

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR- ANNABA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences : Mathématiques

Sur quelques classes de systèmes différentiels avec cycles limites explicites

Option : Mathématiques Appliquées

Présenté par :

BENYOUCEF Salah

Directeur de thèse : Bendjeddou Ahmed Pr Université Farhat Abbas Setif 1

Devant le jury :

Sissaoui Hocine	Pr	Président	Université Badji Mokhtar Annaba
Bensalem Naceurdine	Pr	Examineur	Université Farhat Abbas Setif 1
Makhlouf Amar	Pr	Examineur	Université Badji Mokhtar Annaba
Berboucha Ahmed	Pr	Examineur	Université Abderrahmane Mira Bejaia
Ferchichi Mohamed Rida	MCA	Examineur	Université Badji Mokhtar Annaba

Abstract

This thesis focuses on the qualitative study of differential systems, which aims to find the properties of their solutions, without seeking explicit resolution, generally difficult.

We were interested in the construction of classes of planar differential systems, and Kolmogorov type systems modeling the problems of prey – predator, where we studied the existence and the number of limit cycles, in addition we have given their explicit algebraic expressions.

Key words :

Planar dynamic systems, predator-prey systems of Kolmogorov, equilibrium points, Invariant curves, periodic solutions, limit cycles.

MSC : 34A34, 34C05, 34C07, 34C25.

Résumé

Cette thèse s'articule autour de l'étude qualitative des systèmes différentiels, qui a pour but de trouver les propriétés de leurs solutions, sans poursuivre la résolution explicite qui est généralement difficile.

Nous nous sommes intéressés à la construction de classes de systèmes différentiels planaires, et des systèmes de type Kolmogorov modélisant des problèmes proies – prédateurs, où nous avons étudié l'existence et le nombre de cycles limites, en plus nous avons donné leurs expressions algébriques explicites.

Mots clés

Systèmes dynamiques planaires, systèmes proies-prédateurs de Kolmogorov, points d'équilibre, courbes invariantes, solutions périodiques, cycles limites.

MSC : 34A34, 34C05, 34C07, 34C25.

Table des matières

Introduction	6
1 Notions introductives.	12
1.1 Introduction.	12
1.2 Equations différentielles et systèmes dynamiques.	12
1.3 Portraits de phases.	16
1.4 Points d'équilibre.	18
1.5 Courbes invariantes.	22
1.6 Solution périodique.	23
1.7 Cycle limite.	24
1.8 Critères de non-existence de cycle limite.	26
1.9 Critères d'existence de cycle limite.	29
2 Systèmes différentiels avec cycles limites explicites	34
2.1 Introduction.	34
2.2 Courbe invariante avec un cofacteur de signe constant.	35
2.3 Systèmes différentiels avec au plus quatre cycles limites	38
2.4 Systèmes différentiels avec au plus deux cycles limites	46
3 Sur quelques classes de systèmes de Kolmogorov avec cycles limites algébriques	53
3.1 Introduction	53
3.2 Systèmes de Kolmogorov avec au plus quatre cycles limites	54
3.3 Systèmes de Kolmogorov avec au plus un cycle limite	69

Conclusion et perspectives	84
Liste de figures	85
Bibliographie	87

Introduction

Les systèmes différentiels constituent une branche importante des mathématiques. Ils modélisent des phénomènes issus de la pratique, comme l'interaction entre deux espèces en écologie et l'équilibre entre l'offre et la demande en économie. Généralement, ils sont utilisés dans des domaines scientifiques tels que : la physique, la biologie, l'économie,...

La résolution directe d'un système différentiel est en général difficile ou impossible. Les méthodes numériques permettent seulement de calculer sur un intervalle de temps fini une solution approchée correspondante à des conditions initiales données en discrétisant l'intervalle.

Cependant, une autre issue est possible. C'est l'étude qualitative des systèmes différentiels. Cette étude permet de fournir des informations sur le comportement des solutions d'un système différentiel sans la nécessité de le résoudre explicitement, et elle consiste à examiner les propriétés et les caractéristiques des solutions de ce système, et de justifier, parmi ces solutions, l'existence ou la non existence d'une forme de courbe fermée isolée appelée cycle limite.

Plusieurs ouvrages ont traité l'étude qualitative des systèmes différentiels, citons en particulier [[29],[51],[84],[37],[55],[59],[62],[68],[69],[72],[80]...].

Afin de bien positionner notre problème, commençons d'abord par donner un historique.

L'importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques pour développer des méthodes afin d'étudier les propriétés de leurs solutions.

Avec ses travaux " Sur les courbes définies par une équation différentielle" [[63],[64],[65],[66]] publiés entre 1881 et 1886, **Henri Poincaré** (1854 – 1912) a ouvert la voie pour approcher des équations différentielles, où l'effort n'est plus concentré sur la résolution directe,

mais sur l'étude géométrique des solutions ; il envisage le problème d'un point de vue qualitatif, la méthode d'étude consiste à étudier la succession des points qui sont à l'intersection d'une trajectoire avec un plan perpendiculaire à celle-ci. Il énonça que si une solution maximal de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}, \quad (0.1)$$

où F et G sont des polynômes de variables réelles (x, y) à coefficients réels et de degrés quelconques, reste bornée, alors soit cette solution converge vers un point d'équilibre, soit son comportement asymptotique et celui d'une fonction périodique.

Le mathématicien **Ivar Bendixson** (1861 – 1935) donna une preuve rigoureuse de l'énoncé de **Poincaré** et l'étendit au célèbre théorème de **Poincaré -Bendixson** sur l'ensemble limite des trajectoires des systèmes dynamiques dans une région bornée[6].

Le mathématicien **David Hilbert** (1862 – 1943) présenta, lors du deuxième congrès international de mathématiques (1900), 23 fameux problèmes considérés comme la collection ayant eu le plus d'influence en mathématiques[40]. La seconde partie du seizième problème de **Hilbert** pose la question du nombre maximal et de la disposition des trajectoires périodiques isolées (cycles limites) pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = dx/dt = F(x, y) \\ \dot{y} = dy/dt = G(x, y), \end{cases} \quad (0.2)$$

où F et G sont des polynômes de variables réelles (x, y) à coefficients réels et de degrés quelconques.

Ce problème jusqu'à nos jours non résolu totalement, à fait l'objet de plusieurs travaux.

On note H_n le nombre maximal de cycles limites du système (0.2).

Dulac (1870 – 1955) proposa en 1923 une démonstration assurant que H_n est fini pour tout n où $n = \max(\deg(F), \deg(G))$, mais sa démonstration comportait une erreur. La résolution de ce problème de **Dulac** a été faite de façon indépendante par **Martinet & Moussu**(1987), **Ilyashenko**(1991) et **Ecalte**(1992). Cette résolution permet de montrer que $H_n < \infty$. **Petrovsky & Landis**(1957) crurent trouver la valeur de H_2 mais ils s'aperçurent d'une erreur dans leur propre démonstration avant qu'ils ne soient infirmé par un contre exemple de **Shi** (1982)[70] dans lequel un système quadratique a 4 cycles

limites.

Ainsi, si H_n est un nombre fini pour tout n , la seule chose que l'on sache est que $H_2 \geq 4$ [70], $H_3 \geq 13$ [46], $H_4 \geq 20$ [39], $H_5 \geq 28$ [76], $H_6 \geq 35$ [73], $H_7 \geq 50$ [47].

Christopher & Lloyd (1995)[28] ont donné une borne inférieure au nombre H_n

$$H_n \geq n^2 \ln(n). \quad (0.3)$$

Devant la difficulté du problème général, les mathématiciens s'orientent dans deux directions :

-Étudier en particulier les systèmes quadratiques et cubiques. [3], [5],[19], [20],[21],[36],[38],[49],[57],[82]...

-Étudier une sous-classe des systèmes planaires, par exemple les systèmes de *Lié-nard*(1869 – 1958) qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -G(x), \end{cases} \quad (0.4)$$

où $F(x)$ et $G(x)$ sont deux polynômes de degré m et n respectivement [48],[4],[30],[79],[81]...

En 1998 *Stephen Smale*, a exposé 18 problèmes comme "Mathematical Problems for the Next Century"[71] où l'accent est mis dans le treizième problème sur les systèmes de *Liénard*.

En biologie mathématique, un modèle de système d'équations différentielles a été proposé, indépendamment, par *Alfred James Lotka*(1880 – 1949) en 1925 et *Vito Volterra* (1860 – 1940) en 1926, d'où le nom *Lotka-Volterra*. Ce modèle connu aussi sous le nom "proie-prédateur" décrit l'interaction entre deux espèces d'une population et son évolution. Du point de vue mathématique, ce modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx) \end{cases}, \text{ avec } (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), x_0, y_0 > 0. \quad (0.5)$$

les dérivées $\dot{x} = dx(t)/dt$ et $\dot{y} = dy(t)/dt$ représentent la variation des populations au cours du temps.

Le modèle de *Lotka-Volterra* à fait l'objet d'une vaste littérature. Ce modèle ne présente pas de cycles limites, mais il reste le point de départ de plusieurs modèles

proposés actuellement. Parmi ces modèles celui de **Kolmogorov**(1903 – 1987).

Kolmogorov a considéré le système proie-prédateur général où l'existence de cycles limites est probable. Ces Systèmes interviennent dans la modélisation de plusieurs phénoménologies liées à l'écologie et à l'environnement socio-économique.

L'un des problèmes principaux dans la théorie qualitative est l'étude de l'existence et du nombre de cycles limites des systèmes différentiels, en particulier les systèmes différentiels planaires polynômiaux, voir par exemple [[2],[3],[16],[18],[50],[52],[77],[78]...].

L'intérêt des cycles limites des systèmes différentiels planaires est dû à leurs significations importantes dans les modèles mathématiques issus de la pratique, comme il est dû aussi, à l'importance théorique du seizième problème de Hilbert.

Plusieurs travaux ont traité le seizième problème de Hilbert. L'étude est basée précisément sur l'existence, le nombre et la stabilité des cycles limites, voir par exemple [[16],[20],[21],[24],[30],[32],[33], [44],[45],[53],[54],[56],[67],[76],[82],[83]...].

Dans le même contexte d'autres travaux se sont consacrés aux systèmes proies-prédateurs et aux systèmes de Kolmogorov, voir par exemple [[9],[17],[22],[23],[41], [42],[43],[58],[60],[61]...].

Néanmoins, dans les travaux cités ci-dessus, les chercheurs ne donnent pas explicitement les cycles limites et peu qui se sont intéressés à cela, voir par exemple [[1],[2],[7],[8],[9], [10],[34],[35]..].

Le travail développé dans cette thèse s'articule autour de la construction de classes de systèmes différentiels planaires où nous étudierons l'existence et le nombre de cycles limites et en même temps, nous donnerons leurs expressions explicites.

Nous nous sommes intéressés à certains systèmes d'équations différentielles ordinaires planaires du type

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y), \end{cases} \quad (0.6)$$

et à d'autres systèmes modélisant des problèmes proies-prédateurs du type-Kolmogorov

$$\begin{cases} \dot{x} = xF(x, y) \\ \dot{y} = yG(x, y), \end{cases} \quad (0.7)$$

où F, G sont des fonctions de classe C^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Motivé par les travaux[[7],[8],[9],[10]] du professeur Ahmed Bendjeddou, ainsi que par ses directives, nous avons pu porter des contributions en formulant quelques théorèmes concernant l'existence, le nombre et les expressions explicites de cycles limites de quelques classes de systèmes différentiels de types (0.6) et (0.7).

Nous avons proposé deux classes de type(0.6). La première est polynomiale quartique ou bien quintique avec au plus quatre cycles limites, basée sur le travail de C. Christopher [26], où nous avons effectué quelques changements en considérant une forme plus générale du système différentiel, et nous avons étudié le nombre de cycles limites existants, ce travail à fait l'objet d'une publication dans le journal "Annals of applied mathematics"[11]. La deuxième classe proposée est aussi polynomiale de degré supérieur ou égale à quatre avec au plus deux cycle limites, ce travail est publié dans le journal" global journal of pure and applied mathematics" [12].

Notre contribution s'est élargie aux systèmes de type(0.7) de Kolmogorov. Nous avons proposé trois classes. La première polynomiale de degré supérieur ou égale à cinq ou même transcendante avec au plus quatre cycles limites. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans le journal "International journal of pure and applied mathematics "[13] . Concernant la deuxième classe nous avons ajouté d'autres termes au système de la première classe ; les conditions de l'existence des cycles limites changent mais le nombre est toujours limité à quatre. Ce travail est accepté pour publication dans le journal "International journal of advances in applied mathematics and mechanics"[14]. Concernant la troisième classe, nous avons commencé par des cas spécifiques de systèmes de kolmogorov polynomiaux de degré supérieur ou égale à quatre, où nous avons montré l'existence d'au plus un cycle limite, enfin nous avons proposé un cas plus général où le nombre de cycles limites dans le quadrant réaliste est limité à un. Ce dernier travail est accepté pour publication dans le journal " Journal of siberian federal university : mathematics and physics"[15].

Cette thèse est divisée en 3 chapitres.

Le premier chapitre, qui est plutôt un glossaire, regroupe quelques notions de base, introductives et nécessaires à la compréhension de l'ensemble de la thèse.

Le deuxième chapitre, est consacré à la présentation de trois classes de systèmes différentiels du type (0.6). La première classe est une application directe de critères d'existence de cycles limites. La deuxième classe concerne la publication[11]. Enfin la troisième classe comporte la publication[12].

Le troisième chapitre porte sur la recherche de cycles limites pour trois classes de systèmes différentiels du type-Kolmogorov (0.7). La première classe fait l'objet de la publication [13]. La deuxième classe fait l'objet de la publication[14]. Enfin la troisième classe est divisée en deux parties, la première introductive, et la deuxième concerne la publication [15].

Nous terminons notre travail avec une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Notions introductives.

1.1 Introduction.

Loin de vouloir couvrir le vaste champ des systèmes dynamiques non linéaires, ce premier chapitre a essentiellement pour objectif de présenter quelques notions de base nécessaires pour la compréhension de cette thèse. Il s'agit aussi de citer quelques références bibliographiques pour le lecteur qui désire avoir une présentation plus complète sur le sujet.

Nous abordons dans ce chapitre quelques définitions sur les systèmes dynamiques : portraits de phases, points d'équilibre, solutions périodiques, cycles limites...

Nous Citons également quelques théorèmes utilisés comme outils dans notre travail.

1.2 Equations différentielles et systèmes dynamiques.

Définition 1.1 (*Equation différentielle ordinaire*).

Soit E un espace vectoriel normé. Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ et ses dérivées $y', y'' \dots y^{(n)}$ au point t définie par :

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

où F est une fonction continue sur un ouvert D de $\mathbb{R} \times E^{n+1}$.

Définition 1.2 (Solution d'une EDO).

Soit y une fonction de t définie d'un intervalle I dans l'espace vectoriel normé E , n fois dérivable en tout point de I et $y', y'', \dots, y^{(n)}$ ces dérivées successives.

Cette fonction y est solution de l'équation(1.1) si

$$\forall t \in I, F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

Donc la solution de (1.1) est la donnée d'un couple (y, I) .

Définition 1.3 (Prolongement d'une solution).

Soit (y_1, I_1) et (y_2, I_2) deux solutions de l'équation(1.1),

si $I_1 \subset I_2$ et $\forall t \in I_1, y_1(t) = y_2(t)$,

nous disons que (y_2, I_2) est un prolongement de (y_1, I_1) .

Définition 1.4 (Solution maximale).

On dit que (y, I) est une solution maximale de (1.1) si elle n'admet pas de prolongement.

Autrement dit, pour tout solution (z, J) on a,

si $I \subset J$ et $y(t) = z(t)$ pour tout $t \in I$, alors $I = J$.

Définition 1.5 Une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ est dite Lipschitzienne par rapport à sa variable y s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\text{pour tout } (x, y_1) \text{ et } (x, y_2) \text{ de } \Omega, \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| < C\|y_1 - y_2\|.$$

La fonction f est dite localement Lipschitzienne, si pour tout (x_0, y_0) de Ω , il existe un voisinage de (x_0, y_0) sur le quel elle est Lipschitzienne.

Théorème 1.1 de Cauchy-Lypshitz (Existence et unicité de la solution d'un problème à valeurs initiales).

Soit le problème $\dot{X}(t) = f(X(t))$ avec la condition initiale $X(0) = X_0$,

où f est continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ et $X_0 \in \Omega$.

Si f est localement Lipschitzienne, alors il existe une unique solution maximale $X(t) \subset ([0, T], \mathbb{R}^2)$ du problème pour $t < T$.

Proposition 1.1 Si $f \in C^1(\Omega)$ alors f est localement Lipschitzienne.

C'est pour cette raison que nous supposons dans notre travail que la fonction f est au moins du classe C^1 .

Définition 1.6 (EDO linéaire et EDO non linéaire).

L'équation (1.1) est dite linéaire si elle s'écrit sous la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b, \quad (1.2)$$

où a_0, a_1, \dots, a_n, b sont des fonctions de t ou bien des constantes.

Autrement l'équation (1.1) est dite non linéaire.

L'indice n est un entier strictement positif et si $a_n \neq 0$ l'équation (1.2) est d'ordre n .

Définition 1.7 (Système d'équations différentielles).

On appelle système différentiel d'ordre 1 tout système de la forme :

$$\dot{X}(t) = F(X(t)), \quad (1.3)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad F(X(t)) = \begin{pmatrix} f_1(X(t)) \\ \dots \\ f_n(X(t)) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

où f_i sont des fonctions de la variable t définies et continues sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1.8 (Système différentiel linéaire).

On dit que le système différentiel (1.3) est un système linéaire si pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $X \mapsto F(X(t))$ est affine : il existe un vecteur $B(t)$ de \mathbb{R}^n et une matrice $A(t)$ de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall (t, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad F(X(t)) = B(t) + A(t)X. \quad (1.5)$$

Autrement le système est dit non linéaire.

Un système linéaire est dit homogène si la fonction $B(t)$ est identiquement nulle.

Le système

$$\dot{X} = A(t)X, \quad (1.6)$$

est appelé système homogène associé au système linéaire $\dot{X} = A(t)X + B(t)$.

Définition 1.9 (*Systèmes autonomes et systèmes non autonomes*).

Le système (1.3) est dit autonome si f ne dépend pas explicitement de la variable temps (t). Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome.

Définition 1.10 (*Systèmes dynamiques*).

Un système dynamique est un ensemble de composants en interaction, qui évolue au cours du temps.

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps, et cette évolution est décrite par des équations différentielles.

Un système dynamique est défini par un triplet (X, T, f) , constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T , et d'une application de transition d'état : $f : T \times X \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant.

Définition 1.11 *Un système dynamique est dit déterministe, si à une condition initiale donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.*

Nous nous intéressons dans ce travail, aux systèmes autonomes, continus, déterministes, et de type causal, c'est-à-dire que leur avenir ne dépend que du phénomènes du passé ou du présent.

Ces Systèmes sont décrits par un vecteur d'état $X \in \mathbb{R}^2$ dont l'évolution obéit à une loi de la forme $\dot{X} = f(X)$ où le signe " $\dot{\bullet}$ " signifie la dérivée par rapport à une variable $t \in \mathbb{R}$ souvent amenée à représenter le temps, $X \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur d'état (i.e. ses composantes sont les variables d'état du système), et f est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^2 .

Les éventuelles propriétés particulières de f permettent de définir le type de système dynamique dont il s'agit. Par exemple, si f est non linéaire et régulière, on parlera de système dynamique non linéaire régulier. Dans ce qui suit, on supposera f non linéaire mais régulière (au moins de classe C^1).

Pour plus de détails sur les systèmes dynamiques voir[25].

1.3 Portraits de phases.

Définition 1.12 *Un champ de vecteurs est une application qui à tout point de l'espace fait correspondre un vecteur.*

On note $M(P, t)$, ou plus souvent $M(P)$ la valeur de ce champ de vecteurs au point P à l'instant t et on attache conventionnellement le représentant de ce vecteur au point P . Pour le système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$, le champ de vecteurs associé est le champ de vecteurs (F, G) .

Avant de commencer l'étude détaillée d'un système différentiel il est très pratique de dessiner le champ de vecteur qui peut nous fournir des renseignements sur les différentes formes de solutions possibles. Il s'agit de la représentation graphique en chaque point de l'espace du vecteur qui lui est associé.

En effet ce vecteur sera tangent à la trajectoire solution du système différentiel passant par ce point. Le champ de vecteurs nous donne donc une idée assez précise des solutions possibles et de leur comportement asymptotique.

Exemple 1.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2, \end{cases} \quad (1.7)$$

qui peut être réduit à l'équation différentielle $y' = \frac{x^2}{y}$.

Le champ de vecteurs associé au système (1.7) est donné par la figure(1.1).

Définition 1.13 *(Portrait de phase). Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires (dites trajectoires de phase) d'un système dynamique dans l'espace des phases tel que à chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point.*

Les solutions maximales d'une équation différentielle sont appelées courbes intégrales du champ de vecteurs. Elles sont tangentes en chaque point au champ de vecteurs.

Exemple 1.2 *L'ensemble de courbes solutions du système (1.7) est donné par $y^2 = \frac{2}{3}x^3 + c$ où c est une constante réelle, et sa représentation graphique est donnée par la figure(1.2).*

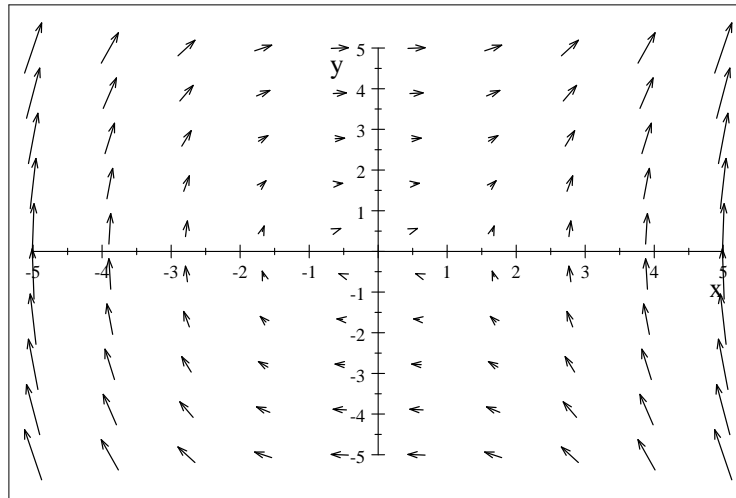


FIG. 1-1 – Champs de vecteurs associé au système(1.7).

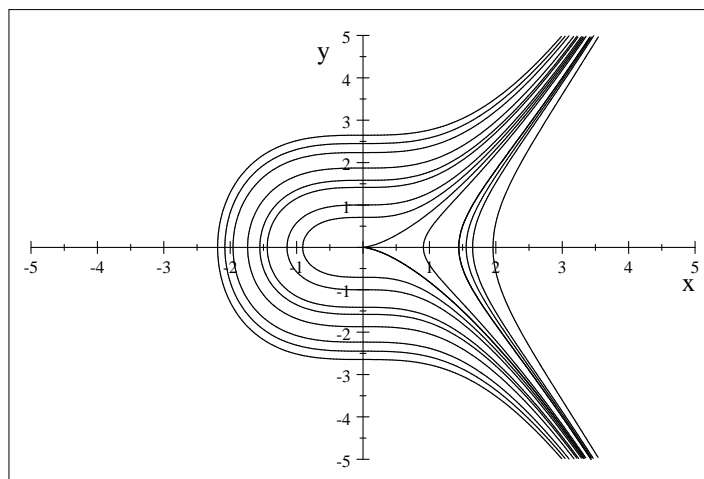


FIG. 1-2 – Portrait de phase du système(1.7).

L'étude qualitative des solutions d'un système dynamique plane est l'étude de l'ensemble des solutions (ou trajectoires) d'un point de vue géométrique : on s'intéresse non pas à une solution particulière mais à l'ensemble des solutions $\{(X_a, J_a), a \in \mathbb{R}^2\}$.

1.4 Points d'équilibre.

Dans le cas où la solution du système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$ est inconnue et afin de connaître l'aspect des trajectoires de ce système au moins localement, nous devons chercher ses points d'équilibre et étudier leur stabilité.

Définition 1.14 (*Points d'équilibre*).

Soit le système différentiel

$$\dot{X} = f(X). \quad (1.8)$$

On appelle point singulier ou point d'équilibre de ce système, tout point $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que : $f(X_0) = 0$.

Dans le contexte des systèmes dynamiques, ces points sont souvent appelés solutions stationnaires.

Définition 1.15 *Considérons le système (1.8).*

Le système $\dot{X} = AX$ où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0) \right) = Df(X_0), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (1.9)$$

et

$$f(X_0) = 0 \quad (1.10)$$

est appelé le linéarisé du système (1.8) au point X_0 .

Exemple 1.3 *Soit le système non linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = y^2 + x. \end{cases} \quad (1.11)$$

Il est clair que $f(X) = 0$, entraîne que $X_0 = (0, 0)$ est le seul point d'équilibre de ce système.

