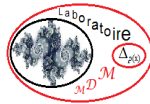


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-ANNABA
Faculte des Sciences
Departement de Mathematiques



Laboratoire de Mathematiques, Dynamique et Modélisation.



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Par **ABDELMALEK Brahim**

Option : Mathématiques appliquées

Thème

ETUDE DES PROBLEMES ELLIPTIQUES NON-LINEAIRES DANS DES OUVERTS NON BORNES

Sous la direction du **Pr. DJELLIT Ali**

Soutenu publiquement, le 03/01/2017 devant le jury composé de :

Président	SAKER Hacene	Prof.	U.B.M. Annaba
Examineur	AÏSSAOUI Mohamed Zine	Prof.	U. Guelma
Examineur	DIABA Fatma	Prof.	U.B.M. Annaba
Examineur	GHANNAM Lahcen	Prof.	U.P.S.Toulouse
Examineur	TAS Saadia	Prof.	U.M.A. Béjaia

Dédicace

je dédie ce modeste travail à :

ma mère et mon père.

Ma femme

*Mes filles **Sadine et Hiba** et mon fils **Dhia**.*

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du **Laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation (MDM)** de l'université de Annaba, sous la direction de Monsieur **Ali Djellit**, Professeur à l'université d'Annaba, que je tiens à lui exprimer ici ma gratitude et le remercier vivement pour m'avoir proposé le sujet de cette thèse. Je voudrais aussi le remercier pour sa disponibilité qu'il m'a accordée tout au long de ces années. Les conseils qu'il m'a prodigués en période de rédaction ont toujours été clairs et succincts, me facilitant grandement la tâche pour la réalisation de ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Hacène Saker**, Professeur à l'université de Annaba, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.

De même je remercie vivement Monsieur **Mohamed Zine Aissaoui**, Professeur à l'université de Guelma, Mme **Fatma Diaba**, Professeur à l'université de Annaba et Mme **Saadia Tas**, Professeur à l'université de Béjaia pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur **Lahcen Ghannam**, Professeur de l'université Paul Sabatier de Toulouse III, pour les critiques constructives qu'il a faites sur l'article et le remercier pour avoir accepté de participer au Jury.

Je remercie les professeurs **Abdel Rachid El Amrouss**, **Omar Chakrone** et **Aomar Anane** de m'avoir bien reçu et conseillé durant mes stages que j'ai effectués au sein du laboratoire d'analyse non linéaire (LANOL) à l'université Mohamed I, Oujda, Maroc.

Enfin, je n'oublie pas de remercier tous les membres du laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation (LMDM) de l'université Badji Mokhtar de Annaba.

Notations

Ω : ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$.

$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω .

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$: point générique de $\mathbb{R}^N$.

$dx = dx_1 dx_2 \dots dx_N$: mesure de Lebesgue sur Ω .

∇u : gradient de u .

$f^+ : \max(f, 0)$, $f^- : \min(f, 0)$.

$\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions différentiables et à support compact dans Ω .

$\mathcal{D}^+(\Omega)$: espace des fonctions positives de $\mathcal{D}$.

$C_0(\Omega)$: espace des fonctions continues nulles au bord de Ω .

$C^\infty(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω .

$L^p(\Omega)$: espace des fonctions de puissance p -ème intégrables sur Ω pour la mesure dx .

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Soit $p(\cdot) : [1, +\infty]$ une fonction mesurable.

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx < +\infty \right\}.$$

$$\|u\|_{p(x)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right| dx \leq 1 \right\} : \text{norme de Luxembourg.}$$

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) ; \nabla u \in L^{p(x)}(\Omega) \right\}$$

$$\|u\|_{1,p(x)} := \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}$$

$$\rho(u) = \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx : \text{le modulaire.}$$

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{si } p < N \\ +\infty & \text{si } p \geq N \end{cases} : \text{Exposant critique de } p.$$

B_R : Boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée à l'origine.

$$\Delta_{p(x)} u = \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) : p(x)\text{-Laplacien de } u.$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} : \text{dérivée partielle de } F \text{ par rapport à } u.$$

$u_n \rightarrow u$: convergence forte de u_n vers u .

$u_n \rightharpoonup u$: convergence faible de u_n vers u .

Résumé

Etude des problèmes elliptiques non-linéaires dans des ouverts non bornés

Par

ABDELMALEK Brahim

Nous étudions quelques équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptiques faisant intervenir des opérateurs non homogènes. Les difficultés sont de deux sortes : perte de compacité dans les injections type Sobolev et introduction des espaces fonctionnels non classiques. Il s'agit dans la première partie d'étudier un problème elliptique à un paramètre faisant intervenir l'opérateur $p(x)$ -Laplacien dans $\mathbb{R}^N$. Nous établissons un résultat d'existence sous certaines conditions sur la non linéarité, notamment au voisinage de zéro et à l'infini. L'approche utilisée reste la théorie des points critiques. Nous montrons que la fonctionnelle d'énergie associée au problème vérifie les conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne, que les points critiques sont précisément les solutions à déterminer. Ensuite nous faisons une extension de ces résultats aux problèmes du type $p(x)$ -Kirchhoff, à savoir une classe de systèmes elliptiques non-linéaires avec un terme non local dans $\mathbb{R}^N$. L'idée essentielle réside dans la décomposition de l'espace $\mathbb{R}^N$ en quatre sous domaines et l'utilisation d'inégalités élémentaires dans $\mathbb{R}^N$. Cela permet des estimations sur des quantités intégrales et là encore, nous montrons que la fonctionnelle d'énergie associée au système admet des points critiques.

Mots clés : systèmes elliptiques non-linéaires ; problème du type $p(x)$ -Kirchhoff ; $p(x)$ -Laplacien ; Théorie des points critiques ; théorème de Passe-Montagne ; condition de Palais-Smale ; norme de Luxemburg ; espaces de Sobolev généralisés.

Abstract

Study of nonlinear elliptic problems in unbounded domain

By

ABDELMALEK Brahim

We study some nonlinear elliptic partial differential equations involving non-homogeneous operators. There are two difficulties : loss of compactness in Sobolev injections and the introduction of non classical functional spaces. In the first part, we deal with parameter elliptic problem involving the $p(x)$ –Laplacian operator in $\mathbb{R}^N$. We establish the existence result under some conditions on the nonlinearity, namely in the neighborhood of zero and infinity. The approach remains the critical point theory. We show that the energy functional associated with the problem verifies the geometric conditions of the Mountain Pass Theorem, so the critical points of the functional are precisely the solutions to be determined. In the second part, we extend these results to the $p(x)$ –Kirchhoff-type problem, precisely a class of nonlinear elliptic systems with nonlocal term in $\mathbb{R}^N$. The essential idea is the decomposition of space $\mathbb{R}^N$ into four subdomains and using elementary inequalities in $\mathbb{R}^N$. This allows one to estimate integral quantities and, again we show that the energy functional associated with the system admits critical points.

Keywords : nonlinear elliptic systems ; $p(x)$ –Kirchhoff-type ; $p(x)$ –Laplacian operator ; critical point theory ; Mountain-Pass theorem ; Palais-Smale condition ; Luxemburg norm ; generalized Sobolev spaces.

Plan de Travail

Nous étudions des problèmes elliptiques non-linéaires faisant intervenir l'opérateur $p(x)$ -Laplacien défini sur des ouverts non bornés de $\mathbb{R}^n$. La non homogénéité de l'opérateur rend l'étude délicate et fait appel à des espaces fonctionnels non classiques. Ces espaces sont des cas particuliers des espaces d'Orlicz dits espaces de Sobolev généralisés et notés W , dont la topologie est induite par une norme de manipulation ardue, appelée norme du Luxemburg. Les techniques d'approche restent la théorie des points critiques.

Dans **le chapitre I**, nous donnons plus de détails sur les propriétés de ces espaces. On apprend précisément que les inégalités type Poincaré, Hölder et certaines immersions type Sobolev sont conservées.

Le chapitre II porte sur la résolution d'une équation elliptique de la forme

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \lambda V(x) |u|^{q(x)-2}u + f(x, u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u \neq 0, u \in W \end{cases} \quad (1)$$

Ici nous montrons que si f vérifie certaines conditions au voisinage de zéro et à l'infini, la fonctionnelle d'énergie correspondant au problème (1) satisfait les conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne, d'où l'existence de solution non triviale.

Le chapitre III est consacré à un système elliptique du type $p(x)$ -Kirchhoff :

$$\begin{cases} -M_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \Delta_{p(x)}u = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ -M_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} dx \right) \Delta_{q(x)}v = \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases}, \quad (2)$$

Là encore nous utilisons le théorème de Passe-Montagne pour montrer l'existence de solution non triviale. Les difficultés qui apparaissent sont d'ordre technique car il s'agit de décomposer l'espace $\mathbb{R}^n$ en quatre sous domaines selon que

les exposants $p(x)$ et $q(x)$ sont supérieurs ou inférieurs à 2. Ce faisant, l'utilisation de certaines inégalités dans $\mathbb{R}^n$ permet d'établir des estimations.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	vi
Abstract	vii
Introduction	1
1 Notions préliminaires	1
1 Espaces de Lebesgue généralisés	1
1.1 Propriétés des espaces $L^{p(x)}(\Omega) = W^{0,p(x)}(\Omega)$	9
2 Opérateur de Nemytskii	11
3 Espaces de Sobolev généralisés	12
3.1 Propriétés de l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$	13
4 Théorie des points critiques	15
4.1 Théorème de Passe-Montagne	18
2 Problème elliptique non-linéaire faisant intervenir l'opérateur $p(x)$ – Laplacien dans $\mathbb{R}^N$	20
1 Introduction	20
2 Hypothèses	22
3 Enoncé du résultat et preuve	22

3	Système elliptique non-linéaire du type $p(x)$–Kirchhoff	30
1	Introduction	30
2	Existence de solutions	36
4	Annexe 1 : Quelques résultats utilisés dans les démonstrations	44
	Conclusion	46
	Bibliographie	47

Introduction

L'étude des équations aux dérivées partielles date du XVIIIe siècle. On dénombre une grande variété de modèles physiques introduits dans les travaux de Cauchy, d'Alembert, Euler, Hamilton, Jacobi, Lagrange, Laplace. Le milieu du XIXe siècle se trouve étoffé par les travaux de Riemann, Poincaré, Hilbert. A partir de là, les EDP reçoivent leur titre de noblesse car elles répondent à beaucoup de questionnements que les scientifiques se posent.

Le champ d'applications des équations aux dérivées partielles non linéaires est assez large. L'un des principaux sursauts pour le développement des EDP non linéaires a été l'étude de la propagation des ondes. Viennent ensuite les équations liées aux phénomènes chimiques et biologiques, et plus tard les équations liées à la mécanique des solides, la dynamique des fluides, l'acoustique, l'optique non linéaire, la physique des plasmas, la théorie quantique des champs et l'ingénierie. L'étude de ces équations est une tâche ardue car il n'y a pas de méthodes générales pour leurs résolutions. Chaque problème nécessite une approche appropriée selon le type de linéarité.

En ce qui nous concerne, nous traitons des équations aux dérivées partielles avec des exposants non standards. Une multitude de résultats ont vu le jour ces dernières années. Cet intérêt grandissant est dû au fait que de nombreux problèmes concrets peuvent être modélisés par ces équations. On cite par exemple les travaux de Chen [13], Ecerbi [3], L. Diening [18], Halsey [14], Ruzicka [44], S. Samko [43] et Peter Hästö.

