

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Laboratoire de probabilité et
statistique



جامعة باجي مختار عنابة



Faculté des Sciences

Année : 2016

Département de Mathématiques

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DE LA PRIME DE CRÉDIBILITÉ.

Option

Optimisation et calcul stochastique

Présentée par

DJEBAR Ahlem

DIRECTEUR DE MEMOIRE : REMITA Mohamed Riad PROF. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :	CHADLI Assia	PROF. U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	EISELE Karl Théodor	PROF. U. STRASBOURG
EXAMINATEUR :	ZEGHDOUDI Halim	MCA. U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	BOUKHETALA Kamel	PROF. U.S.T.H.B
EXAMINATEUR :	BOUTABIA Hacène	PROF. U.B.M. ANNABA

Résumé

Motivé par l'utilisation de toutes les données disponibles de portefeuille de l'assurance non vie, Frees a proposé la crédibilité multivariée, comme étant l'extension des modèles classiques de la crédibilité de : Bühlmann et Bühlmann-Straub, ayant reçu une très forte attention par les chercheurs dans le domaine de la théorie de la crédibilité, en vertu de laquelle l'estimateur de crédibilité est plus utilisé en pratique. Cette thèse est dédiée à la modélisation mathématique de la prime de crédibilité. Plus précisément, on présente la crédibilité multivariée Frees(2003). Où, on va rajouter des conditions importantes sur les variables aléatoires, plus sur quelques matrices utilisées dans l'article de Frees(2003). Plus la crédibilité bivariate.

Mots-clés :Crédibilité multivariée, modèle de Bühlmann, modèle de Bühlmann - Straub, matrice Variance-Covariance, variable irréductible, crédibilité bivariate .

Abstract

Motivated by the use of all available data from non-life insurance portfolio, Frees proposed the multivariate credibility as the extension of the classic Credibility models : Bühlmann and Bühlmann-Straub, who received strong attention through researchers in the field of credibility theory, under which the estimator credibility is used in practice. This thesis is devoted to the mathematical modeling of the credibility premium. More specifically, the present multivariate credibility Frees (2003). Where we will add important conditions on random variables, on some more matrices used in the article by Frees (2003). Plus bivariate credibility.

Key-words : Multivariate Credibility, Bühlmann model, Bühlmann-Straub model, Variance-Covariance matrix, Irreducible variable, Bivariate credibility.

Introduction générale

La théorie de la crédibilité est une méthode de tarification de l'assurance non vie qui est largement utilisée en particulier en Amérique du nord. Il repose sur l'idée de se restreindre à la classe des estimateurs qui sont linéaires par rapport aux les observations. Le modèle de la crédibilité multivariée est étendu pour permettre l'âge des sinistres pour influencer l'estimation des futures sinistres. Le modèle est appliqué aux données à partir d'un portefeuille des lignes commerciales d'activités.

Dans cette thèse, le but principal est de faire une condition importante sur les variables aléatoires (nombres et montants des sinistres) utilisé dans la crédibilité multivariée.

En effet, comme l'estimateur de la crédibilité multivariée basé sur la matrice Variance-Covariance des nombres et montants des sinistres, il faut garantir que cette matrice est bien inversible, de sorte que les dénominateurs des facteurs de crédibilité sont différents de zéro. On a établi une condition sur les variables aléatoires, qui nous a permis par la suite de vérifier l'inversion de cette matrice. On propose également des conditions sur autres matrices utilisé dans la crédibilité multivariée appliqué au modèle collectif.

Le travail de cette thèse est structuré comme suit : le chapitre 1, l'objectif de ce chapitre est de rappeler l'origine et les notions de base de la théorie de la crédibilité, le chapitre est organisé comme suit : en premier lieu, une petite histoire sur cette théorie puis la formalisation bayésienne où modèle de Bühlmann est la solution des inconvénients de la prime de Bayes.

Au chapitre suivant, nous avons consacré au modèle de base de la théorie de la crédibilité, c'est le modèle de Bühlmann et leur extension modèle de Bühlmann-Straub. On donne aussi l'estimation des paramètres de structure pour les deux modèles et l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de crédibilité de Bühlmann-Straub. Chapitre 3, dans ce chapitre, nous intéressons à la crédibilité multivariée appliquée au modèle collectif présenté dans l'article de (Frees 2003). On introduit l'estimateur de crédibilité pour un seul secteur d'activité et l'estimateur de plusieurs secteurs d'activité, avec quelques remarques importantes. Plus l'essentiel de notre travail de recherche où, on démontre le résultat principal qui est le théorème d'irréductibilité des variables aléatoires, pour vérifier l'inversion de la matrice variance-covariance de modèle collectif.

Finalement, le dernier chapitre contient la nouvelle théorie : la crédibilité bivariate, où nous donnerons le modèle bivariant de Bühlmann et modèle bivariant de Bühlmann-Straub ensuite la comparaison entre modèle bivariant de Bühlmann et modèle bivariant de Bühlmann-Straub, aussi estimation des paramètres de structure et finalement les familles exponentielles.

Remerciements

C'est avec une profonde émotion que je rends grâce au bon Dieu de m'avoir donné la force et le courage d'achever ce modeste travail que j'ai tant attendu et espéré.

