

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté des sciences de l'ingéniorat

Département d'Electromécanique

Thèse

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **Doctorat**

**Etude de l'Impact des Paramètres Agissants sur le
Comportement Dynamique Non Linéaire d'un Palier Lisse**

Option : Electromécanique

Présentée par :

Mme : **MERAMRIA OUAFA**

DEVANT LE JURY

Président	: Pr. HAIEHEM Amar	Université Badji-Mokhtar-Annaba-
Rapporteur	: Dr. BELHAMRA Ali	Université Badji-Mokhtar-Annaba-
Examineurs	: Pr. HADJADJ AOUL Elias	Université Badji-Mokhtar-Annaba-
	Pr. NECIB Brahim	Université de Constantine
	Pr. NEMOUCHI Zoubir	Université de Constantine
	Dr. MANAA Rabah	Université Hadj-Lakhdar-Batna

11 MAI 2016

REMERCIEMENTS

Le grand remerciement revient à Dieu qui nous a donné la force et le courage à réaliser et à terminer cette modeste thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Monsieur Belhamra Ali, Maître de conférences au département d'Electromécanique de l'université Badji Mokhtar Annaba, pour le soutien moral, pour la confiance, pour les conseils judicieux qu'il m'a généreusement donné et la passion de la recherche qu'il m'a transmis.

Je suis extrêmement sensible à l'honneur que me fait Monsieur Haiahem Amar, Professeur au département Génie mécanique est Le Recteur de l'université Badji Mokhtar Annaba, d'avoir accepté de présider le jury et participer à l'examen de cette thèse.

Je remercie également Monsieur Hadjadj Aoul Elias Professeur au département d'Electromécanique de l'université Badji Mokhtar Annaba, mais aussi Messieurs Necibe Ibrahim et Nemouchi Zoubir Professeurs au département Génie mécanique de l'université Constantine 1, et au Docteur Manaa Rabah Maître conférence de l'université Hadj-Lakhdar Batna de s'être intéressés à mon travail en faisant partie du jury.

Enfin Un grand Merci à tous les membres du Laboratoire des Systèmes électromécaniques est à tous les enseignants du département électromécanique université Badji Mokhtar Annaba.

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail avec émotion à mon cher père ELAWARDI, à ma très chère mère LOUIZA qui m'ont toujours soutenue et encouragée, et auxquels j'exprime ma profonde gratitude.

A mes enfants AHMED TAKI et MAISSA, à mon frère HICHEM, mes sœurs : RIMA, FAIZA, ASMA et à mes neveux KOSSAI, ROEIA et MERJEM.

A mon adorable grand famille et à mes amies surtout ma chère ISMAHEN qui m'ont accompagné tout au long de cette thèse.

A mon cher mari ABDE RAHIM, pour sa patience, sa gentillesse sa compréhension, et sa présence à mes côtés au quotidien.

Résumé

Une étude théorique de l'impact des paramètres agissant sur le comportement dynamique non linéaire d'un palier lisse indéformable lubrifié par des huiles additivées en prenant en considération le défaut d'un balourd est présentée.

Ces huiles dont le comportement rhéologique est non-newtonien sont modélisées comme des fluides à couple de contrainte. D'après la théorie des milieux continus de V. K. Stokes qui tient compte de la taille des particules, Les effets des couples de contrainte sur le comportement dynamique du palier aligné sont étudiés en définissant un paramètre du couple de contrainte adimensionnel. Les résultats obtenus montrent que la présence des additifs dans le lubrifiant a une influence positives sur les performances statiques et dynamiques ainsi que la stabilité et la réponse dynamique du palier surtout pour les grandes valeurs du paramètre du couple de contrainte, c'est-à-dire dans le cas des polymères de longue chaîne moléculaire.

L'étude du comportement dynamique de ce palier hydrodynamique s'appuie sur une modélisation non linéaire. La résolution simultanée en régime dynamique de l'équation de Reynolds et des équations régissant le mouvement de l'arbre est réalisée en effectuant un calcul pas à pas dans le temps. D'autre part cette étude a permis de préciser l'influence, des caractéristiques des paliers (viscosité du lubrifiant, jeu radial, vitesse de rotation) sur l'épaisseur minimale du film lubrifiant à respecter, le champ de pression dans le film lubrifiant calculé et sur le comportement vibratoire du rotor.

Mots clés :

Lubrification hydrodynamique

Paliers hydrodynamiques

Théorie de V. K. Stokes.

Vibration

Stabilité dynamique ;

Dynamique des rotors

Balourd.

عنوان المذكرة

دراسة تأثير للعوامل التي تؤثر على السلوك الديناميكي غير الخطي للمحامل الهيدروديناميكية

ملخص

الدراسة النظرية المنشأة في إطار هذه الرسالة تهتم بدراسة تأثير للعوامل التي تؤثر على السلوك الديناميكي غير الخطي للمحامل الهيدروديناميكية.

هذه الدراسة تركز أساسا على تطبيق نظرية الوسط المستمر لفجاي كومار سطوكس، التي تأخذ بعين الاعتبار طول سلسلة الجزيئات المضافة لزيوت الأساس (بوليمار) الخصائص الإستاتيكية والديناميكية هي نتيجة حل ثلاث معادلات ذات مشتقات جزئية موصولة بطريقة الفروق المحددة الوسطية.

الدراسة البارامترية بينت أن وجود مواد تحسين للزوجة في زيوت التزييت له تأثير على وضعية المحمل الإستاتيكية والديناميكية لا يمكن إهماله خاصة بالنسبة للقيم الكبرى لمتغير مزدوج الضغوط. في حين أن تأثيره على معدل التصرف لا يبدو جليا إلا عند القيم الكبرى لإنحراف التشغيل.

- مقارنة مع الزيوت النيوتونية، الزيوت التي تحتوي على مواد تحسين للزوجة تسمح ب: زيادة قوة الرفع والضغط الإستاتيكي الأقصى في شريط التزييت.

- انخفاض في المجال الغير مستقر

- انخفاض في سعة الاهتزازات الناتجة عن قوة اللاتوازن المتخلفة

الدراسة الغير خطية وضحت تأثير بعض العوامل مثل سرعة دوران العمود واللزوجة للعمود داخل الحامل على القيمة الدنيا لسمك شريط التشحيم والقيمة القصوى للضغط الهيدروديناميكي ومسار مركز ثقل العمود بداخل الحامل والمسارات الافقية والعمودية.

الكلمات المفتاحية

- التشحيم الهيدروديناميكي

- المحامل الهيدروديناميكية

- الانسياب (المرونة، اللزوجة واللدانة)

- الاستقرار الديناميكي الاستقرار الديناميكي

- نظرية فيجاي كومار سطوكس

- الاهتزاز

- عدم التوازن

Title:

Study of the impact of parameters affecting the nonlinear dynamic behavior a journal bearing

Abstract

A theoretical study of the impact of parameters affecting the nonlinear dynamic behavior a journal bearing investigation of the dynamic behavior of a rigid plain journal bearing lubricated by oils containing polymer additives considering unbalance defect is presented. The lubricating oils which are non-Newtonian are modeled as couple-stress fluids. According to the V. K. Stokes' micro-continuum theory which takes into account the size of particles.

The effects of the couple-stress on the dynamic behavior of the plain journal bearing are studied by defining of a dimensionless couple-stress parameter. The obtained results showed that the presence of additives in the lubricant has positive effects on the static and dynamic performance characteristics as well as the dynamic stability and response of the journal bearing especially at high values of couple-stresses parameter, i.e. for higher chain length of the additive molecule. However, their influence on the side leakage flow is negligible except for high values of eccentricity ratio.

The solution of the nonlinear dynamic problem of this type of bearing is determined with a spatial discretisation of the modified Reynolds' equation written in dynamic mode by using equations of rotor motion by the help of Euler's explicit diagram. In addition of study made it possible to specify the influence of characteristic (velocity of revolution, viscosity of lubricant) the effect of some parameters such as: the trajectory of the center of the tree in the stage, the minimal thickness of lubricating film, field of pressure.

Key words:

Hydrodynamic lubrication

Hydrodynamic journal bearing

V. K. Stokes'theory

Vibration

Stability

Dynamics of the rotors

Unbalance.

Table de matière

Sommaire

Listes des figures

Listes des tableaux

Introduction générale.....10

Chapitre 1 : Etude bibliographique.....14

I.1 Introduction15

1.2. Le phénomène de la lubrification hydrodynamique15

I.2.1. Définition et description.....15

I.3 Etudes numériques non-newtonienne.....22

I.3.1. Définition et description.....22

I.4 Conclusion25

Chapitre 2 : Rappel des équations de base sur la lubrification hydrodynamique d'un

palier lisse.....26

II.1 Introduction.....27

II.2. Equations de mouvement.....31

II.3. Equations de mouvement pour un écoulement de films minces.....32

II.4 Intégration des équations de mouvement33

II.5 Equation de Reynolds modifiée.....34

II.6 Equation de Reynolds modifiée pour un palier lisse.....35

II.7 Expression des composantes de la vitesse u_2 et v_2 36

II.8 Conditions aux limites38

II.8.a Conditions liées à l'alimentation et à l'environnement.....39

II.8.b Conditions liées a l'écoulement du fluide lubrifiant.....39

II.9 Equation géométrique du film.....40

II.10 Conclusion41

Chapitre 3 : Performances statique des paliers lisses lubrifié par un fluide non

newtonien.....42

III.1 Introduction.....43

III.2 Géométrie du palier.....44

III.2.a Conditions aux limites sur la pression statique.....45

III. 3 Charge portante et angle de calage.....	45
III.4 Forces de frottement	46
III.5 Vitesses moyennes de l'écoulement	47
III.6 Le débit volumique	48
III.7 Conclusion	51
Chapitre 4 : Caractéristiques dynamiques non linéaire d'un palier lisse lubrifié par un fluide non newtonien.....	52
IV.1 Introduction.....	53
IV.2 Mise en équations.....	53
IV.3 Résolution des équations de mouvement	56
IV.4 Méthodes de résolution de l'équation de Reynolds modifié pour un fluide non Newtonien	57
IV.4.a Conditions limites sur la pression.....	58
IV.4.b Discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée	59
IV.5 Méthode de résolution du système d'équations linéaires.....	61
IV.6 Calcul des caractéristiques statiques.....	62
IV.7 Théorie du palier court.....	63
IV.7.a Discrétisation de l'équation d'Euler-Lagrange par la méthode des différences finies.	65
IV.8 Seuil de stabilité.....	66
IV.9 Conclusion	66
Chapitre 5 Etude de l'impact des paramètres agissants sur le comportement dynamique d'un palier lisse.....	67
V.1 Introduction.....	68
V.2 Méthode numérique de résolution	68
V.3 Validation des résultats par l'expérience	71
V.4 Etude paramétrique	75
V.4.1 Effet de la vitesse de rotation.....	75
V.4.1.a Variations de la trajectoire du centre de l'arbre.....	76
V.4.1.b Variation de la pression maximale dans le palier.....	77
V.4.1.c Champ de pression calculée dans le palier.....	77
V.4.1.d Variation des composantes d'accélération en fonction du temps dans le palier.....	78

V.4.1.e Variation de l'épaisseur minimale du film lubrifiant	79
V.4.2 Influence de la viscosité du lubrifiant	80
V.4.2.a Variations de la trajectoire du centre de l'arbre	81
V.4.2.b Variations de déplacement du centre de l'arbre au cours du temps	82
V.4.2.c Champ de pression dans le film fluide calculée dans le palier.....	83
V.4.2.d Variation de l'épaisseur minimale du film lubrifiant.....	84
V.4. 3 Effet du paramètre de couple des contraintes sur les performances dynamique du palier lisse.....	85
V.4. 3.a Palier soumis à une charge statique seule ($\epsilon_b = 0$).....	85
V.4. 3.b Palier soumis à une charge statique avec balourd.....	87
V.5 Conclusion	94
Conclusions générales	96
Références bibliographiques	98
Liste des symboles.....	102
Annexes.....	105

INTRODUCTION GENERALE

Le fonctionnement de tous les systèmes mécaniques obéit obligatoirement à des phases de démarrage et d'arrêt plus ou moins fréquentes. En dehors de l'aspect instationnaire nous nous retrouvons en conditions de contact dites sévères. La maîtrise de ces étapes et de leurs conséquences telles que l'usure sur le système mécanique a indéniablement un impact sur l'économie. Ainsi, la connaissance du déroulement de ces phases permettra entre autre de réaliser des améliorations dans la conception et la fabrication des composantes concernées afin d'augmenter leur fiabilité et mettre en place une sérieuse campagne de maintenance pouvant augmenter leur durée de vie.

La détermination des performances d'un contact lubrifié dépend entre autres, d'une caractérisation rigoureuse des surfaces en présence et d'une représentation aussi fidèle et complète que possible du lubrifiant soumis aux sollicitations internes et externes. Lorsque les conditions de fonctionnement sont dites 'sévéres' il est impératif de caractériser et de modéliser le plus correctement possible ces deux aspects. Des modèles ont été mis en place pour prévoir le comportement des contacts lubrifiés.

Ainsi, l'élaboration de la théorie de la lubrification par film mince apparaît en 1886 avec le modèle mathématique établi par Reynolds connu sous le nom « d'équation de Reynolds ». Cette équation qui peut s'écrire sous différentes formes, est le plus souvent non linéaire aux dérivées partielles. La plus part des techniques numériques existantes ont été utilisées pour la résoudre.

La résolution de cette équation permet d'accéder à la distribution du champ de pression dans un contact lubrifié et ainsi à ses caractéristiques de fonctionnement. Une des principales hypothèses émises par Reynolds est que le lubrifiant possède un comportement newtonien, c'est à dire que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse dans l'épaisseur du film.

A partir des années 1964 des étapes décisives ont pu être franchies dans le domaine de la lubrification hydrodynamique, lorsque l'ordinateur est venu ajouter aux connaissances physiques sa puissance de calcul, et ainsi permettre d'élaborer des modèles numériques capables de représenter très finement des comportements complexes des films d'huile dans les contacts tels que les paliers et les butées.

Depuis très longtemps, ayant compris l'importance de la lubrification des machines sur leurs performances, on a cherché à améliorer les huiles qui servent de cor séparateur entre les surfaces frottantes pour augmenter ces performances. Les changements intervenus dans la

composition de ces huiles lubrifiantes a modifié la réponse de ces dernières dans certaines conditions de fonctionnement et ainsi a changé les caractéristiques de fonctionnement des mécanismes. Cette réponse du lubrifiant ne peut plus être modélisée par une loi de type visqueux linéaire. L'équation de Reynolds classique n'est plus adaptée dans ce cadre. Ainsi de nouvelles équations, prenant en compte toute la complexité de la réponse du fluide, ont été mises en place et nommées généralement : équation de Reynolds Modifiée non-Newtonienne. Cette équation est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique qui n'admet pas de solutions analytiques. Des méthodes numériques ont été mises en place pour sa résolution et qui prennent en compte les phénomènes intervenant dans un contact lubrifié.

Les machines tournantes modernes telles que les turbines et les compresseurs sont exposés à des problèmes vibratoires aigus essentiellement dus à la réduction des masses et l'élévation des vitesses de fonctionnement des rotors.

Le rotor d'une machine tournante est un élément très important dont le rôle est de transmettre ou de transformer de la puissance. Un grand nombre de lignes d'arbre reposent sur des paliers hydrodynamiques. La connaissance du comportement dynamique de ces paliers est indispensable pour la conception des machines tournantes. Compte tenu des difficultés tant sur le plan technique que financier, rencontrées pour la détermination expérimentale des caractéristiques de ce type d'appuis, des approches théoriques ont été envisagées. Celles-ci ont connu un essor considérable avec le développement des moyens de calcul et des méthodes numériques telles que les différences finies et plus récemment les éléments finis.

Les développements technologiques imposent des conditions de fonctionnement de rotors de plus en plus sévères: les vitesses de rotation, les puissances et les charges prennent des valeurs de plus en plus grandes. Ainsi, le rôle des paliers dans le comportement de la ligne d'arbre doit être considéré avec le plus grand soin.

Il existe deux types de modélisation : linéaire et non linéaire. En effet, lorsque ces paliers sont soumis à de fortes charges dynamiques ou lorsqu'ils fonctionnent hors de leurs zones de stabilité, la modélisation linéaire s'avère très insuffisante. Une modélisation non linéaire doit alors être envisagée.

Dans ce travail on a à réaliser l'étude de l'impact des paramètres agissants sur le comportement dynamique non linéaire d'un palier lisse. On a étudiée la théorie du Palier lisse pour l'analyse dynamique non linéaire des coussinets soutenant un arbre rigide non équilibré. Cette méthode est fondée sur plusieurs hypothèses , Le modèle proposé, est très précis et avantageux que le modèle de solution analytique de palier lisse court, notre modèle

est employé pour résoudre l'équation bidimensionnelle et unidimensionnelle de Reynolds en intégrant une équation ordinaire et des états de rupture en appliquant les conditions de Reynolds. Afin de déterminer la trajectoire du centre de l'arbre, les équations non linéaires de mouvement sont intégrées en employant la méthode d'Euler.

L'utilisation des méthodes évoluées telles que la méthode itérative de Gauss Seidal avec facteur de sur-relaxation nous a permis d'avoir le champ de pression selon les deux directions.

Les codes de calcul utilisés pour l'étude de la lubrification sont variés de par les méthodes utilisées, mais partent tous d'hypothèses proches les unes des autres. La validation d'un programme MATLAB par rapport à ceux déjà existants est une des méthodes utilisées pour soutenir la validité des méthodes appliquées.

Ce programme permettant de calculer les performances statique et dynamiques du palier lisse étudié, Qui est soumis à deux types de chargement, statiques appliquées au palier correspondant au poids du rotor affecté au palier lisse et dynamique dû à une excitation synchrone de type balourd. .

Le mémoire présentant ce travail comporte cinq chapitres avec une introduction et une conclusion générale.

- Le premier chapitre est une recherche bibliographique. Dans un premier temps, les travaux concernant les paliers en régime stationnaire et dynamique avec la prise en compte de la zone inactive sont brièvement retracés. Ensuite, un certain nombre fondamentales réalisées de recherche récemment dans le monde sur le fluide non newtonien en générale.
- Le deuxième chapitre présente d'une part un rappel sur les paliers lisse et la théorie de la lubrification hydrodynamique définit par l'équation fondamentale des films minces visqueux, les conditions aux limites, la configuration géométrique du contact et les relations définissant la variation des propriétés du lubrifiant .d' autre part application de une cette théorie au cas d'un palier lisse circulaire lubrifié par un fluide non newtonien travaillant en régime transitoire établi et les équations permettant le calcul des caractéristiques de celui-ci sont établies.
- Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'évolution des caractéristiques statiques d'un palier lisse avec une présentation des différentes relations permettant de calculer les

performances statiques d'un palier lisse lubrifié par un fluide non newtonien et ceci à partir de la connaissance du champ de pression hydrodynamique.

- Le quatrième chapitre est réservé l'étude des caractéristiques dynamique non linéaire d'un palier lisse ainsi que les résolutions numérique du problème de la lubrification hydrodynamique par la méthode des différences finies permettant de mettre en évidence les effets de la rhéologie du fluide lubrifiant.
- Enfin, le cinquième chapitre résume les résultats théoriques obtenus par le calcul développé dans le cas d'un palier lisse ou nous sommes aussi intéressés à l'étude de l'influence de certains paramètres sur le comportement dynamique non linéaire des paliers fluides qui sont : La vitesse de rotation de l'arbre, le balourd, la viscosité du fluide lubrifiant et les différentes valeurs du paramètre de couple de contrainte
 - ✓ Les résultats de l'étude de l'impact des paramètres agissant sur le comportement dynamique non linéaire d'un palier lisse soumis à des conditions sévère suggèrent sur des caractéristiques telles que : La variation de l'épaisseur minimale du film et de la pression maximale en fonction du temps ; les trajectoires décrites par le centre de l'arbre dans le palier ; le champ de pression du film lubrifiant , les variations des déplacements du centre de l'arbre en fonction du temps ; les variations d'accélération du centre de l'arbre en fonction du temps ;

Dans la conclusion générale on met en exergue les principaux résultats de ce travail ainsi que les différentes perspectives envisageables tant du point de vue expérimental que de l'amélioration des modèles numériques.

I.1 Introduction :

Plusieurs études ont été réalisées afin de comprendre le phénomène d'usure et de déterminer les conditions qui favorisent son déclenchement et son développement. Ceci nécessite, pour de nombreux mécanismes de diminuer les frottements. Le rendement des machines sera meilleur et les pertes d'énergie seront minimales. Ces pertes d'énergie sont liées, généralement aux problèmes de la lubrification et particulièrement à la lubrification hydrodynamique. La majorité des mécanismes de machines tournantes dont le rotor est souvent supporté par des paliers lisses hydrodynamiques, sont des éléments très actifs qui contribuent à la bonne marche et la stabilité de la machine. Enfin, nous rapporterons les travaux théoriques et numériques qui s'intéressent à la lubrification hydrodynamique et le type de lubrifiant (fluide newtonien et non newtonien) dans un grand panorama de contacts.

I.2. Le phénomène de la lubrification hydrodynamique :

I.2.1. Définition et description

La lubrification hydrodynamique est un domaine important de la tribologie, c'est l'étude des contacts dans lesquels un film de fluide sépare les surfaces en présence. Dans le cas où le film de fluide sépare totalement les surfaces, les aspérités et les défauts de forme ont des dimensions inférieures à l'épaisseur du film. La lubrification hydrodynamique s'intéresse aux mécanismes pour lesquels la forme et la vitesse relative de deux surfaces en regard engendrent la formation d'un film mince continu dans l'interstice, sous une pression suffisamment élevée pour empêcher le contact entre les deux surfaces.

Dans tous les mécanismes étudiés, le problème peut se schématiser de la façon suivante :

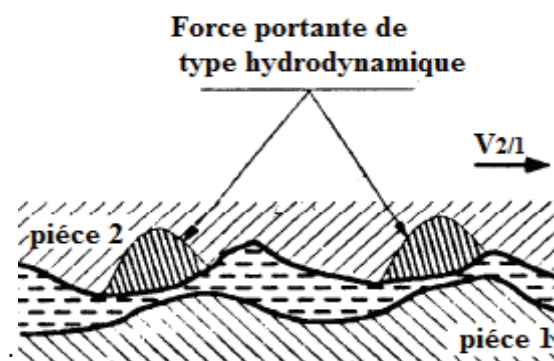


Figure I.1: Schéma d'un contact lubrifié en régime hydrodynamique

Les premiers travaux sur la lubrification hydrodynamique sont ceux de Hirn [1] en 1854, Hirn constate que pour une charge donnée, le couple de frottement à faible vitesse augmente, le

couple devient stable, passe par un minimum puis, à température constante, est proportionnel à la vitesse de rotation. Il montre aussi que le couple dépend directement de la viscosité de fluide.

En 1879, Robert Henry Thyrston, publie le résultat de ses études sur le frottement et la lubrification, il montre que lorsque la vitesse augmente, le coefficient de frottement d'un palier lubrifié décroît au dessous de la valeur statique, passe par un minimum puis augmente ensuite avec la vitesse. Il remarque aussi que la vitesse qui correspond au minimum de frottement. Dès 1880, Couette qui étudiait, du point de vue de la mécanique des fluides, l'écoulement entre deux cylindres concentriques en rotation de rayons très voisins afin de déterminer la signification physique de la viscosité, avait noté une discontinuité dans la courbe de variation de la charge appliquée au palier en fonction de la vitesse. Il attribuait déjà cette discontinuité à un changement de régime qui évidemment n'était pas prévu par la théorie laminaire.

Presque 3 ans plus tard, Towers [2] en 1883 découvre l'existence d'une répartition de pression entre les surfaces de l'arbre et du coussinet d'un palier de wagon de chemin de fer. A partir des travaux de Towers, Reynolds définit le phénomène de portance hydrodynamique. Lorsqu'il entre dans le convergent, le lubrifiant qui adhère aux surfaces en mouvement du palier, génère un champ de pression capable de supporter une charge radiale importante. Sur la base des équations de Navier-Stokes, cette théorie est mise en équation par Reynolds [3] en 1886, elle permet le calcul de la répartition de pression hydrodynamique dans le film lubrifiant, et constitue ainsi la base de la théorie de la lubrification actuelle.

Dans un récent article, Jean Frêne [4] a résumé les progrès réalisés dans le domaine de la tribologie depuis l'antiquité jusqu'au XX^{ème} siècle. En 1905, Anthony George Maldon Michell (1870-1959) obtient à l'aide de développements limités, la solution de l'équation de Reynolds dans le cas d'une butée de largeur finie.

En 1904, Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951) utilise un changement de variables judicieux et présente une solution analytique à l'équation de Reynolds dans le cas du palier infiniment long $dP/dZ=0$.

En 1914, Ludwig Karl Friedrich Gumbel (1874-1923) propose pour le calcul de la charge dans le palier de ne prendre en compte que la partie positive de la pression et de négliger toute la zone où la pression est négative. La charge ainsi calculée est évidemment erronée.

Des paliers soumis à des charges constantes. Une méthode numérique de résolution de

l'équation de Reynolds utilisant ces conditions, a été proposée par Christopherson [5] dès 1941.

En 1931, Albert Kingsbury (1863-1943) obtient une solution approchée à l'équation de Reynolds, en utilisant une méthode analogique basée sur la similitude existante entre l'équation de Reynolds et l'équation qui décrit la loi de variation de la tension électrique dans un milieu résistif.

Fred William Ocvirk [6] (1913-1967) présente En 1953 une méthode approchée pour le calcul des paliers courts. Il propose de négliger, dans l'équation de Reynolds, le gradient de pression circonférentiel devant le gradient de pression axial. La solution est analytique et utilise les conditions aux limites de Gumbel. Les résultats obtenus sont pratiquement exacts pour des paliers dont le rapport L/D de la longueur au diamètre est inférieur à 0,25. Cependant, cette méthode est encore utilisée aujourd'hui, dans le cas de charges variables, pour des paliers de rapport L/D de l'ordre de 0, 5, car elle simplifie considérablement les calculs.

En 1949, les premières solutions numériques ont été proposées par Cameron et Wood, puis par Pinkus, Raimondi et Boyd en 1958. Pendant les années quarante les moyens informatiques étant limités, les premières solutions permettant de déterminer les paramètres de fonctionnement des paliers en régime transitoire, n'ont pu être obtenues qu'à l'aide de méthodes approximatives se basant sur des hypothèses simplificatrices. Stone et Underwood en 1947, ont introduit le concept de vitesse équivalente, ce concept n'est adapté qu'aux cas où la vitesse de rotation de la charge est constante. Cette méthode théorique prévoit une épaisseur du film d'huile nulle et ne prend pas en considération l'évolution de la trajectoire du centre de l'arbre et sa vitesse de déplacement. Burwell de 1947 à 1951 a élaboré une méthode permettant de déterminer la trajectoire du centre de l'arbre d'un palier. La méthode consiste à introduire des facteurs qui caractérisent les fuites du lubrifiant aux extrémités du palier. Il a établi des équations analogues à celles données par Sommerfeld (cas du palier long en négligeant le débit axial) et a calculé la trajectoire du centre de l'arbre d'un palier de tête de bielle d'un moteur diesel et d'un palier de moteur d'avion. Burwell a développé une seconde méthode pour le calcul d'un palier court (en négligeant le débit circonférentiel) pour uniquement des charges unidirectionnelles.

Hahn en 1957 propose une méthode pour le calcul de la trajectoire du centre de l'arbre dans le coussinet, pour un diagramme de charge quelconque. Il a calculé numériquement et séparément, le champ de pression dû à la vitesse radiale de l'arbre (effet d'écrasement) et le champ de pression induit par la vitesse tangentielle de l'arbre (effet d'entraînement), ceci en partant de l'équation de Reynolds pour un palier de longueur finie avec l'utilisation des conditions aux limites de Sommerfeld. Les deux champs de pression sont superposés et les pressions négatives négligées ; la charge supportée est calculée par intégration et la trajectoire du centre de l'arbre est obtenue en résolvant les équations du mouvement par la méthode numérique de Rûng-Kutta.

La méthode de Holland proposée en 1959 est très utilisée en Allemagne. Elle utilise les conditions aux limites de Gûmbel et permet de déterminer la charge supportée par addition vectorielle de ces deux composantes, respectivement dues à la vitesse radiale et tangentielle de l'arbre. Cette méthode, moins exacte que celle de Hahn a été adaptée numériquement en 1961 par Eberhard et Lang et aussi par Glaser et Bassler en 1965.

La firme Rheinstahl Hanomag A.G. a mis au point, au début des années 60, deux méthodes pour le calcul sur les paliers lisses soumis à des charges dynamiques. La première reprend le principe de la méthode de Holland mais lorsque la vitesse d'écrasement devient négative, le calcul continue en prenant en compte la zone de pression négative dans le film. La seconde méthode utilise l'étude de Hahn-Someya. Hanomag a jugé que ce deuxième programme était le plus précis et a adopté, par la suite, celui-ci pour ses calculs.

Horsnell et McCallion , en 1962 ont proposé une méthode qui permet de prendre en compte et d'estimer l'importance de la rupture du film dans un palier de longueur finie alimenté par une rainure circonférentielle, avec les conditions aux limites de Reynolds. Cette méthode nécessite le calcul numérique des caractéristiques de fonctionnement du palier pour différentes valeurs d'excentricité et pour différentes vitesses radiales et tangentielles de l'arbre. Un changement de la pression d'alimentation ou du rapport L/D oblige à refaire le calcul complet, ce qui limite l'efficacité de cette méthode.