En clair, ces équations gouvernent des situations liées à la théorie des fluides électro-rhéologiques, qui ont une vaste application dans plusieurs domaines, notamment dans la mécanique, l'électronique flexible et le robotisme (pour rendre les écrans et les claviers enroulables plus rigides à l'emploi mais facile à rétracter pour le stockage lorsqu'ils ne sont pas utilisés) [6]

Historiquement, les espaces de Lebesgue à exposant variable ont été introduits par Orlicz en 1931. Il a défini l'espace $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ et établi l'inégalité de Hölder. Au cours des années qui ont suivi, ces espaces ont été considérés comme une classe des espaces Musielak-Orlicz, eux même cas particulier d'espaces modulaires. D'autre

part, les espaces de Lebesgue à exposant variables ont été découverts de façon indépendante par le mathématicien Russe Tsenov, et largement développés d'abord par Sharapudinov, puis par Zhikov. Ces mathématiciens ont été les premiers à utiliser ce cadre fonctionnel pour examiner des problèmes liés à l'analyse harmonique et le calcul des variations. Ensuite est apparu le papier fondamental de Kovacik et Rakosnik [34] en 1991. A la lumière de cet article, une pléiade de publications ont été éditées. Sans être exhaustif, nous mentionnons les travaux de Fan et Zhao sur le calcul des variations ; Edmunds [23] sur les espaces de Sobolev à exposant variable. Viennent ensuite l'étude d'équations elliptiques gouvernées par l'opérateur $p(x)$ – Laplacien dans des ouverts bornés [29], [26] et [41], ..., dans des domaines non bornés [47], [30] et [31], ... et enfin les systèmes elliptiques [20], [21] et [22],

Ces dernières années, divers problèmes de type Kirchhoff ou $p(x)$ – Kirchhoff ont été largement étudiés par de nombreux auteurs en raison de leur importance théorique et pratique. De tels problèmes sont souvent désignés comme étant non locaux en raison de la présence d'un terme intégrale sur Ω ou $\mathbb{R}^N$ tout entier. Il est bien connu que ce problème est analogue au problème stationnaire d'un modèle introduit par Kirchhoff [37]

$$\rho u_{tt} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L u_x^2 dx \right) u_{xx} = 0.$$

Plus précisément, Kirchhoff a proposé ce modèle comme une extension de l'équation d'onde de la classique d'Alembert en considérant les effets des variations de la longueur des cordes pendant les vibrations. Les paramètres de l'équation ci-dessus ont les significations suivantes : E est le module de Young du matériau, ρ la densité de masse, L la longueur de la chaîne, h la zone de section et P_0 la tension initiale.

Notre approche pour résoudre ce type de problème est basée sur la théorie des points critiques. En clair, les solutions faibles de ces équations sont exactement les points critiques de la fonctionnelle d'énergie associée à ces équations. Dans un premier temps, nous étudions une équation elliptique non-linéaire à une inconnue u de la forme

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \lambda V(x) |u|^{q(x)-2} u + f(x, u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u \neq 0, u \in W \end{cases},$$

où $\Delta_{p(x)}$ représente l'opérateur $p(x)$ – Laplacien d'expression $:= \Delta_{p(x)} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$. f est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$; u est la fonction inconnue définie dans $\mathbb{R}^N$; λ est un paramètre positif et p est une fonction réelle positive, bornée telle que $1 < p(x), q(x) < N$ ($N \geq 2$) pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Au contraire, dans la seconde partie, nous nous intéressons aux couples de solutions d'un système elliptique non-linéaire de deux fonctions inconnues u et v de la forme

$$\begin{cases} -M_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \Delta_{p(x)} u = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ -M_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} dx \right) \Delta_{q(x)} v = \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases}.$$

Ici $1 < p(x), q(x) < N$ ($N \geq 2$) pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. M_1 et M_2 sont des fonctions continues, bornées; et $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2)$.

L'outil principalement utilisé tout au long de ce travail demeure une variante du théorème de Passe-Montagne d'Ambrosetti et Rabinowitz (1973, [5]).

CHAPITRE 1

Notions préliminaires

1 Espaces de Lebesgue généralisés

Nous rappelons dans cette partie quelques définitions et propriétés des espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable dits communément espaces de Sobolev généralisés (voir par exemple [17],[25],[24] et [34])

Nous définissons l'espace de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}(\Omega)$ par

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ mesurable à valeurs réelles, } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}.$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p^- \geq 1$.

Nous notons par $L_+^\infty(\Omega)$ le sous ensemble de $L^\infty(\Omega)$, d'expression :

$$L_+^\infty(\Omega) = \{p \in L^\infty(\Omega) : \inf \text{ess } p \geq 1\}.$$

Nous désignons par modulaire ρ la quantité

$$\rho(u) = \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx.$$

Soient $p^- = \inf \text{ess } p$, $p^+ = \sup \text{ess } p$.

Proposition 1.1 *Pour tout $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$, on a*

(a) $\rho(u) = 0$ si et seulement si $u = 0$;

(b) $\rho(-u) = \rho(u)$;

(c) $\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v)$, pour tout $t \in [0, 1]$; autrement dit ρ est une fonction convexe.

(d) $\rho(u+v) \leq 2^{p^+}(\rho(u) + \rho(v))$.

(e) Si $\lambda > 1$, alors

$$\rho(u) \leq \lambda \rho(u) \leq \lambda^{p^-} \rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+} \rho(u).$$

et si $0 < \lambda < 1$, on a

$$\lambda^{p^+} \rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^-} \rho(u) \leq \lambda \rho(u) \leq \rho(u).$$

(f) Pour tout $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ et $\lambda \in [0, +\infty)$, $\rho(\lambda u)$ est une fonction croissante, continue et convexe.

Preuve. Soit $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$.

(a) On a

$$\rho(u) = 0 \iff |u(x)|^{p(x)} = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\iff |u(x)| = 0 \text{ dans } \Omega \iff u(x) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

(b) Evidente, de la définition de ρ .

(c) Nous considérons la fonction $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d'expression $\varphi(x, s) = |s|^{p(x)}$. Il est clair que φ est convexe par rapport à s . D'après la propriété de l'intégrale de Lebesgue, nous concluons que ρ est convexe.

(d) Nous avons

$$|u(x) + v(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)} \left(|u(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)} \right) \text{ sur } \Omega.$$

Par intégration de l'inégalité ci-dessus, nous obtenons le résultat.

(e) Si $\lambda > 1$, alors

$$|u(x)|^{p(x)} \leq \lambda |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^-} |u(x)|^{p(x)} \leq |\lambda u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^+} |u(x)|^{p(x)}, \text{ dans } \Omega$$

Si $0 < \lambda < 1$, alors

$$\lambda^{p^+} |u(x)|^{p(x)} \leq |\lambda u(x)|^{p(x)} \leq \lambda^{p^-} |u(x)|^{p(x)} \leq \lambda |u(x)|^{p(x)} \leq |u(x)|^{p(x)}, \text{ dans } \Omega$$

En intégrant, dans les deux cas, les inégalités ci-dessus nous obtenons (e).

(f) Pour $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty)$, telles que $\lambda_1 < \lambda_2$, fixons $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, alors

$$|\lambda_1 u(x)|^{p(x)} = |\lambda_1|^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} < |\lambda_2|^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} = |\lambda_2 u(x)|^{p(x)}, \text{ dans } \Omega$$

Par intégration de l'inégalité ci-dessus, nous obtenons

$$\rho(\lambda_1 u) < \rho(\lambda_2 u).$$

Par conséquent

$$\rho(\lambda u) \text{ est croissante pour } \lambda \in [0, \infty).$$

Montrons la continuité. Pour cela soit $\lambda_n \rightarrow \lambda$ et soit la suite

$$\varphi_n := |\lambda_n u(x)|^{p(x)}.$$

Bien évidemment φ_n est une suite convergente vers la quantité $|\lambda u(x)|^{p(x)}$. D'après le Théorème de Convergence Monotone

$$\rho(\lambda_n u) \rightarrow \rho(\lambda u).$$

Par conséquent $\rho(\lambda u)$ est continue pour $\lambda \in [0, \infty)$.

Comme la fonction

$$\varphi(x, \lambda) = |\lambda u(x)|^{p(x)}, \lambda \geq 0$$

est convexe pour rapport à λ , l'application $\rho(\lambda u)$ reste convexe pour $\lambda \in [0, \infty)$.

■

Soit la quantité définie sur l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ par

$$\|u\|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

On définit pour tout $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, l'intervalle I_u de $\mathbb{R}$ par

$$I_u = \left\{ \lambda > 0, \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

il est facile de voir que

$$\begin{cases} I_u = (0, \infty), & u = 0 \\ I_u = [a, \infty), & u \neq 0 \text{ et } a > 0 \end{cases}$$

Proposition 1.2 *L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace vectoriel.*

Nous allons définir une norme dans l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$, notée $\|\cdot\|_{p(x)}$.

Proposition 1.3 *L'expression $\|\cdot\|_{p(x)}$ est une norme sur $L^{p(x)}(\Omega)$, dite norme de Luxembourg.*

Preuve. Soient $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on a :

- (i) $\|u\|_{p(x)} \geq 0$.
- (ii) $\|u\|_{p(x)} = 0 \iff u = 0$.
- (iii) $\|\alpha u\|_{p(x)} = |\alpha| \|u\|_{p(x)}$.
- (iv) $\|u + v\|_{p(x)} = \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)}$.

En effet, (i) est évident. Si $u = 0$, alors $I_u = (0, \infty)$, donc $\|u\|_{p(x)} = 0$. Supposons maintenant que $\|u\|_{p(x)} = 0$. Il existe $(\lambda_n) \subset (0, 1)$ telle que

$$\lambda_n \rightarrow 0 \text{ et } \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

donc

$$1 \geq \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} dx > \left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx.$$

Ceci n'est possible que si $\rho(u) = 0$, car sinon

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \rightarrow +\infty, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

ce qui contredit l'inégalité ci-dessus. Par conséquent $u = 0$.

(iii) Si $\alpha = 0$, le résultat est immédiat. Si $\alpha \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\alpha u\|_{p(x)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{\alpha u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ |\alpha| \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} \\ &= |\alpha| \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} \\ &= |\alpha| \|u\|_{p(x)}. \end{aligned}$$

(iv) Soit l'ensemble défini dans $L^{p(x)}$ par

$$C = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) : \rho(u) \leq 1\}.$$

L'ensemble C est convexe puisque ρ est convexe. Posons $\|u\|_{p(x)} = a$, $\|v\|_{p(x)} = b$, par conséquent

$$\frac{u}{a + \varepsilon}, \frac{v}{b + \varepsilon} \in C, \text{ pour tout } \varepsilon > 0,$$

où $a + \varepsilon \in I_u$ et $b + \varepsilon \in I_v$.