Bien évidemment, c'est à Prof. Remita Riad que vont mes premiers remerciements. Il a été pour moi, depuis le début de ma première année MAIS, et tout au long de ma thèse, un mentor remarquable. Il m'a montré comment construire mon intuition mathématique, comment rédiger de manière lisible... Mais au-delà de ses indéniables qualités mathématiques, c'est par ses qualités humaines qu'il a su rendre ces années agréables et enrichissantes. Merci aussi pour tous les moyens par lesquels que vous avez fourni pour la réalisation de cette recherche. Je lui suis aussi reconnaissante d'avoir su rester très disponible jusqu'à la fin de ma thèse, malgré une vie professionnelle chargée. Bref, un énorme merci !

Je remercie également Prof. Karl Theodor Eisele pour avoir bien voulu co-encadrer ce travail ainsi que pour son soutien. Je lui exprime par la présente toute ma gratitude, pour son expérience, sa compétence, son soutien inconditionnel.

Je suis très honorée de la présence de Prof. Chadli Assia . Je tiens à la remercier chaleureusement et à lui assurer ma profonde reconnaissance pour avoir accepté d'évaluer cette thèse et d'en présider le jury.

J'exprime aussi mes très sincères remerciements au Prof. Boukhatela Kamel et au Prof. Boutabia Hasen, d'avoir accepté la lourde tâche d'examiner ma thèse, pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail et pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce manuscrit.

Je remercie Prof. Boukhatela Kamel pour le déplacement qu'il a fait pour faire partie de mon jury, je suis enchantée de faire leur connaissance le jour de la soutenance. J'adresse mes sincères remerciements pour Mr Zeghdoudi Halim, qui a été toujours présent pour m'orienter, m'apprendre et me diriger.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble de mes professeurs tout le long de ces années d'études.

Je remercie, tout particulièrement, mes parents et mon mari, à mes frères Souad, Djamila et Mouhamed pour le soutien moral et l'encouragement tout au long de mon cursus.

À titre plus amical, je tiens à remercier Mr Saleh Saleh directeur générale de CAAR Annaba, et mes sincères amis Mme et M Adjailia et Mme et Mr Dib et les membres de l'association AMIE Strasbourg pour leur soutien à Mannheim et Strasbourg.

*Je tiens à dédier ce modeste travail à : Mon père et ma mère et mon mari et mon fils Joud
Abdlerrahmene*

Table des matières

Introduction générale	3
I Préliminaires	5
I.1 Historique de théorie de crédibilité	5
I.2 Exemple de Ragnar Norberg	7
I.3 Théorie de la fluctuation limitée	9
I.3.1 Crédibilité totale	9
I.3.2 Crédibilité partielle	10
I.4 Formalisation Bayésienne	11
I.4.1 Risques individuel et collectif	11
I.4.2 Prime de Bayes	12
I.4.3 Meilleure prime d'expérience	12
I.4.4 Construction d'une échelle bonus-malus	13
I.4.4.1 Tarification a posteriori sans personnalisation a priori . . .	13
I.4.5 Prime de Bayes dans le cadre exponentiel	15
II Modèle de Bühlmann et Bühlmann Straub	17
II.1 Introduction	17
II.2 Prime de crédibilité	17
II.2.1 Introduction dans un contexte simplifié	17
II.2.2 Interprétation de la prime de crédibilité	20
II.2.3 Erreur quadratique moyenne de la prime de crédibilité	20
II.3 Modèle de Bühlmann	21
II.3.1 Hypothèses du modèle	21
II.3.2 Estimateur de crédibilité	21
II.3.3 Estimateur de crédibilité homogène	24
II.3.4 Estimation des paramètres de structure	26
II.4 Modèle de Bühlmann-Straub	28
II.4.1 Hypothèses du modèle	29
II.4.2 Paramètres de structure	30
II.4.3 Estimateur de crédibilité	30
II.4.4 L'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de crédibilité	35
II.4.5 Estimateur homogène de crédibilité	35
II.4.6 L'erreur quadratique moyenne de l'estimateur homogène de crédibilité	39
II.4.7 Estimation des paramètres de structure	40
II.4.8 Récapitulatif de la démarche à suivre en pratique	43

III Crédibilité multivariée appliquée au modèle collectif	45
III.1 Introduction	45
III.2 Les données	45
III.3 Unique secteur d'activité	46
III.3.1 Hypothèses	46
III.3.2 Prédiction de crédibilité	47
III.4 Multiples secteurs d'activité	49
III.4.1 Hypothèses	49
III.4.2 Prédiction de la crédibilité	50
III.5 Autour de la crédibilité multivariée : Propriétés de la matrice de covariance.	52
III.5.1 Introduction	52
III.5.2 Irréductibilité d'une suite de variables aléatoires	52
III.5.3 Modification de modèle	53
III.5.4 Conclusion	54
IV La crédibilité bivariate	55
IV.1 Introduction	55
IV.2 Préliminaires	55
IV.3 Modèle bivariant de Bühlmann	56
IV.4 Modèle bivariant de Bühlmann-Straub	60
IV.5 Comparaison entre modèle bivariant de Bühlmann et modèle bivariant de Bühlmann-Straub	63
IV.6 Estimation des paramètres de structure	64
Conclusion générale	67
 Bibliographie	 73

