

Ministère de l'enseignement supérieur et la recherche scientifique

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Badji Mokhtar University
Annaba
Université Badji Mokhtar
Annaba



جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des sciences

Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Option

Mathématiques Appliquées

**Cycles limites d'une classe des équations
Différentielles du troisième ordre**

Par

HAMAMDA MERIEM

Sous la direction de

Pr: MAKHLOUF AMAR

Devant le jury

PRÉSIDENT: Salmi Abdelouaheb	M.C.A	U. B. M. ANNABA.
EXAMINATEUR: Laouar Abdelhamid	M.C.A	U. B. M. ANNABA.
EXAMINATEUR: Ferchichi Med Rédha	M.C.A	U. B. M. ANNABA.
EXAMINATRICE: Badi Sabrina	M.C.A	U. 8 MAI. GUELMA.
EXAMINATEUR: Hadidi Elbahi	M.C.A	U. B. M. ANNABA.

Année 2015 / 2016

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions premièrement les solutions périodiques de la classe des équations différentielles du troisième ordre de la forme

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + h(t) = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$$

où ε est un petit paramètre, $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $h(t)$ est une fonction $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ -périodique et F est une fonction non linéaire périodique de période $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$. En utilisant la théorie de la moyennisation, nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence de ces solutions périodiques.

La seconde partie de ce travail est l'étude du nombre maximum des cycles limites de la classe des systèmes différentiels polynomiaux de Liénard généralisés de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^{2p-1} \\ \dot{y} &= -x^{2q-1} - \varepsilon f(x, y)\end{aligned}$$

où p et q sont des entiers positifs, ε est un petit paramètre et $f(x, y)$ est un polynôme de degré m , en utilisant la théorie de la moyennisation. De plus, nous allons donner des applications.

Mots clés : cycle limite, théorie de la moyennisation, équation différentielle du troisième ordre, système polynomial de Liénard généralisé.

Abstract

In this thesis, first we study the periodic solutions of the class of the third order differential equations of the form

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + h(t) = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$$

where ε is a small parameter, $\lambda > 0, x \in \mathbb{R}$, $h(t)$ is a $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ -periodic function and F is a $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ -periodic nonlinear function. By using the averaging theory we give sufficient conditions for the existence of these periodic solutions.

The second part of this work is the study of the maximum number of limit cycles of the class of the generalized Liénard polynomial differential systems of the form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^{2p-1} \\ \dot{y} &= -x^{2q-1} - \varepsilon f(x, y)\end{aligned}$$

where p and q are positive integers, ε is a small parameter and $f(x, y)$ is a polynomial of degree m , by using the averaging theory. Moreover, we give applications.

Keywords : limit cycle, averaging theory, third order differential equation, generalized Liénard polynomial system.

ملخص

في هذه الأطروحة سندرس أولاً الحلول الدورية لقسم من المعادلات التفاضلية من الدرجة الثالثة من الشكل:

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + h(t) = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$$

حيث ε وسيط صغير, $\lambda > 0$, $x \in R$, $h(t)$ دالة دورية دورتها $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ و $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ دالة $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ -دورية غير خطية. باستعمال نظرية المتوسط، سوف نعطي الشروط الكافية لوجود هذه الحلول الدورية.

الجزء الثاني لهذا العمل هو دراسة العدد الأكبر للدورات الحدودية لقسم من الجمل التفاضلية كثيرات الحدود للبينارد المعممة من الشكل:

$$\dot{x} = y^{2p-1}$$

$$\dot{y} = -x^{2q-1} - \varepsilon f(x, y)$$

حيث p و q أعداد صحيحة موجبة, ε وسيط صغير و $f(x, y)$ كثير حدود من الدرجة m , باستعمال دائما نظرية المتوسط، زيادة على ذلك سنعطي بعض التطبيقات.

الكلمات المفتاحية: دورة حدودية، نظرية المتوسط، معادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة، معادلة تفاضلية كثيرة الحدود للبينارد معممة.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier *Allah* le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Je dois beaucoup à mon directeur de thèse professeur *Makhlouf Amar* qui a su me faire profiter de sa science. Il m'a offert son temps et sa patience. Ses conseils, remarques et critiques ont toujours été une aide précieuse pour moi. J'ai beaucoup appris en travaillant avec lui. C'est un plaisir pour moi.

Je tiens à remercier monsieur *Salmi Abdelouaheb*, Maître de conférences A à l'université Badji Mokhtar-Annaba pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

J'exprime ici toute ma considération à mes examinateurs monsieur *Laouar Abdelhamid*, Maître de conférences A à l'université Badji Mokhtar- Annaba, monsieur *Ferchichi Mohammed Rédha* Maître de conférences A à l'université Badji Mokhtar- Annaba, madame *Badi Sabrina* Maître de conférences A à l'université 8 Mai Guelma, monsieur *Hadidi Elbahi*, Maître de conférences A à l'université Badji Mokhtar- Annaba qui ont eu la gentillesse de faire partie du jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Enfin, merci à mes parents. Sans leurs sacrifices je ne serais pas devenu ce que je suis aujourd'hui.

A mes parents

A Hichem, mon époux

A Loudjeyne, ma fille

A Selma, Naima et Samèh

A Mohamed, mon frère

A Minou, Ritel et Nouh

A toute ma famille

TABLE DES MATIÈRES

1	Notions préliminaires	2
1.1	Problèmes à valeur initiale	2
1.2	Existence et unicité de la solution	3
1.3	Stabilité de la solution	4
1.4	Systèmes dynamiques	4
1.5	Flot d'une équation différentielle	5
1.6	Points d'équilibre et linéarisation	5
1.6.1	Point d'équilibre	5
1.6.2	Linéarisation des systèmes	6
1.6.3	Nature des points d'équilibre	6
1.6.4	Stabilité des points d'équilibre	9
1.7	Plan et portrait de phase	10
1.8	Orbites périodiques et cycles limites	11
1.8.1	Orbite périodique	11
1.8.2	Cycle limite	11
1.9	Système hamiltonien	13
2	Théorie de la moyennisation	14
2.1	Introduction	14

2.1.1	Forme standard de Lagrange	18
2.1.2	Théorème de la moyennisation	20
2.2	Méthode de la moyennisation dans le cas périodique	23
2.2.1	Théorème de la moyennisation du premier ordre	24
2.2.2	Théorème de la moyennisation du deuxième ordre	30
2.2.3	Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre	35
2.3	Méthode de la moyennisation via le degré du Brower	42
3	Cycles limites d'une classe des équations différentielles du troisième ordre	45
3.1	Introduction et résultats principaux	45
3.2	Preuves des résultats	49
3.2.1	Preuve du Théorème 3.1.1	49
3.2.2	Preuve du Corollaire 3.1.1	51
3.2.3	Preuve du Corollaire 3.1.2	52
3.3	Applications	53
4	Nombre maximum des cycles limites d'une classe des systèmes différentiels polynomiaux de Liénard généralisés	57
4.1	Présentation du problème et résultats principaux	57
4.2	Preuves des résultats	59
4.2.1	Preuve du Théorème 4.1.1	60
4.2.2	Preuve du Corollaire 4.1.1	63
4.2.3	Preuve du Corollaire 4.1.2	65
5	Conclusion et perspectives	68

Introduction générale

Les équations différentielles jouent un rôle essentiel pour la modélisation des systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques ou économiques. Cette notion apparaît chez les mathématiciens à la fin du **17^{ème}** siècle. A cette époque, les équations différentielles s'introduisent par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique comme par exemple : le mouvement du pendule circulaire, problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation newtonienne, problème du mouvement des corps élastiques, problème de l'équation de la courbe décrivant la forme prise par une corde, suspendue aux deux extrémités et soumise à son propre poids...

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de la différentiation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

On remonte le début de l'histoire des équations différentielles au début de l'analyse avec **Ferma**, **Newton** et **Leibniz**. D'après **Encyclopédie des mathématiques**, le terme "équation différentielle" est dû à **G. Leibniz (1646-1716)** en **1676**. Cette notion fait tout d'abord l'objet d'études en vue d'une résolution algébrique pendant les deux premiers siècles de son apparition. L'une des premières tentatives remonte à **Newton (1642-1727)** qui proposa une résolution par des séries infinies et prétendit que cette méthode permettait de résoudre toute équation différentielle. Puis, **Bernoulli (1667-1748)** découvrit la méthode d'intégration des équations différentielles à variables séparables. Cette méthode fut développée et généralisée par la suite par **Leibniz** qui aussitôt fut capable d'intégrer les équations différentielles homogènes et ensuite les équations différentielles linéaires du premier ordre. Un peu plus tard, **Taylor (1685-1731)** utilisa les séries pour résoudre les équations différentielles.

Dès le début du **18^{ème}** siècle et grâce aux discussions avec **Bernoulli**, **Euler** et **Lagrange (1736-1813)** sur ce qu'est une fonction et ce qu'est une solution d'une équation différentielle, **Euler** en **1736** développa des méthodes

de résolution basées sur des séries et certaines fonctions spéciales. Il développa par ailleurs des stratégies générales pour obtenir des solutions pour beaucoup de genres d'équations différentielles. A la fin du 18^{ème} siècle, **Gauss (1777-1855)** démontra la nécessité de l'introduction des nombres complexes dans le champ. **Cauchy (1789-1857)** fut le premier à apprécier l'importance de ce point de vue. Dans les années 1820, il donne une nouvelle direction à la théorie en démontrant que dans certaines limites toute équation différentielle est solvable. Or aux mêmes périodes que les travaux d'**Abel (1802-1829)** et de **Galois (1811-1832)** annonçant que certaines équations différentielles, notamment les équations non linéaires n'avaient pas des solutions qui puissent être décrites par des formules, **Liouville** en 1841 montra l'impossibilité de résoudre certaines équation différentielle même d'ordre peu élevé. Les théorèmes d'existence pour les solutions des équations différentielles du premier ordre ne furent établis qu'en 1876 par **Lipchitz (1832-1903)**.

Ainsi, le 19^{ème} siècle a été dominé par la problématique d'existence et d'unicité de solutions et de fonctions de variables complexes mais également par la naissance de la résolution numérique. Certaines contributions d'**Euler** débouchèrent en 1840 sur une méthode connue aujourd'hui sous le nom de "la méthode d'Euler". Les premières méthodes numériques datent du 19^{ème} siècle, mais le développement de l'analyse numérique de ces méthodes ne fut entrepris qu'en 1950 simultanément avec l'apparition des premiers calculateurs électroniques.

Poincaré (1854-1912) introduisa de nouvelles fonctions transcendentes et se lança dans l'étude des comportements globaux des courbes solutions. Ainsi, la théorie qualitative des équations différentielles fut inaugurée. L'intérêt des travaux de **Poincaré** n'est malheureusement redécouvert qu'au début des années 60 par **Lorenz** qui retrouvera le caractère chaotique des conditions météorologiques liées à la sensibilité des conditions initiales. Au début des années 70, la découverte de **Lorenz** ouvra la voie de beaucoup de physiciens et des mathématiciens à l'étude des phénomènes non linéaires et chaotiques.

Dans les années 1920, le staticien austro-hongrois **Lotka** et le mathématicien italien **Volterra** élaborèrent un modèle qui décrit la dynamique des

systèmes écologiques où cohabitent un prédateur et sa proie (lynx et lièvres des neiges dont les recensements précis ont été établis par la compagnie de la baie d'Hodson). Ce modèle est constitué d'une équation différentielle qui traduit l'évolution des populations de chaque animal.

Ainsi, quand les lynx sont nombreux, la population des lièvres décroît, ce qui entraîne la diminution du nombre des lynx, puis l'augmentation des lièvres libérés de la pression des prédateurs...Aux mêmes années, en physique le Néerlandais **Ven der Pol** décrit de cette façon les oscillations d'un circuit électrique doté d'une lampe dont la résistance dépend de l'intensité du courant qui y passe.

Dans les deux exemples, à mesure que le temps croît, le comportement du système a tendance à devenir périodique. Graphiquement, les courbes qui représentent les solutions s'approchent d'un cycle qu'on l'appelle "**cycle limite**". Que ce qu'un cycle limite donc ?

Les cycles limites sont apparu en **1881**, dans le mémoire écrit par **Poincaré** sur les courbes définies par une équation différentielle. Un cycle limite est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques d'une équation différentielle. L'importance de pouvoir déterminer le nombre des cycles limites fait la seconde partie du 16^{ème} problème de **Hilbert** [19] qui peut être formulée de la façon suivante : Quel est le nombre maximum des cycles limites noté $H(n)$ que peut avoir le système polynomial planaire de degré n

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Ce problème n'est toujours pas résolu 112 ans après son énoncé ! En 1923, **Dulac** [13] proposa une démonstration assurant que ce nombre est fini pour tout n , mais cette démonstration comportait une erreur. La résolution du **Dulac** a été faite d'une façon indépendante par **Ecalte**, **Martinet** et **Moussu** en 1987, **Ilyashenko** en 1991 et par **Ecalte** en 1992. Cette résolution permet de prouver que le champ de vecteurs polynomial possède un nombre fini de cycles limites. Mais ils n'ont pas pu trouver une estimation uniforme de ce nombre.

Les chercheurs considèrent une classe spéciale des équations différentielles. C'est la classe des équations de **Liénard** [27]

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (1)$$

où $F(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} a_i x^i$ et $F(0) = 0$. Donc le problème de Hilbert affaibli consiste à chercher une borne supérieure pour le nombre de cycles limites de l'équation de Liénard (1). Mais aucune majoration n'est actuellement connue. En 1997, **Lins, De Melo et Pugh** [28] ont prouvé que :

- Pour $F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ et $a_1 a_3 < 0$, le système (1) a exactement un cycle limite. Il est stable si $a_1 < 0$ sinon il est instable.
- Pour $F(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5$, le système (1) a au plus deux cycles limites.

En 2001, **Perko** [39] a démontré que :

- Pour ε suffisamment petit, le système (1) avec $F(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{2n+1} a_i x^i$ peut avoir au plus n cycles limites.
- Le système (1) a exactement n cycles limites si et seulement si l'équation de degré n

$$\frac{a_1}{2} + \frac{3a_3}{8}\rho + \frac{5a_5}{128}\rho^3 + \dots + \binom{2n+2}{n+1} \frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}} \rho^n = 0$$

a n racines positives $\rho_j = r_j^2$ où $j = 1..n$. Dans ce cas les cycles limites tendent vers les cercles de rayons r_j , $j = 1..n$ centrés à l'origine quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Il y a beaucoup de chercheurs qui ont étudié le nombre maximum de cycles

limites du système de Liénard généralisé donné sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y \end{cases} \quad (2)$$

où f et g sont deux polynômes de degré n et m respectivement. Notons par $\hat{H}(m, n)$ le nombre maximum de cycles limites de faible amplitudes du système (2).

En 1984, **Blows** et **Lloyd** [2] ont donné les résultats suivant :

- Si g est impair, alors $\hat{H}(m, n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- Si f est pair, alors $\hat{H}(m, n) = n$.
- Si f est impair, alors $\hat{H}(m, 2n+1) = \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor + n$.
- Si $g(x) = x + g_e(x)$ où g_e est impair, alors $\hat{H}(2m, 2) = m$.