Afin d'éliminer les inconvénients majeurs de cette méthode, Llyod, Hosnell et McCallion 1966 ont développé un modèle qui leur permettait, en plus, de tenir compte de la variation de la vitesse de rotation de l'arbre dans les paliers de pied de bielle. Cette méthode a l'avantage d'être adaptée à des rapports L/D et des pressions d'alimentation quelconques. Les conditions

de Reynolds ne pouvant plus être employées, les auteurs ont utilisé les conditions aux limites de Gumbel en négligeant les pressions inférieures à une valeur fixée (pression de dégazage). La résolution numérique s'effectue avec la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation, permettant, pour un palier alimenté par une rainure circonférentielle, de déterminer le maximum de pression, la trajectoire du centre de l'arbre, la zone de rupture du film, le couple de frottement et le débit. Les méthodes graphiques ont été souvent utilisées pour déterminer les caractéristiques de fonctionnement dynamique des paliers, car elles offrent l'avantage de n'avoir peu recours aux moyens informatiques qui, il y a quelques vingtaines d'années, n'étaient pas très développés. En 1965, Booker [7] a établi une théorie appelée méthode de mobilité. Dans celle-ci, il décompose le mouvement de l'arbre en deux composantes, l'une en supposant que l'arbre a une vitesse de rotation nulle (effet d'écrasement), l'autre tenant compte des vitesses angulaires de l'arbre et de la charge (effet de rotation). Ces deux vitesses sont alors exprimées en fonction des composantes d'un vecteur appelé vecteur mobilité qui dépend, pour des conditions aux limites données, de la position de l'arbre par rapport à la charge et du rapport L/D . A partir de cette méthode de résolution, Booker a établi des cartes de mobilité composées de lignes d'isomobilité et de lignes de direction de mobilité. Il a développé sa méthode, tout d'abord en établissant une carte donnant le rapport du maximum de pression hydrodynamique à la charge spécifique. Cette carte permet de déterminer la pression maximale dans le film pour une charge et une position de l'arbre données.

Blok a développé à partir de 1967 une méthode de résolution utilisant la quantité de mouvement. Le principe est presque identique à celui de Booker, mais a l'avantage de déterminer les points d'excentricité maximale sans calculer toute la trajectoire du centre de l'arbre. Blok a estimé que l'épaisseur minimale du film est obtenue lorsque l'effet d'écrasement est important (charge élevée et rapport des vitesses de rotation du palier à la charge faible). Il a ainsi donné une approximation de l'excentricité maximum à partir du diagramme de charge.

En 1971, Booker [8] a appliqué numériquement sa méthode au cas des paliers de révolution (palier court ou palier de longueur finie). Le calcul est direct et ne nécessite pas d'itération sur la vitesse d'écrasement et sur la vitesse de rotation de la ligne des centres par rapport à la direction de la charge, ceci entraîne un gain de temps important tout en conduisant

à des résultats précis. Cette partie de l'étude bibliographique est tirée du travail de Maspeyrot [9] réalisé en 1989.

En 1980, Rohde et Ezzat ont utilisé la méthode de Booker pour l'étude d'une bague flottante dans un palier de moteur automobile. Avec un tel procédé, les pertes par frottement sont sensiblement diminuées. La solution de ce problème est alors équivalente à la résolution parallèle de deux paliers par la méthode de mobilité.

Moes et Bosma [10] en 1981 ont résolu l'équation de Reynolds en utilisant la méthode des différences finies. Le palier était de longueur et les conditions aux limites étaient celles de Gumbel ou de Sommerfeld. A partir de ces résultats, les auteurs ont pu établir des expressions analytiques approchées de la fonction de mobilité permettant un calcul direct de la trajectoire du centre de l'arbre. Moes, Sikkes et Bosma, en 1981 ont développé une méthode remplaçant les vecteurs de mobilité et impédance par des tenseurs. Cette méthode permet la résolution de palier à arc partiel et de palier à patins oscillants ou possédant des rainures d'alimentation. En 1982, Napel, Akker et Bosma ont analysé le comportement d'un palier de pied de bielle d'un moteur diesel soumis à des charges très élevées. Les vitesses de rotation de ces paliers sont en fait des oscillations autour d'une position, la charge étant unidirectionnelle et la valeur minimum du film d'huile tendant vers 0 (valeur confirmée par des mesures). Des conditions de frottement mixte apparaissent alors avec des risques d'usure très importante.

Goenka en 1984, a donné des expressions analytiques des composantes du vecteur mobilité dans le cas du palier de longueur finie. Ces expressions, semblables à celles données par Moes, sont plus précises à hautes excentricités. Il a pu évaluer les positions optimales d'un trou ou d'une rainure d'alimentation en donnant les expressions de la pression maximale, connaissant sa position et les angles définissant la zone de pression.

Tanneau [11], à partir de la méthode de Booker, a déterminé l'influence de rainures circonférentielles médianes et partielles pour un palier de tête de bielle de compresseur. Les résultats montrent que la trajectoire du centre de l'arbre à l'intérieur du coussinet est uniquement modifiée dans la zone des rainures.

En 1986, Childs, Moes et Van Leeuwen ont développé une méthode, utilisant le vecteur impédance (introduit par Blok) et le vecteur mobilité, pour calculer les coefficients de raideur et d'amortissement dans le cas d'un palier de rotor en régime dynamique.

Brewe en 1986, a étudié l'évolution du mélange liquide-vapeur dans un palier sous charge dynamique. L'équation de Reynolds est résolue numériquement avec l'algorithme d'Elrod (utilisation d'un volume de contrôle). Il a pu déterminer, pour des conditions de cavitation non stationnaire, la « durée de vie » des bulles de vapeur.

En 1989, Maspeyrot [9] a déterminé l'influence de certains défauts de forme (profil de l'arbre conique ou parabolique, mésalignement constant) sur les caractéristiques d'un palier de tête de bielle d'un moteur diesel.

En 1990, Paranjpe et Goenka [12] ont appliqué l'algorithme de conservation de la masse, à l'étude d'un palier de vilebrequin. Ce palier a été étudié d'abord sous charge statique puis sous charge dynamique. Les résultats obtenus, par Paranjpe et Goenka, avec l'algorithme de conservation de la masse ont été comparés à ceux obtenus avec les conditions aux limites de Reynolds. En 1992, Vijayaraghavan et Brewe [13] ont étudié la stabilité d'un palier fonctionnant sous une charge dynamique périodique de type sinusoïdale.

En 1993, Vijayaraghavan Brewe et Keith [14] ont étudié le palier de vilebrequin du moteur diesel Ruston et Hornsby avec un coussinet circulaire puis non circulaire (elliptique, semi-elliptique et à 3 lobes). La zone inactive et les effets d'inertie de la bielle sont pris en compte. Pour le palier circulaire, la hauteur minimale du film est plus importante que celle obtenue dans l'étude de Jones qui considère aussi les effets d'inertie.

Vincent en 1994 [15], a évalué les effets du type de rainure ainsi que la position de ces rainures sur les performances d'un palier de longueur finie sous charge statique et sous charge dynamique. Les deux types de rainures, axiales et circonférentielles, ont été étudiés. Pour le palier chargé dynamiquement, la méthode de mobilité de Booker a été utilisée pour la résolution numérique du problème. Cette même méthode a permis d'analyser des paliers de forme non circulaire [16]. Cette partie de l'étude bibliographique est tirée du travail de Nacer Tala Ighil [17] réalisé en 2007.

En 2001, Georgescu utilise le changement de variable d'Euler pour résoudre l'équation de Reynolds dans le cas de deux disques inclinés et en rotation. Ils procèdent ensuite à un changement de variable non linéaire afin de découpler l'équation de Reynolds. Ils utilisent la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème qui devient linéaire. Ils proposent deux types des solutions, l'une est exponentielle pour la première méthode et l'autre est un produit d'une fonction sinusoïdale avec la fonction de Bessel de premier ordre.

I.3 Etudes numériques non-newtoniennes

I.3.1. Définition et description

Par rapport au fluide newtonien la viscosité n'est pas constante. A chaque valeur du couple de contrainte et de taux de cisaillement $(\dot{\gamma}, \tau)$ correspond une valeur de la viscosité μ . Dès lors, on parle de viscosité apparente.

Les lois de comportement des fluides non newtoniens sont caractérisées par la composition du milieu (fluides multiphasés et fluides composés de différentes substances liquides ou solides). Chacune des phases (substances) fait intervenir différents caractères liés à son état de mouvement tels que viscosité, élasticité, plasticité, ainsi que l'influence de la température, l'effet régressif, etc. La prise en compte de l'ensemble de ces facteurs conduit alors aux lois de comportement non linéaires des fluides non newtoniens.

Les effets non-newtoniens peuvent être de deux sortes : les effets rhéofluidifiants et les effets viscoélastiques. Les effets rhéofluidifiants, souvent appelés simplement effets non-newtoniens, se traduisent par une variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement. Les effets viscoélastiques sont plus complexes, mais dans des termes simples, on peut affirmer que les fluides viscoélastiques ont une mémoire de leurs déformations. Il existe plusieurs modèles qui peuvent représenter le comportement viscoélastique. Parmi eux, le plus simple et le plus utilisé est le modèle de Maxwell, qui tient compte de deux paramètres : la viscosité et le temps de relaxation.

Gecim [18] présente en 1990 une excellente revue de la littérature surtout en ce qui concerne les effets rhéofluidifiants. A la suite, il montre quelques solutions techniques et des exemples pour le traitement des effets non-newtonien dans les paliers lisses. Une nouvelle loi constitutive, basé sur la loi de Cross, est développée. L'avantage de cette loi est le fait qu'elle possède un seul paramètre à ajuster (le coefficient de stabilité), par rapport à l'équation de Cross où on utilise trois paramètres. Dans le cas des paliers soumis à des charges statiques, des études comparatives sont faites, en utilisant plusieurs lois non newtoniennes (loi de Oswald, la viscosité newtonienne apparente, etc.).

L'effet rhéofluidifiant a été aussi considéré par Dien et Elrod [19], Tanner [20] et Wada et Hayashi [21]. Toutes ces études sont appliquées à des paliers sous charge statique.

En 1990, Rastogi et Gupta [22, 23] analysent l'importance des effets viscoélastiques dans les paliers soumis à des charges dynamiques. Le modèle de Maxwell est utilisé. Ils ont montré

une diminution de la capacité de charge des paliers en présence d'un comportement viscoélastique. Une année plus tard, les mêmes auteurs analysent l'importance des effets rhéofluidifiants dans les paliers dynamiques. La variation de la viscosité avec le taux de cisaillement est modélisée à partir d'une loi puissance.

En 1992, Paranjpe [24] propose une étude des paliers dynamiques qui prend en compte les effets non newtoniens.

Il considère aussi bien l'effet rhéofluidifiant que l'effet viscoélastique. L'équation de Reynolds est résolue par une discrétisation volumes finis. L'algorithme d'Elrod est utilisé pour modéliser les phénomènes de rupture et de reformation du film lubrifiant. L'auteur étudie le comportement d'un palier de tête de bielle et d'un palier de tourillon. Les déformations élastiques des surfaces ne sont pas considérées. Les résultats montrent surtout l'importance de l'effet rhéofluidifiant, qui réduit considérablement l'épaisseur minimale du film et la puissance dissipée et dans le même temps augmente la pression maximale et le débit de fuite. Dans les cas étudiés, l'effet viscoélastique ne montre pas d'influences sensibles sur les paramètres calculés. affirment que l'effet viscoélastique a tendance à réduire la variation de la pression avec le temps et donc à diminuer les pics de pression et les déformées élastiques.

Wang [25] a abordé aussi l'influence des effets rhéofluidifiants dans les paliers dynamiques. Les auteurs considèrent en parallèle avec le comportement non-newtonien une forme elliptique des paliers et des surfaces rugueuses. Cependant, les conséquences sont les mêmes : il en résulte une réduction significative de l'épaisseur minimale du film et de la puissance dissipée. Ils ajoutent le fait que le comportement non-newtonien a des effets plus importants que les surfaces rugueuses. Donc il existe plusieurs théories permettant de décrire l'écoulement de ces fluides complexes appelés fluides avec couple de contraintes, la théorie de Vijay Kumar Stokes [26] est la plus utilisée à cause de sa simplicité, elle permet de tenir compte de la taille des particules en mouvement. Il est intéressant de noter que le concept du couple de contrainte a été introduit par Voigt [27] dans la mécanique des milieux continue.

A cause de sa simplicité mathématique relative, le modèle du fluide avec couple de contrainte a été largement utilisé pour étudier plusieurs problèmes de la lubrification hydrodynamique : Lin [28,29] a étudié les effets du paramètre de couple de contrainte sur les caractéristiques du film amortisseur d'un palier à arc partiel long et d'un palier de longueur finie en appliquant la théorie des micros milieux continu de stokes. Les résultats théoriques obtenus montrent que la

présence du couple de contrainte fournit une amélioration de la capacité de charge et prolonge le temps de réponse du film amortisseur du système.

Oliver [30] a montré expérimentalement que la présence du polymère dissous dans les lubrifiants entraîne une augmentation de la capacité de charge du film lubrifiant et une diminution du coefficient de frottement. Dans une autre étude U. M. Mokhiamar, W. A. Crosby et H. A. El-Gamal [31] ont étudiés l'effet du paramètre de couple de contrainte sur les caractéristiques statiques d'un palier lisse en considérant l'élasticité du revêtement de surface, ils ont montré que l'augmentation du paramètre de couple de contrainte entraîne une augmentation du pic de pression et de la capacité de la charge portante, cette augmentation est plus importante à forte excentricité et une diminution de l'angle de calage et du coefficient de frottement alors que le débit de fuite n'est pas influencé, sauf pour les grande valeurs du coefficient d'élasticité.

Les résultats obtenus par Kabouya.A [32] montrent que la présence des additifs dans le lubrifiant a une influence non négligeable sur les performances statiques et dynamiques ainsi que la stabilité et la réponse dynamique du palier surtout pour les grandes valeurs du paramètre du couple de contrainte, c'est-à-dire dans le cas des polymères de longue chaîne moléculaire. Toutefois, leur influence sur le débit de fuite est négligeable sauf pour les grandes excentricités de fonctionnement.

I.4 Conclusion :

Dans un premier temps nous présenterons l'étude bibliographique que nous avons réalisée sur la lubrification hydrodynamique d'un palier lisse cette lubrification peuvent être par un fluide newtonien et non newtonien.

Le comportement du film lubrifiant dans un palier lisse est décrit par la théorie de la lubrification hydrodynamique présentée par Reynolds en 1886. L'équation des films minces visqueux dite aussi équation de Reynolds généralisée a été utilisée dès le début du XX^{ème} siècle pour le calcul des butées et des paliers. Sur la base de cette équation et en tenant compte de la variation des propriétés du lubrifiant et des conditions aux limites appropriées, on est en mesure d'étudier le comportement hydrodynamique de n'importe quel type de contact lubrifié.

L'amélioration du type de lubrifiant peut être une approche efficace à l'amélioration des performances d'un palier lisse. Comme une première approche, il serait intéressant dans le

cadre de ce travail, d'étudier le comportement dynamique non linéaire d'un palier lisse lubrifié par un fluide newtonien et non newtonien et les paramètres agissant sur se dernier.

II.1 Introduction :

Les paliers hydrodynamiques sont souvent utilisés pour le guidage et le support d'arbres de dimensions importantes. La configuration la plus simple est celle d'un palier cylindrique. Ce dernier est constitué d'un arbre et d'un alésage de rayons très voisins séparés généralement par un lubrifiant (Figure II.1)

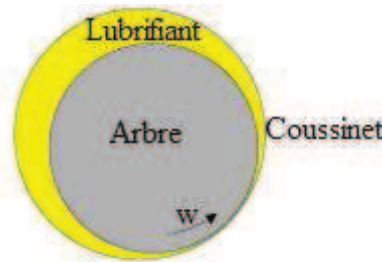


Fig. II.1. Schéma d'un Palier lisse.

La configuration géométrique d'un palier est définie grâce à trois grandeurs qui sont : sa longueur L , son diamètre D , ou son rayon R et le jeu radial C . Ce dernier paramètre représente le jeu qui existe entre l'arbre et le coussinet lorsque ces deux éléments sont coaxiaux ; il est déterminé par : $C = R_c - R_a$, R_c étant le rayon du coussinet et R_a le rayon de l'arbre.

Un palier lisse est caractérisé par trois grandeurs:

- ◆ le jeu radial C ;
- ◆ le jeu relatif $\frac{C}{R}$;
- ◆ le rapport $\frac{L}{D}$.

Sous l'application d'une charge, les centres du coussinet et de l'arbre ne coïncident plus et il existe un coin convergent divergent dans le film. La figure II.2 présente les trois phases que l'on observe lors de la mise en marche sous charge d'un palier lisse. A l'arrêt (figure II.2.a), l'arbre et le coussinet sont en contact, la génératrice commune est opposée à la charge et la distance $O_a O_c$ est égale au jeu radial C . Au démarrage (figure II.2.b), l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet, le régime de lubrification est dit mixte. Le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent par la rotation de l'arbre, et dès que la vitesse de rotation devient suffisante, il y a création d'un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la

charge et qui l'équilibre (figure. II.2.c). Pour une vitesse de rotation stable et une charge $|\vec{W}|$ constante, le centre de l'arbre O_a occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet définie par les coordonnées polaires (ε_0, ϕ_0) .

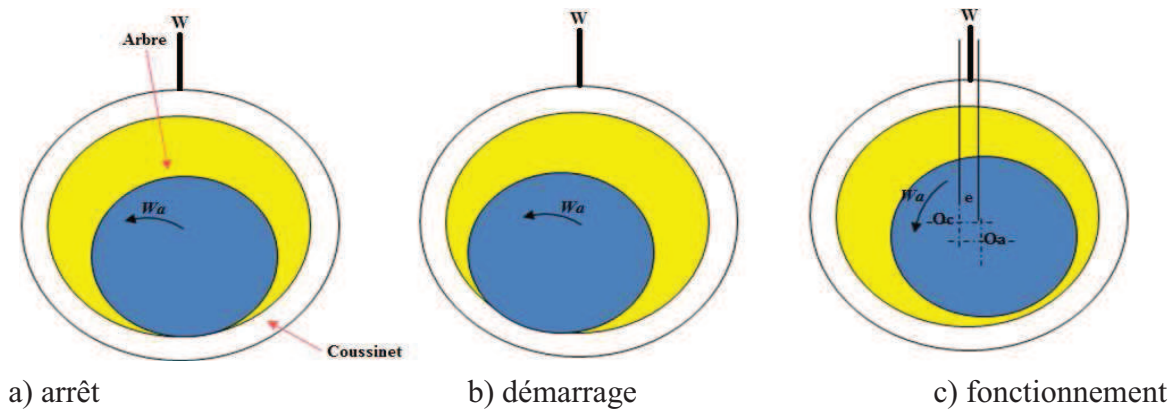


Fig II.2. Les positions de l'arbre observées lors de la mise en marche d'un palier lisse.

Si l'on rapporte l'ensemble des forces exercées sur l'arbre au centre O_a du palier, on obtient la capacité de charge \vec{F} du palier.

Lorsque le palier fonctionne sous des conditions normales, c'est-à-dire lorsqu'il est aligné (i.e. les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles), la géométrie du contact est alors définie par l'excentricité e (distance entre les centres de l'arbre O_a et du coussinet O_c) et l'angle de calage ϕ (angle entre la ligne des centres et la direction de la charge) (fig.II.1) [33].

Un palier lisse est généralement composé d'un arbre tournant et d'un coussinet fixe. La charge appliquée et la rotation de l'arbre conduit à son excentrement, les centres de l'arbre et du coussinet ne sont plus confondus, ce qui crée un convergent comme le montre la figure II.1. La surface de l'arbre, en rotation, entraîne du fluide dans ce convergent : il s'y crée alors une pression hydrodynamique qui équilibre la charge.

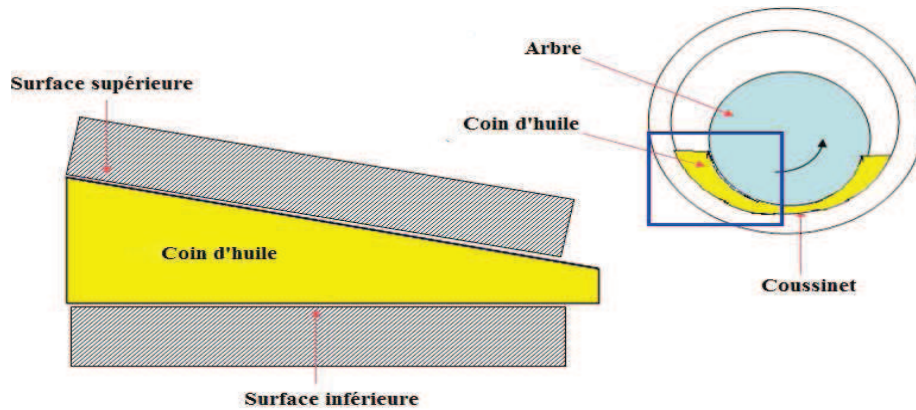


Fig II.3. Effet du coin d'huile d'un palier lisse.

Le champ de pression est calculé à partir de l'équation de Reynolds généralisée (**Annexe A**), obtenue à partir de la théorie des milieux continus, moyennant quelques hypothèses propres aux problèmes de lubrification on peut écrire l'équation des films minces visqueux qui est l'équation de base utilisée en lubrification. Les hypothèses classiques acceptées pour la modélisation de la lubrification sont les suivantes :

- Le milieu est continu,
- Le fluide est newtonien,
- L'écoulement est laminaire,
- Le film est un milieu continu et la zone de rupture est considérée comme un mélange homogène de fluide et de gaz,
- Les forces massiques extérieures et les forces d'inertie sont négligeables,
- Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact,
- L'épaisseur de film est très faible devant les autres dimensions du contact.

D'après la théorie de Vijay Kumar Stokes [26] les équations de base d'écrivent le mouvement des fluides non newtonien appelés fluides avec couple de contrainte (Couple-Stress fluids or polar fluids) dans le cas où les forces de volume et les couples de volume sont négligeables, sont la loi de conservation de la masse (II-1), la loi de conservation de la quantité de mouvement (II-2), aux quelles nous ajoutons une troisième équation .

- ◆ Loi de conservation de la masse

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.1})$$

- ◆ Loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (\text{II.2})$$

- ◆ Loi de comportement rhéologique

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda \Theta) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad (\text{II.3})$$

avec

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.4})$$

$i, j=1,2,3$

Dans ces équations :

x_i, t : variables d'espace et de temps; u_i : composantes de la vitesse d'écoulement ; b_i : forces massiques extérieures (gravité, etc.); ρ : masse volumique du fluide; σ_{ij} : tenseur des contraintes (symétrique); p : pression dans le fluide; δ_{ij} : le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

D_{ij} : tenseur des taux de déformation;

λ, μ : constantes de Navier qui sont respectivement les coefficients de viscosité de dilatation n'intervient plus et de cisaillement. μ est aussi appelée viscosité dynamique ou absolue du fluide.

$$\Theta = Dkk, \text{ le taux de dilatation cubique s'écrit : } \Theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Remarque :

Le régime d'écoulement étant isotherme, on ne tient donc pas compte de l'équation de conservation d'énergie.

$$\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j} + e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (\text{II.5})$$

Pour ce type de fluide, la loi du comportement rhéologique prend la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} - \frac{1}{2} e_{ijk} \frac{\partial M_{rk}}{\partial x_r} \quad (\text{II.6})$$

avec

$$M_{rk} = \frac{1}{3} M_{mm} \delta_{rk} + 4\eta \frac{\partial w_k}{\partial x_r} + 4\eta' \frac{\partial w_r}{\partial x_k} \quad (\text{II.7})$$

$$\omega_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad \text{ou} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}V} \quad (\text{II.8})$$

où e_{ijk} est le tenseur permutation, M_{ij} le tenseur des couples de contraintes dans le fluide, η et η' sont les constantes physiques responsables du couple des contraintes dans le fluide et ω_i les composantes du vecteur rotation ou du vecteur tourbillon $\vec{\omega}$.

II.2. Equations de mouvement

◆ Equations de Navier-Stokes

Les équations de mouvement pour un fluide incompressible avec couples de contraintes s'écrivent en prenant en considération les forces de volume et les couples de volume (figure II.3) :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{B} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\rho\vec{C}) + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} - \eta \vec{\nabla}^4 \vec{V} \quad (\text{II.9})$$

où les vecteurs V , B et C représentent respectivement le champ de vitesse, la force par unité de masse et le couple de volume par unité de masse.

En négligeant les forces et les couples de volume, l'équation (II.9) se réduit à :

$$\rho \left(u_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) - \eta \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} \right) - 2\eta \left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right) \quad (\text{II.10.a})$$

$$\rho \left(u_j \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) - \eta \left(\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4} \right) -$$

$$2\eta \left(\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right) \quad (\text{II.10.b})$$

$$\rho \left(u_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) - \eta \left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^4} \right) -$$

$$2\eta \left(\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right) \quad (\text{II.10.c})$$

j=1, 2, 3

II.3. Equations de mouvement pour un écoulement de films minces

Pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes des équations (II.10), on utilise les mêmes variables réduites comme dans le cas précédent auxquelles on rajoute $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}$ et

$$l_0 = \sqrt{\frac{\eta_0}{\mu_0}}$$

Compte tenu de ces changements de variable les équations (II.10) s'écrivent :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = -\varepsilon \tilde{\rho} R_h \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{\mu} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) - \tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h} \right)^2 \left(\varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2^4} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3^4} \right) -$$

$$2\tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h} \right)^2 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_3^2} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) \quad (\text{II.11.a})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = \varepsilon^2 \left(-\varepsilon \tilde{\rho} R_h \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{\mu} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) - \tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h} \right)^2 \left(\varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2^4} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3^4} \right) - \right.$$

$$\left. 2\tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h} \right)^2 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_3^2} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) \right) \quad (\text{II.11.b})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = -\varepsilon \tilde{\rho} R_h \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{\mu} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) - \tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h} \right)^2 \left(\varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2^4} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3^4} \right) -$$

$$2\tilde{\eta}\left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_2^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^2 \partial \tilde{x}_3^2} + \frac{\partial^4 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2^2 \partial \tilde{x}_3^2} \right) \quad (\text{II.11.c})$$

En négligeant les termes multipliés par ε^2 et ε^4 , il reste :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = -\varepsilon \tilde{\rho} R_h \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2^4} \quad i=1 \text{ et } 3 \quad (\text{II.12.a})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = 0 \rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) \quad (\text{II.12.b})$$

Si les forces d'inertie sont négligeables, il vient :

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} - \eta \frac{\partial^4 u_i}{\partial x_2^4} \quad (\text{II.13.a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{II.13.b})$$

II.4 Intégration des équations de mouvement :

◆ Détermination du champ de vitesse

Aux conditions de non glissement, on doit rajouter les conditions permettant l'annulation des couples de contraintes aux parois :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_2 = h \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.14})$$

Après intégration des équations de mouvement (II.13) avec l'utilisation des conditions aux limites sur la vitesse (II.14) et les conditions aux limites sur les dérivées secondes (II.14), les vitesses u_1 et u_3 s'expriment par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \left(x_2(x_2 - h) + 2l^2 \left(1 - \frac{ch \left(\frac{2x_2 - h}{2l} \right)}{ch \left(\frac{h}{2l} \right)} \right) \right) + \frac{u_{21} - u_{11}}{h} x_2 + u_{11} \\ u_3 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \left(x_2(x_2 - h) + 2l^2 \left(1 - \frac{ch \left(\frac{2x_2 - h}{2l} \right)}{ch \left(\frac{h}{2l} \right)} \right) \right) + \frac{u_{23} - u_{13}}{h} x_2 + u_{13} \end{array} \right. \quad (\text{II.15})$$

où $l = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$ paramètre du couple de contrainte dont la dimension est $[l] = \tilde{l}$.

Ce paramètre représente la longueur de la plus grande chaîne moléculaire du polymère.

II.5 Equation de Reynolds modifiée

En procédant de la même façon que dans le cas du fluide newtonien, les composantes du vecteur débit par unité de longueur suivant x_1 et x_3 pour un fluide non newtonien s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = -\frac{G(h,l)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{h}{2} (u_{11} + u_{21}) \\ q_3 = -\frac{G(h,l)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{h}{2} (u_{13} + u_{23}) \end{array} \right. \quad (\text{II.16})$$

$$\text{où } G(h,l) = h^3 - 12l^2h + 24l^3th \left(\frac{h}{2l} \right).$$

Alors l'équation de Reynolds modifiée s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{G(h,l)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{G(h,l)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h}{2} (u_{11} + u_{21}) \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h}{2} (u_{13} + u_{23}) \right) + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{II.17})$$

II.6 Equation de Reynolds modifiée pour un palier lisse

Les rayons R_a et R_c étant très voisins, on peut négliger la courbure du film et développer le coussinet (ou l'arbre) et l'assimiler à un plan (figure II.3).