On cherche le linéarisé de ce système en X_0 ,

$$\begin{aligned} Df(X) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(X) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le système linéarisé du système (1.11) est :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x. \end{cases} \quad (1.12)$$

Définition 1.16 On appelle point d'équilibre hyperbolique du système ($\dot{X} = f(X)$), tout point d'équilibre X_0 telles que toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(X_0)$ ont une partie réelle non nulle.

Dans le cas contraire, le point d'équilibre est dit non hyperbolique.

Exemple 1.4 Le point d'équilibre $(0, 0)$ du système (1.11) est non hyperbolique puisque les valeurs propres de la matrice $Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

Exemple 1.5 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = y^2 - y. \end{cases} \quad (1.13)$$

Les points d'équilibre de ce système sont $(0, 0)$ et $(-1, 1)$.

Le système linéarisé du système (1.13) au voisinage du point $(0, 0)$ est $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$

Les valeurs propres de l'opérateur linéaire sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$, alors le point $(0, 0)$ est hyperbolique.

Le système linéarisé du système (1.13) au voisinage du point $(-1, 1)$ est $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = y. \end{cases}$

La seule valeur propre de l'opérateur linéaire est $\lambda = 1$, alors ce point est aussi hyperbolique.

Classification des points d'équilibre.

Considérons le système linéaire :

$$\dot{X} = AX, \quad (1.14)$$

où $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A , X_0 le point d'équilibre.

Définition 1.17

–Si les valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sont réelles et du même signe, le point d'équilibre X_0 est appelé nœud.

–Si les valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, le point d'équilibre X_0 est appelé selle.

–Si les valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sont complexes avec $Im(\lambda_i) \neq 0$, et $Re(\lambda_i) \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, le point d'équilibre X_0 est appelé foyer.

–Si les valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sont complexes avec $Im(\lambda_i) \neq 0$, et $Re(\lambda_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$, le point d'équilibre X_0 est appelé centre.

Définition 1.18 Un point d'équilibre X_0 du système différentiel (1.8) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(X_0)$ ont des parties réelles négatives, il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(X_0)$ ont des parties réelles positives, il est appelé selle s'il est hyperbolique et si $A = Df(X_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

Proposition 1.2 Un point d'équilibre X_0 du système différentiel (1.8) est attractif si toutes les valeurs propres de la matrice $Df(X_0)$ ont une partie réelle strictement négative, répulsif si toutes les valeurs propres de la matrice $Df(X_0)$ ont une partie réelle strictement positive.

Définition 1.19 *On dit que le point d'équilibre X_0 est stable si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|X - X_0\| < \delta \implies (\forall t > 0 : \|X(t) - X_0\| < \varepsilon). \quad (1.15)$$

X_0 est asymptotiquement stable si et seulement si X_0 est stable et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - X_0\| = 0. \quad (1.16)$$

Autrement dit : Un point d'équilibre X_0 est stable si toute trajectoire qui commence à proximité de X_0 reste proche de X_0 dans le futur. Le point X_0 est dit asymptotiquement stable si de plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = X_0$.

Définition 1.20 *Un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ est une application bijective continue dont la réciproque est continue.*

Définition 1.21 *Deux systèmes planaires définis sur deux ouverts U et V respectivement sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que h transforme les orbites du premier système en les orbites du deuxième système et préserve le sens du temps.*

Théorème 1.2 [62] *Si X_0 est un point d'équilibre hyperbolique du système non linéaire $\dot{X} = f(X)$, alors il existe un voisinage de ce point dans le quel ce système est topologiquement équivalent à son linéarisé $\dot{X} = AX$ où $A = Df(X_0)$.*

Théorème 1.3 [62] *Considérons le système $\dot{X} = AX$, où $A = Df(X_0)$ le linéarisé autour du point d'équilibre X_0 du système (1.8), et soient $\lambda_1 \dots \lambda_n$ les valeurs propres de l'opérateur linéaire A , alors si pour tout $i \in [1; n]$, $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ le point d'équilibre est stable, s'il existe $k \in [1; n]$ tel que $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ le point d'équilibre est instable.*

Nous concluons que :

- Si les valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ de l'opérateur $A = Df(X_0)$ sont réelles telles que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n < 0$ le point d'équilibre X_0 est un nœud stable.

- Si les valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ de l'opérateur $A = Df(X_0)$ sont réelles et il existent parmi ces valeurs $\lambda_i < 0$ et $\lambda_j > 0$ ($i \neq j$) le point d'équilibre X_0 est un point selle, il est toujours instable.

- Si les valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ de l'opérateur $A = Df(X_0)$ sont réelles telles que $\lambda_n \geq \dots \geq \lambda_1 > 0$ le point d'équilibre X_0 est un nœud instable.

- Si les valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ de l'opérateur $A = Df(X_0)$ sont complexes avec $Im(\lambda_i) \neq 0$, et $Re(\lambda_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$, le point d'équilibre X_0 est un foyer instable.

- Si les valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ de l'opérateur $A = Df(X_0)$ sont complexes avec $Im(\lambda_i) \neq 0$, et $Re(\lambda_i) < 0$, $i = 1, \dots, n$, le point d'équilibre X_0 est un foyer stable.

Pour plus de détails sur les points singuliers voir [62],[51]

1.5 Courbes invariantes.

Définition 1.22 On appelle courbe invariante du système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$, toute courbe d'équation $U(x, y) = 0$ du plan de phases qui vérifie :

$$F \frac{\partial U}{\partial x} + G \frac{\partial U}{\partial y} = KU. \quad (1.17)$$

La fonction $K(x, y)$ est appelée cofacteur associé à la courbe invariante U .

L'égalité (1.17) montre que sur la courbe invariante, le gradient $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$ de U est orthogonal au champ de vecteurs $X = (F, G)$, donc en tout point de la courbe invariante le champ de vecteurs est tangent à cette courbe.

Si $U_1 = 0$ et $U_2 = 0$ sont deux courbes invariantes pour le système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$, de cofacteurs respectifs K_1 et K_2 ; alors la courbe $U_1 U_2 = 0$ est aussi invariante et son cofacteur est $K = K_1 + K_2$.

Définition 1.23 Une courbe invariante $U(x, y) = 0$ est dite algébrique de degré n si $U(x, y)$ est un polynôme de degré n , si non on dit qu'elle est non algébrique ou transcendante.

Proposition 1.3 Dans le cas où le système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$ est polynomial et possède une courbe invariante $U(x, y) = 0$ algébrique de degré n , le cofacteur est aussi algébrique et de degré $\deg K \leq n - 1$.

Exemple 1.6 La courbe définie par l'équation $x^2 + y^2 = 1$ est une courbe invariante pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 + y - 1 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - x - 1. \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= x^2 + y^2 - 1, \\ F \frac{\partial U}{\partial x} + G \frac{\partial U}{\partial y} &= 2x(x^2 + y^2 + y - 1) + 2y(x^2 + y^2 - x - 1) \\ &= (2x + 2y)(x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

Le cofacteur est $K(x, y) = 2x + 2y$.

1.6 Solution périodique.

Définition 1.24 On appelle solution périodique du système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$ toute solution

$\phi(t) = (x(t), y(t))$ qui n'est pas un point fixe et pour laquelle il existe un réel $T > 0$ tel que $\forall t \in [0, T], \phi(t + T) = \phi(t)$.

Le plus petit nombre T qui convient s'appelle alors période de cette solution.

On peut définir les notions de stabilité, stabilité asymptotique et instabilité de la solution périodique en généralisant la définition relative à un point d'équilibre.

Définition 1.25 Soit $\phi(t) = (x(t), y(t))$ une solution périodique du système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$.

$\phi(t)$ est stable si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|X(t_0) - X_0(t_0)\| < \delta \implies (\forall t > t_0, \|X(t) - \phi(t)\| < \varepsilon).$$

$\phi(t)$ est asymptotiquement stable si elle est stable et si de plus $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - \phi(t)\| = 0$.

$\phi(t)$ est instable si elle n'est pas stable.

Cette définition de la stabilité d'une solution périodique est appelée, la stabilité au sens de Liapounov. Cependant, une autre définition de la stabilité d'une solution périodique, appelée stabilité au sens de Poincaré est plus significative, une définition qui fait intervenir la distance d'un point X à une courbe périodique, $d(t) = \inf_{t \in [0, T[} \|X - \phi(t)\|$.

Définition 1.26 Soit $X(t) = (x(t), y(t))$ une solution du système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$, une solution périodique $\phi(t)$ de ce système est orbitalement stable ou stable au sens de Poincaré si,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|X(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta \implies d(t) = \inf_{t \in [0, T[} \|X(t) - \phi(t)\| < \varepsilon$ pour $t \in [t_0, +\infty[$.

$\phi(t)$ est asymptotiquement stable si elle est stable et si en plus $\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0$.

$\phi(t)$ est instable si elle n'est pas stable.

Remarque 1.1 *La stabilité au sens de Lyapounov implique la stabilité au sens de Poincaré mais la réciproque n'est pas vraie.*

Théorème 1.4 [62] *Soit le champ de vecteurs \mathcal{X} sur \mathbb{R}^2 . Si Γ est une orbite périodique de \mathcal{X} , alors il existe un point singulier (point d'équilibre) de \mathcal{X} contenu dans $\text{Int}(\Gamma)$, où $\text{Int}(\Gamma)$ signifie l'intérieur de Γ .*

Théorème 1.5 *Soit X_0 un point d'équilibre hyperbolique du système (1.8). Alors dans un voisinage de X_0 , les trajectoires des solutions du système d'équations (1.8) ont la même allure que les trajectoires des solutions de son linéarisé.*

Remarque 1.2 *Lorsque les valeurs propres de $Df(X_0)$ sont des nombres imaginaires purs, le fait que les trajectoires du système linéarisé soient périodiques au tour du point d'équilibre X_0 ne permet pas de conclure que les trajectoires du système initial sont périodiques au tour de ce point.*

1.7 Cycle limite.

Poincaré introduit la notion de cycle limite dans son second mémoire de 1882[64]. La représentation de courbes définies au moyen d'une équation différentielle dans le plan de phase ainsi défini par Poincaré, c'est-à-dire, dans un espace de coordonnées tel que l'ordonnée soit la dérivée par rapport au temps de l'abscisse ($(x, y = \dot{x})$ =(position, vitesse)), conduit Poincaré à une classification des points d'équilibres du système. Il démontre alors, qu'il en existe trois types différents qu'il appelle : cols, fonds et sommets ou cols, nœuds et foyers. Puis, il ajoute qu'en dehors de ces points d'équilibre il existe également des courbes qu'il nomme cycles limites et qui correspondent à des solutions périodiques pour le système considéré, dont les autres courbes définies par la même équation différentielle se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre.

Définition 1.27 On appelle cycle limite toute trajectoire périodique $\Gamma(t)$ isolée dans l'ensemble des trajectoires périodiques. C'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage. Ceci signifie que les trajectoires proches ne sont pas fermées mais se rapprochent ou s'éloignent de $\Gamma(t)$.

Un cycle limite attractif est une trajectoire fermée (donc une solution périodique) vers laquelle tendent, lorsque t tend vers $+\infty$, les trajectoires voisines.

Un cycle limite répulsif est une trajectoire fermée de laquelle s'éloignent, lorsque t tend vers $+\infty$, les autres trajectoires voisines.

Définition 1.28 Un cycle limite $\Gamma(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, U(x, y) = 0\}$, est dit algébrique si $U(x, y)$ est un polynôme, autrement le cycle limite est dit non-algébrique ou transcendant.

Remarque 1.3 Aucun point sur un cycle limite n'est un point d'équilibre.

Remarque 1.4 Un système dynamique qui possède un cycle limite quelques soient les conditions initiales ne peut être linéaire de la forme $\dot{X} = AX$, car s'il était linéaire, toute solution $X(t)$ induirait par principe de superposition que la fonction $\alpha X(t)$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) soit aussi solution. Ainsi si $X(t)$ est périodique il y aurait une bande continue de trajectoires périodiques dans l'espace des phases.

Exemple 1.7 Représentation graphique d'un cycle limite

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-2x^3 - 4xy^2 + 9x^2 + 2y^2 + 6xy - 15x - 6y + 9) \\ \dot{y} = y(x^2 - 2y^2 + 3y - 3). \end{cases} \quad (1.19)$$

Ce système présente un cycle limite représenté par la figure(1.3).

Pour plus de détails sur les cycles limites voir[27],[62],[80].

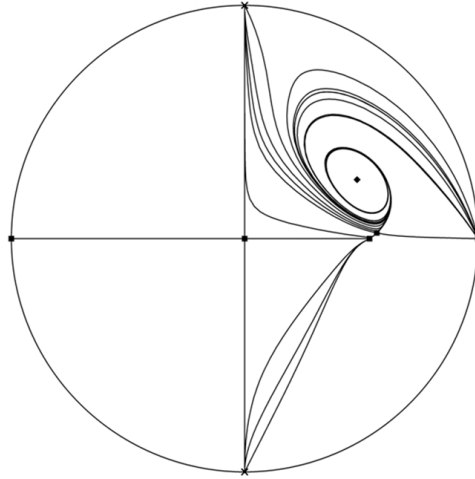


FIG. 1-3 – Cycle limite du système(1.19) en utilisant le programme P4 " polynomial planar phase portraits". voir annexe.

1.8 Critères de non-existence de cycle limite.

Critère du potentiel.

Supposons que le système (1,8) puisse s'écrire sous la forme $\dot{X} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(X)$ où $X \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ et V est une fonction de classe C^1 définie sur D à valeurs dans \mathbb{R} , on dit alors que V est un potentiel du système(1,8).

Théorème 1.6 *Si le système (1,8) admet un potentiel, il ne peut admettre d'orbites fermées.*

Exemple 1.8 *Le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = x \cos y, \end{cases} \quad (1.20)$$

n'admet pas d'orbites fermées puisqu'il admet la fonction $V(x, y) = -x \sin(y)$ comme potentiel.

Remarque 1.5 *Malgré que le critère du potentiel est une simple technique de vérification de la non existence de cycle limite, elle reste très limitée en application car la plus part des systèmes dynamiques n'admettent pas de potentiels.*

Critère de la fonction de Lyapounov.

L'idée qui a été développée par Aleksandre Mikhaïlovitch Lyapounov a été d'introduire des fonctions réelles et d'étudier leurs variations le long des trajectoires du système(1.8).

Définition 1.29 Une fonction de Lyapounov est une fonction de classe C^1 à valeurs dans \mathbb{R} telle que :

$$\begin{aligned} V(X_0) = 0 \text{ et } \forall X \neq X_0, V(X) > 0 \\ \forall X \neq X_0, \overrightarrow{\text{grad}} V(X) \dot{X} < 0. \end{aligned}$$

Théorème 1.7 Si un système différentiel admet une fonction de Lyapounov il ne peut admettre d'orbite fermée.

Exemple 1.9 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -2x - y^3. \end{cases} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \text{Posons } V(x, y) &= x^2 + y^2, \\ \overrightarrow{\text{grad}} V(X) \dot{X} &= \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{dV}{dx} \dot{x} + \frac{dV}{dy} \dot{y} \\ &= 2x(-x + 2y) + 2y(-2x - y^3) \\ &= -2(x^2 + y^4). \end{aligned}$$

Remarquons que $V(0, 0) = 0$, $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, $V(x, y) > 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}} V(X) \dot{X} < 0$, alors V est une fonction de Lyapounov et le système (1.21) n'admet pas d'orbite fermée.

Remarque 1.6 La même remarque sur le critère du potentiel reste vraie pour la fonction de Lyapounov, vu que, uniquement pour des cas spécifiques de systèmes dynamiques la détermination de la fonction de Lyapounov est réalisable, mais généralement elle constitue une difficulté majeure.

Critère de de Bendixson-Dulac.

Définition 1.30 Un domaine D de \mathbb{R}^2 est dit connexe s'il est constitué d'un seul morceau.

Définition 1.31 Un domaine D de \mathbb{R}^2 est simplement connexe s'il est connexe et il n'a pas de trous.

Théorème 1.8 [74](Critère de Bendixon).

Soit D un domaine connexe de \mathbb{R}^2 . Si la divergence $\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right)$ est non nulle et de signe constant sur D , alors le système différentiel $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$ n'admet pas de solution périodique entièrement contenue dans D .

Exemple 1.10 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y \\ \dot{y} = y - x, \end{cases} \quad (1.22)$$

$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 3x^2 + 1 > 0$ en tout point de \mathbb{R}^2 , il ne peut donc exister de cycle limite contenu dans \mathbb{R}^2 .

Dulac introduisait une fonction dans le critère de Bendixon, celle ci a permit d'élargir le domaine d'application.

Théorème 1.9 (Critère de Dulac)

Soit D un domaine simplement connexe de \mathbb{R}^2 , et soit Ψ une fonction de classe C^1 sur D . Si la quantité $\left(\frac{\partial(\Psi F)}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi G)}{\partial y}\right)$ est non nulle et de signe constant sur D , alors le système différentiel $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$ n'admet pas de solution périodique entièrement contenue dans D .

Exemple 1.11 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 3y) \\ \dot{y} = y(2 - y - 3x). \end{cases} \quad (1.23)$$

Soit le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$.

Nous avons $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 5 - 5y - 5x$, la quantité $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$ s'annule et change de signe dans D , et le critère de Bendixon ne permet pas de conclure la non existence d'orbite fermée dans D .

Soit la fonction $\Psi(x, y) = \frac{1}{xy}$ alors $\frac{\partial(\Psi F)}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi G)}{\partial y} = -\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$

Donc, pour tout $(x, y) \in D$ la quantité $\frac{\partial(\Psi F)}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi G)}{\partial y}$ est négative et on peut conclure que le système n'admet pas de cycle limite dans le domaine D .

1.9 Critères d'existence de cycle limite.

Maintenant nous allons nous intéresser à la question inverse : comment prouver qu'il en existe une orbite fermée isolée ?.

A partir des critères de Bendixon et Dulac, on peut déjà conclure une condition nécessaire d'existence de solution périodique du système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$ dans un domaine D , c'est lorsque la quantité $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$ s'annule et change de signe dans D , hélas, cette condition n'est pas suffisante.

Théorème de Poincaré-Bendixon dans le plan.

Le théorème suivant est particulièrement important dans l'étude des systèmes dynamiques.

Définition 1.32 *Un domaine compact de \mathbb{R}^2 est un domaine fermé et borné. Fermé signifie que la frontière est incluse. Borné signifie qu'il est limité par des bornes finies.*

Théorème 1.10 (Poincaré-Bendixon) : *Supposons que*

1. *D est une partie compacte du plan,*
2. *$\dot{X} = f(X)$ est un système différentiel de classe C^1 défini sur un ouvert du plan contenant D*
3. *Il y a une trajectoire C qui reste confinée dans D (elle commence dans D et y reste),*
4. *C ne contient aucun équilibre du système différentiel.*

Alors, ou bien C est une orbite fermée, ou bien elle spirale autour d'une orbite fermée. Dans tous les cas D contient une orbite fermée.

Le théorème implique que dans une partie compacte d'un plan de phase (dans \mathbb{R}^2), les possibilités dynamiques sont relativement limitées et il ne peut y avoir de chaos puisque si une trajectoire qui reste confinée dans un domaine fermé borné ne contenant pas d'équilibre, elle doit forcément tendre vers une orbite fermée.

Le théorème indique que si une solution maximale reste bornée, alors soit elle converge vers une limite (un point d'équilibre), soit son comportement asymptotique est celui d'une fonction périodique. Autrement dit, le plan est trop étroit pour admettre comme solutions d'équations de type (1.3), des trajectoires chaotiques.

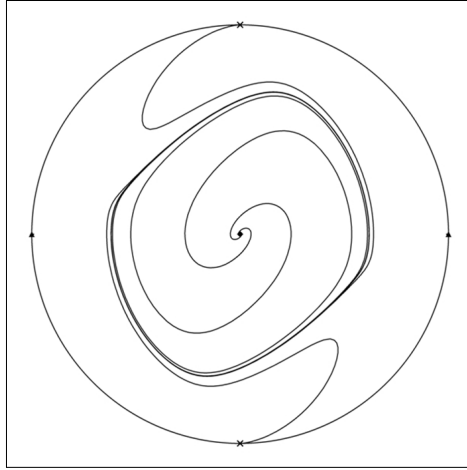


FIG. 1-4 – Cycle limite du système(1.24) avec $\mu = 1$, en utilisant le programme P4.

Exemple 1.12 *On considère le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x \end{cases} \quad (1.24)$$

qui peut être réduit à l'équation de Van der pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (1.25)$$

Historiquement, cette équation est apparue dans l'étude d'un circuit électrique utilisé pour les premières radios. C'est l'équation d'un oscillateur harmonique mais avec un terme d'amortissement non linéaire $\mu(x^2 - 1)\dot{x}$, lorsque $|x| > 1$ ce terme diminue les oscillations et lorsque $|x| < 1$ il les augmente. Intuitivement, on peut alors penser que le système se stabilise à une oscillation autoentretenu où l'énergie dissipée pendant un cycle est composée par celle fournie par le terme non linéaire. Il est démontré[74] que le système(1.20) possède un cycle limite stable pour chaque $\mu > 0$. La figure(1.4) représente le cycle limite du système(1.24) pour $\mu = 1$.

Cycle limite hyperbolique.

Théorème 1.11 [62] Soit $\gamma(t)$ une orbite périodique du système (0.6) de période T . Alors γ est un cycle limite stable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0, \quad (1.26)$$

et un cycle limite instable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt > 0, \quad (1.27)$$

où $\operatorname{div}(F, G) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$.

Dans le cas où la quantité $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$ est nulle, une étude avancée est nécessaire pour déterminer si l'orbite γ est un cycle limite stable, ou un cycle limite instable ou il n'est qu'une orbite périodique qui appartient à une bande continue d'orbites fermées.

Définition 1.33 Si la quantité $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$ est différente de zéro, on dit que le cycle limite est hyperbolique.

Exemple 1.13 soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases} \quad (1.28)$$

Notons que le seul point d'équilibre du système(1.28) est $(0,0)$,

et notons aussi que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 4x^2 + 4y^2 - 2, \quad (1.29)$$

est une expression qui s'annule et change de signe dans \mathbb{R}^2 .

$\gamma(t) = (\cos(t), -\sin(t))$ est une solution périodique du système(1.28) de période 2π .

Calculons maintenant $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) ((\cos(t), -\sin(t))) dt,$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) ((\cos(t), -\sin(t))) dt &= \int_0^{2\pi} (4(\cos(t))^2 + 4(-\sin(t))^2 - 2) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 dt \end{aligned}$$

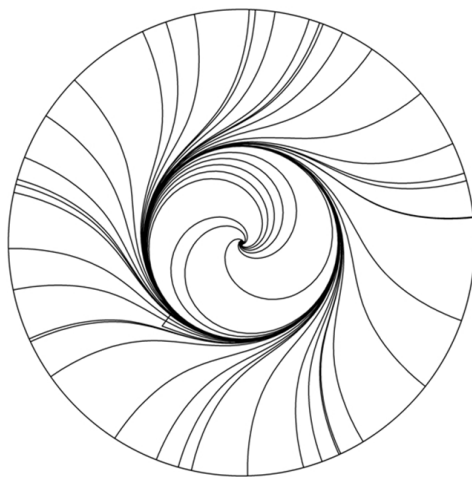


FIG. 1-5 – Cycle limite du système(1.28) en utilisant le programme P4.

$$= 4\pi > 0.$$

Donc le système (1.28) a un cycle limite hyperbolique instable,

$\gamma(t) = (\cos(t), -\sin(t))$. Voir figure(1.5).

Théorème 1.12 [32] Soit le champ de vecteurs $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$ défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x(t), y(t))$ une solution périodique de ce champ de vecteurs de période T , et soit les fonctions $R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $\int_0^T R(x(t), y(t))dt \neq 0$ et $V = V(x, y)$ de classe C^1 , solution de l'équation aux dérivées partielles

$$F \frac{\partial V}{\partial x} + G \frac{\partial V}{\partial y} = RV, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (1.30)$$

Alors la trajectoire fermée $\gamma = \{(x(t), y(t)) \in \Omega : t \in [0, T]\}$ est contenue dans

$\Sigma = \{(x, y) \in \Omega : V(x, y) = 0\}$, et γ n'est pas réduite à un point singulier.

De plus, si le champ de vecteurs $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$ et les fonctions R et V sont analytiques, alors γ est un cycle limite.

Théorème 1.13 Soit le système différentiel autonome $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$, où F et G sont des fonctions de classe C^1 , alors en chaque point (x_0, y_0) il passe une seule trajectoire. De plus, si une trajectoire se recoupe, alors elle est nécessairement une orbite fermée représentant une solution périodique.

Plus précisément, il n'y a que trois types de trajectoires dans le plan de phase pour un système autonome :

- i) Les trajectoires réduites à un point, dites " point singulier " qui correspondent aux solutions constantes ou stationnaires.
- ii) Les trajectoires fermées qui correspondent aux solutions périodiques.
- iii) Les trajectoires qui ne se recoupent pas.