En 1998, **Gasull** et **Torregrosa** [17] ont trouvé des bornes supérieures pour $\hat{H}(7, 6)$, $\hat{H}(6, 7)$ et $\hat{H}(7, 7)$. En 1999, **Lynch** et **Cristopher** [35] ont développé une nouvelle méthode algébrique qui permet de déterminer la constante de Liapunov du système (2). Ils ont donné les résultats suivant :

- $\hat{H}(m, 2) = \lfloor \frac{2m+1}{3} \rfloor$.
- $\hat{H}(2, n) = \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor$.
- $\hat{H}(m, 3) = 2\lfloor \frac{2m+2}{8} \rfloor$ pour tout $1 < m \leq 50$.
- $\hat{H}(3, n) = 2\lfloor \frac{3n+2}{8} \rfloor$ pour tout $1 < m \leq 50$.
- $\hat{H}(4, k) = \hat{H}(k, 4)$, $k = 6, 7, 8, 9$ et $\hat{H}(5, 6) = \hat{H}(6, 5)$.

En 2006, **Yu** et **Han** [48] ont obtenu des valeurs précises de $\hat{H}(m, n) = \hat{H}(n, m)$ pour $\{n = 4, m = 10, 11, 12, 13\}$, $\{n = 5, m = 6, 7, 8, 9\}$ et $\{n = 6, m = 5, 6\}$. Notons par $H(m, n)$ le nombre maximum de cycles limites que peut avoir le système (2). **Dumortier**, **Li** et **Rosseau** (1990-1996) [14] et [15] ont assuré que $H(3, 1) = 1$. En 1997. En 1998, **Coppel** [12] a trouvé que $H(2, 1) = 1$.

Les chercheurs ont obtenu des résultats importants en utilisant des techniques différentes (intégrale abélienne, méthode de moyennisation, la méthode de Melnikov,...) d'où on a des estimations de la borne inférieure des nombres de **Hilbert** : $H(2) \geq 4$ [7, 44, 49], $H(3) \geq 13$ [24], $H(4) \geq 22$ [8],

$H(5) \geq 28$ [24], $H(6) \geq 35$ [47], $H(7) \geq 50$ [25], $H(n) \geq kn^2 \ln n$ [9] et $H(n) \geq 4(n+1)^2(1.442695 \ln(n+1) - \frac{1}{6}) + n - \frac{2}{3}$ [22].

En 2009, Libre, Meurew et Teixeira [30] ont obtenu une borne inférieure de $H(m, n)$ notée $\tilde{H}_k(m, n)$ pour tout $m, n \geq 1$ pour le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k (f_n^k(x)y + g_m^k(x))\end{aligned}$$

et de cette estimation ils ont trouvé que $\tilde{H}_k(m, n) \leq \hat{H}(m, n)$ pour $k = 1, 2, 3$.

En 2012, en utilisant la théorie de la moyennisation, Badi et Makhoulf [1] ont étudié le nombre maximum des cycles limites $\tilde{H}(m, n)$ qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire perturbé dans la classe des équations polynomiales de Liénard généralisées de degré m et n

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k (f_n^k(x, y)y + g_m^k(x))\end{aligned}$$

où pour chaque k le polynôme $g_m^k(x)$ est de degré m , $f_n^k(x, y)$ est un polynôme de degré n et ε est un petit paramètre. Ils ont trouvé une borne inférieure de $\tilde{H}(m, n)$ notée $\tilde{H}_k(m, n)$ telle que

$$\tilde{H}_k(m, n) \leq \tilde{H}(m, n) \leq H(m, n).$$

Plan de la thèse : Cette thèse se compose de quatre chapitres.

- **Le premier chapitre** comporte des rappels sur des notions préliminaires classiques et des outils que nous avons utilisé dans ce travail pour démontrer nos résultats. Nous avons commencé par définir les systèmes dynamiques, la linéarisation, les points d'équilibre et leur nature. Nous avons défini aussi la notion de cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite.

-
- Dans **Le deuxième chapitre**, Nous avons introduit la théorie de la moyennisation pour chercher les cycles limites des systèmes différentiels. Nous avons illustré les théorèmes par plusieurs exemples.
 - Dans **Le troisième chapitre**, nous avons donné les conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques d'une classe des équations différentielles du troisième ordre contenant un petit paramètre ε en appliquant le deuxième théorème de la moyennisation du premier ordre. Ce chapitre a été publié dans le journal "Annals of differential equations". A. Makhlouf and M. Hamamda. *Limit cycles of a third order differential equation*. Ann. of Diff. Eqs. 30 :4(2014) ; 416-423.
 - **Le quatrième chapitre** est basé sur la détermination du nombre maximum des cycles limites d'une classe des systèmes différentiels polynômiaux de Liénard généralisés. Nous traitons cette étude en utilisant le théorème de la moyennisation du premier ordre. Ce chapitre a été publié au journal "Global Journal of Pure and Applied Mathematics". M. Hamamda and A. Makhlouf. *Limit Cycles of a Class of Generalized Liénard Polynomial Equations*. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768 Volume 12 : 2 (2016) ; 1831-1843.

CHAPITRE 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions générales et préliminaires pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires. Ensuite, nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire.

1.1 Problèmes à valeur initiale

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue.

Définition 1.1.1 *i) Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur U est une relation de la forme*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

que l'on note brièvement

$$\dot{x} = f(t, x) \text{ où } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \tag{1.1}$$

ii) Pour (t_0, x_0) donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation

(1.1) est donné sous la forme

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0. \quad (1.2)$$

Définition 1.1.2 *i) La fonction x est dite solution de l'équation (1.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur I , si $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$ et si x satisfait la relation (1.1) sur I .*

ii) Soit $(t_0, x_0) \in U$ donné, la fonction x est dite solution du problème à valeur initiale (1.2) s'il existe un intervalle I contenant t_0 tel que x est une solution de l'équation (1.1) sur I et vérifie $x(t_0) = x_0$.

1.2 Existence et unicité de la solution

Théorème 1.2.1 (Existence) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet au moins une solution.*

Définition 1.2.1 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $f = f(t, x) : U \rightarrow \mathbb{R}^d$. f est localement lipschitzienne en x si pour tout fermé et borné (compact) K dans U , il existe une constante $L > 0$ telle que*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

pour tout (t, x_1) et (t, x_2) dans K .

Définition 1.2.2 *Pour $(t_0, x_0) \in U$ donné, une solution du problème à valeur initiale (1.2) est dite unique si elle coïncide avec toute solution partout où elles sont toutes les deux définies.*

Théorème 1.2.2 (Unicité) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Si $f = f(t, x) : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ est continue et localement lipschitzienne en x , alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet une solution unique.*

1.3 Stabilité de la solution

La stabilité est l'un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques. Cette notion a été étudiée par Liapunov (1857-1918).

Définition 1.3.1 *Soit le problème à valeur initiale (1.2). Supposons que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution. Soit $\phi(t)$ une solution du problème (1.2) telle que $\phi(t_0) = \phi_0$ est dite stable au sens de Liapunov si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que toute solution $x(t)$ de (1.2) vérifie*

$$\|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si de plus $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$ alors la solution $\phi(t)$ est dite asymptotiquement stable.

1.4 Systèmes dynamiques

Définition 1.4.1 *Un système dynamique sur $\mathbb{R}^n$ est une application $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que*

1. $U(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
2. $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
3. $U(0, x) = x$
4. $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.4.1 *Soit le système*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \tag{1.3}$$

où A est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La solution de (1.3) est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

Le système (1.3) engendre un système dynamique

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$U(t, x) = e^{tA}x$$

1.5 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.5.1 Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, E est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(E)$. Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution de (1.5). L'ensemble des applications Φ_t définies par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0)$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (1.5).

Remarque 1.5.1 Le flot est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps t , sinon il est dit non autonome.

1.6 Points d'équilibre et linéarisation

1.6.1 Point d'équilibre

Définition 1.6.1 Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point critique ou point d'équilibre du système (1.5) s'il vérifie

$$f(x_0) = 0.$$

1.6.2 Linéarisation des systèmes

Définition 1.6.2 *Considérons le système (1.5). Le système*

$$\dot{x} = Ax \text{ où } A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (1.6)$$

est appelé le système linéarisé du système (1.5) en x_0 .

Remarque 1.6.1 *La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points critiques.*

Définition 1.6.3 *Le point critique x_0 est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.*

1.6.3 Nature des points d'équilibre

Soit le système différentiel linéaire (1.6) où A est une matrice 2×2 et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable (voir Figure 1.1).

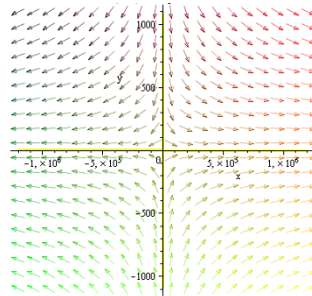


FIG. 1.1 – $(0,0)$ est un point selle

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, on a trois cas :

- (a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un nœud stable (voir Figure 1.2).
- (b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un nœud instable (voir Figure 1.3).
- (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $x = x_0$ est un nœud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$ (voir Figure 1.4 et 1.5).

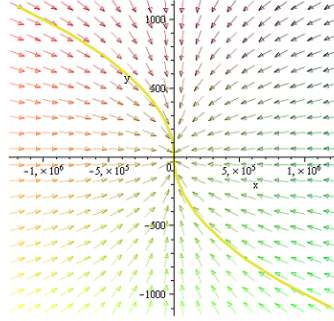


FIG. 1.2 – $(0,0)$ est un noeud stable

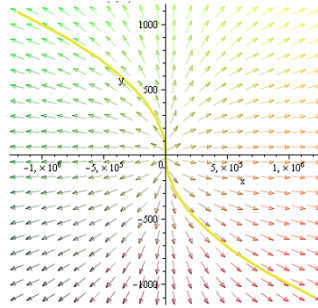


FIG. 1.3 – $(0,0)$ est un noeud instable

3. Si λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées et $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un foyer. Il est stable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$ (voir Figure 1.6 et 1.7).

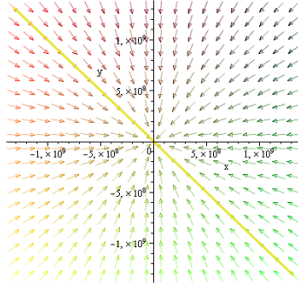


FIG. 1.4 – $(0,0)$ est un noeud propre stable

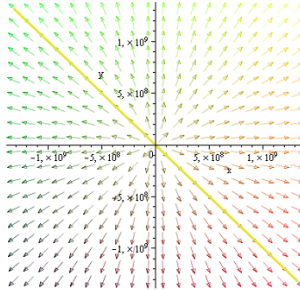


FIG. 1.5 – $(0,0)$ est un noeud propre instable

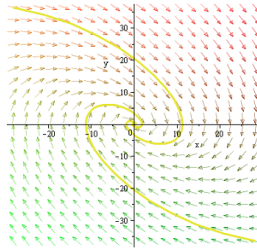


FIG. 1.6 – $(0,0)$ est un foyer stable

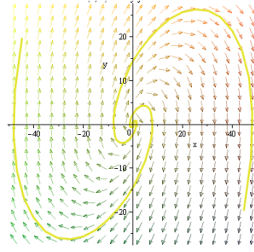


FIG. 1.7 – $(0,0)$ est un foyer instable

4. Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $x = x_0$ est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir Figure 1.8).

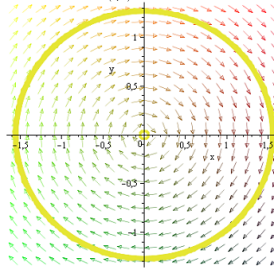


FIG. 1.8 – $(0,0)$ est un centre

1.6.4 Stabilité des points d'équilibre

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

Définition 1.6.4 Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Supposons que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution et soit $\phi(t)$ la solution du système (1.7). On dit qu'un point

d'équilibre p est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si

$$\|\phi(t_0) - p\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t) - p\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

S'il existe de plus un voisinage de p tel que pour tout x dans ce voisinage $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p$ alors le point d'équilibre p est dit asymptotiquement stable.

Théorème 1.6.1 Soit x_0 un point d'équilibre pour le système (1.6).

i) Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives, alors le point d'équilibre x_0 est asymptotiquement stable.

ii) S'il existe au moins une valeur propre de $Df(x_0)$ avec une partie réelle positive, alors le point d'équilibre x_0 est instable.

iii) Si $Df(x_0)$ a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point d'équilibre x_0 .

1.7 Plan et portrait de phase

Pour un système dont l'évolution au cours du temps t est décrite par la fonction à valeurs réelles $x(t)$, on appelle trajectoire de phase une représentation géométrique cartésienne dans laquelle on reporte les positions au cours du temps t d'un point représentatif M d'abscisse x et d'ordonnée $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Cette terminologie est en accord avec celle de la physique statique : le plan $(x, \dot{x})$ ou le plan de phase s'identifie (avec $p_x = m \cdot \dot{x}$) à l'espace de phase (x, p_x) du problème, de telle sorte que la représentation au cours du temps du point M est bien la trajectoire du système dans son espace de phase.

Une trajectoire de phase donnée est décrite à partir d'un point $M_0(x_0, \dot{x}_0)$ représentatif des conditions initiales de l'évolution considérée. L'ensemble des trajectoires de phase décrites par le système à partir de toutes les conditions initiales réalisables est le portrait de phase de celui-ci.

Définition 1.7.1 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.8)$$

Le portrait de phase est l'ensemble des orbites qui représentent les solutions du système (1.8) dans l'espace des phases ainsi que ces points critiques qui sont considérés comme des solutions constantes. Le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.8 Orbites périodiques et cycles limites

Il est toutefois préférable d'envisager le point d'équilibre d'un système différentiel non comme un point de $\mathbb{R}^n$ mais plutôt comme une solution particulière intéressante, une solution stationnaire, c-à-d une solution qui n'avance pas. Mais il existe d'autres solutions remarquables dont l'étude est très profitable, par exemple les solutions périodiques. On va en effet s'intéresser tout particulièrement à ce type de solutions.

1.8.1 Orbite périodique

Définition 1.8.1 On appelle orbite périodique toute trajectoire $\Phi_t(x)$ de (1.8) telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x). \quad (1.9)$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.9) est appelé période.

1.8.2 Cycle limite

Définition 1.8.2 Un cycle limite du système (1.8) est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de ce système.

Définition 1.8.3 L'amplitude du cycle limite est la valeur maximale de la variable x de ce cycle limite.

Exemple 1.8.1 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (1.10)$$

tel que α est un paramètre. En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système (1.10) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Posons

$$f(r) = \dot{r} = \alpha r(1 - r^2).$$

Alors si $\alpha \neq 0$,

$$f(r) = 0 \implies r = 0 \text{ ou } r = 1.$$

On a donc un point d'équilibre $(0, 0)$ et un cycle limite d'amplitude $r = 1$

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$$

ou

$$x^2 + y^2 = 1.$$

1. Pour $\alpha > 0$, on a deux cas :

(a) Si $r < 1$, alors $f(r) > 0$, d'où $r(\nearrow)$.