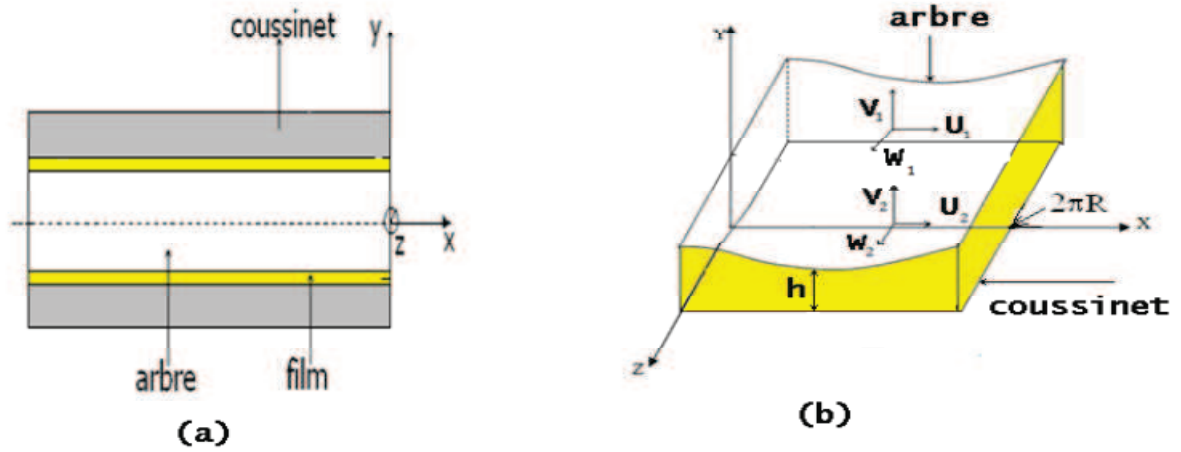


Fig. II.4. Palier (a) et film développé (b)

Les conditions cinématiques relatives aux surfaces (figure II.4), sont :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = w_1 = 0 \\ w_2 = 0 \end{cases} \quad \text{(Coussinet fixe)} \quad \text{(II.18)}$$

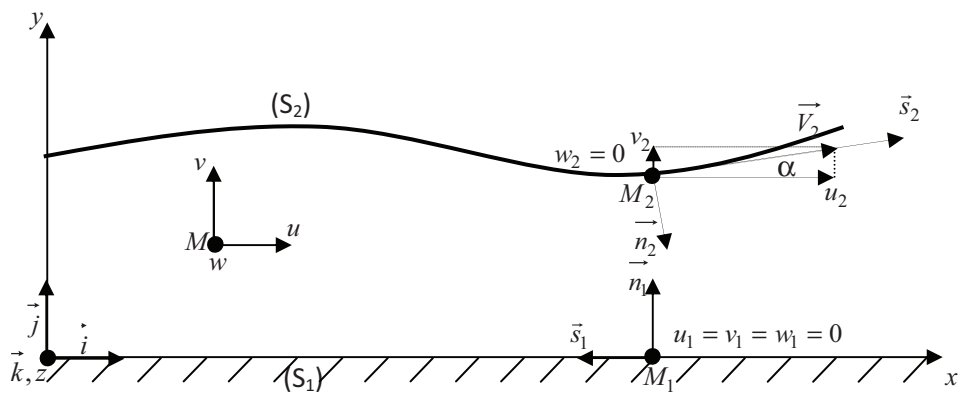


Fig. II.4. Section droite du palier développé.

En coordonnées cartésiennes et avec les conditions aux limites (II.18) l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide non newtonien (II.17) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G(h, l) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G(h, l) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left(\frac{\partial}{\partial x} (hu_2) - 2u_2 \frac{\partial h}{\partial x} + 2v_2 \right) \quad \text{(II.19)}$$

$$\text{où : } G(h, l) = h^3 - 12l^2h + 24l^3 th \left(\frac{h}{2l} \right) \text{ et } v_2 = u_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}$$

Remplacent x par $R\theta$ en obtient :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[G(h, \ell) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[G(h, \ell) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} + 6\mu \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (\text{II.20})$$

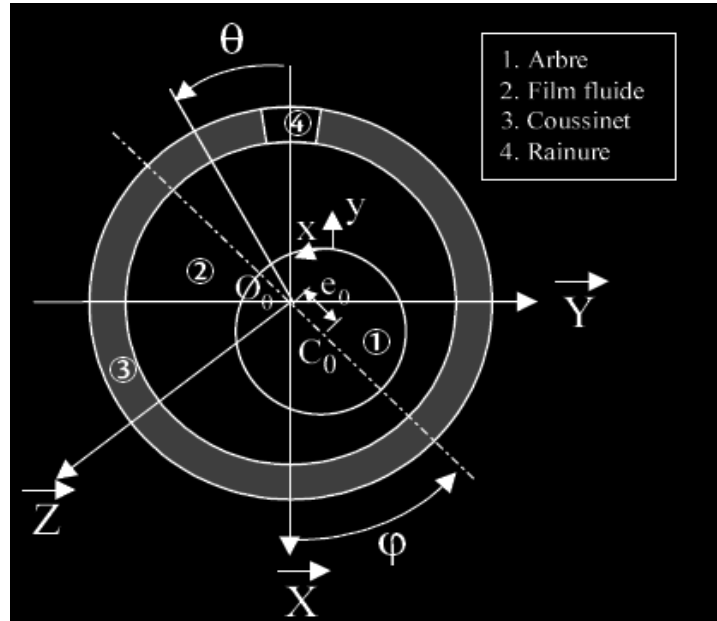


Fig II.5. Système d'axe [34].

II.7 Expression des composantes de la vitesse u_2 et v_2

Soient u_2 et v_2 les composantes (suivant les directions x et y) de vecteur vitesse \vec{V}_2 d'un point M_2 appartenant à la surface de l'arbre (S_2) (figure.II.4), tel que :

$$\vec{V}_2 = \vec{V}(M_2) = \vec{V}(O_a) + \overrightarrow{M_2 O_a} \wedge \vec{\omega}_a \quad (\text{II.21})$$

où $\vec{V}(O_a)$ est la vitesse du centre de l'arbre et $\vec{\omega}_a$ le vecteur rotation.

Dans le repère $(\vec{\varepsilon}, \vec{\phi}, \vec{z})$, on a :

$$\vec{V}(O_a) = \dot{\varepsilon} \vec{\varepsilon} + e \dot{\phi} \vec{\phi} = C \dot{\varepsilon} \vec{\varepsilon} + C \varepsilon \dot{\phi} \vec{\phi}$$

Dans le repère $(\vec{n}_2, \vec{s}_2, \vec{z})$, on peut écrire:

$$\overrightarrow{M_2 O_a} = -R \vec{n}_2$$

Expression de $(\vec{\varepsilon}, \vec{\phi}, \vec{z})$ en fonction de $(\vec{n}_2, \vec{s}_2, \vec{z})$

$$\vec{\varepsilon} = -\vec{n}_2 \cos(\theta - \alpha) + \vec{s}_2 \sin(\theta - \alpha)$$

$$\vec{\phi} = -\vec{n}_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha)\right) - \vec{s}_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha)\right)$$

Puisque $\alpha = \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right| \ll 1$, on peut écrire :

$$\vec{r} = -\vec{n}_2 \cos \theta + \vec{s}_2 \sin \theta$$

$$\vec{t} = -\vec{n}_2 \sin \theta - \vec{s}_2 \cos \theta$$

ou encore :

$$\begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon} \\ \vec{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{n}_2 \\ \vec{s}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

La vitesse de O_a dans le repère $(\vec{n}_2, \vec{s}_2, \vec{z})$ est :

$$\begin{aligned} \vec{V}(O_a) &= C\dot{\varepsilon}(-\vec{n}_2 \cos \theta + \vec{s}_2 \sin \theta) + C\varepsilon\dot{\phi}(-\vec{n}_2 \sin \theta - \vec{s}_2 \cos \theta) \\ \vec{V}(O_a) &= \vec{n}_2(-C\dot{\varepsilon} \cos \theta - C\varepsilon\dot{\phi} \sin \theta) + \vec{s}_2(C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon\dot{\phi} \cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

- Expression de $(\vec{n}_2, \vec{s}_2, \vec{z})$ en fonction de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{Bmatrix} \vec{n}_2 \\ \vec{s}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

on a alors :

$$\overrightarrow{M_2 O_a} = -R\vec{n}_2 = -R\vec{i} \sin \alpha + R\vec{j} \cos \alpha$$

$$\text{et } \overrightarrow{M_2 O_a} \wedge \vec{\omega}_a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin \alpha & R \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \omega_a \end{vmatrix} = \vec{i} \omega_a R \cos \alpha - \vec{j} R \omega_a \sin \alpha + \vec{k} 0$$

soit

$$\overrightarrow{M_2 O_a} \wedge \vec{\omega}_a = R \omega_a (\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \quad (\text{II.25})$$

En utilisant la matrice de passage (II.25), la vitesse du centre de l'arbre O_a dans le repère (x, y, z) est :

$$\vec{V}(O_a) = (\sin \alpha \dot{i} - \cos \alpha \dot{j}) (-C\dot{\varepsilon} \cos \theta - C\varepsilon \dot{\phi} \sin \theta) + (\cos \alpha \dot{i} + \sin \alpha \dot{j}) (C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon \dot{\phi} \cos \theta)$$

Comme α est très petit, la vitesse du point M_2 dans le repère (x, y, z) est :

$$\begin{aligned} \vec{V}(M_2) = & \dot{i} \left(-C\dot{\varepsilon} \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - C\varepsilon \dot{\phi} \sin \theta \frac{\partial h}{\partial x} + C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon \dot{\phi} \cos \theta + R\omega_a \right) \\ & + \dot{j} \left(+C\dot{\varepsilon} \cos \theta + C\varepsilon \dot{\phi} \sin \theta + C\dot{\varepsilon} \sin \theta \frac{\partial h}{\partial x} - C\varepsilon \dot{\phi} \sin \theta \frac{\partial h}{\partial x} + R\omega_a \frac{\partial h}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

D'où les expressions des composantes du vecteur vitesse \vec{V}_2 suivant les directions \dot{i} et \dot{j} :

$$\begin{aligned} u_2 &= \omega_a R + C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon \dot{\phi} \cos \theta - \frac{\partial h}{\partial x} (C\dot{\varepsilon} \cos \theta + C\varepsilon \dot{\phi} \sin \theta) \\ v_2 &= \omega_a R \frac{\partial h}{\partial x} + C\dot{\varepsilon} \cos \theta + C\varepsilon \dot{\phi} \sin \theta + \frac{\partial h}{\partial x} (C\dot{\varepsilon} \sin \theta - C\varepsilon \dot{\phi} \cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

En régime permanent, les composantes du vecteur vitesse \vec{V}_2 se réduisent à :

$$\begin{cases} u_2 = \omega_a R \\ v_2 = \omega_a R \frac{\partial h}{\partial x} = u_2 \frac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

II.8 Conditions aux limites

II.8.a Conditions liées à l'alimentation et à l'environnement

Dans notre étude, on s'intéresse à un palier lisse de longueur finie alimenté par une rainure axiale, on a donc :

$$p = p_{\text{alimentation}} \text{ dans la rainure d'alimentation du palier ;} \quad (\text{II.30})$$

$$p = p_{\text{atmosphérique}} \text{ aux extrémités } (z = \pm \frac{L}{2}) \text{ du palier.}$$

La pression de référence est la pression atmosphérique p_a .

II.8.b Conditions liées à l'écoulement du fluide lubrifiant

On note que la géométrie du film est convergente puis divergente, il peut y avoir rupture du film (cavitation) dans l'espace divergent lorsque la pression devient inférieure à la pression atmosphérique. Les conditions limites relatives à cette situation sont :

- *Conditions de Gumbel ou de demi-Sommerfeld (1921):*

Gumbel [35] impose entre $\theta = \pi$ et $\theta = 2\pi$, l'annulation des termes de pression négatifs. Il est à noter que ces conditions entraînent en $\theta = \pi$ une discontinuité dans l'écoulement et ne permettent pas de vérifier la conservation du débit entre les zones active et inactive du palier.

$$\begin{aligned} p_0(\theta = 0, z) &= 0 \\ p_0(\theta = \pi, z) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

$$p_0(\theta, z) = 0 \quad \text{si } \pi < \theta < 2\pi$$

Cette solution est fréquemment employée pour les paliers courts car elle permet d'obtenir des résultats proches des résultats expérimentaux et elle conserve à l'équation de Reynolds son caractère linéaire.

- *Conditions de Reynolds ou de Swift-Stieber [36]* Ces conditions respectent la continuité du débit et la rupture du film. Elles supposent que pour une abscisse inconnue θ_{c0} , la pression et le gradient de pression s'annulent.

$$\begin{aligned} p_0(\theta = 0, z) &= 0 \\ p_0(\theta = \theta_{c0}, z) &= 0 \\ \frac{\partial p_0}{\partial \theta}(\theta = \theta_{c0}, z) &= \frac{\partial p_0}{\partial z}(\theta = \theta_{c0}, z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II. 32})$$

Cependant, ces conditions ne satisfont pas à la reformation du film, et leur utilisation nécessite la détermination d'une inconnue supplémentaire θ_{c0} qui est l'angle de cavitation.

Ainsi, $\theta = \theta_{c0}$ délimite une frontière inconnue entre les zones actives et inactives du film lubrifiant :

- ◆ la zone active se caractérise par une pression positive dans le film ;

dans la zone inactive, l'écoulement est en fait un mélange d'air et de lubrifiant et la pression dans cette région est voisine de la pression de vapeur saturante du fluide, pression très proche de la pression atmosphérique

Si $\theta_{c0} \leq \theta \leq 2\pi$

II.9 Equation géométrique du film

Pour un palier rigide comme celui de la Figure II.4 l'épaisseur du film est définie par une équation géométrique [37]

$$h(\theta) = C - e_x \cos(\theta) - e_y \sin(\theta) \quad (\text{II.33})$$

C étant le jeu radial du palier ($C = R_c - R_a$)

e_x, e_y Les coordonnées du centre de l'arbre par rapport au centre de et $O_c O_a$ la position angulaire du point considéré.

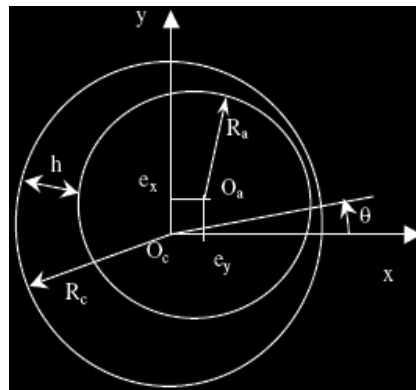


Fig. II.6. Palier circulaire.

II.10 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a rappelé les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus écrites pour un fluide incompressible dont le comportement non newtonien .L'utilisation des hypothèses d'un écoulement de films minces visqueux permet de simplifier les équations de mouvement. L'intégration de ces équations permet d'obtenir le champ des vitesses de l'écoulement. La procédure de dérivation de l'équation de Reynolds modifiée dans le cas du

fluide polaire est identique à celle utilisée par Reynolds pour la dérivation de l'équation de Reynolds classique dans le cas de fluides newtoniens. Il est intéressant de noter que l'utilisation de la théorie de V. K. Stokes pour décrire l'écoulement des fluides polaires permet de conserver le caractère linéaire de l'équation hydrodynamique appelée équation de Reynolds modifiée. En plus nous avons développé et présenté les équations de bases permettant de calculer les performances statiques et dynamiques d'un palier lisse de longueur finie lubrifié par un fluide non newtonien et fonctionnant en régime hydrodynamique

III.1. Introduction

Le système doit être en équilibre à chaque moment. Cet équilibre peut s'écrire Vectoriellement en prenant en compte les forces extérieures agissant sur le palier, la force résultante des actions de la pression hydrodynamique et les forces d'inertie des solides en mouvement. Dans le cas d'un palier, les forces extérieures agissant sur le coussinet sont constituées par la résultante de la pression dans le film fluide dans le palier et des forces d'inertie en mouvement. Dans le système d'axes de la Figure III.1 cet équilibre se traduit par les équations les forces hydrodynamiques selon la direction axiale et verticale.

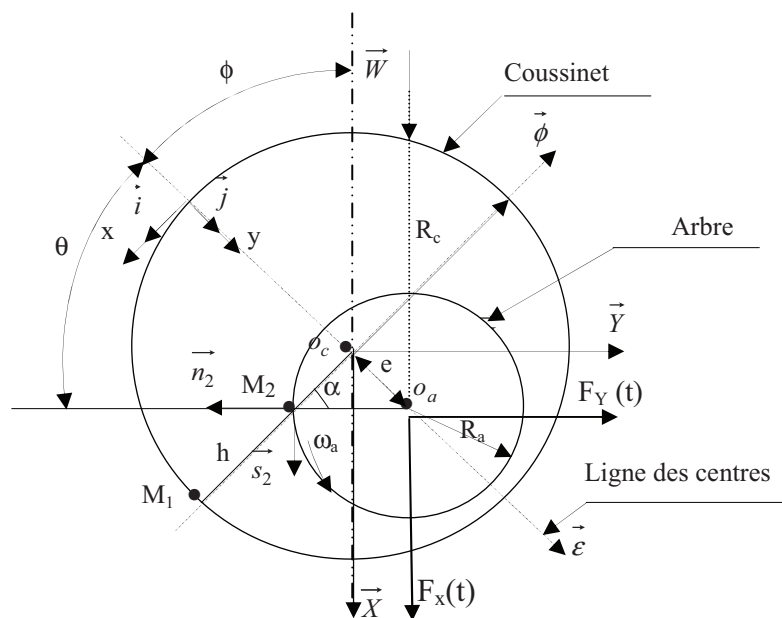


Fig. III.1 : Configuration d'un palier lisse

Dans ce paramétrage, la position, la vitesse et l'accélération du centre de l'arbre s'expriment :

- Position du centre de l'arbre :

$$\vec{O}_c O_a = C \vec{\varepsilon} \quad (III.1)$$

- Vitesse du centre de l'arbre:

$$\vec{V}(O_a) = \frac{d}{dt} \left(\vec{O}_c O_a \right)$$

$$V(\vec{O}_a) = C \left[\left(\begin{array}{c} \dot{\varepsilon} \cos \phi - \varepsilon \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\varepsilon} \sin \phi + \varepsilon \dot{\phi} \cos \phi \end{array} \right) \vec{x} + \left(\begin{array}{c} \dot{\varepsilon} \sin \phi + \varepsilon \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{\varepsilon} \cos \phi - \varepsilon \dot{\phi} \sin \phi \end{array} \right) \vec{y} \right] \quad (\text{III.2})$$

- Accélération du centre de l'arbre

$$\vec{\Gamma}(O_a) = \frac{d^2}{dt^2} (O_c \vec{O}_a)$$

$$\vec{\Gamma}(O_a) = C \left[\left(\begin{array}{c} \ddot{\varepsilon} \cos \phi - \varepsilon \ddot{\phi} \sin \phi - 2\dot{\varepsilon} \dot{\phi} \sin \phi - \varepsilon \dot{\phi}^2 \cos \phi \\ \ddot{\varepsilon} \sin \phi + 2\dot{\varepsilon} \dot{\phi} \cos \phi + \varepsilon \ddot{\phi} \cos \phi - \varepsilon \dot{\phi}^2 \sin \phi \end{array} \right) \vec{x} + \left(\begin{array}{c} \ddot{\varepsilon} \sin \phi + 2\dot{\varepsilon} \dot{\phi} \cos \phi + \varepsilon \ddot{\phi} \cos \phi - \varepsilon \dot{\phi}^2 \sin \phi \\ \ddot{\varepsilon} \cos \phi - \varepsilon \ddot{\phi} \sin \phi - 2\dot{\varepsilon} \dot{\phi} \sin \phi - \varepsilon \dot{\phi}^2 \cos \phi \end{array} \right) \vec{y} \right] \quad (\text{III.3})$$

III.2 Equation géométrique du film dans le palier :

Le palier auquel nous nous intéressons dans cette étude est un palier lisse qui comporte une seule rainure d'alimentation, axiale. Afin que la modélisation du palier soit plus aisée, nous considérerons que la rainure d'alimentation a une longueur équivalente à celle du palier. Si l'on rapporte l'ensemble des forces exercées sur l'arbre au centre O_0 du palier, on obtient la capacité de charge W du palier. Lorsque le palier fonctionne sous des conditions normales, c'est-à-dire lorsqu'il est aligné, Si l'on caractérise par θ la position angulaire d'un point quelconque de la surface du coussinet, on obtient l'équation de l'épaisseur du film en tout point du palier :

où :

$$h(\theta, t) = C + X(t) \cos \theta + Y(t) \sin \theta \quad (\text{III.4})$$

Equation de Reynolds modifié en régime permanent :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[G(h, \ell) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[G(h, \ell) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6\mu \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (\text{III.5})$$

et

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -X(t) \sin \theta + Y(t) \cos \theta \quad (\text{III.6})$$

III.2.a Conditions aux limites sur la pression statique

Pour résoudre l'équation de Reynolds modifié (III.5) afin de déterminer le champ de pression statique \tilde{p} , il est nécessaire d'appliquer des conditions aux limites particulières sur la pression, qui permettront de simuler au plus près la réalité.

Le champ de pression dans le fluide lubrifiant doit satisfaire à l'équation de Reynolds et aux conditions aux limites, ces conditions peuvent être classées en trois catégories :

- Conditions liées à l'alimentation du palier (rainure, alvéole, orifice d'alimentation) ;
- conditions liées à l'environnement dans lequel fonctionne le palier (pression atmosphérique, etc.) ;
- conditions liées à l'écoulement du fluide dans le palier (film complet, film rompu).

III. 3 Charge portante et angle de calage

Pour le calcul de la charge portante et l'angle de calage, nous devons intégrer le champ de pression à la surface de l'arbre.

L'équilibre statique de l'arbre permet d'écrire :

$$\vec{F} + \vec{W} = \vec{0} \quad (\text{III.7})$$

où :

\vec{W} : Charge extérieure appliquée ;

\vec{F} Portance (action du fluide sur l'arbre).

En projetant l'équation (III-7) dans le système d'axes (\vec{x}, \vec{y}) , nous obtenons :

$$\begin{cases} W \cos \phi + F_x = 0 \\ -W \sin \phi + F_y = 0 \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} p(\theta, z) \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} R dz d\theta \quad (\text{III.9})$$

F_x et F_y sont les composantes de la charge portante dans les directions \vec{X} et \vec{Y} .

En variables réduites elles s'écrivent :

avec :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_X \\ \tilde{F}_Y \end{Bmatrix} = \frac{\mu\omega R^3 L}{C^2} \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

- L'angle de calage

$$\phi = \text{arc tg} \left(\frac{\tilde{F}_X}{\tilde{F}_Y} \right) \quad (\text{III.11})$$

III.4 Forces de frottement

Les valeurs des forces de frottement sont calculées à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} F_a = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \tau_a R dz d\theta \\ F_c = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \tau_c R dz d\theta \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

où :

$$\begin{aligned} \tau_a = \tau \Big|_{y=h} &= \mu_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} - \eta_0 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{y=h} = \mu_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=h} \\ \tau_c = \tau \Big|_{y=0} &= \mu_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - \eta_0 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{y=0} = \mu_0 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Nous remarquons que les contraintes de cisaillement au niveau des parois s'expriment de la même manière que pour les fluides newtoniens, et ceci parce que les couples de contraintes au niveau des parois sont nuls.

Après dérivation du terme de la vitesse u (II.15), et en remplaçant dans (III.12), il vient :

$$\begin{cases} F_a = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \mu_0 \left[\frac{U_2}{h} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \left(h - 2\ell \operatorname{th} \left(\frac{h}{2\ell} \right) \right) \right] R d\theta dz \\ F_c = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \mu_0 \left[\frac{U_2}{h} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \left(h - 2\ell \operatorname{th} \left(\frac{h}{2\ell} \right) \right) \right] R d\theta dz \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Soit en utilisant les variables réduites :

$$\begin{cases} \tilde{F}_a = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{1}{\tilde{h}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \left(\tilde{h} - 2\tilde{\ell} \operatorname{th} \left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{\ell}} \right) \right) \right] d\theta d\tilde{z} \\ \tilde{F}_c = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{1}{\tilde{h}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \left(\tilde{h} - 2\tilde{\ell} \operatorname{th} \left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{\ell}} \right) \right) \right] d\theta d\tilde{z} \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

avec :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_a \\ \tilde{F}_c \end{Bmatrix} = \frac{C}{\mu_0 \omega R^2 L} \begin{Bmatrix} F_a \\ F_c \end{Bmatrix}$$

Les nombres de frottement sont définis par :

$$f_a = \frac{\tilde{F}_a}{\tilde{F}} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{\tilde{F}_c}{\tilde{F}}$$

Où :

$$\tilde{F} = \sqrt{\tilde{F}_x^2 + \tilde{F}_y^2} \quad \text{est le module de la charge portante.}$$

III.5 Vitesses moyennes de l'écoulement

Les vitesses moyennes sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_m = \frac{1}{h} \int_0^h u \, dy = \frac{\omega R}{2} - \frac{G(h, \ell)}{12\mu_0} \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} \\ w_m = \frac{1}{h} \int_0^h w \, dy = -\frac{G(h, \ell)}{12\mu_0} \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Les vitesses moyennes adimensionnées s'écrivent :

$$\begin{cases} \tilde{u}_m = \frac{u_m}{\omega R} = \frac{1}{2} - \frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{12\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \\ \tilde{w}_m = \frac{L w_m}{\omega R^2} = -\frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{12\tilde{h}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

III.6 Le débit volumique

Dans le cas où les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles (palier aligné) la pression est symétrique nous avons donc: $q^+ = q^-$ et $q = 2q^+ = 2q^-$

A l'extrémité ($z = L/2$), le débit s'exprime :

$$q^+ = \int_{S \perp z} w \Big|_{z=L/2} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^h w \Big|_{z=L/2} R \, dy \, d\theta \quad (\text{III.18})$$

Pour un fluide non-newtonien la vitesse w est donnée par la relation

$$\left\{ w = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ y(y-h) + 2\ell^2 \left[1 - \frac{c h \left(\frac{2y-h}{2\ell} \right)}{c h \left(\frac{h}{2\ell} \right)} \right] \right\} \right\} \quad (\text{III.19})$$

par rapport à y le débit devient :

$$q^+ = \left| \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu_0} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=L/2} G(h, \ell) \, dz \, d\theta \right| \quad (\text{III.20})$$

Le débit adimensionné s'écrit :

$$\tilde{q}^+ = \left| \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{12} \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\frac{1}{2}} \right] d\theta \right| \quad (\text{III.21})$$

où :

$$\tilde{q}^+ = \frac{L}{\omega R^3 C} q^+$$

Le gradient de pression axial à l'extrémité du palier est calculé en approchant la courbe de pression au voisinage de l'extrémité du palier par un polynôme du deuxième degré ou du troisième degré.

- *Approximation par un polynôme du second degré*

$$\tilde{p} = a_1 + a_2 \tilde{z} + a_3 \tilde{z}^2$$

soit le système suivant :

$$\begin{cases} \tilde{p}_1 = a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 \\ \tilde{p}_2 = a_1 + \left(\frac{1}{2} - \Delta\tilde{z}\right)a_2 + \left(\frac{1}{2} - \Delta\tilde{z}\right)^2 a_3 \\ \tilde{p}_3 = a_1 + \left(\frac{1}{2} - 2\Delta\tilde{z}\right)a_2 + \left(\frac{1}{2} - 2\Delta\tilde{z}\right)^2 a_3 \end{cases}$$

La solution de ce système permet de définir les constantes a_1 , a_2 et a_3 . Le gradient de pression axiale est donné par :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\frac{1}{2}} = \frac{4\tilde{p}_3 - \tilde{p}_2}{2\Delta\tilde{z}}$$

L'équation du débit (III.21) devient :

$$\tilde{q}^+ = -\frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{12} \int_0^{2\pi} \left(\frac{4\tilde{p}_3 - \tilde{p}_2}{2\Delta\tilde{z}} \right) d\theta \quad (\text{III.22})$$

- *Approximation par un polynôme du troisième degré*

\tilde{p} est remplacé par un polynôme de degré trois :

$$\tilde{p} = a_1 + a_2 \tilde{z} + a_3 \tilde{z}^2 + a_4 \tilde{z}^3$$

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \tilde{p}_1 = a_1 + a_2 \frac{1}{2} + a_3 \frac{1}{4} + a_4 \frac{1}{8} \\ \tilde{p}_2 = a_1 + a_2 \left(\frac{1}{2} - \Delta\tilde{z}\right) + a_3 \left(\frac{1}{2} - \Delta\tilde{z}\right)^2 + a_4 \left(\frac{1}{2} - \Delta\tilde{z}\right)^3 \\ \tilde{p}_3 = a_1 + a_2 \left(\frac{1}{2} - 2\Delta\tilde{z}\right) + a_3 \left(\frac{1}{2} - 2\Delta\tilde{z}\right)^2 + a_4 \left(\frac{1}{2} - 2\Delta\tilde{z}\right)^3 \\ \tilde{p}_4 = a_1 + a_2 \left(\frac{1}{2} - 3\Delta\tilde{z}\right) + a_3 \left(\frac{1}{2} - 3\Delta\tilde{z}\right)^2 + a_4 \left(\frac{1}{2} - 3\Delta\tilde{z}\right)^3 \end{cases}$$

La solution de ce système nous donne les valeurs des coefficients a_1, a_2, a_3 et a_4 . Le gradient de pression axial est donné par :

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=\frac{1}{2}} = \frac{18\tilde{p}_2 - 9\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4}{6\Delta\tilde{z}}$$

En remplaçant dans l'équation du débit (III.21) nous aboutissons à :

$$\tilde{q}^+ = -\frac{1}{12\Delta\tilde{z}} \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \int_0^{2\pi} (18\tilde{p}_2 - 9\tilde{p}_3 + 2\tilde{p}_4) d\theta \quad (\text{III.23})$$

- 2^{ème} méthode

$$q_m = \left| \int_0^{2\pi} \int_0^h w_m \Big|_{z=-\frac{L}{2}} R dy d\theta \right| + \left| \int_0^{2\pi} \int_0^h w_m \Big|_{z=\frac{L}{2}} R dy d\theta \right| \quad (\text{III.24})$$

Après intégration par rapport à y , le débit s'écrit :

$$q_m = 2 \left| \int_0^{2\pi} h w_m \Big|_{z=\frac{L}{2}} R d\theta \right|$$

En variables adimensionnées nous obtenons :

$$\tilde{q}_m = 2 \left| \int_0^{2\pi} \tilde{h} \tilde{w}_m \Big|_{\tilde{z}=\frac{1}{2}} d\theta \right| \quad (\text{III.24})$$

En remplaçant \tilde{w}_m (Eq. III.17), par sa valeur il vient :

$$\tilde{q}_m = \left| -\frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} d\theta \right| \quad (\text{III.25})$$

III.7 Conclusion

L'objectif de cette partie est d'utiliser les éléments de base de la modélisation des paliers lisse cylindrique afin de se concentrer sur l'étude de leur comportement statique .Donc nous avons établi les relations permettant de déterminer les différentes performances statiques d'un palier lisse à savoir la portance, l'angle de calage, les forces de frottement, les vitesses moyennes de l'écoulement ainsi que le débit volumique. Les intégrales des caractéristique statique son évaluée à l'aide de la formule des trapèzes généralisée.

