Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar
– Annaba –

Badji Mokhtar University
– Annaba–

جامعة باجي مختار

-عنابة-

Année 2016

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Option

Systèmes Dynamiques

Présentée par

BOUDERBALA Zeyneb

DIRECTEUR DE THÈSE : MAKHLOUF Ammar PROF., U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRÉSIDENT :	DJOUDI Ahcène	PROF.,	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	BADI Sabrina	MC(A).,	UNIV. DE GUELMA
EXAMINATEUR :	HADIDI Elbahi	MC(A).,	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	DJEBABLA Abdelhak	MC(A).,	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	GHANEM Radouane	MC(A).,	U.B.M. ANNABA

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse M. MAKHLOUF Ammar pour son aide, son soutien, ses conseils ainsi que la confiance qu'il m'a faite en acceptant de m'encadrer.

Je tiens également à remercier M. DJOUDI Ahcène qui m'a fait l'honneur de présider

le jury ainsi que Mme. BADI Sabrina, M. HADIDI Elbahi , M. GHANEM Radouane et M. DJEBABLA Abdelhak pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Mes sincères remerciements vont à mes très chères amies BENSEGHIR Rym, BOUSBIAT Lilia, SLIMANI Safia qui m'ont accompagnée et soutenue moralement tout au long de mon parcours.

Je remercie également mon frère Mohamed, ma soeur Zahra pour leur soutien et contribution à la réalisation de ce travail.

Je remercie aussi d'autres personnes qui m'ont encouragé à finir ce travail par des gestes d'amitié dont je suis reconnaissante.

Enfin, Je ne saurais oublier l'apport de mes parents pour l'accomplissement de ce travail, je tiens à leur rendre hommage à travers cette thèse.

Dédicace

A mes trés chers parents

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être.
Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.
Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vIJux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.
Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.

Résumé

Notre but dans cette thèse est d'étudier l'existence des solutions périodiques de deux classes d'équations différentielles ordinaires. Pour la première classe, on considère l'équation différentielle du second ordre générale, de la forme

$$\ddot{x} + 3x\dot{x} + x^3 + F(t)(\dot{x} + x^2) + G(t)x + H(t) = 0,$$

où $F(t)$, $G(t)$ et $H(t)$ sont des fonctions 2π-périodiques. Par la méthode de la moyennisation, nous avons trouvé des solutions périodiques en remplaçant les fonctions F, G et H par des fonctions 2π-périodiques qui dépendent d'un petit paramètre ε.

La deuxième classe étudiée est l'équation de Floquet non-autonome dépendant d'un petit paramètre, de la forme

$$\dot{x} = Ax + b(t) + \varepsilon B(t)x,$$

où x et $b(t)$ sont des vecteurs colonnes de dimension n, A et $B(t)$ sont des matrices $(n \times n)$, $B(t)$ et $b(t)$ sont T-périodiques, pour $n = 2, 3$ et 4. Les resultats ont été obtenus en utilisant la méthode de la moyennisation.

Mots-clés : Equations différentielles, théorie de la moyennenisation, solutions périodiques.

Abstract

Our objective in this thesis is to study the existence of periodic solutions of two classes of ordinary differential equations. for the first class, Consider the general differential equation of second-order of the form

$$\ddot{x} + 3x\dot{x} + x^3 + F(t)(\dot{x} + x^2) + G(t)x + H(t) = 0,$$

where the functions $F(t)$, $G(t)$ and $H(t)$ are periodic of $2\pi-$period in the variable t. With averaging theory, we found periodic solutions by replacing the functions $F(t)$, $G(t)$ and $H(t)$ by the $2\pi-$periodic functions that depend on a small parameter ε.

The second class studied is a non-autonomous differential equation of Floquet depending on a small parameter of the form

$$\dot{x} = Ax + b(t) + \varepsilon B(t)x.$$

Where x and $b(t)$ are column vectors of length n, A and $B(t)$ are $(n \times n)$ matrix, $B(t)$ and $b(t)$ are T-periodic for $n = 2, 3$ and 4. the results were obtained using the averaging method.

Mots-clés : Differential equation, Averaging theory, periodic solution.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة وجود حلول دورية لقسمين من المعادلات التفاضلية العادية. بالنسبة للقسم الأول الذي درسناه، فيتمثل في المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية من الشكل

$$\ddot{x} + 3x\dot{x} + x^3 + F(t)(\dot{x} + x^2) + G(t)x + H(t) = 0$$

حيث F, G وH دوال دورية ذات الدور 2π. بواسطة طريقة المتوسط تحصلنا على حلول دورية باستبدال الدوال G، F وH *بدوال 2π- دورية، والمضطربة بواسطة وسيط صغير ε.* بالنسبة للقسم الثاني، نعتبر المعادلة الغير ذاتية لفلوكي المتعلقة بوسيط صغير ε، ذات الشكل

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t) + \varepsilon B(t)x(t)$$

حيث *$x(t)$ و$b(t)$ شعاعان عموديان ذوا البعد n، A و B مصفوفتان $(n\times n)$، B وb دوريتان و دورهما T. وقد تم الحصول على النتائج باستخدام طريقة المتوسط.*

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التفاضلية، نظرية المتوسط، الحلول الدورية.

Table des matières

Introduction

La théorie des équations différentielles ordinaires constitue l'un des principaux instruments des mathématiques. Elle permet d'étudier des processus d'évolution déterministes. Un des problèmes importants dans la théorie des équations différentielles ordinaires est l'étude des orbites périodiques, leur existence, leurs nombres et leur stabilité. Un cycle limite d'une équation différentielle ordinaire est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de cette équation. Les cycles limites ont été introduits pour la première fois par H. Poincaré en 1881 dans son " *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* " [24]. H. Poincaré s'est intéressé à l'étude qualitative des solutions des équations différentielles, c'est à dire des points d'équilibre, des cycles limites et de leur stabilité. Ce qui permet d'avoir une idée globale des autres orbites du système étudié.

En 1900, D. Hilbert présenta une liste de 23 problèmes mathématiques au deuxième congrès international de mathématiques à Paris dont la plupart ont été complètement ou partiellement résolus [11]. Le seizième problème reste irrésolu. Il consiste à déterminer le nombre maximum H_n de cycles limites d'un système planaire polynomial de degré n.

Ces dernières années, beaucoup d'articles ont étudié les cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux planaires. L'objet principal de ces études est le seizième problème non résolu de Hilbert.

Les méthodes de perturbations sont très importantes en mathématiques appliquées. La méthode de la moyennisation (Averaging Theory) est l'une des plus importantes méthodes utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par krylov et Bogoliubov en 1937 [15] et Bogoliubov et Mitropolskii (1961) [4]. Elle a été ensuite développée par Verhulst [30], Sanders et Verhulst [26], Malkin (1956) [22], Roseau (1966) [25], Llibre et Buica (2004) [3]...

L'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \tag{1}$$

où $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon << 1$ et f est T-périodique en t, et de déterminer l'équation moyennée associée de cette équation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(x)$$

où

$$F(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,x,0)\,dt,$$

et chercher les solutions périodiques de l'équation (1).

Beaucoup de classes d'importants problèmes en mécanique classique,...., peuvent être transformées en l'équation (1). D'autres formes et théorèmes de la méthode de la moyennisation ont été démontrés ces dernières années [2] et beaucoup d'articles ont été publiés sur l'application de cette méthode. En général, obtenir des solutions périodiques est un problème difficile et souvent impossible. En utilisant la méthode de la moyennisation, on réduit ce problème difficile des équations différentielles à la recherche des racines d'un système algébrique non linéaire. Pour des applications de cette méthode à des systèmes différentiels perturbés dans $\mathbb{R}^n$, voir par exemple [21, 16]

Nous étudions l'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre de la forme

$$\ddot{x} + 3x\dot{x} + x^3 + F(t)(\dot{x} + x^2) + G(t)x + H(t) = 0,$$

où le point $(\cdot)$ désigne la dérivée par rapport au temps t et les fonctions $F(t)$, $G(t)$ et $H(t)$ sont des fonctions 2π-périodiques par rapport à t. Cette équation est un cas particulier des équations de Painlevé qui possèdent des points singuliers critiques fixes, elle s'écrit sous la forme

$$\ddot{x} = L(t,x)\dot{x}^2 + M(t,x)\dot{x} + N(t,x).$$

Où L, M et N sont des fonctions rationnelles en x et à coefficients holomorphes en t. Notons que notre équation différentielle apparaît dans le catalogue de Ince des équations qui possèdent la propriété de Painlevé [12] quand $F = G = H = 0$. En outre, l'équation différentielle $\ddot{x} + 3x\dot{x} + x^3 = 0$ est bien connue dans les domaines de mathématique et de physique. Pour plus de détails, voir [13]. Récemment, cette équation a été étudiée par Chandrasker, voir [6].

Au début des années 1880, Floquet a établi son célèbre théorème sur la structure des solutions d'équations différentielles périodiques [7, 8, 10, 23, 30]. Il est intéressant de noter que les versions modernes du théorème considèrent le cas où la variable indépendante est réelle et les coefficients sont, par exemple, continus par morceaux [9, 14, 20].

L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\dot{x} = A(t)x(t) + b(t),$$

où $x(t)$ et $b(t)$ sont des vecteurs colonnes de dimension n, $A(t)$ est une matrice $n \times n$ et $A(t)$ et $b(t)$ sont T-périodiques, est nommée l'équation différentielle de Floquet. Pour plus de détails sur l'équation différentielle de Floquet, voir [7]. Cette équation différentielle a été étudiée intensivement et elle a plusieurs applications [28, 29, 27].

Dans leur article [17], J. Llibre et A. Rodrigues ont étudié l'existence des cycles limites de la classe des équations différentielles

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon(B(t)x + b(t)),$$

où A est une matrice $n \times n$ constante, $B(t)$ est une matrice $n \times n$ T-périodique, $b(t)$ est une fonction vectorielle T-périodique de dimension n et ε est un paramètre suffisamment petit. Notons que pour $\varepsilon = 0$, on a une équation linéaire homogène $\dot{x} = Ax$. Pour notre travail, on étudie les cycles limites du système différentiel perturbé

$$\dot{x} = Ax(t) + b(t) + \varepsilon B(t)x(t), \tag{2}$$

où A est une matrice $n \times n$ constante, $B(t)$ est une matrice $n \times n$ T-périodique, $b(t)$ est une fonction vectorielle T-périodique de dimension n et ε est un paramètre suffisamment petit. Notons que pour $\varepsilon = 0$, on a un système linéaire non homogène $\dot{x} = Ax + b(t)$. Dans notre travail, on applique la méthode de la moyennisation à notre système (2) pour $n = 2$ et $n = 3$ et 4.

Notre thèse a pour objet l'étude de deux classes d'équations différentielles ordinaires et son organisation se présente comme suit :

Le premier chapitre, qui est plutôt un glossaire, regroupe quelques connaissances de base nécessaires à la compréhension de l'ensemble de la thèse. On commence par définir les systèmes dynamiques, la notion de flot, portrait de phase, les points d'équilibre, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points d'équilibre, les systèmes différentiels linéaires non-homogènes, la théorie de Floquet et en dernier on donne les deux théorèmes importants de la méthode de la moyennisation. Le premier théorème concerne la forme standard de Lagrange, le second est une nouvelle version de cette méthode. Cette dernière version est appliquée pour la recherche des solutions périodiques pour les deux classes d'équations différentielles étudiées aux chapitres deux, trois et quatre.

Dans le second chapitre, on considère une équation différentielle générale du second ordre. On introduit dans cette équation des nouvelles fonctions perturbées pour la rendre dépendante d'un petit paramètre et sur laquelle on applique le principe d'échelonnement (rescaling) qui la transforme sous forme standard ce qui nous permet l'application du théorème de la moyennisation. Par l'application dudit théorème, on obtient les solutions périodiques de cette équation. Cette étude est illustrée par des applications. Ces résultats ont fait l'objet d'une première publication dans la revue Applied Mathematics sous le titre

Bouderbala, **Z.**, **Llibre, J. and Makhlouf, A.** (2016) Periodic Solutions of a Class of Second-Order Differential Equation. Applied Mathematics, 7, 227-232.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'équation différentielle perturbée de Floquet pour $n = 2$ puis pour $n = 3$. En premier, on résout l'équation différentielle non-perturbée et on détermine les conditions pour lesquelles l'équation possède une solution périodique. Ensuite, on applique la théorie de la moyennisation pour obtenir les solutions périodiques de l'équation perturbée. Pour plus de détail, voir la publication suivante :

A. Makhlouf, Z. Bouderbala. On The Limit Cycles Of The Floquet Differential Systems. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768 Volume 11, Number 6(2015), pp. 3529-3542.

Dans le quatrième chapitre, et comme suite au chapitre trois, on étudie le système différentiel de Floquet d'ordre quatre. Dans cette étude, on distingue cinq formes de la matrice A qui apparaissent dans l'équation différentielle de Floquet. Pour cela, on démontre cinq théorèmes d'existence des solutions périodiques et on donne une application pour chaque théorème. Ce chapitre est soumis pour publication.

CHAPITRE

1 Préliminaires

1.0.1 Introduction

Pour éviter au lecteur le recours répété à la bibliographie, nous exposons dans ce chapitre, et de façon brève, les notions essentielles utilisées pour l'étude des systèmes dynamiques et nous introduirons dans ce rappel les théorèmes fondamentaux de la théorie de la moyennisation.

1.0.2 Systémes dynamiques

Définition 1.0.1. *Un système dynamique sur* $\mathbb{R}^n$ *est une application :*

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, *telle que :*
$\bullet \varphi(.,x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *est continue.*
$\bullet \varphi(t,.) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est continue.*
$\bullet \varphi(0,x) = x.$
$\bullet \varphi(t+s,x) = \varphi(t,\varphi(s,x)) \quad \forall\ t,s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$
Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ *est linéaire si*

$$\varphi(t,\alpha x+\beta y) = \alpha\varphi(t,x)+\beta\varphi(t,y), \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où A est une matrice constante. La solution de (1.2) est :

$$x(t) = \exp(tA)x_0.$$

Le système (1.2) engendre un système dynamique, car l'application :

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$\varphi(t, x) = \exp(tA)x_0$$

vérifie les quatre proporiétés précédentes. Ce système dynamique de l'exemple précédent est linéaire car :

$$\begin{aligned}\varphi(t, \alpha x + \beta y) &= \exp(tA)(\alpha x + \beta y) = \alpha \exp(tA)x + \beta \exp(tA)y \\ &= \alpha\varphi(t, x) + \beta\varphi(t, y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

1.0.3 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.0.2. *Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application :*

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, telle que :
•$\varphi(., x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *est continue.*
•$\varphi(t, .) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est continue.*
•$\varphi(0, x) = x$.
•$\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))\ \ \forall\ t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est linéaire si

$$\varphi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(t, x) + \beta\varphi(t, y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \textit{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

où A est une matrice constante. La solution de (1.2) est :

$$x(t) = \exp(tA)x_0.$$

Le système (1.2) engendre un système dynamique, car l'application :

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$\varphi(t, x) = \exp(tA)x_0$$

vérifie les quatre proporiétés précédentes. Ce système dynamique de l'exemple précédent est linéaire car :

$$\begin{aligned}\varphi(t, \alpha x + \beta y) &= \exp(tA)(\alpha x + \beta y) = \alpha \exp(tA)x + \beta \exp(tA)y \\ &= \alpha\varphi(t, x) + \beta\varphi(t, y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

1.0.4 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.0.3. *soit le système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.3}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, *E est un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in C^1(E)$. *Soit* $\varphi(t, x_0)$ *la solution de (1.3). l'ensemble des applications* φ_t *défini par*

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (1.3).

1.0.5 Portrait de phase

Définition 1.0.4. *Soit le système différentiel de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1.4}$$

où P, Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d.

Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ *du système (1.4) représentent dans le plan* (x, y) *des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan* (x, y) *est le plan de phase.*

Comme il est connu, à part les points critiques, les éléments les plus significatifs du portrait de phase d'un champ de vecteurs sont les orbites périodiques.

1.0.6 Solution périodique

Définition 1.0.5. *On appelle solution périodique toute solution* $x = \phi(t)$ *de l'équation (1.3) telle qu'il existe un nombre* T, *vérifiant* $\phi(t + T) = \phi(t)$. *Une solution périodique de (1.3) correspond a une orbite (courbe) fermée dans l'espace des phases.*

1.0.7 Cycle limite

Définition 1.0.6. *Un cycle limite est une solution périodique isolée, c'est à dire qu'il existe un voisinage de ce cycle où on ne peut pas trouver une autre orbite fermée.*

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - \alpha(x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x - \alpha y - \alpha y(x^2 - y^2) \end{cases}$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre : En coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

D'où pour $\alpha \neq 0$, $\dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0$ ou $r = 1$, on a l'orbite périodique $\big(x(t), y(t)\big) = (\cos(\theta+\theta_0), \sin(\theta+\theta_0))$. Dans le plan de phase, c'est le cercle d'équation $x^2+y^2 = 1$, c'est un cycle limite, ce cycle limite est stable pour $\alpha > 0$, et instable pour $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$ le système a une infinité de nombres des orbites périodiques, et il n'y a pas des cycles limites.

Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.

1.0.8 Points critiques

Définition 1.0.7. *On appelle point critique, point d'équilibre, point singulier ou point fixe du système différentiel non linéaire* (1.3) *le point* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$f(x_0) = 0.$$

1.0.9 Linéarisation

Définition 1.0.8. *Le système*

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.5}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{1\leq i,j\leq n} \\ &= Df(x_0) \\ &= \textit{Jacobienne de } f \textit{ en } x_0 \end{aligned}$$

et

$$f(x_0) = 0$$

est appelé le système linéarisé du système (1.5) *en* x_0.

Dans le système (1.3) *si* $f(x)$ *est donnée par l'expression*

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

alors les points critiques de $f(x) = 0$ *sont* $(1,0)$ *et* $(-1,0)$.

Le système linéarisé est

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

alors

$$Df(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et

$$Df(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les systèmes linéarisés sont
a) au point $(1,0)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

b) au point $(-1,0)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

1.0.10 Système différentiel linéaire non homogène

Dans cette partie, on introduit le système différentiel linéaire non homogène suivant :

$$\dot{x} = Ax + b(t) \tag{1.6}$$

où A est une matrice $(n \times n)$ et $b(t)$ est un vecteur des fonctions continues.

Définition 1.0.9. *Une matrice fondamentale des solutions du système*

$$\dot{x} = Ax \tag{1.7}$$

est toute matrice $(n \times n)$ non singulière $\Phi(t)$ qui satisfait

$$\Phi'(t) = A\Phi(t) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

$\Phi(t) = e^{At}$ est la matrice fondamentale des solutions qui satisfait $\Phi(0) = I$ (la matrice identité $(n \times n)$). En outre, toute matrice fondamentale de solution $\Phi(t)$ de (1.7) est donnée par $\Phi(t) = e^{At}C$, pour certaines matrices non singulières C. Une fois la matrice fondamentale de (1.7) est trouvée, il est facile de résoudre le système non homogène (1.6). Le résultat est donné dans le théorème suivant :

Si $\Phi(t)$ est la matrice fondamentale des solutions du système (1.7), alors, la solution du système différentiel linéaire (1.6) avec la condition initiale $x(0) = x_0$ est unique et donnée par

$$x(t) = \Phi(t)\ \Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\ \Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau.$$

Démonstration. voir [23]. □

Si $\Phi(t) = e^{At}$, la solution du système linéaire non homgène (1.6), donnée dans le théorème précédent, est de la forme

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}b(\tau)d\tau.$$

1.0.11 Théorie de Floquet

La forme générale des systèmes linéaires homogènes à coefficients périodiques et continus est

$$\frac{dx}{dt} = A(t).x, \tag{1.8}$$

où $A(t+T) = A(t)$

$A(t)$ est une matrice $(n \times n)$; tous ses éléments sont périodiques. En général, les solutions de (1.8) ne sont pas périodiques. Considérons l'exemple

$$\dot{x} = (1 + \sin(t))x,$$

on a $T = 2\pi$, la solution générale est $x(t) = c\exp(t - \cos(t))$; où c est une constante, $x(t)$ n'est pas périodique.

Soit $X(t)$ une matrice fondamentale de (1.8), alors $X(t+T)$ est aussi une matrice fondamentale et il existe une matrice constante B inversible telle que :

$$X(t+T) = X(t).B, \qquad \forall t, \tag{1.9}$$

et

$$\det B = \exp\left\{\int_0^T tr A(s) ds\right\} \tag{1.10}$$

Démonstration. Puisque $X(t)$ est une matrice fondamentale, on a

$$X'(t) = A(t).X(t)$$

Posons $Y(t) = X(t+T)$, alors $Y'(t) = X'(t+T) = A(t+T).X(t+T) = A(t).Y(t)$, donc $Y(t)$ est une matrice fondamentale.

Posons $X(t) = (x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t))$. Comme $x^{(i)}(t+T)$ est solution de (1.8), on a :

$$\left\{\begin{array}{c} x^{(1)}(t+T) = b_{11}x^{(1)}(t) + ... + b_{n1}x^{(n)}(t) \\ .... \\ x^{(n)}(t+T) = b_{1n}x^{(1)}(t) + ... + b_{nn}x^{(n)}(t) \end{array}\right.$$

où

$$\begin{aligned} X(t+T) &= (x^{(1)}(t+T), ..., x^{(n)}(t+T)) \\ &= (x^{(1)}(t), ..., x^{(1)}(t)).\begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ .. & .. & .. \\ b_{n1} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= X(t).B \end{aligned}$$

d'où on a (1.9).