(b) Si $r > 1$, alors $f(r) < 0$, d'où $r(\searrow)$.

Donc le cycle limite d'amplitude $r = 1$ est stable.

2. Pour $\alpha < 0$:

(a) Si $r < 1$, $f(r) < 0$, d'où $r(\searrow)$.

(b) Si $r > 1$, $f(r) > 0$, d'où $r(\nearrow)$.

Donc le cycle limite d'amplitude $r = 1$ est instable.

3. Si $\alpha = 0$, le système a une infinité d'orbites périodiques, et il n'y a pas de cycle limite.

Remarque 1.8.1 *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

1.9 Système hamiltonien

Définition 1.9.1 *Un système hamiltonien est un système d'équations différentielles du types*

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= D_q H(p(t), q(t)) \\ \dot{q}(t) &= -D_p H(p(t), q(t)),\end{aligned}\tag{1.11}$$

où $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$. La fonction H est appelée hamiltonien du système. Si (p, q) est une solution du système hamiltonien (1.11), alors on calcule

$$\frac{d}{dt}H(p(t), q(t)) = D_p H(p(t), q(t))\dot{p}(t) + D_q H(p(t), q(t))\dot{q}(t) = 0.$$

CHAPITRE 2

Théorie de la moyennisation

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons la théorie de la moyennisation et nous donnons ces différents théorèmes. La méthode de la moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. L'idée de cette méthode comme étant une technique de calcul sans preuve de validité a été commencé avec les travaux de Lagrange et Laplace en 1788 qui ont donné une justification intuitive de la méthode. Ils ont utilisé la procédure de la moyennisation pour étudier le problème des perturbations séculaires dans le système solaire.

Ensuite, elle a été clairement formulée pour la première fois par Fatou en 1928. Les importantes contributions pratiques et théoriques de la moyennisation ont été faites en 1930 par Bogoliobov et Krylov [3], En 1945 par Bogoliobov[4] et en 1961 par Bogoliobov et Mitropolsky [5]. Elle a été ensuite développée par Verhulst [46], Sanders et Verhulst [43], Malkin (1956) [37] et Roseau (1966) [41].

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la méthode de la moyennisation appli-

quée aux équations différentielles contenant un petit paramètre ε de la forme

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) \text{ où } t \in I \subset \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}^n.$$

Le principe de cette méthode est de remplacer $\dot{x}$ par sa valeur moyenne. Pour définir la moyenne d'une fonction nous allons donner les résultats suivants.

Définition 2.1.1 *On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est continue et T -périodique en t . On appelle fonction moyenne de f notée f^0 la fonction définie par*

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt.$$

Pour donner une idée générale et voir comment cette méthode s'applique, nous allons commencer par l'équation différentielle suivante

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \tag{2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}$, ε est un petit paramètre et f est une fonction T -périodique. Pour $\varepsilon = 0$, la solution de cette équation est connue, c'est une combinaison de $\cos t$ et de $\sin t$. Cette solution peut s'écrire sous la forme

$$r_0 \cos(t + \varphi_0)$$

où r_0 est l'amplitude et φ_0 est la phase. r_0 et φ_0 sont des constantes déterminées par la valeur initiale. Pour étudier la solution pour $\varepsilon \neq 0$, Lagrange a introduit la technique de la variation des constantes. En effet, l'amplitude r et la phase φ sont maintenant des fonctions du temps. Donc la solution de l'équation (2.1) devient

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos(t + \varphi(t)) \\ \dot{x}(t) &= -r(t) \sin(t + \varphi(t)). \end{aligned}$$

En substituant les expressions de x et $\dot{x}$ dans l'équation (2.1), on obtient

$$-\dot{r} \sin(t + \varphi) - r \cos(t + \varphi)(1 + \dot{\varphi}) + r \cos(t + \varphi) = \varepsilon f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)).$$

D'où

$$-\dot{r} \sin(t + \varphi) - \dot{\varphi} r \cos(t + \varphi) = \varepsilon f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)). \quad (2.2)$$

D'autre part on a

$$\dot{r} \cos(t + \varphi) - r \sin(t + \varphi)(1 + \dot{\varphi}) = -r \sin(t + \varphi).$$

D'où

$$\dot{r} \cos(t + \varphi) - \dot{\varphi} r \sin(t + \varphi) = 0. \quad (2.3)$$

Les équations (2.2) et (2.3) peuvent être considérées comme un système algébrique de deux équations en $\dot{r}$ et $\dot{\varphi}$

$$\begin{cases} -\dot{r} \sin(t + \varphi) - \dot{\varphi} r \cos(t + \varphi) = \varepsilon f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)) \\ \dot{r} \cos(t + \varphi) - \dot{\varphi} r \sin(t + \varphi) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

La solution du système (2.4) est donnée par

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sin(t + \varphi) f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)) \\ \dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \varphi) f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)). \end{cases} \quad (2.5)$$

Remarque 2.1.1 *La transformation $x, \dot{x} \rightarrow r, \varphi$ présuppose que $r \neq 0$, dans les problèmes où $r(t_0) = 0$, on doit proposer d'autre transformation.*

Notons que $\dot{r}$ et $\dot{\varphi}$ sont proportionnels à ε , ce qui confirme que r et φ varient lentement avec le temps. Pour ε suffisamment petit, l'approximation de la moyennisation consiste à remplacer $\dot{r}(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$ dans (2.5) par leurs valeurs moyennes avec une période 2π (r et φ sont considérées comme des constantes en prenant la moyenne).

Le système moyennisé équivalent au système (2.5) est

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t + \varphi) f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)) dt \\ \dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \cos(t + \varphi) f(r \cos(t + \varphi), -r \sin(t + \varphi)) dt. \end{cases}$$

On pose $\theta = t + \varphi$, on aura

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) f(r \cos(\theta), -r \sin(\theta)) d\theta \\ \dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) f(r \cos(\theta), -r \sin(\theta)) d\theta. \end{cases} \quad (2.6)$$

Une fois les intégrales trouvées, on aura à résoudre le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ du premier ordre (2.6) en $r(t)$ et $\varphi(t)$ avec la condition initiale déterminée à l'instant $t_0 = 0$ par :

$$\begin{aligned} x(0) &= r(0) \cos \varphi(0) \\ \dot{x}(0) &= -r(0) \sin \varphi(0). \end{aligned}$$

Les amplitudes des cycles limites possibles examinés par cette méthode sont données par les solutions de l'équation algébrique

$$G(r) = 0$$

où

$$G(r) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) f(r \cos(\theta), -r \sin(\theta)) d\theta.$$

Supposons que r_1 est une solution de $G(r) = 0$ (c-à-d une amplitude de cycle limite). Perturbons r_1 par

$$r(t) = r_1 + \eta(t). \quad (2.7)$$

Pour garantir la stabilité du cycle limite d'amplitude r_1 , on exige que

$$\eta \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Dérivant (2.7) par rapport à t , on obtient

$$\dot{r} = \dot{\eta}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \dot{r} &= G(r_1 + \eta) \\ &\simeq G(r_1) + \eta G'(r_1). \end{aligned}$$

Comme $G(r_1) = 0$, on obtient

$$\dot{\eta} = \eta G'(r_1) \tag{2.8}$$

On résout cette dernière équation (2.8), on trouve

$$\eta \simeq c \exp(G'(r_1)t), \text{ où } c = \text{constante}.$$

1. Si $G'(r_1) < 0$, alors le cycle limite d'amplitude r_1 est stable.
2. Si $G'(r_1) > 0$, alors le cycle limite d'amplitude r_1 est instable.

2.1.1 Forme standard de Lagrange

Afin de prouver la validité asymptotique des approximations, nous considérons généralement une équation différentielle qui varie lentement comme par exemple l'équation (2.5). Nous allons montrer comment obtenir ce type d'équation par la méthode de la variation des paramètres.

Considérons pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \geq 0$ le problème à valeur initiale suivant

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon g(t, x), \quad x(0) = x_0 \tag{2.9}$$

où $A(t)$ est une matrice continue $n \times n$ et $g(t, x)$ est une fonction suffisamment

lisse en t et en x . Le problème non perturbé ($\varepsilon = 0$)

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2.10)$$

est évidemment linéaire admettant n solutions indépendantes qui forment la matrice fondamentale $\phi(t)$. Posons

$$x = \phi(t)y. \text{ (Lagrange)}$$

En substituant dans l'équation (2.9), nous obtenons

$$\dot{\phi}y + \phi\dot{y} = A(t)\phi y + \varepsilon g(t, \phi y).$$

Comme $\dot{\phi} = A(t)\phi$, nous aurons

$$\phi\dot{y} = \varepsilon g(t, \phi y). \quad (2.11)$$

Remarquons que les équations (2.2) et (2.3) sont des cas spéciaux de l'équation (2.11). En utilisant la matrice inverse, nous allons résoudre l'équation (2.11) en $\dot{y}$. Il vient que

$$\dot{y} = \varepsilon \phi^{-1}(t)g(t, \phi(t)y) \quad (2.12)$$

avec

$$y(0) = \phi^{-1}(0)x_0.$$

Nous utilisons maintenant la loi de Gramer, nous aurons

$$\dot{y}_i = \frac{W_i(t, y)}{W(t)}, i = 1, \dots, n$$

avec $W(t) = |\phi(t)|$ est le wronskien (déterminant de $\phi(t)$) et $W_i(t, y)$ est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\phi(t)$ par g . L'équation (2.12) est la soi-disant **forme standard de Lagrange**. Plus généralement, la forme standard de Lagrange est donnée par la relation $\dot{y} = \varepsilon f(t, y)$.

Remarque 2.1.2 *Le problème non perturbé (2.10) est linéaire, ce qui facilite la procédure de la variation des paramètres. Si le problème non perturbé est non linéaire cette technique reste valable, mais pratiquement il existe d'autres techniques simples et faciles tout dépend de notre cas, comme par exemple la transformation aux coordonnées polaires, ...*

2.1.2 Théorème de la moyennisation

Considérons le problème à valeur initial suivant

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0. \quad (2.13)$$

On suppose que $f(t, x)$ est T -périodique en t et on introduit la moyenne

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt.$$

Considérons maintenant le problème

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0 \quad (2.14)$$

où la solution $y(t)$ représente une approximation de $x(t)$.

Théorème 2.1.1 [43] *Soient les problèmes aux valeurs initiales (2.13) et (2.14) avec $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ et $t \geq 0$. Supposons que*

1. *f, g et $D_x f$ sont continues et bornées par une constante indépendante de ε dans $[0, +\infty) \times D$.*
2. *g est lipschitzienne en $x \in D$.*
3. *$f(t, x)$ est T -périodique en t , T est indépendante de ε .*
4. *$y(t) \in D$ sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$.*

Alors on a $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$ sur l'échelle du temps $1/\varepsilon$.

Maintenant, nous sommes entrain de donner un résultat important pour pouvoir démontrer le Théorème 2.1.1.

Lemme 2.1.1 (*Gronwall* [43]) *Supposons que pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T$*

$$\phi(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^t \phi(s) ds + \delta_3,$$

où $\phi(t)$ est une fonction continue, $\phi(t) \geq 0 \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T$, δ_1, δ_2 et δ_3 sont des constantes avec $\delta_1 > 0, \delta_2 \geq 0$ et $\delta_3 \geq 0$. Alors

$$\phi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \right) e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Preuve du Théorème 2.1.1.

Les hypothèses (1) et (2) nous assurent l'existence et l'unicité de la solution des problèmes aux valeurs initiales (2.13) et (2.14) sur l'échelle du temps $1/\varepsilon$. Définissons

$$u(t, y) = \int_{t_0}^t (f(s, y) - f^0(y)) ds.$$

On a

$$\|u(t, y)\| \leq 2MT \quad \text{pour } t \geq t_0 \text{ et } y \in D.$$

Maintenant, nous introduisons

$$z(t) = y(t) + \varepsilon u(t, y(t)).$$

Comme $y(t) \subset D \quad \forall t \geq t_0$, on a l'estimation

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + \varepsilon \|u(t, y(t))\| \\ &\leq \|x(t) - z(t)\| + 2\varepsilon MT. \end{aligned}$$

Notons que

$$x(t) - z(t) = \int_{t_0}^t \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) ds.$$

Calculons

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} &= \varepsilon f(t, x(t)) + \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \frac{dy}{dt} \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, y(t)). \end{aligned}$$

Remplaçons $\frac{dy}{dt}$ par $\varepsilon f^0(y)$, on aura

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon f(t, x(t)) - \varepsilon f(t, z(t)) + R$$

où

$$R = \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) f^0(y) - \varepsilon f(t, y(t)) + \varepsilon f(t, z(t)).$$

On a

$$\|f^0(y)\| \leq M \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \right\| \leq 2MT.$$

Grâce à la continuité lipschitzienne de f nous avons

$$\begin{aligned} \|f(t, z(t)) - f(t, y(t))\| &\leq L \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq \varepsilon L \|u(t, y(t))\| \\ &\leq 2\varepsilon LMT. \end{aligned}$$

Donc il existe une constante k telle que

$$\|R\| \leq k\varepsilon^2.$$

C'est clair que

$$\begin{aligned}
 \|x(t) - z(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right\| ds \\
 &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|f(t, x(t)) - f(t, z(t)) + k\varepsilon\| ds \\
 &\leq \varepsilon \int_{t_0}^t \|f(t, x(t)) - f(t, z(t))\| ds + k\varepsilon^2(t - t_0) \\
 &\leq \varepsilon L \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + k\varepsilon^2(t - t_0).
 \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \varepsilon \frac{k}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \varepsilon \frac{k}{L}.$$

Par conséquent

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \left(\frac{k}{L} e^{\varepsilon L(t-t_0)} - \frac{k}{L} + 2MT \right).$$

Si $\varepsilon L(t - t_0)$ est borné par une constante indépendante de ε , on aura l'approximation

$$x(t) = y(t) + O(\varepsilon) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

■

2.2 Méthode de la moyennisation dans le cas périodique

Maintenant, nous allons citer les théorèmes essentiels de la moyennisation utilisés pour accomplir les travaux de cette thèse.

2.2.1 Théorème de la moyennisation du premier ordre

Considérons le système différentiel

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon) \quad (2.15)$$

avec $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D est un domaine borné et $t \geq 0$. Nous supposons que $F(t, x)$ et $G(t, x, \varepsilon)$ sont des fonctions T -périodiques en t . Le système moyennisé associé au système (2.15) est

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0 \quad (2.16)$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds. \quad (2.17)$$

Théorème 2.2.1 [43] *Soit le système (2.15), on suppose que :*

1. $F, G, D_x F, D_x^2 F$, et $D_x G$ sont continues et bornées par une constante M dans $[0, +\infty) \times D$ et $-\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.
2. F et G sont T -périodiques en t , avec T indépendante de ε .

