 306-311.
- [113] J. M. Thomas : Differential systems, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 21, New York, 1937.
- [114] J. M. Thomas : Orderly differential systems, Duke Math. J. vol. 7 (1940) pp. 249-290.
- [115] J. M. Thomas : Positive solutions of binomial inequalities, Duke Math. J. vol. 7 (1940) pp. 291-297.
- [116] D.D. Trong, N.T. Long, P.N.D. Alain : Nonhomogeneous heat equation : identification and regularization for the inhomogeneous term , J.Math.Anal.Appl. 312(2005)93 – 104.
- [117] P.N. Vabishchevich : Nonlocal parabolic problems and the inverse heat-conduction problem, Differentsial'nye Uravneniya 17 1193-1199, (in Russian), 1981.
- [118] P.N. Vabishchevich, A.Y. Denisenko : Regularization of nonstationnary problems for elliptic equations, J. Eng. Phys. Thermophys. 65 1195-9, 1993.

- [119] V. Volterra : Sur les vibrations des corps élastiques isotropes, Acta mathematica, t. 18(1894), pp. 161 – 232,
- [120] I. Vrabie : C_0 -semigroups and Applications, North-Holland Publishing, Amsterdam, (2003).
- [121] JG. Wang, T. Wei : An Iterative Method for Backward Time-Fractional, Numerical Methods for Partial Differential Equations Diffusion Problem, Vol. 30, Issue 6, 2029-2041 (2014)
- [122] HW. Zhang, T. Wei : Two iterative methods for a Cauchy problem of the elliptic equation with variable coefficients in a strip region, Numer Algor, 65 :875-892 (2014)
- [123] F. Zouyed, S. Djemoui : An Iterative Regularization Method for Identifying the Source Term in a Second Order Differential Equation. Mathematical Problems in Engineering. Volume 2015, Article ID 713403, 9 pages