Posons $W(t) = \det X(t)$, on a

$$W(t) = W(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds\right\}$$

$$W(t+T) = W(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds + \int_{t}^{t+T} trA(s)ds\right\}$$

$$W(t+T) = W(t)\exp\left\{\int_{t}^{t+T} trA(s)ds\right\}$$

(1.9) implique $W(t+T) = W(t).\det B$, d'où : $\det B = \exp\left\{\int_{t}^{t+T} trA(s)ds\right\}$

d'où on a :

$$\det B = \exp\left\{\int_{0}^{T} trA(s)ds\right\}$$

□

ce dernier résultat résulte du lemme suivant

Si

$$f(t+T) = f(t), \forall t \tag{1.11}$$

alors

$$\int_{t}^{t+T} f(s)ds = \int_{0}^{T} f(s)ds$$

Démonstration. Posons $I(t) = \int_{t}^{t+T} f(s)ds$

$$I'(t) = f(t+T) - f(t) = 0$$

d'où $I(t)$ est une constante égale à $I(0)$. □

On a $X(t+T) = X(t).B,\ \forall t$

d'où on a :

$$B = X^{-1}(0).X(T)$$

quand on choisit $X(t)$ telle que $X(0) = I$ la matrice identité, alors

$$B = X(T).$$

Définition 1.0.10. *La matrice B est appelée matrice de monodromie du système considéré.*

1.1 Théorie de la moyennisation

La méthode de moyennisation est une des méthodes classiques qui donne des conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels ayant un centre. Cette méthode consiste à donner une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique non autonome et celle de son système différentiel moyenné lequel est autonome. Dans cette section, on présente une introduction à la théorie de moyennisation du premier ordre.

1.1.1 Méthode de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon F(t, \mathbf{x}(t)) + \varepsilon^2 R(t, \mathbf{x}(t), \varepsilon), \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{1.12}$$

avec $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, D est un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $F(t,\mathbf{x})$ et $R(t,\mathbf{x},\varepsilon)$ sont $T-$périodiques en t. Le système moyenné associé au système (1.12) est défini par

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \varepsilon f^0(\mathbf{y}(t)), \ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{1.13}$$

où

$$f^0(\mathbf{y}) = \frac{1}{T}\int_0^T F(s,\mathbf{y})\mathbf{ds}. \tag{1.14}$$

Le théorème suivant nous donne les conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné (1.13) fournissent des solutions périodiques du système (1.12).

Considérons le système (1.12) et supposons que les fonctions vectorielles $F, R, D_{\mathbf{x}}F, D^2_{\mathbf{x}}F$, et $D_{\mathbf{x}}R$ sont continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0,\infty[\times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. De plus, on suppose que F et R sont T-périodiques en t avec T indépendante de ε.

a) Si $p \in D$ est un point singulier du système moyenné (1.13) tel que

$$\det(D_{\mathbf{x}} f^0(p)) \neq 0, \tag{1.15}$$

alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T-périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (1.12) telle que $x_\varepsilon(t) \to p$ quand $\varepsilon \to 0$.

b) Si le point singulier y=p du système moyenné (1.13) est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x_\varepsilon(t)$ du système (1.12) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que p.

considérons l'équation de Van der Pol

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \tag{1.16}$$

En coordonnées polaires (r,θ) où $x = rcos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin^2(\theta), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon\cos(\theta)(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin(\theta), \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin^2(\theta) + O(\varepsilon).$$

De (1.14) on obtient

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(1 - r^2\cos^2(\theta))\sin^2(\theta)d\theta = \frac{1}{8}r(r^2 - 4).$$

La seule racine positive de $f^0(r)$ est r=2. Comme $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2) = 1$, d'après le théorème 1.1.1 il suit que le système (1.16) pour $|\ \varepsilon\ | \neq 0$ suffisamment petit, admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique du rayon 2 du système non perturbé (1.16) avec $\varepsilon = 0$.

De plus, comme $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2) = 1 > 0$, ce cycle limite est instable.

1.1.2 Autre méthode de moyennisation du premier ordre

On considère le problème de bifurcation des solutions T-périodiques du système différentiel de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t,\mathbf{x}) + \varepsilon F_1(t,\mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(t,\mathbf{x},\varepsilon). \tag{1.17}$$

Avec ε suffisamment petit, les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe C^2, $T-$périodiques en t et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que le système non perturbé

$$\dot{\mathbf{x}} = F_0(t,\mathbf{x}), \tag{1.18}$$

a une sous-variété des solutions périodiques.

Soit $\mathbf{x}(t,\mathbf{z},\varepsilon)$ la solution du système non-perturbé (1.18) telle que $\mathbf{x}(0,\mathbf{z},\varepsilon) = \mathbf{z}$. La linéarisation du système non-perturbé (1.18) au long de la solution périodique $\mathbf{x}(t,\mathbf{z},\varepsilon)$ est écrite comme

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}}F_0(t,\mathbf{x}(t,\mathbf{z},0))\mathbf{y}. \tag{1.19}$$

On note par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (1.19) et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur ses k premières coordonnées, i.e. $\xi(x_1,...,x_n) = (x_1,...,x_k)$. On suppose qu'il existe une sous-variété $\mathbf{Z}$ de dimension k de solutions T-périodiques du système (1.18).

Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert borné, $\beta : Cl(V) \to \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe C^2. On suppose que :

(i) $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)),\ \alpha \in Cl(V)\} \subset \Omega$ et que pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathbf{Z}$ la solution $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)$ de (1.18) est $T-$périodique.

(ii) pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathbf{Z}$ il existe une matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ de (1.19) telle que la matrice $M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(0) - M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(T)$ contient dans le haut coin droit la matrice nulle de dimensions $k \times (n-k)$, et dans le coin bas droit une matrice Δ_α de dimensions $(n-k)\times(n-k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $\mathscr{F} : Cl((V) \to \mathbb{R}^k$

$$\mathscr{F}(\alpha) = \xi\left(\frac{1}{T}\int_0^T M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)) dt\right). \tag{1.20}$$

S'il existe $a \in V$ telle que $\mathscr{F}(a) = 0$ et $det\left(\dfrac{d\mathscr{F}}{d\alpha}(a)\right) \neq 0$, alors il existe une solution T-périodique $\varphi(t,\varepsilon)$ du système (1.17) telle que $\varphi(0,\varepsilon) \to \mathbf{z}_a$ quand $\varepsilon \to 0$.

Démonstration. Voir Malkin [22] et Roseau [25]. Pour une autre preuve voir aussi [3]. □

Si k=n on a le corollaire suivant.

On suppose qu'il existe un ensemble ouvert et borné V avec $Cl(V) \subset \Omega$ tel que pour chaque $\mathbf{z} \in Cl(V)$, la solution $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ est $T-$périodique, on considère la fonction $\mathscr{F} : Cl(V) \to \mathbb{R}^n$

$$\mathscr{F}(\mathbf{z}) = \int_0^T M_{\mathbf{z}}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z})) dt. \tag{1.21}$$

S'il existe un $a \in V$ telle que $\mathscr{F}(a) = 0$ et $\det\left(\dfrac{d\mathscr{F}}{d\alpha}(a)\right) \neq 0$, alors il existe une solution $T-$périodique $\varphi(t,\varepsilon)$ du système (1.17) telle que $\varphi(0,\varepsilon) \to a$ quand $\varepsilon \to 0$.

On considère l'équation suivante

$$\dddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \tag{1.22}$$

Si

$$y = \dot{x}, z = \ddot{x}$$

L'équation (1.22) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = z - y + x + \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \end{cases} \tag{1.23}$$

Le système (1.23) a un point singulier unique, l'origine, lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système (1.23) avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice sont $\pm i$ et 1. En faisant un changement de variable linéaire

$$(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T,$$

on écrit le système (1.23) de telle manière que la partie linéaire à l'origine sera à sa forme normale réelle de Jordan, c.à.d, $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^T = J(X, Y, Z)^T$, la forme normale réelle de Jordan de la matrice A est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

On a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0,$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T$, c.à.d

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} - \dot{y}, \\ \dot{Y} = -\dot{y} + \dot{z}, \\ \dot{Z} = \dot{x} + \dot{z}. \end{cases} \tag{1.25}$$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X - Y + Z \\ -X - Y + Z \\ -X + Y + Z \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

On remplace (1.23) et (1.26) dans (1.25), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \breve{F}(X, Y, Z, t) \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \breve{F}(X, Y, Z, t) \end{cases} \tag{1.27}$$

où $\breve{F} = \breve{F}(X, Y, Z, t) = F(x, y, z, t)$.

Pour $\varepsilon = 0$, la solution du système $(1.27)_{\varepsilon=0}$ est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}$$

On applique le théorème 1.1.2 au système différentiel (1.27), le système (1.27) peut être écrit en tant que système(1.17) en prenant

$$x = (X, Y, Z), F_1(x, t) = (0, \breve{F}, \breve{F}) \text{ et } F_1(x, t, \varepsilon) = (0, 0, 0).$$

Soit $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$ la solution du système (1.27) telle que

$$x(0; X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

Il est clair que le système non-perturbé (1.27) avec $\varepsilon = 0$ admet un centre à l'origine dans le plan (X,Y). Les solutions $2\pi-$périodiques correspondantes sont $x(t, X_0, Y_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t))$ telle que

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pour notre système, V et α du théorème 1.1.2 sont $V = \{(X, Y, 0), 0 < X^2 + Y^2 < \rho\}$ pour certains ρ arbitraires et $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$.

2. La matrice fondamentale $M(t)$ du système non perturbé (1.27) avec $\varepsilon = 0$ est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix},$$

comme $1 - e^{-2\pi} \neq 0$, toutes les hypothèses du théorème 1.1.2 sont vérifiées. Par conséquent, nous allons étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premières composantes de la fonction $\mathscr{F}(\alpha)$ donnée par

$$\mathscr{F}(\alpha) = \xi\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^{-1}(t) F_1(x(t, z_\alpha), t) dt\right), \quad \text{avec } \xi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2),$$

c.à.d

$$\mathscr{F}(\alpha) = (\mathscr{F}_1(\alpha), \mathscr{F}_2(\alpha)).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t)\breve{F}(x(t;X_0,Y_0,0,0),t)\,dt, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t)F\left(\frac{X(t)-Y(t)}{2}, -\frac{X(t)+Y(t)}{2}, \frac{-X(t)+Y(t)}{2}, t\right)dt,\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)\breve{F}(x(t;X_0,Y_0,0,0),t)\,dt, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)F\left(\frac{X(t)-Y(t)}{2}, -\frac{X(t)+Y(t)}{2}, \frac{-X(t)+Y(t)}{2}, t\right)dt.\end{aligned} \tag{1.29}$$

On pose $\mathscr{F}(\alpha) = (\mathscr{F}_1(X_0,Y_0), \mathscr{F}_2(X_0,Y_0))$, En remplaçant la fonction F dans (1.28) et (1.29), on obtient

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_1(X_0,Y_0) &= -\frac{1}{16}(X_0+Y_0)\left(6X_0^2+X_0+6Y_0^2-Y_0\right), \\ \mathscr{F}_2(X_0,Y_0) &= \frac{3}{8}\left(-Y_0X_0^2+Y_0^2X_0\right)-\frac{3}{8}\left(-Y_0^3+X_0^3\right)+\frac{1}{8}\left(-Y_0^2+X_0^2\right)-\frac{1}{8}Y_0X_0.\end{aligned}$$

Si $\mathscr{F}_1(X_0,Y_0) = \mathscr{F}_2(X_0,Y_0) = 0$, on trouve

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

De plus

$$\det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2)}{\partial(X_0,Y_0)}\Big|_{(X_0,Y_0)=\left(X_0^*,Y_0^*\right)} = \frac{3}{2048} \neq 0\right).$$

Alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisemment petit, il y a une solution isolée $2\pi-$périodique $x(t,\varepsilon)$ de l'équation différentielle (1.22) telle que

$$x(0,\varepsilon) \to -\frac{1}{4}, \dot{x}(0,\varepsilon) \to 0, \ddot{x}(0,\varepsilon) \to \frac{1}{4},$$

quand $\varepsilon \to 0$.

CHAPITRE

2 Solutions périodiques d'une classe d'équation du second-ordre

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre de la forme suivante

$$\ddot{x} + 3x\dot{x} + x^3 + F(t)(\dot{x} + x^2) + G(t)x + H(t) = 0. \tag{2.1}$$

Où $F(t)$, $G(t)$ et $H(t)$ sont des fonctions 2π-périodiques.

Nous allons chercher les solutions périodiques de l'équation différentielle (2.1) en supposant que $F(t) = \varepsilon f(t)$, $G(t) = 1 + \varepsilon g(t)$, et $H(t) = \varepsilon^k h(t)$ avec $k = 1, 2$.

2.2 Présentations des résultats principaux

Nos résultats principaux sur l'étude de (2.1) sont les suivants : On définit les fonctions

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_1(X_0, Y_0) &= -\int_0^{2\pi} F(t, X_0, Y_0) \sin t \, dt, \\ \mathscr{F}_2(X_0, Y_0) &= \int_0^{2\pi} F(t, X_0, Y_0) \cos t \, dt, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où

$$\begin{aligned} F(t, X_0, Y_0) &= -h(t) - g(t)A(t) - f(t)B(t) - 3A(t)B(t), \\ A(t) &= X_0 \cos t + Y_0 \sin t, \\ B(t) &= -X_0 \sin t + Y_0 \cos t. \end{aligned}$$

Supposons que les fonctions $F(t) = \varepsilon f(t)$, $G(t) = 1+\varepsilon g(t)$ et $H(t) = \varepsilon^2 h(t)$ sont 2π–périodiques, alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour chaque (X_0^*, Y_0^*), solution du système $\mathscr{F}_j(X_0, Y_0) = 0$ pour $j = 1, 2$, satisfaisant

$$\det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)}{\partial(X_0, Y_0)}\right)\Big|_{(X_0,Y_0)=(X_0^*,Y_0^*)} \neq 0, \tag{2.3}$$

l'équation différentielle (2.1) a une solution 2π–périodique $x(t,\varepsilon) = \varepsilon(X_0^* \cos t + Y_0^* \sin t) + O(\varepsilon^2)$.

On considère l'équation différentielle (2.1) avec $F(t) = \varepsilon\ (1 - \cos^2 t)$, $G(t) = 1 + \varepsilon \sin^2 t$ et $H(t) = \varepsilon^2 \sin t$. Alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, cette équation différentielle a une solution 2π–périodique $x(t,\varepsilon) = \varepsilon 2(\sin t - \cos t)/3 + O(\varepsilon^2)$.

On considère l'équation différentielle (2.1) avec $F(t) = \varepsilon\ (1 - \cos^2 t + 2\cos^4 t)$, $G(t) = 1 + \varepsilon(\sin^2 t + 2\sin^4 t)$ et $H(t) = \varepsilon^2(\sin t + \sin^3 t)$. Alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, cette équation différentielle a une solution 2π–périodique $x(t,\varepsilon) = \varepsilon(21\cos t - 7\sin t)/20 + O(\varepsilon^2)$.

Supposons que

$$\int_0^{2\pi} h(t)\sin t\, dt = 0, \qquad \int_0^{2\pi} h(t)\cos t\, dt = 0,$$

et soient

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_1(X_0, Y_0) &= -\int_0^{2\pi} f(t, X_0, Y_0)\sin t\, dt, \\ \mathscr{F}_2(X_0, Y_0) &= \int_0^{2\pi} f(t, X_0, Y_0)\cos t\, dt, \end{aligned} \tag{2.4}$$

avec

$$\begin{aligned} f(t, X_0, Y_0) &= -g(t)A(t) - f(t)B(t) - 3A(t)B(t), \\ A(t) &= X_0\cos t + Y_0 \sin t - \int_0^t h(\tau)\sin(t-\tau)d\tau, \\ B(t) &= -X_0 \sin t + Y_0\cos t - \int_0^t h(\tau)\cos(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Supposons que $F(t) = \varepsilon f(t)$, $G(t) = 1+\varepsilon g(t)$ et $H(t) = \varepsilon h(t)$ sont des fonctions 2π–périodiques, alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour chaque (X_0^*, Y_0^*), solution du système $\mathscr{F}_j(X_0, Y_0) = 0$ pour $j = 1, 2$, satisfaisant (2.3), l'équation différentielle (2.1) a une solution périodique

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(X_0^*\cos t + Y_0^* \sin t - \int_0^t h(\tau)\sin(t-\tau)d\tau\right) + O(\varepsilon^2).$$

On considère l'équation différentielle (2.1) avec $F(t) = \varepsilon\ (\sin(2t) + \cos(2t))$, $G(t) = 1 + \varepsilon \sin t$ et $H(t) = \varepsilon\ 2\cos^2 t$, alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit cette équation différentielle a une solution 2π–périodique

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon\left((-2\cos t + 15\sin t)/31 + 2\cos^2 t(\cos t - 1)\right) + O(\varepsilon^2).$$

On considère l'équation différentielle (2.1) avec $F(t) = \varepsilon \sin t$, $G(t) = 1 + \varepsilon \sin^2 t$ and $H(t) = \varepsilon 2\cos(2t)$, alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit cette équation différentielle a une solution 2π–périodique

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(2(\cos t - 1)\cos(2t) - \frac{8}{5}\sin t\right) + O(\varepsilon^2).$$

2.3 Preuves des théorèmes et corollaires

Preuve du théorème 2.2

Introduisons la variable $y = \dot{x}$, nous pouvons écrire l'équation différentielle du second ordre (2.1) sous la forme du système différentiel du second ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -3xy - x^3 - F(t)(y + x^2) - G(t)x - H(t). \end{cases} \tag{2.5}$$

En faisant le rééchelonnement (rescaling) $(x, y) = (\varepsilon X, \varepsilon Y)$, nous obtenons le système

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -X + \varepsilon(-h(t) - g(t)X - f(t)Y - 3XY) + \varepsilon^2(-f(t)X^2 - X^3). \end{cases} \tag{2.6}$$

Le système (2.6) avec $\varepsilon = 0$ est un système non perturbé, autrement dit, le système (2.6) est un système perturbé. Le système non perturbé a un unique point singulier, qui est l'origine. La solution $(X(t), Y(t))$ du système non perturbé telle que $(X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0)$ est

$$X(t) = X_0 \cos t + Y_0 \sin t, \qquad Y(t) = -X_0 \sin t + Y_0 \cos t.$$

Notons que toutes ces orbites sont 2π–périodiques. En utilisant la notation introduite dans le théorème de la moyennisation, nous avons $\mathbf{x} = (X, Y)$, $\mathbf{z} = (X_0, Y_0)$, $F_0(\mathbf{x}, t) = (Y, -X)$, $F_1(\mathbf{x}, t) = (0, -h(t) - g(t)X - f(t)Y - 3XY)$ et $F_2(\mathbf{x}, t) = (0, -f(t)X^2 - X^3)$.

La matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}}(t)$ est indépendante de la condition initiale $\mathbf{z}$. En la désignant par $M(t)$, nous obtenons

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant la fonction $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = (\mathscr{F}_1(X_0, Y_0), \mathscr{F}_2(X_0, Y_0))$ donnée dans (1.21), nous obtenons les fonctions (2.2) de l'énoncé du théorème 2.2.

D'après le corollaire 1.1.2, chaque zéro (X_0^*, Y_0^*) du système $\mathscr{F}_1(X_0, Y_0) = \mathscr{F}_2(X_0, Y_0) = 0$ qui satisfait (2.3), fournit une solution 2π–périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ du système (2.6) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit tel que

$$(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon)) = (X_0^* \cos t + Y_0^* \sin t, -X_0^* \sin t + Y_0^* \cos t) + O(\varepsilon).$$

Revenons au changement des variables, pour chaque solution périodique $(X(t,\varepsilon),\ Y(t,\varepsilon))$ du système (2.6) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, nous obtenons une solution 2π–périodique $x(t,\varepsilon) = \varepsilon(X_0^* \cos t + Y_0^* \sin t) + O(\varepsilon^2)$ de l'équation différentielle (2.1) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit ; ce qui achève la démonstration du théorème 2.2.

Preuve du corollaire 2.2

Nous devons appliquer le théorème 2.2 avec

$$f(t) = 1 - \cos^2 t, \quad g(t) = \sin^2 t, \quad h(t) = \sin t.$$

En calculant les fonctions $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ du théorème 2.2, nous obtenons

$$\mathscr{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{\pi}{4}(4 - 3X_0 + 3Y_0), \quad \mathscr{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{\pi}{4}(-X_0 - Y_0).$$

Le système $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = 0$ a une solution $(X_0^*, Y_0^*) = (2/3, -2/3)$. Puisque le jacobien (2.3) en cette solution est $3\pi^2/8$ le corollaire résulte.

Preuve du corollaire 2.2

Nous appliquons le théorème 2.2 avec

$$f(t) = 1 - \cos^2 t + 2\cos^4 t, \quad g(t) = \sin^2 t + 2\sin^4 t, \quad h(t) = \sin t + \sin^3 t.$$

En comptant les fonctions $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ de l'énoncé du théorème 2.2, nous obtenons

$$\mathscr{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{\pi}{4}(7 - 4X_0 + 8Y_0), \quad \mathscr{F}_2(X_0, Y_0) = -\frac{\pi}{2}(X_0 + 3Y_0).$$

Le système $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = 0$ a une solution $(X_0^*, Y_0^*) = (21/20, -7/20)$. Puisque le jacobien (2.3) en cette solution est $\dfrac{5\pi^2}{2}$, nous obtenons, en utilisant le théorème 2.2, la solution périodique donnée dans l'énoncé du corollaire.

Preuve du théorème 2.2

Comme dans le théorème 2.2, l'équation différentielle du second ordre (2.1) peut être écrite sous la forme d'un système différentiel du premier ordre (2.5). En faisant le rééchelonnement (rescaling) $(x, y) = (\varepsilon X, \varepsilon Y)$, on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -X - h(t) + \varepsilon(-g(t)X - f(t)Y - 3XY) + \varepsilon^2(-f(t)X^2 - X^3). \end{cases} \tag{2.7}$$

Le système (2.7) avec $\varepsilon = 0$ est un système non perturbé.