Alors on a :

1. Si le point p est un point d'équilibre pour le système moyennisé (2.16) telle que

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0. \quad (2.18)$$

Alors pour $|\varepsilon| > 0$, suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.15) telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon(t) = p.$$

2. Si le point d'équilibre $y = p$ du système moyennisé (2.16) est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x_\varepsilon(t)$ du système (2.15) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .

Exemple 2.2.1 Soit l'équation de Van Der Pol

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (2.19)$$

L'équation (2.19) peut s'écrire sous forme d'un système à deux équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (2.20)$$

En passant aux coordonnées polaires

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{r^2}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Alors on aura

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2 \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta) \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta). \end{cases}$$

D'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon \sin^2 \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta)}{-1 + \varepsilon \cos \theta \sin \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta)}. \quad (2.22)$$

Pour pouvoir appliquer le théorème 2.1.1, l'équation (2.22) doit s'écrire sous la forme

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon).$$

Posons

$$z = \varepsilon \cos \theta \sin \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta).$$

On sait que

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + O(z^2), \quad |z| < 1.$$

D'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(\theta, r) + O(\varepsilon^2) \quad (2.23)$$

avec

$$F(\theta, r) = -\sin^2 \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta).$$

Remarquons que F est 2π -périodique en θ , donc nous avons

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta = \frac{r}{8}(r^2 - 4).$$

D'après le théorème 2.1.1, le problème (2.23) est équivalent au problème

$$\dot{r}_a = \varepsilon f^0(r_a) \quad (2.24)$$

et on a l'approximation

$$r(\theta) - r_a(\theta) = O(\varepsilon)$$

où $r(\theta)$ et $r_a(\theta)$ sont les solutions des problèmes (2.23) et (2.24) respectivement. Les cycles limite possibles pour l'équation (2.19) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$f^0(r) = \frac{r}{8}(r^2 - 4) = 0. \quad (2.25)$$

Cette équation algébrique admet une seule solution positive $r = 2$. Alors l'équation de Ven Der Pol (2.19) a un cycle limite d'amplitude $r = 2$.

1. Pour $\varepsilon > 0$ ce cycle limite est stable car $\varepsilon \frac{d}{dr} f^0(2) < 0$ (voir Fig. 2.1).
2. Pour $\varepsilon < 0$ ce cycle limite est instable car $\varepsilon \frac{d}{dr} f^0(2) > 0$ (voir Fig. 2.2).

Exemple 2.2.2 Soit le système de Liénard

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (a_1 x + \dots + a_n x^n) \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (2.26)$$

Le système (2.26) s'écrit en coordonnées polaires

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r (a_1 \cos^2(\theta) + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1}(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin(\theta) (a_1 \cos(\theta) + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n(\theta)). \end{cases}$$

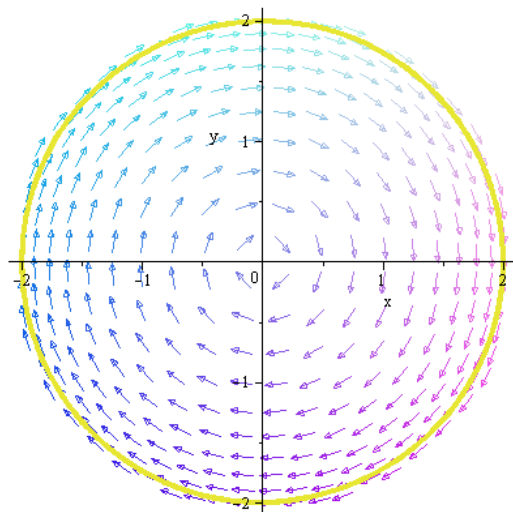


FIG. 2.1 – Cycle limite stable pour $\varepsilon = 0.01$.

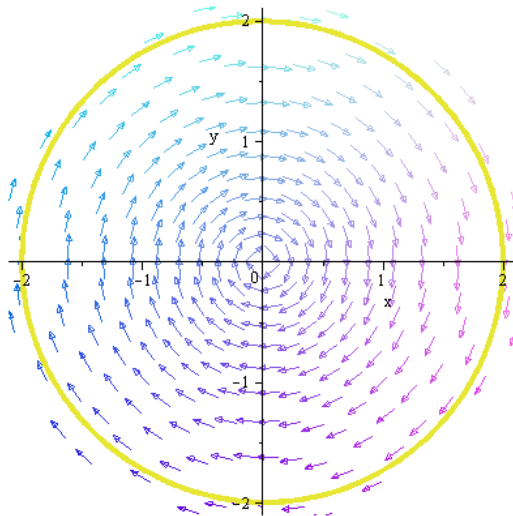


FIG. 2.2 – Cycle limite instable pour $\varepsilon = -0.01$.

Ceci donne

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r (a_1 \cos^2(\theta) + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1}(\theta))}{1 - \varepsilon \sin(\theta) (a_1 \cos(\theta) + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n(\theta))}.$$

De la même manière que dans l'exemple 2.2.1, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r (a_1 \cos^2(\theta) + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1}(\theta)) \\ &\quad + \varepsilon^2 r \sin(\theta) \cos(\theta) (a_1 \cos(\theta) + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n(\theta))^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

On prend la moyenne

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, r) d\theta = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos^2(\theta) + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1}(\theta)) d\theta.$$

On aura

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos^2(\theta) + \dots + a_{n-1} r^{n-2} \cos^n(\theta) + a_n r^{n-1} \cos^{n+1}(\theta)) d\theta$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta + a_3 r^2 \int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) d\theta + \dots \\ &\quad + a_{n-1} r^{n-2} \int_0^{2\pi} \cos^n(\theta) d\theta + a_n r^{n-1} \int_0^{2\pi} \cos^{n+1}(\theta) d\theta). \end{aligned}$$

1. **Si n est impair**, on a

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 I_{2,0} + a_3 r^2 I_{4,0} + \dots + a_n r^{n-1} I_{n+1,0}).$$

Ce polynôme peut avoir au plus $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ racines positives. Donc le système (2.26) peut avoir au plus $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ cycles limite.

2. **Si n est pair**, on a

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 I_{2,0} + a_3 r^2 I_{4,0} + \dots + a_n r^{n-2} I_{n,0}) d\theta.$$

Ce polynôme peut avoir au plus $\left[\frac{n-2}{2}\right]$ racines positives. Par conséquent le système (2.26) peut avoir au plus $\left[\frac{n-2}{2}\right]$ cycles limite.

Exemple 2.2.3 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(y^2 + xz) \\ \dot{y} = x + \varepsilon(-y + yz + z^2) \\ \dot{z} = \varepsilon(-1 + x^2 + y^2 + yz). \end{cases} \quad (2.27)$$

Passant aux coordonnées cylindriques, on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon(-\sin\theta z^2 + r - rz - r^2 \cos\theta - r \cos^2\theta + r^2 \cos^3\theta) \\ \dot{\theta} = \frac{1}{r}(-\varepsilon r^2 \sin\theta + \varepsilon r^2 \sin\theta \cos^2\theta - \varepsilon r \cos\theta \sin\theta + r + \varepsilon z^2 \cos\theta) \\ \dot{z} = \varepsilon(-1 + r^2 + rz \sin\theta) \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \dot{r} = (z^2 \sin\theta - r + rz + r^2 \cos\theta + r \cos^2\theta - r^2 \cos^3\theta)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ \frac{dz}{d\theta} = \dot{z} = (-1 + r^2 + rz \sin\theta)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

Ce dernier système est de la forme

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = F_1(r, \theta, z)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ \frac{dz}{d\theta} = F_2(r, \theta, z)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

Notons que F_1 et F_2 sont 2π -périodiques, donc on peut aller au système

moyennisé

$$\begin{cases} f_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta, z) d\theta = \frac{1}{2}r(2z - 1) \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta, z) d\theta = -1 + r^2. \end{cases}$$

Déterminons les solutions du système

$$\begin{cases} f_1(r, z) = 0 \\ f_2(r, z) = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

nous aurons

$$(r_1, z_1) = (1, \frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad (r_2, z_2) = (-1, \frac{1}{2}).$$

La seule solution qui peut fournir un cycle limite est $(r_1, z_1) = (1, \frac{1}{2})$, car r doit être positif. Alors on prend le point d'équilibre $p = (1, \frac{1}{2})$ du système (2.28). On a

$$\begin{aligned} D_{r,z}f^0(p) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(r,z)}{\partial r} & \frac{\partial f_1(r,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(r,z)}{\partial r} & \frac{\partial f_2(r,z)}{\partial z} \end{pmatrix}_{(r,z)=(1,\frac{1}{2})} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$\det(D_{r,z}f^0(p)) = -2 \neq 0.$$

Alors d'après le théorème 2.2.1, le système (2.27) a pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit un cycle limite. Les valeurs propres de $D_{r,z}f^0(p)$ sont $\pm\sqrt{2}$. Le point singulier du système moyennisé $p = (1, \frac{1}{2})$ est hyperbolique, alors le cycle limite est de la même stabilité que p . Les valeurs propres sont de signe différent, alors p est un point selle qui est toujours instable. Par conséquent, le cycle limite est instable.

2.2.2 Théorème de la moyennisation du deuxième ordre

Considérons les deux problèmes aux valeurs initiales

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0 \quad (2.29)$$

où F_1 et $F_2 : [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F_3 : [0, +\infty) \times D \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T périodiques par rapport à t et D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 f^{10}(y) + \varepsilon^2 g^0(y), \quad y(0) = y_0 \quad (2.30)$$

où f^0 , f^{10} et g^0 sont les fonctions moyennées de F_1 , f^1 et F_2 respectivement.

Théorème 2.2.2 [43] *Soit*

$$f^1(t, x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y^1(t, x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(x)$$

où

$$y^1(t, x) = \int_0^t [F_1(s, x) - f^0(x)] ds + z(x)$$

avec $z(x)$ est une fonction de classe C^1 telle que la moyenne de y^1 est nulle.

Supposons que :

1. $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, F_2 et F_3 sont continues sur leurs domaines de définitions et lipchitziennes en x .
2. $F_3(t, x, \varepsilon)$ est uniformément borné par une constante M dans $[0, \frac{M}{\varepsilon}) \times D \times (0, \varepsilon_0]$.
3. T est indépendante de ε .
4. $y(t) \in D$ sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2)$$

sur l'échelle du temps $\frac{1}{\varepsilon}$.

Corollaire 2.2.1 *Si les hypothèses du Théorème 2.2.2 sont satisfaites et de plus $f^0(y) = 0$, alors*

1. *Si p est le point d'équilibre du système moyennisé (2.30) tel que*

$$\frac{\partial}{\partial y}(f^{10}(y) + g^0(y)) \big|_{y=p} \neq 0, \quad (2.31)$$

alors il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ de l'équation (2.29) telle que $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. *Si p est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique $x_\varepsilon(t)$ de (2.29) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .*

Exemple 2.2.4 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(y^2 + 8xy - 2x^2) + \varepsilon^2 ax \\ \dot{y} = x + 4\varepsilon xy + \varepsilon^2 ay. \end{cases} \quad (2.32)$$

En coordonnées polaires, le système (2.32) peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a) \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + \varepsilon r 8 \cos \theta - 8\varepsilon r \cos \theta \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r(8r \cos^2 \theta \sin \theta - 7r \cos^3 \theta + 5r \cos \theta + \varepsilon a)}{1 - \varepsilon r \sin \theta + 7\varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + \varepsilon r 8 \cos \theta - 8\varepsilon r \cos \theta}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} = & -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) \varepsilon + r(-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta \\ & + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta \\ & + 48r^2 \cos^2 \theta + a) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme (2.29) avec

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r) &= -r^2 \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) \\ F_2(\theta, r) &= r(-15r^2 \cos^5 \theta \sin \theta + 5 \cos \theta \sin \theta + 22r^2 \cos^3 \theta \sin \theta \\ &\quad + 112r^2 \cos^6 \theta - 160r^2 \cos^4 \theta + 48r^2 \cos^2 \theta + a) \\ F_3(\theta, r, \varepsilon) &= O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Donc nous allons appliquer le Théorème (2.2.2)

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) &= -2r \cos \theta (-8 \cos \theta \sin \theta + 7 \cos^2 \theta - 5) \\ \int_0^\theta F_1(s, r) ds &= \frac{r^2}{3} (8 - 8 \cos^3 \theta - 7 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta). \end{aligned}$$

Il vient que

$$\begin{aligned} f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) \int_0^\theta F_1(s, r) ds + F_2(\theta, r) \right] d\theta \\ &= r(a - r^2). \end{aligned}$$

L'équation $f^{10}(r) = 0$ a une seule racine positive $r = +\sqrt{a}$ et on a $\frac{d}{dr} f^{10}(r) = a - 3r^2$.

1. Si $a > 0$, alors le système différentiel (2.32) a un cycle limite stable d'amplitude $r = \sqrt{a}$ car $\frac{d}{dr} f^{10}(\sqrt{a}) = -2a < 0$ (voir FIG. 2.3, FIG. 2.4 et FIG. 2.5).
2. Si $a \leq 0$, alors l'équation $f^{10}(r) = 0$ n'a pas de racine simple positive. Donc le système différentiel (2.32) n'a pas de cycle limite.

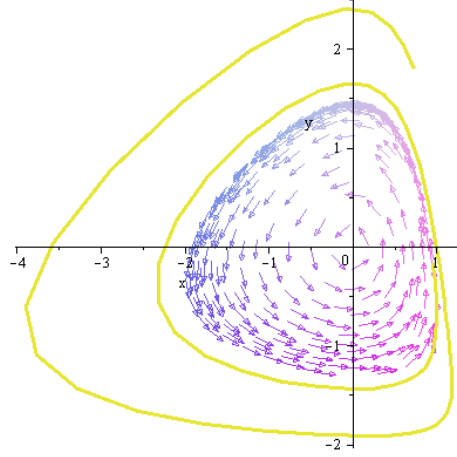


FIG. 2.3 – Portrait de phase du système (2.32) pour $a = 1$ et $\varepsilon = 0.1$.

2.2.3 Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre

On considère le problème de bifurcation des solutions T -périodiques du système différentiel

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x, \varepsilon) \quad (2.33)$$

de $\varepsilon = 0$ à $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions C^2 , T -périodiques en t et Ω

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'une des principales hypothèses est que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) \quad (2.34)$$

a une sous variété des solutions périodiques de dimension k .

Soit $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ la solution du système non perturbé (2.34) telle que $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}) = \mathbf{z}$. Nous écrivons la linéarisation du système non perturbé le long de la solution périodique $\mathbf{x}(t, \mathbf{z})$ comme

$$\dot{y} = D_x F_0((t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z})))y. \quad (2.35)$$

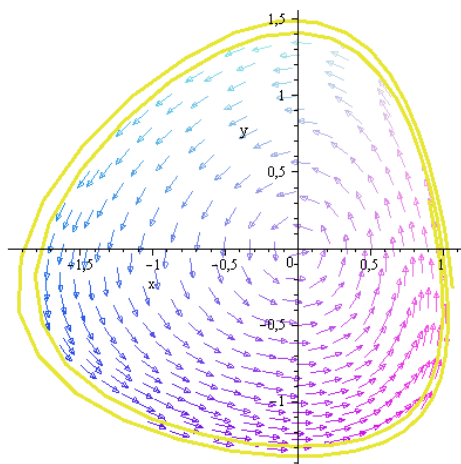


FIG. 2.4 – Portrait de phase du système (2.32) pour $a = 1$ et $\varepsilon = 0.08$.