Chapitre I

Préliminaires

I.1 Historique de théorie de crédibilité

La théorie de la crédibilité est la pierre angulaire de la théorie actuarielle de l'assurance de dommage. La petite histoire suivante, inventée par le Dr François Dufresne pour un cours d'introduction à la théorie de la crédibilité à l'Université Laval, illustre bien comment cette théorie a pu voir le jour. Vers les années 1910, aux États-Unis, la multinationale General Motors et le petit constructeur indépendant Tucker sont assurés chez Allstate contre les accidents de travail (workers compensation), avec quelques autres fabricants d'automobiles.

Un taux moyen est calculé à partir de l'expérience de l'ensemble de ces fabricants et c'est ce taux qui est chargé à chacun. Or, la GM calcule elle-même son taux et s'aperçoit qu'il serait, année après année, inférieur à celui qu'on lui charge et ce, grâce à une expérience meilleure que celle du groupe.

Exaspérée par une telle situation, elle demande à Allstate qu'on lui charge son propre taux, ceci sous prétexte que son nombre d'employés important est un gage de stabilité de l'expérience entre les années. Les actuaires de Allstate sont intuitivement d'accord avec l'argumentation de GM, aussi s'approprient-ils à accéder à sa demande. Un petit problème les fait cependant hésiter : si le nombre d'employés de GM est clairement assez gros pour que l'on se fie à son expérience et celui de Tucker trop petit pour faire de même, où fixera-t-on la limite entre un nombre d'employés fiable et un non fiable ?

Il est généralement reconnu que le premier actuaire à avoir proposé une solution au problème dans la littérature est Arthur H. Mowbray, dans le premier numéro, des Proceedings de la Casualty Actuarial Society, en 1914 (Mowbray, 1914). En supposant connue la probabilité q qu'un accident survienne, il désire calculer le nombre minimal d'employés assurés n de telle sorte que la probabilité que le nombre d'accidents ne s'éloigne pas de plus de 100 k % de la moyenne (ou du mode) soit supérieure à 100p%. Si l'on note N la distribution du nombre d'accidents, alors l'énoncé précédent s'écrit en langage mathématique

$$P[(1 - k)E[N] \leq N \leq (1 + k)E[N]] \geq p, \quad (\text{I.1})$$

où $N \sim \text{Binomiale}(n, q)$. La solution de Mowbray était intéressante car appuyée par des arguments probabilistes. Elle connut d'ailleurs de multiples adaptations qui lui permirent de rester d'actualité jusqu'à nos jours. Moyennant la détermination d'une distribution pour le nombre de sinistres, les praticiens pouvaient désormais résoudre par un calcul simple le problème auquel ils faisaient face : fixer un seuil d'admissibilité à la pleine crédibilité. Les assurés eurent cependant tôt fait de soumettre un autre problème aux actuaires. Telle que présentée jusqu'à maintenant, la théorie de la crédibilité n'admettait que deux niveaux : 0 et 1. Or, cette situation pouvait se traduire, pour un employeur situé tout juste sous le seuil d'admissibilité, en une différence significative dans la prime à

payer. De plus, la notion même de pleine crédibilité ne ralliait pas l'ensemble des actuaires, certains croyant que jamais les données ne sont fiables à 100%. C'est pour répondre à ces critiques que fut introduit le concept de crédibilité partielle, dont on attribue la première véritable théorie sur le sujet à Whitney (1918).

Dès 1918 donc, Whitney mentionne la «nécessité, par souci d'équité pour l'assuré, de pondérer d'un côté l'expérience collective et de l'autre l'expérience individuelle». L'essence de la crédibilité consistait à calculer cette pondération[12]. À au moins deux reprises dans l'histoire, la crédibilité de précision (greatest accuracy) a eu la chance de s'imposer avant la contribution de Bühlmann en 1967. La première se trouve dans les travaux de Whitney. Dans son article, ce dernier retient quatre éléments qui influenceront la pondération à donner à l'expérience individuelle : l'exposition, le niveau de risque, la crédibilité de la prime collective et l'homogénéité du groupe. Delà, par un développement mathématique, il obtient une expression pour la prime individuelle (P) de la forme

$$P = zX + (1 - z)C \quad (I.2)$$

Où X est l'expérience individuelle et C l'expérience collective. Ces valeurs sont pondérées par le facteur de crédibilité, z , dont Whitney obtient une formule de la forme $n/(n + K)$. K n'est alors pas une constante arbitraire, mais bien une expression explicite dépendant des divers paramètres du modèle. Par souci de simplicité, Whitney suggère cependant de fixer K comme une constante à déterminer au jugement de manière à éviter les trop grandes fluctuations entre la prime individuelle et la prime collective. Whitney fut de plus critiqué par Fisher (1919) pour avoir utilisé une méthode jugée hérétique à l'époque en statistique, la règle de Bayes. Fischer cite d'ailleurs quelques personnes faisant autorité s'étant prononcées contre l'usage de cette règle. En fait, Whitney utilise la version la plus simple de la règle, celle même proposée par Bayes, qui suppose qu'a priori tous les événements sont une chance égale de se réaliser.