La solution $(X(t), Y(t))$ du système non perturbé telle que $(X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0)$ est

$$\begin{cases} X(t) = X_0 \cos t + Y_0 \sin t - \displaystyle\int_0^t h(\tau)\sin(t-\tau)d\tau \\ Y(t) = -X_0 \sin t + Y_0 \cos t - \displaystyle\int_0^t h(\tau)\cos(t-\tau)d\tau. \end{cases}$$

Ces solutions sont 2π-périodique si et seulement si

$$(X(2\pi), Y(2\pi)) = (X(0), Y(0)).$$

On obtient les conditions de périodicité suivantes

$$\int_0^{2\pi} h(t)\sin(t)dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} h(t)\cos(t)dt = 0.$$

Nous allons appliquer le corollaire 1.1.2 au système différentiel (2.7), on note que ce système peut être écrit comme (1.17) en tenant $\mathbf{x} = (X, Y)$, $\mathbf{z} = (X_0, Y_0)$, $F_0(\mathbf{x}, t) = (Y, -X - h)$, $F_1(\mathbf{x}, t) = (0, -g(t)X - f(t)Y - 3XY)$ et $F_2(\mathbf{x}, t) = (0, -f(t)X^2 - X^3)$.

La matrice fondamentale des solutions $M_{\mathbf{z}}(t)$ est indépendante de la condition initiale $\mathbf{z}$, elle est donnée par

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Calculons la fonction $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = (\mathscr{F}_1(X_0, Y_0), \mathscr{F}_2(X_0, Y_0))$ donnée en (2.4).

D'après théorème 2.2, chaque zéro (X_0^*, Y_0^*) du système $\mathscr{F}_1(X_0, Y_0) = \mathscr{F}_2(X_0, Y_0) = 0$ vérifiant (2.3), fournit une solution 2π–périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ du système (2.7) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit telle que

$$\begin{pmatrix} X(t,\varepsilon) \\ Y(t,\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0^* \cos t + Y_0^* \sin t - \displaystyle\int_0^t h(\tau)\sin(t-\tau)d\tau \\ -X_0^* \sin t + Y_0^* \cos t - \displaystyle\int_0^t h(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \end{pmatrix} + O(\varepsilon).$$

Revenons au changement des variables, pour chaque solution périodique $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ du système (2.7) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, nous obtenons une solution 2π–périodique

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(X_0^* \cos t + Y_0^* \sin t - \int_0^t h(\tau)\sin(t-\tau)d\tau\right) + O(\varepsilon^2)$$

de l'équation différentielle (2.1) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit ; ce qui achève la démonstration du théorème 2.2.

Preuve du corollaire 2.2

Nous appliquons le théorème 2.2 avec

$$f(t) = \sin(2t) + \cos(2t), \quad g(t) = \sin t, \quad h(t) = 2\cos^2 t.$$

Calculons les fonctions $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ de l'énoncé du théorème 2.2, on obtient

$$\mathscr{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{\pi}{2}(2 + X_0 - 4Y_0), \quad \mathscr{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{\pi}{2}(1 + 8X_0 - Y_0).$$

Le système $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = 0$ a une solution $(X_0^*, Y_0^*) = (-2/31, 15/31)$. Comme le Jacobien (2.3) est $31\pi^2/4$. En utilisant le théorème 2.2 nous obtenons la solution périodique donnée dans l'énoncé du corollaire 2.2.

Preuve du corollaire 2.2

Nous appliquons le théorème 2.2 avec

$$f(t) = \sin t, \quad g(t) = \sin^2 t, \quad h(t) = 2\cos(2t).$$

On calcule les fonctions $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ de l'énoncé du théorème 2.2, on obtient

$$\mathscr{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{3\pi}{4}(8+5Y_0), \quad \mathscr{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{11\pi}{4} X_0.$$

Le système $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = 0$ a une solution $(X_0^*, Y_0^*) = (0, -8/5)$. Comme le Jacobien (2.3) est $-165\pi^2/16$, en utilisant le théorème 2.2, nous obtenons la solution périodique de l'énoncé du corollaire 2.2.

CHAPITRE

3 Solutions périodiques du système différentiel de Floquet de dimension 2 et 3

3.1 Introduction

On considère le système de Floquet

$$\dot{x} = Ax(t) + b(t) + \varepsilon B(t)x(t), \tag{3.1}$$

Où $x(t)$ et $b(t)$ sont des vecteurs colonnes de dimension n, A et $B(t)$ sont des matrices $(n \times n)$, $B(t)$ et $b(t)$ sont T-périodiques. Le système

$$\dot{x} = Ax(t) + b(t), \tag{3.2}$$

est le système non perturbé du système (3.1). Dans ce chapitre, on étudie les solutions périodiques du système linéaire non-homogène perturbé (3.1) pour $n = 2$ et $n = 3$.

3.2 Présentations des résultats principaux

Notre résultat principal sur les solutions périodiques du système différentiel non-autonome du second ordre (3.1), où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{pmatrix},$$

est le suivant

On définit

$$\mathscr{F}_1(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\cos(t)\big[b_{11}(t)C(t)+b_{12}(t)D(t)\big] \\ +\sin(t)\big[b_{21}C(t)+b_{22}D(t)\big]\Big)dt, \tag{3.3}$$

$$\mathscr{F}_2(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(-\sin(t)\big[b_{11}(t)C(t)+b_{12}(t)D(t)\big] \\ +\cos(t)\big[b_{21}C(t)+b_{22}D(t)\big]\Big)dt,$$

où

$$C(t) = x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau)+b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,$$

$$D(t) = x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau)+b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau.$$

Si on a

$$\int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_1(\tau)+\sin(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0, \tag{3.4}$$

$$\int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau)+\cos(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

alors pour chaque (x_0^*,y_0^*) solution du système

$$\mathscr{F}_k(x_0,y_0) = 0,\ k = 1,2,$$

satisfaisant

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\Big|_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right) \neq 0,$$

le système différentiel (3.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon))$ qui tend vers la solution

$$\begin{pmatrix} x(t,0) \\ y(t,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^*\cos(t) - y_0^*\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau)+b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0^*\sin(t) + y_0^*\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau)+b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

du système (3.2) lorsque $\varepsilon \to 0$.

On considère le cas $n = 3$. Notre résultat principal sur les solutions périodiques du système différentiel du troisième ordre (3.1) où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & b_{13}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & b_{23}(t) \\ b_{31}(t) & b_{32}(t) & b_{33}(t) \end{pmatrix},$$

et

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix},$$

est le suivant

On considère le cas $\lambda = 0$. On définit

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\cos(t)\big[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t)\big] \\
&\quad + \sin(t)\big[b_{21}C(t) + b_{22}D(t) + b_{23}E(t)\big]\Big)dt, \\
\mathscr{F}_2(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(-\sin(t)\big[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t)\big] \\
&\quad + \cos(t)\big[b_{21}C(t) + b_{22}D(t) + b_{23}E(t)\big]\Big)dt, \\
\mathscr{F}_3(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(b_{31}(t)C(t) + b_{32}(t)D(t) + b_{33}(t)E(t)\Big)dt,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C(t) &= x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau, \\
D(t) &= x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau, \\
E(t) &= z_0 + \int_0^t b_3(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Si on a

$$\int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$
$$\int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} b_3(\tau)d\tau = 0,$$

alors pour chaque (x_0^*, y_0^*, z_0^*) solution du système

$$\mathscr{F}_k(x_0, y_0, z_0) = 0,\ k = 1,2,3,$$

satisfaisant

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*)}\right) \neq 0,$$

le système différentiel (3.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ qui tend vers la solution

$$\begin{pmatrix} x(t,0) \\ y(t,0) \\ z(t,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^*\cos(t) - y_0^*\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0^*\sin(t) + y_0^*\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ z_0^* + \int_0^t b_3(\tau)d\tau \end{pmatrix},$$

de système (3.2) lorsque $\varepsilon \to 0$.

On considère le cas $\lambda \neq 0$. On définit

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(&\cos(t)\big[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t)\big] \\
&+ \sin(t)\big[b_{21}C(t) + b_{22}D(t) + b_{23}E(t)\big]\Big)dt; \\
\mathscr{F}_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(&-\sin(t)\big[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t)\big] \\
&+ \cos(t)\big[b_{21}C(t) + b_{22}D(t) + b_{23}E(t)\big]\Big)dt;
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C(t) &= x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau, \\
D(t) &= x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau, \\
E(t) &= z_0 + \int_0^t b_3(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Si on a

$$\int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$z_0^* = \frac{e^{2\pi\lambda}}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda\tau}b_3(\tau)d\tau,$$

alors pour chaque (x_0^*, y_0^*) solution du système

$$\mathscr{F}_k(x_0, y_0) = 0,\ k = 1,2$$

satisfaisant

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)}\Big|_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right) \neq 0,$$

le système différentiel (3.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ qui tend vers la solution

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t(\cos(t-\tau)b_1(\tau) - \sin(t-\tau)b_2(\tau))d\tau \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t(\sin(t-\tau)b_1(\tau) + \cos(t-\tau)b_2(\tau))d\tau \\ \frac{e^{\lambda t}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-\tau)}b_3(\tau)d\tau}{1-e^{2\pi\lambda}} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}b_3(\tau)d\tau \end{pmatrix}.$$

du système différentiel (3.2) lorsque $\varepsilon \to 0$.

Les applications des théorèmes 3.2, 3.2 et 3.2 sont les suivantes.

On considère le système différentiel de Floquet (3.1) dans $\mathbb{R}^2$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & sin(2t) \\ \sin(t) & \cos(3t) \end{pmatrix}.$$

Alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système différentiel (3.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ qui tend vers la solution périodique $\left(-\frac{17}{6}\cos(t) - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}, -\frac{11}{6}\sin(t) + \frac{1}{6}\sin(2t)\right)$ du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin(t), \\ \dot{y} = x + \cos(t), \end{cases}$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

On considère le système différentiel de Floquet (3.1) dans $\mathbb{R}^3$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 1 & sin(t) \\ 2 & \sin(2t) & 1 \\ \sin(t) & 1 & \cos(3t) \end{pmatrix}.$$

Alors, pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système différentiel (3.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ qui tend vers la solution périodique $\left(-\cos(t), 0, \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2t)\right)$ du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin(t), \\ \dot{y} = x + \cos(t), \\ \dot{z} = -\sin(2t), \end{cases}$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

On considère le système différentiel de Floquet (3.1) dans $\mathbb{R}^3$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(t) \\ \sin(2t) & \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Alors, pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système différentiel (3.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ qui tend vers la solution périodique

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(2\lambda(e^{2\pi\lambda}-1)(\sin(t)\lambda-2\cos(t))}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)} \\ \frac{(2e^{2\pi\lambda}\lambda^2-2\lambda^2)\cos(t)}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)} + \frac{(\pi\lambda^4+5\pi\lambda^2+4e^{2\pi\lambda}\lambda+4\pi-4\lambda)\sin(t)}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)} \\ \frac{-\lambda\cos(t)+sin(t)}{\lambda^2+1} \end{pmatrix}$$

du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin(t), \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = \lambda z + \sin(t), \end{cases}$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

3.3 Preuves des théorèmes et corollaires

Preuve du théorème 3.2

On va étudier les solutions périodiques du système (1.18), i.e. les solutions périodiques du système (3.1) avec $\varepsilon = 0$. La solution du système (3.2) telle que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t (\cos(t-\tau)b_1(\tau) - \sin(t-\tau)b_2(\tau))d\tau \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t (\sin(t-\tau)b_1(\tau) + \cos(t-\tau)b_2(\tau))d\tau \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Ces solutions sont 2π-périodique si et seulement si

$$(x(2\pi), y(2\pi)) = (x(0), y(0)).$$

On obtient les conditions de périodicité suivantes

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0.$$

On doit appliquer le corollaire 1.1.2 au le système différentiel (3.1). Il peut s'écrire comme le système (1.17) en prenant

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, F_0(t,\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} -y(t)+b_1(t) \\ x(t)+b_2(t) \end{pmatrix}, F_1(t,\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} b_{11}x(t)+b_{12}y(t) \\ b_{21}x(t)+b_{22}y(t) \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions périodiques (3.6) est de dimension deux. Pour chercher les solutions périodiques de notre système (3.1), on doit calculer les zéros $\mathbf{z} = (x_0, y_0)$ du système $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathscr{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (1.21). La matrice fondamentale M(t) du système (1.19) est

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Par la suite, on doit étudier les zéros du système $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = 0$ de deux équations à deux inconnues, où $\mathscr{F}$ est donnée dans l'énnoncé du théorème 3.2. Plus précisément, on a $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = (\mathscr{F}_1(x_0,y_0), \mathscr{F}_2(x_0,y_0))$ où $\mathscr{F}_1(x_0,y_0), \mathscr{F}_2(x_0,y_0)$ sont définies comme dans l'énoncé du théorème 3.2. Les zéros (x_0^*, y_0^*) du système

$$\begin{pmatrix} \mathscr{F}_1(x_0,y_0) \\ \mathscr{F}_2(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

par rapport aux variables x_0 et y_0, fournissent des orbites périodiques du système (3.1) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit s'ils sont simples i.e. si

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\Big|_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right) \neq 0.$$

Pour chaque zéro simple (x_0^*, y_0^*) du système (3.7), on obtient une solution 2π-périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ du système différentiel (3.1), pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, qui tend vers la solution périodique (3.5) du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + b_1(t), \\ \dot{y} = x + b_2(t), \end{cases}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$; ce qui achève la preuve du théorème 3.2.

Preuve des théorèmes 3.2 et 3.2

La solution du système (3.1) avec $\varepsilon = 0$ tel que $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \\ b_3(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

En remplaçant A, On obtient

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ e^{\lambda t}z_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}b_3(\tau)d\tau \end{pmatrix}.$$

Pour étudier la périodicité de ces solutions, on distingue deux cas : $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$. Dans ce qui suit, on va étudier ces deux cas repectivement.

Preuve du théorème 3.2 (pour $\lambda = 0$)

On va appliquer la théorie de la moyennisation pour étudier les solutions périodiques du système (3.2). Plus précisément, on va chercher quelle orbite périodique du système (3.2) persiste pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Maintenant nous définissons les éléments du corollaire 1.1.2 correspondant à notre système différentiel (3.1). Nous avons $\Omega = \mathbb{R}^3$ et $T = 2\pi$. Nous écrivons (3.1) sous la forme (1.17) en posant les fonctions F_0, F_1 et F_2 comme suit

$$\begin{aligned} F_0(t,\mathrm{x}) &= Ax + b(t), \\ F_1(t,\mathrm{x}) &= B(t)x, \\ F_2(t,\mathrm{x}) &= 0. \end{aligned}$$

On va étudier les solutions périodiques du système (1.18) dans notre cas, i.e. les solutions périodiques du système (3.1) avec $\varepsilon = 0$.
Ces solutions avec $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ et $\lambda = 0$, sont

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ z_0 + \int_0^t b_3(\tau)d\tau \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Ces solutions sont $2\pi-$périodique si et seulement si

$$(x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi)) = (x(0), y(0), z(0)).$$

On obtient les conditions de périodicité suivantes

$$\int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$
$$\int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} b_3(\tau)d\tau = 0.$$

L'ensemble des solutions périodiques (3.8) est de dimension trois. Pour chercher les solutions périodiques de notre système (3.1), on doit calculer les zéros $\mathbf{z} = (x_0, y_0, z_0)$ du système $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathscr{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (1.21). La matrice fondamentale $M(t)$ du système (1.19) est

$$M(t) = M_z(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on doit étudier les zéros du système $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = 0$ où
$\mathscr{F}(\mathbf{z}) = (\mathscr{F}_1(x_0, y_0, z_0), \mathscr{F}_2(x_0, y_0, z_0), \mathscr{F}_3(x_0, y_0, z_0))$ sont données dans l'énoncé du théorème 3.2. Plus précisément, les zéros (x_0^*, y_0^*, z_0^*) du système

$$\begin{pmatrix} \mathscr{F}_1(x_0, y_0, z_0) \\ \mathscr{F}_2(x_0, y_0, z_0) \\ \mathscr{F}_3(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

par rapport aux variables x_0, y_0 et z_0 fournissent les orbites du système (3.1) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit s'ils sont simples i.e. si

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}\Big|_{(x_0, y_0, z_0) = (x_0^*, y_0^*, z_0^*)}\right) \neq 0.$$

Pour chaque simple zéro (x_0^*, y_0^*, z_0^*) du système (3.9), nous obtenons une solution 2π-périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ du système différentiel (3.1) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit telle que $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ tend vers la solution périodique (3.8) de (3.2) lorsque $\varepsilon \to 0$. Notons que cette solution est périodique de période 2π ; Ceci termine la preuve du théorème 3.2.

Preuve du théorème 3.2 (pour $\lambda \neq 0$)

On va étudier les solutions périodiques du système (1.18), i.e. les solutions périodiques du système (3.2) avec $\varepsilon = 0$. La solution du système (3.2) avec $\lambda \neq 0$, telle que $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ z_0e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}b_3(\tau)d\tau \end{pmatrix}$$

ces solutions sont 2π-périodiques si et seulement si

$$(x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi)) = (x(0), y(0), z(0)).$$

On obtient les conditions de périodicité suivantes

$$\int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau)+\cos(\tau)b_2(\tau))d\tau=0,$$

$$z_0^*=\frac{e^{2\pi\lambda}}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi}e^{-\lambda\tau}b_3(\tau)d\tau.$$

On va appliquer le théorème 1.1.2 au système différentiel (3.1) avec $\lambda\neq 0$. Il peut s'écrire comme le système (1.17), en prenant

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}, F_0(t,\mathrm{x})=\begin{pmatrix} -y(t)+b_1(t)\\ x(t)+b_2(t)\\ \lambda z(t)+b_3(t)\end{pmatrix},$$

$$F_1(t,\mathrm{x})=\begin{pmatrix} b_{11}x(t)+b_{12}y(t)+b_{13}z(t)\\ b_{21}x(t)+b_{22}y(t)+b_{23}z(t)\\ b_{31}x(t)+b_{32}y(t)+b_{33}z(t)\end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions périodiques devient

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(t)x_0-\sin(t)y_0+\int_0^t(\cos(t-\tau)b_1(\tau)-\sin(t-\tau)b_2(\tau))d\tau\\ \sin(t)x_0+\cos(t)y_0+\int_0^t(\sin(t-\tau)b_1(\tau)+\cos(t-\tau)b_2(\tau))d\tau\\ \frac{e^{\lambda t}\int_0^{2\pi}e^{\lambda(2\pi-\tau)}b_3(\tau)d\tau}{1-e^{2\pi\lambda}}+\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}b_3(\tau)d\tau\end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Cet ensemble des solutions périodiques est de dimension deux. Pour chercher les solutions périodiques de notre système (3.1), on doit calculer les zéros $\mathbf{z}=(x_0,y_0)$ du système $\mathscr{F}(\mathbf{z})=0$, où $\mathscr{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (1.20). Donc la matrice fondamentale M(t) du système différentiel (1.19) est

$$M(t)=M_z(t)=\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0\\ \sin(t) & \cos(t) & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}.$$

elle vérifie

$$M^{-1}(0)-M^{-1}(2\pi)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-e^{-2\pi\lambda}\end{pmatrix}.$$

Donc, on doit étudier les zéros du système $\mathscr{F}(\mathbf{z})=0$ des deux équations avec deux inconnues. Plus précisément, on a $\mathscr{F}(\mathbf{z})=(\mathscr{F}_1(x_0,y_0),\mathscr{F}_2(x_0,y_0))$ où $\mathscr{F}_1(x_0,y_0),\mathscr{F}_2(x_0,y_0)$ sont définis comme dans l'énoncé du théorème 3.2. Les zéros (x_0^*,y_0^*) du système

$$\begin{pmatrix} \mathscr{F}_1(x_0,y_0)\\ \mathscr{F}_2(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

par rapport aux variables x_0 et y_0 fournissent les orbites du système (3.11) avec $\varepsilon\neq 0$ suffisamment petit s'ils sont simples i.e. si

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\Big|_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right)\neq 0.$$

Pour chaque zéro simple (x_0^*, y_0^*) du système (3.11), on obtient une solution 2π-périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ du système différentiel (3.1) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit laquelle tend vers la solution périodique (3.10) du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + b_1(t) \\ \dot{y} = x + b_2(t) \\ \dot{z} = \lambda z + b_3(t) \end{cases},$$

lorsque $\varepsilon \to 0$. Ce qui termine la preuve du théorème 3.2.

Preuve du corollaire 3.2

On considère le système différentiel 3.1 avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & sin(2t) \\ sin(t) & cos(3t) \end{pmatrix}$$

et

$$b(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Calculons les fonctions $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ du théorème 3.2, nous trouvons

$$\mathscr{F}_1(x_0, y_0) = \frac{1}{4}x_0 + \frac{5}{8}$$
$$\mathscr{F}_2(x_0, y_0) = \frac{1}{4}y_0.$$

Le système $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = 0$ a une solution $(x_0^*, y_0^*) = (-\frac{5}{2}, 0)$. Comme le jacobien

$$\det\Big(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)}|_{(x_0,y_0)=(-\frac{5}{2},0)}\Big) = \frac{1}{16},$$

alors, ce système différentiel a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ qui tend vers la solution située dans l'énoncé du corollaire (3.2) lorsque $\varepsilon \to 0$.

Preuve du corollaire 3.2

On doit appliquer le théorème 3.2 avec $b(t)$ et $B(t)$ qui sont définis dans l'énoncé du corollaire (3.2). On peut vérifier facilement les conditions de périodicité

$$\int_0^{2\pi} [\cos(\tau)\sin(\tau) + \sin(\tau)\cos(\tau)]d\tau = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} [-\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau)]d\tau = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(2\pi)d\tau = 0.$$

Après les calculs des fonctions $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ et $\mathscr{F}_3$ du théorème 3.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1 &= \frac{1.178097245}{\pi} y_0,\\
\mathscr{F}_2 &= \frac{1}{2\pi}(-0.7853981634 + 3.141592654 y_0 - 0.7853981634 x_0),\\
\mathscr{F}_3 &= \frac{1}{2\pi}(3.926990817 + 3.141592654 z_0 + 3.141592654 x_0).
\end{aligned}$$

Le système $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = \mathscr{F}_3 = 0$ a une solution réelle unique donnée par

$$(x_0^*, y_0^*, z_0^*) = (-1, 0, -\frac{1}{4})$$

Puisque le jacobien

$$\det\Big(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}|_{(x_0,y_0,z_0)=(-1,0,-\frac{1}{4})}\Big) = \frac{0.7267096096}{\pi^3},$$

en utilisant le théorème 3.2, on obtient la solution périodique donnée dans l'énoncé du corollaire 3.2.