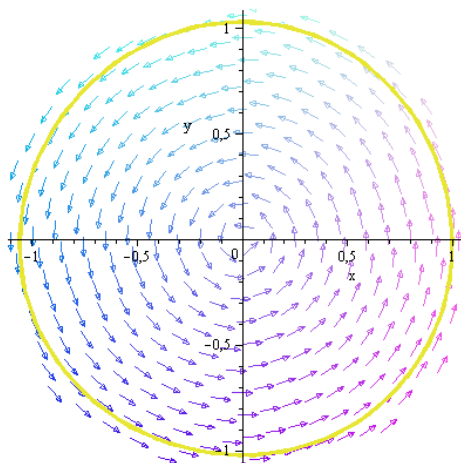


FIG. 2.5 – Cycle limite stable du système (2.32) pour $a = 1$ et $\varepsilon = 0.01$.

Notons par $M_{\mathbf{z}}(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.35) et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur ses k premières coordonnées, c.à.d. $\xi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$.

Une réponse au problème de la bifurcation des solutions périodiques pour le système (2.33) est donné par le résultat suivant

Théorème 2.2.3 [37] *Soit W un ouvert borné de $\mathbb{R}^k$ et soit $\beta : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe C^2 . Supposons que :*

- $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in \bar{W}\} \subset \Omega$ et que pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ la solution $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)$ de (2.34) est T -périodique.
- Pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$, il existe une matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ de (2.35) telle que la matrice $M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(0) - M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(2\pi)$ a dans le bloc supérieur droit une matrice $k \times (n - k)$ nulle, et dans le bloc inférieur droit, la matrice $\Delta_\alpha(n - k) \times (n - k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi\left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, \mathbf{z}_\alpha)) dt\right).$$

S'il existe $a \in W$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.33) telle que

$$\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{z}_\alpha \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Nous donnons maintenant un résultat quand $n = k$.

Corollaire 2.2.2 [37] *Soit W un ensemble ouvert et borné avec $\bar{W} \subset \Omega$ telle que pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \bar{W}$ et que pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ la solution $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)$ est T -périodique. Considérons la fonction $\mathcal{F} : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$*

$$\mathcal{F}(\alpha) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)) dt.$$

S'il existe $a \in W$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.33) telle que

$$\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{z}_\alpha \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Application : Bifurcation des cycles limites des orbites périodiques d'un centre polynômial homogène cubique

En 2014, C. Li et J. Llibre [23] ont prouvé un résultat important qui caractérise tous les systèmes différentiels polynômiaux planaires cubiques qui ont des centres.

Théorème 2.2.4 [23] *Tout système différentiel polynômial planaire cubique ayant un centre peut être écrit après un changement de variables sous la forme*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax^3 + (b - 3\alpha\mu)x^2y - axy^2 - \alpha y^3 \\ \dot{y} &= \alpha x^3 + ax^2y + (b + 3\alpha\mu)xy^2 - ay^3\end{aligned}$$

où $\alpha = \pm 1$, $a, b, \mu \in \mathbb{R}$ et $\mu > -1/3$.

Puis, ils ont étudié le nombre des cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques de ces centres polynômiaux planaires cubiques perturbés donnés par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax^3 + (b - 3\alpha\mu)x^2y - axy^2 - \alpha y^3 + \varepsilon P(x, y) \\ \dot{y} &= \alpha x^3 + ax^2y + (b + 3\alpha\mu)xy^2 - ay^3 + \varepsilon Q(x, y)\end{aligned} \tag{2.36}$$

où P et Q sont deux polynômes de degré 3

$$\begin{aligned}P(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 \\ &\quad + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 \\ Q(x, y) &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^3 \\ &\quad + b_7x^2y + b_8xy^2 + b_9y^3.\end{aligned}$$

Pour cela, on définit les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= 2(\alpha(1 - 3\mu)) \sin \theta \cos^3 \theta + (b + \alpha(3\mu - 1)) \sin \theta \cos \theta \quad (2.37) \\
 &\quad + 2a \cos^2 \theta - a \\
 g(\theta) &= \alpha(2 \cos^2 \theta(1 - 3\mu + (3\mu - 1) \cos^2 \theta) - 1) \\
 k(\theta) &= \exp\left(\int_0^\theta \frac{f(s)}{g(s)} d\theta\right) \\
 a(\theta) &= f(\theta) \sin \theta - g(\theta) \cos \theta \\
 b(\theta) &= f(\theta) \cos \theta + g(\theta) \sin \theta.
 \end{aligned}$$

On définit aussi les nombres suivants

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \int_0^{2\pi} \frac{a(\theta)(a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta) - b(\theta)(b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta)}{g(\theta)^2 k(\theta)^2} d\theta \\
 c_2 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a(\theta)(a_6 \cos^3 \theta + a_7 \sin \theta \cos^2 \theta + a_8 \sin^2 \theta \cos \theta + a_9 \sin \theta)}{g(\theta)^2} \right. \\
 &\quad \left. \frac{b(\theta)(b_6 \cos^3 \theta + b_7 \sin \theta \cos^2 \theta + b_8 \sin^2 \theta \cos \theta + b_9 \sin \theta)}{g(\theta)^2} \right] d\theta.
 \end{aligned}$$

Théorème 2.2.5 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Considérons le polynôme $h(z) = c_0 + c_2 z^2$. Il est clair que ce polynôme a au plus une racine réelle positive. Supposons que z_0 est une racine positive de $h(z)$. Alors, pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit le système différentiel (2.36) possède un cycle limite qui tend en coordonnées polaires vers l'orbite périodique $k(\theta)z_0$ du centre polynômial cubique homogène (2.36) pour $\varepsilon = 0$.*
2. *Ils y a des centres polynômiaux cubiques homogènes pour lesquels le polynôme $h(z)$ a une racine positive.*

Preuve Le système différentiel (2.36) en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{r} &= f(\theta)r^3 + \varepsilon(\cos \theta P(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta Q(r \cos \theta, r \sin \theta)) \\ \dot{\theta} &= -g(\theta)r^2 + \varepsilon \frac{1}{r}(\cos \theta Q(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta P(r \cos \theta, r \sin \theta))\end{aligned}\quad (2.38)$$

où $f(\theta)$ et $g(\theta)$ sont données par (2.37). En considérant la nouvelle variable indépendante θ le système (2.38) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = F_0(\theta, r) + \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2) \quad (2.39)$$

où

$$\begin{aligned}F_0(\theta, r) &= \frac{f(\theta)}{g(\theta)}r \\ F_1(\theta, r) &= \frac{\cos \theta P(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta Q(r \cos \theta, r \sin \theta)}{g(\theta)r^2} \\ &\quad - \frac{f(\theta)(\cos \theta Q(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta P(r \cos \theta, r \sin \theta))}{g(\theta)^2 r^2}.\end{aligned}$$

En suivant les mêmes notations que dans le Théorème 2.2.3, on aura $\mathbf{x} = r$, $t = \theta$, $T = 2\pi$, $\mathbf{z} = z$ et $V = (-\rho, \rho)$ avec $\rho > 0$ choisi arbitrairement grand. L'équation différentielle (2.39) vérifie les hypothèses du Théorème 2.2.3. On peut facilement trouver que la solution périodique $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0) = r(\theta, z, 0)$ de l'équation différentielle (2.39) non perturbée $\frac{dr}{d\theta} = F_0(\theta, r)$ est

$$r(\theta, z, 0) = k(\theta)z = \exp(k_1(\theta))k_2(\theta)z$$

où

$$\begin{aligned}
 k_1(\theta) &= -\frac{a}{2R\alpha} \\
 &\quad \times \left(\frac{(R-3\mu-1) \arctan(\frac{\tan \theta}{\sqrt{3\mu-R}})}{\sqrt{3\mu-R}} + \frac{(R+3\mu+1) \arctan(\frac{\tan \theta}{\sqrt{3\mu+R}})}{\sqrt{3\mu+R}} \right) \\
 k_2(\theta) &= (R-3\mu)^{\frac{\alpha-\frac{b}{R}}{4\alpha}} (R+3\mu)^{\frac{\frac{b}{R}+\alpha}{4\alpha}} |\sec \theta| \\
 &\quad \times (R - \tan^2 \theta - 3\mu)^{\frac{1}{4}(\frac{b}{R\alpha}-1)} (\tan^2 \theta + R + 3\mu)^{-\frac{\frac{b}{R}+\alpha}{4\alpha}},
 \end{aligned}$$

avec

$$R = \sqrt{9\mu^2 - 1}.$$

La solution $M_z(t) = \mathbf{y}(\theta)$ de l'équation variationnelle

$$\dot{\mathbf{y}}(\theta) = D_r F_0(\theta, r(\theta, z, 0)) \mathbf{y}(\theta)$$

est donnée par

$$\mathbf{y}(\theta) = y(\theta) = \frac{y_1(\theta)}{y_2(\theta)}$$

où

$$\begin{aligned}
 y_1(\theta) &= \sqrt{3\mu-R}(\sqrt{3\mu+R}(4\alpha R + 2\alpha R \log(\sec^2 \theta) \\
 &\quad - \alpha R \log(R - \tan^2 \theta - 3\mu) - \alpha R \log(R + \tan^2 \theta + 3\mu) \\
 &\quad + (\alpha R - b) \log(R - 3\mu) + (\alpha R + b) \log(R + 3\mu) \\
 &\quad + b \log(R - \tan^2 \theta - 3\mu) - b \log(R + \tan^2 \theta + 3\mu)) \\
 &\quad - 2a(R + 3\mu + 1) \arctan(\frac{\tan \theta}{\sqrt{3\mu+R}})) \\
 &\quad - 2a(R - 3\mu - 1) \sqrt{3\mu+R} \arctan(\frac{\tan \theta}{\sqrt{3\mu-R}}), \\
 y_2(\theta) &= 4\alpha \sqrt{3\mu-R} \sqrt{3\mu+R} \sqrt{3\mu^2-1}.
 \end{aligned}$$

On note que $M_z(t)$ ne dépend pas de z , on a donc

$$\begin{aligned}
 M_z^{-1}(t)F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)) &= \frac{F_1(t, r(\theta, z, 0))}{y(\theta)} \\
 &= \frac{F_1(\theta k(\theta)z)}{y(\theta)} \\
 &= \frac{f(\theta)(\sin \theta P(r \cos \theta, r \sin \theta) - \cos \theta Q(r \cos \theta, r \sin \theta))}{z^2 g(\theta)^2 k(\theta)^2 y(\theta)} \\
 &\quad - \frac{\cos \theta P(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta Q(r \cos \theta, r \sin \theta)}{z^2 g(\theta) k(\theta)^2 y(\theta)}.
 \end{aligned}$$

En utilisant le logiciel Maple on obtient le résultat suivant

$$\mathcal{F}(z) = \frac{c_0 + c_2 z^2}{2\pi z} = \frac{h(z)}{2\pi z}.$$

C'est clair que $h(z)$ peut avoir un seul zéro positif. Si z_0 est un zéro réel positif de $\mathcal{F}(z) = 0$ alors le système différentiel (2.36) a un seul cycle limite qui tend en coordonnées polaires vers l'orbite $k(\theta)z_0$ du système différentiel (2.36) quand $\varepsilon = 0$. ■

Exemple 2.2.5 *Soit le centre homogène cubique*

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -y^3 \\
 \dot{y} &= x^3.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

On perturbe ce centre dans l'ensemble des systèmes différentiels polynômiaux cubiques par

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -y^3 + \varepsilon(x - x^3) \\
 \dot{y} &= x^3.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Alors on a

$$k(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\cos 4\theta + 3}}$$

et

$$y(\theta) = \frac{1}{4}(4 + \log 4 - \log(\cos 4\theta + 3)).$$

Numériquement, on aura

$$\mathcal{F}(z) = \frac{0.5932194545078 - 0.5327637396520z^2}{z}$$

cette fonction n'a qu'un seul zéro positif

$$z_0 = 1.055213559.$$

Par conséquent, le système différentiel (2.41) a un seul cycle limite qui tend en coordonnées polaires vers l'orbite périodique $k(\theta)z_0$ du système différentiel (2.40).

2.3 Méthode de la moyennisation via le degré du Brower

La méthode de la moyennisation donne la relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel non-autonome et les solutions d'un système moyennisé équivalent qui est autonome. En utilisant le théorème de la fonction implicite, la méthode de la moyennisation réduit le problème de la recherche des solutions périodiques d'un système différentiel à un problème équivalent basé sur la recherche des racines positives d'une fonction non-linéaire, ces racines fournissent les solutions périodiques pour le système différentiel du départ.

En 2014, Buica et Llibre [6] ont introduit une nouvelle approche de la méthode de la moyennisation, ils ont utilisé des méthodes topologiques basées sur le degré de Brower pour résoudre des équations d'opérateurs équivalentes au problème de la recherche des solutions périodiques d'un système différentiel perturbé. En fait, ils ont affaibli les hypothèses du théorème analogue du moyennisation du premier et du deuxième ordre et ils ont aussi donné des résultats pour le troisième ordre dans le cas des systèmes de dimension 1. Les

auteurs ont considéré que c'est plus facile et transparent d'obtenir des résultats correspondants à un ordre plus élevé de la méthode de la moyennisation grâce à cette nouvelle approche.

Maintenant, nous sommes entrain de donner quelques notions sur le degré de Brower.

Définition 2.3.1 Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g \in C^1(D)$ et V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\bar{V} \subset D$ et $Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\}$. Supposons aussi $J_g(z) \neq 0$ ($J_g(z)$ désigne le déterminant de la jacobienne de g en z), $\forall z \in Z_g$, alors le degré de Brower de la fonction g par rapport à l'ensemble V et le point O noté $d_B(g, V, O)$ est défini par

$$d_B(g, V, O) = \sum_{z \in Z_g} \text{sign}(J_g(z)).$$

Maintenant, nous allons donner le théorème de la moyennisation du premier ordre via le degré de Brower.

Théorème 2.3.1 [6] Soit le système différentiel

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x, \varepsilon) \quad (2.42)$$

où $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F_2 : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à la variable t et D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit $F_{10} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds.$$

Supposons que :

1. F_1 et F_2 sont localement lipschitziennes par rapport à la variable x .
2. Pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, il existe un voisinage V de a tel que $F_{10}(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et $d_B(F_{10}, V, O) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit il existe une solution $\phi(., \varepsilon)$ du système (2.42) T -périodique isolée telle que $\phi(., \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque 2.3.1 *Les hypothèses du Théorème 2.3.1 sont plus faibles que celles du Théorème 2.2.1. Pour plus de détail sur le deuxième et le troisième ordre voir [6].*

CHAPITRE 3

Cycles limites d'une classe des équations différentielles du troisième ordre

3.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce chapitre, nous allons donner les conditions suffisantes pour l'existence de solutions périodiques de la classe des équations différentielles du troisième ordre perturbées de la forme

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + h(t) = \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad (3.1)$$

où ε est un petit paramètre, $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $h(t)$ est une fonction $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ -périodique et F est une fonction non linéaire périodique de période $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$.