Nous avons aussi

$$\frac{tu}{a + \varepsilon} + \frac{(1-t)v}{b + \varepsilon} \in C, \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

En particulier, en choisissant

$$t = \frac{a + \varepsilon}{a + b + 2\varepsilon},$$

on obtient

$$\frac{u + v}{a + b + 2\varepsilon} \in C.$$

Ainsi

$$a + b + 2\varepsilon \in I_{u+v}.$$

d'où

$$\|u + v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)} + 2\varepsilon, \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Ce qui entraîne l'inégalité triangulaire

$$\|u + v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)}$$

■

Proposition 1.4 *Les propriétés (a)-(f) et la proposition 1.3, en font de l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$, un espace de Banach.*

Proposition 1.5 *Si la fonction $p(x) = p \in [0, +\infty]$, alors $\|\cdot\|_p$ est la norme usuelle de l'espace $L^p(\Omega)$.*

En effet, comme c'est évident pour $u = 0$, nous supposons que $u \neq 0$. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \|u\|_{p(x)} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda^{p(x)}} |u(x)|^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\lambda^{p(x)}} \|u\|_p^p \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \|u\|_p \leq \lambda \right\} \\ &= \|u\|_p. \end{aligned}$$

Proposition 1.6 *Si $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, alors*

$$\|u\|_{p(x)} = a \text{ si et seulement si } \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Preuve. ($\Rightarrow$) Supposons que $\|u\|_{p(x)} = a$, alors

$$I_u = [a, \infty) \text{ et } \rho\left(\frac{u}{a}\right) \leq 1.$$

Supposons que

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) < 1.$$

Pour tout $t > 0$, le modulaire $\rho\left(\frac{u}{t}\right)$ est continue, convexe et décroissante. Il existe alors $\delta > 0$, tel que

$$\rho\left(\frac{u}{t}\right) < 1, \text{ pour tout } t \in (a - \delta, a + \delta).$$

Ainsi, nous aurons $a - \frac{\delta}{2} \in I_u$, ce qui est absurde. En conséquence

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

($\Leftarrow$) Nous supposons que $\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1$ et $a \in I_u$. Par suite $\|u\|_{p(x)} \leq a$. Supposons que $\|u\|_{p(x)} < a$. Il existe alors $\lambda_0 \in I_u$ satisfaisant

$$\|u\|_{p(x)} \leq \lambda_0 < a.$$

Autrement dit

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) \leq \rho\left(\frac{u}{\lambda_0}\right) \leq 1,$$

ce qui est évidemment absurde, donc $\|u\|_{p(x)} = a$. Ceci achève la démonstration.

■

Proposition 1.7 *Si $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ alors,*

- (1) $\|u\|_{p(x)} < 1$ ($= 1$; > 1) *si et seulement si* $\rho(u) < 1$ ($= 1$; > 1)
- (2) *Si* $\|u\|_{p(x)} > 1$, *alors* $\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}$
- (3) *Si* $\|u\|_{p(x)} < 1$, *alors* $\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}$

Preuve. Le cas $u = 0$ est trivial. Nous supposons donc que $u \neq 0$.

D'après la proposition ci-dessus $\|u\|_{p(x)} = 1 \Leftrightarrow \rho(u) = 1$. Maintenant si $\|u\|_{p(x)} = a < 1$, alors $1 < \frac{1}{a}$. En vertu de la croissance de $\rho(\lambda u)$, on obtient pour $\lambda \in [0, \infty)$:

$$\rho(u) < \rho\left(\frac{u}{a}\right) < 1.$$

Réciproquement si $\rho(u) < 1$, alors $1 \in I_u$. On en déduit de la proposition 1.6, que

$$\|u\|_{p(x)} < 1.$$

Les autres inégalités se démontrent de manière similaire.

(2) Si on suppose que $\|u\|_{p(x)} = a > 1$, alors

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Puisque $\frac{1}{a} < 1$, nous obtenons d'après la propriété (e) de la proposition 1.1,

$$\frac{1}{a^{p^+}} \rho(u) \leq \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1 < \frac{1}{a^{p^-}} \rho(u),$$

c'est-à-dire

$$\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}.$$

Pour le point (3), on adapte de manière analogue la démarche de (2). ■

Proposition 1.8 *Soit la suite $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ et soit $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$,
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n - u) = 0$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2). Nous supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$. Par définition de la limite, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$ on a

$$\|u_n - u\|_{p(x)} < \varepsilon < 1.$$

Il s'en suit que

$$\rho(u_n - u) \leq \|u_n - u\|_{p(x)}^{p^-} < \varepsilon^{p^-} < \varepsilon,$$

et par voie de conséquence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n - u) = 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). La réciproque est toute aussi évidente car si $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n - u) = 0$, alors

$$\rho(u_n - u) < \varepsilon^{p^+} \text{ pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

En tenant compte de la proposition 1.7, (1) , on obtient

$$\|u_n - u\|_{p(x)} < 1.$$

Il vient en vertu des résultats de la proposition 1.7, (2),

$$\|u_n - u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u_n - u) < \varepsilon^{p^+}.$$

ou bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Proposition 1.9 ([20]) *L'espace dual de $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ est $L^{p'(x)}(\mathbb{R}^N)$, avec*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1.$$

En outre, pour tout $(u, v) \in L^{p(x)}(\mathbb{R}^N) \times L^{p'(x)}(\mathbb{R}^N)$, nous avons

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')^-} \right) |u|_{p(x)} |v|_{p'(x)} \leq 2 |u|_{p(x)} |v|_{p'(x)}.$$

1.1 Propriétés des espaces $L^{p(x)}(\Omega) = W^{0,p(x)}(\Omega)$

Dans cette section nous introduisons de manière succincte quelques résultats principaux des espaces de Sobolev généralisés $W^{s,p(x)}(\Omega)$. Nous allons insister sur le fait que l'ensemble des propriétés déjà rencontrées dans les espaces de Sobolev classiques restent vraies, notamment l'inégalité de Poincaré, l'inégalité de Hölder et quelques immersions.

Théorème 1.1 *Soit la suite $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ convergente vers u , alors il existe une sous-suite (u_{n_k}) telle que*

- (a) $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ dans Ω ,
- (b) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ dans Ω , avec $h \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Proposition 1.10 (Inégalités de Hölder) Soient $p^- > 1$ et $q \in L_+^\infty(\Omega)$ tels que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Soient $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, alors

$$\left| \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{q(x)}.$$

Preuve. Posons $\|u\|_{p(x)} = a$ et $\|v\|_{q(x)} = b$. D'après l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{u(x) v(x)}{ab} dx \right| &\leq \int_{\Omega} \frac{|u(x)|}{a} \frac{|v(x)|}{b} dx \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} \left| \frac{v(x)}{b} \right|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{1}{p^-} \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)} dx + \frac{1}{q^-} \int_{\Omega} \left| \frac{v(x)}{b} \right|^{q(x)} dx \\ &= \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Théorème 1.2 ([11]) Si $p^- > 1$, alors $L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace réflexif.

Soit $p^- > 1$ et soit $q \in L_+^\infty(\Omega)$ tels que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Alors, pour tout $f \in (L^{p(x)}(\Omega))^*$ il existe un unique $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ tel que

$$f(v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \text{ pour tout } u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

En d'autres termes, le dual de $L^{p(x)}(\Omega)$ peut être identifié à $L^{q(x)}(\Omega)$.

Théorème 1.3 ([11]) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné.*

- 1) *L'espace $C_0(\Omega)$ est dense dans $L^{p(x)}(\Omega)$.*
- 2) *L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^{p(x)}(\Omega)$.*
- 3) *L'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ est séparable.*

2 Opérateur de Nemytskii

Dans cette partie, nous définissons l'opérateur de Nemytskii dans l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$. Cet opérateur est intimement lié à la fonction de Caratheodory. Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 2.1 *Soient $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. L'opérateur N_f défini par $(N_f u)(x) = f(x, u(x))$ est appelé opérateur de Nemytskii relatif à f .*

Si $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de Caratheodory vérifiant

$$|f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p(x)}{q(x)}}, \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et } s \in \mathbb{R}.$$

$p, q \in C_+(\overline{\Omega})$, $a \in L^{q(x)}(\Omega)$, $a(x) \geq 0$ et $b \geq 0$, alors l'opérateur de Nemytskii N_f de $L^{p(x)}(\Omega)$ dans $L^{q(x)}(\Omega)$ est un opérateur continu et borné.

Lemme 2.1 ([7]) *Soit (X, M, μ) un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. On considère la fonction mesurable*

$$\gamma : X \rightarrow [0, +\infty] \text{ telle que}$$

$$\mu(\{x \in X : \gamma(x) = 0\}) = 0$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mu(A) < \epsilon, \quad \forall A \in M \quad \text{avec} \quad \int_A \gamma d\mu < \delta$$

Proposition 2.1 ([7]) *Soit V un espace de Banach uniformément convexe.*

Soit (x_n) une suite dans V telle que $x_n \rightarrow x$ pour la topologie faible $\sigma(V, V')$ et

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Alors $x_n \rightarrow x$ fortement.

On utilise souvent une inégalité dans $\mathbb{R}^N$ pour estimer certaines intégrales.

Lemme 2.2 Soit $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ et soit $1 \leq p < \infty$, on a

$$\frac{1}{p} |\xi|^p - \frac{1}{q} |\eta|^p \leq |\xi|^{p-2} \xi (\xi - \eta).$$

L'inégalité suivante est classique.

Lemme 2.3 Soient $a \geq 0$, $b \geq 0$ et soit $1 \leq p < +\infty$. On a

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p).$$

Remarque 2.1 Sous les conditions $1 \leq p^- \leq p^+ < +\infty$, nous avons

$$(a + b)^{p(x)} \leq 2^{p^+-1} (a^{p(x)} + b^{p(x)}).$$

3 Espaces de Sobolev généralisés

Ces espaces vont représenter le cadre fonctionnel dans lesquels nous allons chercher les solutions.

Notés $W^{1,p(x)}(\Omega)$, ils ont pour expression

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), \quad j = 1, \dots, N \right\}$$

Ici $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ désigne la dérivée partielle de u et satisfait à l'équation

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx, \text{ pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nous munissons l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p(x)}.$$

En outre, si on note gradient de u par $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$, on peut définir, de manière équivalente, l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ par

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega), |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}$$

et le munir de la norme

$$\|u\| = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}.$$

3.1 Propriétés de l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Théorème 3.1 *L'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $\{u_n\}$ une suite de Cauchy dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$, alors $\{u_n\}, \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\}, j = 1, \dots, N$ sont des suites de Cauchy dans $L^{p(x)}(\Omega)$.

Comme $L^{p(x)}(\Omega)$ espace de Banach, il existe $u, w_j \in L^{p(x)}(\Omega)$ tels que

$$u_n \rightarrow u \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_j} \rightarrow w_j \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

$j = 1, \dots, N$.

Nous utilisons l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\Omega} (u_n - u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \leq C \|u_n - u\|_{p(x)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\|_{q(x)}, \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.2)$$

où $C = \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}$. D'après (1, 1), (1, 2), nous avons

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \rightarrow \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx, \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

donc

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} w_j \varphi dx, \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

car

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \varphi dx, \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.5)$$

Par passage à la limite, compte tenu de (1.3) et (1.4), nous obtenons

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} w_j \varphi dx, \text{ pour } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.6)$$

D'après le lemme du Bois-Reymond en (1.6), nous concluons que (voir théorème 0.5),

$$u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \text{ et } w_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, j = 1, \dots, N.$$

On a donc

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p(x)}} = \|u_n - u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p(x)} \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Finalement $W^{1,p(x)}(\Omega)$ est un espace de Banach. ■

Théorème 3.2 ([11]) *L'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ est réflexif et séparable pour $p^- > 1$.*

Définition 3.1 *On désigne par $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Théorème 3.3 ([11]) *L'espace $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est aussi un espace de Banach, réflexif et séparable.*

Si de plus Ω est borné, alors :

Théorème 3.4 ([24]) *Pour $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$, $p(x) \leq q(x)$, on a*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,q(x)}(\Omega)$$

avec injection continue.

Soit p^* l'exposant critique de Sobolev associé à p , d'expression

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{(N-p(x))} & \text{si } p(x) < N, \\ +\infty & \text{si } p(x) \geq N. \end{cases}$$

Théorème 3.5 ([24]) *Pour $p, q \in C(\overline{\Omega})$, $p^-, q^- \geq 1$, on a alors*

$$q(x) < p^*(x) \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

De plus

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega),$$

avec injection continue et compacte.