IV.1. Introduction

La conception, la fabrication et l'exploitation des paliers lisses nécessitent une très bonne connaissance des équations qui régissent leur fonctionnement. La majorité de tous les paramètres nécessaires à l'étude de leur comportement sont déduits à partir de l'analyse Hydrodynamique (HD) du mouvement du fluide qui s'intercale entre les deux surfaces très proches l'une de l'autre.

Le traitement d'un problème HD, fortement non linéaire, nécessite la résolution simultanée de trois équations :

- Le comportement du fluide dans le contact : évaluer le champ de pression qui résulte d'une géométrie de film et d'une cinématique donnée (équation de Reynolds).
- L'équilibre de l'arbre : évaluer la position de l'arbre dans le logement : équation de la dynamique ou de la statique dans laquelle intervient la résultante des actions de pression.
- L'épaisseur du film : évaluer l'épaisseur du film en considérant la position de l'arbre dans le logement contact (équation de l'épaisseur).

Des travaux précédents sur les paliers hydrodynamiques [38, 39, 40,41] ont montré que l'analyse linéaire du comportement dynamique n'est pas suffisante ; en particulier lorsque les charges deviennent trop importantes ou lorsque le palier fonctionne dans une zone instable. Peut présenter certaines non-linéarités, qu'il convient d'étudier avec une approche adaptée.

IV.2 Mise en équations

Dans de nombreuses applications industrielles, la charge extérieure qui agit sur l'arbre résulte de la superposition du poids, de l'effet du balourd et de charges dynamiques, la direction et quelconque. En conséquence, la direction et le module de la force appliquée au palier ne sont pas constants et donc l'arbre décrit une trajectoire à l'intérieur du coussinet. La détermination de cette trajectoire nécessite la résolution des équations de la dynamique, donc la connaissance de l'action hydrodynamique dans le film. La principale difficulté provient du fait que les forces générées par le palier dépendent de la position inconnue de l'arbre dans le coussinet et des vitesses des surfaces qui prennent en compte la vitesse inconnue du centre de l'arbre.

Comme précédemment, la ligne d'arbre est assimilée à un rotor rigide symétrique supporté de façon symétrique par deux paliers lisse identiques (voir figure IV.1)

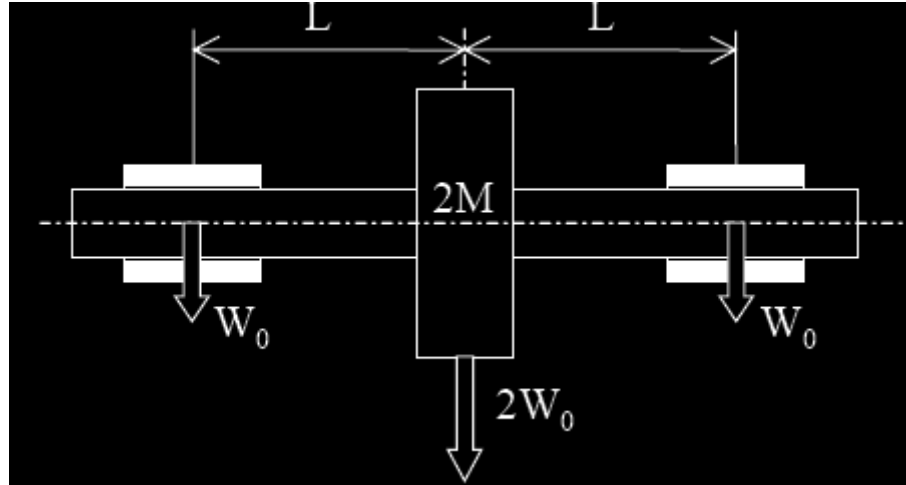


Fig. IV.1 : Schématisation de la configuration de rotor pour l'étude de la stabilité

L'application du principe fondamental de la dynamique au mouvement de l'arbre permet d'écrire :

$$\overrightarrow{Mg} + \overrightarrow{F}(t) + \overrightarrow{W}_b(t) = \overrightarrow{M\gamma} \quad (\text{IV.1})$$

La projection de l'équation vectorielle (IV.1) sur les axes \overline{OX} et \overline{OY} donne

$$\begin{cases} M\ddot{X} = Mg + F_x(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) + Me_b\omega^2 \cos(\omega t) \\ M\ddot{Y} = F_y(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) + Me_b\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

A chaque palier est attribuée une masse M du rotor, les types de charges agissant sur l'arbre sont :

- Charge statique représentée par le poids du rotor affecté au palier $W_0 = Mg$;
- Charge dynamique représentée par la force due au Balourd $W_b(t)$ (excitation dynamique synchrone, $\nu = \omega$) caractérisée par l'excentricité e_b dont le module est : $|\overrightarrow{W}| = M.e_b\omega^2$ (Fig.IV.1).

- Forces d'inertie $M\ddot{X}$ et $M\ddot{Y}$

La résolution du système d'équations du mouvement (IV.2), permet alors d'obtenir la trajectoire du rotor dans le palier.

Les composantes de la portance hydrodynamique F_X et F_Y calculés à partir du champ de pression obtenue par l'intégration de l'équation de Reynolds modifié écrite en régime dynamique (IV.3).

Dans la configuration d'un palier développé (figure IV.1) selon [42] on a :

- La surface inférieure fixe,
- Pas de déplacement de l'arbre suivant sa longueur,
- Pas de mésalignement,
- Jeu faible.

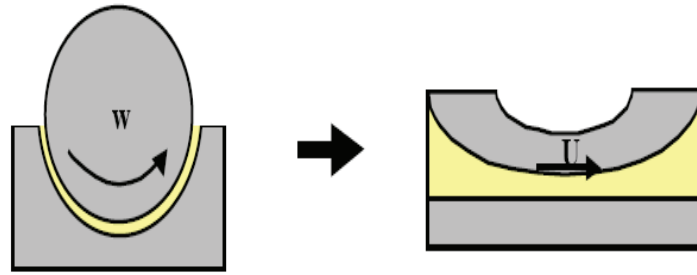


Fig. IV.2 Palier et son développé à modéliser.

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[G(h, \ell) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[G(h, \ell) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} + 6\mu \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{et : } G(h, \ell) = h^3 - 12\ell^2 h + 24\ell^3 \text{th} \left(\frac{h}{2\ell} \right)$$

En remplaçant les variables réduites dans l'équation de Reynolds (IV.3) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right] = 12 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} + 6 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} \quad (\text{IV.4})$$

Avec :

$$\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) = \tilde{h}^3 - 12 \tilde{\ell}^2 \tilde{h} + 24 \tilde{\ell}^3 \text{th} \left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{\ell}} \right) \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{Avec } \lambda = \left(\frac{R}{L}\right)^2$$

En régime dynamique l'équation de Reynolds normalisée s'écrit aussi sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \theta^*} \left[\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta^*} \right] + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right] = 12(\tilde{X}' \cos \theta^* + \tilde{Y}' \sin \theta^*) + 6(-\tilde{X} \sin \theta^* + \tilde{Y} \cos \theta^*) \quad (\text{IV.6})$$

avec

$$\tilde{h} = 1 + \tilde{X} \cos \theta^* + \tilde{Y} \sin \theta^* \quad (\text{IV.7})$$

L'équation (IV.7) représente l'équation géométrique du film dans le cas du palier parfait

(aligné). La connaissance à un instant donné de $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{X}' = \frac{d\tilde{X}}{d\tau}, \tilde{Y}' = \frac{d\tilde{Y}}{d\tau}$ permet de

calculer $\tilde{h}, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau}$ et de rechercher le champ de pression qui, une fois intégré sur le domaine fluide,

donne les valeurs de \tilde{F}_X et \tilde{F}_Y :

$$\begin{cases} \tilde{F}_X(\tau) \\ \tilde{F}_Y(\tau) \end{cases} = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{\theta_1^*}^{\theta_2^*} \tilde{p}(\theta^*, \tilde{z}, \tau) \begin{cases} \cos \theta^* \\ \sin \theta^* \end{cases} d\theta^* d\tilde{z} \quad (\text{IV.8})$$

qui sont les composantes de la portance hydrodynamique adimensionnées.

En divisant les équations (IV.8) par $MC\omega^2$, les équations de mouvement deviennent

$$\begin{cases} \tilde{X}'' = \alpha_1 + \alpha_2 \tilde{F}_X(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{X}', \tilde{Y}') + \varepsilon_b \cos(\tau) \\ \tilde{Y}'' = \alpha_2 \tilde{F}_Y(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{X}', \tilde{Y}') + \varepsilon_b \sin(\tau) \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

Les équations (IV.9) constituent un système de deux équations différentielles non linéaires du second ordre dont la solution doit être recherchée à l'aide d'une méthode d'intégration numérique.

IV.3 Résolution des équations de mouvement

Lorsque la force dynamique est importante, il faut résoudre le système non linéaire constitué par les équations précédentes.

Le système différentiel (IV.9) peut être résolu par une méthode d'intégration explicite d'Euler car la convergence est rapide et peut se présenter de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{X}'(\tau + \Delta\tau) = \tilde{X}'(\tau) + \tilde{X}''(\tau)\Delta\tau \\ \tilde{X}(\tau + \Delta\tau) = \tilde{X}(\tau) + \tilde{X}'(\tau)\Delta\tau \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

Le déplacement et la vitesse selon Y sont obtenues de même façon.

Le processus de calcul est le suivant :

- a) A l'instant τ , pour une position $\tilde{X}(\tau)$ et $\tilde{Y}(\tau)$ et des vitesses $\tilde{X}'(\tau)$ et $\tilde{Y}'(\tau)$ données, on résout l'équation de Reynolds (IV.6), et l'on en déduit les forces $\tilde{F}_X(\tau)$ et $\tilde{F}_Y(\tau)$ (IV.8).
- b) Le système différentiel (IV.9) permet alors de calculer les composantes de l'accélération $\tilde{X}''(\tau)$ et $\tilde{Y}''(\tau)$.
- c) La vitesse et la position à l'instant $(\tau + \Delta\tau)$ sont déterminées à partir du système d'équations (IV.10), le processus de calcul est alors repris en (a).

Il faut souligner que le problème de l'intégration numérique est assez délicat, le choix du pas de temps est important. En effet, des pas trop petits entraînent un temps de calcul important alors que des pas plus grands rendent le processus divergent.

La valeur $\Delta\tau$ est fonction de la nature du problème étudié, en général comprise entre $\frac{2\pi}{20}$ et $\frac{2\pi}{50}$ d'après [41], pour la réponse à un balourd par exemple, il est difficile de le prévoir a priori.

Pour valider le choix du pas de temps, il faut vérifier à ce que l'excentricité instantanée

$$\left(\mathcal{E} = \left(\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 \right)^{1/2} \right), \text{ soit inférieur à l'unité.}$$

IV. 4 Méthodes de résolution l'équation de Reynolds modifié pour un fluide non newtonien

L'équation de Reynolds est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique. La géométrie souvent complexe des paliers ainsi que les conditions limites ne permettent pas toujours d'envisager une résolution analytique de cette équation, sauf dans le cas des hypothèses de paliers infiniment court ($L/D \rightarrow 0$), ou des paliers infiniment long ($L/D \rightarrow \infty$).

Pour les paliers de longueur finie (lorsque l'écoulement est bidimensionnel), les méthodes actuelles utilisées sont pour la plupart des méthodes numériques telles que les différences finies (MDF) et les éléments finis (MEF).

- **Approche bidimensionnelle**

La méthode des différences finies (2D) est utilisée dans le cas du palier de longueur finie où l'écoulement du fluide est bidimensionnel. Dans cette méthode, simple à mettre en œuvre pour des géométries de films et d'alimentation régulières, le domaine est discrétisé en rectangles élémentaires appelés mailles.

La pression aux nœuds du maillage est l'inconnue nodale, les dérivées partielles de la pression sont évaluées en un point du maillage en fonction des valeurs de la pression aux points environnants.

IV.4.a Conditions limites sur la pression

La pression statique \tilde{p}_0 et les pressions dynamiques \tilde{p}_ε et \tilde{p}_ϕ doivent satisfaire les conditions limites suivantes :

- Conditions liées à l'environnement du palier :

$$\tilde{p}\left(\theta, \tilde{z} = \pm \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (\text{IV.11.a})$$

$$\tilde{p}_\varepsilon\left(\theta, \tilde{z} = \pm \frac{1}{2}\right) = \tilde{p}_\phi\left(\theta, \tilde{z} = \pm \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (\text{IV.11.b})$$

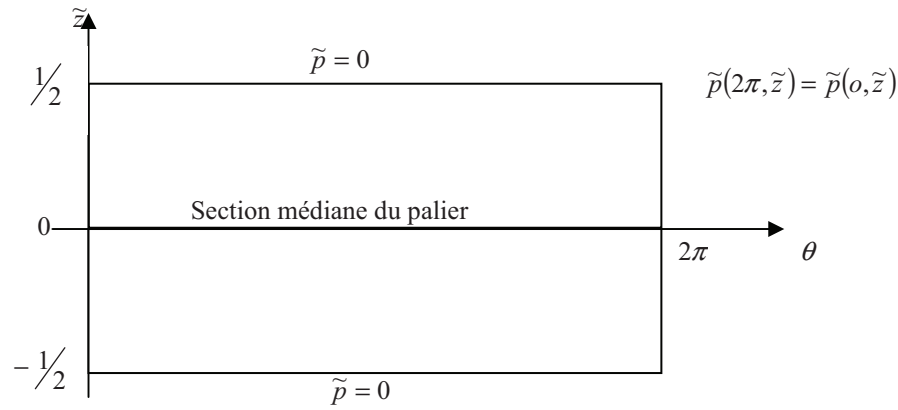
- Conditions liées à l'écoulement du fluide lubrifiant :

$$\tilde{p} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{pour } \theta = \theta_{c_0} \quad (\text{IV.11.c})$$

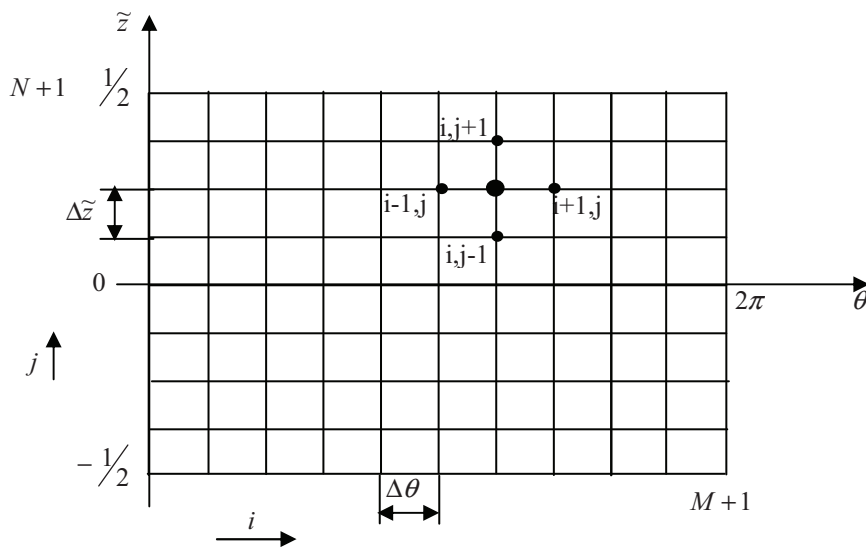
La condition (IV.11.c) permet de prendre en considération la rupture du film dans la région divergente du palier. Ces conditions sont connues sous le nom de conditions de Reynolds. Dans les calculs, la prise en considération de ces conditions est assurée à l'aide de l'algorithme de Christopherson [43] L'application de cet algorithme permet d'annuler au cours des calculs les termes de pression négatifs. Il est à noter que le domaine d'intégration des équations d'ordre un est celui défini par l'application de l'algorithme de Christopherson lors de la résolution de l'équation de Reynolds modifié.

IV.4.b Discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée

Si nous considérons que le palier est aligné et que la pression à ses extrémités est nulle, le palier étant symétrique par rapport à la coordonnée axiale z . le palier complet doit être considéré (figure IV.3). Le domaine de discrétisation de l'équation de Reynolds est : $(0, 2\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



a). Problème continu.



b). Problème discret (maillage par la MDF).

Fig. IV. 3 : Palier développé conditions, le domaine de discrétisation de l'équation de Reynolds se réduit à $(0, 2\pi) \times (0, 1/2)$.

M et N sont respectivement les nombres de mailles suivant θ et \tilde{z}

$\Delta\theta$ et $\Delta\tilde{z}$ sont respectivement les pas du maillage dans les directions circonférentielle et axiale

$$\text{tel que: } \Delta\theta = \frac{2\pi}{M} ; \Delta\tilde{z} = \frac{1}{N}$$

Les variables continues θ et \tilde{z} sont remplacées par des variables discrètes i et j :

$$\tilde{p}(\theta_i, \tilde{z}_j) = \tilde{p}_{ij}$$

$$\tilde{h}(\theta_i, \tilde{z}_j) = \tilde{h}_{ij}$$

Les gradients de pression en un point du maillage sont approchés par :

$$\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right)_{ij} = \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i-1,j}}{2\Delta\theta}$$

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial\theta^2}\right)_{ij} = \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - 2\tilde{p}_{i,j} + \tilde{p}_{i-1,j}}{(\Delta\theta)^2}$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{z}}\right)_{ij} = \frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j-1}}{2\Delta\tilde{z}}$$

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial\tilde{z}^2}\right)_{ij} = \frac{\tilde{p}_{i,j+1} - 2\tilde{p}_{i,j} + \tilde{p}_{i,j-1}}{(\Delta\tilde{z})^2}$$

Et de façon similaires pour les gradients circonférentiel et axial de l'épaisseur du film et des pressions dynamiques.

Après discrétisation, le système d'équation, (IV.6) prend la forme suivante :

$$\tilde{p}_{ij} = a_{ij}\tilde{p}_{i+1,j} + b_{ij}\tilde{p}_{i-1,j} + c_{ij}\tilde{p}_{i,j+1} + d_{ij}\tilde{p}_{i,j-1} - e_{ij} \quad (\text{IV.12})$$

avec

$$a_{ij} = \left(\frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{\Delta\theta^2} + \frac{1}{2\Delta\theta} \left(\frac{\partial\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{\partial\theta} \right)_{ij} \right) \frac{1}{F_{ij}} ; b_{ij} = \left(\frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{\Delta\theta^2} - \frac{1}{2\Delta\theta} \left(\frac{\partial\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{\partial\theta} \right)_{ij} \right) \frac{1}{F_{ij}} ;$$

$$c_{ij} = \left(\frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{\Delta\tilde{z}^2} + \frac{1}{2\Delta\tilde{z}} \left(\frac{\partial\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{\partial\tilde{z}} \right)_{ij} \right) \frac{\lambda}{F_{ij}} ; d_{ij} = \left(\frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{\Delta\tilde{z}^2} - \frac{1}{2\Delta\tilde{z}} \left(\frac{\partial\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{\partial\tilde{z}} \right)_{ij} \right) \frac{\lambda}{F_{ij}} ;$$

$$e_{ij} = 6 \left(\frac{\partial \tilde{h}_{ij}}{\partial \theta} \right)_{ij} \frac{1}{F_{ij}} ; F_{ij} = 2\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \left(\frac{1}{\Delta\theta^2} + \frac{\lambda}{\Delta\tilde{z}^2} \right) ; \lambda = \left(\frac{R}{L} \right)^2$$

avec

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{ij} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta\theta}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{z}} \right)_{ij} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta\tilde{z}}$$

et des relations similaires pour les gradients de la fonction g

Remarque :

La résolution analytique de l'équation de Reynolds pour un fluide non-Newtonien est impossible. La résolution numérique revient à initialiser le fluide dans un premier temps en tant que newtonien (équation de Reynolds pour un fluide non newtonien voir **Annexe B**), puis le considérer par la suite comme non-Newtonien.

IV.5 Méthode de résolution du système d'équations linéaires

Le système d'équation (IV.12) est résolu numériquement à l'aide de la méthode itérative de Gauss Seidel avec coefficient de sur relaxation Ω ($1 < \Omega < 2$). L'application de cet algorithme permet d'écrire :

$$(\tilde{p}_{ij})^{k+1} = (1 - \Omega)(\tilde{p}_{ij})^k + \Omega(a_{ij}(\tilde{p}_{i+1,j})^k + b_{ij}(\tilde{p}_{i-1,j})^{k+1} + c_{ij}(\tilde{p}_{i,j+1})^k + d_{ij}(\tilde{p}_{i,j-1})^{k+1} + e_{ij}) \quad (\text{IV.13})$$

La valeur optimale de Ω permettant au processus itératif de converger en un nombre minimal d'itérations est déterminé par expérimentation numérique.

Les tests d'arrêt des itérations sont :

- pour la pression :

$$\max \left| \frac{(\tilde{p}_{ij})^{k+1} - (\tilde{p}_{ij})^k}{(\tilde{p}_{ij})^{k+1}} \right| \leq 0.00001 \quad (\text{IV.14})$$

où k est le numéro de l'itération.

Les caractéristiques du maillage adopté sont : M = 60 et N = 20.

D'après la figure IV.4, la valeur optimale du coefficient de sur-relaxation Ω est proche de 1.80. Cette valeur, qui dépend des caractéristiques de maillage, permet au processus de calcul itératif de converger en un nombre minimal d'itération.

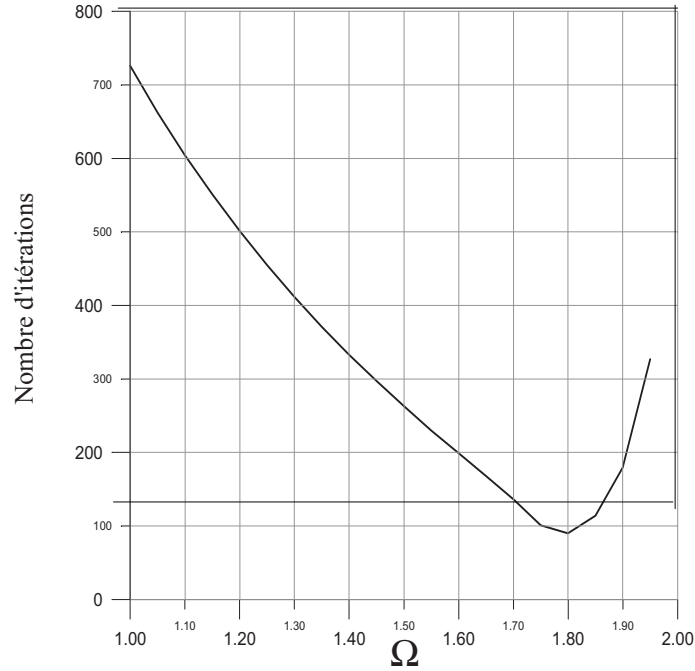


Fig. IV. 4. Influence du coefficient de sur- relaxation sur le nombre d'itérations.

Les différentes intégrales intervenant dans les expressions des caractéristiques statiques sont évaluées numériquement à l'aide de la formule des trapèzes généralisée.

IV.6 Calcul des caractéristiques statiques

- **Portance hydrodynamique**

Les composante \tilde{F}_x et \tilde{F}_y de la portance hydrodynamique adimensionnée (III.10) s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_x \\ \tilde{F}_y \end{pmatrix} = \Delta\theta\Delta z \sum_{i=2}^M \sum_{j=2}^N \tilde{p}_{ij} \begin{Bmatrix} \cos\theta_i \\ \sin\theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

Ces relations sont valables pour le cas d'un palier lisse complet avec une rainure axiale infiniment mince située à ($\theta = 0$). La pression d'alimentation est supposée égale à la pression atmosphérique.

- **Forces de frottement**

$$\begin{cases} \tilde{F}_a = \Delta\theta\Delta\tilde{z} \sum_{i=2}^M \sum_{j=2}^N \left[\frac{1}{\tilde{h}_{ij}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i-1,j}}{2\Delta\theta} \right) \left(\tilde{h}_{ij} - 2\tilde{\ell}th \left(\frac{\tilde{h}_{ij}}{2\tilde{\ell}} \right) \right) \right] \\ \tilde{F}_c = \Delta\theta\Delta\tilde{z} \sum_{i=2}^M \sum_{j=2}^N \left[\frac{1}{\tilde{h}_{ij}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j-1}}{2\Delta\tilde{z}} \right) \left(\tilde{h}_{ij} - 2\tilde{\ell}th \left(\frac{\tilde{h}_{ij}}{2\tilde{\ell}} \right) \right) \right] \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

- **Vitesses moyennes adimensionnées**

$$\begin{cases} \tilde{u}_m = \frac{1}{2} - \frac{\tilde{G}_{ij}}{12\tilde{h}_{ij}} \left(\frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i-1,j}}{2\Delta\theta} \right) \\ \tilde{w}_m = -\frac{\tilde{G}_{ij}}{12\tilde{h}_{ij}} \left(\frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j-1}}{2\Delta\tilde{z}} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

- **Le débit volumique**

$$\tilde{q} = -\Delta\theta\Delta\tilde{z} \left(\sum_{i=1}^M \sum_{i=2}^N \frac{1}{6\Delta\tilde{z}} (\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j-1}) \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})_{ij} \right) \quad (\text{IV.18})$$

Dans le présent travail, Nous avons utilisé une approche basée sur la théorie du palier court optimisée dans laquelle la courbe de pression suivant la direction axiale O_z du palier est supposée de forme parabolique. Cette hypothèse est surtout valable pour un palier aligné [44]. Par comparaison à la théorie du palier court classique, cette technique permet d'utiliser les conditions limites de Reynolds qui tiennent compte du phénomène de rupture du film lubrifiant (Cavitation).

IV. 7 Théorie du palier court

La méthode de séparation des variables permet d'écrire suivant [44] :

$$p(\theta, \tilde{z}) = f(\tilde{z}) \cdot g(\theta) \quad (\text{IV.19})$$

D'après l'hypothèse du palier infiniment court, la répartition axiale de la pression est de la forme :

$$\tilde{f}(\tilde{z}) = (1 - 4\tilde{z}^2) \quad (\text{IV.20})$$

Soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} = (1 - 4 \tilde{z}^2) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = (-8 \tilde{z}) g(\theta) \end{cases}$$

Après intégration par rapport à z :

$$J(\tilde{g}) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{4}{15} \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \left(\frac{d\tilde{g}}{d\theta} \right)^2 \right] + \frac{8}{3} \lambda \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) (\tilde{g}(\theta))^2 - 4\tilde{h} \frac{d\tilde{g}}{d\theta} \Big] d\theta = \text{extréma} \quad (\text{IV.21})$$

En appliquant le théorème de calcul des variations, l'équation différentielle d'Euler-Lagrange est obtenue comme suit :

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{g}} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{g}'} \right) = 0 \quad (\text{IV.22})$$

Le premier terme s'écrit :

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{g}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{g}} \left(\frac{8}{3} \lambda \tilde{G} (\tilde{g}(\theta))^2 \right) = \frac{16}{3} \lambda \tilde{G} \tilde{g}(\theta) \quad (\text{IV.22.a})$$

Le deuxième terme s'écrit :

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{g}'} \right) = \frac{8}{15} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta} \frac{d\tilde{g}}{d\theta} + \frac{8}{15} \tilde{G} \frac{d^2 \tilde{g}}{d\theta^2} - 4 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} \quad (\text{IV.22.b})$$

avec :

$$\tilde{G} = \tilde{h}^3 - 12 \tilde{\ell}^2 \tilde{h} + 24 \tilde{\ell}^3 \text{th} \left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{\ell}} \right)$$

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} \left(3\tilde{h}^2 - 12\tilde{\ell}^2 + 12\tilde{\ell}^2 \frac{1}{ch^2 \left(\frac{\tilde{h}}{2\tilde{\ell}} \right)} \right) \quad (\text{IV.22.c})$$

En remplaçant par ces termes dans (IV.22) nous aurons donc :

$$\frac{16}{3} \lambda \tilde{G} \tilde{g}(\theta) - \frac{8}{15} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta} \frac{d\tilde{g}}{d\theta} - \frac{8}{15} \tilde{G} \frac{d^2 \tilde{g}}{d\theta^2} + 4 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{IV.23})$$

IV.7.a Discrétisation de l'équation d'Euler-Lagrange par la méthode des différences finies

L'équation (IV-23) peut être intégrée numériquement par la méthode des différences finies, le système matriciel résultant sera résolu par la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation. Le maillage du palier ne se fait que selon sa direction circonférentielle (Fig. (IV-5)).