Théorème 1.14 [31] *On considère le système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$ et $\gamma(t)$ une orbite périodique de période $T > 0$. On suppose que $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une courbe invariante avec $\gamma(t) = \{(x, y) \in \Omega \setminus U(x, y) = 0\}$ et $K(x, y) \in C^1$ est le cofacteur donné dans l'équation (1.17), de la courbe invariante $U(x, y) = 0$. On suppose que $p \in \Omega$ tel que $F(p) = 0$ et $\nabla F(p) \neq 0$, alors p est un point singulier du système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$, et*

$$\int_0^T K(\gamma(t))dt = \int_0^T \text{div}(\gamma(t))dt. \quad (1.31)$$

Un jumelage entre les théorèmes cités dans la section d'existence de cycles limites, nous conduit à conclure que :

Si une courbe $\gamma(t) = \{(x, y) \in \Omega \setminus U(x, y) = 0\}$ est une orbite fermée et si elle est invariante pour le système $(\dot{x} = F(x, y), \dot{y} = G(x, y))$ et elle est non singulière (elle ne contient pas de points d'équilibre de ce système) et $\int_0^T \text{div}(\gamma(t))dt \neq 0$ alors $\gamma(t)$ est un cycle limite hyperbolique pour ce système.

Dans le reste de notre travail nous allons se baser sur ces critères pour montrer l'existence d'un ou plusieurs cycles limites pour les systèmes dynamiques étudiés.

Chapitre 2

Systemes différentiels avec cycles limites explicites

2.1 Introduction.

L'un des problèmes importants à étudier dans la théorie qualitative des équations différentielles est la détermination des cycles limites d'un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

où P, Q sont des polynômes réels dont les variables sont x et y .

Dans ce chapitre, nous présenterons trois différentes classes de systèmes différentiels où nous étudierons l'existence et le nombre de cycles limites en donnant leurs formes explicites.

Notons que les résultats de la deuxième et la troisième classes étudiées ont fait les objets des publications suivantes :

A class of differential system with at most four limit cycles, Annals of applied mathematics, 31 :4, 2015, 363-371. [11].

A class of differential system with at most two limit cycles, Global journal of pure and applied Mathematics, vol 11 (4), 2015, 1755-1765. [12].

2.2 Courbe invariante avec un cofacteur de signe constant.

Si une courbe périodique $\gamma(t)$ est invariante pour un système différentiel avec un cofacteur $K(x, y)$ de signe constant pour $(x, y) \in \text{Int}(\gamma(t))$, alors la condition nécessaire $\int_0^T \text{div}(\gamma(t))dt \neq 0$ pour que cette courbe soit un cycle limite hyperbolique sera triviale, puisque $\int_0^T \text{div}(\gamma(t))dt = \int_0^T K(\gamma(t))dt$ et cette intégrale est automatiquement différente de zéro.

Nous considérons le système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = (p(x, y)U_x - m(x, y)U_y)U(x, y) + r(x, y)U_y \\ \dot{y} = (q(x, y)U_y + m(x, y)U_x)U(x, y) - r(x, y)U_x, \end{cases} \quad (2.2)$$

où U, p, q, m, r sont des polynômes de degrés quelconques.

Théorème 2.1 *Si la courbe $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : U(x, y) = 0\}$ présente un nombre fini n de courbes fermées séparées et qui ne coupent pas la courbe $r(x, y) = 0$, $p(x, y)$ et $q(x, y)$ sont tous les deux positifs ou bien tous les deux négatifs pour tout $(x, y) \in \text{Int}(\Gamma)$, alors le système (2.2) admet n cycles limites hyperboliques représentés par la courbe Γ .*

Preuve : Supposons que la courbe Γ présente des parties fermées séparées, qui ne coupent pas la courbe $r(x, y) = 0$, en se basant sur les critères cités ci-dessus, il suffit de montrer que la courbe Γ est invariante et non-singulière pour le système(2.2) et que $\int_0^T \text{div}(\Gamma)dt \neq 0$.

i) Montrons que Γ est non singulière.

Notons que Γ est non-singulière pour le système(2.2) si le système

$$\begin{cases} \dot{x} = (p(x, y)U_x - m(x, y)U_y)U(x, y) + r(x, y)U_y \\ \dot{y} = (q(x, y)U_y + m(x, y)U_x)U(x, y) - r(x, y)U_x \\ U(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

n'admet pas de solution réelle.

Or le système(2.3) se réduit au système

$$\begin{cases} r(x, y)U_y = 0 \\ -r(x, y)U_x = 0 \\ U(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ce système ne peut admettre de solution réelle puisque les deux courbes d'équations $U(x, y) = 0$ et $r(x, y) = 0$ ne se coupent pas.

ii) Montrons que Γ est invariante.

$$\begin{aligned} \text{Nous avons } \frac{dU}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= U_x ((p(x, y)U_x - m(x, y)U_y) U(x, y) + r(x, y)U_y) \\ &\quad + U_y ((q(x, y)U_y + m(x, y)U_x) U(x, y) - r(x, y)U_x) \\ &= U(x, y) (p(x, y)U_x^2 + q(x, y)U_y^2), \end{aligned}$$

alors la courbe Γ est invariante, le cofacteur est $K(x, y) = p(x, y)U_x^2 + q(x, y)U_y^2$.

iii) Montrons que $\int_0^T \text{div}(\Gamma) dt \neq 0$.

A fin de montrer cela nous utilisons le résultat du théorème(1.14)[31]

$$\begin{aligned} \int_0^T \text{div}(\Gamma) dt &= \int_0^T K(x, y) dt \\ &= \int_0^T (p(x, y)U_x^2 + q(x, y)U_y^2) dt. \end{aligned}$$

Comme $p(x, y)$ et $q(x, y)$ sont de même signe pour $(x, y) \in \text{Int}(\Gamma)$ alors l'expression $p(x, y)U_x^2 + q(x, y)U_y^2$ est soit positive, soit négative dans cette région,

alors $\int_0^T (p(x, y)U_x^2 + q(x, y)U_y^2) dt$ est différente de zéro. ■

Exemple 2.1 *Le système*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ((y^2 + 2xy + 2x - 1) - (x^2 + 2yx + 2y - 1)) (x^2 + y^2 + xy^2 + x^2y - x - y - 1) \\ \quad + (y - x^2 - 2) (x^2 + 2yx + 2y - 1) \\ y' = ((x^2 + 2yx + 2y - 1) + (y^2 + 2xy + 2x - 1)) (x^2 + y^2 + xy^2 + x^2y - x - y - 1) \\ \quad - (y - x^2 - 2) (y^2 + 2xy + 2x - 1) \end{array} \right. \quad (2.5)$$

admet un cycle limite représenté par la courbe $x^2 + y^2 + xy^2 + x^2y - x - y - 1 = 0$, voir figure(2.1).

Exemple 2.2 *Le système suivant admet trois cycles limites représentés par la courbe $(x^2 + y^2 - 3)^2 + x^2y - xy^3 = 0$, voir figure(2.2).*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (4x^3 - 4x^2y - x^2 + 7xy^2 + 2xy - 12x - 5y^3 + 12y) \left((x^2 + y^2 - 3)^2 + x^2y - xy^3 \right) \\ \quad - (4x^2y + x^2 - 3xy^2 + 4y^3 - 12y) \\ \dot{y} = (4x^3 + 4x^2y + x^2 + xy^2 + 2xy - 12x + 3y^3 - 12y) \left((x^2 + y^2 - 3)^2 + x^2y - xy^3 \right) \\ \quad + (4x^3 + 4xy^2 + 2xy - 12x - y^3) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

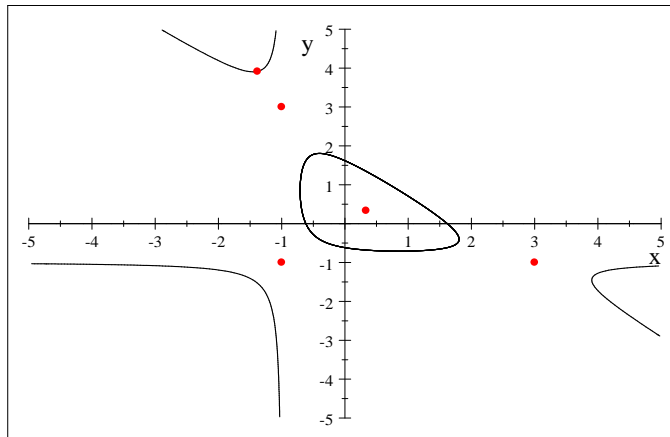


FIG. 2-1 – Cycle limite du système(2.5) avec les points d'équilibre.

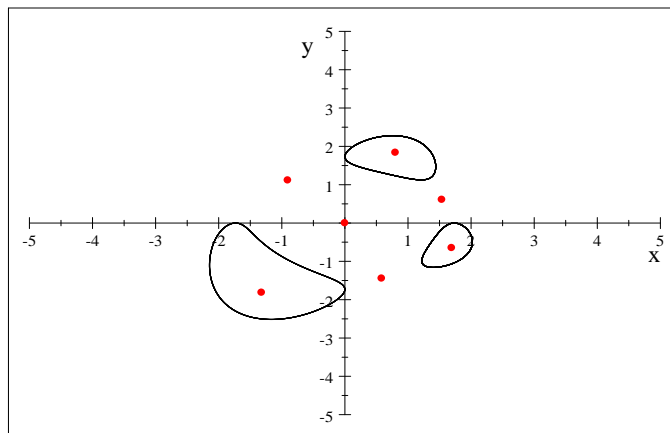


FIG. 2-2 – Cycles limites du système (2.6) avec les points d'équilibre.

2.3 Systèmes différentiels avec au plus quatre cycles limites

Colin Christopher dans son travail [26] a annoncé le théorème suivant

Théorème 2.2 [26] *Soit $U = 0$ une courbe algébrique non singulière de degré m et D un polynôme de degré 1, choisi de telle sorte que la droite d'équation $D = 0$ se situe en dehors de tous les composants fermés de $U = 0$. En choisissant les constantes α et β de sorte que $\alpha D_x + \beta D_y \neq 0$ alors le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha U - DU_y \\ \dot{y} = \beta U + DU_x \end{cases} \quad (2.7)$$

a tous les composants fermés de $U = 0$ comme cycles limites hyperboliques. En outre le système n'a pas d'autres cycles limites.

Nous avons porter un changement sur les critères de C.Christopher, en prenant au lieu des constantes α et β des polynômes de degré 1 et nous avons considéré une courbe de degré 4 qui présente au maximum quatre ovales.

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = (\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1)(ax^4 + bx^2 + cy^4 + dy^2 + h) - (\lambda x + \mu y + \nu)(2cy^3 + dy) \\ \dot{y} = (\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2)(ax^4 + bx^2 + cy^4 + dy^2 + h) + (\lambda x + \mu y + \nu)(2ax^3 + bx) \end{cases} \quad (2.8)$$

Où a, c sont des réels positifs b, d des réels négatifs, $h, \lambda, \mu, \nu, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ des paramètres réels.

La droite d'équation $\lambda x + \mu y + \nu = 0$ ne coupe pas la courbe Γ définie par

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^4 + bx^2 + cy^4 + dy^2 + h = 0\} \quad (2.9)$$

Nous allons montrer que le système (2.8) admet au plus quatres cycles limites, Ce travail a fait l'objet de la publication[11].

Théorème 2.3 [75] (Théorème de Harnack)

Le nombre maximal d'ovales qu'une courbe algébrique de degré n , peut avoir est au plus $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ et lorsque cette borne est atteinte la courbe est dite une M -courbe.

Lemme 2.1 La courbe $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^4 + bx^2 + cy^4 + dy^2 + h = 0\}$, où a, c sont des réels positifs, b, d des réels négatifs et h satisfait $\sup(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c}) < h < \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$ est non-singulière pour le système(2.8) formée par quatre ovales. C'est une M -courbe.

Preuve : Nous prouvons d'abord qu'il n'y a pas de point singulier sur la courbe Γ . Nous rappelons que la courbe Γ est non-singulière pour le système(2.8) si le système suivant n'admet pas de solution réelles.

$$\cdot \begin{cases} ax^4 + bx^2 + cy^4 + dy^2 + h = 0 \\ 2cy^3 + dy = 0 \\ 2ax^3 + bx = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Les points qui annulent la deuxième et la troisième équations du système (2.10) sont :

$$A_1(0, 0), A_2(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{c}d}), A_3(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{c}d}), A_4(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{a}b}, 0), \\ A_5(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{a}b}, 0), A_6(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{a}b}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{c}d}), A_7(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{a}b}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{c}d}) \\ A_8(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{a}b}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{c}d}), A_9(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{a}b}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{-\frac{1}{c}d}).$$

Soit $U(x, y) = ax^4 + bx^2 + cy^4 + dy^2 + h$,

$$U(A_1) = h \neq 0,$$

$$U(A_2) = U(A_3) = h - \frac{1}{4c}d^2 \neq 0 \text{ puisque } h \neq \frac{d^2}{4c},$$

$$U(A_4) = U(A_5) = h - \frac{1}{4a}b^2 \neq 0 \text{ puisque } h \neq \frac{b^2}{4a},$$

$$U(A_6) = U(A_7) = U(A_8) = U(A_9) = h - \frac{1}{4a}b^2 - \frac{1}{4c}d^2 \neq 0 \text{ puisque } h \neq \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c},$$

alors la courbe Γ est non singulière.

Maintenant nous prouvons que Γ est une M -courbe composée de quatre ovales.

Nous considérons l'équation(2.9) sous la forme $cy^4 + dy^2 + (ax^4 + bx^2 + h) = 0$.

Nous résolvons cette équation par rapport à y .

$$\text{Le discriminant } \Delta = -4acx^4 - 4bcx^2 - 4ch + d^2,$$

$$\Delta'_\Delta = 4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2.$$

Notons que lorsque $h > \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$, $\Delta'_\Delta < 0$ et $\Delta < 0$,

dans ce cas il n'existe pas de solution réelle pour l'équation(2.9).

Si $h < \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$ alors $\Delta'_\Delta > 0$ et nous avons

$$x_1^2 = \frac{1}{4ac} (\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} - 2bc),$$

$$x_2^2 = -\frac{1}{4ac} (\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} + 2bc),$$

l'expression $\frac{1}{4ac} (\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} - 2bc)$ est positive,

et si $\frac{d^2}{4c} < h$ l'expression $-\frac{1}{4ac} (\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} + 2bc)$ est aussi positive.

Pour $x \in [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4]$ où

$$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{4ac} (\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} - 2bc)}$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{1}{4ac} (\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} + 2bc)}$$

$$x_3 = \sqrt{-\frac{1}{4ac} (\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} + 2bc)}$$

$$x_4 = \sqrt{\frac{1}{4ac} (\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} - 2bc)}$$

le discriminant Δ est positif, alors

$$y_1^2 = \frac{-d + \sqrt{-4acx^4 - 4bcx^2 - 4ch + d^2}}{2c}, \quad y_2^2 = \frac{-d - \sqrt{-4acx^4 - 4bcx^2 - 4ch + d^2}}{2c}.$$

Vu les conditions sur les paramètres, les expressions $\frac{-d + \sqrt{-4acx^4 - 4bcx^2 - 4ch + d^2}}{2c}$,
 $\frac{-d - \sqrt{-4acx^4 - 4bcx^2 - 4ch + d^2}}{2c}$ sont positives,

alors, il existe quatre solutions réelles dépendantes de y ,

$$y_1 = -\sqrt{\frac{-d + \sqrt{-4acx^4 - 4bcx^2 - 4ch + d^2}}{2c}}, \quad y_2 = -\sqrt{\frac{-d - \sqrt{-4acx^4 - 4bcx^2 - 4ch + d^2}}{2c}},$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{-d - \sqrt{-4acx^4 - 4bcx^2 - 4ch + d^2}}{2c}}, \quad y_4 = \sqrt{\frac{-d + \sqrt{-4acx^4 - 4bcx^2 - 4ch + d^2}}{2c}},$$

et la courbe Γ est formée de huit arcs

$$C_1 = \{(x, y) : x \in [x_1, x_2], y = y_1\}, \quad C_2 = \{(x, y) : x \in [x_3, x_4], y = y_1\},$$

$$C_3 = \{(x, y) : x \in [x_1, x_2], y = y_2\}, \quad C_4 = \{(x, y) : x \in [x_3, x_4], y = y_2\},$$

$$C_5 = \{(x, y) : x \in [x_1, x_2], y = y_3\}, \quad C_6 = \{(x, y) : x \in [x_3, x_4], y = y_3\},$$

$$C_7 = \{(x, y) : x \in [x_1, x_2], y = y_4\}, \quad C_8 = \{(x, y) : x \in [x_3, x_4], y = y_4\},$$

et comme $y_1(x_1) = y_2(x_1) = y_1(x_2) = y_2(x_2) = y_1(x_3) = y_2(x_3) = y_1(x_4) = y_2(x_4) =$
 $-\sqrt{-\frac{1}{2c}d}$

$$y_3(x_1) = y_4(x_1) = y_3(x_2) = y_4(x_2) = y_3(x_3) = y_4(x_3) = y_3(x_4) = y_4(x_4) = \sqrt{-\frac{1}{2c}d}$$

alors la courbe Γ est composée de quatre ovales symétriques par rapport aux axes,

$$O_1 = C_1 \cup C_3, \quad O_2 = C_2 \cup C_4,$$

$$O_3 = C_5 \cup C_7, \quad O_4 = C_6 \cup C_8. \quad \blacksquare$$

Remarque 2.1 Avec le même processus du lemme1, nous prouvons que la courbe Γ est composée de :

un ovale si $h \leq 0$,

deux ovales où un entour l'autre si $0 < h < \inf(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c})$,

deux ovales symétriques par rapport à l'un des axes si $\inf(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c}) < h < \sup(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c})$.

Théorème 2.4 Le système(2.8), lorsque a, c sont des réels positifs, b, d des réels négatifs,

$\lambda, \mu, \nu, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ des réels satisfaisant

$$\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2 = 0, \quad \lambda\mu_1 - \mu\lambda_1 = 0, \quad \lambda\nu_1 - \nu\lambda_1 + \mu\nu_2 - \nu\mu_2 \neq 0,$$

admet exactement :

i) quatre cycles limites si $\sup(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c}) < h < \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$,

ii) deux cycles limites symétriques par rapport à l'un des deux axes si

$$\inf(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c}) < h < \sup(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c}),$$

iii) deux cycles limites où l'un entour l'autre si $0 < h < \inf(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c})$,

iv) un cycle limite si $h \leq 0$.

Les cycles limites sont hyperboliques représentés par la courbe Γ .

Preuve : Sachant que Γ est non-singulière composée de :

i) quatre ovales si $\sup(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c}) < h < \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$,

ii) deux ovales symétriques par rapport à l'un des axes si $\inf(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c}) < h < \sup(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c})$,

iii) deux ovales où l'un entour l'autre si $0 < h < \inf(\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c})$,

iv) un oval si $h \leq 0$.

Il reste à monter que Γ est invariante pour le système(2.8) et $\int_0^T \text{div}(\Gamma)dt \neq 0$.

a) Montrons que Γ est invariante pour le système(2.8).

$$U(x, y) = ax^4 + bx^2 + cy^4 + dy^2 + h$$

$$\frac{dU}{dt} = U_x \dot{x} + U_y \dot{y}$$

$$= ((\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1)(4ax^3 + 2bx) + (\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2)(4cy^3 + 2dy))U,$$

alors Γ est invariante pour le système(2.8) et le cofacteur est

$$K(x, y) = (\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1)(4ax^3 + 2bx) + (\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2)(4cy^3 + 2dy).$$

b) Montrons que $\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma) dt \neq 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(\Gamma) dt &= \int_0^T K(x(t), y(t)) dt \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{(\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1)(4ax^3 + 2bx)}{(\lambda x + \mu y + \nu)(2ax^3 + bx)} dy + \oint_{\Gamma} \frac{(\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2)(4cy^3 + 2dy)}{-(\lambda x + \mu y + \nu)(2cy^3 + dy)} dx \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{2(\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1)}{(\lambda x + \mu y + \nu)} dy - \oint_{\Gamma} \frac{2(\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2)}{(\lambda x + \mu y + \nu)} dx. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green.

$$\oint_{\Gamma} V(x, y) dy + W(x, y) dx = \int \int_{\operatorname{int}(\Gamma)} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) dx dy,$$

où $\operatorname{int}(\Gamma)$ désigne l'intérieur de Γ ,

$$\frac{d\left(\frac{\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1}{\lambda x + \mu y + \nu}\right)}{dx} = -\frac{1}{(\nu + x\lambda + y\mu)^2} (\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1 + y\lambda\mu_1 - y\mu\lambda_1)$$

$$\frac{d\left(\frac{\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2}{\lambda x + \mu y + \nu}\right)}{dy} = -\frac{1}{(\nu + x\lambda + y\mu)^2} (\mu\nu_2 - \nu\mu_2 - x\lambda\mu_2 + x\mu\lambda_2)$$

$$-\frac{1}{(\nu + x\lambda + y\mu)^2} (\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1 + y\lambda\mu_1 - y\mu\lambda_1) + \frac{1}{(\nu + x\lambda + y\mu)^2} (\mu\nu_2 - \nu\mu_2 - x\lambda\mu_2 + x\mu\lambda_2) =$$

$$-\frac{1}{(\nu + x\lambda + y\mu)^2} (\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1 - \mu\nu_2 + \nu\mu_2 + x\lambda\mu_2 - x\mu\lambda_2 + y\lambda\mu_1 - y\mu\lambda_1)$$

$$\text{alors } \oint_{\Gamma} \frac{(\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1)}{(\lambda x + \mu y + \nu)} dy - \oint_{\Gamma} \frac{(\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2)}{(\lambda x + \mu y + \nu)} dx =$$

$$- \int \int_{\operatorname{int}(\Gamma)} \left(\frac{1}{(\nu + x\lambda + y\mu)^2} (\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1 - \mu\nu_2 + \nu\mu_2 + x(\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2) + y(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)) \right) dx dy$$

Si $\lambda\mu_2 - \mu\lambda_2 = 0$ et $\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1 = 0$

$$\int_0^T K(x, y) dt = -2 \int \int_{\operatorname{int}(\Gamma)} \left(\frac{1}{(\nu + x\lambda + y\mu)^2} (\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1 + \mu\nu_2 - \nu\mu_2) \right) dx dy$$

si en plus $\lambda\nu_1 - \nu\lambda_1 + \mu\nu_2 - \nu\mu_2 \neq 0$ alors, l'intégrale $\int_0^T K(x, y) dt$ est différente de zéro. ■

Exemple 2.3 *Un système quartique avec quatre cycles limites.*

Soit $a = 6$, $b = -12$, $c = 2$, $d = -4$, $h = 7$, $\lambda_1 = \mu_1 = \lambda_2 = \mu_2 = \nu = 0$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$, $\lambda = \frac{-1}{4}$, $\mu = 1$.

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 12x^4 - 24x^2 - 4xy^3 + 4xy + 5y^4 - 9y^2 + 14 \\ \dot{y} = 18x^4 - 3x^3y - 24x^2 + 3xy + 2y^4 - 4y^2 + 7 \end{cases} \quad (2.11)$$

admet quatre cycles limites hyperboliques représentés par la courbe $6x^4 - 12x^2 + 2y^4 - 4y^2 + 7 = 0$.

Cette courbe est non-singulière pour le système (2.11), et le système admet huit points

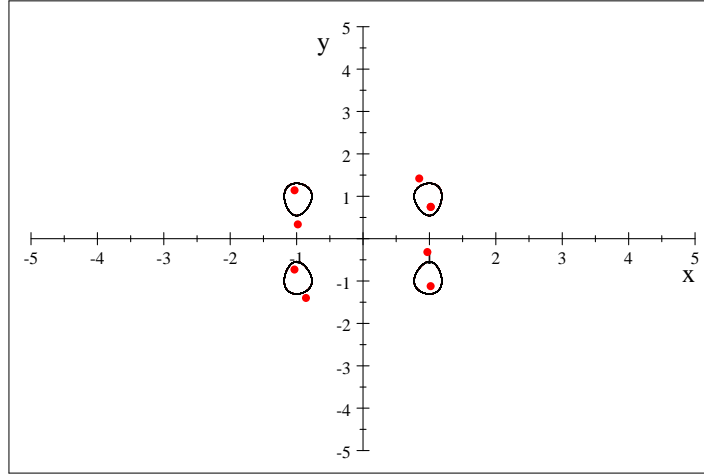


FIG. 2-3 – Cycles limites du système(2.11) avec les points d'équilibre.

singuliers, quatre sont des points selle et les autres sont des foyers stables ou bien instables.

La courbe est invariante, et le cofacteur est $K(x, y) = 48x^3 - 48x + 8y^3 - 8y$

$$\int_0^T K(x, y) dt \approx 1.7.$$

Chaque cycle limite entoure soit un foyer stable, soit un foyer instable, voir figure 2.3.