Théorème 3.6 ([24]) *Si $p, q \in C(\overline{\Omega})$ sont tels que $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(x)$, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, alors*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

avec injection continue.

Théorème 3.7 (Inégalité de Poincaré [11]) *Pour $p \in C(\overline{\Omega})$, $p^- > 1$, il existe $C > 0$ tel que*

$$\|u\|_{p(x)} \leq C \|\nabla u\|_{p(x)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

Corollaire 3.1 *Les normes $\|u\|$, $\|\nabla u\|_{p(x)}$ sont équivalentes sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.*

4 Théorie des points critiques

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$ usuelle et X^* son dual topologique, muni de la norme duale usuelle. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre X et X^* .

Définition 4.1 *Un sous ensemble C de X est dit convexe s'il est stable par com-*

binaison convexe.

$$\forall u, v \in C, \forall \lambda \in]0, 1[, \quad \lambda u + (1 - \lambda)v \in C.$$

Définition 4.2 On dit que $\varphi : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement (en abrégé S.C.I) au point $u \in X$, si $\varphi(u) = -\infty$ ou bien si à tout $\alpha < \varphi(u)$ on peut associé un voisinage V_α de u tel que $\alpha < \varphi(u)$ pour $u \in V_\alpha$ (ou encore, si $\varphi^{-1}(] \alpha, +\infty[$ est un voisinage de u). En terme de suite, si $u_n \rightarrow u$ alors

$$\varphi(u) \leq \liminf \varphi(u_n).$$

La fonction φ est dite S.C.I sur X si elle l'est en tout point de X .

Définition 4.3 De manière similaire, on dit φ est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement

$$\varphi(u) \leq \liminf \varphi(u_n).$$

pour toute suite u_n faiblement convergente vers u .

On suppose maintenant que X est un espace de Banach réel et on définit sur X la fonctionnelle J de classe C^1 . On rappelle que la dérivée de J au point u , notée $DJ(u)$, est l'unique opérateur linéaire continu de X dans $\mathbb{R}$ satisfaisant

$$|J(x+h) - J(x) - DJ(x)[h]| = o(\|h\|) \quad \text{quand } \|h\| \rightarrow 0.$$

Définition 4.4 La fonctionnelle J est dite coéercive si

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

Définition 4.5 Le point $u \in X$ est appelé point critique si $DJ(u) = 0$. La valeur correspondante $J(u)$ est dite valeur critique.

Lorsque X est un espace de Hilbert, on écrit plus simplement, grâce au théorème de Reisz

$$(\nabla J(u), h) = DJ(u)[h], \quad \forall h \in X.$$

D'autre part, étant donné une fonction $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , l'ensemble

$$M = g^{-1}(0) = \{u \in X, \quad g(u) = 0, \quad Dg(u) \neq 0\}$$

représente une variété de classe C^1 . Dans ce cas l'espace tangent à M en u , s'écrit

$$T_u M = \{h \in X, \quad Dg(u)[h] = 0\}.$$

Définition 4.6 *Le point $u \in M$ est appelé un point critique de J contraint à M si $DJ(u)[h] = 0, \forall h \in T_u M$.*

Autrement dit, si X est un espace de Hilbert et $u \in M$ est un point critique de J contraint à M , on a directement

$$\nabla J(u) = \lambda \nabla g(u)$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, appelé multiplicateur de Lagrange.

Le théorème qui va suivre constitue à bien des égards, l'un des théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle.

Théorème 4.1 (Weierstrass) *Soit K un ensemble compact de X et soit $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle semi-continue inférieurement,*

alors J est bornée inférieurement et atteint un minimum absolu sur K , c'est-à-dire qu'il existe $\bar{u} \in K$ tel que

$$J(\bar{u}) = \inf_K J.$$

Comme corollaire, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.2 *Soit X un espace de Banach réflexif et soit $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle coercive et faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement, alors J est bornée inférieurement et atteint un minimum absolu sur X .*

4.1 Théorème de Passe-Montagne

Définition 4.7 (Palais–Smale) (i) La suite $u_n \in X$ est appelée suite de Palais–Smale de niveau c notée $(PS)_c$ si

$$J(u_n) \rightarrow c \quad \text{and} \quad \|DJ(u_n)\|_{X^*} \rightarrow 0.$$

(ii) On dit que la fonctionnelle $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait la condition de Palais–Smale au niveau c si toute suite de $(PS)_c$ possède une sous-suite convergente.

Observons que si $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfait la condition $(PS)_c$, toute point d’accumulation $\bar{u}$ d’une suite u_n de $(PS)_c$ est un point critique de J . On a implicitement $DJ(\bar{x}) = 0$ et $J(\bar{x}) = c$.

Le principe minimax est mis en évidence dans le théorème suivant

Théorème 4.3 (minimax) Considérons $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, où X est un espace de Hilbert, supposons que $\eta = -\nabla J(\eta)$ définie par $\eta(t, \cdot) : X \rightarrow X$, $\forall t \geq 0$.

i) Il existe une famille de sous-ensembles $F \subset X$, est dit $\mathcal{F}$ invariant positif, i.e., si $F \in \mathcal{F}$ alors $\eta(t, F) \in \mathcal{F}$, $\forall t \geq 0$

ii) Le minmax niveau $c = \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{x \in F} J(x)$ est fini

iii) J satisfait $(PS)_c$

Alors c est une valeur critique.

Lemme 4.1 Supposons $DJ = L + K$, où $L : X \rightarrow X^*$ est un opérateur linéaire inversible à inverse borné, et $K : X \rightarrow X^*$ est compact (i.e., ensemble des opérateurs bornés dans X dans des ensembles précompact dans X^*). Alors, toute suite bornée de $(PS)_c$ $x_n \in X$ est précompact.

Un résultat important du principe du minimax est illustré par le théorème de Passe-Montagne d’Ambrosetti et Rabinowitz [5]. Avant de l’énoncer, on considère l’ensemble Γ de tous les chemins joignant l’origine à u_0 de X :

$$\Gamma = \{ \gamma \in C([0, 1], X), \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma(1) = u_0 \},$$

et on pose

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} J(\gamma(s)).$$

Théorème 4.4 *Supposons que $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ et satisfaisant les trois conditions*

- i) $J(0) = 0$,*
- ii) $\exists \rho, \alpha > 0$ tels que $J(u) \geq \alpha$ pour $\|u\| = \rho$,*
- iii) $\exists u_0 \in X$ avec $\|u_0\| > \rho$ et tel que $J(u_0) \leq 0$.*

On suppose de plus que J satisfait la condition $(PS)_c$, alors c est une valeur critique.

Précisément, il existe $v \in X$, tel que $J(v) = c$ et $DJ(v) = 0$.

En particulier, $v \neq 0$, u_0 .

CHAPITRE 2

Problème elliptique non-linéaire faisant intervenir l'opérateur $p(x)$ – Laplacien dans $\mathbb{R}^N$

1 Introduction

Nous traitons dans ce chapitre un problème elliptique non-linéaire faisant intervenir l'opérateur $p(x)$ – Laplacien avec une nonlinéarité soumise à des conditions de croissances au voisinage de l'origine et au voisinage de l'infini. L'essentiel du travail consiste à montrer que la fonctionnelle d'énergie associée à l'équation d'Euler satisfait les conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne.

Soit donc le problème défini sur $\mathbb{R}^N$, de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{p(x)} u = \lambda V(x) |u|^{q(x)-2} u + f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N \\ u \neq 0, u \in W \end{array} \right. . \quad (2.1)$$

Ici $\Delta_{p(x)}$ est l'opérateur $p(x)$ – Laplacien d'expression $:= \Delta_{p(x)} u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$. f est une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$; u est la fonction inconnue à déterminer, définie sur $\mathbb{R}^N$ et appartenant à un espace approprié; λ est un paramètre positif; p et q sont deux fonctions réelles positives. Précisément, $p, q \in C_+(\mathbb{R}^n)$.

Le problème (2,1) est la conjonction de deux travaux de recherche, l'une

concerne le problème

$$-\Delta_{p(x)}u = f(x, u) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2)$$

et l'autre, le problème aux valeurs propres

$$-\Delta_{p(x)}u = \lambda V(x) |u|^{q(x)-2} u, \quad \text{dans } \Omega \quad (2.3)$$

Des résultats d'existence ont été établis pour le problème (2.2) sur des domaines bornés de $\mathbb{R}^N$ par les auteurs [29],[39] et [26], et sur l'espace $\mathbb{R}^N$ tout entier, par [30], [10] et [4].

Cependant, du problème (2.3) émane plusieurs résultats spectraux. Tout d'abord avec Ω borné, [40] prouve l'existence d'un spectre continu sous les conditions de Dirichlet homogène, $V(x) = 1$ et $1 < \min_{\Omega} q(x) < \min_{\Omega} p(x) < \max_{\Omega} q(x)$.

Toutefois dans [36], l'auteur a établi, en utilisant le principe variationnel d'Ekeland, qu'il existe $\lambda^* > 0$ tel que toute valeur $\lambda \in (0, \lambda^*)$ est une valeur propre de problème (2.3).

Dans le cas où $p(x) = q(x)$, sous les conditions de Dirichlet, les auteurs dans [28] ont montré en utilisant la théorie des points critiques de Ljusternik-Schnirelmann que le problème (2.3) admet une infinité de valeurs propres, que les valeurs propres positives peuvent tendre vers l'infini.

Dans [27] l'étude est faite sous les conditions de Neumann ; on apprend alors que la plus petite valeur propre est 0, qu'elle n'est pas simple et que le spectre est infini.

Une extension du problème (2.3) est décrite sous la forme $:= -\operatorname{div}(\phi(x, |\nabla u|) \nabla u) = \lambda f(x, u)$ dans $\mathbb{R}^N$. Sous des conditions appropriées sur ϕ et f , les auteurs [33] ont prouvé l'existence et la positivité de l'infimum de toutes les valeurs propres, soutenu par un exemple illustratif.

En ce qui nous concerne, nous allons introduire des conditions sur V et f pour prouver l'existence de solutions non triviales du problème (2, 1).

2 Hypothèses

Définition 2.1 La fonction $u \in W$ est une solution de (2.1) si pour tout $v \in W$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u|^{q(x)-2} u v dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) v dx = 0.$$

Posons $F(x, u) = \int_0^u f(x, t) dt.$

- (H1) Nous supposons que les fonctions p, q sont continues, $p(x) < N$, et $1 < p^- < p^+ < q^- < q^+ \leq p^*(x)$. Assumons de plus que p vérifie la condition faible-Lipschitz, c'est-à-dire $|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{|\log |x - y||}$ pour $|x - y| \leq \frac{1}{2}$.
- (H2) Nous supposons que $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory vérifiant $|f(x, u)| \leq a(x) |u|^{\frac{p(x)}{\alpha(x)}}$, $\forall (x, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Ici $a \in L^{\alpha(x)}(\mathbb{R}^N)$, est fonction mesurable non négatif, et telle que $\frac{1}{\alpha(x)} + \frac{1}{p(x)} = 1$.
- (H3) Nous supposons que $0 \leq \theta F(x, u) \leq u f(x, u)$, $p^+ < \theta < q^-$.
- (H4) Nous supposons enfin que le potentiel $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{r(x)}(\mathbb{R}^N)$ est nonnegative, avec $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$.

Remarque 2.1 Comme dans [10] l'hypothèse (H3) implique que, pour tout $t > 1$, $F(x, tu) \geq t^\theta F(x, u)$. Par ailleurs, tenant compte de (H1), $W = W^{1,p(x)}$.