En 1945 d'abord, Bailey obtient une expression pour la crédibilité dans ce qui semble être l'univers non paramétrique exploré plus tard par Bühlmann. Seulement, une notation confuse rend le texte difficilement déchiffrable et le condamne à la marginalité. L'article de 1950 avait, lui, davantage le potentiel pour ébranler les acquis en théorie de la crédibilité.

Bailey démontre qu'en minimisant l'erreur quadratique dans un contexte bayésien, l'estimateur obtenu est une fonction linéaire des observations qui correspond exactement à la prime de crédibilité, et ce pour les combinaisons de distributions binomiale /bêta, Poisson/gamma et normale/normale.

Hans Bühlmann y redéfinit alors le problème fondamental en expérience rating et présente la solution qui allait révolutionner la théorie de la crédibilité. En forçant la prime bayésienne à être linéaire, Bühlmann (1967,1969) obtient, dans un cadre non paramétrique, un facteur de crédibilité de la forme $z = n/(n + K)$, avec une expression simple et générale pour K . Le virage sera alors définitivement pris en faveur de l'approche de précision et l'essentiel de la recherche se fera en Europe[26].

C'est pourquoi l'approche traitant l'hétérogénéité est aujourd'hui souvent appelée «Crédibilité européenne» malgré qu'elle est originaire des États-Unis (notamment dans les travaux de Bailey). L'approche de stabilité, limited fluctuations, a par conséquent reçu l'appellation «crédibilité américaine». On peut sans crainte poser que le célèbre modèle de Bühlmann marque le début de l'histoire contemporaine de la théorie de la crédibilité. Celle-ci étant bien davantage documentée et connue, on va maintenant se contenter de présenter chronologiquement les principaux modèles qui suivirent ce lui de Bühlmann.

Le modèle de Bühlmann se décompose lui-même en deux parties communément appelées «modèle original» et «modèle classique». Le premier pose les bases de la nouvelle théorie, tandis que l'apport de la théorie bayésienne empirique fait du second un modèle plus pratique. La première généralisation de ces modèles voit le jour en 1970, alors que Bühlmann s'adjoint son étudiant au doctorat Erwin Straub pour développer le très célèbre modèle qui portera leurs noms (Bühlmann et Straub, 1970).

L'ajout de poids aux données et la définition d'estimateurs des paramètres de structure constituent les principales améliorations au modèle de Bühlmann. Elles sont toutefois de taille et permettront à la crédibilité de précision de véritablement faire une percée dans la

pratique de l'assurance. Le modèle de Bühlmann–Straub constitue encore aujourd'hui un standard et est couramment utilisé dans les compagnies d'assurance, en Europe surtout.

En 1974, Jewell fait la première de ses deux plus grandes contributions au développement de la théorie de la crédibilité. Il démontre (Jewell, 1974) que l'estimateur bayésien est linéaire pour toute fonction de vraisemblance membre de la famille exponentielle utilisée avec sa conjuguée naturelle. Ce faisant, Jewell ne fait que confirmer certains des résultats obtenus avant lui par Bailey (1950) et Mayerson (1964), mais les unifie en une formulation générale. Les deux années suivantes furent fastes pour la théorie de la crédibilité.

D'abord, Hachemeister (1975) généralise le modèle de Bühlmann–Straub en incorporant la régression linéaire à la théorie de la crédibilité de précision. Plus tard, on pousera même cette idée un peu plus loin en étudiant la régression non-linéaire (De Vylder, 1985). Puis, non satisfait de la manière qu'a le modèle de Bühlmann–Straub d'intégrer à la prime les données collatérales, Jewell (1975) présente sa solution : la crédibilité hiérarchique. Ce qui est maintenant appelé le modèle hiérarchique de Jewell constitue une importante généralisation de plusieurs modèles de crédibilité. Toujours en 1975, Gerber et Jones (1975) définissent les propriétés et les conditions menant à des primes de crédibilité de type «mise à jour» (up dating type).

En 1976, (De Vylder, 1976b) présente ses modèles de crédibilité semi-linéaire et semi-linéaire optimal. La même année, il propose une formulation du problème de la crédibilité en termes d'espaces de Hilbert (De Vylder, 1976a). Norberg et Taylor (1977) se sont également intéressés à l'étude de la théorie de la crédibilité dans le cadre abstrait des espaces de Hilbert.

Si les années 70 furent celles de l'apparition de nombreux modèles de crédibilité de précision, les années 80 furent plutôt celles de l'étude des estimateurs des paramètres de structure. De Vylder (1978, 1981, 1984) s'est alors avéré un acteur important, de même que Norberg (1980), Gisler (1980) et Dubey et Gisler (1981)[33].