Exemple 2.4 *Système quintique avec deux cycles limites séparées.*

$a = 3, b = -5, c = 1, d = -4, h = 3, \lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = 1, \lambda_2 = \mu_2 = 2, \nu_2 = 3,$
 $\lambda = \mu = -2, \nu = +8.$

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^5 + 3x^4y + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2y - 5x^2 + xy^4 + 4xy^3 - 4xy^2 \\ \quad - 8xy + 3x + y^5 + 5y^4 - 20y^3 - 12y^2 + 35y + 3 \\ \dot{y} = 6x^5 + 6x^4y - 3x^4 - 12x^3y + 38x^3 - 10x^2y - 5x^2 + 2xy^4 \\ \quad - 8xy^2 + 10xy - 34x + 2y^5 + 3y^4 - 8y^3 - 12y^2 + 6y + 9 \end{cases} \quad (2.12)$$

admet deux cycles limites hyperboliques représentés par la courbe

$$3x^4 - 5x^2 + y^4 - 4y^2 + 3 = 0.$$

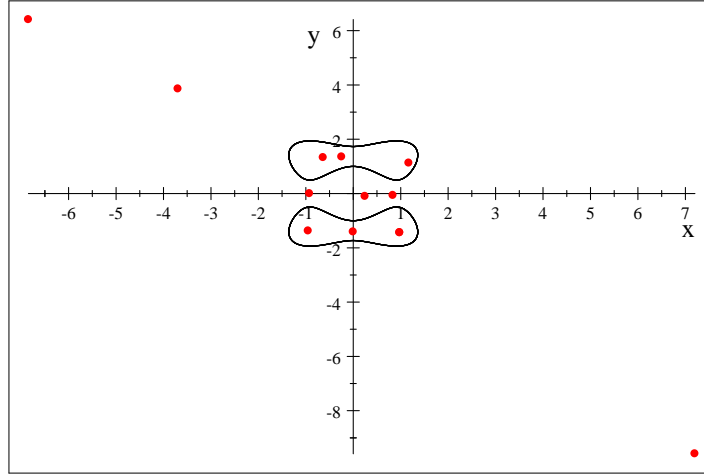


FIG. 2-4 – Cycles limites du système(2.12) avec les points d'équilibre.

Cette courbe est non-singulière pour le système (2.12), et ce système admet douze points d'équilibre, six points selle, quatre foyers stables, un foyer instable et un nœud instable.

La courbe est invariante, le cofacteur est $K(x, y) = 12x^4 + 12x^3y + 12x^3 - 10x^2 + 8xy^3 - 26xy - 10x + 8y^4 + 12y^3 - 16y^2 - 24y$ et $\int_0^T K(x, y)dt \approx 18.4$.

Chaque cycle limite entoure un point selle et deux foyers stables. Voir figure2.4.

Exemple 2.5 Un système quintique avec deux cycles limites où l'un entoure l'autre. soit $a = 1, b = -3, c = 1, d = -4, h = 1, \lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = 1, \lambda_2 = \mu_2 = \nu_2 = 1, \lambda = \mu = 1, \nu = 4$.

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^5 + x^4y + x^4 - 3x^3 - 3x^2y - 3x^2 + xy^4 - 2xy^3 - 4xy^2 \\ \quad + 4xy + x + y^5 - y^4 - 12y^3 + 17y + 1 \\ \dot{y} = x^5 + x^4y + 3x^4 + 2x^3y + 5x^3 - 3x^2y - 6x^2 + xy^4 - 4xy^2 \\ \quad - 3xy - 11x + y^5 + y^4 - 4y^3 - 4y^2 + y + 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

admet deux cycles limites hyperboliques représentés par la courbe

$$x^4 - 3x^2 + y^4 - 4y^2 + 1 = 0.$$

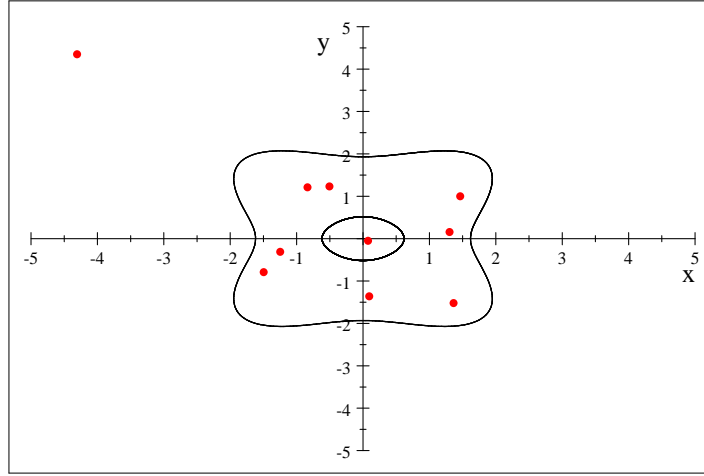


FIG. 2-5 – Cycles limites du système(2.13) avec points d'équilibre.

Le système(2.13) admet dix points singuliers, cinq points selle, quatre foyers stables et un foyer instable, neuf de ces points sont à l'intérieur des cycles limites, le point à l'extérieur est un point selle, et le point à l'intérieur du petit cycle est un foyer instable, voir figure 2.5.

Exemple 2.6 *Un système quintique avec un cycle limite.*

$a = 1, b = -1, c = 1, d = -1, h = -1, \lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = 1, \lambda_2 = \mu_2 = 2, \nu_2 = 1, \lambda = \mu = 1, \nu = 3.$

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^5 + x^4y + x^4 - x^3 - x^2y - x^2 + xy^4 - 2xy^3 - xy^2 \\ \quad + xy - x + y^5 - y^4 - 7y^3 + 2y - 1 \\ \dot{y} = 2x^5 + 2x^4y + 3x^4 + 2x^3y + 4x^3 - 2x^2y - 2x^2 + 2xy^4 \\ \quad - 2xy^2 - xy - 5x + 2y^5 + y^4 - 2y^3 - y^2 - 2y - 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

admet un cycle limite hyperbolique représenté par la courbe $x^4 - x^2 + y^4 - y^2 - 1 = 0.$

Ce système admet quatre points d'équilibre, deux points selle et deux foyers stables, voir figure2.6.

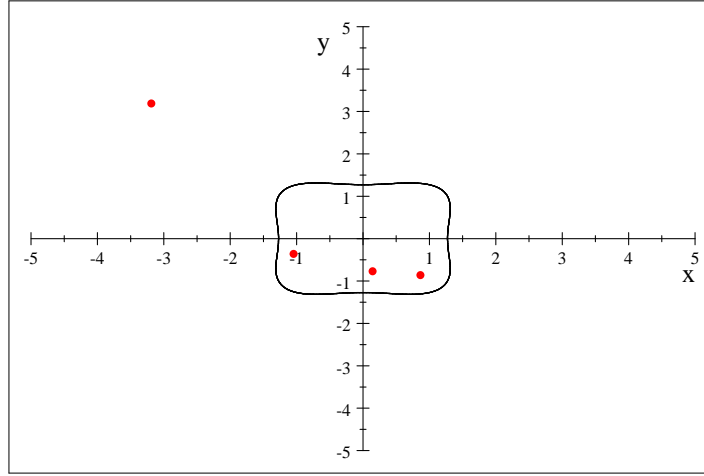


FIG. 2-6 – Cycle limite du système(2.14) avec les points d'équilibre.

2.4 Systèmes différentiels avec au plus deux cycles limites

Nous considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = V(x, y)U(x, y) - U_y(x, y) \\ \dot{y} = W(x, y)U(x, y) + U_x(x, y) \end{cases} \quad (2.15)$$

où $V(x, y)$ et $W(x, y)$ sont des polynômes de degrés quelconques.

$U(x, y) = ax^n + bx^{n-4} + cy^2 + dy + h$ avec a, c des réels positifs et b un réel négatif.

Nous allons montrer que le système (2.15) admet au plus deux cycles limites si certaines conditions sur les paramètres sont vérifiées. Ce travail a fait l'objet de la publication[12].

Théorème 2.5 *Le système (2.15), lorsque a, c sont des réels positifs, b un réel négatif, et $\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} > 0$ admet exactement :*

un cycle limite si $h < \frac{d^2}{4c}$, lorsque n est un nombre pair supérieur ou égale à quatre,
deux cycles limites si $\frac{d^2}{4c} < h < \frac{d^2}{4c} + \alpha_n$, lorsque n est pair supérieur à quatre,
un cycle limite si $h \in \left] \frac{d^2}{4c} - \alpha_n, \frac{d^2}{4c} \left[\cup \left] \frac{d^2}{4c}, \frac{d^2}{4c} + \alpha_n \left[$, lorsque n est impair supérieur à cinq,

un cycle limite si $\frac{d^2}{4c} - \alpha_n < h < \frac{d^2}{4c} + \alpha_n$ lorsque $n = 5$,
où

$$\alpha_n = 4 \left(\frac{n-4}{a} \right)^{\frac{n}{4}-1} \left(\frac{-b}{n} \right)^{\frac{n}{4}}. \quad (2.16)$$

Les cycles limites sont hyperboliques représentés par la courbe Γ .

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^n + bx^{n-4} + cy^2 + dy + h = 0\} \quad (2.17)$$

Preuve : Il suffit de montrer que Γ est non-singulière pour le système (2.15) composée d'ovales, c'est aussi une courbe invariante pour ce système et $\int_0^T \text{div}(\Gamma)dt$ est différente de zéro.

i) Γ est non-singulière pour le système (2.15).

Pour cela il suffit de montrer que le système

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-4} + cy^2 + dy + h = 0 \\ 2cy + d = 0 \\ anx^{n-1} + b(n-4)x^{n-5} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

n'admet pas de solutions réelles.

Les points critiques qui annulent la deuxième et la troisième équation du système(2.18) sont $A_1 \left(0, \frac{-d}{2c} \right)$, $A_2 \left(\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, \frac{-d}{2c} \right)$, $A_3 \left(-\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, \frac{-d}{2c} \right)$,

mais

$$U(A_1) = -\frac{1}{4c} (d^2 - 4ch) \neq 0 \text{ puisque } h \neq \frac{d^2}{4c} \text{ pour } n \neq 5,$$

et lorsque $n = 5$ les seuls points critiques sont A_2 et A_3 .

$$U(A_2) = U(A_3) = -4 \left(\frac{a}{n-4} \right)^{1-\frac{n}{4}} \left(\frac{-b}{n} \right)^{\frac{n}{4}} - \frac{d^2}{4c} + h = -\alpha_n - \frac{d^2}{4c} + h \neq 0 \text{ puisque } h \neq \frac{d^2}{4c} + \alpha_n$$

Notons que lorsque $n = 4$, le seul point critique est A_1 .

ii) Γ contient un ou deux ovales

Nous considérons l'équation $U(x, y) = 0$ sous la forme

$$cy^2 + dy + (ax^n + bx^{n-4} + h) = 0, n \geq 4 \quad (2.19)$$

Le discriminant $\Delta = -4c(ax^n + bx^{n-4} + h) + d^2$

$$\frac{d(\Delta(x))}{dx} = -4cx^{n-5} (anx^4 + b(n-4))$$

a fin d'étudier le signe de la dérivée nous distinguons deux cas :

1) n est un nombre impair.

$\frac{d(\Delta(x))}{dx}$ est positive si $x \in \left] -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[$

et négative si $x \in \left] -\infty, -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[\cup \left] \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, +\infty \right[$

$\Delta\left(-\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}\right) = -4c(\alpha_n + h) + d^2$ et $\Delta\left(\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}\right) = -4c(-\alpha_n + h) + d^2$,

lorsque $h \in \left] \frac{d^2}{4c} - \alpha_n, \frac{d^2}{4c} \right[\cup \left] \frac{d^2}{4c}, \frac{d^2}{4c} + \alpha_n \right[$, $4c(\alpha_n + h) + d^2 < 0$
et $-4c(-\alpha_n + h) + d^2 > 0$.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, nous concluons que l'équation $\Delta(x) = 0$ admet deux solutions réelles

$x_1 \in \left] -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[$, $x_2 \in \left] \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, +\infty \right[$

et nous concluons aussi que $\forall x \in]x_1, x_2[, \Delta(x) > 0$,

alors l'équation(2.19) admet deux solutions dépendant de y ,

$y_1 = \frac{-d - \sqrt{-4c(ax^n + bx^{n-4} + h) + d^2}}{2c}$, $y_2 = \frac{-d + \sqrt{-4c(ax^n + bx^{n-4} + h) + d^2}}{2c}$.

Notons que $\Delta(x_1) = \Delta(x_2) = 0$ et $y_1(x_1) = y_2(x_1)$, $y_1(x_2) = y_2(x_2)$.

D'un autre coté

$x \rightarrow y_1(x)$ est une fonction décroissante pour $x \in \left] x_1, \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[$ et croissante pour
 $x \in \left] \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, x_2 \right[$,

$x \rightarrow y_2(x)$ est une fonction croissante pour $x \in \left] x_1, \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[$ et décroissante pour
 $x \in \left] \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, x_2 \right[$,

alors pour $x \in [x_1, x_2]$ la courbe Γ est formée d'un ovale.

On remarque que lorsque $h < \frac{d^2}{4c} - \alpha_n$ ou $h \geq \frac{d^2}{4c} + \alpha_n$ la courbe Γ ne peut pas présenter d'ovale, et lorsque $h = \frac{d^2}{4c} - \alpha_n$ elle à la forme d'une strophoid.

2) n est un nombre pair.

$\frac{d(\Delta(x))}{dx}$ est positive pour $x \in \left] -\infty, -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[\cup \left] 0, \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[$,

et négative pour $x \in \left] -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, 0 \right[\cup \left] \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, +\infty \right[$,

$\Delta\left(-\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}\right) = \Delta\left(\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}\right) = -4c(-\alpha + h) + d^2$, $\Delta(0) = -4ch + d^2$.

Si $\frac{d^2}{4c} < h < \frac{d^2}{4c} + \alpha$, alors $-4c(-\alpha_n + h) + d^2 > 0$ et $-4ch + d^2 < 0$.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, nous concluons que l'équation $\Delta(x) = 0$ admet quatre solutions réelles

$$x_1 \in \left] -\infty, -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[, x_2 \in \left] -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, 0 \right[,$$

$$x_3 \in \left] 0, \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[, x_4 \in \left] \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, +\infty \right[$$

et nous concluons aussi que $\forall x \in]x_1, x_2[\cup]x_3, x_4[$, $\Delta(x) > 0$,

alors l'équation(2.19) admet deux solutions réelles qui dépendent de y ,

$$y_1 = \frac{-d - \sqrt{-4c(ax^n + bx^{n-4} + h) + d^2}}{2c} , y_2 = \frac{-d + \sqrt{-4c(ax^n + bx^{n-4} + h) + d^2}}{2c} .$$

Notons que $y_1(x_1) = y_2(x_1)$, $y_1(x_2) = y_2(x_2)$, $y_1(x_3) = y_2(x_3)$, $y_1(x_4) = y_2(x_4)$,

$x \rightarrow y_1(x)$ est une fonction décroissante pour $x \in \left] x_1, -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[\cup \left] x_3, \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[$

et croissante pour $x \in \left] -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, x_2 \right[\cup \left] \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, x_4 \right[$,

$x \rightarrow y_2(x)$ est une fonction croissante pour $x \in \left] x_1, -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[\cup \left] x_3, \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[$

et décroissante pour $x \in \left] -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, x_2 \right[\cup \left] \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, x_4 \right[$,

alors la courbe Γ est composée de deux ovales, l'un pour $x \in [x_1, x_2]$ et l'autre pour $x \in [x_3, x_4]$.

Si $h < \frac{d^2}{4c}$, $-4c(-\alpha_n + h) + d^2 > 0$ et $-4ch + d^2 > 0$,

dans ce cas l'équation $\Delta(x) = 0$ admet deux solutions réelles.

$$x_1 \in \left] -\infty, -\sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}} \right[, x_2 \in \left] \sqrt[4]{\frac{-b(n-4)}{an}}, +\infty \right[$$

et $\forall x \in]x_1, x_2[$, $\Delta(x) > 0$, alors l'équation(2.19) admet deux solutions réelles dépendant de y ,

nous concluons comme précédemment que la courbe Γ est composée d'un ovale.

Notons que lorsque $h \geq \frac{d^2}{4c} + \alpha_n$ la courbe Γ ne peut pas présenter d'ovale

et lorsque $h = \frac{d^2}{4c}$, elle a la forme d'une lemniscate.

Pour le cas spéciale où $n = 4$, la courbe Γ présente un ovale si $h < \frac{d^2}{4c}$,

et lorsque $h \geq \frac{d^2}{4c}$ elle ne peut pas présenter d'ovale.

ii) Montrons que Γ est courbe invariante pour le système(2.15) et $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt$ est non nulle.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= U_x(x, y)\dot{x} + U_y(x, y)\dot{y} \\ &= U(x, y) (V(x, y)U_x(x, y) + W(x, y)U_y(x, y)) . \end{aligned}$$

Le cofacteur est $K(x, y) = V(x, y)U_x(x, y) + W(x, y)U_y(x, y)$.

Pour $n = 4$, $K(x, y) = 4ax^3V(x, y) + (d + 2cy)W(x, y)$.

Pour $n > 4$, $K(x, y) = (x^{n-5}(anx^4 + b(n-4)))V(x, y) + (d + 2cy)W(x, y)$.

Il reste à montrer que $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt \neq 0$.

Rappelons que $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt = \int_0^T K(x(t), y(t))dt$,

$$\begin{aligned} \int_0^T K(x(t), y(t))dt &= \oint_{\Gamma} \frac{V(x,y)U_x(x,y)}{U_x(x,y)} dy + \oint_{\Gamma} \frac{W(x,y)U_y(x,y)}{-U_y(x,y)} dx \\ &= \oint_{\Gamma} V(x, y)dy - \oint_{\Gamma} W(x, y)dx. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green

$$\oint_{\Gamma} V(x, y)dy - \oint_{\Gamma} W(x, y)dx = \int \int_{\text{int}(\Gamma)} \left(\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} \right) dx dy$$

et comme $\forall (x, y) \in \text{int}(\Gamma)$, l'expression $\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}$ est positive alors $\int_0^T K(x(t), y(t))dt$ est différente de zéro. ■

Exemple 2.7 *Un système quintique avec un cycle limite.*

soit $n = 4, a = 1, b = 0, c = 1, d = -4, h = 3, V(x, y) = x - y - 1, W(x, y) = x + y + 1$.

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^5 - x^4y - x^4 + xy^2 - 4xy + 3x - y^3 + 3y^2 - y + 1 \\ \dot{y} = x^5 + x^4y + x^4 + 4x^3 + xy^2 - 4xy + 3x + y^3 - 3y^2 - y + 3 \end{cases} \quad (2.20)$$

admet un cycle limite hyperbolique représenté par la courbe d'équation $x^4 + y^2 - 4y + 3 = 0$.

La courbe est non singulière pour le système(2.20), et ce système admet trois points singuliers, un point selle, un foyer stable et un foyer instable.

Le cycle limite entoure le foyer stable voir figure 2.7.

Exemple 2.8 *Un système septique avec un cycle limite.*

Soit $n = 5, a = 1, b = -3, c = 1, d = -3, h = 3, V(x, y) = 2xy + x, W(x, y) = -y^2 + y + 1$

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^6y + x^6 - 6x^2y - 3x^2 + 2xy^3 - 5xy^2 + 3xy + 3x - 2y + 3 \\ \dot{y} = -x^5y^2 + x^5y + x^5 + 5x^4 + 3xy^2 - 3xy - 3x - y^4 + 4y^3 - 5y^2 \end{cases} \quad (2.21)$$

admet un cycle limite hyperbolique représenté par la courbe $x^5 - 3x + y^2 - 3y + 3 = 0$.

La courbe est non singulière pour le système(2.21), et ce système admet cinq points d'équilibre, quatre sont des points selle et le cinquième qui se trouve à l'intérieur du cycle limite est un foyer stable. voir figure 2.8.

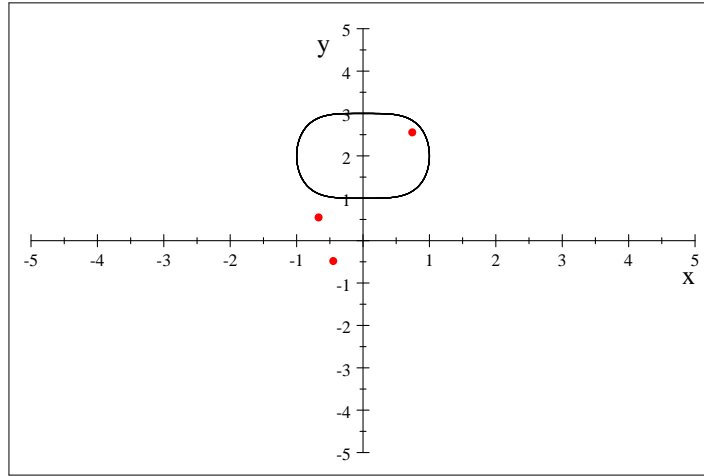


FIG. 2-7 – Cycle limite du système(2.20) avec les points d'équilibre.

Exemple 2.9 *Un système septique avec deux cycles limites.*

Soit $n = 6$, $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$, $d = -4$, $h = 5$, $V(x, y) = x$, $W(x, y) = y$

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^7 - 3x^3 + xy^2 - 4xy + 5x - 2y + 4 \\ \dot{y} = x^6y + 6x^5 - 3x^2y - 6x + y^3 - 4y^2 + 5y \end{cases} \quad (2.22)$$

admet deux cycles limites hyperboliques représentés par la courbe $x^6 - 3x^2 + y^2 - 4y + 5 = 0$, qui est non-singulière pour le système(2.22).

Ce système admet trois points d'équilibre, deux foyer stables à l'intérieur des cycles limites et un point selle à l'extérieur. Voir figure 2.9.

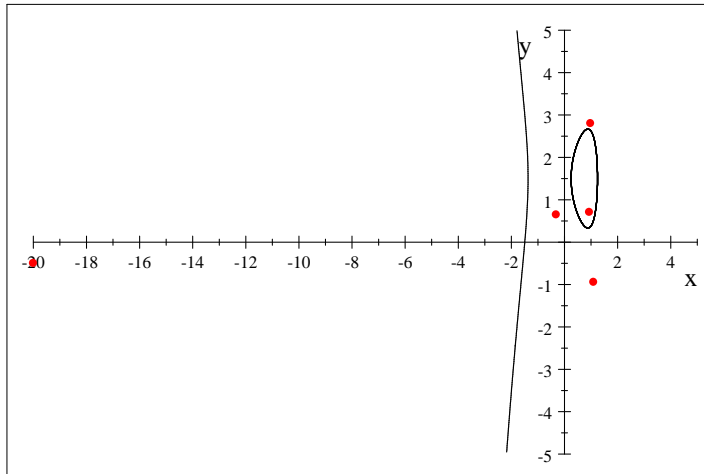


FIG. 2-8 – Cycle limites du système(2.21) avec les points d'équilibre.

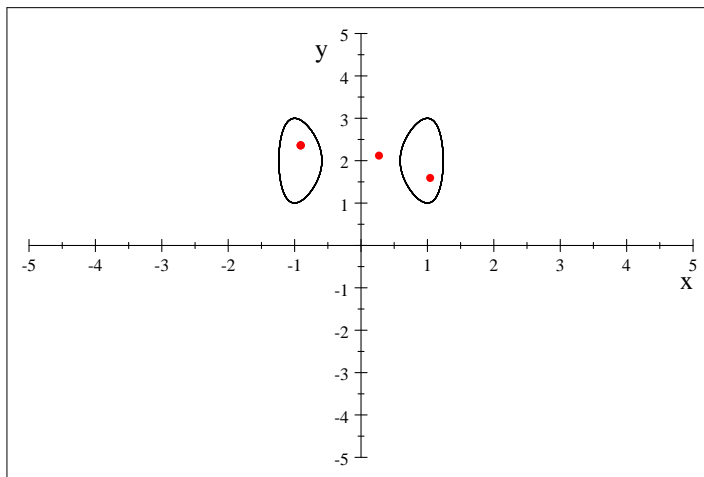


FIG. 2-9 – Cycles limites du système(2.22) avec les points d'équilibre.

Chapitre 3

Sur quelques classes de systèmes de Kolmogorov avec cycles limites algébriques

3.1 Introduction

Le modèle de dynamiques de populations de Lotka et Voltéra décrit les interactions entre une population de proies et une population de prédateurs : les variables d'état sont x le nombre de proies et y le nombre de prédateurs. On suppose qu'en l'absence de prédateurs, la population de proies croît exponentiellement avec un exposant $a > 0$ et qu'en l'absence de proies, la population de prédateurs décroît exponentiellement avec un exposant $-c < 0$. Quand les deux populations coexistent, on suppose que le nombre de proies décroît et le nombre de prédateurs croît de façon proportionnelle au produit xy avec des facteurs $-b < 0$ et $d > 0$ respectivement. On obtient donc le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(-c + dx) \end{cases}, \text{ avec } (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), x_0 > 0, y_0 > 0. \quad (3.1)$$

Les deux points d'équilibre du système(3.1) sont $(0, 0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. le premier point est un nœud instable et le deuxième, dans le quadrant réaliste est de type centre entouré par une bande de courbes fermées, alors le modele de lotka-voltéra ne présente pas de cycle limite.