Preuve du corollaire 3.2

On doit appliquer le théorème 3.2 avec $b(t)$ et $B(t)$ qui sont définis dans l'énoncé du corollaire 3.2, on peut vérifier facilement les conditions de périodicité

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} [2\cos(\tau)\sin(\tau)]\, d\tau &= 0,\\
\int_0^{2\pi} [-\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau)]\, d\tau &= 0.
\end{aligned}$$

Aprés les calculs des fonctions $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ du théorème 3.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1 &= \frac{(\lambda^4\pi + 5\lambda^5 2\pi + 4\pi)x_0 - 4e^{2\pi\lambda} + 4\lambda}{4\pi(\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4)}\\
\mathscr{F}_2 &= -\frac{(\lambda^4\pi + 5\lambda^5 2\pi + 4\pi)y_0 - 2e^{2\pi\lambda} + 2\lambda^2}{4\pi(\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4)}.
\end{aligned}$$

Le système $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = 0$ a une seule solution réelle périodique

$$(x_0^*, y_0^*) = \Big(\frac{4\lambda(e^{2\pi\lambda-1})}{\pi(\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4)}, \frac{2\lambda^2(e^{2\pi\lambda-1})}{\pi(\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4)}\Big).$$

Comme le jacobien

$$\det\Big(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)}|_{(x_0,y_0)=\frac{4\lambda(e^{2\pi\lambda-1})}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)}, \frac{2\lambda^2(e^{2\pi\lambda-1})}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)})}\Big) = \frac{-1}{16},$$

en utilisant le théorème 3.2, on obtient la solution périodique donnée dans l'énoncé du corollaire 3.2.

CHAPITRE

4

Solutions périodiques de certains systèmes différentiels de Floquet de dimension 4

4.1 Introduction

Dans ce chapitre et comme suite au chapitre précédent, nous étudions les solutions périodiques du système différentiel du quatrième ordre suivant

$$\dot{x} = Ax + b(t) + \varepsilon B(t)x. \tag{4.1}$$

où A est une matrice constante (4×4) sous la forme normale de Jordan,

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & b_{13}(t) & b_{14}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & b_{23}(t) & b_{24}(t) \\ b_{31}(t) & b_{32}(t) & b_{33}(t) & b_{34}(t) \\ b_{41}(t) & b_{42}(t) & b_{43}(t) & b_{44}(t) \end{pmatrix},$$

$b(t) = b(t+2\pi)$, $B(t) = B(t+2\pi)$ et ε est un petit paramètre.

4.2 Résultats principaux

Pour étudier les solutions périodiques du système différentiel non-autonome du quatrième ordre (4.1), on a distingué cinq cas selon la forme de Jordan réelle de la matrice A, ces cas seront étudiés dans les théorèmes suivants :

Premier cas :

On considère le système différentiel de Floquet (4.1) avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

Notre résultat principal pour ce cas est le suivant

On définit

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1(x_0, y_0, z_0, v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\cos(t)\big[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t) + b_{14}(t)F(t)\big] \\
&\quad + \sin(t)\big[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t) + b_{23}(t)E(t) + b_{24}(t)F(t)\big]\Big)dt, \\
\mathscr{F}_2(x_0, y_0, z_0, v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(-\sin(t)\big[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t) + b_{14}(t)F(t)\big] \\
&\quad + \cos(t)\big[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t) + b_{23}(t)E(t) + b_{24}(t)F(t)\big]\Big)dt, \\
\mathscr{F}_3(x_0, y_0, z_0, v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\cos(t)\big[b_{31}(t)C(t) + b_{32}(t)D(t) + b_{33}(t)E(t) + b_{34}(t)F(t)\big] \\
&\quad + \sin(t)\big[b_{41}(t)C(t) + b_{42}(t)D(t) + b_{43}(t)E(t) + b_{44}(t)F(t)\big]\Big)dt, \\
\mathscr{F}_4(x_0, y_0, z_0, v_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(-\sin(t)\big[b_{31}(t)C(t) + b_{32}(t)D(t) + b_{33}(t)E(t) + b_{34}(t)F(t)\big] \\
&\quad + \cos(t)\big[b_{41}(t)C(t) + b_{42}(t)D(t) + b_{43}(t)E(t) + b_{44}(t)F(t)\big]\Big)dt,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C(t) &= x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau, \\
D(t) &= x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau, \\
E(t) &= z_0\cos(t) - v_0\sin(t) + \int_0^t (-b_4(\tau)\sin(t-\tau) + b_3(\tau)\cos(t-\tau))d\tau, \\
F(t) &= z_0\sin(t) + v_0\cos(t) + \int_0^t (b_3(\tau)sin(t-\tau) + b_4(\tau)\cos(t-\tau))d\tau.
\end{aligned}$$

Si

$$\int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_1(\tau)+\sin(\tau)b_2(\tau))d\tau=0,$$
$$\int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau)+\cos(\tau)b_2(\tau))d\tau=0,$$
$$\int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_3(\tau)+\sin(\tau)b_4(\tau))d\tau=0,$$
$$\int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_3(\tau)+\cos(\tau)b_4(\tau))d\tau=0.$$

Alors pour chaque $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, v_0^*)$ racine du système

$$\mathscr{F}_k(x_0, y_0, z_0, v_0)=0, k=1,2,3,4,$$

tel que

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_3,\mathscr{F}_4)}{\partial(x_0,y_0,z_0,v_0)}\Big|_{(x_0,y_0,z_0,v_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*,v_0^*)}\right)\neq 0,$$

le système différentiel (4.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$, qui tend vers la solution périodique donnée par

$$\begin{pmatrix} x(t,0)\\ y(t,0)\\ z(t,0)\\ v(t,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0^*\cos(t)-y_0^*\sin(t)+\int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau)+b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau\\ x_0^*\sin(t)+y_0^*\cos(t)+\int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau)+b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau\\ z_0^*\cos(t)-v_0^*\sin(t)+\int_0^t(-b_4(\tau)\sin(t-\tau)+b_3(\tau)\cos(t-\tau))d\tau\\ z_0^*\sin(t)+v_0^*\cos(t)+\int_0^t(b_3(\tau)sin(t-\tau)+b_4(\tau)\cos(t-\tau))d\tau\end{pmatrix}$$

du système différentiel (4.1) quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Notons que cette solution est périodique de période 2π.

Deuxième cas :

Dans ce cas, on considère le système différentiel (4.1) avec la forme réelle de Jordan de la matrice A donnée par

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu\end{pmatrix}.$$

avec $\lambda\neq\mu\neq 0$. Notre résultat principal pour ce cas est le suivant :
On définit

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(&\cos(t)\big[b_{11}(t)C(t)+b_{12}(t)D(t)+b_{13}(t)E(t)+b_{14}(t)F(t)\big]\\
&+\sin(t)\big[b_{21}(t)C(t)+b_{22}(t)D(t)+b_{23}(t)E(t)+b_{24}(t)F(t)\big]\Big)dt,\\
\mathscr{F}_2(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(&-\sin(t)\big[b_{11}(t)C(t)+b_{12}(t)D(t)+b_{13}(t)E(t)+b_{14}(t)F(t)\big]\\
&+\cos(t)\big[b_{21}(t)C(t)+b_{22}(t)D(t)+b_{23}(t)E(t)+b_{24}(t)F(t)\big]\Big)dt,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C(t) &= x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,\\
D(t) &= x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,\\
E(t) &= e^{\lambda t}z_0 + e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda\tau}b_3(\tau)d\tau,\\
F(t) &= e^{\mu t}v_0 + e^{\mu t}\int_0^t e^{-\mu\tau}b_4(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_1(\tau)+\sin(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,\\
\int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau)+\cos(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,\\
z_0^* = \frac{e^{2\pi\lambda}}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda\tau}b_3(\tau)d\tau,\\
v_0^* = \frac{e^{2\pi\mu}}{1-e^{2\pi\mu}}\int_0^{2\pi} e^{-\mu\tau}b_4(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

alors pour chaque (x_0^*, y_0^*) racine du système

$$\mathscr{F}_k(x_0,y_0) = 0, k = 1,2,$$

tel que

$$det\Big(\frac{\partial(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\Big|_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\Big) \neq 0,$$

le système différentiel (4.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$, tend vers la solution périodique donnée par

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\\ v(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t(\cos(t-\tau)b_1(\tau)-\sin(t-\tau)b_2(\tau))d\tau\\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t(\sin(t-\tau)b_1(\tau)+\cos(t-\tau)b_2(\tau))d\tau\\ \frac{e^{\lambda t}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-\tau)}b_3(\tau)d\tau}{1-e^{2\pi\lambda}} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}b_3(\tau)d\tau\\ \frac{e^{\mu t}\int_0^{2\pi} e^{\mu(2\pi-\tau)}b_4(\tau)d\tau}{1-e^{2\pi\mu}} + \int_0^t e^{\mu(t-\tau)}b_4(\tau)d\tau \end{pmatrix},$$

du système différentiel (4.1), quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Notons que cette solution est périodique de période 2π.

Troisième cas :

On considère dans ce cas le système de Floquet (4.1) avec A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Le résultat principal de ce cas est le suivant :

On définit

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(&\cos(t)\big[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t) + b_{14}(t)F(t)\big] \\
&+ \sin(t)\big[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t) + b_{23}(t)E(t) + b_{24}(t)F(t)\big]\Big) dt, \\
\mathscr{F}_2(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(&-\sin(t)\big[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t) + b_{14}(t)F(t)\big] \\
&+ \cos(t)\big[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t) + b_{23}(t)E(t) + b_{24}(t)F(t)\big]\Big) dt, \\
\mathscr{F}_3(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(&\cos(t)\big[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t) + b_{14}(t)F(t)\big] \\
&+ \sin(t)\big[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t) + b_{23}(t)E(t) + b_{24}(t)F(t)\big]\Big) dt,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C(t) &= x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau, \\
D(t) &= x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau, \\
E(t) &= z_0 + \int_0^t b_3(\tau)d\tau, \\
F(t) &= e^{\mu t}v_0 + e^{\mu t}\int_0^t e^{-\mu\tau} b_4(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Si on a

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} b_3(\tau)d\tau = 0,$$

$$v_0^* = \frac{e^{2\pi\mu}}{1 - e^{2\pi\mu}}\int_0^{2\pi} e^{-\mu\tau} b_4(\tau)d\tau.$$

Alors pour chaque (x_0^*, y_0^*, z_0^*) solution du système

$$\mathcal{F}_k(x_0, y_0, z_0) = 0,\ k = 1,2,3$$

satisfaisant

$$det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*)}\right) \neq 0,$$

le système différentiel (4.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ qui tend vers la solution

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t(\cos(t-\tau)b_1(\tau) - \sin(t-\tau)b_2(\tau))d\tau \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t(\sin(t-\tau)b_1(\tau) + \cos(t-\tau)b_2(\tau))d\tau \\ z_0^* + \int_0^t b_3(\tau)d\tau \\ e^{\mu t}v_0^* + \int_0^t e^{\mu(t-\tau)}b_4(\tau)d\tau \end{pmatrix}.$$

du système différentiel (4.1) quand $\varepsilon \to 0$.

Le cas où $\lambda \neq 0, \mu = 0$ est similaire à ce cas, mais après avoir fait une permutation dans le système différentiel.

Quatrième cas :

La matrice A dans ce cas est sous sa forme de Jordan réelle suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notre résultat principal de ce cas est donné dans ce théorème

On définit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0, v_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} &\Big(\cos(t)\big[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t) + b_{14}(t)F(t)\big] \\
&+ \sin(t)\big[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t) + b_{23}(t)E(t) + b_{24}(t)F(t)\big]\Big)dt, \\
\mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0, v_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} &\Big(-\sin(t)\big[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t) + b_{14}(t)F(t)\big] \\
&+ \cos(t)\big[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t) + b_{23}(t)E(t) + b_{24}(t)F(t)\big]\Big)dt, \\
\mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0, v_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} &\Big(\cos(t)\big[b_{31}(t)C(t) + b_{32}(t)D(t) + b_{33}(t)E(t) + b_{34}(t)F(t)\big] \\
&+ \sin(t)\big[b_{41}(t)C(t) + b_{42}(t)D(t) + b_{43}(t)E(t) + b_{44}(t)F(t)\big]\Big)dt, \\
\mathcal{F}_4(x_0, y_0, z_0, v_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} &\Big(-\sin(t)\big[b_{31}(t)C(t) + b_{32}(t)D(t) + b_{33}(t)E(t) + b_{34}(t)F(t)\big] \\
&+ \cos(t)\big[b_{41}(t)C(t) + b_{42}(t)D(t) + b_{43}(t)E(t) + b_{44}(t)F(t)\big]\Big)dt,
\end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
C(t) &= x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,\\
D(t) &= x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,\\
E(t) &= z_0 + \int_0^t b_3(\tau)d\tau,\\
F(t) &= v_0 + \int_0^t b_4(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Si

$$
\begin{gathered}
\int_0^{2\pi} (\cos(s)h_1(s) + \sin(s)h_2(s))ds = 0,\\
\int_0^{2\pi} (-\sin(s)h_1(s) + \cos(s)h_2(s))ds = 0,\\
\int_0^{2\pi} b_3(\tau)d\tau = 0,\\
\int_0^{2\pi} b_4(\tau)d\tau = 0.
\end{gathered}
$$

Alors, pour chaque $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, v_0^*)$ racine du système

$$\mathscr{F}_k(x_0, y_0, z_0, v_0) = 0, k = 1,2,3,4,$$

vérifiant

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, z_0, v_0)}\Big|_{(x_0,y_0,z_0,v_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*,v_0^*)}\right) \neq 0,$$

le système différentiel (4.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$, qui tend vers la solution périodique donnée par

$$
\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\\ v(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^*\cos(t) - y_0^*\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau\\ x_0^*\sin(t) + y_0^*\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau\\ z_0^* + \int_0^{2\pi} b_3(\tau)d\tau\\ v_0^* + \int_0^t b_4(\tau)d\tau \end{pmatrix} \tag{4.2}
$$

du système différentiel (4.1) quand $\varepsilon \to 0$. Notons que cette solution est 2π-périodique.

Cinquième cas :

On considère le système différentiel de Floquet (4.1) dans $\mathbb{R}^4$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

Le résultat de ce cas se présente dans le théorème suivant :

On définit

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1(x_0,y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\cos(t)\big[b_{11}(t)C(t)+b_{12}(t)D(t)+b_{13}(t)E(t)+b_{14}(t)F(t)\big]\\
&\quad +\sin(t)\big[b_{21}(t)C(t)+b_{22}(t)D(t)+b_{23}(t)E(t)+b_{24}(t)F(t)\big]\Big)dt,\\
\mathscr{F}_2(x_0,y_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(-\sin(t)\big[b_{11}(t)C(t)+b_{12}(t)D(t)+b_{13}(t)E(t)+b_{14}(t)F(t)\big]\\
&\quad +\cos(t)\big[b_{21}(t)C(t)+b_{22}(t)D(t)+b_{23}(t)E(t)+b_{24}(t)F(t)\big]\Big)dt,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C(t) &= x_0\cos(t)-y_0\sin(t)+\int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau)+b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,\\
D(t) &= x_0\sin(t)+y_0\cos(t)+\int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau)+b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,\\
E(t) &= e^{\lambda t}z_0+te^{\lambda t}v_0+\int_0^t\left(e^{\lambda t}\left(e^{-\lambda\tau}b_3(\tau)-\tau e^{-\lambda\tau}b_4(\tau)\right)+tb_4(\tau)e^{t\lambda-\lambda\tau}\right)d\tau,\\
F(t) &= e^{\lambda t}v_0+e^{\lambda t}\left(\int_0^t e^{-\lambda\tau}b_4(\tau)d\tau\right).
\end{aligned}$$

Si on a

$$\int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_1(\tau)+\sin(\tau)b_2(\tau))d\tau=0,$$

$$\int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau)+\cos(\tau)b_2(\tau))d\tau=0,$$

$$z_0^*=\frac{\int_0^{2\pi}\left((2\pi b_4(\tau)+\tau b_4(\tau)-b_3(\tau))e^{\lambda(2\pi-\tau)}(1-e^{2\lambda\pi})+2\pi b_4(\tau)e^{\lambda(4\pi-\tau)}\right)d\tau}{(e^{2\pi\lambda}-1)^2},$$

$$v_0^*=\frac{e^{2\lambda\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\lambda\tau}b_4(\tau)d\tau}{1-e^{2\pi\lambda}}.$$

Alors pour chaque (x_0^*,y_0^*) solution du système

$$\mathscr{F}_k(x_0,y_0)=0,\ k=1,2$$

vérifiant

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\Big|_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right)\neq 0,$$

le système différentiel (4.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon))$ tend vers la solution

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\\ v(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(t)x_0^*-\sin(t)y_0^*+\int_0^t(\cos(t-\tau)b_1(\tau)-\sin(t-\tau)b_2(\tau))d\tau\\ \sin(t)x_0^*+\cos(t)y_0^*+\int_0^t(\sin(t-\tau)b_1(\tau)+\cos(t-\tau)b_2(\tau))d\tau\\ e^{\lambda t}P+Q(t)\\ e^{\lambda(t+2\pi)}\frac{\int_0^{2\pi}e^{-\lambda\tau}b_4(\tau)d\tau}{1-e^{2\pi\lambda}}+e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda t}b_4(\tau)d\tau.\end{pmatrix},$$

avec

$$P=\frac{\int_0^{2\pi}\left((2\pi b_4(\tau)+\tau b_4(\tau)-b_3(\tau))e^{\lambda(2\pi-\tau)}(1-e^{2\lambda\pi})+2\pi b_4(\tau)e^{\lambda(4\pi-\tau)}\right)d\tau}{(e^{2\pi\lambda}-1)^2}+t\frac{e^{2\lambda\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\lambda\tau}b_4(\tau)d\tau}{1-e^{2\pi\lambda}},$$

$$Q(t)=\int_0^t\left(e^{\lambda t}(b_3(\tau)-\tau e^{-\lambda\tau}b_4(\tau))+tb_4(\tau)e^{\lambda(t-\tau)}\right)d\tau$$

du système différentiel (4.1) quand $\varepsilon\to 0$.

On considère le système différentiel de Floquet (4.1) dans $\mathbb{R}^4$ avec

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$b(t)=\begin{pmatrix}\sin(t)\\\cos(t)\\\sin(2t)\\\cos(2t)\end{pmatrix},$$

$$B(t)=\begin{pmatrix}\sin(2t)&0&\cos^2(t)&-\cos(2t)\\-\sin(t)&2\cos(t)&-\cos(t)&\sin(2t)\\0&\cos(3t)&\sin^2(t)&-\sin(t)\\\cos(3t)&\sin(2t)&0&\sin(3t)\end{pmatrix}.$$

Alors, pour $\varepsilon\neq 0$ suffisamment petit, le système différentiel (4.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon))$ tend vers la solution périodique

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\\v(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{12}\cos(t)-\frac{1}{4}\sin(t)-\frac{1}{2}\cos(3t)\\-\frac{1}{12}\sin(t)+\frac{1}{4}\cos(t)-\frac{1}{2}\sin(3t)\\\frac{1}{6}\cos(t)-\frac{1}{6}\sin(t)-\frac{1}{3}\cos(2t)\\\frac{1}{6}\sin(t)+\frac{1}{6}\cos(t)+\frac{1}{3}\sin(2t)\end{pmatrix}$$

du système différentiel

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+\sin(t)\\\dot{y}=x+\cos(t)\\\dot{z}=-v+\sin(2t)\\\dot{v}=z+\cos(2t),\end{cases}$$

lorsque $\varepsilon\longrightarrow 0$.

On considère le système différentiel de Floquet (4.1) dans $\mathbb{R}^4$ avec

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix},$$

$$b(t)=\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\\ 1\\ \sin(2t)\end{pmatrix},$$

$$B(t)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & \sin(t)\\ \cos(t) & \sin(2t) & 1 & \cos(2t)\\ \sin(t) & \cos(2t) & \cos(3t) & \sin(t)\\ \cos(t) & \sin(t) & \sin(t) & 1\end{pmatrix}.$$

Alors, pour $\varepsilon\neq 0$ suffisamment petit, le système différentiel (4.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon))$ tend vers la solution périodique

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\\ v(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{(\lambda\mu^2+2\mu^2+2\lambda+8)}{\lambda(\mu^2+4)}\cos(t)-\frac{\mu}{\mu^2+4}\sin(t)\\ -\frac{(\lambda\mu^2+2\mu^2+2\lambda+8)}{\lambda(\mu^2+4)}\sin(t)+\frac{\mu}{\mu^2+4}\cos(t)+\sin(t)\\ -\frac{1}{\lambda}\\ -\frac{\lambda\sin(2t)+2\cos(2t)}{\mu^2+4}\end{pmatrix},$$

du système différentiel

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+\sin(t)\\ \dot{y}=x+1\\ \dot{z}=\lambda z+\sin(2t)\\ \dot{v}=\mu v+\cos(t)\end{cases},$$

lorsque $\varepsilon\longrightarrow 0$.