On doit à ces derniers la première étude exhaustive des propriétés asymptotiques des estimateurs de variance dans le modèle de Bühlmann–Straub. La découverte de nouveaux estimateurs et leur maîtrise va permettre la plus large diffusion de la crédibilité de précision. Des volumes sur le sujet sont publiés (Goovaerts et colla b., 1990) dont certains (Goovaerts et Hoogstad, 1987) sont expressément destinés aux actuaires œuvrant dans les compagnies d'assurance. De nombreux articles importants en théorie de la crédibilité sont publiés par des chercheurs au service de compagnies d'assurance : mentionnons Straub, Sundt, Dubey, Gisler, Reinhard ou même Goovaerts, à titre de consultant. Cela contribue donc à populariser l'utilisation de la théorie dans des applications pratiques.

De leur côté, De Vylder et Goovaerts, toujours très actifs dans le domaine, proposent dans une série d'articles des estimateurs optimaux sous certaines conditions (De Vylder et Goovaerts, 1991, 1992a,b).

Des recherches sont présentement en cours des quelles, nous promet-on, devraient ressortir de toutes nouvelles façons de trouver des estimateurs pour les principaux modèles de crédibilité. La grande majorité des intéressés à la théorie de la crédibilité sera liée au modèle de base proposé par Bühlmann de même qu'à ses extensions.

I.2 Exemple de Ragnar Norberg

Pour bien clarifier le problème de la théorie de crédibilité nous proposons cet exemple. Considérons 20 contrats indépendants et a priori homogène (la segmentation ne permet pas de les différencier). Ces contrats peuvent être touchés par des sinistres de montant 1 dont la survenance annuelle est distribuée selon une loi de Bernoulli. Ces 20 contrats ont été observés sur une période de 10 ans.

Le tableau suivant représente la sinistralité observée

les 10 années d'observation, on dénombre au total 29 sinistre, donc la sinistralité annuelle moyenne par contrat est donc de $\frac{29}{200} = 0,145$. Les contrats n^0 9, 11 et 17 représentent à eux

Contrats \ Années	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
contrat 1											0
contrat 2											0
contrat 3	1		1								2
contrat 4											0
contrat 5						1			1		2
contrat 6											0
contrat 7		1	1								2
contrat 8											0
contrat 9		1	1		1	1	1			1	6
contrat 10			1								1
contrat 11	1	1			1				1		4
contrat 12						1		1		1	3
contrat 13									1		1
contrat 14								1			1
contrat 15											0
contrat 16											0
contrat 17	1	1		1			1			1	5
contrat 18	1										1
contrat 19										1	1
contrat 20											0

TABLE I.1 : Tableau de Ragnar Norberg.

seuls 15 sinistres, soit plus de la moitié de la sinistralité globale. Sans eux, la prime pure annuelle moyenne serait de $\frac{14}{170} = 0,083$.

Il convient alors de se demander si le portefeuille est réellement homogène.

Notons p_j le paramètre de la loi de Bernoulli du $j^{\text{-ème}}$ contrat et $\hat{p}_j$ son estimateur à partir des observations.

Notons de plus

$$\hat{p} := \frac{1}{20} \sum \hat{p}_j.$$

On cherche à tester $H_0 : p_1 = p_2 = \dots = p_{20}$.

Sous H_0 , la statistique :

$$X^2 = 10 \sum_{j=1}^{20} \frac{(\hat{p}_j - \hat{p})^2}{\hat{p}}$$

Est distribuée selon une loi du χ^2 à 19 degrés de liberté.

Comme :

$$\chi_{19}^2(0,05) = 30,14 < X^2 = 57,9$$

On rejette H_0 .

A posteriori, le portefeuille n'est pas homogène.

La tarification actuelle (même prime pure $\hat{p} = 0,145$ pour tous) n'est pas équitable : la plupart des assurés paient trop alors que les assurés 9, 11 et 17 sont sous-tarifés.

La société est confrontée à une alternative :

1. segmenter davantage pour avoir des portefeuilles plus homogènes ; ou
2. trouver un compromis entre p et p_j qui ne soit pas trop volatile au cours du temps.

I.3 Théorie de la fluctuation limitée

Les origines

En 1910, General Motors (GM) assurée chez Allstate pour les accidents de travail remarque que sa prime d'expérience est sensiblement inférieure à la prime réclamée à l'ensemble des entreprises assurées. En argumentant que sa propre exposition au risque (nombre de salariées) est suffisamment importante, GM réclame un tarif fondé exclusivement sur sa propre sinistralité et non celle de l'ensemble des sociétés assurées (voir [5],[34]). Dans le même temps, une plus petite entreprise (Tucker) fait une demande identique. Le problème est :

- À partir de laquelle une entreprise peut être tarifée exclusivement sur la base de sa propre expérience ?

Mowbray (1914) puis Whitney (1918) apportent les premières réponses à cette question en fondant la théorie de la fluctuation limitée ou crédibilité américaine.

L'idée de la fluctuation limitée

La théorie de la fluctuation limitée constitue la première approche de crédibilité qui a été utilisée pour mettre à jour les primes individuelles de la sinistralité individuelle observée.

L'idée est de tarifier le contrat n_j pour la $(t + 1)$ -ème période par :

$$(1 - Z_t)\hat{p} + Z_{tj}\bar{p}_t, \quad (\text{I.3})$$

$$\text{Où } {}_j\bar{p}_t = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t {}_j p_s$$

Le coefficient Z est appelé facteur de crédibilité. La théorie de la fluctuation limitée consiste à fixer Z de manière à ce que les variations aléatoires de la prime restent limitées.