Andreï Kolmogorov a généralisé le formalisme introduit par Lotka-Voltéra en introduisant le type de système

$$\begin{cases} \dot{x} = xF(x, y) \\ \dot{y} = yG(x, y), \end{cases} \quad (3.2)$$

avec les conditions suivantes sur les fonctions F et G supposées de classe C^1 .

$$\frac{\partial F}{\partial y} < 0, \frac{\partial G}{\partial y} < 0, \frac{\partial F}{\partial x} < 0 \text{ pour } x \text{ grand, } \frac{\partial G}{\partial x} > 0.$$

Ces conditions émergent lorsqu'on impose des contraintes naturelles à l'interaction dynamique entre populations. En effet, les deux premières conditions résultent de l'hypothèse que si le nombre de prédateurs croît, alors le taux d'accroissement des deux populations décroît. Les deux dernières conditions suffisent pour garantir l'existence et l'unicité d'un état d'équilibre, où les deux populations coexistent.

Notre contribution dans ce chapitre consiste en la présentation de quelques classes de systèmes différentiels de type de Kolmogorov, possédant des cycles limites algébriques hyperboliques, dont on peut déterminer leurs expressions explicites.

Notons que nous considérons uniquement F, G des fonctions de classe C^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2 .

3.2 Systèmes de Kolmogorov avec au plus quatre cycles limites

Pour les deux classes suivantes, nous ne limitons pas au quadrant positif

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } y > 0\}$, mais nous considérons tout l'espace \mathbb{R}^2 comme plan de travail.

Théorème 3.1 *Nous considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = x((xy + P(y))(ax^{2n} + bx^n + cy^{2m} + dy^m + h) - dmy^m - 2cm y^{2m}) \\ \dot{y} = y((xy + Q(x))(ax^{2n} + bx^n + cy^{2m} + dy^m + h) + bnx^n + 2anx^{2n}), \end{cases} \quad (3.3)$$

où a, c sont des réels positifs, b, d des réels négatifs, h satisfait

$$\max \left\{ \frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c} \right\} < h < \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c},$$

$P(y)$ et $Q(x)$ sont des polynômes ou plus générale sont des fonctions analytiques, $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Le système (3.3) admet :

un cycle limit lorsque n et m sont des nombres impairs,

deux cycles limites lorsque l'un des nombres n et m est impair et l'autre est pair,

quatre cycles limites lorsque n et m sont des nombres pairs.

Les cycles limites sont hyperboliques représentés par la courbe

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^{2n} + bx^n + cy^{2m} + dy^m + h = 0, (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}. \quad (3.4)$$

Preuve : Nous allons montrer que Γ est non-singulière et invariante pour le système(3.3), composée d'ovales et $\int_0^T \text{div}(\Gamma)dt \neq 0$.

i) La courbe Γ est non-singulière pour le système(3.3) composée d'ovales.

Rappelons que la courbe Γ est non-singulière pour le système(3.3) si le système suivant n'a pas de solution réelle.

$$\cdot \begin{cases} ax^{2n} + bx^n + cy^{2m} + dy^m + h = 0 \\ -mxy^m (d + 2cy^m) = 0 \\ nyx^n (b + 2ax^n) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Notons d'abord que Γ ne coupe pas les axes puisque

$$cy^{2m} + dy^m + h \neq 0 \text{ vu que } h > \frac{d^2}{4c}$$

$$\text{et } ax^{2n} + bx^n + h \neq 0 \text{ vu que } h > \frac{b^2}{4a},$$

alors les seuls points critiques qui peuvent être des points d'équilibre sont :

$A_1 \left(-\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}}, -\sqrt[m]{\frac{-d}{2c}} \right), A_2 \left(-\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}}, \sqrt[m]{\frac{-d}{2c}} \right), A_3 \left(\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}}, -\sqrt[m]{\frac{-d}{2c}} \right), A_4 \left(\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}}, \sqrt[m]{\frac{-d}{2c}} \right)$ lorsque m et n sont pairs,

$A_4 \left(\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}}, \sqrt[m]{\frac{-d}{2c}} \right)$ lorsque m et n sont impairs,

$A_2 \left(-\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}}, \sqrt[m]{\frac{-d}{2c}} \right), A_4 \left(\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}}, \sqrt[m]{\frac{-d}{2c}} \right)$ lorsque m est impair et n est pair,

$A_3 \left(\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}}, -\sqrt[m]{\frac{-d}{2c}} \right), A_4 \left(\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}}, \sqrt[m]{\frac{-d}{2c}} \right)$ lorsque m est pair et n est impair,

et comme $h \neq \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$, alors tous ces points n'appartiennent pas à Γ , donc Γ est une courbe non-singulière pour le système(3.3).

Montrons maintenant que la courbe Γ est composée d'ovales.

Nous considérons l'équation(3.4) sous la forme

$$cz^2 + dz + (ax^{2n} + bx^n + h) = 0 \text{ où } z = y^m. \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Le discriminant } \Delta &= d^2 - 4c(ax^{2n} + bx^n + h) \\ &= -4acv^2 - 4bcv + d^2 - 4ch \text{ où } v = x^n, \end{aligned}$$

$$\Delta'_\Delta = -4c(-ad^2 - b^2c + 4ach).$$

Notons, si $h > \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$ alors $\Delta'_\Delta < 0$, et $\Delta < 0$, dans ce cas il n'existe pas de solution réelle pour l'équation(3.6).

Si $h = \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$, $\Delta'_\Delta = 0$, et $\Delta = -4ac\left(v + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$, avec $v \neq \frac{-b}{2a}$, il n'existe pas de solution réelle pour l'équation(3.6).

Si $h < \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$, $\Delta'_\Delta > 0$ et nous avons

$$v_1 = \frac{1}{4ac} \left(\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} - 2bc \right),$$

$$v_2 = -\frac{1}{4ac} \left(\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} + 2bc \right),$$

l'expression $\frac{1}{4ac} \left(\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} - 2bc \right)$ est positive,

et si $\frac{d^2}{4c} < h$, l'expression $-\frac{1}{4ac} \left(\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} + 2bc \right)$ est aussi positive, et nous distinguons les cas suivants :

1) n est impair.

L'équation $\Delta = 0$ admet deux solutions réelles

$$x_1 = \sqrt[n]{-\frac{1}{4ac} \left(\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} + 2bc \right)}$$

$$x_2 = \sqrt[n]{\frac{1}{4ac} \left(\sqrt{4b^2c^2 - 16ahc^2 + 4acd^2} - 2bc \right)}.$$

Pour $x \in [x_1, x_2]$ le discriminant Δ est positif et l'équation (3.6) admet deux solutions réelles,

$$z_1 = \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4c(ax^{2n} + bx^n + h)}}{2c}, \quad z_2 = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4c(ax^{2n} + bx^n + h)}}{2c}.$$

Si m est impair, il existe deux solutions réelles pour l'équation(3.6) dépendant de y .

$$y_1 = \sqrt[m]{\frac{-d - \sqrt{d^2 - 4c(ax^{2n} + bx^n + h)}}{2c}}, \quad y_2 = \sqrt[m]{\frac{-d + \sqrt{d^2 - 4c(ax^{2n} + bx^n + h)}}{2c}}.$$

La fonction $x \rightarrow y_1$ est décroissante pour $x \in \left] x_1, \sqrt[n]{\frac{-b}{2a}} \right[$

et croissante pour $x \in \left] \sqrt[n]{\frac{-b}{2a}}, x_2 \right[$.

La fonction $x \rightarrow y_2$ est croissante pour $x \in \left] x_1, \sqrt[n]{\frac{-b}{2a}} \right[$

et décroissante pour $x \in \left] \sqrt[n]{\frac{-b}{2a}}, x_2 \right[$.

En plus $y_1(x_1) = y_2(x_1) = \sqrt[m]{\frac{-d}{2c}}$ et $y_1(x_2) = y_2(x_2) = \sqrt[m]{\frac{-d}{2c}}$,

alors Γ est composée d'un ovale dans le domaine

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x_1 < x < x_2, y_1 \left(\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}} \right) < y < y_2 \left(\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}} \right) \right\}.$$

Si m est pair ils existent quatre solutions réelles de l'équation (3.6) dépendant de y .
 $y_1, y_2, -y_1, -y_2$.

Avec le même processus que précédemment, nous concluons que la courbe Γ est composée de deux ovales, un dans le domaine D_1 et l'autre dans le domaine $D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x_1 \leq x \leq x_2, -y_2 \left(\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}} \right) \leq y \leq -y_1 \left(\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}} \right) \right\}$.

2) n est pair.

L'équation $\Delta = 0$ admet quatre solutions réelles $x_1, x_2, -x_1, -x_2$.

Pour $x \in [-x_2, -x_1] \cup [x_1, x_2]$ le discriminant Δ est positif et l'équation(3.6) admet deux solutions réelles z_1, z_2 .

Si m est impair, il existent deux solutions réelles de l'équation(3.6) dépendant de y .

$$y_1 = \sqrt[m]{\frac{-d - \sqrt{d^2 - 4c(ax^{2n} + bx^n + h)}}{2c}}, \quad y_2 = \sqrt[m]{\frac{-d + \sqrt{d^2 - 4c(ax^{2n} + bx^n + h)}}{2c}}.$$

Si m est pair, il existent quatre solutions réelles de l'équation(3.6) dépendant de y .

$y_1, y_2, -y_1, -y_2$.

Comme précédemment, nous concluons que lorsque m est impair, la courbe Γ est composée de deux ovales, l'un dans le domaine D_1 , et l'autre dans le domaine $D_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, -x_2 \leq x \leq -x_1, y_1 \left(-\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}} \right) \leq y \leq y_2 \left(-\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}} \right) \right\}$,

et lorsque m est pair, la courbe Γ est composée de quatre ovales dans les domaines D_1, D_2, D_3, D_4

$$D_4 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, -x_2 \leq x \leq -x_1, -y_2 \left(-\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}} \right) \leq y \leq -y_1 \left(-\sqrt[n]{\frac{-b}{2a}} \right) \right\}.$$

ii) Γ est une courbe invariante pour le système(3.3).

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} \\ &= ((xy + P(y))(2nax^{2n} + bnx^n) + (xy + Q(x))(2mcy^{2m} + dmy^m)) U, \end{aligned}$$

le cofacteur est $K(x, y) = x(xy + P(y))(2nax^{2n} + bnx^n) + y(xy + Q(x))(2mcy^{2m} + dmy^m)$.

iii) $\int_0^T \text{div}(\Gamma) dt \neq 0$

Rappelons que $\int_0^T \text{div}(\Gamma) dt = \int_0^T K(x(t), y(t)) dt$.

$$\begin{aligned} \int_0^T K(x(t), y(t)) dt &= \int_0^T (xy + P(y))(2nax^{2n-1} + bnx^{n-1}) dt \\ &\quad + \int_0^T (xy + Q(x))(2mcy^{2m-1} + dmy^{m-1}) dt \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{(xy+P(y))(2nax^{2n}+bnx^n)}{y(2nax^{2n}+bnx^n)} dy - \oint_{\Gamma} \frac{(xy+Q(x))(2mcy^{2m}+dmy^m)}{x(2mcy^{2m}+dmy^m)} dx \\ &= \oint_{\Gamma} \left(x + \frac{P(y)}{y} \right) dy - \oint_{\Gamma} \left(y + \frac{Q(x)}{x} \right) dx. \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'intégration de Green

$$\oint_{\Gamma} \left(x + \frac{P(y)}{y} \right) dy - \oint_{\Gamma} \left(y + \frac{Q(x)}{x} \right) dx = \int \int_{int(\Gamma)} 2dxdy, \quad (3.8)$$

où $int(\Gamma)$ désigne l'intérieur de Γ .

et comme $\int \int_{int(\Gamma)} dxdy$ est différente de zéro alors $\int_0^T K(x(t), y(t))dt$ est aussi différente de zéro. ■

Exemple 3.1 Soit $m = n = 1$, $a = 1$, $c = 2$, $b = -4$, $d = -5$, $h = 6$, $P(y) = y + 1$, $Q(x) = x - 1$,

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^3y - 3x^2y + x^2 + 2xy^3 - 5xy^2 + 2xy - 4x + 2y^3 - 7y^2 + 6y + 6) \\ \dot{y} = y(x^3y + x^3 - 4x^2y - 3x^2 + 2xy^3 - 3xy^2 + xy + 6x - 2y^2 + 5y - 6). \end{cases} \quad (3.8)$$

Le système (3.8) admet un cycle limite hyperbolique représenté par la courbe $x^2 - 4x + 2y^2 - 5y + 6 = 0$.

Ce système a cinq points d'équilibre, deux sont des points selle, deux sont des foyers stables et un foyer instable.

Le cycle limite entoure un foyer stable. Voir figure(3.1)

Exemple 3.2 Soit $m = 1$, $n = 2$, $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$, $d = -5$, $h = 5$, $P(y) = y^2 - 1$, $Q(x) = x^2 + 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = x \begin{pmatrix} x^5y + x^4y^2 - x^4 - 4x^3y - 4x^2y^2 + 4x^2 + 3xy^3 \\ -5xy^2 + 5xy + 3y^4 - 5y^3 - 4y^2 + 10y - 5 \end{pmatrix} \\ \dot{y} = y \begin{pmatrix} x^6 + x^5y + x^4 - 4x^3y + 3x^2y^2 - 5x^2y - 7x^2 \\ +3xy^3 - 5xy^2 + 5xy + 3y^2 - 5y + 5 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Le système(3.9) admet deux cycles limites représentés par la courbe $x^4 - 4x^2 + 3y^2 - 5y + 5 = 0$.

Ce système a onze points singuliers, six points selle, trois foyers stables et deux foyers instables.

Le cycle limite dans le premier quadrant entoure un foyer stable et l'autre entoure un foyer instable. Voir figure(3.2)

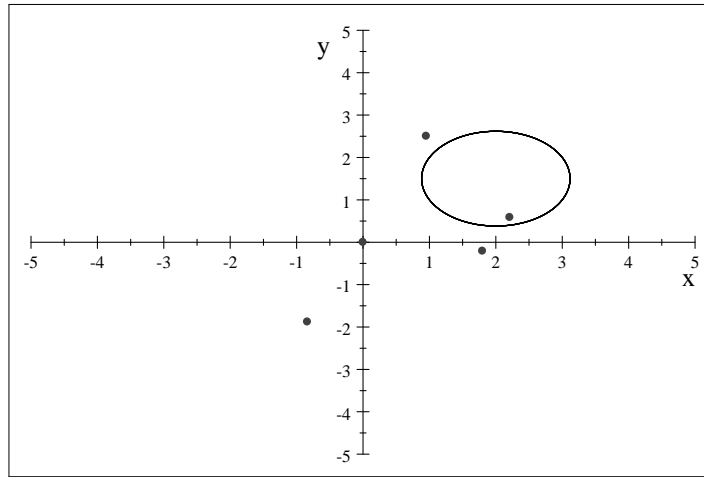


FIG. 3-1 – Cycle Limite du système(3.8) avec les points d'équilibre.

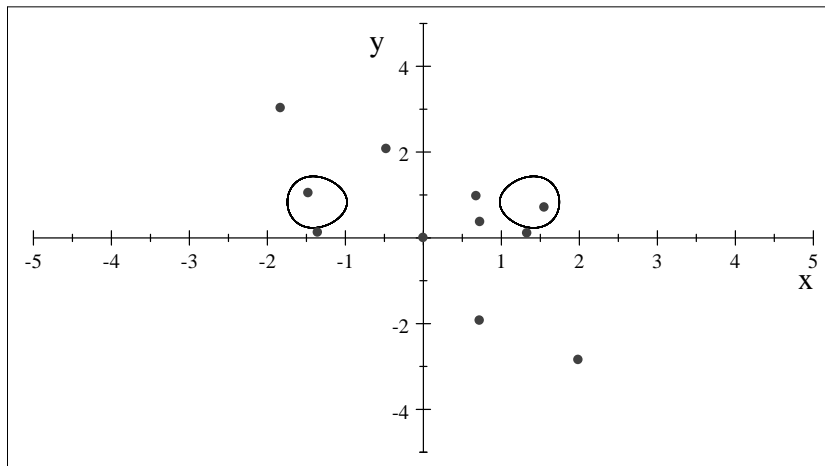


FIG. 3-2 – Cycles limites du système(3.9) avec les points d'équilibre.

Exemple 3.3 Soit $m = n = 2$, $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$, $d = -4$, $h = 3$, $P(y) = y^2 - 3y + 1$,
 $Q(x) = x^2 + x + 1$,

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(\begin{array}{l} 3x^5y + 3x^4y^2 - 9x^4y + 3x^4 - 5x^3y - 5x^2y^2 + 15x^2y - 5x^2 + 2xy^5 - 4xy^3 \\ + 3xy + 2y^6 - 6y^5 - 10y^4 + 12y^3 + 7y^2 - 9y + 3 \end{array} \right) \\ \dot{y} = y \left(\begin{array}{l} 3x^6 + 3x^5y + 3x^5 + 13x^4 - 5x^3y - 5x^3 + 2x^2y^4 - 4x^2y^2 - 17x^2 + 2xy^5 \\ + 2xy^4 - 4xy^3 - 4xy^2 + 3xy + 3x + 4y^4 - 8y^2 + 6 \end{array} \right). \end{cases} \quad (3.10)$$

Le système(3.10) admet quatre cycles limites hyperboliques représentés par la courbe $3x^4 - 5x^2 + 2y^4 - 4y^2 + 3 = 0$.

Ce système a dix points d'équilibre, quatre points selle, trois foyers stables, deux foyers instables et un noeud instable.

Les cycles limites dans le premier et le quatrième quadrant entourent des foyers stables, les autres cycles limites entourent des foyers instables. Voir figure(3.3)

Exemple 3.4 Soit $m = 2$, $n =$, $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$, $d = -3$, $h = 3$, $P(y) = \sin(y)$,
 $Q(x) = \cos(x)$,

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(\begin{array}{l} \sin(y) (2x^6 - 3x^3 + y^4 - 3y^2 + 3) + 2x^7y + xy^5 \\ - 3x^4y - 3xy^3 + 3xy + 6y^2 - 4y^4 \end{array} \right) \\ \dot{y} = y \left(\begin{array}{l} \cos(x) (-3x^3 - 3y^2 + 2x^6 + y^4 + 3) + 2x^7y + xy^5 \\ - 3x^4y - 3xy^3 + 3xy - 9x^3 + 12x^6 \end{array} \right). \end{cases} \quad (3.11)$$

Le système(3.11) admet deux cycles limites hyperboliques représentés par la courbe $2x^6 - 3x^3 + y^4 - 3y^2 + 3 = 0$.

Le cycle limite dans le premier quadrant entoure un foyer instable et l'autre entoure un foyer stable. Voir figure (3.4).

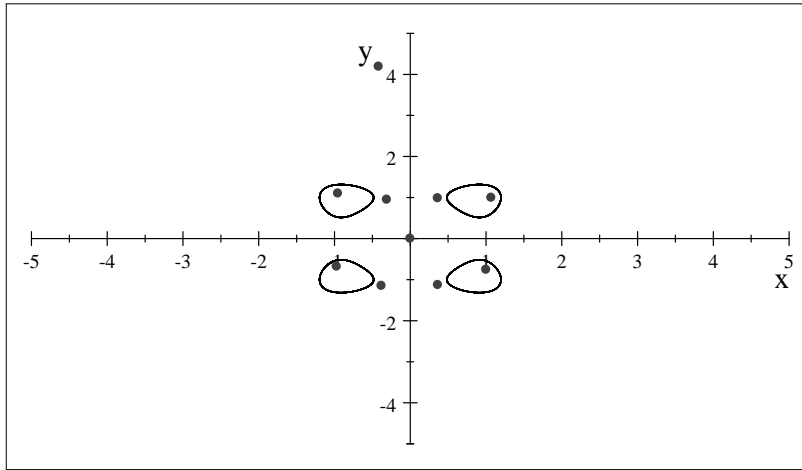


FIG. 3-3 – Cycles limites du système (3.10) avec les points d'équilibre.

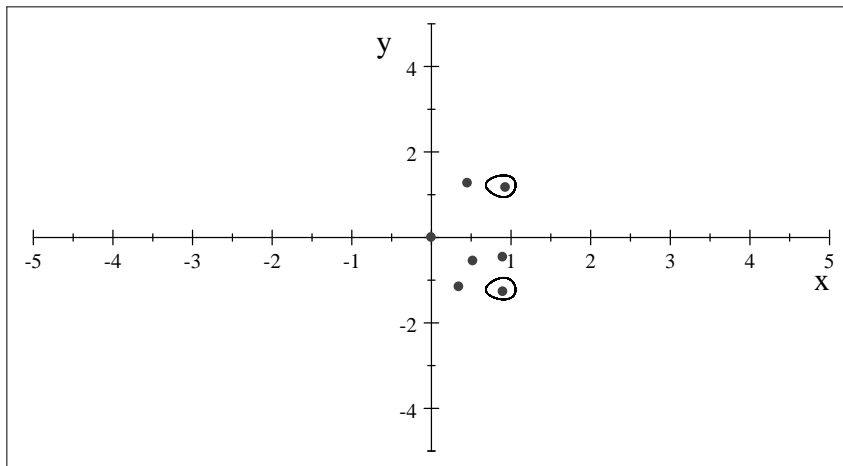


FIG. 3-4 – Cycles limites du système(3.11) avec les points d'équilibre à leur voisinage.

La classe de système de Kolmogorov ci-dessus a fait l'objet de la publication :

A class of Kolmogorov system with exact limit cycles, International journal of pure and applied mathematics, vol 103 (4), 2015, 439-451 [13].

Nous proposons une deuxième classe de systèmes de Kolmogorov avec au plus quatre cycles limites, là où nous portons quelques modifications sur la première classe en ajoutant quelques termes. Cela a fait l'objet de la publication :

A class of Kolmogorov system with exactly one, two or four limit cycles, International journal of advances in applied mathematics and mechanics [14].

Théorème 3.2 *Nous considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = x((yP(x) + V(y))(ax^{2n} + bx^n + cy^{2m} + dy^m + fx^ny^m + h) - my^m(d + 2cy^m + fx^n)) \\ \dot{y} = y((xQ(y) + W(x))(ax^{2n} + bx^n + cy^{2m} + dy^m + fx^ny^m + h) + nx^n(b + 2ax^n + fy^m)) \end{cases} \quad (3.12)$$

où a, c sont des réels positifs, b, d des réels négatifs, f un réel négatif tel que $f^2 < 4ac$,

h satisfait $\max\left\{\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c}\right\} < h < \frac{bdf - b^2c - ad^2}{f^2 - 4ac}$, $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$,

$P(x)$ et $Q(y)$ des polynômes impairs de degré quelconque avec des coefficients positifs, $V(x)$ et $W(y)$ des fonctions analytiques.

Le système (3.12) admet :

un cycle limite lorsque n et m sont impairs,

deux cycle limites lorsque l'un des deux nombres n et m est impair et l'autre est pair,

quatre cycles limites lorsque n et m sont pairs.

Les cycles limites sont hyperboliques représentés par la courbe Γ telle que

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2n} + bx^n + cy^{2m} + y^m(d + fx^n) + h = 0, (n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}. \quad (3.13)$$

Preuve : Nous allons montrer comme pour la première classe que la courbe Γ est non singulière composée d'ovales et qu'elle est invariante pour le système(3.12) et que $\int_0^T \text{div}(\Gamma)dt \neq 0$.

i) La courbe Γ est non-singulière pour le système(3.12) composée d'ovales.

La courbe Γ est non-singulière pour le système(3.12) si le système suivant n'admet

pas de solutions réelles

$$\begin{cases} ax^{2n} + bx^n + cy^{2m} + dy^m + fx^ny^m + h = 0 \\ nyx^n (b + 2ax^n + fy^m) = 0 \\ -mxy^m (d + 2cy^m + fx^n) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Notons que la courbe Γ ne coupe pas les axes, puisque $h > \frac{d^2}{4c}$, et $h > \frac{b^2}{4a}$,

points critiques qui annulent la première et la deuxième équation du système(3.14) sont :

$$A_1 \left(-\sqrt[n]{\frac{2bc-df}{f^2-4ac}}, -\sqrt[m]{\frac{2ad-bf}{f^2-4ac}} \right), A_2 \left(-\sqrt[n]{\frac{2bc-df}{f^2-4ac}}, \sqrt[m]{\frac{2ad-bf}{f^2-4ac}} \right), \\ A_3 \left(\sqrt[n]{\frac{2bc-df}{f^2-4ac}}, -\sqrt[m]{\frac{2ad-bf}{f^2-4ac}} \right), A_4 \left(\sqrt[n]{\frac{2bc-df}{f^2-4ac}}, \sqrt[m]{\frac{2ad-bf}{f^2-4ac}} \right) \quad \text{lorsque } m \text{ et } n \text{ sont pairs,}$$

A_4 lorsque m et n sont impairs,

A_2, A_4 lorsque m est impair et n est pair,

A_3, A_4 lorsque m est pair et n est impair.

Comme $h \neq \frac{1}{f^2-4ac} (bdf - ad^2 - b^2c)$ et $f^2 \neq 4ac$,

alors tous les points A_1, A_2, A_3, A_4 ne sont pas sur la courbe Γ .

Prouvons que Γ est composée d'ovales.