On considère le système différentiel de Floquet (4.1) dans $\mathbb{R}^4$ avec

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu\end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix}-\sin(t) & -\cos(t) & \sin(t) & \sin(t)\\ \cos(t) & \sin(2t) & 1 & \cos(2t)\\ \sin(t) & \cos(2t) & \cos(3t) & \sin^2(t)\\ \cos(t) & \sin(2t) & \sin(t) & 1\end{pmatrix}.$$

$$b(t)=\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(t)\\ -\cos(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix},$$

alors pour $\varepsilon\neq 0$ suffisamment petit, le système différentiel (4.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon))$ qui tend vers la solution périodique

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\\ v(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(t)+\cos(2t)+\frac{3}{2}\sin(t)\\ \sin(t)+\sin(2t)-\frac{3}{2}\cos(t)\\ \frac{5}{2}+\sin(t)\\ -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sin(2t)\end{pmatrix},$$

du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \sin(2t) \\ \dot{y} = x + \cos(t) \\ \dot{z} = -\cos(2t) \\ \dot{v} = \cos(2t), \end{cases}$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

On considère le système différentiel de Floquet (4.1) dans $\mathbb{R}^4$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) & \sin(t) & \sin(2t) \\ \cos(t) & \sin(2t) & 1 & \cos(2t) \\ \sin(t) & \cos(2t) & \cos(3t) & \sin^2(t) \\ \cos(t) & \sin(2t) & \sin(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$b(t) = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(t) \\ -\cos(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Alors, pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système différentiel (4.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ tend vers la solution périodique

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t) + \cos(2t) \\ \sin(t) - \frac{3}{2}\cos(t) + \sin(2t) \\ \frac{5}{2} + \sin(t) \\ -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sin(2t) \end{pmatrix}$$

du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin(t) \\ \dot{y} = x + \cos(t) \\ \dot{z} = \sin(t) \\ \dot{v} = \cos(t), \end{cases}$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

On considère le système différentiel de Floquet (4.1) dans $\mathbb{R}^4$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

$$
B(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & 0 & 0 & \cos(t) \\ -\cos(2t) & \sin(t) & \cos(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & \cos(3t) & \sin(t) \\ 0 & 0 & \cos(t) & 0 \end{pmatrix}.
$$

Alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit le système différentiel (4.1) a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ tend vers la solution périodique

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(3\lambda^2+6)}{\lambda^4+5\lambda^2+4}\cos(t) - \frac{3\lambda}{\lambda^4+5\lambda^2+4}\sin(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\cos(3t) \\ -\frac{(3\lambda^2+6)}{\lambda^4+5\lambda^2+4}\sin(t) + \frac{3\lambda}{\lambda^4+5\lambda^2+4}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(3t) \\ -\frac{(\lambda^4-3\lambda^2-4)}{\lambda^6+9\lambda^4+24\lambda^2+16}\cos(2t) + \frac{(-\lambda^5-8\lambda^3-16\lambda)}{\lambda^6+9\lambda^4+24\lambda^2+16}\sin(t) + \frac{(-\lambda^4-8\lambda^2-16)}{\lambda^6+9\lambda^4+24\lambda^2+16}\cos(t) - \frac{(-4\lambda^3-4\lambda)}{\lambda^6+9\lambda^4+24\lambda^2+16}\sin(2t) \\ -\frac{\lambda\cos(2t)+2\sin(2t)}{\lambda^2+4} \end{pmatrix},
$$

du système différentiel

$$
\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin(t) \\ \dot{y} = x + \cos(t) \\ \dot{z} = \lambda z + v + \sin(t) \\ \dot{v} = \lambda v + \cos(t), \end{cases}
$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

4.3 Preuves des théorèmes et corollaires

Premier cas : preuve du théorème 4.2

La solution du système (4.1) avec $\varepsilon = 0$ telle que $(x(0), y(0), z(0), v(0)) = (x_0, y_0, z_0, v_0)$ est

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \\ b_3(\tau) \\ b_4(\tau) \end{pmatrix} d\tau,
$$

où

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

En remplaçant A dans la formule de la solution, on obtient

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ z_0\cos(t) - v_0\sin(t) + \int_0^t (-b_4(\tau)\sin(t-\tau) + b_3(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ z_0\sin(t) + v_0\cos(t) + \int_0^t (b_3(\tau)sin(t-\tau) + b_4(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \end{pmatrix}.
$$

Nous allons appliquer la théorie de la moyennisation décrite dans la section préléminaire pour étudier les cycles limites du système (4.1). Plus précisément, nous allons chercher analyser quelle orbite périodique du système (4.1) persiste pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Maintenant, on définit les éléments du théorème (4.2) correspondant à notre système différentiel (4.1). Nous avons $\Omega = \mathbb{R}^4$ et $T = 2\pi$. On écrit (4.1) sous la forme (1.17) et on trouve que les fonctions F_0, F_1 et F_2 sont exprimées par

$$\begin{aligned} F_0(t,\mathrm{x}) &= Ax + b(t), \\ F_1(t,\mathrm{x}) &= B(t)x, \\ F_2(t,\mathrm{x}) &= 0. \end{aligned}$$

On va étudier les solutions périodiques du système (1.18), dans notre cas, les solutions périodiques du système (4.1) avec $\varepsilon = 0$.
Ces solutions telle que $(x(0), y(0), z(0), v(0)) = (x_0, y_0, z_0, v_0)$ sont

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ z_0\cos(t) - v_0\sin(t) + \int_0^t(-b_4(\tau)\sin(t-\tau) + b_3(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ z_0\sin(t) + v_0\cos(t) + \int_0^t(b_3(\tau)sin(t-\tau) + b_4(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Ces solutions sont $2\pi-$périoodique si et seulement si

$$(x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi), v(2\pi)) = (x(0), y(0), z(0), v(0)).$$

On obtient les conditions de périodicité suivantes

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)b_2(\tau))d\tau &= 0, \\ \int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(\tau)b_2(\tau))d\tau &= 0, \\ \int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_3(\tau) + \sin(\tau)b_4(\tau))d\tau &= 0, \\ \int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(\tau)b_2(\tau))d\tau &= 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions périodiques (4.3) est de dimension 4. Pour chercher les solutions périodiques de notre système (4.1) on doit calculer les zéros $\mathbf{z} = (x_0, y_0, z_0, v_0)$ du système $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathscr{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (1.21). La matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel (1.19) est

$$M(t) = M_z(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent on doit étudier les zéros du système $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = 0$ où
$\mathscr{F}(\mathbf{z}) = (\mathscr{F}_1(x_0, y_0, z_0, v_0), \mathscr{F}_2(x_0, y_0, z_0, v_0), \mathscr{F}_3(x_0, y_0, z_0, v_0), \mathscr{F}_4(x_0, y_0, z_0, v_0))$ sont données dans l'énoncé du théorème 4.2. Plus précisément, les zéros $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, v_0^*)$ du système

$$\begin{pmatrix} \mathscr{F}_1(x_0, y_0, z_0, v_0) \\ \mathscr{F}_2(x_0, y_0, z_0, v_0) \\ \mathscr{F}_3(x_0, y_0, z_0, v_0) \\ \mathscr{F}_4(x_0, y_0, z_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

par rapport aux variables x_0, y_0, z_0 et v_0, fournissent les orbites du système (4.1) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit s'ils sont simples i.e. si

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, z_0, v_0)}\Big|_{(x_0,y_0,z_0,v_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*,v_0^*)} \right) \neq 0.$$

Pour chaque zéro $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, v_0^*)$ du système (4.4), on obtient une solution 2π-périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ du système différentiel (4.1) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, telle que $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ tend vers la solution périodique (4.3) de (4.1) lorsque $\varepsilon \to 0$. Notons que cette solution est périodique de période 2π. Ceci termine la preuve du théorème 4.2.

La solution du système (4.1) avec $\varepsilon = 0$ tel que $(x(0), y(0), z(0), v(0)) = (x_0, y_0, z_0, v_0)$ est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \\ b_3(\tau) \\ b_4(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ e^{\lambda t}z_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}b_3(\tau)d\tau \\ e^{\mu t}v_0 + \int_0^t e^{\mu(t-\tau)}b_4(\tau)d\tau \end{pmatrix}.$$

Deuxième cas : preuve du théorème 4.2

On va étudier les solutions périodiques du système (1.18), i.e. les solutions périodiques du système (4.1) avec $\varepsilon = 0$. La solution du système (4.1) tel que $(x(0), y(0), z(0), v(0)) = (x_0, y_0, z_0, v_0)$ est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ e^{\lambda t}z_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}b_3(\tau)d\tau \\ e^{\mu t}v_0 + \int_0^t e^{\mu(t-\tau)}b_4(\tau)d\tau \end{pmatrix},$$

ces solutions sont 2π-périodiques si et seulement si

$$(x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi), v(2\pi)) = (x(0), y(0), z(0), v(0)).$$

On obtient les conditions de périodicité suivantes

$$\int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$z_0^* = \frac{e^{2\pi\lambda}}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda\tau}b_3(\tau)d\tau,$$

$$v_0^* = \frac{e^{2\pi\mu}}{1-e^{2\pi\mu}}\int_0^{2\pi} e^{-\mu\tau}b_4(\tau)d\tau.$$

On va appliquer le théorème 1.1.2 au système différentiel (4.1) avec $\lambda \neq \mu \neq 0$. Il peut s'écrire comme le système (1.17), en prenant

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, F_0(t,\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} -y(t) + b_1(t) \\ x(t) + b_2(t) \\ \lambda z(t) + b_3(t) \\ \mu v(t) + b_4(t) \end{pmatrix},$$

$$F_1(t,\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} b_{11}x(t) + b_{12}y(t) + b_{13}z(t) + b_{14}v(t) \\ b_{21}x(t) + b_{22}y(t) + b_{23}z(t) + b_{24}v(t) \\ b_{31}x(t) + b_{32}y(t) + b_{33}z(t) + b_{34}v(t) \\ b_{41}x(t) + b_{42}y(t) + b_{43}z(t) + b_{44}v(t) \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions périodiques devient

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0 - \sin(t)y_0 + \int_0^t(\cos(t-\tau)b_1(\tau) - \sin(t-\tau)b_2(\tau))d\tau \\ \sin(t)x_0 + \cos(t)y_0 + \int_0^t(\sin(t-\tau)b_1(\tau) + \cos(t-\tau)b_2(\tau))d\tau \\ \frac{e^{\lambda t}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-\tau)}b_3(\tau)d\tau}{1-e^{2\pi\lambda}} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}b_3(\tau)d\tau \\ \frac{e^{\mu t}\int_0^{2\pi} e^{\mu(2\pi-\tau)}b_3(\tau)d\tau}{1-e^{2\pi\mu}} + \int_0^t e^{\mu(t-\tau)}b_3(\tau)d\tau \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Cet ensemble des solutions périodiques est de dimension deux. Pour chercher les solutions périodiques de notre système (4.1) on doit calculer les zéros $\mathbf{z} = (x_0, y_0)$ du système $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathscr{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (1.20). La matrice fondamentale M(t) du système différentiel (1.19) est donc

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

elle vérifie

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi\mu} \end{pmatrix}.$$

Donc, on doit étudier les zéros du système $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = 0$ de deux équations avec deux inconnues. Plus précisément, on a $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = (\mathscr{F}_1(x_0, y_0), \mathscr{F}_2(x_0, y_0))$ où $\mathscr{F}_1(x_0, y_0), \mathscr{F}_2(x_0, y_0)$ sont définis comme dans l'énoncé du théorème 4.2. Les zéros (x_0^*, y_0^*) du système

$$\begin{pmatrix} \mathscr{F}_1(x_0, y_0) \\ \mathscr{F}_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

par rapport aux variables x_0 et y_0, fournissent des orbites pour le système (4.6) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit s'ils sont simples i.e. si

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)} \Big|_{(x_0, y_0) = (x_0^*, y_0^*)} \right) \neq 0.$$

Pour chaque simple zéro (x_0^*, y_0^*) du système (4.6), on obtient une solution 2π-périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ du système différentiel (4.1) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit tend vers la solution périodique (4.5) du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + b_1(t) \\ \dot{y} = x + b_2(t) \\ \dot{z} = \lambda z + b_3(t) \\ \dot{v} = \mu v + b_4(t) \end{cases},$$

lorsque $\varepsilon \to 0$. Ce qui termine la preuve du théorème 4.2.

Troisième cas : preuve du théorème 4.2

On va étudier les solutions périodiques du système (1.18), i.e. les solutions périodiques du système (4.1) . La solution du système (4.1) avec $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ telle que $(x(0), y(0), z(0), v(0) = (x_0, y_0, z_0, v_0)$ est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau) sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ z_0 + \int_0^t b_3(\tau)d\tau \\ e^{\mu t} v_0^* + \int_0^t e^{\mu(t-\tau)} b_4(\tau)d\tau \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

ces solutions sont 2π-périodiques si et seulement si

$$(x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi), v(2\pi)) = (x(0), y(0), z(0), v(0)).$$

On obtient les conditions de périodicités suivantes

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\tau) b_1(\tau) + \sin(\tau) b_2(\tau)) d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin(\tau) b_1(\tau) + \cos(\tau) b_2(\tau)) d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} b_3(\tau) d\tau = 0,$$

$$v_0^* = \frac{e^{2\pi\mu}}{1 - e^{2\pi\mu}} \int_0^{2\pi} e^{-\mu\tau} b_4(\tau) d\tau.$$

On va appliquer le théorème 1.1.2 au système différentiel (4.1). Il peut s'écrire comme le système (1.17), en prenant

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, F_0(t, \mathrm{x}) = \begin{pmatrix} -y(t) + b_1(t) \\ x(t) + b_2(t) \\ b_3(t) \\ \mu v(t) + b_4(t) \end{pmatrix},$$

$$F_1(t, \mathrm{x}) = \begin{pmatrix} b_{11} x(t) + b_{12} y(t) + b_{13} z(t) + b_{14} v(t) \\ b_{21} x(t) + b_{22} y(t) + b_{23} z(t) + b_{24} v(t) \\ b_{31} x(t) + b_{32} y(t) + b_{33} z(t) + b_{34} v(t) \\ b_{41} x(t) + b_{42} y(t) + b_{43} z(t) + b_{44} v(t) \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions périodiques devient

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) x_0 - \sin(t) y_0 + \int_0^t (\cos(t-\tau) b_1(\tau) - \sin(t-\tau) b_2(\tau)) d\tau \\ \sin(t) x_0 + \cos(t) y_0 + \int_0^t (\sin(t-\tau) b_1(\tau) + \cos(t-\tau) b_2(\tau)) d\tau \\ z_0 + \int_0^t b_3(\tau) d\tau \\ e^{\mu t} v_0 + \int_0^t e^{\mu(t-\tau)} b_4(\tau) d\tau \end{pmatrix}.$$

Cet ensemble des solutions périodiques est de dimension trois. Pour chercher les solutions périodiques de notre système (4.1), on doit calculer les zéros $\mathbf{z} = (x_0, y_0, z_0)$ du système $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (1.20). Donc la matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel (1.19) est

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

elle vérifie

$$M^{-1}(0)-M^{-1}(2\pi)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-e^{-2\pi\mu} \end{pmatrix}.$$

Donc, on doit étudier les zéros du système $\mathscr{F}(\mathbf{z})=0$ de trois équations à trois inconnues. Plus précisément, on a $\mathscr{F}(\mathbf{z})=(\mathscr{F}_1(x_0,y_0,z_0),\mathscr{F}_2(x_0,y_0,z_0),\mathscr{F}_3(x_0,y_0,z_0))$ où $\mathscr{F}_1(x_0,y_0,z_0)$, $\mathscr{F}_2(x_0,y_0,z_0)$, $\mathscr{F}_3(x_0,y_0,z_0)$ sont définis comme dans l'énoncé du théorème (4.2). Les zéros (x_0^*,y_0^*,z_0^*) du système

$$\begin{pmatrix} \mathscr{F}_1(x_0,y_0,z_0)\\ \mathscr{F}_2(x_0,y_0,z_0)\\ \mathscr{F}_3(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

par rapport aux variables x_0, y_0 et z_0, fournissent les orbites du système (4.8) avec $\varepsilon\neq 0$ suffisamment petit s'ils sont simples, i.e. si

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_3)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*)}\right)\neq 0.$$

Pour chaque simple zéro (x_0^*,y_0^*,z_0^*) du système (4.8), on obtient une solution 2π-périodique $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon))$ du système différentiel (4.1) pour $\varepsilon\neq 0$ suffisamment petit tend vers la solution périodique (4.7) du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}=-y+b_1(t)\\ \dot{y}=x+b_2(t)\\ \dot{z}=b_3(t)\\ \dot{v}=\mu v+b_4(t) \end{cases},$$

lorsque $\varepsilon\to 0$. Ce qui termine la preuve du théorème 4.2.

Quatrième cas : preuve du théorème 4.2

On va étudier les solutions périodiques du système (1.18), i.e. les solutions périodiques du système (4.1). La solution du système (4.1) avec $\varepsilon=0$ telle que $(x(0),y(0),z(0),v(0))=(x_0,y_0,z_0,v_0)$ est

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\\ v(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0\cos(t)-y_0\sin(t)+\int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau)+b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau\\ x_0\sin(t)+y_0\cos(t)+\int_0^t(b_1(\tau)sin(t-\tau)+b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau\\ z_0+\int_0^t b_3(\tau)d\tau\\ v_0+\int_0^t b_4(\tau)d\tau \end{pmatrix}$$

ces solutions sont 2π-périodiques si et seulement si

$$(x(2\pi),y(2\pi),z(2\pi),v(2\pi))=(x(0),y(0),z(0),v(0)).$$

On obtient les conditions de périodicités suivantes

$$\int_0^{2\pi}(\cos(\tau)b_1(\tau)+\sin(\tau)b_2(\tau))d\tau=0,$$

$$\int_0^{2\pi}(-\sin(\tau)b_1(\tau)+\cos(\tau)b_2(\tau))d\tau=0,$$

$$\int_0^{2\pi}b_3(\tau)d\tau=0,$$

$$\int_0^{2\pi}b_4(\tau)d\tau=0.$$

On va appliquer le corollaire 1.1.2 au système différentiel (4.1). Il peut s'écrire comme le système (1.17), en prenant

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\\ v(t)\end{pmatrix}, F_0(t,\mathrm{x})=\begin{pmatrix} -y(t)+b_1(t)\\ x(t)+b_2(t)\\ b_3(t)\\ b_4(t)\end{pmatrix},$$

$$F_1(t,\mathrm{x})=\begin{pmatrix} b_{11}x(t)+b_{12}y(t)+b_{13}z(t)+b_{14}v(t)\\ b_{21}x(t)+b_{22}y(t)+b_{23}z(t)+b_{24}v(t)\\ b_{31}x(t)+b_{32}y(t)+b_{33}z(t)+b_{34}v(t)\\ b_{41}x(t)+b_{42}y(t)+b_{43}z(t)+b_{44}v(t)\end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions périodiques devient

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\\ v(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(t)x_0-\sin(t)y_0+\int_0^t(\cos(t-\tau)b_1(\tau)-\sin(t-\tau)b_2(\tau))d\tau\\ \sin(t)x_0+\cos(t)y_0+\int_0^t(\sin(t-\tau)b_1(\tau)+\cos(t-\tau)b_2(\tau))d\tau\\ z_0+\int_0^t b_3(\tau)d\tau\\ v_0+\int_0^t b_4(\tau)d\tau\end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Cet ensemble des solutions périodiques est de dimension quatre. Pour chercher les solutions périodiques de notre système (4.1) on doit calculer les zéros $\mathbf{z}=(x_0,y_0,z_0,v_0)$ du système $\mathscr{F}(\mathbf{z})=0$, où $\mathscr{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (1.21). Donc la matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel (1.19) est

$$M(t)=M_z(t)=\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0\\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Donc, on doit étudier les zéros du système $\mathscr{F}(\mathbf{z})=0$ de quatre équations à quatre inconnues. Plus précisément, on a $\mathscr{F}(\mathbf{z})=(\mathscr{F}_1(x_0,y_0,z_0,v_0),\mathscr{F}_2(x_0,y_0,z_0,v_0),\mathscr{F}_3(x_0,y_0,z_0,v_0),\mathscr{F}_4(x_0,y_0,z_0,v_0))$

où $\mathscr{F}_1(x_0,y_0,z_0,v_0), \mathscr{F}_2(x_0,y_0,z_0,v_0), \mathscr{F}_3(x_0,y_0,z_0,v_0), \mathscr{F}_4(x_0,y_0,z_0,v_0)$ sont définies comme dans l'énoncé du théorème 4.2. Les zéros $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, v_0^*)$ du système

$$\begin{pmatrix} \mathscr{F}_1(x_0,y_0,z_0,v_0) \\ \mathscr{F}_2(x_0,y_0,z_0,v_0) \\ \mathscr{F}_3(x_0,y_0,z_0,v_0) \\ \mathscr{F}_4(x_0,y_0,z_0,v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

par rapport aux variables x_0, y_0, z_0 et v_0, fournissent les orbites du système (4.10) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit s'ils sont simples, i.e. si

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4)}{\partial(x_0,y_0,z_0,v_0)} \Big|_{(x_0,y_0,z_0,v_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*,v_0^*)} \right) \neq 0.$$

Pour chaque zéro simple $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, v_0^*)$ du système (4.10), on obtient une solution 2π-périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ du système différentiel (4.1) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit tend vers la solution périodique (4.9) du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + b_1(t) \\ \dot{y} = x + b_2(t) \\ \dot{z} = b_3(t) \\ \dot{v} = b_4(t) \end{cases},$$

lorsque $\varepsilon \to 0$. Ce qui termine la preuve du théorème 4.2.