Deux situations sont possibles :

- $Z = 1$, on parle de crédibilité totale.

- $Z \in]0, 1[$, on parle alors de crédibilité partielle.

I.3.1 Crédibilité totale

On parle de crédibilité totale lorsque la prime pour la $(t+1)$ -ème période dépend exclusivement de la sinistralité propre de l'assuré observée sur les t premières périodes [5]. La prime vaut donc ${}_j\bar{p}_t$.

Le problème réside dans la question de l'applicabilité de cette prime : à partir de quelle exposition au risque, peut-on appliquer à un assuré une prime basée exclusivement sur sa propre expérience ?

Notons S la charge de sinistres d'un assuré au cours d'une période.

Supposons que

$$S = \sum_{k=1}^N X_k,$$

où $N \sim P(\lambda)$ et (X_k) est une suite de v.a.i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2 indépendante de N .

On accordera à l'assuré une crédibilité totale si la probabilité que la charge de sinistres s'éloigne de la moyenne est suffisamment faible, i.e. si

$$p\left[\frac{|S - E[S]|}{E[S]} \geq c\right] \leq \epsilon,$$

où c et ϵ sont des constantes fixées a priori (par exemple : $c = 5\%$ et $\epsilon = 5\%$).

Le théorème central-limite nous permet d'obtenir l'approximation :

$$\frac{cE[S]}{\sqrt{\text{Var}[S]}} = \frac{c\lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\sigma^2 + \mu^2)}} \geq z_{1-\frac{\epsilon}{2}}.$$

D'où l'on déduit

$$\lambda_F \geq \frac{z_{1-\frac{\epsilon}{2}}^2}{c^2} \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right),$$

le nombre minimum de sinistres espérés durant la prochaine période pour que l'on puisse appliquer la crédibilité totale.

Illustration numérique

Dans le cas particulier où les montants de sinistres sont constants (réparation forfaitaire), pour $c = 5\%$ et $\epsilon = 5\%$, le nombre minimum de sinistres espérés durant la prochaine période doit être supérieur à

$$\lambda_F \geq \left(\frac{1.96}{5\%}\right)^2 (1 + (0)^2) \approx 1537,$$

pour que l'assuré se voit appliquer une prime exclusivement fondée sur sa propre expérience. En pratique, peu d'assurés peuvent répondre à ce genre de critère.

I.3.2 Crédibilité partielle

Lorsqu'un assuré ne dispose pas du volume de risque λ_F , la théorie de la fluctuation limitée permet de déterminer une prime qui sera un barycentre de la prime collective et de la prime d'expérience. Ainsi on est amené à déterminer le facteur de crédibilité Z tel que :

$$p\left[\frac{|S - E[S]|}{E[S]} Z \geq c\right] \leq \epsilon, \quad (\text{I.4})$$

En procédant de la même manière que précédemment, on obtient la relation

$$Z = \frac{\sqrt{\lambda}}{\frac{z_{1-\epsilon/2}}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_F}}.$$

Remarque : Si le principal intérêt de la fluctuation limitée réside dans sa simplicité de mise en oeuvre [13] cette théorie souffre d'inconvénients qui en font un outil peu utilisé en pratique :

- Le choix a priori des deux paramètres c et ϵ délicat (quelles justifications?),
- L'approximation central-limite,
- L'approche paradoxale : pour obtenir le facteur de crédibilité, on fait l'hypothèse que l'on connaît μ , σ^2 et λ , i.e. que l'on est capable de déterminer la prime pure propre de l'assuré considéré. Dans une telle situation, pourquoi choisir une autre prime ?

◇

I.4 Formalisation Bayésienne

I.4.1 Risques individuel et collectif

Considérons un risque individuel qui produit des montants agréés de sinistres $(X_j)_{j=1,\dots,n}$ où X_j est le montant correspondant à la période j .

On souhaite déterminer la prime pure $E[X_{n+1}]$ pour la période future. Pour cela, on fait les hypothèses classiques :

Stationnarité : les X_j sont identiquement distribués de fonction de répartition F ;

Indépendance : les X_j sont indépendants.

En pratique, F est inconnue et varie d'un risque à l'autre.

Définition I.1. *La prime individuelle correcte pour un assuré de profil de risque θ est :*

$$p^{ind}(\theta) := E[X_{n+1} | \theta] =: \mu(\theta).$$

En pratique, θ et $\mu(\theta)$ sont inconnus. Il faut donc trouver un estimateur $\hat{\mu}(\theta)$ pour $\mu(\theta)$.

Les assurés ont des profils de risque $\theta_i (i \in \{1, \dots, I\})$ inconnus de l'assureur qui prennent leur valeur dans Θ .