Nous considérons l'équation(3.13) sous la formee

$$cz^2 + (d + fx^n)z + (ax^{2n} + bx^n + h) = 0 \quad \text{where } z = y^m. \quad (3.15)$$

Le discriminant $\Delta = (f^2 - 4ac)v^2 + 2(df - 2bc)v + d^2 - 4ch$ où $v = x^n$

$$\Delta'_\Delta = 4b^2c^2 - 4bcd f - 16ahc^2 + 4acd^2 + 4hcf^2.$$

Notons que lorsque $h > \frac{b^2c^2 - bdf + ad^2}{4ac - f^2}$, $\Delta'_\Delta < 0$, et comme $f^2 < 4ac$ alors $\Delta < 0$,

dans ce cas l'équation (3.15) n'admet pas de solution réelle.

Si $h = \frac{b^2c^2 - bdf + ad^2}{4ac - f^2}$, $\Delta'_\Delta = 0$, et $\Delta = (f^2 - 4ac) \left(v - \frac{2bc-df}{f^2-4ac} \right)^2 < 0$,

avec $v \neq \frac{2bc-df}{f^2-4ac}$, et dans ce cas aussi l'équation(3.15) n'admet pas de solution réelle.

Si $h < \frac{b^2c^2 - bdf + ad^2}{4ac - f^2}$, $\Delta'_\Delta > 0$ alors

$$v_1 = \frac{1}{4ac - f^2} \left(2\sqrt{b^2c^2 - 4ahc^2 + acd^2 - bcdf + hcf^2 - 2bc + df} \right),$$

$$v_2 = \frac{1}{4ac - f^2} \left(-2\sqrt{b^2c^2 - 4ahc^2 + acd^2 - bcdf + hcf^2 - 2bc + df} \right),$$

l'expression $\frac{1}{4ac - f^2} \left(2\sqrt{b^2c^2 - 4ahc^2 + acd^2 - bcdf + hcf^2 - 2bc + df} \right)$ est positive,

et lorsque $\frac{d^2}{4c} < h$, l'expression $\frac{1}{4ac - f^2} \left(-2\sqrt{b^2c^2 - 4ahc^2 + acd^2 - bcdf + hcf^2 - 2bc + df} \right)$

est aussi positive.

Nous distinguons les cas suivants :

1) n est impair.

L'équation $\Delta = 0$ admet deux solutions réelles

$$x_1 = \sqrt[n]{\frac{1}{4ac-f^2} \left(2\sqrt{b^2c^2 - 4ahc^2 + acd^2 - bcdf + hcf^2 - 2bc + df} \right)},$$

$$x_2 = \sqrt[n]{\frac{1}{4ac-f^2} \left(-2\sqrt{b^2c^2 - 4ahc^2 + acd^2 - bcdf + hcf^2 - 2bc + df} \right)}.$$

Pour $x \in [x_1, x_2]$ le discriminant Δ est positif et l'équation(3.15) admet deux solutions réelles,

$$z_1 = \frac{-(d+fx^n) - \sqrt{(f^2-4ac)x^{2n} + 2(df-2bc)x^n + d^2 - 4ch}}{2c},$$

$$z_2 = \frac{-(d+fx^n) + \sqrt{(f^2-4ac)x^{2n} + 2(df-2bc)x^n + d^2 - 4ch}}{2c}.$$

Comme $c > 0$ et $h > \frac{b^2}{4a}$, z_1, z_2 sont positifs.

Si m est impair, ils existent deux solutions réelles pour l'équation(3.15), par rapport à la variable y ,

$$y_1 = \sqrt[m]{\frac{-(d+fx^n) - \sqrt{(f^2-4ac)x^{2n} + 2(df-2bc)x^n + d^2 - 4ch}}{2c}},$$

$$y_2 = \sqrt[m]{\frac{-(d+fx^n) + \sqrt{(f^2-4ac)x^{2n} + 2(df-2bc)x^n + d^2 - 4ch}}{2c}}.$$

La fonction $x \rightarrow y_1$ est décroissante pour $x \in]x_1, x_0[$ et croissante pour $x \in]x_0, x_2[$, et la fonction $x \rightarrow y_2$ est croissante pour $x \in]x_1, x'_0[$ et décroissante pour $x \in]x'_0, x_2[$,

$$\text{où } x_0 = \sqrt[n]{-\frac{1}{a(-4ac+f^2)} \left(f\sqrt{a^2d^2 + ab^2c - 4a^2ch + af^2h - abdf} - 2abc + adf \right)},$$

$$x'_0 = \sqrt[n]{\frac{1}{a(-4ac+f^2)} \left(f\sqrt{a^2d^2 + ab^2c - 4a^2ch + af^2h - abdf} + 2abc - adf \right)}.$$

D'autre part, nous avons

$$y_1(x_1) = y_2(x_1) = \sqrt[m]{\frac{1}{c(f^2-4ac)} \left(f\sqrt{b^2c^2 - bcdf - 4ahc^2 + acd^2 + hcf^2} + 2acd - bcf \right)},$$

$$y_1(x_2) = y_2(x_2) = \sqrt[m]{-\frac{1}{c(f^2-4ac)} \left(f\sqrt{b^2c^2 - bcdf - 4ahc^2 + acd^2 + hcf^2} - 2acd + bcf \right)},$$

alors Γ est composée d'un ovale dans le domaine

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x_1 < x < x_2, y_1(x_0) < y < y_2(x'_0)\}.$$

D_1 est dans le quadrant réaliste.

Si m est pair, ils existent quatre solutions réelles pour l'équation(3.15), par rapport à la variable y . $y_1, y_2, -y_1, -y_2$.

Avec le même processus que précédemment, nous concluons que la courbe Γ est composée de deux ovales, l'un est dans le domaine D_1 et l'autre dans le domaine

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x_1 \leq x \leq x_2, -y_2(x'_0) \leq y \leq -y_1(x_0)\}.$$

2) n est pair.

L'équation $\Delta = 0$ admet quatre solutions réelles $x_1, x_2, -x_1, -x_2$.

Pour $x \in [-x_2, -x_1] \cup [x_1, x_2]$ le discriminant Δ est positive et l'équation(3.15) admet deux solutions réelles z_1, z_2 .

Si m est impair, ils existent deux solutions réelles de l'équation(3.15) par rapport à la variable y .

$$y_1 = \sqrt[m]{\frac{-\sqrt{(d+fx^n)-\sqrt{(f^2-4ac)x^{2n}+2(df-2bc)x^n+d^2-4ch}}}{2c}},$$

$$y_2 = \sqrt[m]{\frac{-\sqrt{(d+fx^n)+\sqrt{(f^2-4ac)x^{2n}+2(df-2bc)x^n+d^2-4ch}}}{2c}}.$$

Si m est pair, il existent quatre solutions réelles pour l'équation(3.15) par rapport à la variable y ,

$$y_1, y_2, -y_1, -y_2$$

Comme précédemment, nous concluons que lorsque m est impair, la courbe Γ est composée de deux ovales, l'un dans le domaine D_1 , et l'autre dans le domaine

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -x_2 \leq x \leq -x_1, y_1(-x_0) \leq y \leq y_2(-x_0)\},$$

et lorsque m est pair, la courbe Γ est composée de quatre ovales dans les domaines D_1, D_2, D_3, D_4 .

$$D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -x_2 \leq x \leq -x_1, -y_2(-x_0) \leq y \leq -y_1(-x_0)\}.$$

ii) Γ est invariante pour le système(3.12).

$$\frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} =$$

$$(nx^n (yP(x) + V(y)) (b + 2ax^n + fy^m) + my^m (xQ(y) + W(x)) (d + 2cy^m + fx^n)) U$$

le cofacteur est $K(x, y) = nx^n (yP(x) + V(y)) (b + 2ax^n + fy^m)$

$$+ my^m (xQ(y) + W(x)) (d + 2cy^m + fx^n)$$

iii) $\int_0^T \text{div}(\Gamma) dt \neq 0$.

$$\int_0^T \text{div}(\Gamma) dt = \int_0^T K(x(t), y(t)) dt$$

$$= \int_0^T nx^n (yP(x) + V(y)) (b + 2ax^n + fy^m) dt$$

$$+ \int_0^T my^m (xQ(y) + W(x)) (d + 2cy^m + fx^n) dt$$

$$= \oint_{\Gamma} \frac{nx^n (yP(x) + V(y)) (b + 2ax^n + fy^m)}{nyx^n (b + 2ax^n + fy^m)} dy - \oint_{\Gamma} \frac{my^m (xQ(y) + W(x)) (d + 2cy^m + fx^n)}{mxy^m (d + 2cy^m + fx^n)} dx$$

$$= \oint_{\Gamma} \left(P(x) + \frac{V(y)}{y} \right) dy - \oint_{\Gamma} \left(Q(y) + \frac{W(x)}{x} \right) dx.$$

En appliquant la formule de Green

$$\oint_{\Gamma} \left(P(x) + \frac{V(y)}{y} \right) dy - \oint_{\Gamma} \left(Q(y) + \frac{W(x)}{x} \right) dx = \int \int_{int(\Gamma)} \left(\frac{d(P(x))}{dx} + \frac{d(Q(y))}{dy} \right) dx dy \quad (3.16)$$

$int(\Gamma)$ désigne l'intérieur de Γ .

Comme $P(x)$ et $Q(y)$ sont des polynômes impairs avec des coefficients positifs alors $P'(x)$ et $Q'(y)$ sont des polynômes pairs avec des coefficients positifs, et nous concluons que $\forall (x, y) \in int(\Gamma)$, $(P'(x) + Q'(y)) > 0$,

alors $\int_0^T K(x(t), y(t)) dt$ est différente de zéro. ■

Remarque 3.1 Nous pouvons généraliser le théorème, en prenant des fonctions $P(x)$ et $Q(y)$ analytiques, dans ce cas nous devons ajouter la condition : $\forall (x, y) \in int(\Gamma)$, $P'(x) + Q'(y)$ est différent de zéro.

Exemple 3.5 soit $m = n = 2$, $a = 2$, $b = -2$, $c = 2$, $d = -2$, $f = -2$, $h = 1$, $P(x) = x$, $Q(y) = y$, $V(y) = y + 1$, $W(x) = x - 1$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(\begin{array}{l} 2x^5y + 2x^4y + 2x^4 - 2x^3y^3 - 2x^3y - 2x^2y^3 + 2x^2y^2 - 2x^2y - 2x^2 \\ + 2xy^5 - 2xy^3 + xy + 2y^5 - 6y^4 - 2y^3 + 2y^2 + y + 1 \end{array} \right) \\ \dot{y} = y \left(\begin{array}{l} 2x^5y + 2x^5 + 6x^4 - 2x^3y^3 - 2x^3y^2 - 2x^3y - 2x^3 - 2x^2y^2 - 2x^2 + \\ 2xy^5 + 2xy^4 - 2xy^3 - 2xy^2 + xy + x - 2y^4 + 2y^2 - 1. \end{array} \right). \end{cases} \quad (3.17)$$

Ce système admet quatre cycles limites représentés par la courbe

$$2x^4 - 2x^2 + 2y^4 - 2y^2 - 2x^2y^2 + 1 = 0.$$

Ce système a sept points d'équilibre, trois des points selle, deux des foyers stables et deux des foyers instables.

Les cycles limites dans le premier et le troisième quadrant entourent chacun un foyer stable et les autres cycles limites entourent des foyers instables. Voir figure(3.5).

Exemple 3.6 soit $m = 2$, $n = 1$, $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$, $d = -3$, $f = -2$, $h = 3$, $P(x) = x^3$, $Q(y) = y^3$, $V(y) = -1$, $W(x) = 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = x (3x^5y - 2x^4y^3 - 2x^4y + x^3y^5 - 3x^3y^3 + 3x^3y - 3x^2 + 6xy^2 + 2x - 5y^4 + 9y^2 - 3) \\ \dot{y} = y (3x^3y^3 - 2x^2y^5 - 2x^2y^3 + 9x^2 + xy^7 - 3xy^5 + 3xy^3 - 4xy^2 - 4x + y^4 - 3y^2 + 3). \end{cases} \quad (3.18)$$

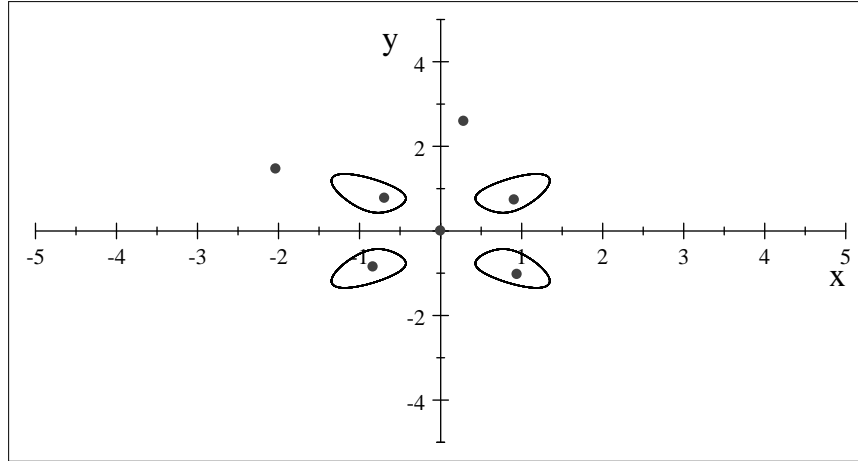


FIG. 3-5 – Cycles limites du système(3.17) avec les points d'équilibre.

Le système(3.18) admet deux cycles limites représentés par la courbe

$$3x^2 - 2x + y^4 - 3y^2 - 2xy^2 + 3.$$

Ce système a cinq points d'équilibre, trois des points selle, un foyer stable et un foyer instable.

Le cycle limite dans le premier quadrant entoure un foyer stable et l'autre cycle limite entoure un foyer instable. Voir figure(3.6).

Exemple 3.7 soit $m = n = 1$, $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$, $d = -3$, $f = -1$, $h = 3$, $P(x) = \exp(x)$, $Q(y) = \arctan(y)$, $V(y) = y \sin(y)$, $W(x) = x \cos(x)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x ((y \exp(x) + y \sin(y)) (2x^2 - 3x + y^2 - 3y - xy + 3) - y (2y - x - 3)) \\ \dot{y} = y ((x \arctan(y) + x \cos(x)) (2x^2 - 3x + y^2 - 3y - xy + 3) + x (4x - y - 3)). \end{cases} \quad (3.19)$$

Le système (3.19) admet un cycle limite représenté par la courbe

$$2x^2 - 3x + y^2 - 3y - xy + 3 = 0.$$

Ce cycle limite entoure un foyer stable, voir figure(3.7).

Notons que $\frac{d(\exp(x))}{dx} + \frac{d(\arctan(y))}{dy} = e^x + \frac{1}{y^2+1} > 0$ et

$$\int_0^T K(x, y) dt = \int_{\frac{9}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{15}}^{\frac{2}{7}\sqrt{15} + \frac{9}{7}} \int_{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{-7x^2 + 18x - 3} + \frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{-7x^2 + 18x - 3} + \frac{3}{2}} \left(e^x + \frac{1}{y^2+1} \right) dx dy \simeq 22.55.$$

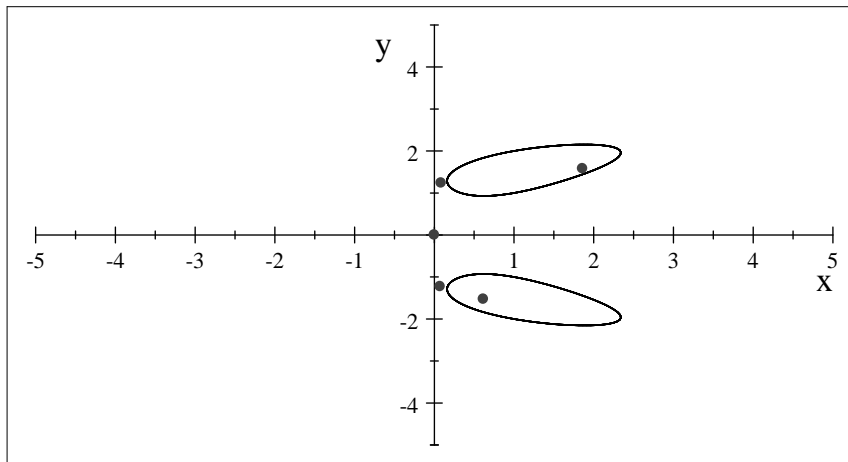


FIG. 3-6 – Cycles limites du système(3.18) avec les points d'équilibre.

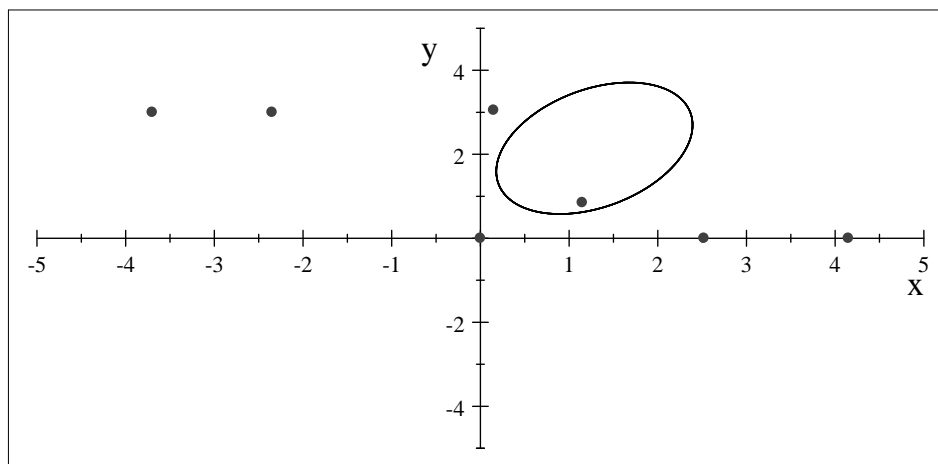


FIG. 3-7 – Cycle limite du système (3.19) avec les points d'équilibre à son voisinage.

3.3 Systèmes de Kolmogorov avec au plus un cycle limite

Nous considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x (yp(x)U_y - s(x)(ax + b)U) \\ \dot{y} = y (-xp(x)U_x + q(x)U), \end{cases} \quad (3.20)$$

où $U(x, y) = \frac{a}{n}x^n + b\frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{c}{2}y^2 + dy + h$, $n \geq 2$,

a, b, c, d, h sont des paramètres réels, p, q, s des polynômes de degrés quelconques.

Le système (3.20) peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{x} = x((cp(x) - \frac{1}{2}cs(x)(b + ax))y^2 + (dp(x) - ds(x)(b + ax))y - \\ \quad s(x)(b + ax)(h + \frac{a}{n}x^n + b\frac{x^{n-1}}{n-1})) \\ \dot{y} = y\left(\frac{1}{2}cq(x)y^2 + dq(x)y + \left(q(x)\left(h + \frac{a}{n}x^n + b\frac{x^{n-1}}{n-1}\right) - p(x)(ax^n + bx^{n-1})\right)\right). \end{cases} \quad (3.21)$$

Théorème 3.3 *Si a, c sont des réels positifs, b, d des réels négatifs,*

h satisfait $\frac{(-1)^nb^n}{n(n-1)a^{n-1}} < h$, $\frac{d^2}{2c} < h$ et $h < \frac{(-1)^nb^n}{n(n-1)a^{n-1}} + \frac{d^2}{2c}$,

$p(x), s(x)$ gardent le même signe pour $x \in [x_1, x_2]$, où x_1, x_2 sont les solutions positives de l'équation

$$2ac(n-1)x^n + 2bcnx^{n-1} + n(n-1)(2ch - d^2) = 0, \quad (3.22)$$

alors le système(3.21) admet un cycle limite hyperbolique dans le premier quadrant représenté par la courbe

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{a}{n}x^n + \frac{b}{n-1}x^{n-1} + \frac{c}{2}y^2 + dy + h = 0 = 0, \quad (n \geq 2) \right\}. \quad (3.23)$$

Preuve : i) Montrons que la courbe Γ présente une trajectoire fermée.

Résolvons l'équation $\frac{a}{n}x^n + \frac{b}{n-1}x^{n-1} + \frac{c}{2}y^2 + dy + h = 0$ par rapport à y ,

$$\Delta = d^2 - 2ch - 2bc\frac{x^{n-1}}{n-1} - 2a\frac{c}{n}x^n, \quad (3.24)$$

$$\frac{d(\Delta(x))}{dx} = -2c(ax^{n-1} + bx^{n-2}) = -2cx^{n-2}(ax + b), \quad (3.25)$$

$\Delta(0) = d^2 - 2ch$ et comme $\frac{d^2}{2c} < h$ alors $\Delta(0) < 0$,

$$\Delta\left(\frac{-b}{a}\right) = d^2 - 2ch + 2c(-1)^n \frac{(b)^n}{n(n-1)a^n}$$

et comme $h < \frac{(-1)^n b^n}{n(n-1)a^{n-1}} + \frac{d^2}{2c}$ alors $\Delta\left(\frac{-b}{a}\right) > 0$.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, nous concluons qu'ils existent deux racines positives de l'équation $\Delta(x) = 0$, $x_1 \in]0, \frac{-b}{a}[$ et $x_2 \in]\frac{-b}{a}, +\infty[$.

Pour $x \in [x_1, x_2]$ $\Delta \geq 0$ et l'équation(3.23) admet deux solutions réelles par rapport à la variable y ,

$$y_1 = -\frac{1}{c} \left(d + \sqrt{-\frac{1}{n(n-1)} (2ac(n-1)x^n + 2bcnx^{n-1} + n(n-1)(2ch - d^2))} \right) \quad (3.26)$$

$$y_2 = -\frac{1}{c} \left(d - \sqrt{-\frac{1}{n(n-1)} (2ac(n-1)x^n + 2bcnx^{n-1} + n(n-1)(2ch - d^2))} \right). \quad (3.27)$$

vu les conditions sur h , alors y_1 et y_2 sont positifs.

$$\frac{dy_1(x)}{dx} = \frac{ax^{n-1} + bx^{n-2}}{\sqrt{-\frac{1}{n(n-1)} (d^2n - d^2n^2 + 2chn^2 - 2acx^n - 2chn + 2acnx^n + 2bcnx^{n-1})}} \quad (3.28)$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} = -\frac{ax^{n-1} + bx^{n-2}}{\sqrt{-\frac{1}{n(n-1)} (d^2n - d^2n^2 + 2chn^2 - 2acx^n - 2chn + 2acnx^n + 2bcnx^{n-1})}}, \quad (3.29)$$

l'expression $ax^{n-1} + bx^{n-2}$ s'annule et change de signe pour $x = \frac{-b}{a}$, alors au point d'abscisse $\frac{-b}{a}$, la fonction continue $x \rightarrow y_1(x)$ admet un minimum et la fonction continue $x \rightarrow y_2(x)$ admet un maximum,

et comme $y_1(x_1) = y_2(x_1)$ et $y_1(x_2) = y_2(x_2)$, alors la courbe Γ présente un ovale dans le premier quadrant et précisément dans le domaine

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x_1 \leq x \leq x_2, y_1\left(\frac{-b}{a}\right) \leq y \leq y_2\left(\frac{-b}{a}\right) \right\},$$

et c'est le seul ovale que peut présenter la courbe Γ .

ii) Montrons que la courbe Γ est non-singulière pour le système(3.21).

S'ils existent des points singuliers sur la courbe Γ ils doivent vérifier le système

$$\begin{cases} x(yp(x)(cy + d)) = 0 \\ y(-x^{n-1}p(x)(ax + b)) = 0 \\ \frac{a}{n}x^n + b\frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{c}{2}y^2 + dy + c = 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Comme la trajectoire fermée est dans le premier quadrant et vu la condition sur $p(x)$, le seul point critique possible est $(\frac{-b}{a}, \frac{-d}{c})$,

$$\text{mais } U\left(\frac{-b}{a}, \frac{-d}{c}\right) = -a\frac{\left(\frac{-1}{a}b\right)^n}{n(n-1)} - \frac{1}{2}\frac{d^2}{c} + h \neq 0 \text{ puisque } c < \frac{(-1)^n b^n}{n(n-1)a^{n-1}} + \frac{d^2}{2c},$$

alors la courbe Γ est non-singulière pour le système(3.21).

Notons que le système(3.21) admet un point singulier $(\frac{-b}{a} + \alpha, \frac{-d}{c} + \beta)$ qui se trouve à l'intérieure de la trajectoire fermée.

α et β satisfont

$$\frac{x_1 - x_2}{2} < \alpha < \frac{x_2 - x_1}{2}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}(d^2n^2 - d^2n + 2ac\left(-\frac{1}{a}b\right)^n - 2chn^2 + 2chn)} < \beta < \\ \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}(d^2n^2 - d^2n + 2ac\left(-\frac{1}{a}b\right)^n - 2chn^2 + 2chn)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

iii) Montrons que Γ est une courbe invariante pour le système (3.21).

$$\text{Soit } U(x, y) = \frac{a}{n}x^n + \frac{b}{n-1}x^{n-1} + \frac{c}{2}y^2 + dy + h$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dx}\dot{x} + \frac{dU}{dy}\dot{y} = (cq(x)y^2 + dq(x)y - b^2x^{n-1}s(x) - 2abx^nS(x) - a^2x^{n+1}s(x))U \quad (3.33)$$

le cofacteur est

$$\begin{aligned} K(x, y) &= cq(x)y^2 + dq(x)y - b^2x^{n-1}s(x) - 2abx^nS(x) - a^2x^{n+1}s(x) \\ &= -x^{n-1}s(x)(ax + b)^2 + yq(x)(cy + d). \end{aligned} \quad (3.34)$$

iv) Montrons que $\int_0^T K(x(t), y(t))dt \neq 0$.