3 Enoncé du résultat et preuve

Théorème 3.1 Si les hypothèses (H1) - (H4) sont vérifiées alors le problème (2.1) a une solution faible non triviale pour tout $\lambda > 0$.

L'approche étant variationnelle, on définit tout d'abord la fonctionnelle d'éner-

gie correspondant au problème (2.1) par

$$J_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda \frac{V(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx.$$

Posons

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx, \\ \psi(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} dx, \\ K(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx. \end{aligned}$$

Lemme 3.1 *La fonctionnelle J_λ est bien définie et de classe $C^1(W, \mathbb{R})$. De plus*

$$\langle J'_\lambda(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v - \lambda V(x) |u|^{q(x)-2} uv \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) v dx.$$

Le résultat est évident.

Lemme 3.2 *Il existe des constantes positives ρ et α telles que $J_\lambda(u) \geq \alpha$ sur $\|u\|_{p(x)} = \rho$.*

Preuve. A l'aide l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |F(x, u)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{a(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} \right| dx \\ &\leq \frac{2}{q^-} |a|_{\alpha(x)} \left| |u|^{q(x)} \right|_{p(x)} \\ &\leq \frac{2c_1}{q^-} |a|_{\alpha(x)} \|u\|_{p(x)}^{q^i}, \\ i &= \pm \text{ si } \|u\|_{p(x)} \gtrless 1. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} dx &\leq \frac{2}{q^-} |V|_{r(x)} \left| |u|^{q(x)} \right|_{r'(x)} \\
 &\leq \frac{2}{q^-} |V|_{r(x)} \|u\|_{q(x)r'(x)}^{q^i} \\
 &\leq \frac{2c_2}{q^-} |V|_{r(x)} \|u\|_{p(x)}^{q^i}, \\
 i &= \pm \text{ si } \|u\|_{p(x)} \geq 1.
 \end{aligned}$$

En usant de ce qui précède, on aura

$$\begin{aligned}
 J_\lambda(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} - \lambda \frac{V(x)}{q(x)} |u|^{q(x)} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx \\
 &\geq \frac{1}{p^+} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p(x)} dx - \frac{2\lambda c_2}{q^-} |V|_{r(x)} \|u\|_{p(x)}^{q^i} - \frac{2c_1}{q^-} |a|_{\alpha(x)} \|u\|_{p(x)}^{q^i} \\
 &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|_{p(x)}^{p^i} - \frac{2\lambda c_2}{q^-} |V|_{r(x)} \|u\|_{p(x)}^{q^i} - \frac{2c_1}{q^-} |a|_{\alpha(x)} \|u\|_{p(x)}^{q^i} \\
 &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|_{p(x)}^{p^i} - \left(\frac{2\lambda c_2}{q^-} |V|_{r(x)} + \frac{2c_1}{q^-} |a|_{\alpha(x)} \right) \|u\|_{p(x)}^{q^i}.
 \end{aligned}$$

où c_1, c_2 sont des constantes positives.

Par conséquent, pour tout $\lambda > 0$ et $\|u\|_{p(x)} = \rho$ suffisamment petit, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$J_\lambda(u) \geq \alpha > 0$$

■

Lemme 3.3 *Il existe $u_0 \in W$, $\|u_0\|_{p(x)} > \rho$ tel que $J_\lambda(u_0) < 0$*

Preuve. Nous choisissons $v \in W$, $\|v\|_{p(x)} > 1$. Pour t suffisamment grand, on

obtient

$$\begin{aligned}
J_\lambda(tv) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p(x)} |\nabla tv|^{p(x)} - \lambda \frac{V(x)}{q(x)} |tv|^{q(x)} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, tv) dx \\
&\leq \frac{1}{p^-} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla tv|^{p(x)} dx - \lambda \frac{1}{q^+} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |tv|^{q(x)} dx \\
&\leq \frac{t^{p^+}}{p^-} \|v\|_{p(x)}^{p^+} - \frac{2\lambda ct^{q^-}}{q^+} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |v|^{q(x)} dx.
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que $J_\lambda(tv) \rightarrow -\infty$, quand $t \rightarrow +\infty$, puisque $0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_0|^{q(x)} dx \leq 2c_2 |V|_{r(x)} \|u_0\|_{p(x)}^{q^+}$. ■

Lemme 3.4 *La fonctionnelle J_λ satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_c$, pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit (u_n) une suite de Palais-Smale $(PS)_c$ pour la fonctionnelle J_λ dans W c'est-à-dire $J_\lambda(u_n) \rightarrow c$ et $J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$, alors la suite u_n est bornée dans W .

En effet, comme $J_\lambda(u_n)$ est borné, nous avons

$$\begin{aligned}
C_1 &\geq J_\lambda(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} - \lambda \frac{V(x)}{q(x)} |u_n|^{q(x)} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} - \lambda \frac{V(x)}{q(x)} |u_n|^{q(x)} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \lambda \frac{V(x)}{q(x)} |u_n|^{q(x)} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_n}{\theta} f(x, u_n) dx.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)} - \lambda V(x) |u_n|^{q(x)} dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n dx,$$

on a finalement

$$\begin{aligned}
C_1 &\geq \frac{1}{p^+} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \frac{1}{q^-} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda V(x) |u_n|^{q(x)} dx + \frac{1}{\theta} \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle \\
&\quad - \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda V(x) |u_n|^{q(x)} dx \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \lambda V(x) |u_n|^{q(x)} dx + \frac{1}{\theta} \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle
\end{aligned}$$

Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que (u_n) n'est pas bornée dans W . En particulier, nous pouvons choisir $\|u_n\| \geq 1$ pour n suffisamment grand. Puisque $J'_\lambda(u_n) \rightarrow 0$, il existe $C_3 > 0$ tel que

$$-C_3 \|u_n\|_{p(x)} \leq \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle \leq C_3 \|u_n\|_{p(x)}.$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
C_1 &\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_n\|_{p(x)}^{p^+} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \lambda V(x) |u_n|^{q(x)} dx - \frac{1}{\theta} C_3 \|u_n\|_{p(x)} \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta} \right) \|u_n\|_{p(x)}^{p^+} - \frac{1}{\theta} C_3 \|u_n\|_{p(x)}.
\end{aligned}$$

Ceci implique une contradiction.

Par conséquent la suite (u_n) est bornée dans W . Il existe alors une sous-suite, notée encore (u_n) , faiblement convergente vers u dans W .

Il reste à montrer que (u_n) est fortement convergente vers u dans W .

A cette fin, nous considérons l'égalité suivante

$$\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u \rangle = \quad (2.4)$$

$$\langle \varphi'(u_n) - \varphi'(u), u_n - u \rangle - \langle \psi'(u_n) - \psi'(u), u_n - u \rangle - \langle K'(u_n) - K'(u), u_n - u \rangle.$$

De toute évidence, le terme de gauche tend vers zéro pour n assez grand. Montrons aussi que $\langle K'(u_n) - K'(u), u_n - u \rangle \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Pour celà, soit B_R la boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centré à l'origine et soit B'_R son

complémentaire dans $\mathbb{R}^n$. On peut écrire

$$\begin{aligned} |\langle K'(u_n) - K'(u), u_n - u \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_n) - f(x, u)) (u_n - u) dx \right| \\ &\leq \int_{B_R} |f(x, u_n) - f(x, u)| |u_n - u| dx \\ &\quad + \int_{B'_R} |f(x, u_n) - f(x, u)| |u_n - u| dx \end{aligned}$$

Compte de la proposition 1.7 et de la compacité de l'injection de $W^{1,p(x)}(B_R)$ dans $L^{p(x)}(B_R)$, le premier terme du membre de droite de l'inégalité ci-dessus s'annule quand $n \rightarrow \infty$. Le second terme aussi s'annule quand $R \rightarrow \infty$. En effet, en vertu de (H2) l'opérateur de Nemytskii est borné, par conséquent

$$\int_{B_R} |f(x, u_n) - f(x, u)| |u_n - u| dx \leq 2 \|f(x, u_n) - f(x, u)\|_{\alpha(x)} \|u_n - u\|_{p(x), B_R} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} &\int_{B'_R} |f(x, u_n) - f(x, u)| |u_n - u| dx \leq \\ &\int_{B'_R} a(x) |u_n|^{p(x)} + a(x) |u_n|^{p(x)-1} |u| + a(x) |u|^{p(x)} + a(x) |u|^{p(x)-1} |u_n| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

pour R suffisamment grand. La raison principale est le fait que la fonction-poids a appartient à $L^{\alpha(x)}(\mathbb{R}^n)$. En effet, on peut donner une estimation de chaque terme de l'intégrale ci-dessus. Tout d'abord, on voit aisément que

$$\int_{B'_R} a(x) |u_n|^{p(x)} dx \leq 2 \|a\|_{\alpha(x)} \left\| |u_n|^{p(x)} \right\|_{p(x)} < \frac{\varepsilon}{8},$$

pour R suffisamment grand.

L'utilisation l'inégalité de Young, nous permet d'obtenir la deuxième estima-

tion, à savoir

$$\begin{aligned} \int_{B'_R} a(x) |u_n|^{p(x)-1} |u| dx &\leq \int_{B'_R} a(x) \left(|u_n|^{p(x)} + |u|^{p(x)} \right) dx \\ &\leq 2 |a|_{\alpha(x)} \left(\left| |u_n|^{p(x)} \right|_{p(x)} + \left| |u|^{p(x)} \right|_{p(x)} \right) < \frac{\varepsilon}{8}, \end{aligned}$$

pour R suffisamment grand. De manière similaire on montre que les deux derniers termes sont inférieurs à $\frac{\varepsilon}{8}$.

En reprenant pas à pas les mêmes arguments, on en déduit que

$$\begin{aligned} \langle \psi'(u_n) - \psi'(u), u_n - u \rangle &\leq \lambda \int_{B_R} \left| V(x) \left(|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u|^{q(x)-2} u \right) \right| |u_n - u| dx \\ &\quad + \lambda \int_{B'_R} V(x) \left(|u_n|^{q(x)} + |u|^{q(x)-2} u_n u + |u|^{q(x)} + |u_n|^{q(x)-2} u_n u \right) dx \\ &\leq c_1 \left| V(x) \left(|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u|^{q(x)-2} u \right) \right|_{r(x)} |u_n - u|_{q(x)} \\ &\quad + c_2 |V(x)|_{r(x)} \left(\left| |u_n|^{q(x)} \right|_{q(x)} + \left| |u|^{q(x)} \right|_{q(x)} \right) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

pour n, R assez grand.

La dernière étape consiste à utiliser deux inégalités élémentaires dans $\mathbb{R}^N$, à savoir

$$\begin{aligned} (p-1) |\zeta - \eta|^2 (|\zeta| + |\eta|)^{p-2} &\leq (|\zeta|^{p-2} \zeta - |\eta|^{p-2} \eta) (\zeta - \eta), \quad p(x) \geq 2 \\ (p-1) |\zeta - \eta|^2 (|\zeta| + |\eta|)^{p-2} &\leq (|\zeta|^{p-2} \zeta - |\eta|^{p-2} \eta) (\zeta - \eta), \quad 1 < p(x) < 2. \end{aligned}$$

Il résulte de (2.4) que $\langle \varphi'(u_n) - \varphi'(u), u_n - u \rangle \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Or si $p(x) \geq 2$, nous obtenons à l'aide la première inégalité

$$\begin{aligned} 2^{2-p^+} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx &\leq \\ \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) (\nabla u_n - \nabla u) dx &\rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Au contraire, si $p(x) \geq 1$ il faut considérer les deux ensembles

$$U_p = \{x \in \mathbb{R}^N, p(x) \geq 2\}; \quad V_p = \{x \in \mathbb{R}^N, 1 < p(x) < 2\},$$

et par la suite, appliquer la première inégalité sur U_p et la deuxième inégalité

sur V_p . ■

Proof of theorem 3.1. Selon le lemme 3.2, 3.3 et le lemme 3.4, la fonctionnelle énergie J_λ satisfait les conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne. c est donc une valeur critique de J_λ associée au point critique $u \in W$, qui est précisément une solution de (2.1). La preuve est terminée. ■

CHAPITRE 3

Système elliptique non-linéaire du type $p(x)$ –Kirchhoff

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous établissons un résultat d’existence de solutions pour une classe de systèmes elliptiques avec un terme non local dans $\mathbb{R}^N$. Là encore nous appliquons le théorème de Passe-Montagne. Le fait de travailler sur l’espace $\mathbb{R}^N$ tout entier rend l’étude plus ardue.