La recherche des cycles limites des équations différentielles du troisième ordre est une question étudiée par plusieurs auteurs en utilisant des différentes techniques par exemple le théorème de Larey Schauder [16], [38],[40]. Mais nos résultats sont obtenus en appliquant la méthode de la moyennisation, plus précisément le Corollaire 2.2.2. Nos principaux résultats sont les suivants.

Théorème 3.1.1 [36] *Soit $\lambda = \frac{r^2}{s^2}$ avec r et s sont des entiers positifs premiers et soit $h(t)$ une fonction qui vérifie les conditions de périodicité sui-*

vantes

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} h(\tau) d\tau = 0, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} h(\tau) \cos(\sqrt{\lambda}\tau) d\tau = 0, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} h(\tau) \sin(\sqrt{\lambda}\tau) d\tau = 0. \quad (3.2)$$

Soit

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} (1 - \cos(\sqrt{\lambda}t)) F(t, a(t), b(t), c(t)) dt \\ f_2(x_0, y_0, z_0) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} \sin(\sqrt{\lambda}t) F(t, a(t), b(t), c(t)) dt \\ f_3(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} \cos(\lambda t) F(t, a(t), b(t), c(t)) dt \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} a(t) &= x_0 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} y_0 \sin(\sqrt{\lambda}t) + \frac{1}{\lambda} z_0 (1 - \cos \sqrt{\lambda}t) \\ &\quad + \int_0^t h(\tau) (\cos(\sqrt{\lambda}(t - \tau)) - 1) d\tau \\ b(t) &= y_0 \cos(\sqrt{\lambda}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} z_0 \sin(\sqrt{\lambda}t) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t h(\tau) \sin(\sqrt{\lambda}(t - \tau)) d\tau \\ c(t) &= -\sqrt{\lambda} y_0 \sin(\sqrt{\lambda}t) + z_0 \cos(\sqrt{\lambda}t) - \int_0^t h(\tau) \cos(\sqrt{\lambda}(t - \tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pour chaque solution (x_0^*, y_0^*, z_0^*) du système

$$f_1(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_2(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f_3(x_0, y_0, z_0) = 0$$

satisfaisant

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}\right) \big|_{(x_0, y_0, z_0)=(x_0^*, y_0^*, z_0^*)} \neq 0,$$

l'équation différentielle (3.1) a une solution $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ -périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = x_0^* + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} y_0^* \sin \sqrt{\lambda} t + \frac{1}{\lambda} z_0^* (1 - \cos \sqrt{\lambda} t) + \int_0^t h(\tau) (\cos(\sqrt{\lambda}(t - \tau)) - 1) d\tau$$

de l'équation différentielle (3.1) non perturbée ($\varepsilon = 0$) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Corollaire 3.1.1 *Considérons l'équation différentielle*

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + \sin(2t) \cos(2t) = \varepsilon(ax^2 + bx + c) \sin 2t \quad (3.4)$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$. Soit $A = -\frac{1}{3}a^2 + 192b^2 - 768ac$. Si $A > 0$ alors l'équation différentielle (3.4) a deux solutions périodiques qui tendent vers les deux solutions périodiques

$$\pm \frac{1}{24a} \sqrt{A} \sin 2t - \frac{1}{24} \cos 4t - \frac{1}{6} \cos 2t - \frac{1}{16a}(a + 8b) + \frac{5}{24}$$

de l'équation différentielle non perturbée

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + \frac{1}{2} \sin(4t) = 0$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Corollaire 3.1.2 *Considérons l'équation différentielle*

$$\ddot{x} + \dot{x} + \sin 2t = \varepsilon(ax^2 + bx + c) \sin^2 t \quad (3.5)$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$. Soit

$$\begin{aligned} A &= -a^2 + 36b^2 - 144ac \\ B &= -2a^2 + 36b^2 - 144ac \\ C &= \frac{-5}{6}a^2 + 27b^2 - 108ac \\ \alpha &= \frac{43}{3456}a^2 - \frac{15}{64}b^2 + \frac{15}{16}ac \\ \beta &= \frac{-1}{128}a^3 - \frac{9}{16}a^2c + \frac{9}{64}b^2a. \end{aligned}$$

Alors nous avons les cas suivants :

1. Si $A > 0, B \leq 0, C \leq 0, (a + 3\sqrt{A})(-a + \sqrt{A}) \neq 0$ et $(-a + 3\sqrt{A})(a + \sqrt{A}) \neq 0$ alors l'équation différentielle (3.5) a deux solutions 2π -périodiques $x_{1,2}(t, \varepsilon)$ qui tendent vers les deux solutions périodiques

$$-\frac{1}{6} \cos 2t - \frac{1}{12a}(3a + 6b \pm \sqrt{A}) + \frac{1}{6}$$

de l'équation différentielle non perturbée

$$\ddot{x} + \dot{x} + \sin 2t = 0 \quad (3.6)$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Si $A > 0, B \leq 0, C > 0, (a + 3\sqrt{A})(-a + \sqrt{A}) \neq 0$ et $(-a + 3\sqrt{A})(a + \sqrt{A}) \neq 0$ alors l'équation différentielle (3.5) a quatre solutions 2π -périodiques $x_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, \dots, 4$ qui tendent vers les solutions périodiques

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{6} \cos 2t - \frac{1}{12a}(3a + 6b \pm \sqrt{A}) + \frac{1}{6} \\ &\pm \frac{1}{9a} \sqrt{C} \sin t - \frac{1}{6} \cos 2t - \frac{1}{18a}(5a + 9b) + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

de l'équation différentielle non perturbée (3.6) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. Si $A > 0, B > 0, C > 0, (a + 3\sqrt{A})(-a + \sqrt{A}) \neq 0, (-a + 3\sqrt{A})(a + \sqrt{A}) \neq 0$ et $\pm \alpha \sqrt{B} + \beta \neq 0$ alors l'équation différentielle (3.5) a huit solutions 2π -périodiques $x_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, \dots, 8$ qui tendent vers les solutions

périodiques

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6} \cos 2t - \frac{1}{12a} (3a + 6b \pm \sqrt{A}) + \frac{1}{6} \\ & -\frac{1}{2} \cos 2t \pm \frac{1}{6} \sqrt{B} (1 - \cos t) \pm \frac{1}{6a} \sqrt{B} - \frac{b}{2a} \\ & \pm \frac{1}{9a} \sqrt{C} \sin t - \frac{1}{6} \cos 2t - \frac{1}{18a} (5a + 9b) + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

de l'équation différentielle non perturbée (3.6) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.2 Preuves des résultats

3.2.1 Preuve du Théorème 3.1.1

En introduisant les nouvelles variables $(x, y, z) = (x, \dot{x}, \ddot{x})$, l'équation différentielle (3.1) peut s'écrire sous forme d'un système différentielle dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -\lambda y - h(t) + \varepsilon F(t, x, y, z). \end{aligned}$$

La solution du système non perturbé

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -\lambda y - h(t) \end{aligned}$$

telle que $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} y_0 \sin(\sqrt{\lambda} t) + \frac{1}{\lambda} z_0 (1 - \cos \sqrt{\lambda} t) + \int_0^t h(\tau) (\cos(\sqrt{\lambda}(t - \tau)) - 1) d\tau \\ y(t) &= y_0 \cos(\sqrt{\lambda} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} z_0 \sin(\sqrt{\lambda} t) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t h(\tau) \sin(\sqrt{\lambda}(t - \tau)) d\tau \\ z(t) &= -\sqrt{\lambda} y_0 \sin(\sqrt{\lambda} t) + z_0 \cos(\sqrt{\lambda} t) - \int_0^t h(\tau) \cos(\sqrt{\lambda}(t - \tau)) d\tau. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Pour appliquer le Corollaire 2.2.2 la solution (3.7) doit être périodique de période $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$. Pour cela, il faut que $\sqrt{\lambda}$ soit rationnelle. On choisit $\sqrt{\lambda} = \frac{r}{s}$, avec r et s sont des entiers positifs premiers. D'autre part, cette solution est $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ -périodique ssi

$$x\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) = x(0), \quad y\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) = y(0), \quad z\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) = z(0).$$

De (3.7), on obtient

$$x\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) = x_0 + \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} h(\tau)(\cos(\sqrt{\lambda}\tau) - 1)d\tau.$$

Alors $x\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) = x(0) = x_0$ ssi

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} h(\tau)(\cos(\sqrt{\lambda}\tau) - 1)d\tau = 0 \quad (3.8)$$

La relation (3.8) nous donne la première condition nécessaire et suffisante pour que $x(t)$ soit $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ -périodique. De la même manière nous allons trouver les deux autres conditions données par (3.2). En suivant la notation introduite dans la section 2.2.3, on aura $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{z} = (x_0, y_0, z_0)$, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$

$$F_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ -\lambda y - h(t) \end{pmatrix}, \quad F_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que la matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}}(t)$ ne dépend pas de $\mathbf{z}$, on la note par $M(t)$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} & -\frac{\cos(\sqrt{\lambda} t) - 1}{\lambda} \\ 0 & \cos \sqrt{\lambda} t & \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \\ 0 & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t & \cos \sqrt{\lambda} t \end{pmatrix}.$$

Maintenant, nous allons déterminer les zéros $\mathbf{z} = (x_0, y_0, z_0)$ du système algébrique

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{z}) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} M^{-1}(t) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)) dt \\ &= \begin{cases} f_1(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} (1 - \cos(\sqrt{\lambda}t)) F(t, a(t), b(t), c(t)) dt \\ f_2(x_0, y_0, z_0) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} \sin(\sqrt{\lambda}t) F(t, a(t), b(t), c(t)) dt \\ f_3(x_0, y_0, z_0) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}} \cos(\lambda t) F(t, a(t), b(t), c(t)) dt \end{cases} \end{aligned}$$

où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont donnés par (3.3). Le reste de la démonstration est une application directe du Corollaire 2.2.2.

3.2.2 Preuve du Corollaire 3.1.1

Remarquons que l'équation (3.4) est de la forme (3.1) avec $\lambda = 4$, $h(t) = \sin(2t) \cos(2t)$ et $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = (ax^2 + bx + c) \sin 2t$. Nous assurons d'abord que les conditions de périodicité (3.2) sont vérifiées. A l'aide d'un logiciel de calcul Maple nous obtenons

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{384} y_0 (48ax_0 + 15az_0 + 24b - 7a) \\ f_2(x_0, y_0, z_0) &= -\frac{1}{4} ax_0^2 - \frac{3}{64} ay_0^2 - \frac{5}{256} az_0^2 + \left(\frac{5}{96}a - \frac{1}{4}b\right)x_0 \\ &\quad + \left(\frac{7}{384}a - \frac{1}{16}b\right)z_0 - \frac{1}{8}ax_0z_0 - \frac{7}{1536}a + \frac{5}{192}b - \frac{1}{4}c \\ f_3(x_0, y_0, z_0) &= -\frac{1}{96} ay_0 (3z_0 - 2). \end{aligned}$$

Le système $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ comme étant un système algébrique à trois équations avec trois inconnus x_0, y_0 et z_0 a deux solutions (x_0^*, y_0^*, z_0^*) données

par

$$\left(-\frac{1}{16} \frac{a+8b}{a}, \pm \frac{1}{12a} \sqrt{A}, \frac{2}{3}\right)$$

où A est donnée dans le Corollaire 3.1.1. Les jacobiens

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}\right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)=(x_0^*, y_0^*, z_0^*)}$$

pour ces deux solutions sont

$$D = \pm \frac{1}{4718592} A \sqrt{A}.$$

Si $A > 0$ alors ces déterminants ne sont jamais nuls. Donc, l'équation différentielle (3.4) a deux solutions π -périodiques qui tendent vers les solutions périodiques de l'équation non perturbée. Ce qui termine la démonstration du Corollaire 3.1.1.

3.2.3 Preuve du Corollaire 3.1.2

Considérons l'équation différentielle (3.1) avec $\lambda = 1, h(t) = \sin 2t$ et $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = (ax^2 + bx + c) \sin^2 t$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2}a(x_0^2 + \frac{3}{4}y_0^2 + \frac{7}{4}z_0^2)(\frac{7}{12}a - \frac{1}{2}b)x_0 \\ &\quad - (\frac{7}{8}a - \frac{5}{8}b)z_0 + \frac{5}{4}ax_0z_0 + \frac{11}{48}a - \frac{7}{24}b + \frac{1}{2}c \\ f_2(x_0, y_0, z_0) &= -\frac{1}{24}y_0(18ax_0 + 18az_0 - 7a + 9b) \\ f_3(x_0, y_0, z_0) &= -\frac{1}{4}z_0^2 + \frac{1}{6}ax_0 + (\frac{7}{24}a - \frac{1}{8}b)z_0 - \frac{1}{4}ax_0z_0 - \frac{1}{12}(a - b). \end{aligned}$$

Le système $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ a huit solutions (x_0^*, y_0^*, z_0^*) données par

$$\begin{aligned} (x_0^*, y_0^*, z_0^*)_{1,2} &= \left(-\frac{1}{12a}(3a + 6b \pm \sqrt{A}), 0, \frac{2}{3}\right) \\ (x_0^*, y_0^*, z_0^*)_{3,4,5,6} &= \left(-\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{3}a + b \pm \frac{1}{3}\sqrt{B}\right), 0, \frac{1}{3}\left(2 \pm \frac{1}{2a}\sqrt{B}\right)\right) \\ (x_0^*, y_0^*, z_0^*)_{7,8} &= \left(-\frac{1}{18a}(5a + 9b), \pm \frac{1}{9a}\sqrt{C}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

où A , B et C sont donnés dans le corollaire 3.1.2. Nous calculons les déterminants correspondants aux solutions (3.9)

$$\begin{aligned} Det_1 &= \frac{1}{27648} \sqrt{A}(a + 3\sqrt{A})(-a + \sqrt{A}) \\ Det_2 &= -\frac{1}{27648} \sqrt{A}(-a + 3\sqrt{A})(a + \sqrt{A}) \\ Det_3 &= Det_4 = Det_5 = Det_6 = -\frac{1}{6912} aB \\ Det_{7,8} &= \pm \alpha \sqrt{B} - \beta. \end{aligned}$$

En examinant ces déterminants nous allons distinguer les trois cas donnés dans le Corollaire 3.1.2. Autrement dit, Pour toute solution réelle bien définie (x_0^*, y_0^*, z_0^*) et qui pour laquelle le déterminant correspondant est non nul l'équation (3.5) a une solution 2π -périodique qui tend vers la solution périodique de l'équation non perturbée.