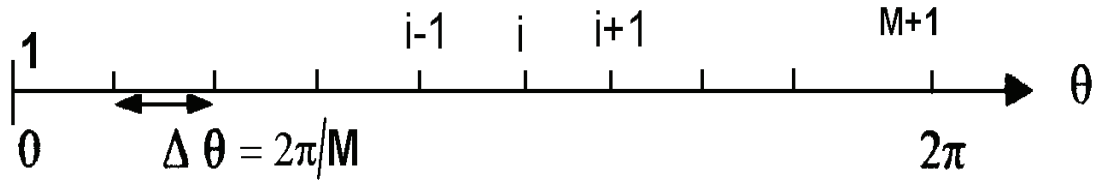


Fig. IV. 5: Discrétisation par la méthode des différences finies de la circonférence du palier (M est le nombre d'intervalles)

L'utilisation des différences finies centrées permet d'évaluer les dérivées circonférentielles de la fonction \tilde{g} comme suit :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\tilde{g}}{d\theta} \right)_i \approx \frac{\tilde{g}_{i+1} - \tilde{g}_{i-1}}{2\Delta\theta} \\ \left(\frac{d^2\tilde{g}}{d\theta^2} \right)_i \approx \frac{\tilde{g}_{i-1} - 2\tilde{g}_i + \tilde{g}_{i+1}}{(\Delta\theta)^2} \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

En remplaçant dans l'équation (IV.12) nous obtenons :

$$\begin{cases} a_i = \frac{8}{15} \left[\frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{(\Delta\theta)^2} + \frac{1}{2\Delta\theta} \frac{\partial \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{\partial \theta} \right] \frac{1}{d_i} \\ b_i = \frac{8}{15} \left[\frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{(\Delta\theta)^2} - \frac{1}{2\Delta\theta} \frac{\partial \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{\partial \theta} \right] \frac{1}{d_i} \\ c_i = \left[4 \frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial \theta} \right] \frac{1}{d_i} \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

où :

$$d_i = \frac{16}{15} \left[\frac{\tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell})}{(\Delta\theta)^2} + 5\lambda \tilde{G}(\tilde{h}, \tilde{\ell}) \right]$$

IV.8 Seuil de stabilité

L'analyse dynamique non linéaire permet de déterminer la stabilité d'un point de fonctionnement. Pour cela, le système étudié ne doit être soumis à des excitations extérieures.

Dans notre cas, on revient à annuler l'excentricité de balourd et les efforts périodiques de type sinusoïdale. Cette approche a l'avantage, par rapport à une étude linéaire, car elle permet de nous renseigner sur la forme de la trajectoire ainsi que sur les efforts transmis au palier. Trois conditions de fonctionnement peuvent être rencontrées :

- Le point de fonctionnement est stable, le centre de l'arbre tend vers la position d'équilibre statique.
- Le point de fonctionnement est proche de la frontière de stabilité, la trajectoire du centre de l'arbre en régime établi est une orbite de faible amplitude.
- Le point de fonctionnement est instable, la trajectoire est divergente.

IV.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les caractéristiques dynamiques non linéaires d'un palier lisse lubrifié par un fluide non newtonien qui concerne le développement technique de la résolution des équations de mouvement du rotor qui est basée sur deux méthodes.

La première c'est la résolution de l'équation de Reynolds modifiée par la méthode de discrétisation retenue dans notre étude est celle des différences finies centrées bidimensionnelles (2D) et unidimensionnelles (D1) pour la résolution des équations de la partie fluide.

La deuxième c'est la méthode explicite d'Euler pour la résolution des équations de mouvement du rotor (partie structure).

L'analyse dynamique non linéaire d'un palier lisse lubrifié par un fluide non newtonien est après calcul des caractéristiques statiques permet de déterminer la stabilité de ce dernier.

V.1 Introduction

Le comportement dynamique d'une ligne d'arbre rigide supporté par des paliers lisses est classiquement évalué ou on considère que l'action de ces derniers est non linéaire. La modélisation de ce comportement traitée dans le chapitre précédent nous a permis la réalisation d'un programme de simulation en MATLAB basé sur l'approche numérique unidimensionnelle et bidimensionnelle.

Le programme permet de déterminer les performances hydrostatiques et hydrodynamiques du palier lisse lubrifié par un fluide newtonien et non newtonien << fluide à couple de contrainte >> soumis à une excitation dynamique synchrone de type balourd, Le programme développé permet d'étudier l'influence de :

- La viscosité de lubrifiant.
- La vitesse de rotation.
- Les Paramètres de couple des contraintes sur les performances dynamique du palier lisse.

V.2 Méthode numérique de résolution

Ce paragraphe a pour but de préciser les différentes étapes de résolution du problème Hydrodynamique utilisées dans le code de calcul. Les équations que nous avons présentées sont résolues grâce à la méthode des différences finies dans un processus itératif. En ce qui concerne la résolution de l'équation de Reynolds en transitoire la méthode employée est différente du régime permanent car nous devons prendre en compte le facteur temps. En plus de la discrétisation spatiale nous faisant donc une discrétisation temporelle de l'équation, l'obtention de champ de Pression $P(i,j)$ [Fig. V.1] à l'instant $(t+dt)$ se fait par une méthode de Newton-Raphson en tenant compte des conditions aux limites imposées.

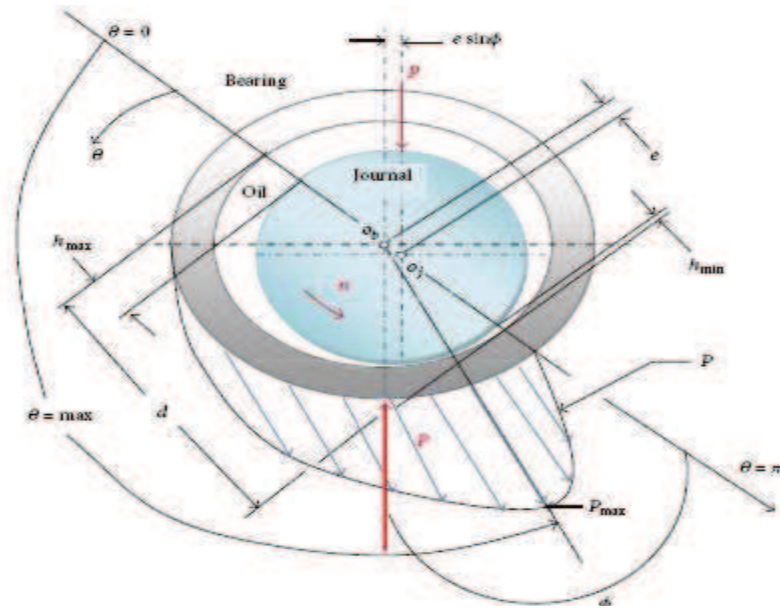


Fig.V.1 : Distribution du champ de pression [45]

Les caractéristiques géométriques du palier sont ensuite déterminées avant d'y ajouter d'éventuelles modifications.

Le programme de calcul tient compte des conditions suivantes :

- ◆ La position initiale du centre de l'arbre est maintenue constante pour chaque cas et est située près du centre géométrique du palier ($X_0=0.001$, $Y_0=0$).
- ◆ La vitesse initiale du centre de l'arbre est nulle,
- ◆ Le pas de temps sans dimension est $\Delta \tau = \frac{2\pi}{20}$, (Pour valider le choix du pas de temps, il faut vérifier que la valeur de l'excentricité instantanée soit inférieure à l'unité).
- ◆ On néglige l'effet de la dissipation dynamique sur la viscosité, dû au mouvement orbital de l'arbre,
- ◆ On garde constant Le critère de convergence pour la pression : la déviation relative de pression est 10^{-5} ,
 - ◆ La valeur optimale de coefficient de sur-relaxation est égale à 1.80.
 - ◆ La boucle de calcul revient lorsque le temps adimensionné τ atteint $\tau_{lim} = 200$.

L'influence du changement de la position initiale du centre de l'arbre et du pas du temps n'affecte pas les résultats des tests.

L'organigramme de simulation basé sur l'approche numérique (1-D et 2-D) est le suivant :

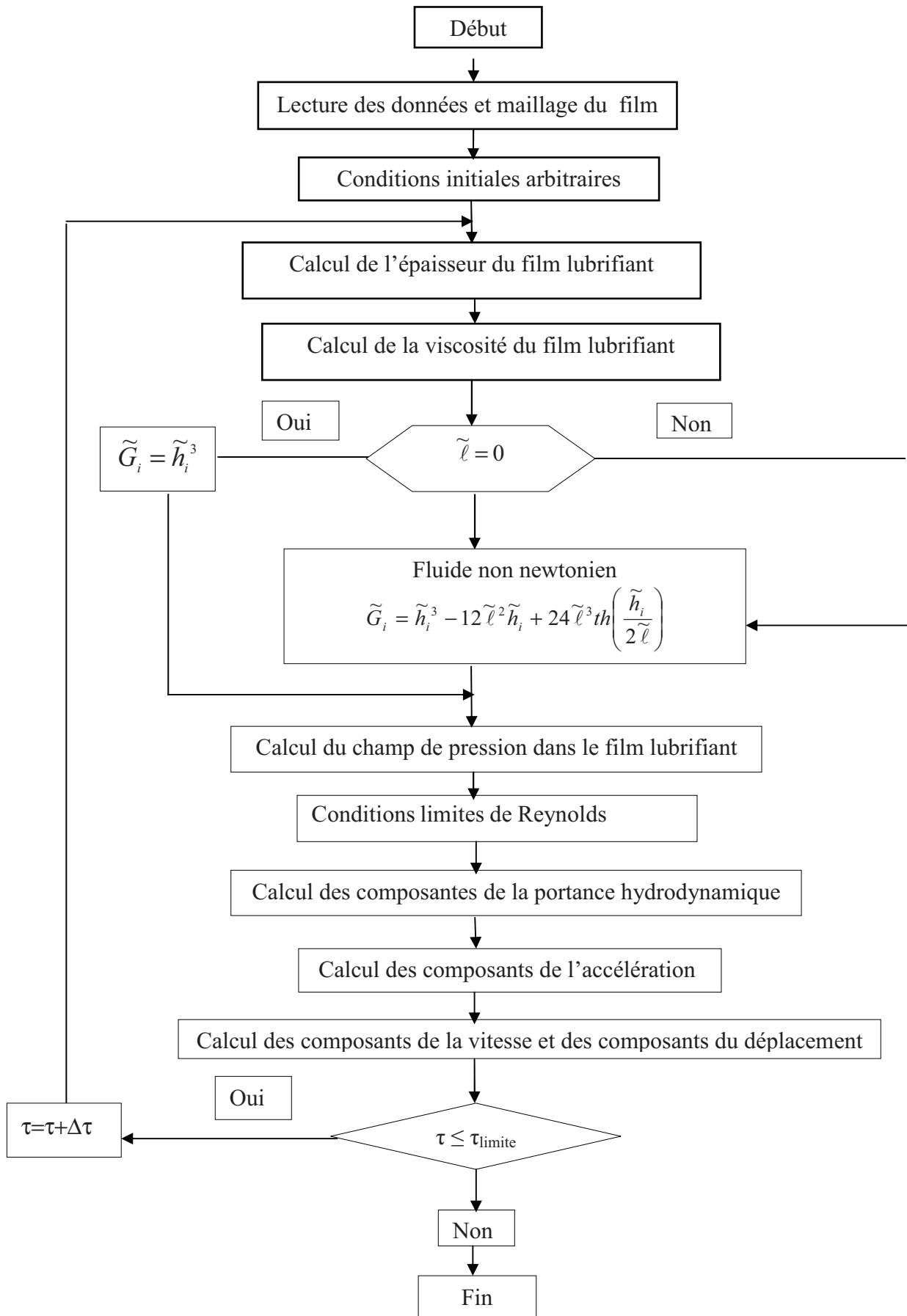


Fig. V.2 : Organigramme du programme de calcul

V.3 Validation des résultats par l'expérience

Pour valider les résultats du programme de calcul développé pour l'étude du comportement dynamique non linéaire des paliers hydrodynamiques nous avons comparé les trajectoires du centre de l'arbre calculées par intégration des équations de mouvement selon (IV.9) avec celles obtenues expérimentalement par Hashimoto et Wada [46] dans le cas d'un palier court utilisant de l'eau comme lubrifiant.

Dans le cas où le palier est alimenté par une rainure circumférentielle infiniment mince située dans sa section médiane, la charge statique supportée par le demi-palier est $W = 27$ N correspondant au quart du poids du rotor.

Le calcul des trajectoires a été effectué pour deux vitesses de rotation du rotor $N=3000$ et 6000 rpm et pour trois valeurs de l'excentricité relative du balourd ($\varepsilon_b = 0, 0.13, \text{ et } 0.19$) ou

$\varepsilon_b = \frac{e_b}{C}$ correspondant respectivement à $e_b = 0, 32.5 \text{ et } 47.5 \mu\text{m}$.

Les figures V.4.a et V.5 .a représentent les trajectoires expérimentales du centre de l'arbre dans le palier. Les trajectoires théoriques sont calculées par deux approches numériques : la théorie du palier court optimisée (1D) et la méthode des différences finies centrées (2D). Les trajectoires prédites par la théorie du palier court optimisée sont confondues avec celles calculées par les différences finies (fig. V.4.b à V.5 .b) Par comparaison aux méthodes des différences finies, la théorie du palier court optimisée, basée sur l'hypothèse d'une répartition parabolique de la pression suivant la direction axiale du palier [44] peut être efficacement utilisée pour une prédiction rapide et précise des trajectoires du centre de l'arbre dans le palier. Cette technique de calcul est d'autant plus précise que le rapport de la longueur au diamètre du palier est faible ($L/D < 1$). En effet, la méthode des différences finies nécessite, pour les mêmes caractéristiques du maillage, 40.76 secondes de temps CPU, soit dix fois supérieur à celui de la théorie du palier court optimisée et cela durant 16 révolutions de l'arbre. Les caractéristiques et les conditions de fonctionnement du palier sont reportées dans le tableau V.1 où nous observons une bonne concordance entre les résultats théoriques et expérimentaux.

Tableau V-1 : Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement du palier

Caractéristiques	Symbole	Unité	Valeur
Caractéristiques géométriques			
Diamètre du palier	$D=2R$	m	0.07
Longueur du demi-palier	L	m	0.035
Jeu radial du palier	C	m	250×10^{-6}
Propriétés physiques du lubrifiant			
Caractéristique responsable des couples de contrainte	η	N.s	0.0 (Newtonien)
Viscosité dynamique (eau à 20°C)	μ	Pa.s	0.001
Conditions de fonctionnement			
Masse du rotor affectée au palier	M	Kg	10.8
Charge appliquée sur le palier complet	Mg	N	54
Vitesses de rotation du rotor	N	rpm	3000 ,6000
Excentricités du balourd	e_b	m	0 32.5×10^{-6} 47.5×10^{-6}

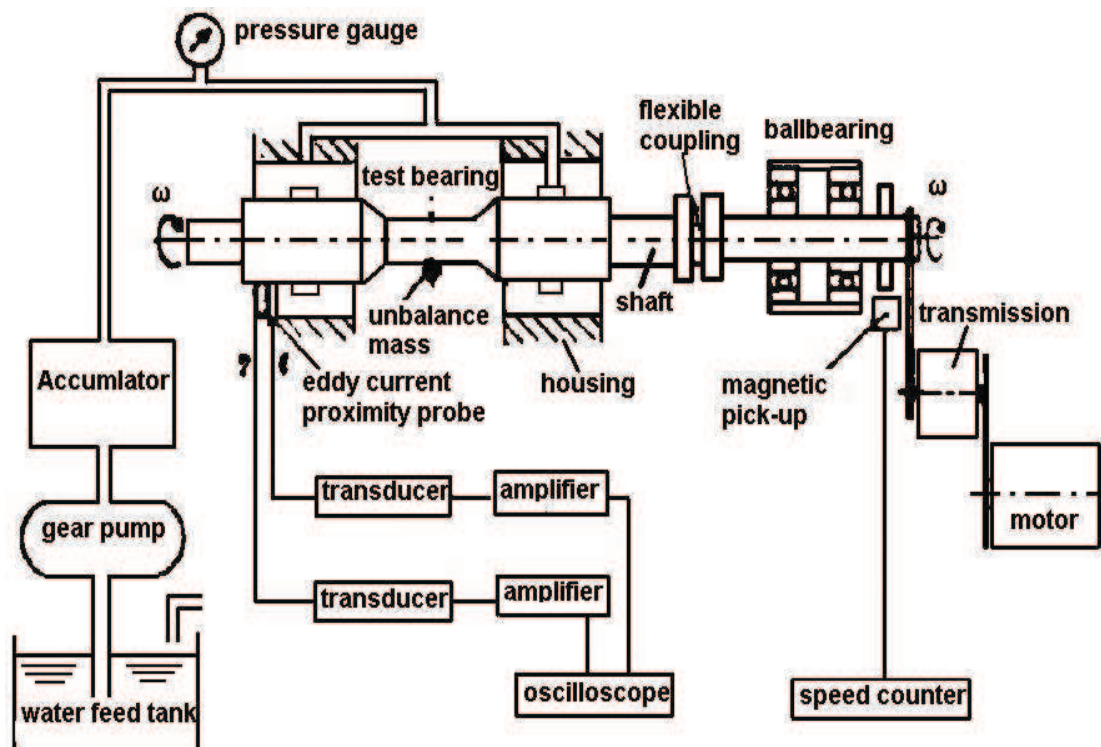
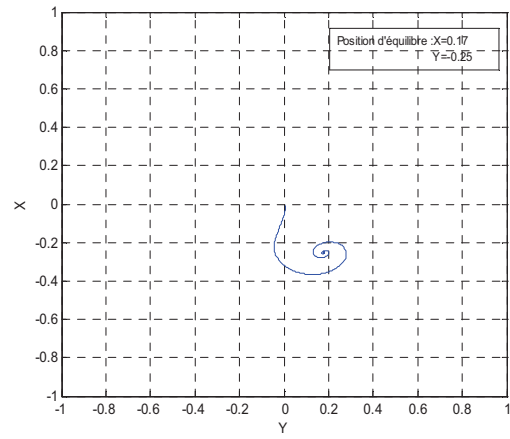
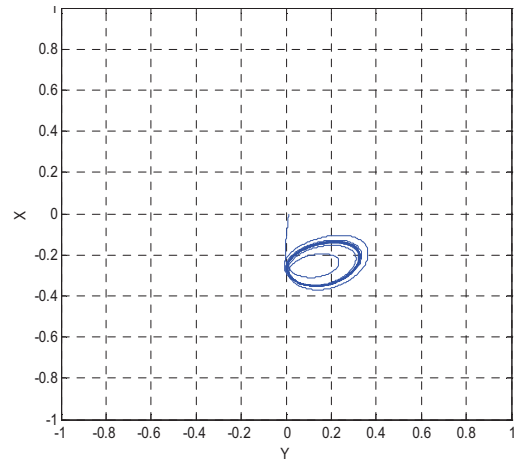
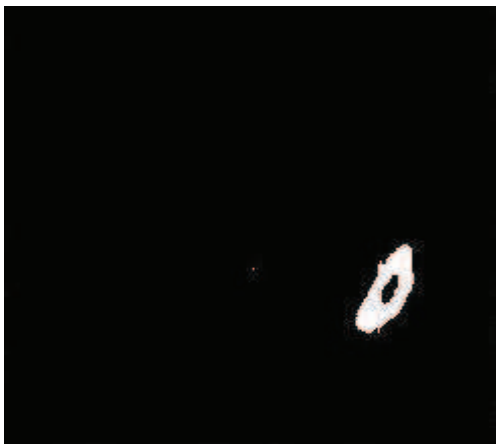
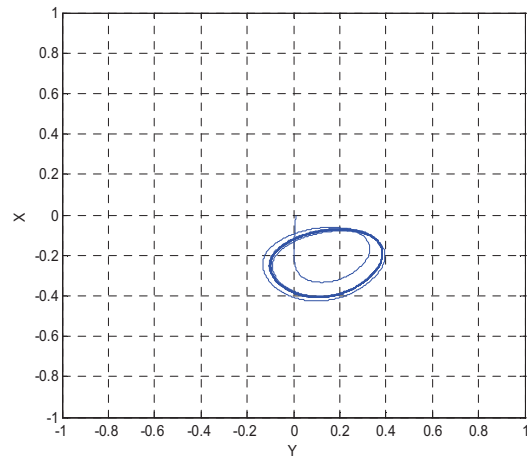


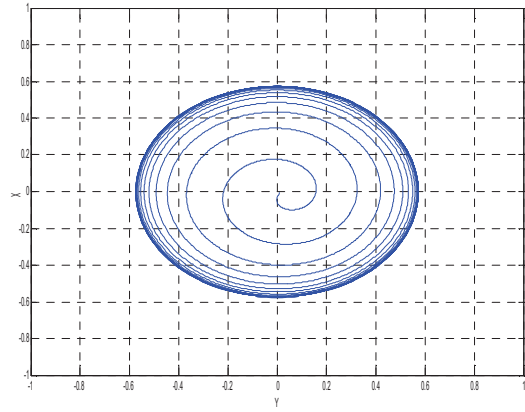
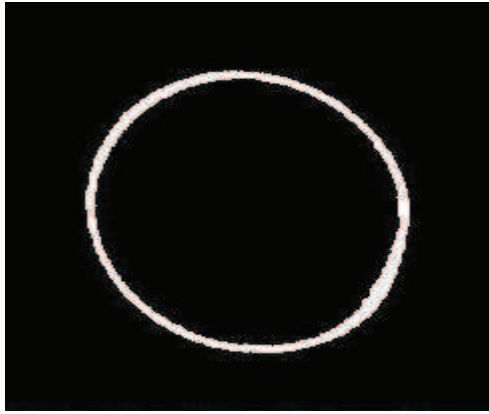
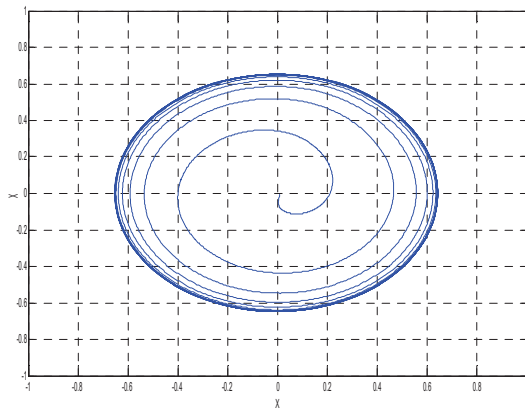
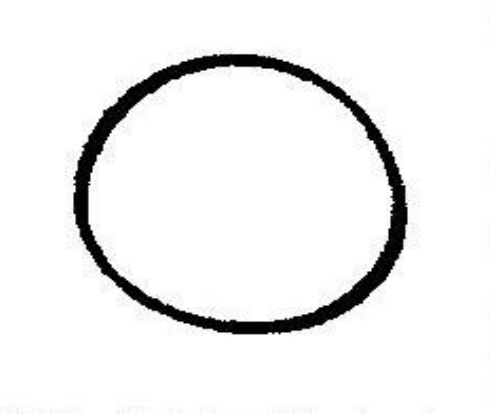
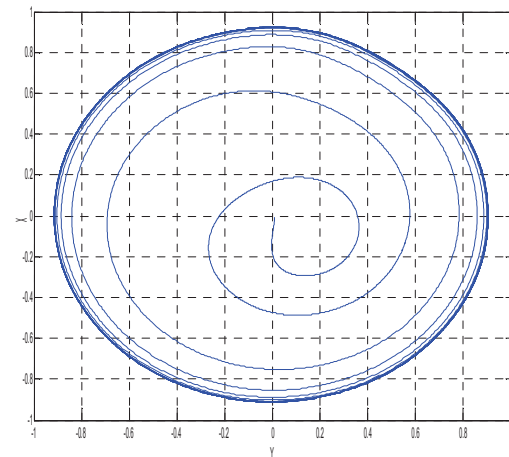
Fig.V. 3 : Schéma du dispositif expérimental pour la mesure de la trajectoire du centre de l'arbre [46]

Cas d'un balourd nul $\varepsilon_b = 0$ Cas d'un balourd $\varepsilon_b = 0.13$ Cas d'un balourd $\varepsilon_b = 0.19$

a) Trajectoires expérimentale [46].

b) Trajectoires théoriques calculées.

Fig. V. 4 Comparaison de trajectoires expérimentales et théoriques calculés d'un palier lisse dans le cas d'un fluide newtonien pour $N=3000$ rpm.

Cas d'un balourd $\varepsilon_b = 0$ Cas d'un balourd $\varepsilon_b = 0.13$ Cas d'un balourd $\varepsilon_b = 0.19$

a) Trajectoires expérimentales [17].

b) Trajectoires théoriques calculées.

Fig.V. 5 : Comparaison de trajectoires expérimentales et théoriques calculées d'un palier lisse dans le cas d'un fluide newtonien pour $N=6000$ rpm.

V.4 Etude paramétrique :

Pour l'étude de l'influence des paramètres tels que l'influence de la viscosité, la vitesse de rotation de l'arbre et l'effet des paramètres de couple de contrainte sur le comportement dynamique non linéaire du palier on impose les paramètres suivant le tableau V.2.

Ce palier comporte une rainure circonférentielle totale située dans sa section médiane.

Tableau V-2 : Caractéristiques du palier lisse étudié

Caractéristiques	Symbole	Unité	Valeur
Caractéristiques géométriques			
Diamètre du palier	$D=2R$	m	0.51
Longueur du demi-palier	L	m	0.33
Jeu radial du palier	C	m	36×10^{-4}
Propriétés physiques du lubrifiant			
Caractéristique responsable des couples de contrainte	η	N.s	0.0 (Newtonien) 0.741×10^{-10} 2.94×10^{-10}
Viscosité dynamique	μ	Pa.s	0.06 0.027
Conditions de fonctionnement			
Masse du rotor affectée au palier	M	kg	6900
Vitesses de rotation du rotor	N	rpm	3000.6000
Excentricités du balourd	e_b	m	0 0.7×10^{-4} 2.80×10^{-4}

V.4.1 Effet de la vitesse de rotation

L'étude de l'influence de la vitesse de rotation pour différentes valeurs dans le cas d'un balourd résiduel sur le comportement dynamique non linéaire du palier est faite avec les conditions de fonctionnement suivantes :

- ◆ Palier soumis à une charge statique seule ($\epsilon_b = 0$).

Les résultats sont présentés pour deux valeurs de la vitesse de rotation de l'arbre $N = 3000$ et 6000 rpm. Pour chaque cas, les calculs sont réalisés en utilisant les théories de la lubrification hydrodynamique d'un palier lisse lubrifié par un fluide newtonien. Ils concernent les trajectoires décrites par le centre de l'arbre dans le palier et les variations de l'épaisseur minimale du film et la pression maximale du fluide au court du temps, Le champ de pression calculé, les composantes d'accélération selon A_x et A_y en fonction du temps

V.4.1.a Variations de la trajectoire du centre de l'arbre :

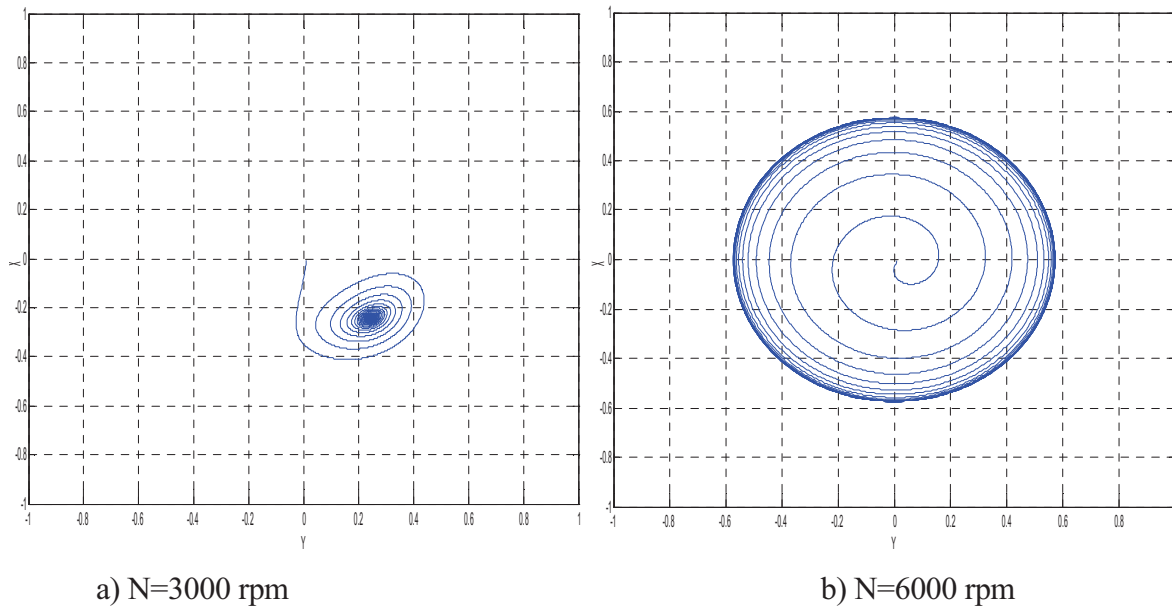


Fig. V.6: Trajectoires du centre de l'arbre dans le palier pour différentes valeurs de vitesse.