Nous considérons donc le système

$$\left\{ \begin{array}{l} -M_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \Delta_{p(x)} u = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ -M_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} dx \right) \Delta_{q(x)} v = \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \end{array} \right., \quad (3.1)$$

où p et q sont des fonctions à valeurs réelles satisfaisant $1 < p(x), q(x) < N$ ($N \geq 2$) pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. M_1 et M_2 sont des fonctions continues et bornées. Pour simplifier, nous nous limitons au cas $M_1 = M_2 = M$. Les résultats restent valables dans le cas où $M_1 \neq M_2$ moyennant des conditions plus fines sur ces fonctions. Le potentiel $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2)$. Le couple de solution (u, v) évolue dans les espaces de Sobolev généralisés.

L'étude de systèmes elliptiques dérivant d'un potentiel a été faite pour le Laplacien dans [19], les auteurs ont étudié l'existence de solution du système elliptique de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta v = \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) & \text{dans } \Omega \end{cases}.$$

Les auteurs dans [21] ont étudié le système elliptique faisant intervenir l'opérateur p -Laplacien défini dans $\mathbb{R}^N$ tout entier

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases},$$

avec des conditions de croissance sous et sur critiques sur les non-linéarités, $1 < p, q < N$. Il a été établi ici encore l'existence de solutions non triviales.

Dans [22], l'auteur prouve l'existence et la multiplicité de solutions en traitant le système

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ -\operatorname{div}(|\nabla v|^{q(x)-2} \nabla v) = \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ u = 0, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases},$$

avec Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, de bord $\partial\Omega$, $N \geq 2$, $p, q \in C(\overline{\Omega})$, $p(x) > 1$ et $q(x) > 1$. La fonction F est supposée continue pour $x \in \overline{\Omega}$, de classe $C^1(\Omega)$ pour $u, v \in \mathbb{R}$ et satisfaisant des conditions de croissance sous-critiques.

En 2012, dans [20], les auteurs ont démontré l'existence de solution pour le système elliptique

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_{q(x)} v = \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases},$$

en montrons que la fonctionnelle d'énergie est faiblement semi-continue et co-

écrivie sur un espace de Banach réflexif.

Dans le papier de [46], l'étude porte sur le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) + |u|^{p(x)-2} u = \frac{\partial F}{\partial u} (x, u, v) & \text{dans } \mathbb{R}^N \\ -\operatorname{div} \left(|\nabla v|^{q(x)-2} \nabla v \right) + |v|^{q(x)-2} v = \frac{\partial F}{\partial v} (x, u, v) & \text{dans } \mathbb{R}^N \end{cases},$$

avec $N \geq 2$, $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^N$. La fonction F est une fonction de Caratheodory, bornée sur $\mathbb{R}^N$ et de classe C^1 par rapport à u et v . L'outil essentiellement utilisé reste la théorie des points critiques,.

Enfin, pour les équations elliptiques du type $p(x)$ -Kirchhoff, nous citons les travaux de [12], [31], [32], [38], [41] et [47]. Ici les approches sont aussi différentes les unes que les autres.

En rappel, l'auteur [16], a montré l'existence et la multiplicité des solutions pour le système elliptique

$$\begin{cases} -M_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) = \frac{\partial F}{\partial u} (x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ -M_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} dx \right) \operatorname{div} \left(|\nabla v|^{q(x)-2} \nabla v \right) = \frac{\partial F}{\partial v} (x, u, v) & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est domaine borné $\mathbb{R}^N$, de bord $\partial\Omega$, $p(x), q(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ avec $1 < p^- = \min_{\overline{\Omega}} p(x) < p^+ = \max_{\overline{\Omega}} p(x)$, $1 < q^- = \min_{\overline{\Omega}} q(x) < q^+ = \max_{\overline{\Omega}} q(x)$. $M_1(t)$, $M_2(t)$ sont des fonctions continues telles que $M_1(t) = M_2(t)$.

Dans [15], les auteurs montrent à l'aide du principe variationnel d'Ekeland l'existence de solution pour le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -M_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right) = \frac{\partial F}{\partial u} (u, v) + \rho_1(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ -M_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} dx \right) \operatorname{div} \left(|\nabla v|^{q(x)-2} \nabla v \right) = \frac{\partial F}{\partial v} (u, v) + \rho_2(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Nous allons chercher les solutions de (3.1) dans l'espace produit $W_{p(x),q(x)} = W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,q(x)}(\mathbb{R}^N)$ équipé de la norme :

$$\|(u, v)\|_{p(x)} = \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{q(x)}.$$

Définition 1.1 On dit que $(u, v) \in W_{p(x),q(x)}$ est une solution faible de (3.1) si pour tout $(z, w) \in W_{p(x),q(x)}$ on a

$$\begin{aligned} & M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla z dx \\ & + M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} dx \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q(x)-2} \nabla v \nabla w dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial u} (x, u, v) z dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial v} (x, u, v) w dx = 0, \end{aligned}$$

La fonctionnelle d'Euler-Lagrange $I : W_{p(x),q(x)} \rightarrow \mathbb{R}$, associée au problème (3.1) est définie par

$$I(u, v) = J(u, v) - K(u, v),$$

avec

$$J(u, v) = \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) + \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} dx \right),$$

et

$$K(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u, v) dx.$$

$$\text{Ici } \widehat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds.$$

Nous allons énoncé les différentes conditions que doivent satisfaire les non linéarités. Grossièrement, la fonction F doit être assez régulière, nulle à l'origine et que ces dérivées partielles vérifient des conditions de croissance polynomiales. En clair :

(H1) $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $F(x, 0, 0) = 0$.

(H2) Il existe deux fonctions-poids $a_i, b_i, i = 1, 2$ telles que :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) \right| &\leq a_1(x) |u|^{\gamma_1-1} + a_2(x) |v|^{\gamma_2-1} \\ \left| \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) \right| &\leq b_1(x) |u|^{\mu_1-1} + b_2(x) |v|^{\mu_2-1}, \end{aligned}$$

où $1 < \gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2 < \inf(p(x), q(x))$, et $p(x), q(x) > \frac{N}{2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Les fonctions-poids appartiennent à des espaces bien choisis, c'est-à-dire :

$$a_1 \in L^{\alpha_1(x)}(\mathbb{R}^N); \quad a_2, b_1 \in L^{\beta(x)}(\mathbb{R}^N); \quad b_2 \in L^{\alpha_2(x)}(\mathbb{R}^N),$$

$$\text{avec } \alpha_1(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}; \quad \beta(x) = \frac{p^*(x)q^*(x)}{p^*(x)q^*(x) - p^*(x) - q^*(x)}, \quad \alpha_2(x) = \frac{q(x)}{q(x)-1}.$$

- (H3) Il existe des constantes $R > 0$, $\theta > 1$ et $\mu < 1 - \frac{1}{\theta}$, et une fonction positive $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $|u|, |v| \leq R$ et t suffisamment grand, nous avons $F\left(x, t^{\frac{1}{p^+}}u, t^{\frac{1}{q^+}}v\right) \geq t^\theta H(x, u, v)$.
- (H4) De plus, F vérifie une variante de la condition de Ambrosetti-Rabinowitz, nous avons
- $$0 < F(x, u, v) \leq u \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) + v \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v).$$
- (H5) Il existe $m_0 > 0$, $\mu \in]0, 1[$ tels que $m_0 \leq M(t)$ et $\widehat{M}(t) \geq (1 - \mu)M(t)t$.

Remarque 1.1 D'après (H5), nous savons que la fonction $g(t) = \frac{\widehat{M}(t)}{1 - t^\mu}$ est décroissante, donc pour tout $t_0 > 0$, lorsque $t > t_0$, nous pouvons obtenir

$$g(t) \leq g(t_0)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{M}(t)}{1 - t^\mu} &\leq \frac{\widehat{M}(t_0)}{1 - t_0^\mu}, \text{ pour } t > t_0 \\ \Rightarrow \ln \frac{\widehat{M}(t)}{1 - t^\mu} &\leq \ln \frac{\widehat{M}(t_0)}{1 - t_0^\mu}, \text{ pour } t \geq t_0 \\ \Rightarrow \ln \widehat{M}(t) - \frac{1}{1 - \mu} \ln t &\leq \ln \widehat{M}(t_0) - \frac{1}{1 - \mu} \ln t_0, \text{ pour } t \geq t_0 \\ \Rightarrow \ln \widehat{M}(t) &\leq \ln \widehat{M}(t_0) - \frac{1}{1 - \mu} \ln t + \frac{1}{1 - \mu} \ln t_0, \text{ pour } t \geq t_0 \\ \Rightarrow \ln \widehat{M}(t) &\leq \ln \widehat{M}(t_0) + \ln t^{\frac{1}{1 - \mu}} - \ln t_0^{\frac{1}{1 - \mu}}, \text{ pour } t \geq t_0 \end{aligned}$$

d'où

$$\widehat{M}(t) \leq \frac{\widehat{M}(t_0)}{t_0^{\frac{1}{1 - \mu}}} t^{\frac{1}{1 - \mu}} \leq C t^{\frac{1}{1 - \mu}}$$

2 Existence de solutions

Lemme 2.1 [16] *La fonctionnelle I est bien définie dans $W_{p(x),q(x)}$, et il est de classe C^1 , et nous avons*

$$I'(u, v)(z, w) = D_1 I(u, v)(z) + D_2 I(u, v)(w)$$

où

$$\begin{aligned} D_1 I(u, v)(z) &= M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla z dx - D_1 K(u, v) z \\ D_2 I(u, v)(w) &= M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} dx \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q(x)-2} \nabla v \nabla w dx - D_2 K(u, v) w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } D_1 I(u, v)(z) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, v) z dx \\ D_2 I(u, v)(w) &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial v}(x, u, v) w dx \end{aligned}$$

Lemme 2.2 *Sous les hypothèses (H1) - (H5), il existe $\rho, \alpha > 0$ tel que $I(u, v) \geq \alpha$ si $\|(u, v)\|_{p(x)} = \rho$ pour tout $(u, v) \in W_{p(x),q(x)}$.*

Preuve. La fonction F étant régulière, on peut écrire

$$\begin{aligned} F(x, u, v) &= \int_0^u \frac{\partial F}{\partial s}(x, s, v) ds + F(x, 0, v) \\ &= \int_0^u \frac{\partial F}{\partial s}(x, s, v) ds + \int_0^v \frac{\partial F}{\partial s}(x, 0, s) ds + F(x, 0, 0) \\ &\leq \int_0^u (a_1(x) |s|^{\gamma_1-1} + a_2(x) |v|^{\gamma_2-1}) ds + \int_0^v b_2(x) |s|^{\mu_2-1} ds \\ &\leq c_1 [a_1(x) |u|^{\gamma_1} + a_2(x) |v|^{\gamma_2-1} |u| + b_2(x) |v|^{\mu_2}]. \end{aligned}$$