Cinquième cas : preuve du théorème 4.2

on va étudier les solutions périodiques du système (1.18), i.e. Les solutions périodiques du système (4.1). La solution du système (4.1) telle que $(x(0), y(0), z(0), v(0)) = (x_0, y_0, z_0, v_0)$ est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ e^{\lambda t}z_0 + te^{\lambda t}v_0 + \int_0^t (e^{\lambda(t-\tau)}b_3(\tau) + (t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)}b_4(\tau))d\tau \\ e^{\lambda t}v_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}b_4(\tau)d\tau \end{pmatrix},$$

ces solutions sont 2π-périodiques si et seulement si

$$(x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi), v(2\pi)) = (x(0), y(0), z(0), v(0)).$$

On obtient les conditions de périodicité suivantes

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$z_0^* = \frac{\int_0^{2\pi}\left((2\pi b_4(\tau)+\tau b_4(\tau)-b_3(\tau))e^{\lambda(2\pi-\tau)}(1-e^{2\lambda\pi})+2\pi b_4(\tau)e^{\lambda(4\pi-\tau)}\right)d\tau}{(e^{2\pi\lambda}-1)^2},$$

$$v_0^* = \frac{e^{2\pi\lambda}}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{-\mu\lambda} b_4(\tau)d\tau,$$

On va appliquer le théorème (1.1.2) au système différentiel (4.1) avec $\lambda \neq 0$. Il peut s'écrire comme le système (1.17), en prenant

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, F_0(t,\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} -y(t)+b_1(t) \\ x(t)+b_2(t) \\ \lambda z(t)+v(t)+b_3(t) \\ \lambda v(t)+b_4(t) \end{pmatrix},$$

$$F_1(t,\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} b_{11}x(t)+b_{12}y(t)+b_{13}z(t)+b_{14}v(t) \\ b_{21}x(t)+b_{22}y(t)+b_{23}z(t)+b_{24}v(t) \\ b_{31}x(t)+b_{32}y(t)+b_{33}z(t)+b_{34}v(t) \\ b_{41}x(t)+b_{42}y(t)+b_{43}z(t)+b_{44}v(t) \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions périodiques devient

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)x_0^* - \sin(t)y_0^* + \int_0^t(\cos(t-\tau)b_1(\tau)-\sin(t-\tau)b_2(\tau))d\tau \\ \sin(t)x_0^* + \cos(t)y_0^* + \int_0^t(\sin(t-\tau)b_1(\tau)+\cos(t-\tau)b_2(\tau))d\tau \\ e^{\lambda t}z_0^* + te^{\lambda t}v_0^* + \int_0^t\left(e^{\lambda t}(b_3(\tau)-\tau e^{-\lambda\tau}b_4(\tau))+tb_4(\tau)e^{\lambda(t-\tau)}\right)d\tau \\ e^{\lambda t}v_0^* + e^{\lambda t}\int_0^t e^{-\lambda t}b_4(\tau)d\tau. \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Cet ensemble des solutions périodiques est de dimension deux. Pour chercher les solutions périodiques de notre système (4.1), on doit calculer les zéros $\mathbf{z} = (x_0, y_0)$ du système $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = 0$, où $\mathscr{F}(\mathbf{z})$ est donnée par (1.20). La matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel (1.19) est

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

elle vérifie

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{-2\pi\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-e^{-2\pi\mu} \end{pmatrix}.$$

Donc, on doit étudier les zéros du système $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = 0$ de deux équations à deux inconnues. Plus précisément, on a $\mathscr{F}(\mathbf{z}) = (\mathscr{F}_1(x_0,y_0), \mathscr{F}_2(x_0,y_0))$ où $\mathscr{F}_1(x_0,y_0), \mathscr{F}_2(x_0,y_0)$ sont définis comme dans l'énoncé du théorème (4.2). Les zéros (x_0^*, y_0^*) du système

$$\begin{pmatrix} \mathscr{F}_1(x_0,y_0) \\ \mathscr{F}_2(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

par rapport aux variables x_0 et y_0, fournissent les orbites du système (4.12) avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit s'ils sont simples i.e. si

$$det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\Big|_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right)\neq 0.$$

Pour chaque zéro simple (x_0^*,y_0^*) du système (4.12), on obtient une solution 2π-périodique $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon))$ du système différentiel (4.1) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit tend vers la solution périodique (4.11) du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + b_1(t) \\ \dot{y} = x + b_2(t) \\ \dot{z} = \lambda z + v + b_3(t) \\ \dot{v} = \lambda v + b_4(t) \end{cases},$$

lorsque $\varepsilon \to 0$. Ce qui termine la preuve du théorème 4.2.

Preuve du corollaire 4.2

On considère le système différentiel 4.1 avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) & 0 & \cos^2(t) & -\cos(2t) \\ -\sin(t) & 2\cos(t) & -\cos(t) & \sin(2t) \\ 0 & \cos(3t) & \sin^2(t) & -\sin(t) \\ \cos(3t) & \sin(2t) & 0 & \sin(3t) \end{pmatrix}.$$

et

$$b(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Calculons les fonctions $\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_3,\mathscr{F}_4$ du théorème 4.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1(x_0,y_0,z_0,v_0) &= \frac{1}{8}+\frac{3}{8}z_0-\frac{1}{4}y_0,\\
\mathscr{F}_2(x_0,y_0,z_0,v_0) &= -\frac{1}{6}-\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{8}v_0,\\
\mathscr{F}_3(x_0,y_0,z_0,v_0) &= -\frac{1}{24}+\frac{1}{4}y_0+\frac{1}{8}z_0,\\
\mathscr{F}_4(x_0,y_0,z_0,v_0) &= \frac{1}{12}+\frac{1}{4}x_0+\frac{3}{8}v_0.
\end{aligned}$$

Le système $\mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2=\mathscr{F}_3=\mathscr{F}_4=0$ a une solution $(x_0^*,y_0^*,z_0^*,v_0^*)=\left(-\frac{7}{12},\frac{1}{4},-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$. Comme le jacobien

$$\det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2,\mathscr{F}_3,\mathscr{F}_4)}{\partial(x_0,y_0,z_0,v_0)}\Big|_{(x_0,y_0,z_0,v_0)=\left(-\frac{7}{12},\frac{1}{4},-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)}\right)=\frac{1}{64},$$

alors, ce système différentiel a une solution périodique $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon))$ tend vers la solution donnée dans l'énoncé du corollaire (4.2) lorsque $\varepsilon \to 0$.

Preuve du corollaire 4.2

On considère le système différentiel 4.1 avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \ B(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \sin(t) \\ \cos(t) & \sin(2t) & 1 & \cos(2t) \\ \sin(t) & \cos(2t) & \cos(3t) & \sin(t) \\ \cos(t) & \sin(t) & \sin(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$b(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Calculons les fonctions $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ du théorème 4.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_1(x_0, y_0) &= \frac{1}{4}\frac{\left(y_0\mu^2 + 4y_0 - \mu\right)}{\mu^2 + 4}, \\ \mathscr{F}_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{4}\frac{\left(x_0\lambda\mu^2 + \lambda\mu^2 + 4x_0\lambda + 2\mu^2 + 2\lambda + 8\right)}{(\mu^2 + 4)\lambda}. \end{aligned}$$

Le système $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = 0$ a une solution $(x_0^*, y_0^*) = \left(-\frac{(\lambda\mu^2+2\mu^2+2\lambda+8)}{\lambda(\mu^2+4)}, \frac{\mu}{\mu^2+4}\right)$. Comme le jacobien

$$\det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)}\Big|_{(x_0,y_0)=\left(-\frac{(\lambda\mu^2+2\mu^2+2\lambda+8)}{\lambda(\mu^2+4)}, \frac{\mu}{\mu^2+4}\right)}\right) = -\frac{1}{16},$$

alors, ce système différentiel a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ tend vers la solution donnée dans l'énoncé du corollaire (4.2) lorsque $\varepsilon \to 0$.

Preuve du corollaire 4.2

On considère le système différentiel 4.1 avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \ B(t) = \begin{pmatrix} -\sin(2t) & -\cos(t) & 0 & 1 \\ \cos(2t) & 0 & \sin(2t) & \cos(2t) \\ \sin^2(t)\cos(t) & -\cos(t) & \cos^2(t)\sin^2(t) & 0 \\ -\cos(t) & \sin(2t) & -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

et

$$b(t) = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(t) \\ -\cos(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Calculons les fonctions $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3$ du théorème 4.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2} y_0,\\
\mathscr{F}_2(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2} x_0,\\
\mathscr{F}_3(x_0, y_0, z_0) &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} z_0 - \frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{8} x_0.
\end{aligned}$$

Le système $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = \mathscr{F}_3 = 0$ a une solution $(x_0^*, y_0^*, z_0^*) = (0,0,1)$. Comme le jacobien

$$\det\Big(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}|_{(x_0, y_0, z_0)=(0,0,1)}\Big) = -\frac{1}{32},$$

alors, ce système différentiel a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ tend vers la solution située dans l'énoncé du corollaire (4.2) lorsque $\varepsilon \to 0$.

Preuve du corollaire 4.2

On considère le système différentiel 4.1 avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) & \sin(t) & \sin(2t) \\ \cos(t) & \sin(2t) & 1 & \cos(2t) \\ \sin(t) & \cos(2t) & \cos(3t) & \sin^2(t) \\ \cos(t) & \sin(2t) & \sin(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$b(t) = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(t) \\ -\cos(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Calculons les fonctions $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4$ du théorème 4.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1(x_0, y_0, z_0, v_0) &= \frac{1}{4} y_0 + \frac{3}{8},\\
\mathscr{F}_2(x_0, y_0, z_0, v_0) &= -\frac{1}{2} z_0 + \frac{1}{4} x_0 - \frac{1}{2} v_0,\\
\mathscr{F}_3(x_0, y_0, z_0, v_0) &= \frac{1}{2} v_0 - \frac{1}{2} y_0,\\
\mathscr{F}_4(x_0, y_0, z_0, v_0) &= v_0 + \frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Le système $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = \mathscr{F}_3 = \mathscr{F}_4 = 0$ a une solution $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, v_0^*) = \big(2, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\big)$. Comme le jacobien

$$\det\Big(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4)}{\partial(x_0, y_0, z_0, v_0)}|_{(x_0, y_0, z_0, v_0)=(2,-\frac{3}{2},\frac{5}{2},-\frac{3}{2})}\Big) = \frac{1}{32},$$

alors, ce système différentiel a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ tend vers la solution donnée dans l'énoncé du corollaire (4.2) lorsque $\varepsilon \to 0$.

Preuve du corollaire 4.2

On considère le système différentiel 4.1 avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & 0 & 0 & \cos(t) \\ -\cos(2t) & \sin(t) & \cos(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & \cos(3t) & \sin(t) \\ 0 & 0 & \cos(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

et

$$b(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Calculons les fonctions $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ du théorème 4.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{4}\frac{y_0\lambda^4 + 5y_0\lambda^2 + 4y_0 - 3\lambda}{\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4}, \\ \mathscr{F}_2(x_0, y_0) &= -\frac{1}{4}\frac{\left(x_0\lambda^4 + 5x_0\lambda^2 + 4x_0 + 3\lambda^2 + 6\right)}{\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4}. \end{aligned}$$

Le système $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = 0$ a une solution $(x_0^*, y_0^*) = \left(-\frac{(3\lambda^2+6)}{\lambda^4+5\lambda^2+4}, \frac{3\lambda}{\lambda^4+5\lambda^2+4}\right)$. Comme le jacobien

$$\det\left(\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)}|_{(x_0,y_0)=\left(-\frac{(3\lambda^2+6)}{\lambda^4+5\lambda^2+4}, \frac{3\lambda}{\lambda^4+5\lambda^2+4}\right)}\right) = -\frac{1}{16},$$

alors, ce système différentiel a une solution périodique $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon))$ tend vers la solution donnée dans l'énoncé du corollaire (4.2) lorsque $\varepsilon \to 0$.

Conclusion et perspectives

On continue nos recherches des solutions périodiques des équations différentielles perturbées par un paramètre suffisamment petit, en utilisant la théorie de la moyennisation.

Les résultats obtenus dans ce travail nous laissent entrevoir d'autres recherches à développer. Au niveau du système différentiel de Floquet, la possibilité de le généraliser à l'ordre n c'est à dire, on considère le système différentiel de Floquet

$$\dot{x} = Ax + b(t) + \varepsilon B(t)x.$$

avec A est une matrice $n \times n$ sous la forme normale de Jordan, $B(t) = (b_{ij}(t))$ est une matrice $(n \times n)$ 2π-périodique en t, $b(t) = (b_k(t))$ est une fonction vectorielle $2\pi-$périodique pour $k, i, j = 1, ..., n$.

Copies des articles publiés

Applied Mathematics, 2016, 7, **-**
Published Online February 2016 in SciRes. http://www.scirp.org/journal/am
doi

Periodic Solutions of a Class of Second-Order Differential Equation

Zeyneb Bouderbala[1], Jaume Llibre[2], Amar Makhlouf[1]

[1]Department of Mathematics, University of Annaba, Elhadjar, Annaba, Algeria
[2]Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, Catalonia, Spain
Email: zeynebbouderbala@yahoo.fr, jllibre@mat.uab.cat, makhloufamar@yahoo.fr

Received **** 2016

Abstract

We study the periodic solutions of the second-order differential equations of the form

$$\ddot{x}+3x\dot{x}+x^3+F(t)(\dot{x}+x^2)+G(t)x+H(t)=0,$$

where the functions $F(t)$, $G(t)$ and $H(t)$ are periodic of period 2π in the variable *t*.

Keywords

Periodic Solution, Differential Equation, Averaging Theory

1. Introduction and Statement of the Main Results

In this paper we shall study the existence of periodic solutions of the second-order differential equation of the form

$$\ddot{x}+3x\dot{x}+x^3+F(t)(\dot{x}+x^2)+G(t)x+H(t)=0, \tag{1}$$

where the dot denotes derivative with respect to the time *t*, and the functions $F(t)$, $G(t)$ and $H(t)$ are periodic of period 2π in the variable *t*.

We note that the second-order differential Equation (1), when $F=G=H=0$, appears in the Ince's catalog of equations possessing the Painlevé property (see [6]). Moreover, the differential equation $\ddot{x}+3x\dot{x}+x^3=0$ is well known in many areas of mathematics and physics, and it possesses the algebra $\mathrm{sl}(3,\mathbb{R})$ of Lie point symmetries (see for more details in the paper [7] and the references quoted there).

In a recent paper [2] (see also [3] [4]), the second-order differential Equation (1) has been studied when $F=H=0$. A study of coupled quadratic unharmonic oscillators in terms of the Painlevé analysis and inte-

How to cite this paper: Author 1, Author 2 and Author 3 (2016) Paper Title. *Applied Mathematics*, **7**, **-**.
http://dx.doi.org/10.4236/***.2016.*****

grability can be seen in [8], and studies on the second-order differential equations can be seen in [5]. Other approach to the periodic solutions of second-order differential equations can be found in [9].

Here we study the periodic solutions of the second-order differential Equation (1) when $F(t)=\varepsilon f(t)$, $G(t)=1+\varepsilon g(t)$, and $H(t)=\varepsilon^k h(t)$ with $k=1,2$. Our main results are the following ones.

Theorem 1. *We define the functions*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(X_0,Y_0)&=-\int_0^{2\pi}F(t,X_0,Y_0)\sin t\,\mathrm{d}t,\\ \mathcal{F}_2(X_0,Y_0)&=\int_0^{2\pi}F(t,X_0,Y_0)\cos t\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{2}$$

where

$$F(t,X_0,Y_0)=-h(t)-g(t)A(t)-f(t)B(t)-3A(t)B(t),$$

$$A(t)=X_0\cos t+Y_0\sin t,$$

$$B(t)=-X_0\sin t+Y_0\cos t.$$

Assume that the functions $F(t)=\varepsilon f(t)$, $G(t)=1+\varepsilon g(t)$ *and* $H(t)=\varepsilon^2 h(t)$ *are* 2π*-periodic. Then for* $\varepsilon\neq 0$ *sufficiently small and for every* (X_0^*,Y_0^*) *solution of the system* $\mathcal{F}_j(X_0,Y_0)=0$ for $j=1,2$*, satisfying*

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(X_0,Y_0)}\right)\Bigg|_{(X_0,Y_0)=(X_0^*,Y_0^*)}\neq 0,\tag{3}$$

the differential Equation (1) *has a* 2π*-periodic solution* $x(t,\varepsilon)=\varepsilon(X_0^*\cos t+Y_0^*\sin t)+O(\varepsilon^2)$.

Theorem 1 is proved in section 3 using the averaging theory described in section 2. Two applications of Theorem 1 are the following.

Corollary 1. *We consider the differential Equation* (1) *with* $F(t)=\varepsilon(1-\cos^2 t)$, $G(t)=1+\varepsilon\sin^2 t$ *and* $H(t)=\varepsilon^2\sin t$. *Then for* $\varepsilon\neq 0$ *sufficiently small, this differential equation has a* 2π*-periodic solution* $x(t,\varepsilon)=\varepsilon\,2(\sin t-\cos t)/3+O(\varepsilon^2)$.

Corollary 2. *We consider the differential Equation* (1) *with* $F(t)=\varepsilon(1-\cos^2 t+2\cos^4 t)$, $G(t)=1+\varepsilon(\sin^2 t+2\sin^4 t)$ *and* $H(t)=\varepsilon^2(\sin t+\sin^3 t)$. *Then for* $\varepsilon\neq 0$ *sufficiently small, this differential equation has a* 2π*-periodic solution* $x(t,\varepsilon)=\varepsilon(21\cos t-7\sin t)/20+O(\varepsilon^2)$.

Corollaries 1 and 2 are also proved in section 3.

Theorem 2. *Assuming that*

$$\int_0^{2\pi}h(t)\sin t\,\mathrm{d}t=0,\quad \int_0^{2\pi}h(t)\cos t\,\mathrm{d}t=0,$$

and setting

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1(X_0,Y_0)&=-\int_0^{2\pi}f(t,X_0,Y_0)\sin t\,\mathrm{d}t,\\ \mathcal{F}_2(X_0,Y_0)&=\int_0^{2\pi}f(t,X_0,Y_0)\cos t\,\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{4}$$

with

$$f(t,X_0,Y_0)=-g(t)A(t)-f(t)B(t)-3A(t)B(t),$$

$$A(t)=X_0\cos t+Y_0\sin t-\int_0^t h(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$B(t)=-X_0\sin t+Y_0\cos t-\int_0^t h(\tau)\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Assume that $F(t)=\varepsilon f(t)$, $G(t)=1+\varepsilon g(t)$ *and* $H(t)=\varepsilon h(t)$ *are* 2π*-periodic functions. Then for* $\varepsilon\neq 0$ *sufficiently small and for every* (X_0^*,Y_0^*) *solution of the system* $\mathcal{F}_j(X_0,Y_0)=0$ *for* $j=1,2$ *satisfying* (3)*, the differential Equation* (1) *has a periodic solution*

$$x(t,\varepsilon)=\varepsilon\left(X_0^*\cos t+Y_0^*\sin t-\int_0^t h(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)+O(\varepsilon^2).$$

Theorem 2 is proved in section 4. Two applications of Theorem 2 are the following.

Corollary 3. *We consider the differential Equation* (1) *with* $F(t)=\varepsilon(\sin(2t)+\cos(2t))$, $G(t)=1+\varepsilon\sin t$ *and* $H(t)=\varepsilon 2\cos^2 t$. *Then for* $\varepsilon\neq 0$ *sufficiently small, this differential equation has a* 2π*-periodic solution*

$$x(t,\varepsilon)=\varepsilon\left((-2\cos t+15\sin t)/31+2\cos^2 t(\cos t-1)\right)+O(\varepsilon^2).$$

Corollary 4. *We consider the differential Equation* (1) *with* $F(t)=\varepsilon\sin t$, $G(t)=1+\varepsilon\sin^2 t$ *and* $H(t)=\varepsilon 2\cos(2t)$. *Then for* $\varepsilon\neq 0$ *sufficiently small, this differential equation has a periodic solution*

$$x(t,\varepsilon)=\varepsilon\left(2(\cos t-1)\cos(2t)-\frac{8}{5}\sin t\right)+O(\varepsilon^2).$$

Corollaries 3 and 4 are also proved in section 4.

2. Basic Results on Averaging Theory

We state the results from the averaging method that we shall use for proving the results of this work.

We consider differential systems of the form

$$\boldsymbol{x}'=F_0(t,\boldsymbol{x})+\varepsilon F_1(t,\boldsymbol{x})+\varepsilon^2F_2(t,\boldsymbol{x},\varepsilon), \tag{5}$$

where ε is a small parameter, and the functions $F_0,F_1:\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ and $F_2:\mathbb{R}\times\Omega\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\to\mathbb{R}^n$ are $\mathcal{C}^2$ functions, *T*-periodic in the variable *t*, and Ω is an open subset of $\mathbb{R}^n$. Suppose that the unperturbed system

$$\boldsymbol{x}'=F_0(t,\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

has a submanifold of dimension *n* of *T*-periodic solutions, *i.e.* of periodic solutions of period *T*.

We denote by $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{z},0)$ the solution of system (6) such that $\boldsymbol{x}(0,\boldsymbol{z},0)=\boldsymbol{z}$. We consider the first variational equation of system (6) on the periodic solution $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{z},0)$, *i.e.*

$$\boldsymbol{y}'=D_xF_0(t,\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{z},0))\boldsymbol{y}, \tag{7}$$

where $\boldsymbol{y}$ is an $n\times n$ matrix. Let $M_{\boldsymbol{z}}(t)$ the fundamental matrix of system (7) such that $M_{\boldsymbol{z}}(0)$ is the identity matrix of $\mathbb{R}^n$.

By assumption there exists an open set *V* such that $\mathrm{Cl}(V)\subset\Omega$ and for each $\boldsymbol{z}\in\mathrm{Cl}(V)$, $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{z},0)$ is *T*-periodic. Therefore we have the following result.

Theorem 3. *We suppose that there is an open and bounded set V with* $\mathrm{Cl}(V)\subset\Omega$ *such that for each* $\boldsymbol{z}\in\mathrm{Cl}(V)$, *the solution* $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{z},0)$ *is T-periodic, and let* $\mathcal{F}:\mathrm{Cl}(V)\to\mathbb{R}^n$ *be the function defined by*

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{z})=\int_0^T M_{\boldsymbol{z}}^{-1}(t)F_1(t,x(t,\boldsymbol{z},0))\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

If there is $\alpha\in V$ with $\mathcal{F}(\alpha)=0$ and $\det\left((\mathrm{d}\mathcal{F}/\mathrm{d}\boldsymbol{z})(\alpha)\right)\neq 0$, then there is a *T*-periodic solution $\boldsymbol{x}(t,\varepsilon)$ of system (5) satisfying $\boldsymbol{x}(t,\varepsilon)=\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{z},0)+O(\varepsilon)$.

Theorem 3 is due to Malkin [10] and Roseau [11], for a new and shorter proof see [1].