3.3 Applications

Exemple 3.3.1 *Considérons l'équation différentielle (3.4) avec $a = -1/5$, $b = 2$ et $c = 3$. Alors cette équation vérifie les hypothèses du Corollaire 3.1.1. Donc l'équation (3.4) a deux cycles limites. Voir Figure. 3.1.*

Exemple 3.3.2 *Soit donnée l'équation différentielle (3.5) avec $a = 1$, $b = \frac{1}{6}\sqrt{146}$ et $c = 1$. Dans ce cas notre équation vérifie la condition : $A > 0$, $B \leq 0$, $C > 0$, $(a + 3\sqrt{A})(-a + \sqrt{A}) \neq 0$ et $(-a + 3\sqrt{A})(a + \sqrt{A}) = 0$. Donc l'équation (3.5) a trois cycles limites. Voir Figure. 3.2.*

Exemple 3.3.3 *Considérons l'équation différentielle (3.5) avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = 1$. Donc la condition 3 du corollaire 3.1.2 est satisfaite. Donc l'équation différentielle (3.5) a huit cycles limites. Voir Figure 3.3.*

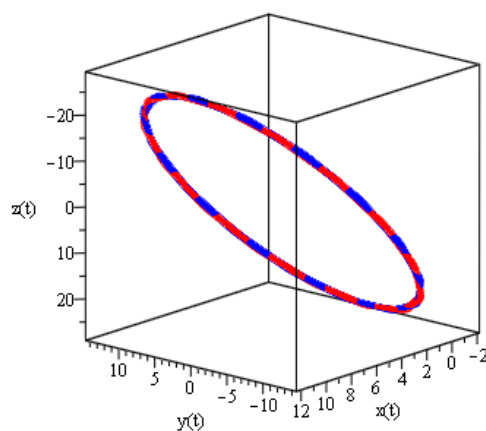


FIG. 3.1 – Les deux cycles limites de l'équation (3.1.1) pour $a = -1/5$, $b = 2$, $c = 3$ et $\varepsilon = 10^{-3}$

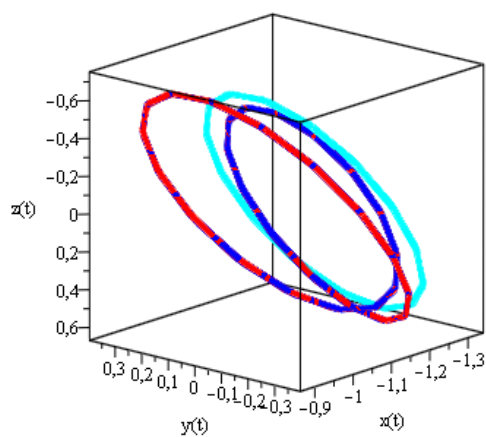


FIG. 3.2 – Les trois cycles limites de l'équation (3.5) pour $a = 1$, $b = \frac{1}{6}\sqrt{146}$, $c = 1$ et $\varepsilon = 10^{-3}$

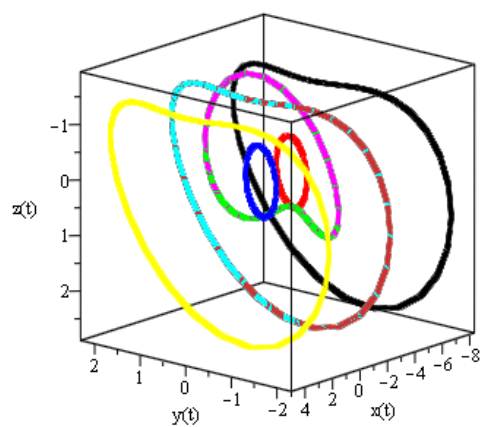


FIG. 3.3 – Les huit cycles limites de l'équation (3.5) pour $a = 1, b = 3, c = 1$ et $\varepsilon = 10^{-3}$.

CHAPITRE 4

Nombre maximum des cycles limites d'une classe des systèmes différentiels polynomiaux de Liénard généralisés

4.1 Présentation du problème et résultats principaux

En 2005, Coll, Gasull et Prohens [11] ont étudié par la méthode de l'intégrale Abélienne (Poincaré-Melnikov) le nombre des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre d'un système différentiel polynomial planaire

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y^{2l-1}(1+bx) + \varepsilon P_n(x, y) \\ \dot{y} &= x^{2k-1}(1+bx) + \varepsilon Q_n(x, y)\end{aligned}$$

où $P_n(x, y)$ et $Q_n(x, y)$ sont des polynômes de degré n , $0 < \varepsilon \ll 1$ et $b = 0$ ou $b = l = 1$. En 2014, Llibre et Makhlouf [29] ont prouvé que le système différentiel polynomial de Liénard généralisé

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^{2p-1} \\ \dot{y} &= -x^{2q-1} - \varepsilon f(x)y^{2n-1}\end{aligned}\tag{4.1}$$

où p, q et n sont des entiers positifs, ε est un petit paramètre et $f(x)$ est un polynôme de degré m peut avoir $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ cycles limites. Le système (4.1) avec $p = q = n = 1$ a été étudié en 1977 par Lins et al. [28]. Le cas $p = n = 1$ et q est arbitraire a été traité par Urbina et al. [45] en 1993.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au nombre maximum des cycles limites noté $\tilde{H}(p, q, l)$ que peut avoir le système différentiel polynomial de Liénard généralisé

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^{2p-1} \\ \dot{y} &= -x^{2q-1} - \varepsilon f(x, y)\end{aligned}\tag{4.2}$$

où p et q sont des entiers positifs, ε est un petit paramètre et $f(x, y)$ est un polynôme de degré m

$$f(x, y) = \sum_{i+j=0}^m a_{ij} x^i y^j.$$

Notons que le système (4.2) est plus général que le système (4.1) et que le nombre maximum des cycles limites obtenu pour le système (4.1) dans [29] en utilisant le théorème de la moyennisation du premier ordre dépend uniquement du degré m . Mais notre résultat obtenu pour le système (4.2) en utilisant le même théorème dépend de m, p et q . Nos résultats sont les suivants.

Théorème 4.1.1 [18] *Soit*

$$l = \begin{cases} m & \text{si } m \text{ est impair} \\ m - 1 & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases}$$

Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le nombre maximum des cycles limites du système (4.2) est borné par $\tilde{H}(p, q, l) = \left\lfloor \frac{l \cdot \max(p, q) - q}{2} \right\rfloor$.

Corollaire 4.1.1 *Soit $p = q = 1$ et $f(x, y)$ est un polynôme de degré $m = 5$*

$$\begin{aligned} f(x, y) = & a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ & + a_{40}x^4 + a_{23}x^2y^3 + a_{41}x^4y + a_{05}y^5. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} a_{00} &= 2, \quad a_{10} = -0.25, \quad a_{01} = 1.9, \quad a_{12} = 1.2, \quad a_{21} = -2.5, \\ a_{03} &= -1.2, \quad a_{23} = 0.8, \quad a_{40} = 3.2, \quad a_{41} = 0.6, \quad a_{05} = 0.2. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (4.2) a deux cycles limites bifurqués des orbites périodiques du système non perturbé (système (4.2) avec $\varepsilon = 0$). Dans ce cas la borne est atteinte.

Corollaire 4.1.2 *Considérons le système (4.2) avec $p = 1, q = 2$ et $m = 6$*

$$\begin{aligned} f(x, y) = & a_{01}y + a_{21}x^2y + a_{03}y^3 + a_{23}x^2y^3 + a_{41}x^4y \\ & + a_{05}y^5 + a_{33}x^3y^3 + a_{60}x^6 + a_{06}y^6. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} a_{01} &= 9.7, \quad a_{21} = -73.7, \quad a_{23} = -44.26, \quad a_{03} = 28.3, \\ a_{33} &= 2, \quad a_{41} = 14.1, \quad a_{05} = 2.07, \quad a_{60} = 0.1, \quad a_{06} = 4. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (4.2) a quatre cycles limites bifurquant des orbites périodiques du système non perturbé. Dans ce cas aussi la borne est atteinte.

4.2 Preuves des résultats

Dans cette section, nous allons travailler avec les coordonnées polaires généralisées de Liapunov introduites dans [26] par les fonctions (p, q) -trigonométriques $z(\theta) = Cs(\theta)$, $w(\theta) = Sn(\theta)$ comme étant des solutions du problème à valeur

initiale

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -w^{2p-1} \\ \dot{w} &= z^{2q-1} \\ z(0) &= p^{-\frac{1}{q}}, \quad w(0) = 0.\end{aligned}$$

Pour $p = q = 1$ ces fonctions ne sont que les fonctions trigonométriques classiques

$$Cs(\theta) = \cos \theta \text{ et } Sn(\theta) = \sin \theta.$$

On peut démontrer facilement que $Cs(\theta)$ et $Sn(\theta)$ vérifient la relation

$$pCs^{2q}(\theta) + qSn^{2p}(\theta) = 1$$

et que ces fonctions sont T -périodiques avec

$$T = 2p^{-\frac{1}{2q}} q^{-\frac{1}{2p}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2p})\Gamma(\frac{1}{2q})}{\Gamma(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q})},$$

où Γ est la fonction Gamma.

4.2.1 Preuve du Théorème 4.1.1

Le système différentiel polynomial de Liénard généralisé (4.2) avec $\varepsilon = 0$ est un système Hamiltonien avec Hamiltonien

$$H(x, y) = \frac{1}{2q}x^{2q} + \frac{1}{2p}y^{2p}.$$

Le système (4.2) non perturbé ($\varepsilon = 0$) a un centre, c'est l'origine $(0, 0)$. Considérons les (p, q) -coordonnées polaires de Liapunov (r, θ) définies par

$$x = r^p Cs(\theta) \text{ et } y = r^q Sn(\theta).$$

Le système (4.2) en coordonnées polaires (r, θ) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\varepsilon r^{1-q} S n^{2p-1}(\theta) f(r^p C s(\theta), r^q S n(\theta)) \\ \dot{\theta} &= -r^{2pq-p-q} - \varepsilon p r^{-q} C s(\theta) f(r^p C s(\theta), r^q S n(\theta)).\end{aligned}\tag{4.3}$$

En considérant θ comme une variable indépendante, le système (4.3) devient

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r^{-2pq+p+1} S n^{2p-1}(\theta) f(r^p C s(\theta), r^q S n(\theta)) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Nous appliquons le théorème de la moyennisation du premier ordre (Théorème 2.2.1) avec

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = r, \quad t = \theta, \quad F_1(t, \mathbf{x}) = F_1(\theta, r)$$

où

$$F_1(\theta, r) = r^{-2pq+p+1} S n^{2p-1}(\theta) \sum_{i+j=0}^m a_{ij} r^{pi+qj} C s^i(\theta) S n^j(\theta).\tag{4.4}$$

Donc, nous obtenons

$$\mathcal{F}(r) = r^{-2pq+p+1} \sum_{i+j=0}^m a_{ij} r^{pi+qj} \int_0^T C s^i(\theta) S n^{j+2p-1}(\theta) d\theta.$$

Posons

$$I_{i,j} = \int_0^T C s^i(\theta) S n^j(\theta) d\theta,$$

nous aurons

$$\mathcal{F}(r) = r^{-2pq+p+1} \sum_{i+j=0}^m a_{ij} r^{pi+qj} I_{i,j+2p-1}.$$

Soit

$$l = \begin{cases} m & \text{si } m \text{ est impair} \\ m - 1 & \text{si } m \text{ est pair.} \end{cases}$$

Comme $I_{i,j} = 0$ si i ou j est impair et $I_{i,j} > 0$ si i et j sont pairs, alors nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(r) &= r^{-2pq+p+1} \sum_{\substack{i+j=0 \\ i: \text{pair} \\ j: \text{impair}}}^l \tilde{a}_{ij} r^{pi+qj} \\
 &= r^{-2pq+p+2} \sum_{\substack{i+j=1 \\ i: \text{pair} \\ j: \text{impair}}}^l \tilde{a}_{ij} r^{pi+qj-1}
 \end{aligned}$$

où

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} I_{i,j+2p-1}.$$

En simplifiant encore les formules, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(r) &= r^{-2pq+p+2} (\tilde{a}_{01} r^{q-1} + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i: \text{pair} \\ j: \text{impair}}}^l \tilde{a}_{ij} r^{pi+qj-1}) \\
 &= r^{-2pq+p+q+1} (\tilde{a}_{01} + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i: \text{pair} \\ j: \text{impair}}}^l \tilde{a}_{ij} r^{pi+q(j-1)}) \\
 &= r^{-2pq+p+q+1} \sum_{\substack{i+j=1 \\ i: \text{pair} \\ j: \text{impair}}}^l \tilde{a}_{ij} r^{pi+q(j-1)}.
 \end{aligned}$$

Pour répondre à notre question, nous devons savoir combien des racines positives que peut avoir l'équation algébrique

$$\mathcal{F}(r) = \sum_{\substack{i+j=1 \\ i: \text{pair} \\ j: \text{impair}}}^l \tilde{a}_{ij} r^{pi+q(j-1)} = 0. \quad (4.5)$$

Le degré de $\mathcal{F}(r)$ est la valeur maximale des puissances $pi + q(j - 1)$ sans oublier que $i + j \leq l$, i est pair et j est impair. Pour cela, nous avons la majoration

$$\begin{aligned} pi + qj - q &\leq \max(p, q).i + \max(p, q).j - q \\ &\leq \max(p, q)(i + j) - q \\ &\leq l. \max(p, q) - q. \end{aligned}$$

Alors le degré de $\mathcal{F}(r)$ est majoré par $l. \max(p, q) - q$. Comme $r = 0$ n'est pas une solution qui peut fournir des cycles limites nous devons l'éliminer. Remarquons que la variable r apparait dans l'équation (4.5) en r^2 car toutes les puissances $pi + q(j - 1)$ sont paires. Donc, Si $r^* \neq 0$ est une solution de l'équation (4.5) alors $-r^*$ est aussi une solution. Nous éliminons cette dernière solution car nous sommes uniquement intéressés par les solutions positives. Alors l'équation (4.5) peut avoir au plus $\left\lfloor \frac{l. \max(p, q) - q}{2} \right\rfloor$ solutions positives. Par conséquent, le système différentiel (4.2) peut avoir au plus $\tilde{H}(p, q, l) = \left\lfloor \frac{l. \max(p, q) - q}{2} \right\rfloor$ cycles limites. Ce qui termine la preuve de Théorème 4.1.1.