Nous obtenons par intégration

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u, v) dx \leq c_2 \left[|a_1|_{\alpha_1(x)} \| |u|^{\gamma_1} \|_{p(x)} + |a_2|_{\beta(x)} \| |v|^{\gamma_2-1} \|_{q^*(x)} |u|_{p^*(x)} + |b_2|_{\alpha_2(x)} \| |v|^{\mu_2} \|_{q(x)} \right]$$

Suite à l'injection continue de $W_{p(x)}$ dans $L^{s(x)p(x)}(\mathbb{R}^N)$, pour $s(x) > 1$, il existe $c_1 > 0$ tel que

$$\| |u|^{\gamma_1} \|_{p(x)} = |u|_{\gamma_1 p(x)}^{\gamma_1} \leq c_1 \|u\|_{p(x)}^{\gamma_1}$$

Pour les mêmes raisons, on a aussi

$$\| |v|^{\gamma_2-1} \|_{q^*(x)} = |v|_{(\gamma_2-1)q^*(x)}^{\gamma_2-1} \leq c_2 \|v\|_{q(x)}^{\gamma_2-1}$$

et

$$\| |v|^{\mu_2} \|_{q(x)} = |v|_{\mu_2 q(x)}^{\mu_2} \leq c_3 \|v\|_{q(x)}^{\mu_2}.$$

Par conséquent

$$|K(u, v)| \leq c_4 \left[|a_1|_{\alpha_1(x)} |u|_{\gamma_1 p(x)}^{\gamma_1} + |a_2|_{\beta(x)} |v|_{(\gamma_2-1)q^*(x)}^{\gamma_2-1} |u|_{p^*(x)} + |b_2|_{\alpha_2(x)} |v|_{\mu_2 q(x)}^{\mu_2} \right].$$

Finalement

$$|K(u, v)| \leq c \left[|a_1|_{\alpha_1(x)} \|u\|_{p(x)}^{\gamma_1} + |a_2|_{\beta(x)} \|v\|_{q(x)}^{\gamma_2-1} \|u\|_{p(x)} + |b_2|_{\alpha_2(x)} \|v\|_{q(x)}^{\mu_2} \right].$$

D'autre part, en vertu de la proposition (1.9) on a

$$\begin{aligned}
 I(u, v) &= \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) + \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} dx \right) - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u, v) dx \\
 &\geq \frac{m_0}{p^+} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p(x)} dx + \frac{m_0}{q^+} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q(x)} dx \\
 &\quad - c \left[|a_1|_{\alpha_1(x)} \|u\|_{p(x)}^{\gamma_1} + |a_2|_{\beta(x)} \|v\|_{q(x)}^{\gamma_2-1} \|u\|_{p(x)} + |b_2|_{\alpha_2(x)} \|v\|_{q(x)}^{\mu_2} \right] \\
 &\geq \frac{m_0}{p^+} \|u\|_{p(x)}^{p^i} + \frac{m_0}{q^+} \|v\|_{q(x)}^{q^i} \\
 &\quad - c \left[|a_1|_{\alpha_1(x)} \|u\|_{p(x)}^{\gamma_1} + |a_2|_{\beta(x)} \|v\|_{q(x)}^{\gamma_2-1} \|u\|_{p(x)} + |b_2|_{\alpha_2(x)} \|v\|_{q(x)}^{\mu_2} \right]
 \end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse **H2**, on voit aisément que I est strictement positif pour ρ assez grand. ■

Lemme 2.3 *Supposons que (H1) - (H5) vérifient. Alors il existe $(e_1, e_2) \in W_{p(x), q(x)}$ avec $\|(e_1, e_2)\| > \rho$ tel que $I(e_1, e_2) < 0$*

Preuve. Cette démonstration fait appel aux propriétés de la fonction $\widehat{M}$. Tout d'abord, on déduit de l'hypothèse (H5) que

$$\widehat{M}(t) \leq \frac{\widehat{M}(t_0)}{t_0^{\frac{1}{1-\mu}}} t^{\frac{1}{1-\mu}} \leq C t^{\frac{1}{1-\mu}}, \quad \forall t > t_0 > 0.$$

Nous choisissons arbitrairement $(u_0, v_0) \in W_{p(x), q(x)}$, $u_0, v_0 > 0$. Un calcul élémentaire montre que

$$\begin{aligned}
 I\left(t^{\frac{1}{p^+}} u_0, t^{\frac{1}{q^+}} v_0\right) &= \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left| \nabla t^{\frac{1}{p^+}} u_0 \right|^{p(x)} dx \right) \\
 &\quad + \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} \left| \nabla t^{\frac{1}{q^+}} v_0 \right|^{q(x)} dx \right) \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} F\left(x, t^{\frac{1}{p^+}} u_0, t^{\frac{1}{q^+}} v_0\right) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} \left| \nabla t^{\frac{1}{p^+}} u_0 \right|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{1-\mu}} \\
 &+ C \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q^-} \left| \nabla t^{\frac{1}{q^+}} v_0 \right|^{q(x)} dx \right)^{\frac{1}{1-\mu}} \\
 &- \int_{\mathbb{R}^N} F \left(x, t^{\frac{1}{p^+}} u_0, t^{\frac{1}{q^+}} v_0 \right) dx. \\
 &\leq C t^{\frac{1}{1-\mu}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p^-} |\nabla u_0|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{1-\mu}} + C t^{\frac{1}{1-\mu}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q^-} |\nabla v_0|^{q(x)} dx \right)^{\frac{1}{1-\mu}} \\
 &- t^\theta H(x, u_0, v_0) \\
 &\leq C t^{\frac{1}{1-\mu}} \left[\frac{1}{p^-} \max \left\{ |\nabla u_0|_{p(x)}^{\frac{p^-}{1-\mu}}, |\nabla u_0|_{p(x)}^{\frac{p^+}{1-\mu}} \right\} + \frac{1}{q^-} \max \left\{ |\nabla v_0|_{q(x)}^{\frac{q^-}{1-\mu}}, |\nabla v_0|_{q(x)}^{\frac{q^+}{1-\mu}} \right\} \right] \\
 &- t^\theta H(x, u_0, v_0) < 0.
 \end{aligned}$$

Il est facile de voir maintenant que $I(tu_0, tv_0) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. ■

Lemme 2.4 *La fonctionnelle I satisfait la condition de Palais-Smale $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Soit (u_n, v_n) est une suite de Palais-Smale de niveau $c \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $I(u_n, v_n) \rightarrow c$ et $I'(u_n, v_n) \rightarrow 0$. Tout d'abord nous allons vérifier que (u_n, v_n) est bornée.

En effet, puisque $I'(u_n, v_n)(u_n, v_n) \leq \varepsilon_n$ pour n assez grand et $I(u_n, v_n) \leq C$,

on peut écrire

$$\begin{aligned}
C + \varepsilon_n &\geq I'(u_n, v_n)(u_n, v_n) - I(u_n, v_n) \\
&\geq M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p(x)} dx + M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v|^{q(x)} dx \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q(x)} dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u_n, v_n) u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial v}(x, u_n, v_n) v_n dx - \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) \\
&\quad - \widehat{M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v_n|^{q(x)} dx \right) + \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n, v_n) dx \\
&\geq m_0 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p(x)} dx + m_0 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{q(x)} dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u_n, v_n) u_n dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial v}(x, u_n, v_n) v_n dx - (1 - \mu) m_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \\
&\quad - (1 - \mu) m_0 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{q(x)} |\nabla v_n|^{q(x)} dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n, v_n) dx \\
&\geq m_0 \left(1 - \frac{(1 - \mu)}{p^-} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + m_0 \left(-\frac{(1 - \mu)}{q^-} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n, v_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u_n, v_n) u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial F}{\partial v}(x, u_n, v_n) v_n dx \\
&\geq m_0 \left(1 - \frac{(1 - \mu)}{p^-} \right) \|u_n\|^{p^i} + m_0 \left(-\frac{(1 - \mu)}{q^-} \right) \|v_n\|^{q^j}.
\end{aligned}$$

Il y a contradiction si nous supposons que la suite (u_n, v_n) est non bornée. Cette suite est donc bien bornée et admet par conséquent une sous-suite notée encore (u_n, v_n) convergente faiblement dans $W_{p(x), q(x)}$. Maintenant, nous allons montrer que (u_n, v_n) est fortement convergente dans $W_{p(x), q(x)}$. Pour cela, nous faisons appel aux inégalités élémentaires dans $\mathbb{R}^N$ déjà citées au chapitre II et nous décomposons l'espace $\mathbb{R}^N$ en quatre sous domaines.

$$\begin{aligned} U_p &= \{x \in \mathbb{R}^N, p(x) \geq 2\} & V_p &= \{x \in \mathbb{R}^N, 1 < p(x) < 2\} \\ U_q &= \{x \in \mathbb{R}^N, q(x) \geq 2\} & V_q &= \{x \in \mathbb{R}^N, 1 < q(x) < 2\} \end{aligned}$$

Si $p(x) \geq 2$, la première inégalité donne

$$\begin{aligned} & 2^{2-p^+} M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) \int_{U_p} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} dx \\ & \leq M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) \\ & \quad \times \int_{U_p} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \\ & \quad - M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) \\ & \quad \times \int_{U_p} |\nabla u_m|^{p(x)-2} \nabla u_m (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \\ & \leq M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \\ & \quad - M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m|^{p(x)-2} \nabla u_m (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \\ & \leq M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) J'(u_n, v_n)(u_n - u_m, 0) \\ & \quad - M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) J'(u_m, v_m)(u_n - u_m, 0) \\ & = M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) I'(u_n, v_n)(u_n - u_m, 0) \\ & \quad - M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) I'(u_m, v_m)(u_n - u_m, 0) \\ & \quad + M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_m|^{p(x)} dx \right) K'(u_n, v_n)(u_n - u_m, 0) \\ & \quad - M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right) K'(u_m, v_m)(u_n - u_m, 0). \end{aligned}$$

Observons que la suite numérique positive

$$X_n := M \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \right)$$

est bornée de $\mathbb{R}$. On peut alors extraire une sous-suite convergente notée encore X_n . En gros, on peut extraire une sous-suite de u_n (notée encore u_n) telle que X_n est convergente. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
& 2^{2-p^+} X_n X_m \int_{U_p} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} dx \\
& \leq X_m I' (u_n, v_n) (u_n - u_m, 0) - X_n I' (u_m, v_m) (u_n - u_m, 0)
\end{aligned}$$

$$+ X_m K' (u_n, v_n) (u_n - u_m, 0) - X_n K' (u_m, v_m) (u_n - u_m, 0).$$

Au contraire si $1 < p(x) < 2$, nous utilisons la seconde inégalité (see [42]), pour obtenir

$$\begin{aligned}
& \int_{V_p} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} dx \\
& \leq \int_{V_p} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} (|\nabla u_n| + |\nabla u_m|)^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} (|\nabla u_n| + |\nabla u_m|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} dx \\
& \leq 2 \left| |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} \cdot |\nabla u_n + \nabla u_m|^{\frac{p(x)(p(x)-2)}{2}} \right|_{\frac{2}{p(x)}} \times \left| |\nabla u_n + \nabla u_m|^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} \right|_{\frac{2}{2-p(x)}} \\
& \leq 2 \max_{i=\pm} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_m|^2 |\nabla u_n + \nabla u_m|^{p(x)-2} dx \right)^{\frac{p^i}{2}} \\
& \quad \times \max_{i=\pm} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n + \nabla u_m|^{p(x)} dx \right)^{\frac{2-p^i}{2}} \\
& \leq 2 \max_{i=\pm} (p^- - 1)^{\frac{-p^i}{2}} \cdot \max_{i=\pm} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \right. \\
& \quad \left. - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m|^{p(x)-2} \nabla u_m (\nabla u_n - \nabla u_m) dx \right]^{\frac{p^i}{2}} \\
& \quad \times \max_{i=\pm} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n + \nabla u_m|^{p(x)} dx \right)^{\frac{2-p^i}{2}}.
\end{aligned}$$