3. Proof of Theorem 1 and Its Two Corollaries

Proof of Theorem 1. Introducing the variable $y=\dot{x}$, we can write the second-order differential Equation (1) as the following first-order differential system

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-3xy-x^3-F(t)(y+x^2)-G(t)x-H(t).\end{aligned} \tag{9}$$

Doing the rescaling $(x,y)=(\varepsilon X,\varepsilon Y)$, we obtain the system

$$\dot{X} = Y$$
$$\dot{Y} = -X + \varepsilon\left(-h(t) - g(t)X - f(t)Y - 3XY\right) + \varepsilon^2\left(-f(t)X^2 - X^3\right). \tag{10}$$

System (10) with $\varepsilon = 0$ is the unperturbed system, otherwise system (10) is the perturbed system. The unperturbed system has a unique singular point, the origin of coordinates. The solution $(X(t), Y(t))$ of the unperturbed system such that $(X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0)$ is

$$X(t) = X_0 \cos t + Y_0 \sin t, \qquad Y(t) = -X_0 \sin t + Y_0 \cos t.$$

Note that all these periodic orbits have period 2π. Using the notation introduced in section 2. We have that $\boldsymbol{x} = (X, Y)$, $\boldsymbol{z} = (X_0, Y_0)$, $F_0(\boldsymbol{x}, t) = (Y, -X)$, $F_1(\boldsymbol{x}, t) = \left(0, -h(t) - g(t)X - f(t)Y - 3XY\right)$ and $F_2(\boldsymbol{x}, t) = \left(0, -f(t)X^2 - X^3\right)$.

The fundamental matrix solution $M_{\boldsymbol{z}}(t)$ is independent of the initial condition $\boldsymbol{z}$, and denoting it by $M(t)$ we obtain

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Now we compute the function $\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = \left(\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0)\right)$ given in (8), and we get the functions (2) of the statement of Theorem 1.

By Theorem 3 each zero (X_0^*, Y_0^*) of system $\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0$ satisfying (3), provides a 2π-periodic solution $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ of system (10) with $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small such that

$$\left(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon)\right) = \left(X_0^* \cos t + Y_0^* \sin t, -X_0^* \sin t + Y_0^* \cos t\right) + O(\varepsilon).$$

Going back through the change of variables for every periodic solution $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ of system (10) with $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small, we obtain a 2π-periodic solution $x(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(X_0^* \cos t + Y_0^* \sin t\right) + O\left(\varepsilon^2\right)$ of the differential Equation (1) with $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small. This completes the proof of Theorem 1. □

Proof of Corollary 1. We must apply Theorem 1 with

$$f(t) = 1 - \cos^2 t, \quad g(t) = \sin^2 t, \quad h(t) = \sin t.$$

We compute the functions $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ of the statement of Theorem 1, and we obtain

$$\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{\pi}{4}\left(4 - 3X_0 + 3Y_0\right), \quad \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{\pi}{4}\left(-X_0 - Y_0\right).$$

System $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ has the zero $(X_0^*, Y_0^*) = (2/3, -2/3)$. Since the Jacobian (3) at this zero is $3\pi^2/8$, we obtain using Theorem 1 the periodic solution given in the statement of the corollary. □

Proof of Corollary 2. We apply Theorem 1 with

$$f(t) = 1 - \cos^2 t + 2\cos^4 t, \quad g(t) = \sin^2 t + 2\sin^4 t, \quad h(t) = \sin t + \sin^3 t.$$

Computing the functions $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ of Theorem 1 we get

$$\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{\pi}{4}\left(7 - 4X_0 + 8Y_0\right), \quad \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = -\frac{\pi}{2}\left(X_0 + 3Y_0\right).$$

System $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ has the zero $(X_0^*, Y_0^*) = (21/20, -7/20)$. Since the Jacobian (3) at this zero is $5\pi^2/2$ the corollary follows. □

4. Proof of Theorem 2 and Its Corollaries

Proof of Theorem 2. As in the proof of Theorem 1, the second-order differential Equation (1) can be written as the first order differential system (9). Doing the rescaling $(x, y) = (\varepsilon X, \varepsilon Y)$, we obtain the system

$$\dot{X} = Y$$
$$\dot{y} = -X - h(t) + \varepsilon\left(-g(t)X - f(t)Y - 3XY\right) + \varepsilon^2\left(-f(t)X^2 - X^3\right). \tag{11}$$

System (11) with $\varepsilon = 0$ is the unperturbed system, otherwise it is the perturbed system.

The solution $(X(t), Y(t))$ of the unperturbed system such that $(X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0)$ is

$$X(t) = X_0 \cos t + Y_0 \sin t - \int_0^t h(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$
$$Y(t) = -X_0 \sin t + Y_0 \cos t - \int_0^t h(\tau)\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Note that these periodic orbits have period 2π. Using the notation introduced in section 2. We have that $\boldsymbol{x} = (X, Y)$, $\boldsymbol{z} = (X_0, Y_0)$, $F_0(\boldsymbol{x}, t) = (Y, -X - h)$, $F_1(\boldsymbol{x}, t) = (0, -g(t)X - f(t)Y - 3XY)$ and $F_2(\boldsymbol{x}, t) = (0, -f(t)X^2 - X^3)$.

The fundamental matrix solution $M_z(t)$ is independent of the initial condition $\boldsymbol{z}$ and it is

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

We compute the function $\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ given in (8), and we get the functions (4) of the statement of Theorem 2.

By Theorem 3, each zero (X_0^*, Y_0^*) of system $\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0$ satisfying (3), provides a 2π-periodic solution $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ of system (11) with $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small such that

$$\begin{pmatrix} X(t,\varepsilon) \\ Y(t,\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0^* \cos t + Y_0^* \sin t - \int_0^t h(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ -X_0^* \sin t + Y_0^* \cos t - \int_0^t h(\tau)\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{pmatrix} + O(\varepsilon).$$

Going back through the change of variables for every periodic solution $(X(t,\varepsilon), Y(t,\varepsilon))$ of system (11) with $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small, we obtain a 2π-periodic solution

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(X_0^* \cos t + Y_0^* \sin t - \int_0^t h(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) + O(\varepsilon^2)$$

of the differential Equation (1) for $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small. This completes the proof of Theorem 2. □

Proof of Corollary 3. We apply Theorem 2 with

$$f(t) = \sin(2t) + \cos(2t), \quad g(t) = \sin t, \quad h(t) = 2\cos^2 t.$$

We compute the functions $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ of the statement of Theorem 2, and we obtain

$$\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{\pi}{2}(2 + X_0 - 4Y_0), \quad \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{\pi}{2}(1 + 8X_0 - Y_0).$$

System $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ has the solution $(X_0^*, Y_0^*) = (-2/31, 15/31)$. Since the Jacobian (3) is $31\pi^2/4$, by Theorem 2 we obtain the periodic solution of the statement of the corollary. □

Proof of Corollaryc 4. We apply Theorem 2 with

$$f(t) = \sin t, \quad g(t) = \sin^2 t, \quad h(t) = 2\cos(2t).$$

We compute the functions $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ of the statement of Theorem 2, and we obtain

$$\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{3\pi}{4}(8 + 5Y_0), \quad \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{11\pi}{4}X_0.$$

System $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ has the solution $(X_0^*, Y_0^*) = (0, -8/5)$. Since the Jacobian (3) is $-165\pi^2/16$, by Theorem 2 we obtain the periodic solution of the statement of the corollary. □

Acknowledgements

The second author is partially supported by a MINECO grant MTM2013-40998-P, an AGAUR grant number 2014SGR568, and the grants FP7-PEOPLE-2012-IRSES 318999 and 316338.

References

[1] Buica, A., Françoise, J.P. and Llibre, J. (2007) Periodic Solutions of Nonlinear Periodic Differential Systems with a Small Parameter. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **6**, 103-111.

[2] Chandrasekar, V.K., Senthilvelan, M. and Lakshmanan, M. (2005) Lienard-Type Nonlinear Oscillator. *Physical Review E*, **72**, Article ID: 066203, 8 p.

[3] Chandrasekar, V.K., Senthilvelan, M. and Lakshmanan, M. (2012) A Systematic Method of Finding Linearizing Transformations for Nonlinear Ordinary Differential Equations: I. Scalar Case. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **19**, Article ID: 1250012, 21 p.

[4] Chandrasekar, V.K., Senthilvelan, V.K. and Lakshmanan, M. (2012) A Systematic Method of Finding Linearizing Transformations for Nonlinear Ordinary Differential Equations: II. Extension to Coupled ODEs. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **19**, Article ID: 1250013, 23 p.

[5] Ferreira, C., López, J.L. and Pérez, S. (2014) Ester Convergent and Asymptotic Expansions of Solutions of Second-Order Differential Equations with a Large Parameter. *Analysis and Applications*, **12**, 523-536. http://dx.doi.org/10.1142/S0219530514500328

[6] Ince, E.L. (1927) Ordinary Differential Equations. Longmans, London, 1927.

[7] Karasu, A. and Leach, P.G.L. (2009) Nonlocal Symmetries and Integrable Ordinary Differential Equations: $\ddot{x}+3x\dot{x}+x^3=0$ and Its Genralizations. *Journal of Mathematical Physics*, **50**, Article ID: 073509, 17 p.

[8] Lakshmanan, M. and Sahadevan, R. (1985) Coupled Quadratic Anharmonic Oscillators, Painlevé Analysis and Integrability. *Physical Review A*, **31**, 861-876. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.31.861

[9] Li, J., Luo, J. and Wang, Z. (2014) Periodic Solutions of Second Order Impulsive Differential Equations at Resonance via Variational Approach. *Mathematical Modelling and Analysis*, **19**, 664-675. http://dx.doi.org/10.3846/13926292.2014.980864

[10] Malkin, I.G. (1956) Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations. Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit., Moscow. (In Russian).

[11] Roseau, M. (1985) Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité. Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 8, Springer, New York, 1985.

Global Journal of Pure and Applied Mathematics.
ISSN 0973-1768 Volume 11, Number 6 (2015), pp. 3529-3542

http://www.ripublication.com

On The Limit Cycles Of The Floquet Differential Systems

[1]Amar Makhlouf and [2]Zeyneb Bouderbala

[1 2] DEPARTMENT OF MATHEMATICS, LABORATORY OF APPLIED MATHEMATICS (LMA), UNIVERSITY OF ANNABA, ELHADJAR, 23 ANNABA, ALGERIA
E-mail address: makhloufamar@yahoo.fr
E-mail address: zeynebbouderbala@yahoo.fr

Abstract

In this paper we study the existence of periodic solutions of the Floquet differential systems

$\dot{x} = Ax(t) + b(t) + \varepsilon B(t)x(t),$ (1)

where $x(t)$ and $b(t)$ are column vectors of length n, A is a constant $(n \times n)$ matrix and B(t) is $(n \times n)$ matrix for $n = 2$ and 3. The components of b(t) and B(t) are T-periodic.

1. INTRODUCTION AND STATEMENT OF THE MAIN RESULTS

Floquet theory is concerned with the study of linear differential equations with periodic coefficients see [3, 4, 5, 10, 12, 19]. It is very important for the study of dynamical systems. These differential systems have been studied intensively and have many applications see for instance the papers [16, 6, 17, 18] and references quoted therein.

The linear first order differential system

$\dot{x} = Ax(t) + b(t).$ (2)

Where x(t) and b(t) are column vectors of lenghth n, A and B(t) are $(n \times n)$ matrix, B(t) and b(t) are periodic with period T, is called a Floquet differential system.

A limit cycle of the differential system (2) is a periodic orbit isolated in the set of all the periodic orbits of the same differential system. To obtain analytically limit cycles of a differential system is in general a very difficult problem, many times impossible. If the averaging theory can be applied to the differential system (1), then it reduces this difficult problem to find the zeros of a nonlinear function. It is known that in general the averaging theory for finding limit cycles does not provide all the limit cycles of the diffrential system.

The averaging theory (see for instance [15]) gives a quantitative relation between the solutions of some nonautonomous differential system and the solutions of its autonoumous averaged differential system. In particular, it allows to study the periodic orbits of a non-autonomous differential system in function of the periodic orbits of the averaged one, see for more details [1, 2, 8, 9, 15,19]. For more information about the averaging theory see section 2.

In the paper [7], the authors studied the limit cycles of the homogenous perturbed linear system

$\dot{x} = Ax(t) + \varepsilon(B(t)x(t) + b(t))$

Here, we consider the nonhomogenous perturbed linear system (1) for $n = 2$ and $n = 3$.

Our main result on the periodic solutions of the second-order non-autonomous differential system (1), where

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$b(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$,

$B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{pmatrix}$,

Is the following one.

Theorem1. We define

$$\mathcal{F}_1(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos(t)[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t)] + \sin(t)[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t)])dt,$$

$$\mathcal{F}_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-\sin(t)[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t)] + \cos(t)[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t)])dt,$$

where

$$C(t) = x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,$$

$$D(t) = x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)\sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,$$

If

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)\, b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (-sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(t)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

Then for every (x_0^*, y_0^*) solution of the system

$\mathcal{F}_k(x_0, y_0) = 0, \qquad k = 1,2,$

satisfying

$$det\left(\left.\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)}\right|_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right) \neq 0,$$

The differential system (1) has a periodic solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ tending to the solution

$$\begin{pmatrix} x(t,0) \\ y(t,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^* \cos(t) - y_0^* \sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0^* \sin(t) + y_0^* \cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)\sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \end{pmatrix} \quad (3)$$

Of the system (2) when $\varepsilon \to 0$.

Consider the case $n = 3$. Our main results on the periodic solutions of the third-order differential system (1) where

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & b_{13}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & b_{23}(t) \\ b_{31}(t) & b_{32}(t) & b_{33}(t) \end{pmatrix}$$

and

$$b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix}$$

are the following.

Theorem2. Consider the case $\lambda = 0$. We define

$$\mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos(t)[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t)] + \sin(t)[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t) + b_{23}(t)E(t)])dt,$$

$$\mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-\sin(t)[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t)] + \cos(t)[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t) + b_{23}(t)E(t)])dt,$$

$$\mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (b_{31}(t)C(t) + b_{32}(t)D(t) + b_{33}(t)E(t))dt,$$

where

$$C(t) = x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,$$

$$D(t) = x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)\sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,$$

$$E(t) = z_0 + \int_0^t b_3(\tau)d\tau,$$

If we have

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(t)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} b_3(\tau)d\tau = 0,$$

then for every (x_0^*, y_0^*, z_0^*) solution of the system $\mathcal{F}_k(x_0, y_0, z_0) = 0,\ k = 1,2,3,$ satisfying

$$det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)=(x_0^*,y_0^*,z_0^*)}\right)\neq 0,$$

The differential system (1) has a periodic solution $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon))$ tending to the solution

$$\begin{pmatrix} x(t,0) \\ y(t,0) \\ z(t,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^*\cos(t) - y_0^*\sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0^*\sin(t) + y_0^*\cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)\sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ z_0^* + \int_0^t b_3(\tau)\,d\tau \end{pmatrix} \quad (4)$$

of the system (2) when $\varepsilon \to 0$.

Theorem3. Consider the case $\lambda \neq 0$. We define

$$\mathcal{F}_1(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos(t)[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t)] + \sin(t)[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t) + b_{23}(t)E(t)])dt,$$

$$\mathcal{F}_2(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-\sin(t)[b_{11}(t)C(t) + b_{12}(t)D(t) + b_{13}(t)E(t)] + \cos(t)[b_{21}(t)C(t) + b_{22}(t)D(t) + b_{23}(t)E(t)])dt,$$

where

$$C(t) = x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,$$

$$D(t) = x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)\sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau,$$

$$E(t) = z_0 + \int_0^t b_3(\tau)d\tau,$$

If we have

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\tau)b_1(\tau) + \sin(\tau)\,b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin(\tau)b_1(\tau) + \cos(t)b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$z_0^* = \frac{e^{2\pi\lambda}}{1-e^{2\pi\lambda}}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda\tau}b_3(\tau)d\tau,$$

then for every (x_0^*,y_0^*) solution of the system $\mathcal{F}_k(x_0,y_0) = 0,\ k = 1,2,$ satisfying

$$det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\bigg|_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)}\right)\neq 0,$$

The differential system (1) has a periodic solution $(x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon))$ tending to the solution

$$\begin{pmatrix} x(t,0) \\ y(t,0) \\ z(t,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^* \cos(t) - y_0^* \sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0^* \sin(t) + y_0^* \cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)\sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ \dfrac{e^{\lambda t}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-\tau)} b_3(\tau)d\tau}{1-e^{2\pi\lambda}} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} b_3(\tau)\, d\tau \end{pmatrix} \quad (5)$$

of the differential system (2) when $\varepsilon \to 0$.
Theorem 1, 2 and 3 are proved in section 3. Their proofs are based on the averaging theory for computing periodic solutions, see section 2. For others applications of the averaging theory to the study of periodic solutions, see [11] and [13].
Applications of Theorem 1, 2 and 3 are the following ones.

Corollary 1. Consider the Floquet differential system (1) in $\mathbb{R}^2$ with

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$b(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$

$B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(2t) \\ \sin(t) & \cos(3t) \end{pmatrix}$.

Then for $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small the differential system (1) has a periodic solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ tending to the periodic solution $\left(-\frac{17}{6}\cos(t) - \frac{1}{6}\cos(2t) + \frac{1}{2}, -\frac{11}{6}\sin(t) + \frac{1}{6}\sin(2t)\right)$ of the differential system

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin(t) \\ \dot{y} = x + \cos(t) \end{cases}$$

When $\varepsilon \to 0$.
Corollary 1 is proved in section 4.

Corolloray 2. Consider the Floquet differential system (1) in $\mathbb{R}^3$ with

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$b(t) = \begin{pmatrix} sin(t) \\ cos(t) \\ sin(2t) \end{pmatrix}$

$B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 1 & \sin(t) \\ 2 & \sin(2t) & 1 \\ \sin(t) & 1 & \cos(3t) \end{pmatrix}$

then for $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small the differential system (1) has a periodic solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ tending to the periodic solution $\left(-\cos(\mathrm{t}), 0, \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2)\right)$ of the differential system

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin(t) \\ \dot{y} = x + \cos(t) \\ \dot{z} = -\sin(2t) \end{cases}$$

when $\varepsilon \to 0$.
Corollary 2 is proved in section 4.

Corolloray 3. Consider the Floquet differential system (1) in $\mathbb{R}^3$ with

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} sin(t) \\ 0 \\ sin(t) \end{pmatrix}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin(t) \\ \sin(2t) & \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix}$$

then for $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small the differential system (1) has a periodic solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ tending to the periodic solution

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2\lambda(e^{2\pi\lambda}-1)(\sin(t)\,\lambda - 2\cos(t))}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)} \\ \dfrac{(2e^{2\pi\lambda}\lambda^2 - 2\lambda^2)\cos(t)}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)} + \dfrac{(\pi\lambda^4+5\pi\lambda^2+4e^{2\pi\lambda}\lambda+4\pi-4\lambda)\sin(t)}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)} \\ \dfrac{-\lambda\cos(t)+\sin(t)}{\lambda^2+1} \end{pmatrix}$$

of the differential system

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin(t) \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = \lambda z + \sin(t) \end{cases}$$

when $\varepsilon \to 0$.
Corollary 3 is proved in section 4.

2. BASIC RESULTS ON AVERAGING THEORY

In this section we present the basic results from the averaging theory that we shall need for proving the main results of this paper.

We consider the problem of the bifurcation of T-periodic solutions from differential systems of the form

$$\mathbf{x}' = F_0(\mathrm{t},\mathbf{x}) + \varepsilon F_1(\mathrm{t},\mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(\mathrm{t},\mathbf{x},\varepsilon) \qquad (6)$$

With $\varepsilon = 0$ to $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small. Here the functions $F_0, F_1 \colon \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ and $F_2 \colon \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ are C^2 functions, T-periodic in the first variable, and Ω is an open subset of $\mathbb{R}^n$. The main assumption is thet the unperturbed system

$$\mathrm{x}' = F_0(\mathrm{t},\mathrm{x}), \qquad (7)$$

Has a submanifold of dimension n of periodic solutions. A solution of this problem is

given using the averaging theory.
Let x(t,z,0) be the solution of the system (7) such that x(0,z,0)=z. We write the linearization of the unperturbed system along the periodic solution x(t,z,0) as

$$y' = D_x F_0\big(t, x(t,z,0)\big)y. \qquad (8)$$

In what follows we denote by $M_z(t)$ some fundamental matrix of the linear differential system (8), and by $\xi\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ the projection of $\mathbb{R}^n$ onto its first k coordinates ; i.e. $\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$.
We assume that there exists an open set V with $Cl(V) \subset \Omega$ such that for each $\boldsymbol{z} \in Cl(V)$, x(t, **z**, 0) is T-periodic. The set $Cl(V)$ is isochronous for the system (6) ; i.e it is a set formed only by periodic orbits, all of them having the same period.
Then, an answer to the problem of the bifurcation of T-periodic solutions from the periodic solutions x(t,z,0) contained in $Cl(V)$ is given in the following result.

Theorem 4. Let V be an open and bounded subset of $\mathbb{R}^k$, and let $\beta : Cl(V) \to \mathbb{R}^{n-k}$ be a C^2 function. We assume that

i. $\boldsymbol{Z} = \{\boldsymbol{z}_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)),\ \alpha \in Cl(V)\} \subset \Omega$ and that for each $\boldsymbol{z}_\alpha \in \boldsymbol{Z}$ the solution $x(t, \boldsymbol{z}_\alpha)$ of (5) is T-periodic ;
ii. For each $\boldsymbol{z}_\alpha \in \boldsymbol{Z}$ there is a fundamental matrix $M_{\boldsymbol{z}_\alpha}(t)$ of (6) such that the matrix $M_{\boldsymbol{z}_\alpha}^{-1}(0) - M_{\boldsymbol{z}_\alpha}^{-1}(T)$ has in the upper right corner the $k \times (n-k)$ zero matrix, and in the lower right corner a $(n-k) \times (n-k)$ matrix Δ_α with $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

We consider the function $\mathcal{F} : Cl(V) \to \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi\left(\frac{1}{T}\int_0^T M_{\boldsymbol{z}_\alpha}^{-1}(t) F_1\big(t, x(t, \boldsymbol{z}_\alpha)\big)dt\right). \qquad (9)$$

If there exists $a \in V$ with $\mathcal{F}(a) = 0$ and $\det\big((d\mathcal{F}/d\alpha)\,(a)\big) \neq 0$, then there is a T-periodic solution $\varphi(t, \varepsilon)$ of system (4) such that $\varphi(0, \varepsilon) \to \boldsymbol{z}_\alpha$ as $\varepsilon \to 0$.