Passons au changement de variable

$$\frac{dx}{dt} = xyp(x)(d+cy) \text{ sur la courbe } U(x, y) = 0, \text{ alors } dt = \frac{dx}{xyp(x)(d+cy)}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T K(x(t), y(t))dt &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{-x^{n-1}s(x)(ax+b)^2+yq(x)(cy_2+d)}{xyp(x)(d+cy_2)} - \frac{-x^{n-1}s(x)(ax+b)^2+yq(x)(cy_1+d)}{xyp(x)(d+cy_1)} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{s(x)}{p(x)} \frac{dn(n-1)x^{n-2}(b+ax)^2}{\sqrt{-\frac{1}{n(n-1)}(2ac(n-1)x^n+2bcnx^{n-1}+n(n-1)(2ch-d^2))}} \\ &\quad \frac{1}{(ax^n(n-1)+bnx^{n-1}+hn(n-1))} dx, \end{aligned} \quad (3.35)$$

l'expression $dn(n-1)x^{n-2}(b+ax)^2$ est négative vu que ($d < 0$ et $n \geq 2$).

En tenant compte que $h > (-1)^n \frac{b^n}{n(n-1)a^{n-1}}$, l'expression $(ax^n(n-1) + bnx^{n-1} + hn(n-1))$ est positive pour $x > 0$,

et tenant en compte de la condition sur $p(x)$ et $s(x)$, alors l'expression

$$\frac{s(x)}{p(x)} \frac{dn(n-1)x^{n-2}(b+ax)^2}{\sqrt{-\frac{1}{n(n-1)}(2ah(n-1)x^n+2bhnx^{n-1}+n(n-1)(2ch-k^2))}} \frac{1}{(ax^n(n-1)+bnx^{n-1}+hn(n-1))} \quad (3.36)$$

est soit positive, soit négative pour tout $x \in [x_1, x_2]$, alors l'intégral(3.35) est différente de zéro. ■

Exemple 3.8 *Un système quintique de Kolmogorov avec un cycle limite cubique*

soit $n = 3$, $p(x) = x + 1$, $q(x) = x - 2$, $s(x) = 1$, $a = 3$, $b = -4$, $c = 2$, $h = 2$, $d = -2$.

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3x^4 - 10x^3 + 5xy^2 + 8x^2 - 2y^2 - 8xy + 6x + 6y - 8) \\ \dot{y} = y(-2x^4 - 3x^3 + xy^2 + 8x^2 - 2y^2 - 2xy + 2x + 4y - 4) \end{cases} \quad (3.37)$$

présente un cycle limite hyperbolique qui a pour équation $x^3 - 2x^2 + y^2 - 2y + 2 = 0$. Voir figure(3.8).

Cette courbe contient une trajectoire fermée dans le quadrant réaliste, elle entoure le point singulier $(1.3429, 1.0011)$, et c'est une courbe invariante pour le système (3.37),

le cofacteur est $K(x, y) = (2x - 4)y^2 + (4 - 2x)y + (9x^4 - 24x^3 + 16x^2)$,

$$\text{de plus } \int_0^T K(x(t), y(t))dt = \int_1^{\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}} x \frac{(3x-4)^2}{\sqrt{-x^3+2x^2-1(x^4-x^3-2x^2+2x+2)}} dx \simeq 0.574 \neq 0.$$

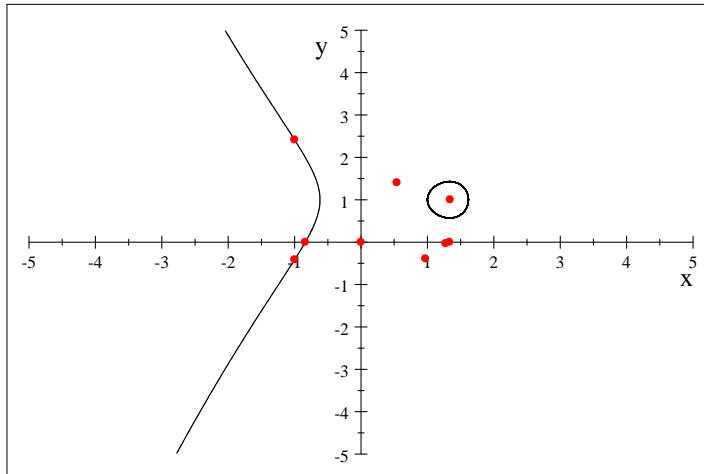


FIG. 3-8 – Cycle limite du système(3.37) avec les points d'équilibre.

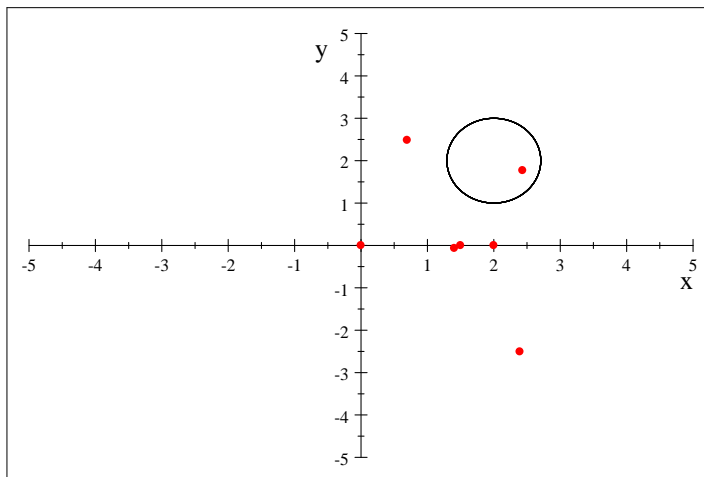


FIG. 3-9 – Cycle limite du système(3.38) avec les points d'équilibre.

Remarque 3.2 Si $s(x)$ change de signe dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ ou bien si s, q dépendent de (x, y) , nous ne pouvons pas conclure directement que l'intégrale(3.35) est différente de zéro, mais nous pouvons l'évaluer numériquement et si elle est non-nulle nous concluons, bien sûr si les autres conditions sont vérifiées, que la trajectoire fermée de Γ est un cycle limite pour le système(3.21).

Exemple 3.9 Soit $a = 4, b = -8, c = 2, d = -4, h = 11, p(x) = 3 - x, q(x, y) = -x - y, s(x) = 2x - 3$ change de signe pour $x \in [-\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2, \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2]$, où les bornes de l'intervalle sont les solutions de l'équation $16x^2 - 64x + 56 = 0$.

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-4x^4 + 30x^3 - 2x^2y^2 + 8x^2y - 90x^2 + 5xy^2 - 24xy + 125x + 12y - 66) \\ \dot{y} = y(2x^3 - 2x^2y - 12x^2 - xy^2 + 12xy + 13x - y^3 + 4y^2 - 11y) \end{cases} \quad (3.38)$$

admet un cycle limite représenté par la courbe $2x^2 - 8x + y^2 - 4y + 11 = 0$,

Ce système a sept points d'équilibre, trois points selle, un nœud stable, un nœud instable, un foyer instable, et l'origine qui est un point d'équilibre semi-hyperbolique selle-nœud.

Le cycle limite entoure le foyer instable. Voir figure(3.9).

Remarque 3.3 Si $p(x)$ change de signe pour $x \in [x_1, x_2]$, la courbe Γ est non-singulière pour le système alors elle n'est pas un cycle limite.

Exemple 3.10 Soit $p(x) = 2x - 3, q(x) = -x - y, s(x) = \frac{1}{4}(3 - x), a = 4, b = -8, c = 11, h = 2, k = -4$.

$p(x)$ change de signe dans l'intervalle $[x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2, x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2]$.

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2x^4 + x^2y^2 - 18x^3 - 4x^2y - xy^2 + 63x^2 + 12xy - 103x - 12y + 66) \\ \dot{y} = y(-10x^3 - y^3 - 2x^2y - xy^2 + 36x^2 + 4y^2 + 12xy - 35x - 11y) \end{cases} \quad (3.39)$$

admet sept point d'équilibre dont deux sont sur la trajectoire fermée

$2x^2 - 8x + y^2 - 4y + 11 = 0$, alors cette dernière n'est pas un cycle limite pour ce système. Voir figure(3.10).

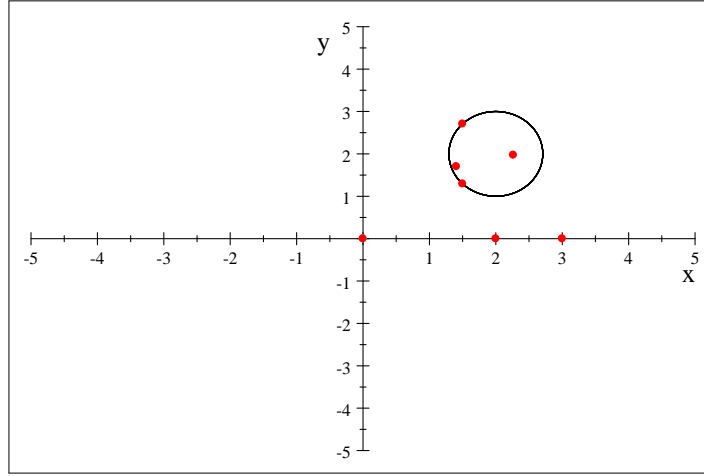


FIG. 3-10 – Trajectoire fermée et les points d'équilibre du système(3.39).

Remarque 3.4 *En se basant sur le théorème(3.3) et en prenant des fonction p, q, s qui dépendent de la variable y , nous pouvons conclure le théorème suivant.*

Théorème 3.4 *Si a, c sont des réels positifs, b, d des réels négatifs, h satisfait*

$$\sup \left\{ \frac{(-1)^m d^m}{m(m-1)c^{m-1}}, \frac{b^2}{2a} \right\} < h < \frac{(-1)^m d^m}{m(m-1)c^{m-1}} + \frac{b^2}{2a} \quad (3.40)$$

$m \geq 2$,

p, q, s des polynômes de degrés quelconques qui dépendent de y .

$p(y), q(y)$ gardent un signe constant pour $y \in [y_1, y_2]$,

où y_1, y_2 sont les solutions positives de l'équation

$$(2ac(m-1)y^m + 2dany^{m-1} + m(m-1)(2ha - b^2)) = 0,$$

alors le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(y^{m-1} p(y) (cy + d) - s(y) \left(\frac{a}{2} x^2 + bx + \frac{c}{m} y^m + \frac{d}{m-1} y^{m-1} + h \right) \right) \\ \dot{y} = y \left(-xp(y) (ax + b) + q(y) (cy + d) \left(\frac{a}{2} x^2 + bx + \frac{c}{m} y^m + \frac{d}{m-1} y^{m-1} + h \right) \right) \end{cases} \quad (3.41)$$

admet un cycle limite algébrique hyperbolique dans le premier quadrant représenté par

$U(x, y) = 0$ avec

$$U(x, y) = \frac{a}{2}x^2 + bx + \frac{c}{m}y^m + \frac{d}{m-1}y^{m-1} + h. \quad (3.42)$$

Preuve : La preuve est similaire à celle du théorème(3.3). ■

Exemple 3.11 Soit $a = 4, b = -8, c = 30, d = -12, h = 3, p(y) = y, q(y) = \frac{1}{4}, s(y) = 1$

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-2x^2 + 8x + 4y^5 - 13y^4 + 4y^3 - 30) \\ \dot{y} = y(-2x^2y - 6x^2 + 24x + y^5 - 7y^4 + 12y^3 + 30y - 90) \end{cases} \quad (3.43)$$

présente un cycle limite représenté par la courbe $2x^2 - 8x + y^4 - 4y^3 + 30 = 0$.

Ce système a quatre points d'équilibre, deux points selle, un foyer stable et un foyer instable.

Le cycle limite entoure un foyer stable. Voir figure(3.11).

Exemple 3.12 Soit $a = 2, b = -3, c = 3, d = -4, h = 3, p(y) = y^2 - \frac{5}{2}y + 1, q(y) = y - 2, s(y) = 1$

Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-2x^2 + 6x + 6y^5 - 23y^4 + 24y^3 - 4y^2 - 6) \\ \dot{y} = y((y - 2)(2x^2y - 6x^2 - 12xy + 21x + 6y^4 - 20y^3 + 16y^2 + 18y - 24)) \end{cases} \quad (3.44)$$

admet un cycle limite représenté par la courbe $x^2 - 3x + y^3 - 2y^2 + 3 = 0$,

Ce système a huit points d'équilibre, trois points selle, trois nœuds stables, et deux foyers instables.

Le cycle limite entoure un foyer instable. Voir figure(3.12).

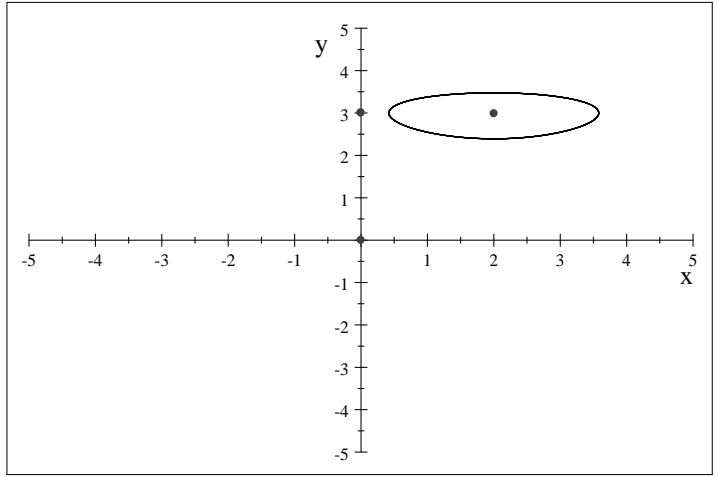


FIG. 3-11 – Cycle limite du système(3.43) avec les points d'équilibre.

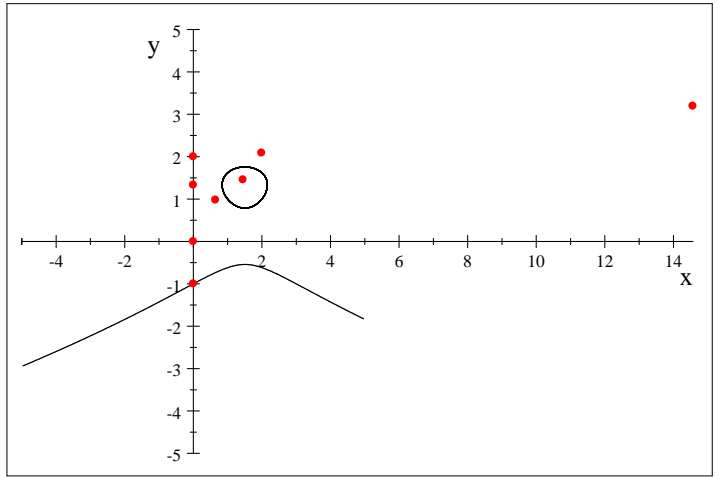


FIG. 3-12 – Cycle limite du système(3.44) avec les points d'équilibre.

Considérons maintenant un cas plus général de système de Kolmogorov avec au plus un cycle limite dans le quadrant réaliste. Ce travail a fait l'objet de la publication :

A Kolmogorov system with explicit hyperbolic limit cycle, Journal of siberian federal university : Mathematics & Physics[15]

Théorème 3.5 *Le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x(ax^n + bx^{n-1} + cy^m + dy^{m-1} + h) - y(x+y)(mcy^{m-1} + d(m-1)y^{m-2})) \\ \dot{y} = y(y(ax^n + bx^{n-1} + cy^m + dy^{m-1} + h) + x(x+y)(nax^{n-1} + b(n-1)x^{n-2})), \end{cases} \quad (3.45)$$

où a, c sont des réelles positifs, b, d des réelles négatifs, et h satisfait

$$\begin{aligned} \max \left\{ (-1)^n \left(\frac{n-1}{a}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{n}\right)^n, (-1)^m \left(\frac{m-1}{c}\right)^{m-1} \left(\frac{d}{m}\right)^m \right\} < h < \\ (-1)^n \left(\frac{n-1}{a}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{n}\right)^n + (-1)^m \left(\frac{m-1}{c}\right)^{m-1} \left(\frac{d}{m}\right)^m \\ n \geq 2, m \geq 2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

admet un cycle limite hyperbolique dans le quadrant réaliste.

Ce cycle limite est représenté par la courbe Γ

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^n + bx^{n-1} + cy^m + dy^{m-1} + h = 0, (n \geq 2, m \geq 2)\}. \quad (3.47)$$

Preuve : Nous allons prouver que Γ est composée de trajectoire fermée, qu'elle est non singulière et invariante pour le système(3.45) et $\int_0^T \text{div}(\Gamma)dt \neq 0$.

i) La courbe Γ est composée de trajectoire fermée.

Nous considérons $U(x, y)$ comme fonction paramétrique

$$f_x(y) = cy^m + dy^{m-1} + ax^n + bx^{n-1} + h,$$

où x est un paramètre réel, a, c des réels positifs, b, d des réels négatifs.

$$\frac{df_x}{dy} = y^{m-2}(dm - d + cmy)$$

$$\frac{df_x}{dy} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou bien } y = \frac{-d(m-1)}{cm}.$$

Soient $p(x) = f_x(0) = ax^n + bx^{n-1} + h$

et $q(x) = f_x\left(\frac{-d(m-1)}{cm}\right) = (-1)^{m-1} \left(\frac{m-1}{c}\right)^{m-1} \left(\frac{d}{m}\right)^m + ax^n + bx^{n-1} + h$.

Nous distinguons les cas suivants.

1) m et n sont pairs.

$y \rightarrow f_x(y)$ est une fonction décroissante pour $y \in]-\infty, \frac{-d(m-1)}{cm}[$ et croissante pour $y \in]\frac{-d(m-1)}{cm}, +\infty[$.

Si $p(x)$ est positif et $q(x)$ est négatif, et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, nous concluons que l'équation $f_x(y) = 0$ admet deux solutions réelles $y_1(x) \in]0, \frac{-d(m-1)}{cm}[$ et $y_2(x) \in]\frac{-d(m-1)}{cm}, +\infty[$.

$$\frac{dp}{dx} = x^{n-2} (b(n-1) + anx),$$

$x \rightarrow p(x)$ est une fonction décroissante pour $x \in]-\infty, \frac{-b(n-1)}{an}[$ et croissante pour $x \in]\frac{-b(n-1)}{an}, +\infty[$.

Pour que $p(x)$ soit positif il suffit que $p\left(\frac{-b(n-1)}{an}\right) > 0$,

$$p\left(\frac{-b(n-1)}{an}\right) = (-1)^{n-1} \left(\frac{n-1}{a}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{n}\right)^n + h > 0$$

$$p\left(\frac{-b(n-1)}{an}\right) \Rightarrow h > (-1)^n \left(\frac{n-1}{a}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{n}\right)^n.$$

$$\frac{dq}{dx} = x^{n-2} (b(n-1) + anx)$$

$x \rightarrow q(x)$ est une fonction décroissante pour $x \in]-\infty, \frac{-b(n-1)}{an}[$ et croissante pour $x \in]\frac{-b(n-1)}{an}, +\infty[$,

si $q(0) > 0$ et $q\left(\frac{-b(n-1)}{an}\right) < 0$, alors ils existent $x_1 \in]0, \frac{-b(n-1)}{an}[$ et $x_2 \in]\frac{-b(n-1)}{an}, +\infty[$ tels que $q(x_1) = q(x_2) = 0$ et $\forall x \in]x_1, x_2[q(x) < 0$,

$$q(0) > 0 \Leftrightarrow (-1)^{m-1} \left(\frac{m-1}{c}\right)^{m-1} \left(\frac{d}{m}\right)^m + h > 0$$

$$\Leftrightarrow h > (-1)^m \left(\frac{m-1}{c}\right)^{m-1} \left(\frac{d}{m}\right)^m.$$

$$q\left(\frac{-b(n-1)}{an}\right) < 0 \Leftrightarrow (-1)^{m-1} \left(\frac{m-1}{c}\right)^{m-1} \left(\frac{d}{m}\right)^m + (-1)^{n-1} \left(\frac{n-1}{a}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{n}\right)^n < 0$$

$$\Leftrightarrow h < (-1)^m \left(\frac{m-1}{c}\right)^{m-1} \left(\frac{d}{m}\right)^m + (-1)^n \left(\frac{n-1}{a}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{n}\right)^n.$$

Nous concluons que lorsque h satisfait la relation(3.46) alors, pour $x \in [x_1, x_2]$, ils existent $y_1(x) \in]0, \frac{-d(m-1)}{cm}[$ et $y_2(x) \in]\frac{-d(m-1)}{cm}, +\infty[$ tels que

$$y_1(x_1) = y_2(x_1) = \frac{-d(m-1)}{cm}, y_1(x_2) = y_2(x_2) = \frac{-d(m-1)}{cm} \quad \text{et}$$

$\forall x \in]x_1, x_2[y_1(x) \neq y_2(x)$,

donc Γ est composée d'une trajectoire fermée dans le premier quadrant, et précisément dans le domaine

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x_1 \leq x \leq x_2, y_1\left(\frac{-b(n-1)}{an}\right) \leq y \leq y_2\left(\frac{-b(n-1)}{an}\right) \right\}.$$

2) m est pair et n est impair.

$x \rightarrow p(x)$ est une fonction croissante pour $x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{-b(n-1)}{an}, +\infty[$ et décroissante pour $x \in]0, \frac{-b(n-1)}{an}[$.

Pour que $p(x)$ soit positif il suffit que $p\left(\frac{-b(n-1)}{an}\right) > 0$, et cela est vérifié si $h > (-1)^n \left(\frac{n-1}{a}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{n}\right)^n$.

$x \rightarrow q(x)$ est une fonction croissante pour $x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{-b(n-1)}{an}, +\infty[$ et décroissante pour $x \in]0, \frac{-b(n-1)}{an}[$,

lorsque $q(0) > 0$ et $q\left(\frac{-b(n-1)}{an}\right) < 0$, ils existent $x_1 \in]0, \frac{-b(n-1)}{an}[$ et $x_2 \in]\frac{-b(n-1)}{an}, +\infty[$ tels que $q(x_1) = q(x_2) = 0$,

et $\forall x \in]x_1, x_2[\quad q(x) < 0$,

$$q(0) > 0 \Leftrightarrow h > (-1)^m \left(\frac{m-1}{c}\right)^{m-1} \left(\frac{d}{m}\right)^m$$

$$q\left(\frac{-b(n-1)}{an}\right) < 0 \Leftrightarrow h < (-1)^m \left(\frac{m-1}{c}\right)^{m-1} \left(\frac{d}{m}\right)^m + (-1)^n \left(\frac{n-1}{a}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{n}\right)^n.$$

Comme précédemment, nous concluons que la courbe Γ est composée d'une trajectoire fermée dans le premier quadrant.

3) m est impair et n est pair.

$y \rightarrow f_x(y)$ est une fonction croissante pour $y \in]-\infty, 0[\cup]\frac{-d(m-1)}{cm}, +\infty[$ et décroissante pour $y \in]0, \frac{-d(m-1)}{cm}[$.

Si $p(x)$ est positif et $q(x)$ est négatif, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_x(y) = 0$ admet

$$\text{deux solutions réelles } y_1(x) \in]0, \frac{-d(m-1)}{cm}[\text{ et } y_2(x) \in]\frac{-d(m-1)}{cm}, +\infty[.$$

Comme précédemment, nous concluons que lorsque h satisfait la relation(3.46), la courbe Γ présente une partie fermée dans le premier quadrant.

4) m et n sont impairs.

Une simple combinaison entre le troisième cas où m est impair et le deuxième cas où n est impair nous ramène à la conclusion que Γ présente une partie fermée dans le premier quadrant.

ii) La courbe Γ est non-singulière pour le système(3.45).

Notons d'abord que la trajectoire fermée de la courbe Γ est dans le premier quadrant donc elle ne coupe pas les axes, et elle ne coupe pas la droite $y = -x$.