En vertu de la Proposition 1.7. et Proposition 1.9., le fait que $\|I' (u_n, v_n)\| \rightarrow 0$ et la compacité de l'opérateur K' , on obtient

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{p(x)} dx = 0.$$

En utilisant les mêmes arguments nous montrons que

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n - \nabla v_m|^{p(x)} dx = 0.$$

Par conséquent, (u_n, v_n) est une suite de Cauchy dans $W_{p(x),q(x)}$. La preuve est terminée. ■

Théorème 2.1 *Système (3.1) a au moins une solution faible non triviale*

Preuve. Tenant Compte des Lemme 2.2, 2.3 et 2.4, nous pouvons appliquer le

théorème de passe montagne (see [21]) pour conclure que le système (3.1) a une solution faible non triviale. ■

CHAPITRE 4

Annexe 1 : Quelques résultats utilisés dans les démonstrations

Théorème 0.2 (convergence monotone) Soit $\{f_k\}_k$ une suite de fonctions de L^1 tel que

$$\sup_k \int_E f_k < \infty.$$

Alors $f_n(x)$ converge p.p. sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$, de plus $f \in L^1$ et

$$\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Théorème 0.3 (convergence dominée de Lebesgue) Soit f_n une suite de fonction de L^1 . On suppose que

- i. $f_n \rightarrow f$ p.p. sur Ω ,
- ii. il existe une fonction $g \in L^1$ telle que, pour chaque n , $|f_n| \leq g(x)$ p.p. sur Ω . Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0.$$

Théorème 0.4 Soit f une fonction positive intégrable sur E . Pour tout $\varepsilon > 0$, il

existe $\eta > 0$ tel que pour tout sous-ensemble $A \subset E$ avec $m_n(A) < \eta$, on a

$$\int_A f < \varepsilon.$$

Théorème 0.5 (du Doi-Reymond) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} fu = 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$$

alors $f = 0$ p.p. dans Ω

Preuve. Pour la démonstration voir [8] ■

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié des problèmes elliptiques non linéaires faisant intervenir l'opérateur $p(x)$ -Laplacien. Nous avons établi des théorèmes d'existence à l'aide de la théorie des points critiques, précisément l'utilisation du théorème de Passe-Montagne était concluante. Les difficultés rencontrées sont de deux natures : équations à exposant variable, définies sur des domaines non bornés. Ceci nous a amené à travailler sur des espaces de Sobolev non classiques.

En perspective, nous envisageons d'étudier des problèmes de même nature en appliquant le théorème de la fontaine. L'établissement de l'existence d'une infinité de solution reste le résultat escompté.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **B. Abdelmalek, A. Djellit and L. Ghannem**, *Existence of solution for an elliptic problem involving $p(x)$ -Laplacian in $\mathbb{R}^N$* , GJPAM Volume 12, Number 5 (2016), pp. 3873–3883
- [2] **B. Abdelmalek, A. Djellit and S. Tas**, *Existence of solutions for elliptic $p(x)$ -Kirchhoff-type systems in unbounded domain*, Accept
- [3] **E. Acerbi and G. Mingione**, *Gradient estimates for the $p(x)$ -Laplacean system*, J. Reine Angew. Math. 584 (2005), 117-148.
- [4] **C. O. Alves and M. A. S. Souto**, *Existence of solutions for a class of problems in $\mathbb{R}^N$ involving the $p(x)$ -Laplacian*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 66 (2005), 17-32.
- [5] **A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz**, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.
- [6] **A. Ayoujil**, *Etude spectrale de l'opérateur $p(x)$ -biharmonique et multiplicité de solutions d'un problème nonlinéaire via la théorie de Morse*, Thèse de Doctorat. Univ Oujda Maroc, 2008.
- [7] **Mohamed Badr Benboubker**, *Sur certains problèmes elliptiques quasili-néaires non homogènes de type Dirichlet ou Neumann*, thèse de doctorat, Univ Sidi Mohamed ben Abdellah, Dhar El Mahraz-Fès, Maroc. 2013.
- [8] **R.G. Bartle**, *The elements of intégration and Lebesgue measure*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

- [9] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1983.
- [10] **M. M. Boureau**, *Existence of solutions for an elliptic equation involving the $p(x)$ -Laplace operator*, EJDE., Vol. 2006 (2006), No. 97, p.p. 1–10.
- [11] **Cícero Januário Guimarães**, *Sobre os espaço de Lebesgue e Sobolev generalizados e aplicações envolvendo o $p(x)$ -Laplaciano*, Document présenté du programme d'études supérieures en Mathématiques - CCT - UFCG. Université fédérale de Campina Grande, Brésil, 2006.
- [12] **N. T. Chung**, *On Some $p(x)$ -Kirchhoff-type equations with weights*; J. Appl. Math. & Informatics Vol. 32(2014), No. 1 - 2, pp. 113 - 128.
- [13] **Y. Chen, S. Levine and M. Rao**, *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*, SIAM, App. Math. 66 (2006) 1383-1460.
- [14] **T. C. Halsay**, *Electrorheological fluids*, sciences 258 (1992) 761-766.
- [15] **G. Dai and X. Li**, *On nonlocal elliptic systems of $p(x)$ -Kirchhoff-type under Neumann boundary condition*, J. Math. Resea with app., Vol. 33 (2013), No. 4, p.p. 443–450
- [16] **G. Dai**, *Existence of solutions for nonlocal elliptic systems with nonstandard growth conditions*, Elec. J. of Diff. Equ., Vol. 2011 (2011), No. 137, p.p. 1–13.
- [17] **L. Diening**, *Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{k,p(\cdot)}$* , Math. Nachr. 268 (2004), 31–43.
- [18] **L. Diening**, *Theoretical and numerical results for electroheological fluids*, Ph.D thesis, University of Frieburg, Germany, 2002.
- [19] **D.G. De Figueiredo and P.L. Felmer**, *On Superquadratic elliptic systems*; Transactions of the AMS, Vol. 343(1994), No. 1 -pp. 99 - 116.
- [20] **A. Djellit, Z. Youbi and S. Tas**, *Existence of solution for elliptic systems in $\mathbb{R}^N$ involving the $p(x)$ -Laplacian*, Elec. J. of Diff. Equ., Vol. 2012 (2012), No. 131, pp. 1–10.
- [21] **A. Djellit and S. Tas**, *Existence of solution for elliptic systems in $\mathbb{R}^N$ involving the p -Laplacian*, Elec. J. of Diff. Equ., Vol. 2003(2003), No. 56, pp. 1–8.
- [22] **A. Elhamidi**, *Existenc results to elliptic systems with non stard growth condition*; J. Math. Ana. appl., Vol. 300, No. 1 -pp. 30 - 42, 2004.

- [23] **D. E. Edmunds and J. Rákosník**, *Sobolev embedding with variable exponent*, Studia Mathematica 143 (2000) 267-293.
- [24] **X. Fan, J. Shen & D. Zhao**, *Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$* , J. Math. Anal. Appl. 262 (2001), 749–760.
- [25] **X. Fan & D. Zhao**, *On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$* , J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), 424–446.
- [26] **X. Fan**, *Solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problems with singular coefficients*, J. Math. Anal. Appl. 312 (2005) 464-477.
- [27] **X. Fan**, *Eigenvalues of the $p(x)$ -Laplacian Neumann problems*, Nonlinear Anal. 67 (2007) 2982-2992.
- [28] **X. Fan, Q.H. Zhang, D. Zhao**, *Eigenvalues of $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problem*, J. Math. Anal. Appl. 302 (2005) 306-317
- [29] **X. Fan, Q. H. Zhang**, *Existence of solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problem*, Nonlinear Anal. T.M.A. 52 (2003) 1843-1852.
- [30] **X. Fan, X.Y Han**, *Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$ -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$* , Nonlinear Anal. 59 (2004) 173-188.
- [31] **E. Guo and P. Zhao**, *Existence and multiplicity of solutions for nonlocal $p(x)$ -Laplacian problems in $\mathbb{R}^N$* , Boundary Value Problems 2012, 2012 :79.
- [32] **X. Han and G. Dai**, *On the sub-supersolution method for $p(x)$ -Kirchhoff type equations*, Journal of Inequalities and Applications 2012, 2012 :283.
- [33] **In Hyoun Kim and Yun-Ho Kim**, *Positivity of the infimum eigenvalue for equations of $p(x)$ -Laplace type in $\mathbb{R}^N$* , Boundry Value problem, 2013, 2013 :214.
- [34] **O. Kováčik & J. Rákosník**, *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$* , Czechoslovak Math. J. 41 (116) (1991), 592–618.
- [35] **O. Kavian**, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques et applications, vol. 13, Springer-Verlag, 1993.
- [36] **K. Kefi**, *$p(x)$ -Laplacian with indefinite weight*, Proceedings of the AMS 139, 12 (2011) 4351-4360.

- [37] **G. Kirchhoff**, *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1983.
- [38] **Q. Miao, Z. Yang**, *Existence of solutions for $p(x)$ -Kirchhoff type equations with singular coefficients in $\mathbb{R}^N$* , J. Adv. Res. in Dyn. Cont. Sys. Vol. 5, Issue. 2, 2013, pp. 34-48.
- [39] **M. Mihailescu and V. Radulescu**, A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 462 (2006), 2625-2641.
- [40] **M. Mihailescu and V. Radulescu**, *On a Nonhomogeneous Quasilinear Eigenvalue Problem in Sobolev Spaces with Variable Exponent*. Proceedings of the AMS 135, (2007) 416-423.
- [41] **R. Ma, G. Dai and C. Gao**, *Existence and multiplicity of positive solutions for a class of $p(x)$ -Kirchhoff type equations*, Boundary Value Problems 2012, 2012 :16 pp. 01-16.
- [42] **S. Ogras, R. A. Mashiyev, M. Avci, and Z. Yucedag**, *Existence of Solutions for a Class of Elliptic Systems in $\mathbb{R}^N$ Involving the $(p(x), q(x))$ -Laplacian*, J. of Ineq. and Appl., Volume 2008, Article ID 612938, 16 pages.
- [43] **S. G. Samko and B. Vakulov**, *Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operator*, J. Math. Anal. Appl. 310 (2005) 229-246.
- [44] **M. Ruzicka**, *Electrorheological fluids; modeling and mathematical theory*, Springer, Berlin. Lecture note in mathematics, 1748 (2000).
- [45] **Seung Dae Lee, Kisoeb Park and Yun-Ho Kim**, *Existence and multiplicity of solutions for equations involving nonhomogeneous operators of $p(x)$ -Laplace type in $\mathbb{R}^N$* , Boundry Value problem, (2014) 2014 :261.
- [46] **X. Xu and Y. An**, *Existence and multiplicity of solutions for elliptic systems with nonstandard growth condition in $\mathbb{R}^N$* , Non. Ana. : Theo., Meth. & App., vol. 68, no. 4, pp. 956-968, 2008.
- [47] **M-C. Wei and C-L. Tang**, *Existence and Multiplicity of Solutions for $p(x)$ -Kirchhoff-Type Problem in $\mathbb{R}^N$* , Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 36(3). (2013), 767-781.