De l'analyse des courbes obtenues dans la figure V.6, on retient les résultats suivants :

- Pour un balourd nul (figure V.6.a) la trajectoire calculée du centre de l'arbre dans le palier pour une vitesse de $N=3000$ rpm s'approche graduellement de la position d'équilibre statique.
- Pour une vitesse de $N=6000$ rpm et un balourd nul celle-ci décrit une orbite *circulaire* proche du jeu radial car les amplitudes de vibration de l'arbre sont plus importantes. Cela est dû au fait que le module de la force dynamique est plus important que celui de la charge statique (figure. V.6.b).

Dans ces conditions, le comportement dynamique non linéaire du palier apparaît clairement car la théorie linéaire ne peut pas être applicable dans le cas des grands déplacements.

V.4.1.b Variation de la pression maximale dans le palier

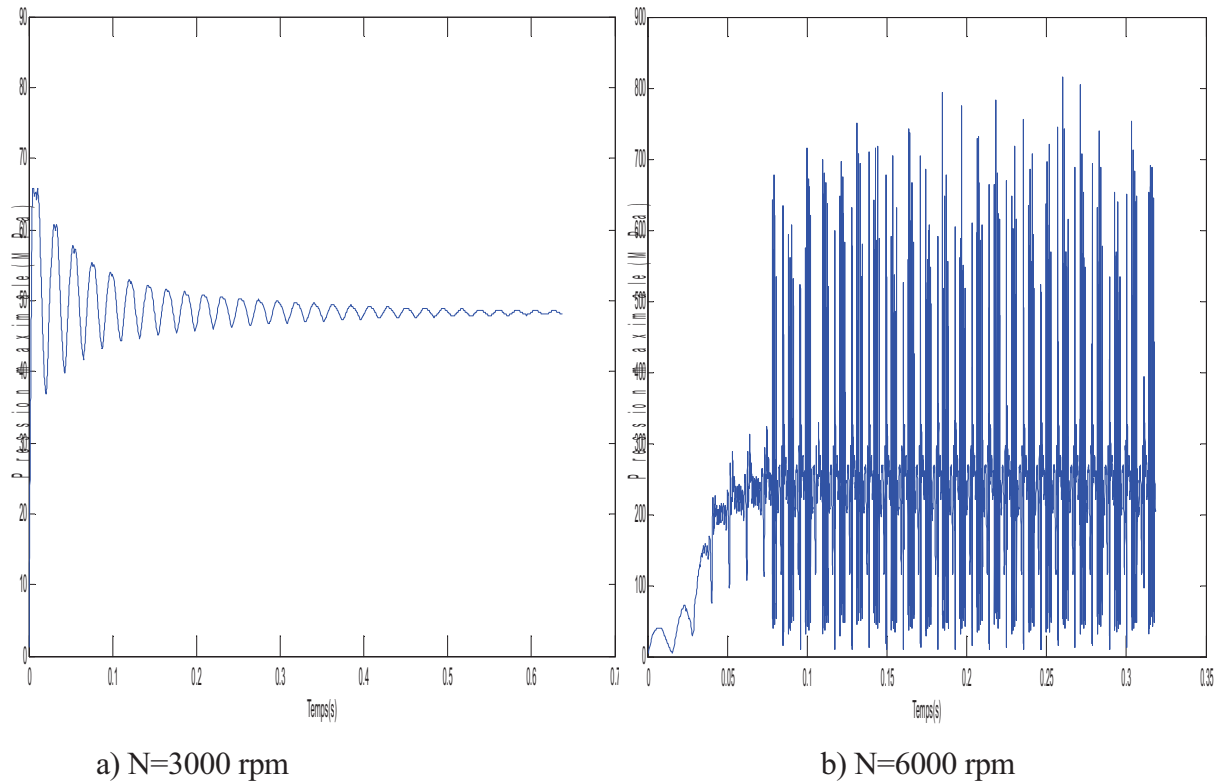


Fig. V.7: Variations de la pression maximale en fonction du temps pour différentes valeurs de vitesse.

La figure V.7 représente l'évolution du pic de pression en fonction du temps pour une vitesse de 3000 rpm.

L'allure prend des caractères instables sur l'intervalle [0-0,4] second au delà ces valeurs seront stables au voisins des 55 MPa (Figure V.7.a). , L'augmentation de la vitesse 6000 rpm (Figure V.7.b) entraîne une grande variation de la pression maximale au cours du temps qui se traduit par une grande augmentation jusqu'à 200 MPa.

V.4.1.c Champ de pression calculée dans le palier

La figure V.8 représente le champ de pression calculé dans le film fluide dans le cas d'un fluide newtonien on remarque que la pression dans le fluide diminue avec l'augmentation de la vitesse figure (V.8.b) ce qui permet de réduire la portante hydrodynamique.

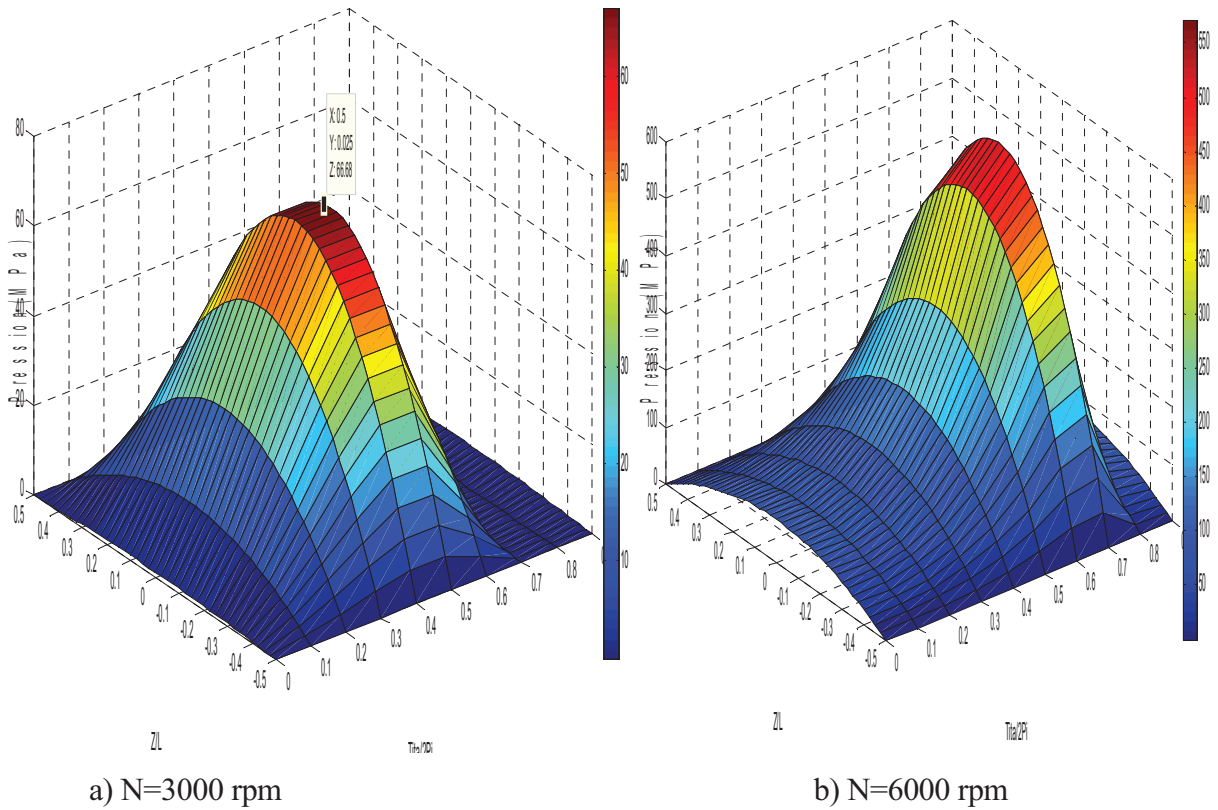


Fig.V.8: Champ de pression calculé pour différentes valeurs de vitesse.

V.4.1.d Variation des composantes d'accélération en fonction du temps dans le palier

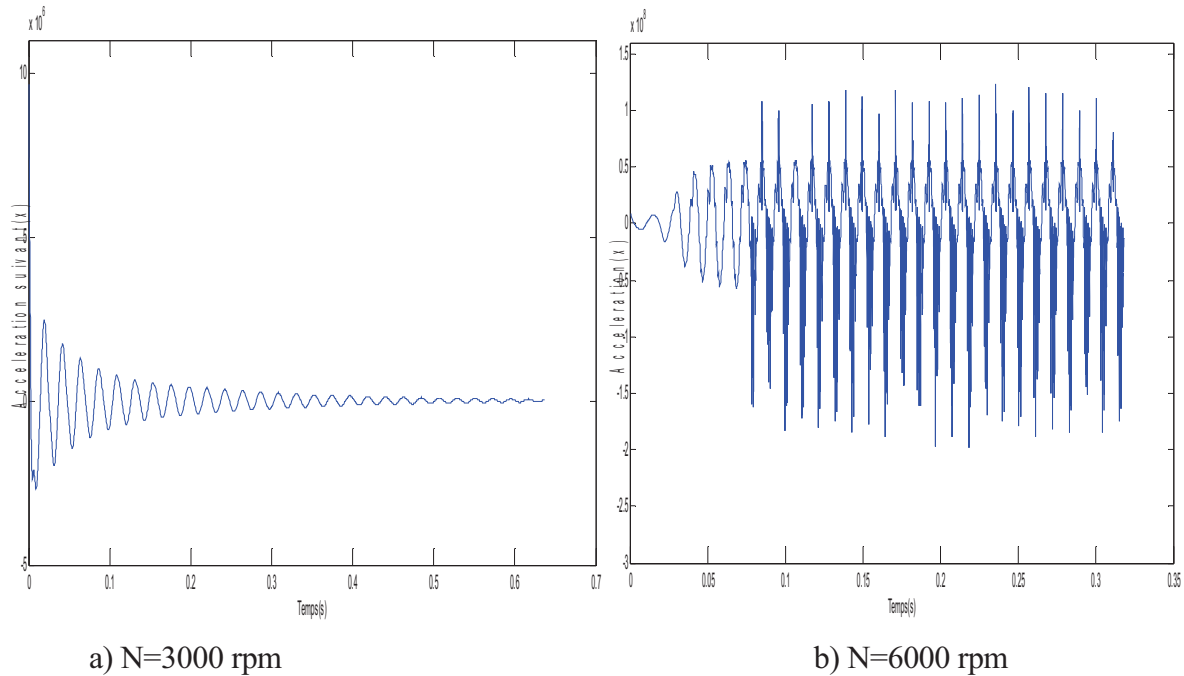


Fig.V.9: Variations d'accélération $A_x(t)$ du centre de l'arbre en fonction du temps pour différentes valeurs de vitesse

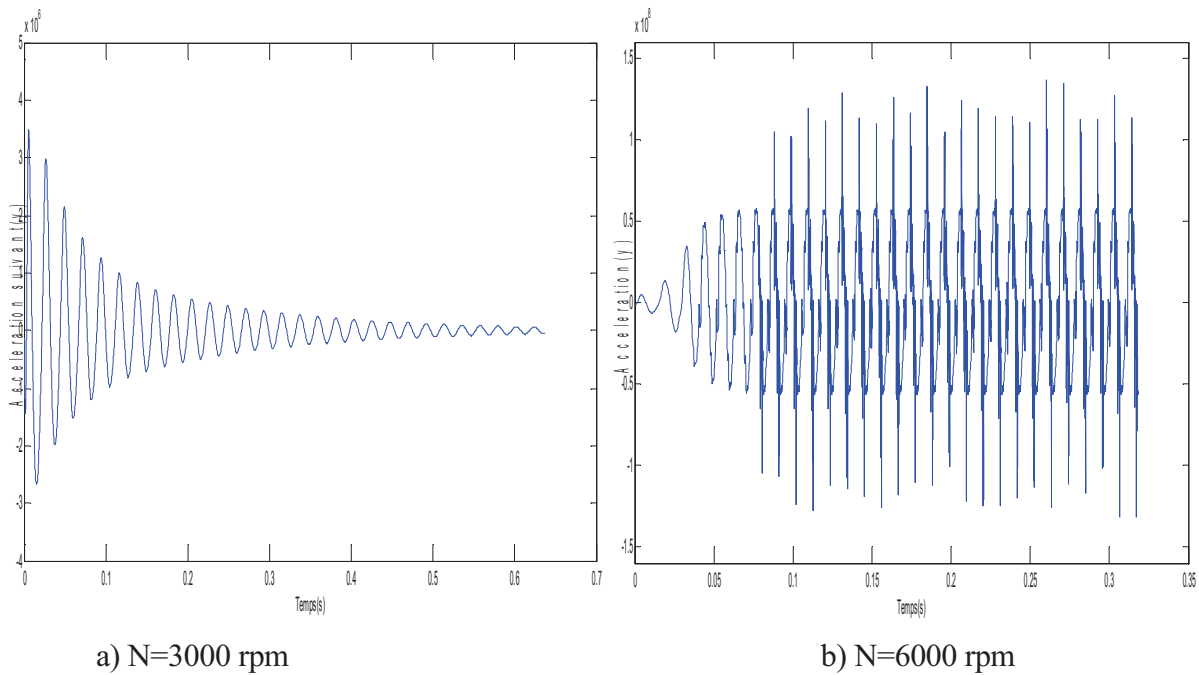


Fig. V.10: Variations d'accélération $A_y(t)$ du centre de l'arbre en fonction du temps pour différentes valeurs de vitesse.

Les variations au cours du temps d'accélération selon $A_x(t)$ et $A_y(t)$ sont représentées par les figures V.9 et V.10. Sur les figures V.9.a et V.10.a les accélérations prennent des caractères instables sur l'intervalle [0-0.3] second et au delà de ces valeurs le processus se stabilise selon les deux axes.

Les figures V.9.b et V.10.b représentent les amplitudes de vibration crête-crête calculées au cours des trente cinq révolutions de l'arbre pour un balourd nul ($\epsilon_b = 0$), en régime transitoire et pour une vitesses de 6000 tr/min sur les $A_x(t)$ et $A_y(t)$ ou on constate une augmentations des amplitudes des vibrations suite par l'augmentation de la vitesse ceci est du à la faiblesses de la charge statique par rapport a la charge dynamique . Dans ces conditions le comportement dynamique du palier apparaît clairement.

V.4.1.e Variation de l'épaisseur minimale du film lubrifiant

Les figures V.11.a et V.11.b montrent les variations de l'épaisseur minimale du film d'huile en fonction du temps durant 34 révolutions de l'arbre pour $N = 3000$ et 6000 rpm . Les courbes en représentent respectivement les résultats obtenus avec les théories d'écoulement laminaire tenant compte des solutions transitoires dues aux conditions initiales.

D'après ces figures, l'épaisseur minimale du film varie en fonction du temps, de façon très différente notamment pour $N = 6000 \text{ rpm}$. Ou la valeur de l'épaisseur minimale du film pour $N=3000\text{rpm}$ et $N=6000\text{rpm}$ sont respectivement $H_{\min}=108.4\mu\text{m}$ et $H_{\min}=80.21\mu\text{m}$, donc il y'a une diminution de la hauteur minimale du film d'huile causée par l'augmentation de la vitesse.

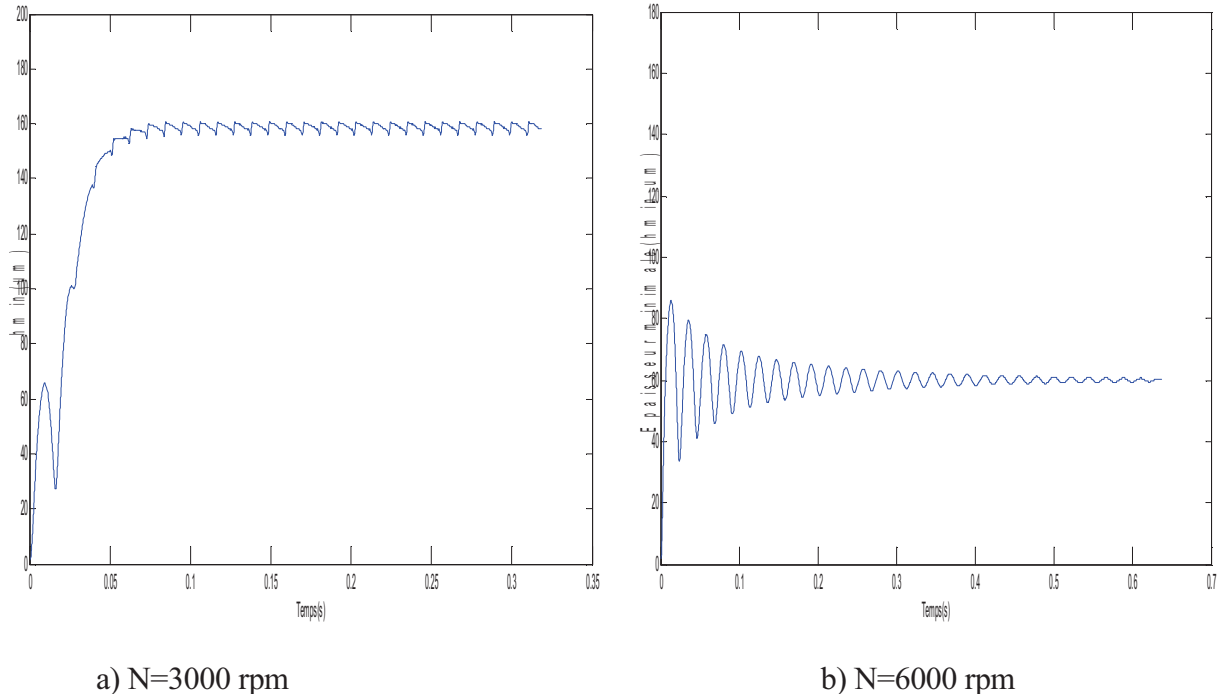


Fig .V.11 : Variations de l'épaisseur minimale du film en fonction du temps pour différentes valeurs de vitesse.

V.4.2 Influence de la viscosité du lubrifiant

La viscosité du lubrifiant est un paramètre sur lequel il est possible d'agir afin de modifier les caractéristiques de fonctionnement d'un palier hydrodynamique.

Pour mettre en évidence l'effet de la viscosité du fluide lubrifiant sur le comportement dynamique du palier, on utilise une huile ISO VG 32 dont les valeurs de la viscosité dynamique et de la masse volumique sont [47]

$$\mu = 0.027 \text{ Pa.s à } 37.8^\circ\text{C} ; \mu = 0.006 \text{ Pa.s à } 98.9^\circ\text{C}; \text{ avec } \rho=870 \text{ kg/m}^3$$

L'étude a été effectuée pour les conditions de fonctionnement suivantes :

- Palier soumis à une charge statique seule ($\epsilon_b = 0.2$);
- Les résultats sont présentés pour la vitesse de rotation de l'arbre $N = 6000 \text{ rpm}$.

Les calculs sont réalisés en utilisant la théorie de la lubrification hydrodynamique laminaire pour un fluide newtonien avec différentes valeurs de viscosité.

Ces résultats concernent :

- ◆ Les trajectoires décrites par le centre de l'arbre dans le palier.
- ◆ Les variations de l'épaisseur minimale du film en fonction du temps ;
- ◆ Les variations de déplacement selon $x(t)$ et $y(t)$ en fonction du temps.
- ◆ Le champ de pression calculée.

V.4.2.a Variations de la trajectoire du centre de l'arbre

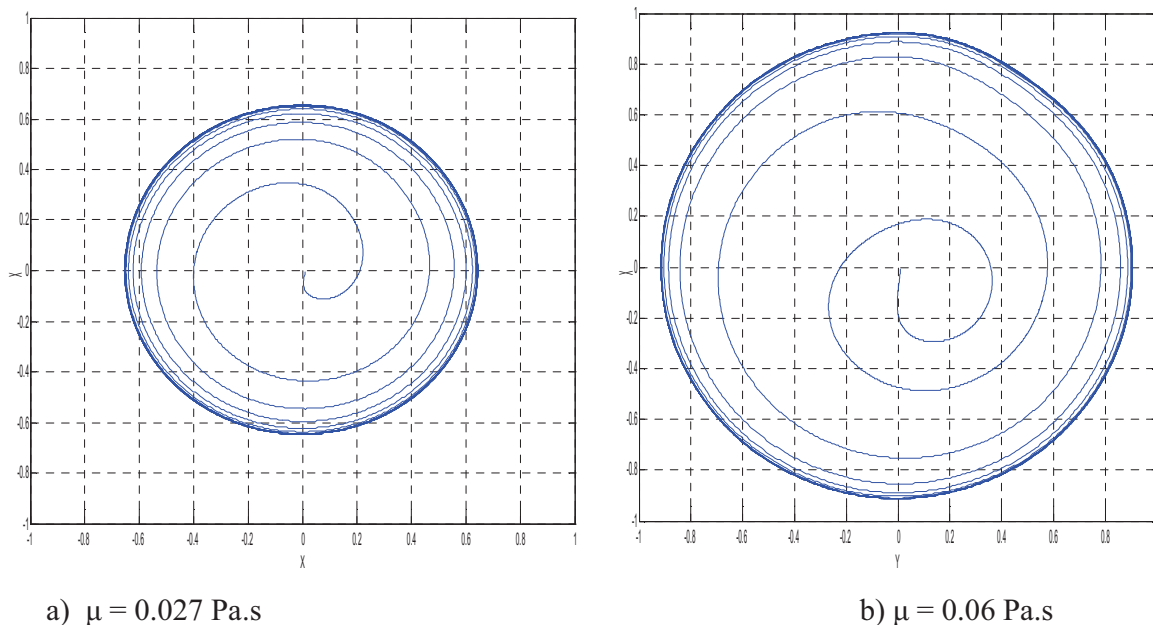


Fig. V.12: Trajectoires du centre de l'arbre dans le palier pour différentes valeurs de viscosité dynamique pour un faible balourd ($\varepsilon_b = 0.2$).

La figure V.12.a représente la trajectoire du centre de l'arbre à l'intérieur du cercle de jeu cette trajectoire est une orbite circulaire dont la taille de cette trajectoire augmente avec l'augmentation de la vitesse figure V.12.b est proche du cercle de jeu. Le rapprochement du centre de l'arbre du cercle de jeu constitue un danger car il peut provoquer un contact métal-métal entre arbre et coussinet.

La diminution de la viscosité permet de réduire de façon significative la taille des orbites.

V.4.2.b Variations de déplacement du centre de l'arbre au cours du temps

Les variations au cours du temps du déplacement selon $x(t)$ et $y(t)$ sont représentées par les figures V.13 et V.14.

Les figures V.13.a et V.14.a représentent les amplitudes de vibration crête-crête calculées au cours 34 révolutions de l'arbre pour un faible balourd ($\varepsilon_b = 0.2$), en régime transitoire et pour différentes valeurs de la viscosité ($\mu = 0.027 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ et $\mu = 0.06 \text{ Pa}\cdot\text{s}$) sont respectivement ($\Delta x = 200 \mu\text{m}$ et $\Delta y = 210 \mu\text{m}$) pour fluide newtonien,

les amplitudes de vibrations représentés par les figures V.13.b et V.14.b sont ($\Delta x = 230 \mu\text{m}$ et $\Delta y = 240 \mu\text{m}$) pour une vitesse de 6000 rpm .

En remarque que le mouvement vibratoire est grand pour la viscosité ($\mu = 0.06 \text{ Pa}\cdot\text{s}$) parce ce qu'il ya diminution de la viscosité due à l'élévation de la température.

Dans ces conditions, le comportement dynamique du palier apparaît clairement.

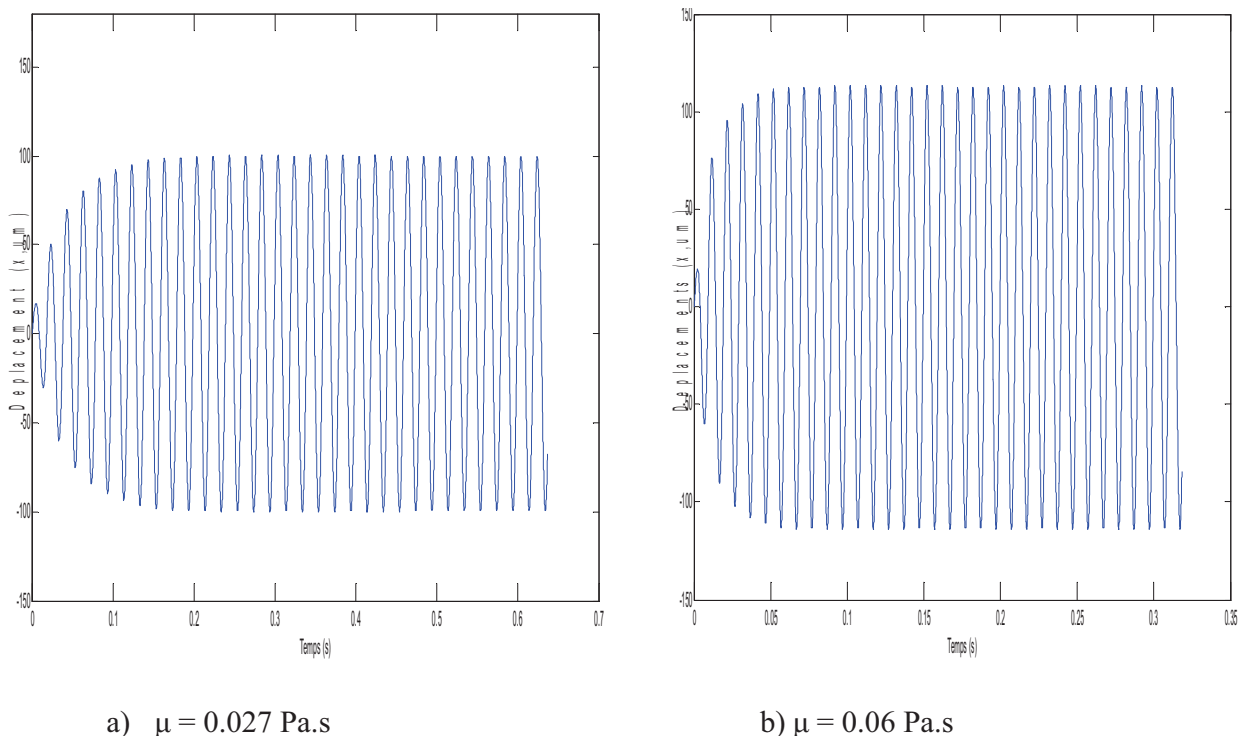


Fig.V.13 : Variations des déplacements $x(t)$ du centre de l'arbre en fonction du temps pour différentes valeurs de viscosité dynamique avec faible balourd ($\varepsilon_b = 0.2$), $N = 6000 \text{ rpm}$