Le système

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + cy^m + y^{m-1} + h = 0 \\ x^{n-1}(x+y)(anx + b(n-1)) = 0 \\ -y^{m-1}(x+y)(cmx + d(m-1)) = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

n'admet pas de solution réelle, le seul point critique possible qui annule la deuxième

et la troisième équation du système (3.48) est $A\left(\frac{-b(n-1)}{an}, \frac{-d(m-1)}{cm}\right)$,

mais ce point n'est pas sur la courbe Γ car

$$h \neq (-1)^n \left(\frac{n-1}{a}\right)^{n-1} \left(\frac{b}{n}\right)^n + (-1)^m \left(\frac{m-1}{c}\right)^{m-1} \left(\frac{d}{m}\right)^m,$$

alors la courbe Γ est non-singulière.

iii) Γ est invariante pour le système(3.45).

$$\frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} = (x^n (nax + b(n-1)) + y^m (mcy + d(m-1))) U,$$

le cofacteur est $K(x, y) = x^n (nax + b(n-1)) + y^m (mcy + d(m-1))$.

iv) $\int_0^T \text{div}(\Gamma) dt \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^T \text{div}(\Gamma) dt &= \int_0^T K(x(t), y(t)) dt \\ &= \int_0^T x^n (nax + b(n-1)) dt + \int_0^T y^m (mcy + d(m-1)) dt \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{x^n (nax + b(n-1))}{xy(x+y)(nax^{n-1} + b(n-1)x^{n-2})} dy - \oint_{\Gamma} \frac{y^m (mcy + d(m-1))}{xy(x+y)(mcy^{m-1} + d(m-1)y^{m-2})} dx \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{x}{y(x+y)} dy - \oint_{\Gamma} \frac{y}{x(x+y)} dx, \end{aligned}$$

en appliquant la formule de Green

$$\oint_{\Gamma} \frac{x}{y(x+y)} dy - \oint_{\Gamma} \frac{y}{x(x+y)} dx = 2 \int \int_{\text{int}(\Gamma)} \frac{1}{(x+y)^2} dx dy, \quad (3.49)$$

où $\text{int}\Gamma$ désigne l'intérieur de Γ .

comme le facteur $\frac{1}{(x+y)^2}$ est positif alors $\int_0^T K(x(t), y(t)) dt$ est non nulle. ■

Exemple 3.13 Soit $m = n = 2$, $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$, $d = -3$, $h = 2$,

h satisfait $\max\left\{\frac{b^2}{4a}, \frac{d^2}{4c}\right\} < h < \frac{b^2}{4a} + \frac{d^2}{4c}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^3 - 2x^2 + 2x - 2xy^2 - 4y^3 + 3y^2) \\ \dot{y} = y(2x^3 - x^2 - 2x + 2x^2y - 2xy + 2y^2 - 3y + 2) \end{cases} \quad (3.50)$$

Le système (3.50) admet un cycle limite représenté par la courbe

$$x^2 - 2x + 2y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Ce système a trois points singuliers.

Le cycle limite entoure un foyer stable. Voir figure(3.13).

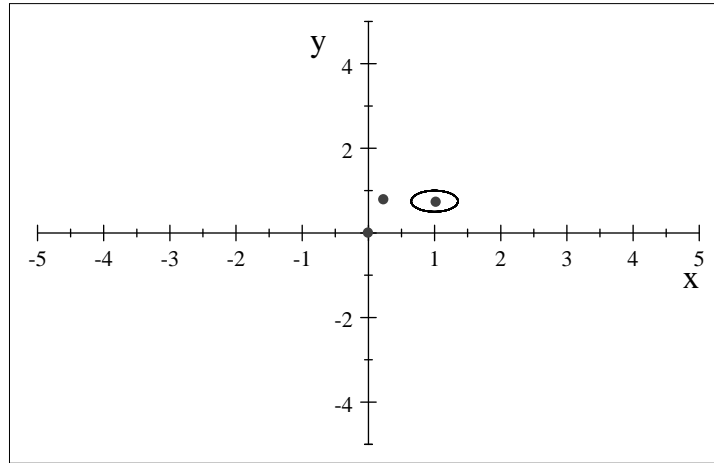


FIG. 3-13 – Cycle limite du système(3.50) avec les points d'équilibre.

Exemple 3.14 Soit $a = 3, b = -5, c = 1, d = -3, h = 5,$

$$h \text{ satisfait } \max \left\{ \frac{27b^4}{256a^3}, \frac{-4d^3}{27c^2} \right\} < h < \frac{27b^4}{256a^3} - \frac{4d^3}{27c^2}.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x(3x^4 - 5x^3 + y^3 - 3y^2 + 5) - y(x+y)(3y^2 - 6y)) \\ \dot{y} = y(y(3x^4 - 5x^3 + y^3 - 3y^2 + 5) + x(x+y)(12x^3 - 15x^2)) \end{cases} \quad (3.51)$$

Le système (3.51) admet un cycle limite représenté par la courbe

$$3x^4 - 5x^3 + y^3 - 3y^2 + 5 = 0.$$

Ce système a six points singuliers.

Le cycle limite entoure un foyer stable. Voir figure(3.14).

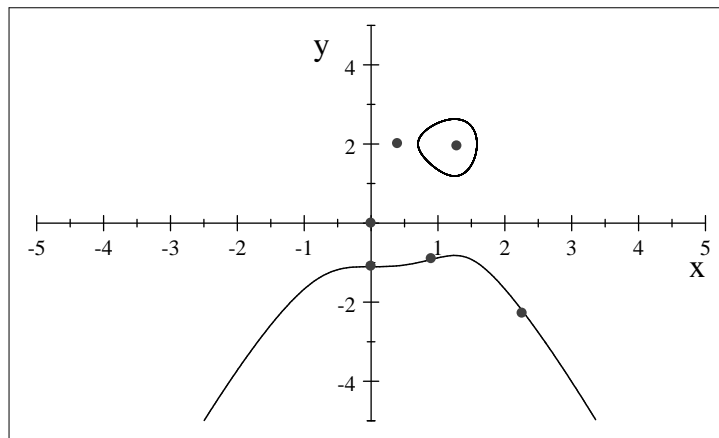


FIG. 3-14 – Cycle limite du système (3.51) avec les points d'équilibre.

Conclusion et perspectives

Nous nous sommes intéressés à l'étude qualitative de systèmes différentiels planaires et particulièrement à la construction de quelques classes qui présentent des cycles limites algébriques donnés explicitement sous des conditions sur les paramètres.

Nous avons commencé par des systèmes différentiels planaires polynomiaux et d'autres transcendants et nous avons élargi notre travail à des systèmes de type- Kolmogorov.

Autant que nous sachons, les modèles de systèmes différentiels avec cycles limites explicites sont restrictifs.

Ce travail qui est une contribution à la résolution du seizième problème de Hilbert, sert comme outil dans la recherche de cycle limite explicite.

Si nous nous sommes branchés sur les cycles limites algébriques, il est commode aussi d'utiliser les mêmes techniques pour des systèmes présentant des cycles limites non algébriques qui peuvent être donnés explicitement et surtout pour les systèmes de Kolmogorov qui, à notre connaissance, restent jusqu'à nos jours sans initiative concernant les cycles limites non algébriques explicites.

Nos objectifs prochains consistent à :

1- Construire d'autres modèles plus généralisés présentant des cycles limites algébriques et/ou non-algébriques.

2- Porter des perturbations sur les modèles étudiés et traiter le comportement des trajectoires périodiques.

3- Chercher des domaines d'application pour ces modèles.

Cependant, nous allons commencer par :

1- Montrer que le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha f - (ax + by + \Phi(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}))f_y \\ \dot{y} = \beta f + (ax + by + \Phi(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}))f_x \end{cases}$$

où Φ est une fonction arbitraire, admet des cycles limites hyperboliques sous les mêmes conditions que le système étudié par C.Christopher dans[26].

2- Montrer qu'un système quartique de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma)^2 + ax + by + cxy + dx^2y + fxy^2 + gx^3y + hxy^3 - (\mu x + \eta y) \\ \quad (gx^3 + 4\alpha x^2y\beta + dx^2 + 3hxy^2 + 2fxy + cx + 4y^3\beta^2 + 4\gamma y\beta + b) \\ \dot{y} = (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma)^2 + ax + by + cxy + dx^2y + fxy^2 + gx^3y + hxy^3 + (\mu x + \eta y) \\ \quad (4x^3\alpha^2 + 3gx^2y + 4\beta xy^2\alpha + 2dxy + 4\gamma x\alpha + hy^3 + fy^2 + cy + a) \end{cases}$$

admet au plus trois cycles limites, si certaines conditions sur les paramètres sont vérifiées.

Table des figures

1-1	Champs de vecteurs associé au système(1.7).	17
1-2	Portrait de phase du système(1.7).	17
1-3	Cycle limite du système(1.19) en utilisant le programme P4 " polynomial planar phase portraits". voir annexe.	26
1-4	Cycle limite du système(1.24) avec $\mu = 1$,en utilisant le programme P4. . .	30
1-5	Cycle limite du système(1.28) en utilisant le programme P4.	32
2-1	Cycle limite du système(2.5) avec les points d'équilibre.	37
2-2	Cycles limites du système (2.6) avec les points d'équilibre.	37
2-3	Cycles limites du système(2.11) avec les points d'équilibre.	43
2-4	Cycles limites du système(2.12) avec les points d'équilibre.	44
2-5	Cycles limites du système(2.13) avec points d'équilibre.	45
2-6	Cycle limite du système(2.14) avec les points d'équilibre.	46
2-7	Cycle limite du système(2.20) avec les points d'équilibre.	51
2-8	Cycle limites du système(2.21) avec les points d'équilibre.	52
2-9	Cycles limites du système(2.22) avec les points d'équilibre.	52
3-1	Cycle Limite du système(3.8) avec les points d'équilibre.	59
3-2	Cycles limites du système(3.9) avec les points d'équilibre.	59
3-3	Cycles limites du système (3.10) avec les points d'équilibre.	61
3-4	Cycles limites du système(3.11) avec les points d'équilibre à leur voisinage.	61
3-5	Cycles limites du système(3.17) avec les points d'équilibre.	67
3-6	Cycles limites du système(3.18) avec les points d'équilibre.	68
3-7	Cycle limite du système (3.19) avec les points d'équilibre à son voisinage.	68
3-8	Cycle limite du système(3.37) avec les points d'équilibre.	73
3-9	Cycle limite du système(3.38) avec les points d'équilibre.	73

3-10	Trajectoire fermée et les points d'équilibre du système(3.39).	75
3-11	Cycle limite du système(3.43) avec les points d'équilibre.	77
3-12	Cycle limite du système(3.44) avec les points d'équilibre.	77
3-13	Cycle limite du système(3.50) avec les points d'équilibre.	82
3-14	Cycle limite du système (3.51) avec les points d'équilibre.	83

Bibliographie

- [1] M. Abdelkadder, *Relaxation oscillator with exact limit cycles*, J. of Math. Anal. and Appl. 218 (1998), 308-312.
- [2] Al-Dosary, Khalil I. T. Non-algebraic limit cycles for parametrized planar polynomial systems, Int. J. Math 18, No. 2 (2007), 179-189
- [3] M.J. Alvarez , A. Gasull , R. Prohens. Limit cycles for two families of cubic systems. Nonlinear Analysis 75 (2012), 6402–6417.
- [4] A.A. Andronov, Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues, C. R. Acad. Sci. Paris 89 (1929), 559–561.
- [5] A.A. Andronov, E.A.Leontovitch, I.I. Gordon, A.L. Maier, Qualitative theory of second order dynamical systems, Wiley, New york, 1973.
- [6] I. Bendixson, Sur les courbes définies par une équation différentielle, Acta mathematica, (Springer Netherland), 24 (1901) , 1-88.
- [7] A. Bendjeddou and R. Cheurfa, *On the exact limit cycle for some class of planar differential systems*, Nonlinear differ. equ. appl. 14 (2007), 491-498.
- [8] A. Bendjeddou and R. Cheurfa, *Cubic and quartic planar differential systems with exact algebraic limit cycles*, Elect. J. of Diff. Equ., no15 (2011), 1-12.
- [9] A. Bendjeddou, A Berbache, R. Cherfa, A class of Kolmogorov system with exact algebraic limit cycle, IJDEA, V14 no 3, 2015, 159-165.
- [10] A. Bendjeddou, R. Benterki and T. Salhi, Explicit non-algebraic limit cycle for polynomial system of degree seven, Applied mathematical sciences vol 3 (13), 2009, 613-622.
- [11] S. Benyoucef , A. Barbach and A. Bendjeddou, A class of differential system with at most four limit cycles, Annals of applied mathematics, 31 :4, 2015, 363-371.

- [12] S. Benyoucef and A. Bendjeddou, A class of differential system with at most two limit cycles, *Global journal of pure and applied Mathematics*, vol 11 (4), 2015, 1755-1765.
- [13] S. Benyoucef and A. Bendjeddou, A class of Kolmogorov system with exact limit cycles, *International journal of pure and applied mathematics*, vol 103 (4), 2015, 439-451.
- [14] S. Benyoucef and A. Bendjeddou, A class of Kolmogorov system with exactly one, two or four limit cycles, *International journal of advances in applied mathematics and mechanics*, (Accepted pour publication).
- [15] S. Benyoucef and A. Bendjeddou, A Kolmogorov system with explicit hyperbolic limit cycle, *Journal of siberian federal university : Mathematics & Physics*, (Accepted pour publication).
- [16] T.R.Blows and N.G.Lloyd, The number of limit cycles of certain polynomial differential equations, *proceeding of royal society of edinburgh, section a mathematics/ volume 98 / issue 3-4/ January 1984*, pp 215-239.
- [17] Shen Boqian and Liu Demeng. Existence of limit cycles for a cubic Kolmogorov system with a hyperbolic solution. *Northwest Math.* 2000, 16(1) : 91–95.
- [18] J. Cao, Limit cycles of polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities of degree 4 via the averaging method, *J. Comput. Appl. Math.* 220 (2008) 624–631.
- [19] J.Chavarriga, H. Giacomini and J. Giné, *On a new type of limit cycles for a planar cubic systems*, *Nonlin. Anal.* 36 (1999), 139-149.
- [20] F. Chen, C.Li, J. Llibre and Z. Zhang, Uniform proof on the weak hilbert's 16th problem for $n=2$, *J.diff.eqns*, 221(2006), 309-342.
- [21] L. Chen and M. Wang, relative position and number of limit cycles of a quadratic differential system, (chinese) *Acta math, Sinica* 22(1979), 751-758.
- [22] Cheng, K.S. Uniqueness of a limit cycle for a predator-prey system, *SIAM J. Math. Anal.* 12 (1981), 541-548.
- [23] SI Chengbin, Shen Boqian. The existence of limit cycles for the Kolmogorov cubic system with a quartic curve solution.*J.Sys. Sci.& Math. Scis.*28(3) (2008), 334–339.
- [24] L.A. Cherkas, Number of limit cycles of an autonomous second-order system, *Differ. Equ.* 5 (1976), 666–668.

- [25] S.N.Chow, R.Johnson, R. Nussbaum, R. Conti, J.Mallet-Paret, Dynamical systems, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003.
- [26] C.Christopher, Polynomial Vector Fields with Prescribed Algebraic Limit Cycles, Geometriae Dedicata 88 : 2001, 255-258.
- [27] C. Christopher, C. Li, Limit Cycles in differential equations, Birkhauser verlag, Boston, 2007.
- [28] C. Christopher and N.G. Lloyd, Polynomial systems : A lower bound for the Hilbert numbers, proc.Royalsoc.London ser. a450 (1995), 219-224.
- [29] F. Dumortier, J. Llibre and J. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, (Universitex) Berlin, Springer (2006).
- [30] F. Dumortier and C.Li, On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for liénard equations, Nonlinearity, 9 (1996), 1489-1500.
- [31] H. Giacomini, M. Grau, On the stability of limit cycles for planar differential systems, J. of Diff. Equ, v 213 issue 2, 2005, 368-388.
- [32] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, *On the nonexistence, existence, and uniqueness of limit cycles*, Nonlinearity 9 (1996), 501-516.
- [33] J.Giné, J.Llibre, *Integrability and algebraic limit cycles for polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities*. *J Differential Equations*, 2005, 208 : 531–545.
- [34] J. Giné and M. Grau, *A note on : "Relaxation Oscillator with Exact Limit Cycles"*, J. of Math. Anal. and Appl. 224 (2006), no. 1, 739-745.
- [35] J. Gine and M. Grau, Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles, explicitly given, using Riccati equations. Nonlinearity 19 (2006) 1939-1950.
- [36] J. Giné, J. Llibre, Limit cycles of cubic polynomial vector fields via the averaging theory, Nonlinear Anal. 66 (2007) 1707–1721.
- [37] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Applied Mathematical Science, Vol. 42, 2nd Printing, Springer, New York, 1986.
- [38] M.han, Y.Wu and P.Bi, A new cubic system having eleven limit cycles. Discrete contin. Dyn. Syst. 12 :4 (2005), 675-686.

- [39] M. Han, D. Shang, Z. Wang and P. Yu, Bifurcation of limit cycles in a fourth order near hamiltonian system, *Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg* 18(10) 2008, 3013-3027.
- [40] D. Hilbert, Mathematische probleme, in : *Lecture, Second Internat. Congr. Math.* (Paris, 1900), *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen Math. Phys. KL.* (1900) 253–297 ; English transl. *Bull. Amer. Math. Soc.* 8 (1902) 437–479 ; *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* 37 (2000) 407–436.
- [41] Xun C. Huang and Lemin Zhu, *Limit cycles in a general Kolmogorov model*, *Nonlin. Anal. Theo. Meth. and Appl.* 60 (2005), 1393-1414.
- [42] Huang, X.C. Limit cycle in a Kolmogorov-type model, *Internat. J. Math. & Math Sci.* VOL. 13 NO. 3 (1990) 555-566.
- [43] X. Huang, Y. Wang, A. Cheng, Limit cycles in a cubic predator–prey differential system, *J. Korean Math. Soc.* 43 (2006) 829–843.
- [44] I.D. Iliev, The number of limit cycles due to polynomial perturbations of the harmonic oscillator, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 127 (1999) 317–322.
- [45] Kuang, Y. and Freedman, H.I. Uniqueness of limit cycles in Gause-type models of Predator-prey systems, *Math. Biosci.* 88 (1988), 67-84.
- [46] Chengzi Li, Chagjian Liu, Jiazhong Yany, A cubic system with thirteen limit cycles, *J. of Differential equations* 246 (2009), 3609-3619.
- [47] J. Li, M. Zhang and S. Li, Bifurcation of limit cycles in Z_2 -equivariant planar polynomial vector field of degree 7, *Int. J. Bifur and Chaos*, 16(2006), 925-943.
- [48] A. Liénard, Étude des oscillations entretenues, *Rev. Gén. Électr.* 23 (1928) 946–954.
- [49] J. Llibre, Averaging theory and limit cycles for quadratic systems, *Radovi Mat.* 11 (2002) 1–14.
- [50] J. Llibre, G. Swirszcz, On the limit cycles of polynomial vector fields, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.* 18 (2011) 203–214.
- [51] J. Llibre, A. E. Turuel, *Introduction to the qualitative theory of differential systems*, Springer basel, 2014.
- [52] J. Llibre and Y. Zhao, *Algebraic Limit Cycles in Polynomial Systems of Differential Equations*, *J. Phys. A : Math. Theor.* 40 (2007), 14207-14222.

- [53] J. Llibre, R. Ramírez, N. Sadovskaia, *On the 16th Hilbert problem for algebraic limit cycles*, J. Differential Equations 248 (2010) 1401–1409.
- [54] J. Llibre, R. Ramírez, N. Sadovskaia, *On the 16th Hilbert problem for limit cycles on nonsingular algebraic curves*, J. Differential Equations 250 (2011) 983-999.
- [55] N.G. Lloyd, Degree Theory, Cambridge University Press, 1978.
- [56] N.G. Lloyd, A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems, J. Lond. Math. Soc. 20 (1979) 277–286.
- [57] N. G. Lloyd and J. M. Pearson, E Saèz and I. Szántó, *Limit cycles of a Cubic Kolmogorov System*, Appl. Math. Lett. vol 9 No.1, (1996),pp 15-18.
- [58] N. G. Lloyd, J. M. Pearson, E. Sáez, and I. Szántó, *A cubic Kolmogorov system with six limit cycles*, International Journal Computers and Mathematics with Applications 44 (2002), 445-455.
- [59] J. E. Marsden, L. Sirovich, M. Golubitsky and W. Jáger, Ordinary Differential Equations with Applications, Appl.Math. Sci, 1999 Springer-Verlag New York, Inc.
- [60] May, R.M. Limit cycles in predator-prey communities, Science 177 (1972), 900-902.
- [61] Peng Yue-hui. Limit Cycles in a Class of Kolmogorov Model with Two Positive equilibrium Points. Natural Science journal of Xiangtan University, Vol. 32 No.4 Dec. 2010, 10-15.
- [62] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Third edition. Texts in Applied Mathematics, 7. Springer-Verlag, New York, 2006.
- [63] H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, Journal de mathématiques pures et appliquées, (III) 7 (1881), 375-422.
- [64] H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, Journal de mathématiques pures et appliquées, (III) 8 (1882), 251-296.
- [65] H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, Journal de mathématiques pures et appliquées, (IV) 1 (1885), 167-244.
- [66] H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, Journal de mathématiques pures et appliquées, (IV) 2 (1886), 151-217.
- [67] N.T.Otrocov, On the number of limit cycles of differential equation in neighbourhood of singular point (in russian), mat.Sb 34(1954), 127-144.

- [68] J.W.Rayn, Phase portraits of planar quadratic systems, Mathematics and Applications (Springer) 583, Springer, New york, 2007.
- [69] J.A. Sanders, F. Verhulst, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, in : Appl.Math. Sci, vol. 59, Springer, 1985.
- [70] S. Shi, A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems, Scientia Sinica, 23(2) 1980, 153-158. Appeared in chinise in Sc.Sin. vol 11, 1051-1056.
- [71] Steve Smale, Mathematical problems for the next century », Mathematics : frontiers and perspectives, Providence, RI, American Mathematics Society, 2000, p. 271-294
- [72] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Universitext, 2nd Edition, Springer, Berlin, 1996.
- [73] S. Wang and P. Yu, Bifurcation of limit cycles in quintic Hamiltonian system under a sixth order perturbation, Chaos Solutions Fractals 26 :5(2005), 1317-1335.
- [74] Stephen Wiggins, Introduction to applied non linear dynamical systems and chaos, Ed. Springer,2000(1990).
- [75] G.Wilson, Hilbert's sixteenth problem, Topology 17, 1978, 53-74
- [76] Y. Wu, Y.Gao and M. Han, On the number and distributions of limit cycles in quintic planar vector field. Internt.J.Bifur.Chaos Appl. Sci. Engrg. 18 :7 (2008), 1939-1955.
- [77] Xiang G, Han M. Global bifurcation of limit cycles in a family of polynomial systems. J Math Anal Appl 2004 ;295 :633–44.
- [78] Xiang G, Han M. Global bifurcation of limit cycles in a family of multiparameter system. Int J Bifur Chaos Appl Sci Eng 2004 ;14 :33 25–35.
- [79] W. Xu, C. Li, Limit cycles of some polynomial Liénard systems, J. Math. Anal. Appl. 389 (2012) 367–378.
- [80] Yan Qian Ye, Sui Lin Cai, and others, Theory of Limit Cycles, Translations of Math. Monographs, Vol. 66, Amer. Math. Soc, Providence, 1986.
- [81] X. Yu, X. Zhang, The hyperelliptic limit cycles of the Liénard systems, J. Math. Anal. Appl. 376 (2011) 535–539.
- [82] P.Zhang, Uniqueness of limit cycles of quadratic systems with a second weak focus, chinese, Acta math. Sinica 41(2) 1999, 289-304.

- [83] X. Zhang, *The 16th Hilbert problem on algebraic limit cycles*, *J. Differential Equations* 251 (2011) 1778–1789.
- [84] Z. Zhang, T. Ding, W. Huang and Z. Dong, *Qualitative theory of differential equations*, Translation of mathematical monographs, vol 102, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

Annexe : Le programme P4.

Le programme P4 " polynomial planar phase portraits" est réalisé pour dessiner le portrait de phase de n'importe quel système différentiel polynômial sur le plan obtenu par la compactification de Poincaré.

La nouvelle version P5 a changé le langage symbolique de REDUCE au MAPLE, et maintenant il est mis en application plus facilement dans n'importe quel système, WINDOWS, UNIX, ou OS-X de MACINTOSH, c.-à-d. où le MAPLE est disponible.

Le P4 est un outil qui peut être utilisé dans l'étude d'un système différentiel planaire polynômial selon le choix de l'utilisateur, il dessine les portraits de phase sur le disque de Poincaré, ou sur tout rectangle dans le plan fini, ou à l'infini dans une des quatre cartes utilisées dans la compactification.

Maintenant nous allons voir comment travaille le P4.

En premier lieu P4 vérifie si le champ de vecteurs a un ensemble continu de points singuliers dans le plan c.-à-d, si les deux composants polynômiaux du champ de vecteurs ont un facteur commun.

S'ils ont un facteur commun, nous divisons le champ de vecteurs par ce facteur commun et nous étudions le nouveau champ de vecteurs. Parfois, si le champ de vecteurs est trop grand, les logiciels de calcul algébrique utilisés (c.-à-d., REDUCE ou MAPLE) ne peuvent pas trouver ce facteur commun. Dans ces cas le P4 ne fonctionnera pas correctement. Nous déterminons les points singuliers finis isolés. Ceci peut être fait en mode algébrique ou numérique. Dans les deux cas P4 demandera au langage symbolique de résoudre le problème. Si le degré du champ de vecteurs est élevé, la détermination de ces singularités peut prendre beaucoup de temps. Dans ce cas et pour un meilleur fonctionnement, on travaille numériquement.