Remarque : Dans le cas d'un portefeuille réellement homogène, Θ est réduit à un singleton. En revanche, l'assureur dispose d'informations sur la structure collective du risque (ex : la plupart des conducteurs sont des bons risques qui ont rarement un accident et un petit nombre a fréquemment des sinistres)[5]. Cette information peut être résumée par la distribution de probabilité $U(\theta)$ sur Θ . ◇

Définition I.2. *La distribution $U(\theta)$ est appelée fonction de structure du portefeuille.*

La prime collective est donnée par

$$p^{coll} := \int_{\Theta} \mu(\theta) dU(\theta) =: \mu_0.$$

Cette prime correspond au montant moyen de sinistre espéré par risque sur l'ensemble du portefeuille.

Le problème évoqué supra se décrit aisément en termes bayésiens. La problématique peut être résumée par un modèle à deux urnes. La première urne représente le collectif de risques dont on sélectionne un élément θ qui conditionne le contenu de la deuxième urne dans laquelle on tire des variables aléatoires $X_1; X_2; \dots$ de fonction de répartition F_{θ} .

Formellement : Θ est une v.a. de fonction de répartition U ; conditionnellement à $\Theta = \theta$, les v.a. $X_1; X_2; \dots$ sont i.i.d. de fonction de répartition F_{θ} .

Dans cette interprétation, la prime individuelle devient une v.a. puisque l'on ne sait pas distinguer a priori deux risques

$$p^{ind} := E[X_{n+1} | \Theta] =: \mu(\Theta). \quad (I.5)$$

La prime collective est, en revanche, un montant certain

$$p^{coll} := \mu_0 := \int_{\Theta} \mu(\theta) dU(\theta) =: E[X_{n+1}]. \quad (I.6)$$

Les $X_1, X_2, \dots$ ne sont indépendants que conditionnellement à $\Theta = \theta$. Sinon ils sont positivement corrélés :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1; X_2) &= E[\text{Cov}(X_1; X_2) | \Theta] + \text{Cov}(E[X_1 | \Theta]; E[X_2 | \Theta]) \\ &= 0 + \text{Cov}[\mu(\Theta); \mu(\Theta)] = \text{Var}[\mu(\Theta)]. \end{aligned}$$

Notre objectif est d'estimer pour chaque risque la prime correcte $\mu(\Theta)$ aussi précisément que possible compte-tenu de l'historique $X = (X_1; \dots; X_n)'$ dont on dispose la meilleure prime d'expérience.

I.4.2 Prime de Bayes

Considérons une hypothèse H et un événement B et notons $p[H]$ notre connaissance initiale (a priori) de la vraisemblance de l'hypothèse H . Alors $p[B | H]$ représente la probabilité conditionnelle de l'événement B sous l'hypothèse H ; considérée comme une fonction de H , $p[B | H]$ est la vraisemblance de B sachant H ; et $p[H | B]$ est la probabilité a posteriori de H (voir [6], [19]).

Le théorème de Bayes nous permet d'écrire

$$p[H | B] = \frac{p[B | H]p[H]}{p[B]},$$

lorsque $p[B] > 0$.

Ainsi lorsque $p[B] > 0$, la probabilité a posteriori de H ($p[H | B]$) est proportionnelle au produit de la probabilité a priori ($p[H]$) et de la vraisemblance de B sachant H ($p[B | H]$).

I.4.3 Meilleure prime d'expérience

Comparaison d'estimateurs

Définition I.3. (*Critère de l'erreur quadratique moyenne*)

Un estimateur $\widehat{\mu(\Theta)}$ de $\mu(\Theta)$ est au moins aussi bon qu'un estimateur $\widehat{\mu(\Theta)}^*$ si

$$E[(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2] \leq E[(\widehat{\mu(\Theta)}^* - \mu(\Theta))^2],$$

où $E[(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2]$ est l'erreur quadratique moyenne de $\widehat{\mu(\Theta)}$.

Théorème I.4. *Au regard du critère de l'erreur quadratique moyenne,*

$$\widetilde{\mu(\Theta)} := E[\mu(\Theta) | X]. \quad (\text{I.7})$$

est le meilleur estimateur de $\mu(\Theta)$.

Preuve : Soit $\widehat{\mu(\Theta)}$ un estimateur de $\mu(\Theta)$ et $\widetilde{\mu(\Theta)} := E[\mu(\Theta) | X]$ l'espérance a posteriori de $\mu(\Theta)$, on a :

$$E[(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2] = E[E[(\widehat{\mu(\Theta)} - \widetilde{\mu(\Theta)} + \widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2 | X]].$$

Or

$$E[(\hat{\mu} - \tilde{\mu})(\tilde{\mu} - \mu) | X] = \tilde{\mu}E[\hat{\mu} | X] - E[\mu\hat{\mu} | X] - \tilde{\mu}^2 + \tilde{\mu}^2,$$

d'où

$$E[(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2] = E[(\widehat{\mu(\Theta)} - \widetilde{\mu(\Theta)})^2] + E[(\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2].$$

□

Théorème I.5. (*Erreur quadratique moyenne*)

(1) L'erreur quadratique moyenne de la prime de Bayes vaut :

$$E[(\widetilde{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2] = E[Var(\mu(\Theta) | X)]. \quad (I.8)$$