4.2.2 Preuve du Corollaire 4.1.1

Considérons le système différentiel (4.2) avec $p = q = 1$ et $m = 5$. D'après le Théorème 4.1.1, le système (4.2) peut avoir au plus $\left\lfloor \frac{5 \times 1 - 1}{2} \right\rfloor = 2$ cycles limites et nous avons

$$\mathcal{F}(r) = \tilde{a}_{01} + (\tilde{a}_{21} + \tilde{a}_{03})r^2 + (\tilde{a}_{23} + \tilde{a}_{41} + \tilde{a}_{05})r^4$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{ij} &= a_{ij} I_{i,j+1} \\ &= a_{ij} \int_0^T C s^i(\theta) S n^{j+1}(\theta) d\theta.\end{aligned}$$

Pour $p = q = 1$ nous avons

$$Cs(\theta) = \cos(\theta) \text{ et } Sn(\theta) = \sin(\theta) \text{ avec } T = 2\pi.$$

Calculons les intégrales, nous aurons

$$I_{0,2} = \pi, \quad I_{2,2} = \frac{1}{4}\pi, \quad I_{0,4} = \frac{3}{4}\pi, \quad I_{2,4} = I_{4,2} = \frac{1}{8}\pi, \quad I_{0,6} = \frac{5}{8}\pi$$

et donc

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{01} &= 5.969026043, \quad \tilde{a}_{21} = -1.963495409, \quad \tilde{a}_{03} = -2.827433388, \\ \tilde{a}_{23} &= 0.3141592654, \quad \tilde{a}_{41} = 0.2356194490, \quad \tilde{a}_{05} = 0.3926990818.\end{aligned}$$

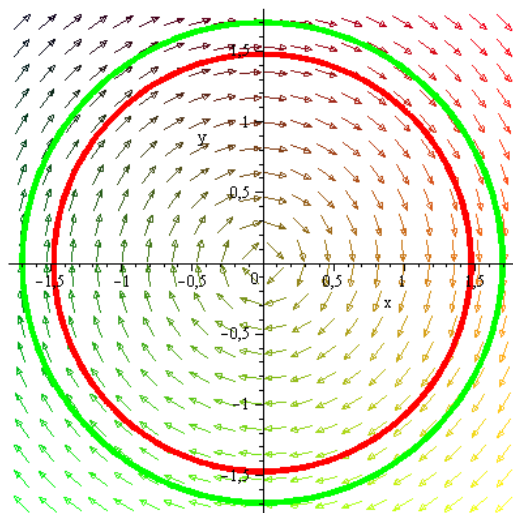
Dans ce cas l'équation algébrique $\mathcal{F}(r) = 0$ a deux solutions positives

$$r_1 = 1.478399984 \text{ et } r_2 = 1.702253454$$

satisfaisant

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr} \Big|_{r=r_1} &= -1.98414430 \neq 0 \\ \frac{d\mathcal{F}(r)}{dr} \Big|_{r=r_2} &= 2.28457558 \neq 0.\end{aligned}$$

Donc, le système (4.2) a exactement deux cycles limites bifurquant des orbites périodiques du système non perturbé, voir Figure 4.1.


 FIG. 4.1 – Deux cycles limites pour $\varepsilon = 0.001$

4.2.3 Preuve du Corollaire 4.1.2

D'après le Théorème 4.1.1 le système (4.2) avec $p = 1, q = 2$ et $-m = 6$ peut avoir au plus $\lfloor \frac{(6-1) \times 2 - 2}{2} \rfloor = 4$ cycles limites et la fonction algébrique est donnée par

$$\mathcal{F}(r) = \tilde{a}_{01} + \tilde{a}_{21}r^2 + (\tilde{a}_{03} + \tilde{a}_{41})r^4 + \tilde{a}_{23}r^6 + \tilde{a}_{05}r^8$$

Dans ce cas et suivant Liapunov [26], $Cs(\theta)$ et $Sn(\theta)$ sont les fonctions elliptiques

$$Cs(\theta) = cn(\theta) \text{ et } Sn(\theta) = sn(\theta)dn(\theta) \text{ du module } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

avec la période

$$T = 2(p)^{-\frac{1}{2q}}(q)^{-\frac{1}{2p}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2p})\Gamma(\frac{1}{2q})}{\Gamma(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q})} = 7.416298712.$$

A l'aide d'un logiciel de calcul symbolique Maple nous calculons les intégrales

$$I_{i,j+1} = \int_0^T cn^i(\theta)(sn(\theta)dn(\theta))^{j+1}d\theta$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{0,2} &= 2.472099570, I_{2,2} = 0.6777704678, I_{0,4} = 1.059471244, \\ I_{2,4} &= 0.2259234893, I_{4,2} = 0.3531570814, I_{0,6} = 0.4815778383. \end{aligned}$$

et puis

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{01} &= 23.97936583, \tilde{a}_{21} = -49.95168348, \tilde{a}_{03} = 29.98303621, \\ \tilde{a}_{23} &= -9.999373636, \tilde{a}_{41} = 4.979514848, \tilde{a}_{05} = 0.9968661253. \end{aligned}$$

L'équation $\mathcal{F}(r) = 0$ a quatre racines positives

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.9989866774, r_2 = 1.438456003 \\ r_4 &= 1.67128889, r_4 = 2.042173432. \end{aligned}$$

vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}(r)}{dr} \Big|_{r=r_1} &= -12.15098498 \\ \frac{d\mathcal{F}(r)}{dr} \Big|_{r=r_2} &= 4.6739814 \\ \frac{d\mathcal{F}(r)}{dr} \Big|_{r=r_3} &= -5.9652117 \\ \frac{d\mathcal{F}(r)}{dr} \Big|_{r=r_4} &= 37.382648. \end{aligned}$$

Comme ces dérivées sont toutes non nulles, le système (4.2) a exactement quatre cycles limites, voir Figure 4.2.

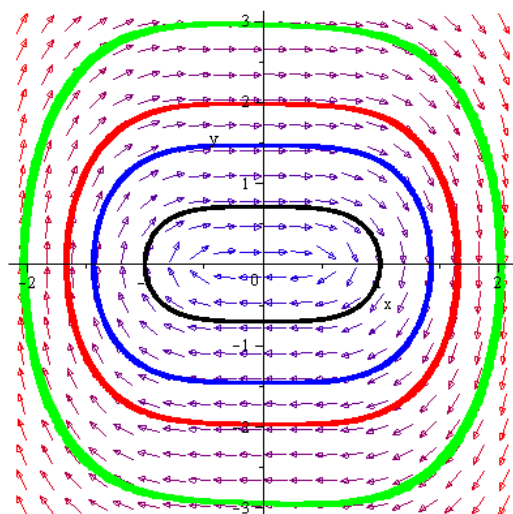


FIG. 4.2 – Quatre cycles limites pour $\varepsilon = 0.001$

CHAPITRE 5

Conclusion et perspectives

La deuxième partie du 16^{ème} problème de Hilbert consiste à la recherche de nombre maximum des cycles limites que peut avoir le système différentiel polynomial planaire d'ordre n

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

Dans ce travail, nous avons étudié ce genre de problèmes en utilisant l'une des plus importantes méthodes perturbatives, c'est la méthode de la moyennisation. Nous avons donné des conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques d'une classe des équations différentielles du troisième ordre. Nous avons perturbé une équation différentielle non homogène. Nous avons illustré notre étude par des exemples.

Nous avons aussi donné des résultats sur le nombre maximum des cycles limites de certains systèmes différentiels polynomiaux de Liénard généralisés noté $\tilde{H}(p, q, l)$. Notre étude montre que ce nombre dépend de p , q et l . Dans les exemples que nous avons considéré la borne est atteinte.

Notre futur travail sera une généralisation de ces résultats. Nous allons

étudier le nombre maximum des cycles limites du système différentiel polynomial de Liénard généralisé

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^{2p-1} + \varepsilon f(x, y) \\ \dot{y} &= -x^{2q-1} + \varepsilon h(x, y)\end{aligned}$$

où p et q sont des entiers positifs, ε est un petit paramètre, $f(x, y)$ et $h(x, y)$ sont des polynômes de degrés m et n respectivement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Badi and A. Makhlouf. Limit cycles of the generalized Liénard differential equation via averaging theory. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2012 : 68 (2012), 1–11.
- [2] T. R. Blows and N. G. Lloyd. *The number of small-amplitude limit cycles of Liénard equations*. *Maths. Proc. Camb. Phil. Soc.* 95 : (1984), 359-366.
- [3] N.N. Bogoliubov and N. Krylov. *The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations*. Publ. 8 of the Ukrainian Acad. Sci. Kiev, 1934.
- [4] N.N. Bogoliubov. *On some statistical methods in mathematical physics*. *Izv. vo Akad. Nauk Ukr. SSR*, Kiev, 1945.
- [5] N.N. Bogoliubov and Yu. A. Mitropolsky. *Asymtotic methods in the theory of nonlinear oscillations*. Gordon and Breach, New York, 1961.
- [6] A. Buicà and J. Libre. *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*. *Bull. Sci. Math.* 128 : (2004), 7-22.
- [7] L. Chen and M. Wang. *Relative position and number of limit cycles of a quadratic differential system*. *Acta Math. Sin. Chinese.* 22 : (1979), 751-758.

- [8] C. J. Christopher. *Estimating limit cycles bifurcations from centers*. In : Trends in Mathematics : Differential Equations with Symbolic Computation, Birkhauser Verlag, Basel (2006), 23-35.
- [9] C.J. Christopher and N.G. Lloyd. *Polynomial systems : a lower bound for the Hilbert numbers*. Proc. Math. Phys. Sci. 450 : (1995), 219-224.
- [10] C. J. Christopher and S. Lynch. *Small-amplitude limit cycle bifurcates from Liénard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces*. Nonlinearity. 12 : (1999), 1099-1112.
- [11] B. Coll, A. Gasull and R. Prohens. *Bifurcation of limit cycles from two families of centres*. Dynamics of continuous, Discrete and Impulsive systems. Series A. Mathematical analysis 12 : (2005), 275-287.
- [12] W. A. Coppel. *Some quadratic systems with at most one limit cycle*. Dynamics Reported. vol. 2 Wiley : (1998), 61-68.
- [13] H. Dulac. *Sur les cycles limites*. Bull. Soc. Math. France 5,2 : (1923), 45-188.
- [14] F. Dumortier and C. li. *On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Liénard equations*. Nonlinearity. 9 : (1996), 1489-1500.
- [15] F. Dumortier and C. Rousseau. *Cubic Liénard equations with linear damping*. Nonlinearity. 3 : (1990), 1015-1039.
- [16] E. Esmailzadeh, M. Ghorashi and B. Mehri. *Periodic behavior of a nonlinear dynamical system*. Nonlinear Dynam, 7 : (1995), 335-344.
- [17] A. Gasull and J. Torregrosa. *Small-amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity*. J. Diff. Eqs, 159 : (1998), 1015-1039.
- [18] M. Hamamda and A. Makhoulf. *Limit cycles of a class of generalized Liénard polynomial equations*. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768 Volume 12 : 2 (2016) ; 1831-1843.
- [19] D. Hilbert. *Mathematische Probleme*. Lecture, Second International Congress, Math, (Paris, 1900), Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. kl. (1900), 253-297. English transl, Bull. Amer. Math. Soc. 8 : (1902), 437-479.

- [20] Y. Ilyashenko. *Centennial history of Hilbert's 16th problem*. Bull. Amer. Math. Soc, 39 : (2002), 301-354.
- [21] Jiblinli. *Hilbert's 16th problem and bifurcation of planar polynomial vector fields*. internat. J. Bifur. Chaos. Appl. Soc. Engre. 13 : (2003), 47-106.
- [22] J. Li, H.S.Y. Chan and K.W. Chung. *Some lower bounds for $H(n)$ in Hilbert's 16th problem*. Qual. Theory Differ. Equ. 3 : (2003), 345-360.
- [23] C. Li and J. Llibre. *Cubic homogeneous polynomial centers*. Publ. Math. (2014), 297-308.
- [24] C. Li, C. Liu and J. Yang. *A cubic system with thirteen limit cycles*. J. Differ. Equ. 246 : (2009), 3609-3619.
- [25] J. Li, M. Zhang and S. Li. *Bifurcations of limit cycles in a Z_2 -equivariant planar polynomial vector field of degree 7*. Int. J. Bifurc. Chaos 16 : (2006), 925-943.
- [26] A. M. Liapunov. *Stability of motion in Mathematics in science and engineering*. Academic Press, vol 30 : 1966.
- [27] A. Liénard. *Etude des oscillations entretenues*. Revue Générale de l'Electricité. 23 : (1928), 946-954.
- [28] A. Lins, W. De Melo and C. C. Pugh. *On Liénard's equation*. Lecture Notes in math. Springer, 597 : (1977), 335-357.
- [29] J. Llibre and A. makhlouf. *Limit cycles of a class of generalized Liénard polynomial equation*. J Dyn Control Syst. DOI 10.1007/s10883-014-9253-4
- [30] J. Llibre, A. C. Mereu and M. A. Teixeira. *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2009), 1-21.
- [31] J. Llibre, J. Yu and X. Zhang, *Limit Cycles of Third Order Differential Equations*, Rocky Mountain, J. Math, 40 : (2010) 581-594.
- [32] J. Llibre and A. Makhlouf. *Periodic Orbits of a Non-autonomous Quadratic Differential System obtained from Third Order Differential Equations*

- tions. Dynamical systems, June 27 :2 (2012), 161-168.
- [33] N. G. Lloyd and S. Lynch. *Small-amplitude limit cycles of certain Liénard systems*. Pro. Royal. Soc. London Ser. A 418 : (1988), 199-208.
- [34] S. Lynch. *Generalized quadratic Liénard equation*. Appl. Math. Lett. 8 : (1995), 15-17.
- [35] S. Lynch and C. J. Christopher. *Limit cycles in highly non-linear differential equations*. J. Sound Vib. 224 : (1999), 505-517.
- [36] A. Makhlouf and M. Hamamda. *Limit cycles of a third order différential equation*. Ann. of Diff. Eqs. 30 : 4 (2014), 416-423.
- [37] I.G. Malkin. *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*. (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit, Moscow, 1956.
- [38] F. Monhos. *Periodic solutions for a third order differential equation under conditions on the potential*. Portugaliae Math. 55 : (1998), 475-484.
- [39] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [40] R. Reissig. *Periodic solutions of a third order nonlinear differential equation*. Ann. Math. Pura. Appl. 92 : (1972), 193-198.
- [41] M. Roseau. *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*. (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol.8 Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.
- [42] G. S. Rychkov. *The maximum number of limit cycles of the system $\dot{x} = y - a_1x^3 - a_2x^5, \dot{y} = -x$ is two*. Differential' nye Uravneniya. 11 : (1975), 380-391.
- [43] J. A. Sanders, F. Verhulst. *Averaging Method in Nonlinear Dynamical Systems*. Applied Mathematical Sciences 59, Springer, 1985.
- [44] S. Songling. *A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems*. Scientia Sin. 23 : (1980), 154-158.
- [45] A. M. Urbina, G. L. de la Barra, G. León, M. L. de la Barra, M. Cañas. *Limit cycles of Liénard equations with nonlinear damping*. Canad Math Bull. 36 : (1993), 251-256.

-
- [46] F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Universitext. Springer. New York. 1996.
 - [47] S.Wang and P. Yu. Bifurcation of limit cycles in a quintic Hamiltonian system under a sixth-order perturbation. *Chaos Solitons Fractals* 26 : (2005),1317-1335.
 - [48] P. Yu and M. Han. *Limit cycles in generalized Liénard systems*. *Chaos solutons fractals*. 30 (2006), 1048-1068.
 - [49] Z. Zhang, T. Ding, W. Huang and Z. Dong. *Qualitative Theory of Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence (1992).