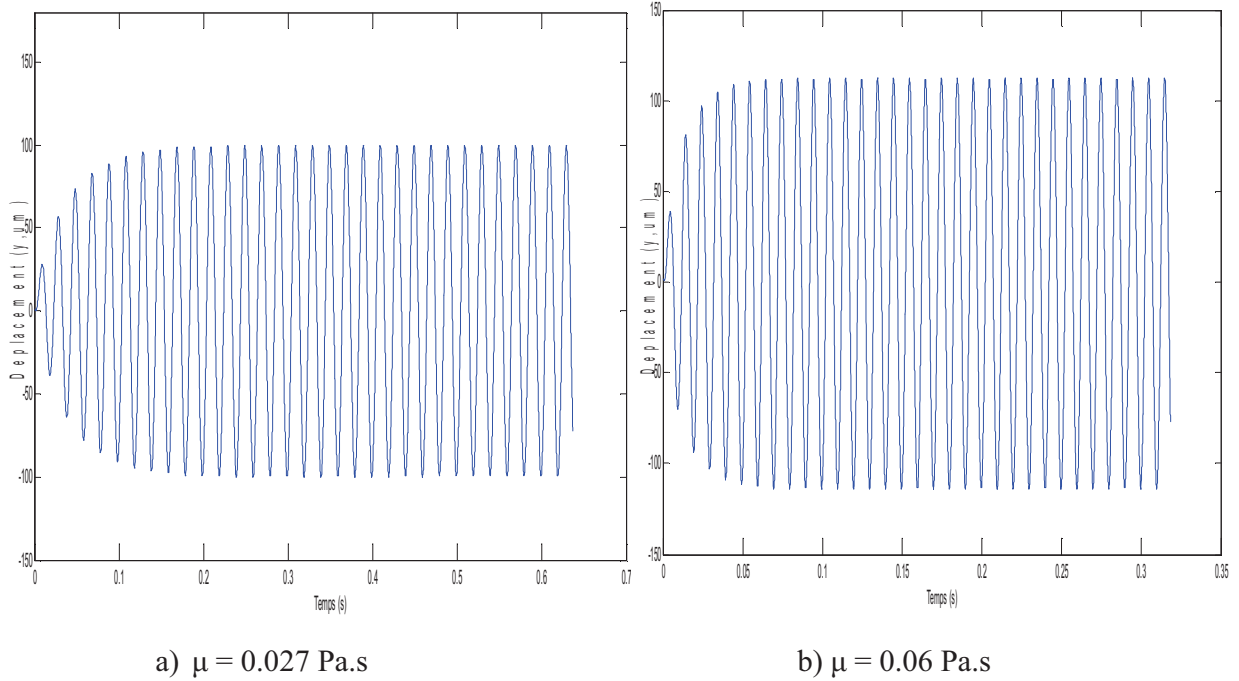


Fig.V.14 : Variations des déplacements $y(t)$ du centre de l'arbre en fonction du temps pour différentes valeurs de viscosité dynamique avec un faible balourd ($\epsilon_b=0.2$), $N=6000 \text{ rpm}$

V.4.2.c Champ de pression dans le film fluide calculée dans le palier

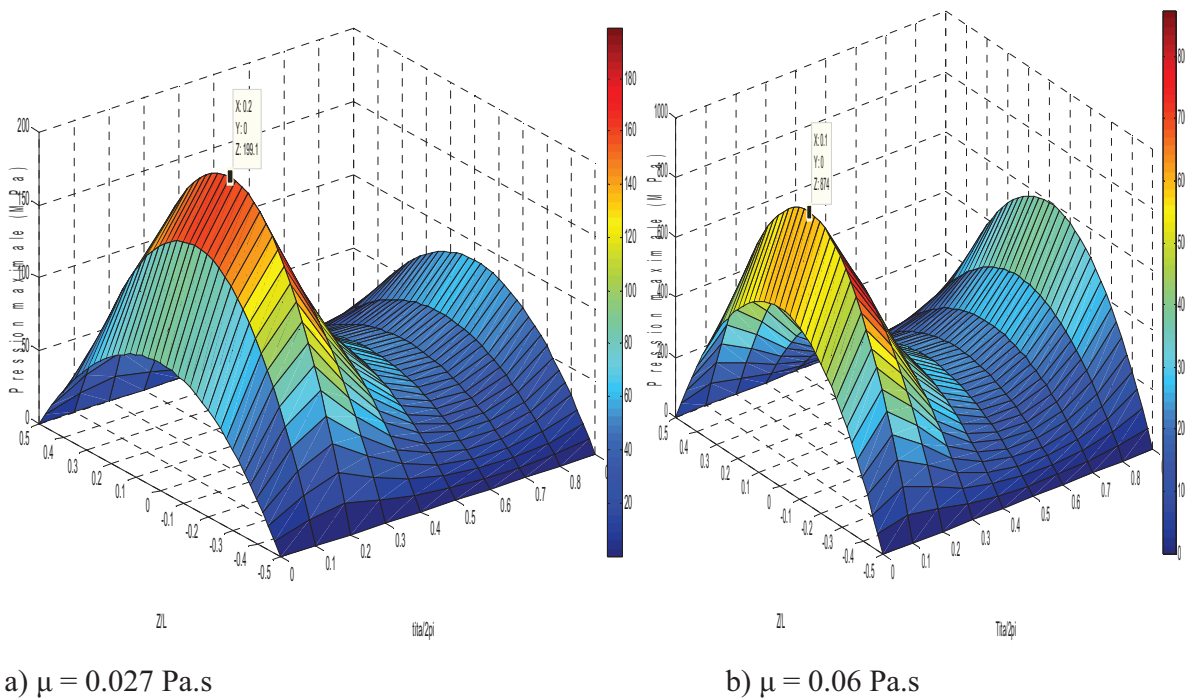


Fig.V.15 : Champ de pression calculé pour différentes valeurs de la viscosité dynamique et un faible balourd ($\epsilon_b=0.2$)

La figure V.15 représente le champ de pression calculé dans le film fluide dans le cas d'un fluide newtonien pour un faible balourd en remarque que la pression dans le fluide diminue avec l'augmentation de la viscosité V.15.a ce qui permet de réduire la température dans le film fluide.

V.4.2.d Variation de l'épaisseur minimale du film lubrifiant

La figure V.16 représente les variations au cours du temps de l'épaisseur minimale du film dans le cas d'un balourd ($\epsilon_b = 0.2$).

La figure (V.16.a) montre que pour une viscosité $\mu = 0.06$ Pa.s entraîne :

Une diminution de l'épaisseur minimale du film cette diminution est de l'ordre 25% par rapport à une viscosité de ($\mu = 0.027$ Pa.s) figure (V.16.b).

Il est à noter que les variations sinusoïdales de l'épaisseur minimale du film dans le cas d'un faible balourd proviennent du fait que l'augmentation de la viscosité due à l'élévation de la température.

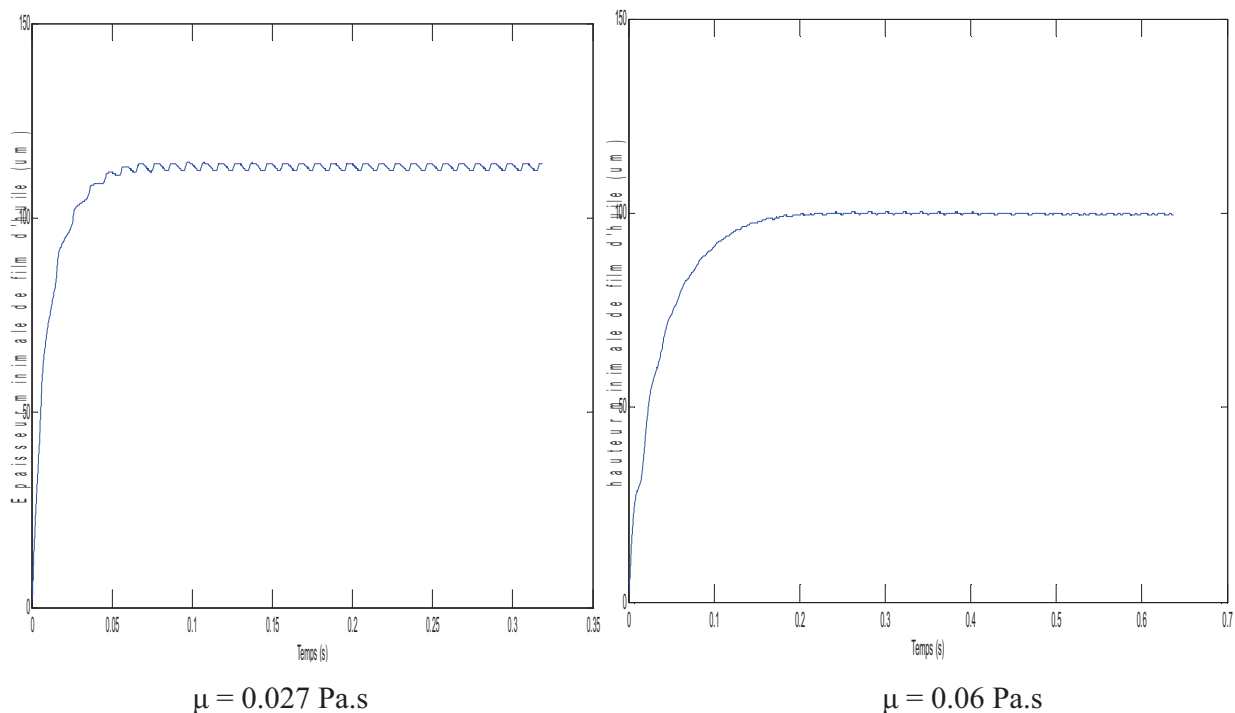


Fig. V.16 : Variations de l'épaisseur minimale du film en fonction du temps pour différentes valeurs de viscosité dynamique dans le cas d'un balourd faible ($\epsilon_b = 0.2$).

V.4. 3 Effet du paramètre de couple des contraintes sur les performances dynamique du palier lisse

L'étude de l'influence des effets non newtoniens du fluide lubrifiant sur le comportement dynamique d'un palier lisse pour différentes valeurs de l'excentricité du balourd sur le comportement dynamique non linéaire du palier a été effectuée pour les conditions de fonctionnement suivantes:

- ◆ Palier soumis à une charge statique seule ($\epsilon_b = 0$);
- ◆ Palier soumis à une charge statique avec balourd ($\epsilon_b = 0.2$ et 0.8).

Les résultats sont présentés pour la vitesse de rotation de l'arbre $N = 3000 \text{ rpm}$.

Les calculs sont réalisés en utilisant la théorie de la lubrification hydrodynamique laminaire pour différentes valeurs du couple de contrainte.

Ces résultats concernent :

- ◆ Les trajectoires décrites par le centre de l'arbre dans le palier.
- ◆ Champ de pression dans le film fluide calculé.
- ◆ Les variations de déplacement selon $x(t)$ et $y(t)$ en fonction du temps.

Nous avons appliqué l'approche bidimensionnelle pour l'étude de l'effet du paramètre du couple de contrainte $\tilde{\ell}$.

V.4. 3.a Palier soumis à une charge statique seule ($\epsilon_b = 0$)

La valeur de charge statique sur le demi-palier est $W_0 = 1800 \text{ N}$ correspondant au quatre poids du rotor.

a) Variations de la trajectoire du centre de l'arbre :

La figure. V.17 représente une comparaison de la trajectoire du centre de l'arbre calculée pour différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes pour un fluide newtonien $\tilde{\ell} = 0$ figure V.17.a et pour un fluide non newtonien (présence des couples de contraintes dans le fluide lubrifiant $\tilde{\ell} = 0.2$ et $\tilde{\ell} = 0.4$) figure V.17.b et figure V.17.c le chemin des centres de l'arbre approches graduellement vers la position d'équilibre statique dont les coordonnées sont rapportées au tableau V.2 .

La présence des paramètres des couples de contraintes dans le fluide lubrifiant à des effets positifs vis-à-vis de la stabilité du palier. D'autre part, la présence des additifs de longues chaînes moléculaires permettent de réduire de façon significative la taille des trajectoires.

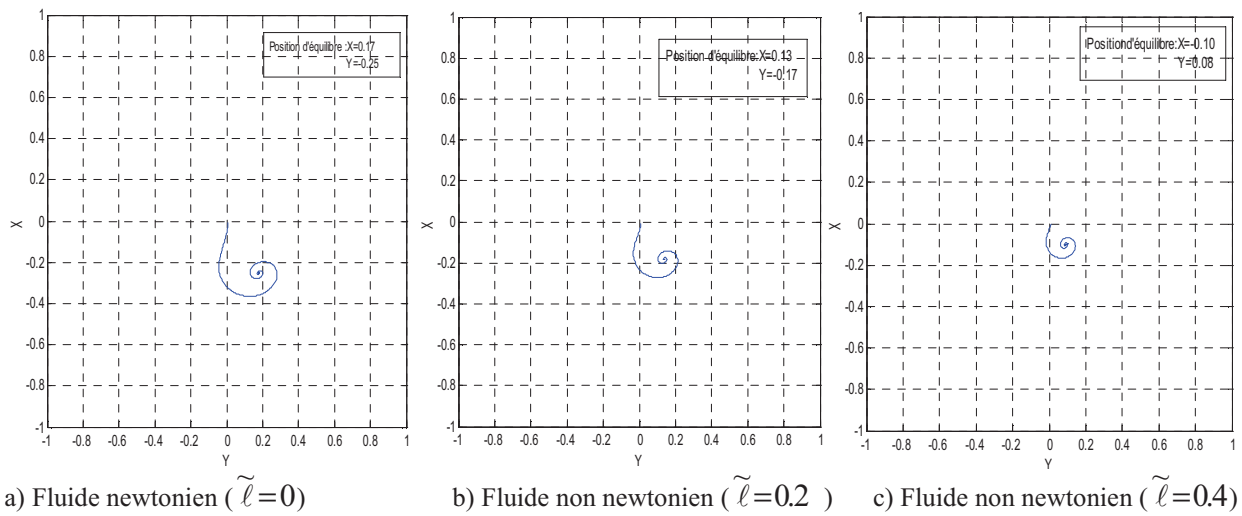
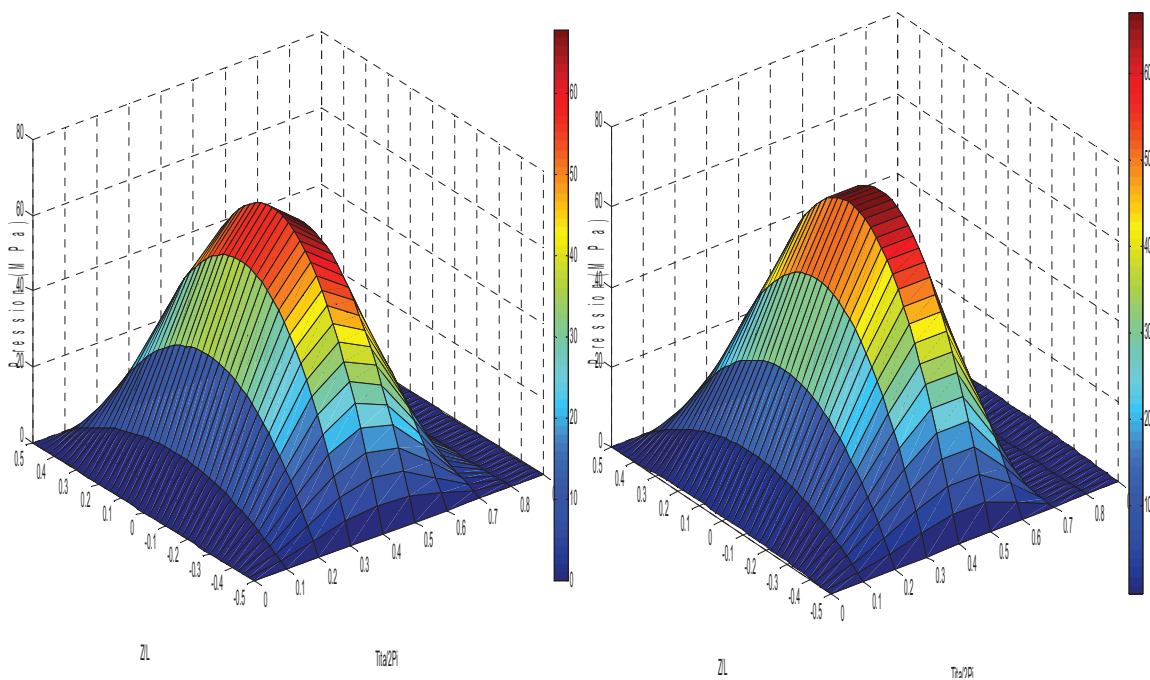


Fig. V.17 : Trajectoires du centre de l'arbre pour différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes ($\varepsilon_b=0.00$), $N=3000$ rpm

b) Champ de pression dans le film fluide calculée dans le palier :



a) Fluide newtonien ($\tilde{\ell}=0$)

b) Fluide non newtonien ($\tilde{\ell}=0.2$)

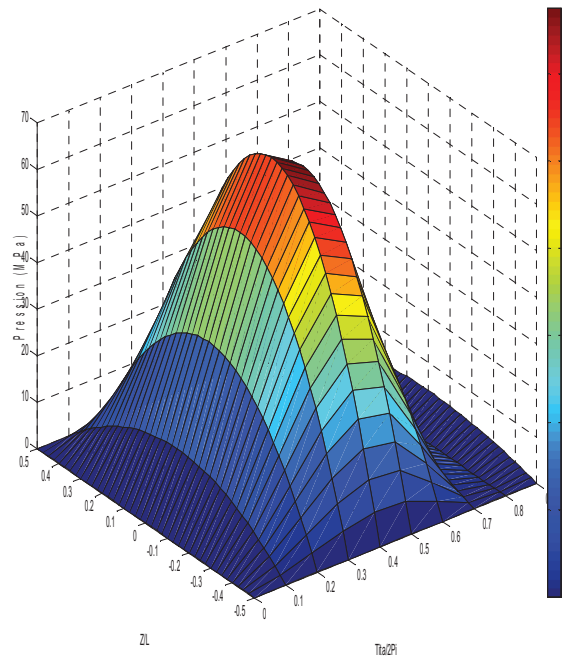
c) Fluide non newtonien ($\tilde{\ell}=0.4$)

Fig.V.18 : Champ de pression calculé pour différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes ($\varepsilon_b=0.00$)

La figure V.18 représente le champ de pression calculé dans le film fluide dans le cas d'un fluide newtonien et non newtonien pour un balourd nul en remarque que la pression dans le fluide augmente avec le paramètre des couples de contrainte ce qui permet d'améliorer de façon importante la portance hydrodynamique du palier lisse .

V.4. 3.b Palier soumis à une charge statique avec balourd

Le balourd est caractérisé par la distance e_b entre le centre géométrique de l'arbre (cylindre parfait supposé indéformable) et son centre de masse.

Le rapport ε_b d'excentricité déséquilibrée ($\varepsilon_b = 0.20$ et 0.8) qui correspond à $e_b = 70 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ et $e_b = 280 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, produit d'une charge dynamique déséquilibrée $F_d = M e_b \omega^2 = 234897 \text{ N}$ et $F_d = 939586 \text{ N}$. Cette valeur est plus grande que la charge statique.

a) Variations de la trajectoire du centre de l'arbre :

Les trajectoires du centre de l'arbre sont données sur la figure V.19.a avec et sans paramètres du couple de contraintes (fluide newtonien).

Puisque la charge dynamique est inférieure que la charge statique ou presque égale, le

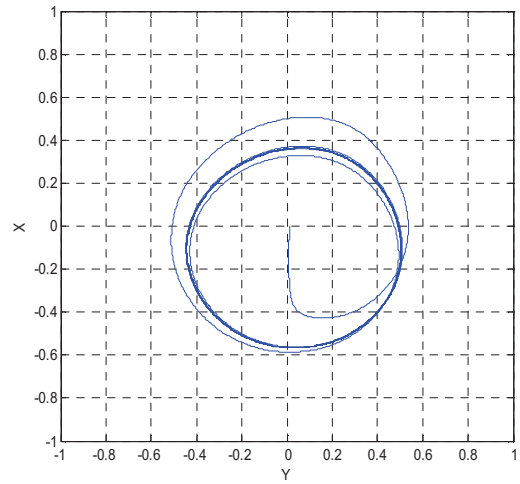
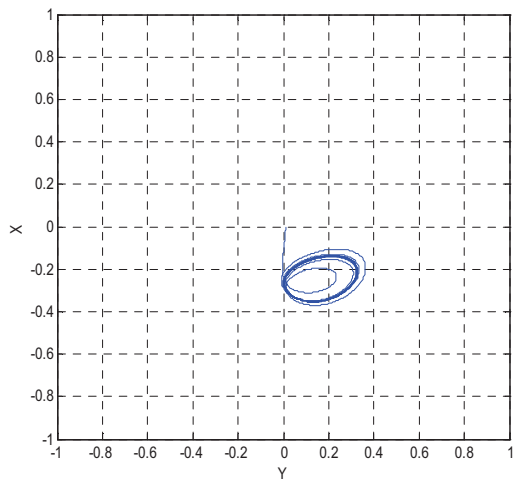
centre de l'arbre se déplace autour de la position d'équilibre statique.

L'orbite a une forme elliptique pour les différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes ($\tilde{\ell}=0$, $\tilde{\ell}=0.2$ et $\tilde{\ell}=0.4$).

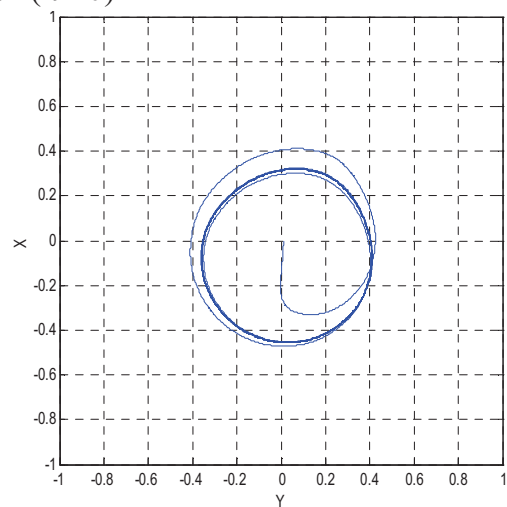
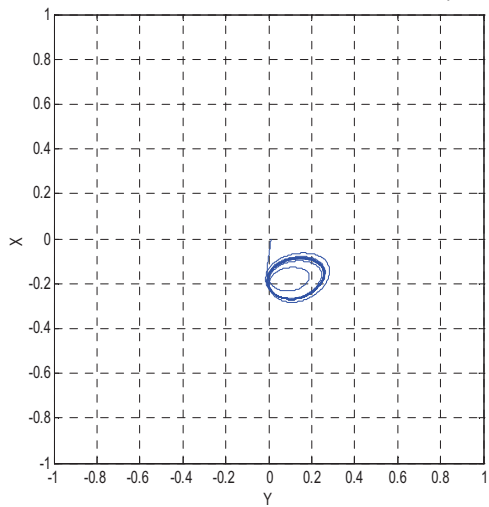
Les trajectoires du centre de l'arbre avec et sans paramètres des couples de contraintes sont tracées respectivement sur la figure V.19. b. l'arbre a une amplitude très grande de mouvement circulaire et le comportement dynamique non linéaire apparaît clairement. C'est dû au fait que la charge dynamique est très importante comparée à la statique.

Il convient noter que l'orbite circulaire décrite par le centre de l'arbre proche du cercle de jeu. Le rapprochement du centre de l'arbre du cercle de jeu constitue un danger car il pourrait provoquer un contact métal-métal entre les surfaces de l'arbre et du coussinet.

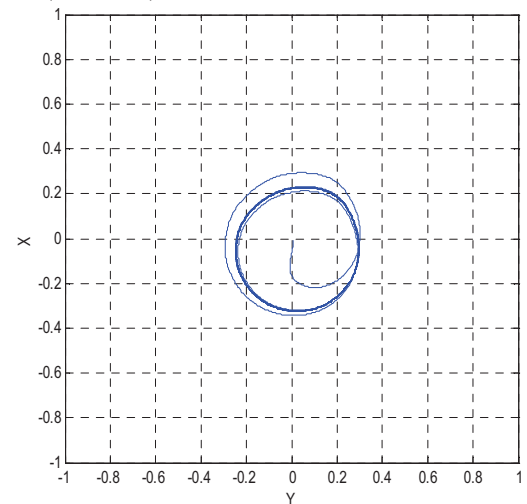
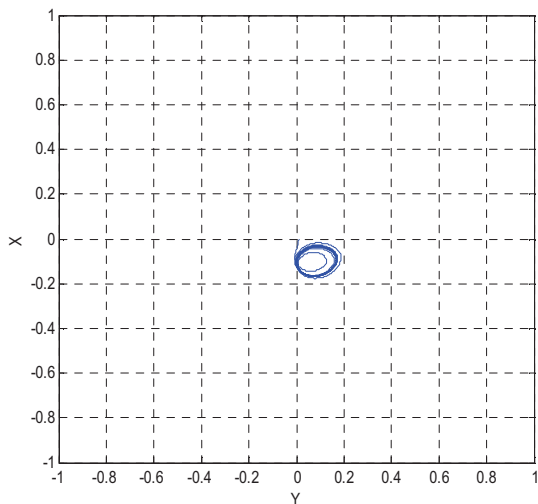
D'après la figure V.19 la présence des paramètres des couples de contraintes dans le fluide lubrifiant a des effets positifs vis-à-vis de la stabilité du palier. D'autre part, la présence des additifs de longues chaînes moléculaires permettent de réduire de façon significative la taille des orbites.



1. Fluide newtonien ($\tilde{\ell}=0$)



2. Fluide non newtonien ($\tilde{\ell}=0.2$)



3. Fluide non newtonien ($\tilde{\ell}=0.4$)

a) Cas d'un balourd $\epsilon_b=0.2$

b) Cas d'un balourd $\epsilon_b=0.32$

Fig V.19: Trajectoires du centre de l'arbre pour différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes dans le cas des faibles balourds, $N=3000$ rpm

c) Variation de déplacement au cours du temps :

Les variations au cours du temps du déplacement selon $x(t)$ et $y(t)$ sont représentées par les figures V.20 et V.21.

Les figures V.20.a et V.21.a représentent les amplitudes de vibration crête-crête calculées au cours des 35 révolutions de l'arbre pour des faibles balourds ($\varepsilon_b = 0.2$), en régime transitoire et pour différentes valeurs du couple de contrainte ($\tilde{\ell} = 0$, $\tilde{\ell} = 0.2$ et $\tilde{\ell} = 0.4$) sont respectivement ($\Delta x = 75.46 \mu\text{m}$ et $\Delta y = 113.24 \mu\text{m}$) et pour un fluide newtonien, ($\Delta x = 64.21 \mu\text{m}$ et $\Delta y = 91.99 \mu\text{m}$) et ($\Delta x = 46.93 \mu\text{m}$ et $\Delta y = 95.11 \mu\text{m}$).

On remarque que le mouvement vibratoire est faible parce que la charge dynamique est plus faible que la charge statique.

Par contre pour des grands balourds ($\varepsilon_b = 0.8$) les amplitudes de vibrations crête-crête calculées ($\Delta x = 325.5 \mu\text{m}$ et $\Delta y = 323.3 \mu\text{m}$) et pour un fluide newtonien qui sont très proches du jeu radiale $C = 350 \mu\text{m}$ du palier, ($\Delta x = 271 \mu\text{m}$ et $\Delta y = 276.38 \mu\text{m}$) et ($\Delta x = 193.19 \mu\text{m}$ et $\Delta y = 268.3 \mu\text{m}$) correspondant aux valeurs du couple de contrainte ($\tilde{\ell} = 0.2$ et $\tilde{\ell} = 0.4$) qui sont représentées sur les figures V.20.b et V.21.b. on remarque que le mouvement vibratoire est grand parce que la charge statique est plus faible que la charge dynamique. Dans ces conditions, le comportement dynamique du palier apparaît clairement.

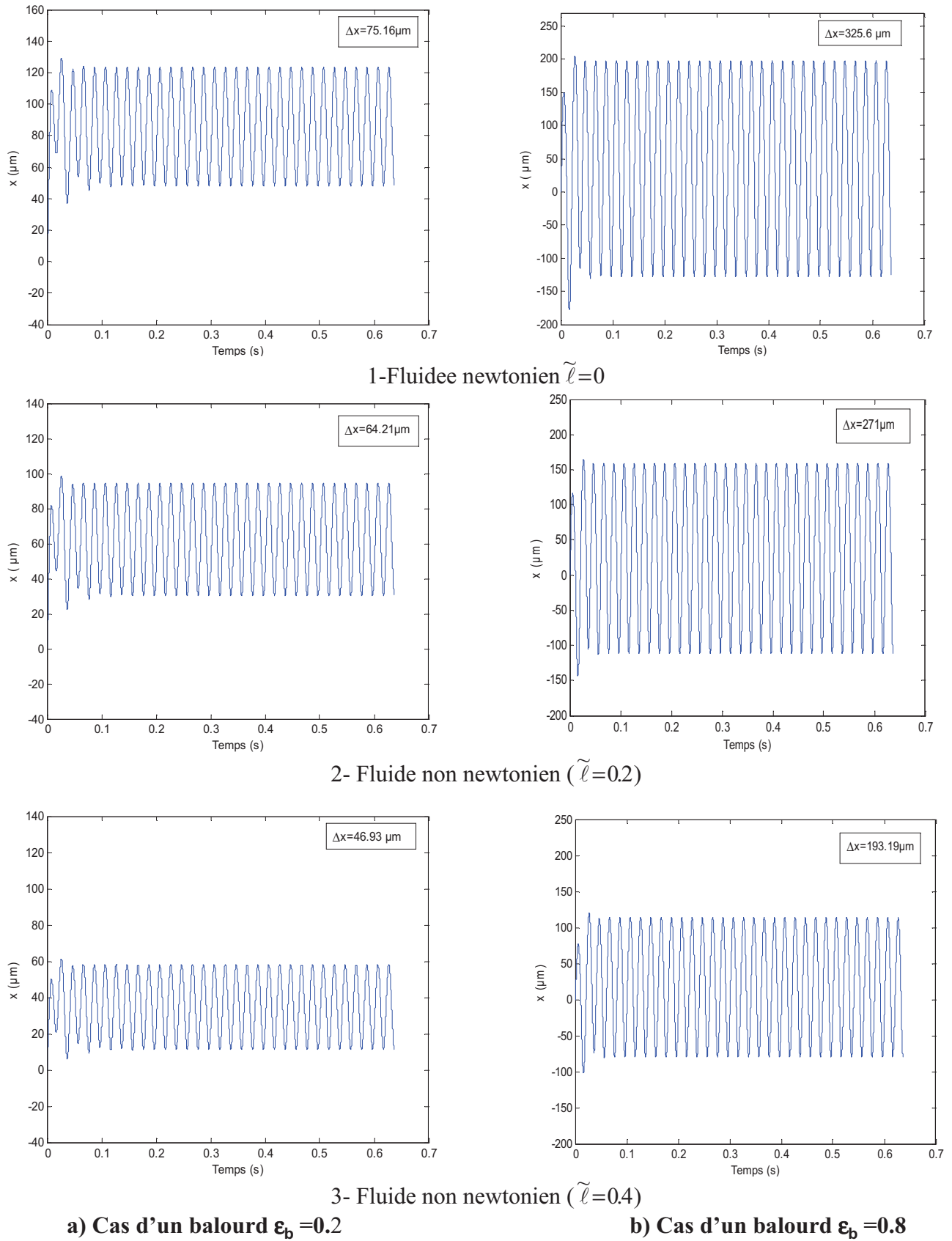


Fig .V.20 : Variations des déplacements $x(t)$ du centre de l'arbre en fonction du temps pour différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes et différentes valeurs du balourd.