Theorem 5. (Perturbations of an isochronous set). We assume that there exists an open and bounded set V with $Cl(V) \subset \Omega$ such that for each $\boldsymbol{z} \in Cl(V)$, the solution $x(t, \boldsymbol{z}, 0)$ is T-periodic, then we consider the function $\mathcal{F} : Cl(V) \to \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \int_0^T M_{\boldsymbol{z}}^{-1}(t) F_1\big(t, x(t, \boldsymbol{z}, 0)\big)dt. \qquad (10)$$

If there exists $\alpha \in V$ with $\mathcal{F}(\alpha) = 0$ and $\det\left(\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\boldsymbol{z}}\right)(\alpha)\right) \neq 0$, then there exists a T-periodic solution $\varphi(t, \varepsilon)$ of system (6) such that $\varphi(0, \varepsilon) \to \alpha$ as $\varepsilon \to 0$.

3. PROOF OF THEOREM 1, 2 AND 3

Proof of theorem 1. We shall study the periodic solutions of system (7), i.e. the periodic solutions of the system (1) with $\varepsilon = 0$. The solution of the system (2) such that $\big(x(0), y(0)\big) = (x_0, y_0)$ is

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau\ ,$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

so

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t) + \int_0^t (b_1(\tau)\cos(t-\tau) - b_2(\tau)\sin(t-\tau))d\tau \\ x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)\sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \end{pmatrix} \quad (11)$$

These solutions are 2π-periodic if and only if

$(x(2\pi), y(2\pi)) = (x(0), y(0))$.

We obtain the following periodicity conditions

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\tau) b_1(\tau) + \sin(\tau)\, b_2(\tau))d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin(\tau) b_1(\tau) + \cos(t) b_2(\tau))d\tau = 0,$$

We shall apply Theorem 4 to the differential system (1). It can be written as system (6) taking

x = $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, F_0(t , x) = $\begin{pmatrix} -y(t) + b_1(t) \\ x(t) + b_2(t) \end{pmatrix}$. F_1(t, x) = $\begin{pmatrix} b_{11}x(t) + b_{12}y(t) \\ b_{21}x(t) + b_{22}y(t) \end{pmatrix}$

The set of the periodic solutions (11) has dimension two, To look for the periodic solutions of our system (1) we must calculate the zeros $\mathbf{z} = (x_0, y_0)$ of the system $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, where $\mathcal{F}(\mathbf{z})$ is given by (10). The fundamental matrix M(t) of the differential system (8) is

M (t) = M_z(t) = $\begin{pmatrix} \cos(t) & -sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$

Consequently all the assumptions of Theorem 4 are satisfied. Therefore we must study the zeros of the system $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$ of two equations with two unknowns, where $\mathcal{F}$ is given in the statement of theorem (4). More precisely, we have $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = (\mathcal{F}_1(x_0, y_0), \mathcal{F}_2(x_0, y_0))$ where $\mathcal{F}_1(x_0, y_0)$, $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$ are defined as in the statement of Theorem 3. The zeros (x_0^*, y_0^*) of system

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

with respect to the variables x_0 and y_0 provide periodic orbits of system (1) with $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small if they are simple, i.e. if

$$det\left(\left. \frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right|_{(x_0, y_0) = (x_0^*, y_0^*)} \right) \neq 0.$$

For every simple zeros (x_0^*, y_0^*) of system (12), we obtain a 2π-periodic solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ of the differential system (1) for $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small which tends to the periodic solution (3) of the differential system

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mathrm{b}_1(t) \\ \dot{y} = x + \mathrm{b}_2(t) \end{cases}$$

When $\varepsilon \to 0$. This completes the proof of Theorem 1.

Proof of theorem 2 and 3. The solution of the system (1) with $\varepsilon = 0$ such that $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ is

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \begin{pmatrix} b_1(\tau) \\ b_2(\tau) \\ b_3(\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau.$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

we obtain

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)\sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ e^{\lambda t} z_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} b_3(\tau)\, d\tau \end{pmatrix}$$

For studying the periodicity of this solution, we distinguish two cases: $\lambda = 0$ and $\lambda \neq 0$. these two cases will be studied respectively in Theorem 2 and Theorem 3.

Proof of theorem 2. We will apply the averaging theory described in section 2 for studying the limit cycles of system (2). More precisely we shall analyze which periodic orbits of system (2) can be continued to limit cycles of system (1) with $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small. Now we define the elements of section 2 and of Theorem 4 corresponding to our differential system (1). We have that $\Omega = \mathbb{R}^3$ and $T = 2\pi$ we write (1) in the form (6) and we get that F_0, F_1 and F_2 are given by

$F_0(t,\mathrm{x}) = \mathrm{A}\, x + b(t)$,

$F_1(t,\mathrm{x}) = \mathrm{B(t)}\, x$,

$F_2(t,\mathrm{x}) = 0$.

We shall study the periodic solutions of system (7) in our case, i.e. the periodic solutions of the system (1) with $\varepsilon = 0$.

These solutions such that $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ are

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)\sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ z_0 + \int_0^t b_3(\tau)\, d\tau \end{pmatrix} \quad (13)$$

These solutions are 2π-periodic if and only if

$(x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi)) = (x(0), y(0), z(0))$

We obtain the following periodicity conditions

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\tau) b_1(\tau) + \sin(\tau)\, b_2(\tau)) d\tau = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} (-\sin(\tau) b_1(\tau) + \cos(t) b_2(\tau)) d\tau = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} b_3(\tau) d\tau = 0,$$

The set of periodic solutions (13) has dimension 3. To look for the periodic solutions of our system (1) we must calculate the zeros $\boldsymbol{z} = (x_0, y_0, z_0)$ of the system $\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = 0$, where $\mathcal{F}(\boldsymbol{z})$ is given by (10). The fundamental matrix M(t) of the differential system (8) is

$$M(t) = M_z(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Therefore we must study the zeros of the system $\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = 0$ where $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = (\mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0), \mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0), \mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0))$ are given in the statement of Theorem 2. More precisely, the zeros (x_0^*, y_0^*, z_0^*) of the system

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(x_0, y_0, z_0) \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0, z_0) \\ \mathcal{F}_3(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

With respect to the variables $x_0, y_0$and z_0 provide periodic orbits of system (1) with $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small if they are simple, i.e. if

$$det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} \Big|_{(x_0, y_0, z_0) = (x_0^*, y_0^*, z_0^*)} \right) \neq 0.$$

For every simple zero (x_0^*, y_0^*, z_0^*) of system (14),we obtain a 2π-periodic solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ of the differential system (1) for $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small such that $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ tends to the periodic solution (4) of (1) when $\varepsilon \to 0$. Note that this solution is periodic of period 2π. This completes the proof of Theorem 2.

Proof of theorem 3. We shall study the periodic solutions of system (7), i.e. the periodic solution of the system (2) with $\varepsilon = 0$. The solution of the system (2) with $\lambda \neq 0$ such that $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ is

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t) + \int_0^t (-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau)) d\tau \\ x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) + \int_0^t (b_1(\tau)\sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau)) d\tau \\ e^{\lambda t} z_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} b_3(\tau)\, d\tau \end{pmatrix}$$

these solutions are 2π-periodic if and only if
$(x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi)) = (x(0), y(0), z(0))$.
We obtain the following periodicity conditions

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\tau) b_1(\tau) + \sin(\tau)\, b_2(\tau)) d\tau = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} (-\sin(\tau) b_1(\tau) + \cos(t) b_2(\tau)) d\tau = 0,$$

$$z_0^* = \frac{e^{2\pi\lambda}}{1-e^{2\pi\lambda}} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda\tau} b_3(\tau)d\tau.$$

We shall apply Theorem 4 to the differential system (1) with $\lambda \neq 0$. It can be written as system (6) taking

$$\mathrm{x}= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \ \mathrm{F_0(t\,,x)} = \begin{pmatrix} -\,y(t) + b_1(t) \\ x(t) + \ b_2(t) \\ \lambda z(t) + b_3(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{t},\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} b_{11}(t)x(t) + \ b_{12}(t)y(t) + b_{13}(t)z(t) \\ b_{21}(t)x(t) + \ b_{22}(t)y(t) + b_{23}(t)z(t) \\ b_{31}(t)x(t) + \ b_{32}(t)y(t) + b_{33}(t)z(t) \end{pmatrix}$$

The set of the periodic solutions becomes

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos(t) - y_0\sin(t) + \int_0^t(-b_2(\tau)\sin(t-\tau) + b_1(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ x_0\sin(t) + y_0\cos(t) + \int_0^t(b_1(\tau)\sin(t-\tau) + b_2(\tau)\cos(t-\tau))d\tau \\ \frac{e^{\lambda t}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-\tau)} b_3(\tau)d\tau}{1-e^{2\pi\lambda}} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} b_3(\tau)\, d\tau \end{pmatrix}.$$

This set of the periodic solutions has dimension two. To look for the periodic solutions of our system (1) we must calculate the zeros $\boldsymbol{z} = (x_0, y_0)$ of the system $\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = 0$, where $\mathcal{F}(\boldsymbol{z})$ is given by (10). The fundamental matrix M(t) of the differential system (8) is therefore

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

It verifies

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-e^{-2\pi\lambda} \end{pmatrix}.$$

Consequently all the assumptions of Theorem 4 are satisfied. Therefore we must study the zeros of the system $\mathcal{F}(\boldsymbol{z}) = 0$ of two equations with two unknowns. More precisely, we have $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \left(\mathcal{F}_1(x_0, y_0), \mathcal{F}_2(x_0, y_0)\right)$ where $\mathcal{F}_1(x_0, y_0)$, $\mathcal{F}_2(x_0, y_0)$ are defined as in the statement of Theorem 3. The zeros (x_0^*, y_0^*) of system

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(x_0, y_0) \\ \mathcal{F}_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

with respect to the variable x_0 and y_0 provide periodic orbits of system (1) with $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small if they are simple, i.e. if

$$det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)}\bigg|_{(x_0,y_0)=(x_0^*,y_0^*)} \right) \neq 0.$$

For every simple zeros $(x_0^*,\ y_0^*)$ of system (15), we obtain a 2π-periodic solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))$ of differential system (1) for $\varepsilon \neq 0$ sufficiently small wich tends to the periodic solution (5) of the differential system

$$\dot{x} = -\,y(t) + b_1(t)$$
$$\dot{y} = x + \mathrm{b}_2\,(t)$$
$$\dot{z} = \lambda z(t) + b_3(t)$$

when $\varepsilon \to 0$. This completes the proof of Theorem 2.

4. PROOF OF COROLLARIES 1, 2 AND 3

Proof of corollary 1. We consider the differential system (1) with

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(2t) \\ \sin(t) & \cos(3t) \end{pmatrix}$$

and

$$b(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Computing the functions $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ of theorem 1, we obtain

$$\mathcal{F}_1(x_0, y_0) = \frac{1}{4}x_0 + \frac{5}{8}$$

$$\mathcal{F}_2(x_0, y_0) = \frac{1}{4}y_0$$

The system $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ has the solution $(x_0^*,\ y_0^*) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$. Since the Jocabian

$$det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(x_0, y_0)}\bigg|_{(x_0, y_0) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)}\right) = \frac{1}{16}$$

Then this differential system has a periodic solution $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$ tending to the solution given in the statement of the corollary (1) when $\varepsilon \to 0$.

Proof of corollary 2. We must apply Theorem 2 with *b(t)* and *B*(t) are defined in the statement of corollary (2). We can verify easily the periodicity conditions

$$\int_0^{2\pi} [\cos(\tau) sin(\tau) + \sin(\tau) cos(\tau)] d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} [-\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau)] d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} sin(\tau) d\tau = 0.$$

After computations of the functions $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ and $\mathcal{F}_3$ of Theorem 2, we obtain

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1.178097245}{\pi} y_0$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{1}{2\pi}(-0{,}7853981634 + 3.141592654\, y_0 - 0.7853981634 x_0)$$

$$\mathcal{F}_3 = \frac{1}{2\pi}(3.926990817 + 3.141592654 z_0 + 3.141592654\, x_0$$

The system $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = 0$ has one real solution given by

$$(x_0^*, y_0^*, z_0^*) = \left(-1, 0, -\frac{1}{4}\right)$$

Since the Jacobian

$$det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}\bigg|_{(x_0, y_0, z_0) = \left(-1, 0, -\frac{1}{4}\right)}\right) = \frac{0.7267096096}{\pi^3}.$$

Using Theorem 2 we obtain the periodic solution given in the statement of the corollary (2).

***Proof of corollary* 3.** We must apply Theorem 3 with *b(t)* and *B(t)* are defined in the statement of corollary**.** We can verify easily the periodicity conditions

$$\int_0^{2\pi}[2\cos(\tau)sin(\tau)]d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}[-\sin^2(\tau)+\cos^2(\tau)]d\tau = 0.$$

After computations of the functions $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ of Theorem 3, we obtain

$$\mathcal{F}_1 = \frac{(\lambda^4\pi + 5\lambda^2\pi + 4\pi)x_0 - 4e^{2\pi\lambda} + 4\lambda}{4\pi(\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4)}$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{(\lambda^4\pi + 5\lambda^2\pi + 4\pi)y_0 - 2e^{2\pi\lambda}\lambda^2 + 2\lambda^2}{4\pi(\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4)}$$

The system $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 0$ has only one real solution given by

$$(x_0^*, y_0^*) = \left(\frac{4\lambda(e^{2\pi\lambda}-1)}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)}, \frac{2\lambda^2(e^{2\pi\lambda}-1)}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)}\right).$$

Since the Jacobian

$$det\left(\left.\frac{\partial(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)}{\partial(x_0,y_0)}\right|_{(x_0,y_0)=\left(\frac{4\lambda(e^{2\pi\lambda}-1)}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)},\frac{2\lambda^2(e^{2\pi\lambda}-1)}{\pi(\lambda^4+5\lambda^2+4)}\right)}\right) = \frac{-1}{16}$$

using Theorem 3 we obtain the periodic solution given in the statement of the corollary (3).

REFERENCES

[1] V. I. Arnold, V. V, Kozlonov and A. I. Neishtadt, Mathematical Aspects of classical and Celestial Mechanics, second printing, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[2] A. Buicà, J. P. Françoise and J. LIibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, Communication on Pure and Applied Analysis, 6 (2007), 103-111.

[3] C. Chicone, Ordinary Differential Equations with Applications, Springer-Verlag, New York, 1999.

[4] M. Farkas, Periodic Motions. Vol. 104, Applied Mathematical sciences. New York (NY): Springer-Verlag; 1994.

[5] G. Floquet, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques [On linear differential equations with periodic coefficients]. Ann. Ecole Norm. Sup. 1883;12:47-49.

[6] C. A. Klausmeier, Floquet theory: a useful tool for understanding nonequilibrium dynamics, Theo Ecol (2008) 1:153-161. Doi 10. 1007/s12080-008-0016-2.

[7] J. Llibre and A. Rodrigues. On the limit cycles of the Floquet differential equation, discrete and continuous dynamical systems series B volume 19, number 4, June 2014.

[8] J. Llibre, M. A. Teixeira and J. Torregrosa, Limit Cycles Bifurcating from a K-dimensional isochronous set center contained in $\mathbb{R}^n$ with k≤n, Math. Phys. Anal. Geom, 10 (2007), 237-249.

[9] P. Lochak and C. Meunier, multiphase Averaging for Classical Systems, Appl. Math. Sciences 72, Springer-Verlag, New York, 1988.

[10] W. Magnus, S. Winkler. Hill's Equation, Dover-Phoenix Editions, ISBN 0-486-49565-5.

[11] I. G. Malkin, Some Problems of the theory of nonlinear oscillations, Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit. Moscow, 1956 (in Russian).

[12] L. Perko, Differential equations and dynamical systems. 3rd ed. Vol. 7, Texts in applied New York (NY): Springer-Verlag; 2001.

[13] M. Roseau, Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 8, Springer, New York, 1985.

[14] J. A. Sanders and F. Verhulst, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Applied Mathematical Sciences 59, Springer, 1985.

[15] J. A. Sanders and F. Verhulst, and J. Murdock, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Second edition, Applied Mathematical Sci., 59, Springer-Verlag, New York, 2007.

[16] J. P. Tian and J. Wang, Some results in Floquet theory, with application to periodic epidemic models. Applicable Analysis, 2014 http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2014.918606.

[17] W. F. Trench, On nonautonomous linear systems of differential and difference equations with R-symetric coefficient matrices, Linear Algebra Appl., 431 (2009), 2109-2117.

[18] W. F. Trench, Asymptotic preconditioning of linear homogenous systems of differential equations, Linear Algebra Appl., 431 (2011), 1631-1637.

[19] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Universitext, Springer, New York, 1996.

Bibliographie

[1] V. I. Arnold, V. V. Kozlonov and A. I. Neishtadt, Mathematical Aspects of classical and Celestial Mechanics, Second printing , Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[2] A. Buic$\tilde{a}$, J. P. Françoise and J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differetial systems with a small parameter, Communication on Pure and Applied Analysis, 6 (2007), 103-111.

[3] A. Buica and J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, Bull. Sci. Math., 128(1), 7-22, 2004.

[4] N.N. Bogoliubov and Yu.A.Mitropolskii, Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations, Gordon and Breach, New York, 1961.

[5] V.K. Chandrasekar, M. Senthilvelan and M. Lakshmanan, Lienard-type nonlinear oscillator, Phys. Rev. E, 72 066203(1-8) (2005).

[6] V.K. Chandrasekar, M. Senthilvelan and M. Lakshmanan, A systematic method of finding linearizing transformations for nonlinear ordinary differential equations : I. Scalar case, J. Nonlinear Math. Phys. **19** (2012), 1250012, 21 pp.

[7] C. Chicone, Ordinary Differential Equations with Applications, Springer-Verlag, New York, 1999.

[8] M. Farkas, Periodic motions. Vol. 104, Applied mathematical sciences. New York (NY) : Springer-Verlag ; 1994.

[9] M. S. P. Eastham, The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, Scottish Academic Press, Edinburgh and London, 1973.

[10] G. Floquet, Sur les équations différentielles linéaires à coeffecients périodiques [On linear differential equations with periodic coefficients]. Ann. Ecole Norm. Sup. 1883 ;12 :47-49.

[11] D. Hilbert, Mathematische Probleme, Lecture, in : Second Internat. Congr. Math., Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Goett. Math.-Phys. Kl. (1900) 253-297 ; English transl. : Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902) 437-479.

[12] E.L. Ince, Ordinary Differential Equations, Longmans, London, 1927.

[13] A. Karasu and P.G. L. Leach, Nonlocal symmetries and integrable ordinary differential equations : $\ddot{x}+3x\dot{x}+x^3=0$ and its genralizations, J. Math. Phys. **50** (2009), 073509, 17 pp.

[14] C. A. Klausmeier, *Floquet theory : a useful tool for understanding nonequilibrium dynamics*, Theo Ecol (2008) 1 :153-161. Doi 10.1007/s12080-008-0016-2.

[15] N.M. Krylov and N.N. Bogoliubov. Introduction to Nonlinear Mechanics (in Russian), Izd. AN UkSSR, Kiev, 1937. Vvedenie v Nelineinikhu Mekhaniku.

[16] J. Llibre and A. Makhlouf : Bifurcation of limit cycles from a 2-dimensional centre inside $\mathbb{R}^n$. Nonlinear Analysis 72(2010) 1387-1392.

[17] J. Llibre and A. Rodrigues, On the limit cycles of the Floquet differential equation, discrete and continuous dynamical systems series B Volume 19, number 4, june 2014.

[18] J. Llibre, M. A. Teixeira and J. Torregrosa, Limit Cycles Bifurcating from a K-dimensional isochronous set center contained in $\mathbb{R}^n$ with $k \le n$, Math. Phys. Anal. Geom, 10 (2007), 237-249.

[19] P. Lochak and C. Meunier, Multiphase Averaging for Classical Systems, Appl. Math. Sciences 72, Springer-Verlag, New York, 1988.

[20] W. Magnus, S. Winkler. Hill's Equation, Dover-Phoenix Editions, ISBN 0-486-49565-5.

[21] A. Makhlouf and J. Llibre : Limit cycles of polynomial differential systems bifurcating from the periodic orbits of a linear differential system in $\mathbb{R}^d$. "Bulletin des mathématiques" sciences. Bull Sci. math 133(2009) 578-587.

[22] I. G. Malkin, Some Problems of the theory of nonlinear oscillations, Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit. Moscow, 1956 (in Russian).

[23] L. Perko, Differential equations and dynamical systems. 3rd ed. Vol. 7, Texts in applied New York (NY) : Springer-Verlag ; 2001.

[24] H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. J. Math. Pures. Appl. (3) 7 (1881), 375-422.

[25] M. Roseau, Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. **8,** Springer, New York, 1985.

[26] J. A. Sanders and F. Verhulst, and J. Murdock, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Second edition, Applied Mathematical Sci., **59**, Springer-Verlag, New York, 2007.

[27] J. P. Tian and J. Wang, Some results in Floquet theory, with application to periodic epidemic models. Applicable Analysis, 2014 http ://dx.doi.org/10.1080/00036811.2014.918606.

[28] W. F. Trench, On nonautonomous linear systems of differential and difference equations with R-symetric coefficient matrices, Linear Algebra Appl., 431 (2009), 2109-2117.

[29] W. F. Trench, Asymptotic preconditioning of linear homogenous systems of differential equations, Linear Algebra Appl., 431 (2011), 1631-1637.

[30] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Universitext, Springer, New York, 1996.