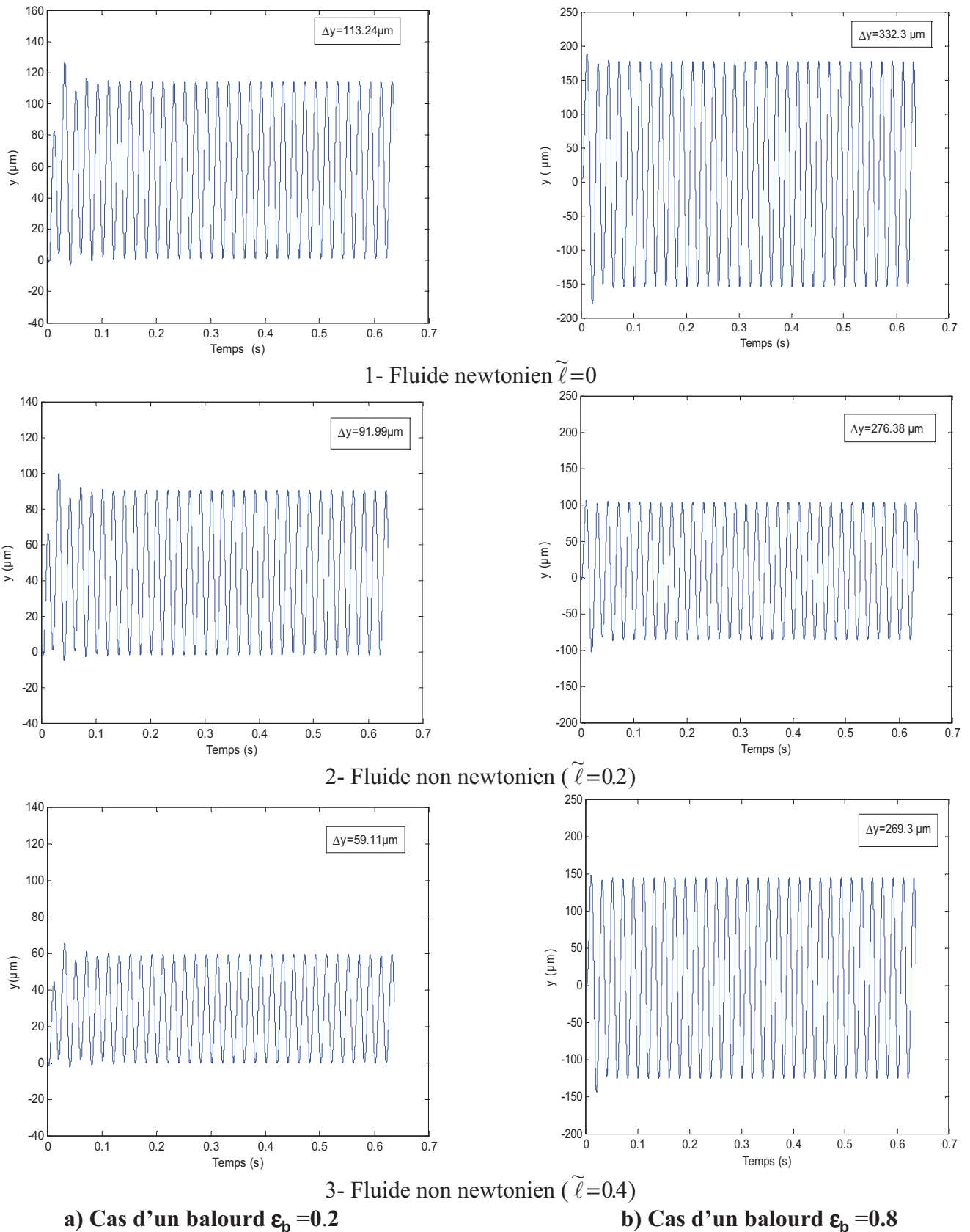


Fig.V.21 : Variations des déplacements $y(t)$ du centre de l'arbre en fonction du temps pour différentes valeurs du paramètre de couple des contraintes et différentes valeurs du balourd, $N=3000$ rpm

V.5 Conclusion

Après validation du programme de calcul développé, nous avons étudié, l'influence des paramètres avec est sous balourd tels que la vitesse de rotation de l'arbre, la viscosité du lubrifiant est l'effet des paramètres des couples de contraintes sur :

La trajectoire du centre de l'arbre dans le palier ;

- ◆ La hauteur minimale du film lubrifiant au cours du temps ;
- ◆ La pression maximale axiale dans le film au cours du temps ;
- ◆ Les composantes des déplacements au cours du temps ;
- ◆ Les composantes d'accélération au cours du temps ;
- ◆ Le champ de pression calculé dans le film fluide.

Cette étude a montré que :

Par comparaison aux fluides newtoniens les fluides polaires ou à couple de contrainte permettent :

- ✓ Une trajectoire plus stable.
- ✓ Une atténuation importante des amplitudes des vibrations même pour les grandes excentricités de balourd.
- ✓ Augmentation du champ de pression calculé.
- La dégradation de l'huile de lubrification des paliers due à une grande élévation de la température a non seulement un effet néfaste sur le bon fonctionnement des paliers mais elle a aussi un effet indésirable sur l'état vibratoire du rotor,
- Ces influences présentent des avantages et des inconvénients sur le système paliers-rotor car nous recherchons toujours à augmenter la hauteur minimale du film lubrifiant afin de diminuer les risques de grippage et d'avaries par rupture du film d'huile et à diminuer l'amplitude résultante du centre du rotor pour un comportement vibratoire acceptable.

Pour avoir un compromis entre la hauteur minimale du film lubrifiant et l'amplitude résultante du centre du rotor, il est nécessaire soit d'éviter les plages de vitesses qui présentent un mauvais compromis, soit de pousser une étude d'optimisation sur les différents paramètres étudier si la nécessité de ces plages de vitesses est incontournable.

CONCLUSION GENERALE

L'étude de l'impact des paramètres agissant sur le comportement dynamique non linéaire d'un palier lisse nécessite l'étude des caractéristiques dynamiques de ce type de palier (paliers hydrodynamique radiaux) a été abordée avec une grande attention car elle conditionne la compréhension du comportement de l'ensemble de la ligne d'arbre, le rotor est considéré rigide est soutenu symétriquement par deux palier radiaux identiques. La modélisation est non linéaire qui basée sur la résolution des équations de mouvement du rotor couplées aux équations de la lubrification hydrodynamique écrites pour un palier lisse,

On a pu constater que le comportement du lubrifiant peut être Newtonien ou non newtonien .La non-linéarité du terme visqueux peut se mettre sous différentes formes. En partant de ces lois rhéologiques et des équations de base de la mécanique des milieux continus appliquées aux films minces, une nouvelle équation de Reynolds Modifiée dite non Newtonienne a été présentée. La résolution de cette équation a été faite dans un premier temps d'une manière directe est les résultats étudiés pour extraire les paramètres influents de la géométrie et de la rhéologie. L'analyse de ces résultats a permis de valider la théorie non Newtonienne.

Une étude paramétrique a été menée afin de mettre en évidence l'influence des paramètres tels que la géométrie locale, la loi de comportement du fluide. L'analyse des résultats nous a permis de valider définitivement la méthode d'homogénéisation pour obtenir les caractéristiques importantes du contact. C'est à notre connaissance la première fois que cette méthode est appliquée aux fluides non-Newtoniens.

Cette étude a montré que les paramètres des paliers ont une influence considérable sur le comportement vibratoire du rotor. De même, les paramètres des supports ont une influence considérable sur le fonctionnement des paliers.

Ces influences présentent des avantages et des inconvénients sur le système palier-rotor car nous recherchons toujours à augmenter la hauteur minimale du film lubrifiant pour diminuer les risques de grippage et d'avaries par rupture du film d'huile et à diminuer l'amplitude résultante du centre du rotor pour un comportement vibratoire acceptable.

Dans ce travail, on s'intéresse plus particulièrement à l'étude de l'influence de la vitesse ,de la viscosité et des effets non newtoniens dus à la présence des différents additifs dans le fluide

lubrifiant sur les performances d'un palier lisse dont le comportement dynamique est non linéaire avec est sans balourd.

Un programme de calcul numérique assez complexe est réalisé pour le calcul du problème de lubrification hydrodynamique d'un palier lisse lubrifié par un fluide newtonien et non newtonien.

Les résultats obtenus par notre étude ont permis de faire les conclusions suivantes :

- En remarque que le mouvement vibratoire est grand pour une viscosité plus faible parce ce que la diminution de la viscosité due à l'élévation de la température,
- Pour les paliers fonctionnant à grande vitesse, la théorie laminaire ne doit être utilisée pour étudier le comportement dynamique d'une ligne d'arbre il faut utiliser la théorie turbulent,
- Le comportement dynamique d'un palier est non linéaire surtout pour des grandes vitesses et lorsqu'il s'agit de balourds de grandes excentricités,
- La théorie non linéaire basée sur la résolution des équations de mouvements du rotor est plus appropriée pour l'étude du comportement des paliers lisses.

D'autre part, la prise en considération des couples de contrainte dans le fluide lubrifiant permet : D'augmenter l'épaisseur minimale du film et de réduire ainsi la pression maximale ; et d'augmenter le champ de pression du film lubrifiant calculé par l'amélioration de la portance hydrodynamique ,d'atténuer fortement les amplitudes de vibrations dues à la présence d'un balourd ; de réduire la taille des orbites stationnaires et d'assurer ainsi une grande sécurité de fonctionnement du palier lisse;

Les prolongements possibles de cette étude pouvant être envisagés sont :

- Prise en considération de la flexibilité de la ligne d'arbre reposant sur des paliers à longueur finie,
- La prise en compte de la variation de la pression et de la température dans le contact, d'où la nécessité de la résolution de l'équation de l'énergie dans le film et de la chaleur dans les massifs en contact,
- Prise en compte des déformations élastiques et thermoélastiques des éléments constituant le palier (arbre et palier),

- La prise en compte de la déformation des massifs en contact,
- Une étude en régime non stationnaire pour illustrer les phénomènes de démarrage-arrêts,
- Une étude expérimentale qui permettrait de valider complètement le modèle.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Hirn G.H. Sur les principaux phénomènes que présentent les frottement médiats, et sur les diverses méthodes employées au graissage des machines. *Bull. Soc. Ind. De Mulhouse*, XXVI: 188-277, 1854.
- [2] Tower B. First report on friction experiments. *Proc. IMechE*, 34:632-659, 1883.
- [3] Reynolds O. On the Theory of Lubrication and its Application on m. Beauchamp Towers's Experiments. *Phil. Trans. Royal Society, London*, A-177 : 157-234, 1886.
- [4] Frêne J. La tribologie de l'antiquité à nos jours. *Mécanique et Industrie*, Elsevier, 2:263-282, 2001.
- [5] Christopherson D.G. A new mathematical method for the solution of film lubrication problems. *Inst. Mech. Engrs. J. Proc.*, 146:126-135, 1941.
- [6] Ocvirk F.W. and DuBois G.B. Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short Bearing Approximations of Full Journal Bearings. *Report 1157, NACA*, 1953.
- [7] BOOKER J.F. Dynamically Loaded Journal Bearings: Mobility Method of Solution. *ASME, Journal of Basic Engineering*, séries D, p.537, Sept 1965.
- [8] BOOKER J.F. Dynamically Loaded Journal Bearings: Numerical Application of the Mobility Method. *ASME, Journal of Tribology*, séries F, 168-174, 1971.
- [9] Maspeyrot P. Comportement Dynamique des Paliers de Vilebrequin. Influence des Défauts de Forme et des Mésalignements. *Thèse de Doctorat*, Poitiers 1989.
- [10] Moes H. and Bosma R. Mobility and Impedance Definitions for Plain Journal Bearings. *Journal of Lubrication Technology*, 103(3) :468-470, 1981.
- [11] Tanneau G. Contribution à l'Etude des Paliers de Bielles, Effet des Rugosités. *Thèse de Doctorat 3ème Cycle*, Poitiers 1984.
- [12] Paranjpe R.S. and Goenka P.K. Analysis of Crankshaft Bearing Using a Mass Conserving Algorithm. *STLE, Tribol. Trans.*, 33:333-344, 1990.
- [13] Vijayarachavan D. and Brewster D.E. Frequency Effects on the Stability of a Journal Bearing for Periodic Loading. *ASME, Tribol. Trans.*, 114:107-115, 1992.

- [14] Vijayarachavan D., Brews D.E., and Keith, Jr T.G. Effect of Out-of-Roundness on the Performance of a Diesel Engine Connecting-Rod Bearing. *Trans. of the ASME*, 115:538-543, July 1993.
- [15] Vincent B., Maspeyrot P., and Frêne J. Starvation and cavitation effects in finite grooved journal bearing. *Proceedings of 21st Leeds-Lyon Symposium of Tribology*, Leeds, 455-464, September 1994.
- [16] Vincent B., Maspeyrot P., and Frêne J. Cavitation in Non-circular Journal Bearing. *WEAR*, 207 :122-127, 1997
- [17] Nacer TALA IGHIL Contribution à l'étude des paliers en régime hydrodynamique instationnaire *Thèse de Doctorat 3ème Cycle*, Oran ,Alger.2007
- [18] Gecim B.A., "Non-Newtonian Effects of Multigrade Oils on Journal Bearing Performance", *STLE Tribology Transaction*, Vol. 33, pp 384-394, 1990
- [19] Dien, I. K., and Elrod H.G., "A Generalised Steady-State Reynolds Equation for NonNewtonian Fluids with Application to Journal Bearings", *ASME Journal of Lubrication Technology*, vol. 104, pp. 385-390, 1983.
- [20] Tanner, R. I., "Non-Newtonian Lubrication Theory and its Application to the Short Journal Bearing", *Australian J. of Applied Science*, vol. 14, pp.29-36, 1963
- [21] Wada, S., and Hayashi, H., "Hydrodynamic Lubrication of Journal Bearings by PseudoPlastic Lubricants; Part 1: Theoretical Studies, Part2: Experimental Studies", *Bulletin of JSME*, vol. 14, pp. 268-286, 1971
- [22] Rastogi A., Gupta R.K., "Lubricant Elasticity and the Performance of Dynamically Loaded Short Journal Bearings", *Journal of Rheology*, Vol. 34(8), pp 1337-1356, 1990
- [23] Rastogi A., Gupta R.K., "Accounting for Lubricant Shear Thinning in the Design of Short Journal Bearings", *Journal of Rheology*, Vol. 35(4), pp 589-603, 1991
- [24] Paranjpe, R. S. "Analysis of Non-Newtonian Effects in Dynamically Loaded Finite Journal Bearings Including Mass Conserving Cavitation", *ASME Journal of Tribology*, vol. 114, pp. 736-746, 1992

- [25] Wang, P. Keith, T.G. and Vaidyanathan, K., "Non-Newtonian Effects on the Performance of Dynamically Loaded Elliptical Journal Bearings Using a Mass-Conserving Finite Element Cavitation Algorithm", *STLE Tribology Transaction*, Vol. 44, No.4, pp. 533-542, 2001
- [26] V. K. Stokes, "Couple stresses in fluids," *Physics of Fluids*, vol. 9, article 1709, 1966.
- [27] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*, B. G. Teubner, Leipzig, Germany, 1928.
- [28] J.-R. Lin, "Squeeze film characteristics of long partial journal bearings lubricated with couple stress fluids," *Tribology International*, vol. 30, no. 1, pp. 53–58, 1997.
- [29] J.-R. Lin, "Squeeze film characteristics of finite journal bearings: couple stress fluid model," *Tribology International*, vol. 31, no. 4, pp. 201–207, 1998.
- [30] D. R. Oliver, "Load enhancement effects due to polymer thickening in a short model journal bearing," *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 30, no. 2-3, pp. 185–196, 1966.
- [31] U. M. Mokhiamar, W. A. Crosby, H. A. El-Gamal, A study of a journal bearing lubricated by fluids with couple stress considering the elasticity of the liner, *Wear*, 224, 1999, 194-201.
- [32] A. K. M. Lahmar and B. Bou-Said, "Etude des paliers lisses mésalignés lubrifiés par des fluides à couple de contrainte," *Mécanique & Industries*, vol. 8, pp. 577–595, 2007.
- [33] *Revue des Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique, "Butées et Paliers hydrodynamiques"* par J. FRENE, référence B5 320, pp.1 à 33.
- [34] Jean BOUYER Etude des performances thermoélastohydrodynamique de paliers soumis à des conditions sévères, Université de Poitiers, thèse doctorat, 2003
- [35] GÜMBEL L. Vergleich der Ergebnisse der rechnerischen Behandlung des lagerschmierungsproblem mit neuen Versuchsergebnissen, *Monatsblätter d. Berlin, Bezirk V.D.I.*, 125-8, Sept. 1921.]
- [36] Swift H. W. The stability of lubricating films in journal bearings. *Proc. Inst. Civil Eng.* 223, Pt 1, pp. 267-322, 1931.

- [37] Virgil OPTASANU Modélisation expérimentale et numérique de la lubrification des paliers compliants sous chargement dynamique, thèse doctorat, Université de Poitiers ,2000
- [38] ABDUL WAHED, Comportement dynamique des paliers fluide , these de docteur,INSA de Lyon ,1982.
- [39] ABDUL WAHED, D.Nicolas, « Stability and Unbalance Reponse of Four Multilobe Journal Bearings, » Journal of lubrication technology ,1982 ,Vol 104 ,page 66,75,
- [40] O.BONNEAU. « Comportement statique et dynamique de ligne d'arbre montée sur paliers fluide : influence des caractéristiques des paliers », thèse de docteur, université de Poitiers 1989 .
- [41] Grégory .GRAU. Paliers aérodynamique radiaux à structure à feuilles : Contribution à l'étude statique et comportement dynamique non linéaire, thèse de docteur, INSA de Lyon ,2004.
- [42] KANE.MALAL, thèse doctorat ,Contribution à l'étude de l'influence de la rugosité et des effets non_Newtoniens dans les contacts sévères lubrifiés,2003.
- [43] Khalid Zarbane ,Etude numérique et expérimentale du comportement d'un film lubrifiant soumis a un chargement périodique ,thèse en docteur , Université de Poitiers, 2009.
- [44] LAHMAR M., HADDAD A., D. NICOLAS, An optimised short bearing theory for nonlinear dynamic analysis of turbulent journal bearings, European Journal of Mechanics ASolids, Volume 19, N° 1, 2000, 151-177
- [45] A.Belhamra,O.Meramria Nonlinear Dynamical Analysis for a Plain ,Hindawi Journal of Advances in Mechanical Engineering,Volume 2014 Article ID 953409, 9 pages
- [46] Hashimoto H., Wada S., Dynamic behaviour of unbalanced rigid shaft supported on turbulent journal bearings:Theory and experiment,Trans. ASME 112, pp. 404-408, 1990
- [47] Robertson W. S., "Lubrication in practice", Second edition, MCMILLAN PRESS LONDON (ESSO), 1983.

Liste des symboles

C	Jeu radial du palier, [m]
D	Diamètre du palier, [m]
e_b	Excentricité du balourd, [m]
e	Excentricité du palier, $e = \left \overrightarrow{o_a o_c} \right $, [m]
h	Épaisseur du film lubrifiant, [m]
\tilde{h}	Épaisseur du film adimensionnée, $\tilde{h} = \frac{h}{C}$
L	Longueur du palier, [m]
m	Masse de l'arbre affecté au palier, [kg]
\tilde{m}	Masse adimensionnée, $\tilde{m} = \frac{mC\omega_a^2}{W_0}$
o_a	Centre de l'arbre,
o_{a0}	Position d'équilibre statique,
o_c	Centre du coussinet,
p	Pression dans le film lubrifiant, [Pa]
\tilde{p}	Pression adimensionnée, $\tilde{p} = \frac{p}{\mu\omega_a \left(\frac{R}{C}\right)^2}$
\tilde{p}_{\max}	Pression maximale adimensionnée, $\tilde{p}_{\max} = \frac{p_{\max}}{\mu\omega_a \left(\frac{R}{C}\right)^2}$
p_0	Pression statique dans le film lubrifiant, [Pa]
\tilde{p}_0	Pression statique adimensionnée, $\tilde{p}_0 = \frac{p_0}{\mu\omega_a \left(\frac{R}{C}\right)^2}$
p_ε, p_ϕ	Pressions dynamiques complexes, [Pa]
$\tilde{p}_\varepsilon, \tilde{p}_\phi$	Pressions dynamiques complexes adimensionnées, $\tilde{p}_\varepsilon, \tilde{p}_\phi = \frac{(p_\varepsilon, p_\phi)}{\mu\omega_a \left(\frac{R}{C}\right)^2}$

R_a	Rayon de l'arbre, [m]
R_c	Rayon du coussinet, [m]
t	Temps, [s]
τ	Temps adimensionné, $\tau = \omega_a t$
W_0	Poids du rotor affecté au palier, $W_0 = mg$ [N]
F_0	Portance hydrodynamique, [N]
\tilde{F}_0	Portance hydrodynamique adimensionnée, $\tilde{F}_0 = \sqrt{\tilde{F}_\varepsilon^2 + \tilde{F}_\phi^2}$
F_ε, F_ϕ	Composantes de la portance hydrodynamique, [N]
$\tilde{F}_\varepsilon, \tilde{F}_\phi$	Composantes de la portance hydrodynamique adimensionnées,
$(\tilde{F}_\varepsilon, \tilde{F}_\phi)$	$= \frac{(F_\varepsilon, F_\phi)}{\mu \omega_a R L \left(\frac{R}{C}\right)^2}$
X, Y	Coordonnées du centre de l'arbre, [m]
\tilde{X}, \tilde{Y}	Coordonnées adimensionnées, $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{(X, Y)}{C}$
z	Coordonnée axiale du palier, [m]
\tilde{z}	Coordonnée axiale adimensionnée, $\tilde{z} = \frac{z}{L}$
\dot{X}, \dot{Y}	Composantes de la vitesse de déplacement du centre de l'arbre, [m/s]
\ddot{X}, \ddot{Y}	Composantes de l'accélération du centre de l'arbre, [m/s ²]
\tilde{X}', \tilde{Y}'	Composantes de la vitesse adimensionnées, $(\tilde{X}', \tilde{Y}') = \frac{(\dot{X}, \dot{Y})}{C \omega_a}$
\tilde{X}'', \tilde{Y}''	Composantes de l'accélération adimensionnées, $(\tilde{X}'', \tilde{Y}'') = \frac{(\ddot{X}, \ddot{Y})}{C \omega_a^2}$
ϕ	Angle de calage, [rad]
ε	Excentricité relative, $\varepsilon = \frac{e}{C}$
ε_b	Excentricité relative du balourd, $\varepsilon_b = \frac{e_b}{C}$
ε_0	Excentricité relative statique dans la section médiane du palier, $\varepsilon_0 = \frac{e_0}{C}$

Ω	Coefficient de sur relaxation, $1 < \Omega < 2$
θ	Position angulaire d'un point de la surface du coussinet, [rad]
θ_{c0}	Angle de cavitation en régime statique, [rad]
ω_a	Vitesse angulaire de l'arbre, [rad/s]
ν	Viscosité cinématique, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, [m ² /s]
ρ	Masse volumique du lubrifiant, [kg/m ³]
γ	Fréquence d'excitation adimensionnée, $\gamma = \frac{\nu^*}{\omega_a}$
γ_c	Fréquence de fouettement adimensionnée, $\gamma_c = \frac{\nu_c^*}{\omega_a}$
μ	Viscosité dynamique du lubrifiant, [Pa.s]
e_{ijk}	tenseur de permutation d'ordre trois
M_{rk}	tenseur des couples de contraintes
l	Paramètre du couple des contraintes, $l = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}}$
\tilde{l}	Paramètre du couple des contraintes adimensionnés, $\tilde{l} = \frac{l}{C}$
η, η'	Constantes physiques dues à la présence des couples des contraintes, [N.s]

Annexe A

Equation de Reynolds pour un fluide newtonien

L'équation de Reynolds est obtenue à partir de l'intégration de l'équation de continuité à travers l'épaisseur du film.

a. Equation de Reynolds classique

$$\int_0^{h(x_1, x_3, t)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dx_2 = 0 \quad (1)$$

ou encore : $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

avec

$$I_1 = \int_0^h \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_2 ; \quad I_2 = \int_0^h \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 = [u_2]_0^h = u_{22} - u_{21} ; \quad I_3 = \int_0^h \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_2 .$$

Pour évaluer les intégrales I_1 et I_3 , on utilise la règle d'intégration de Leibnitz :

$$\int_{h_1(x_1, x_3, t)}^{h_2(x_1, x_3, t)} \frac{\partial F(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_i} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{h_1}^{h_2} F(x_1, x_2, x_3) dx_2 - F(x_1, h_2, x_3, t) \frac{\partial h_2}{\partial x_i} + F(x_1, h_1, x_3, t) \frac{\partial h_1}{\partial x_i} \quad (2)$$

$i = 1, 2, 3$

Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{\int_0^h u_1 dx_2}_{q_1} - u_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ I_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \underbrace{\int_0^h u_3 dx_2}_{q_3} - u_{23} \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{array} \right. \quad (3)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{h}{2} (u_{11} + u_{21}) \\ q_3 = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{h}{2} (u_{13} + u_{23}) \end{array} \right. \quad (4)$$

où q_1 et q_3 sont les composantes du vecteur débit par unité de longueur suivant x_1 et x_3 .

Soit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{h}{2} (u_{11} + u_{21}) \right) - u_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_{22} - u_{12} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{h}{2} (u_{13} + u_{23}) \right) - u_{23} \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h}{2} (u_{11} + u_{21}) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h}{2} (u_{13} + u_{23}) \right) - u_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1} - u_{23} \frac{\partial h}{\partial x_3} + u_{22} - u_{12} \end{aligned} \quad (6)$$

Avec

$$u_{22} = \frac{Dh}{Dt} = u_{21} \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_{23} \frac{\partial h}{\partial x_3} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7)$$

En remplaçant (7) dans (6) et en supposant, par hypothèse, que la vitesse de la paroi (a) est tangente à celle-ci ($u_{12} = 0$), l'équation de Reynolds prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h}{2} (u_{11} + u_{21}) \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h}{2} (u_{13} + u_{23}) \right) + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (8)$$

ou sous forme plus condensée :

$$\nabla \cdot \left(\frac{h^3}{12\mu} \vec{\nabla} p \right) = \frac{1}{2} \nabla \cdot (h \vec{U}) + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (9)$$

avec

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u_{11} + u_{21} \\ u_{13} + u_{23} \end{pmatrix}$$

L'équation de Reynolds peut s'écrire également :

$$\nabla \cdot \vec{q} = -\frac{\partial h}{\partial t} \quad (10)$$

$$\text{où } \vec{q} = -\frac{h^3}{12\mu} \vec{\nabla} p + \frac{h}{2} \vec{U}$$

L'équation de Reynolds (9) ou (10) écrite pour un écoulement bidimensionnel (2D), elle a été établie par Osborne Reynolds en 1886 est une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique dont l'inconnue principale est la pression dans le fluide qui n'admet généralement pas de solution analytique.

Remarque :

Annexe B

Equation de Reynolds dans le cas d'un palier lisse pour un fluide newtonien

Dans un palier où l'arbre est muni d'un mouvement de rotation dans un coussinet fixe, le jeu radial C étant très petit devant le rayon R du coussinet (ou l'arbre). On peut négliger, la courbure du film et développer le palier suivant sa direction circonférentielle.

Dans ces conditions, la surface du coussinet est confondue avec le plan (O, x, z) du référentiel. Si les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles, la surface de l'arbre est représentée par une surface telle que $y = h(x)$,

Dans le cas d'un palier, l'équation de Reynolds se simplifie sensiblement et prend la forme suivante :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{i}$$

Soit en remplaçant x par $R\theta$:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{ii}$$

Le second membre de l'équation, nul en lubrification hydrostatique, correspond à deux effets simultanés :

- effet d'entraînement (wedge effect) $6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta}$
- effet d'écrasement (squeeze effect): $12\mu \frac{\partial h}{\partial t}$