(2) L'erreur quadratique moyenne de la prime collective est donnée par :

$$E[(\mu_0 - \mu(\Theta))^2] = Var[\mu(\Theta)] \quad (I.9)$$

$$= E[Var(\mu(\Theta) | X)] + Var[E(\mu(\Theta) | X)]. \quad (I.10)$$

Remarque : L'erreur quadratique moyenne de la prime de Bayes correspond au premier terme de décomposition de la variance dans celle de la prime collective. $\diamond$

I.4.4 Construction d'une échelle bonus-malus**Contexte**

Fin des années 60, en Suisse, le niveau des primes d'assurance auto dépend uniquement de la puissance du véhicule. Les assureurs souhaitent augmenter le niveau des primes qu'ils jugent insuffisant pour couvrir les sinistres. Accord des autorités de contrôle sous réserve que le nouveau tarif tienne compte du passé-sinistre des assurés. F. Bichsel est chargé de mettre au point un système de mise à jour des primes mieux adapté aux profils de risques individuels. Bichsel estime que les différences de profil de risque entre les conducteurs sont mieux résumées par les nombres de sinistres que par leur taille [2].

I.4.4.1 Tarification a posteriori sans personnalisation a priori

Notons N_j le nombre de sinistres engendrés par un conducteur particulier dans l'année j , X_j la charge agrégée de sinistres correspondante. Bichsel fait implicitement l'hypothèse suivante :

(hypothèse implicite de Bichsel) Pour tout profil de risque θ ,

$$E[X_j | \Theta = \theta] = CE[N_j | \Theta = \theta]$$

Où C est une constante qui dépend uniquement de la puissance du véhicule et $E[N_j | \Theta = \theta]$ dépend uniquement du conducteur [17].

Sous cette hypothèse, il suffit donc de modéliser le nombre de sinistres.

Hypothèse 2 (Poisson-Gamma) (PG1) Conditionnellement à $\Theta = \theta$, les v.a.

$N_j (j = 1; \dots; n)$ sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Poisson de paramètre θ , i.e.

$$p(N_j = k | \Theta = \theta) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

(PG2) Θ est distribué selon une loi Gamma de paramètres γ et β , i.e. a pour densité

$$u(\theta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \theta^{\gamma-1} e^{-\beta\theta}, \text{ pour } \theta \geq 0,$$

Où

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx, \text{ pour } \nu > 0.$$

Remarque : On a $E[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta}$ et $Var[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta^2} \implies \beta = \frac{E[\Theta]}{Var[\Theta]}$ est une mesure de l'homogénéité du collectif. $\diamond$

Proposition I.6. *Sous l'hypothèse 2, on a pour la fréquence de sinistres (notée F)*

$$\begin{aligned} F^{ind} &= E[N_{n+1} | \Theta] = \Theta, \\ F^{coll} &= E[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta}, \\ F^{Bayes} &= \frac{\gamma + N_{\bullet}}{\beta + n} = \alpha \bar{N} + (1 - \alpha) \frac{\gamma}{\beta}, \end{aligned}$$

Où $\alpha = \frac{n}{n+\beta}$, $N_{\bullet} = \sum_{i=1}^n N_j$ et $\bar{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_j$.

L'erreur quadratique moyenne de F^{Bayes} est donnée par :

$$E[(F^{Bayes} - \Theta)^2] = (1 - \alpha)E[(F^{coll} - \Theta)^2] = \alpha E[(\bar{N} - \Theta)^2]. \quad (\text{I.11})$$

Remarque : La prime de Bayes $p^{Bayes} = CF^{Bayes}$ est une fonction linéaire des observations (c'est donc une prime de crédibilité), tel que F^{Bayes} est une moyenne pondérée de la fréquence individuelle observée $\bar{N}$ et de la fréquence espérée a priori $E[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta}$.

$\alpha = \frac{n}{n+\beta}$ est appelé facteur de crédibilité. Il est croissant avec le nombre d'années d'observation n et décroissant avec β , i.e. plus on dispose des informations individuelles, plus on accorde de crédit au passé-sinistres de l'assuré et plus le collectif est homogène, plus on accorde de crédit à la prime collective.

-L'erreur quadratique moyenne de F^{coll} vaut :

$$E[(F^{Bayes} - \Theta)^2] = E[(\frac{\gamma}{\beta} - \Theta)^2] = Var[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta^2}.$$

$\diamond$

Remarque : L'erreur quadratique moyenne de $\bar{N}$ vaut :

$$\begin{aligned} E[(\bar{N} - \Theta)^2] &= E[E[(\bar{N} - \Theta)^2 | \Theta]] = E[Var(\bar{N} | \Theta)] \\ &= \frac{E[\Theta]}{n} = \frac{\gamma}{n\beta}. \end{aligned}$$

$$E[(F^{Bayes} - \Theta)^2] \leq E[(\bar{N} - \Theta)^2] \text{ et } E[(\bar{N} - \Theta)^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ donc} \quad (\text{I.12})$$

$$E[(F^{Bayes} - \Theta)^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{I.13})$$

$\diamond$

Preuve :

-Pour obtenir la prime de Bayes, écrivons la densité a posteriori de Θ sachant $N = (N_1, \dots, N_j)'$. [27]

$$u(\theta | N) = \frac{\frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \theta^{\gamma-1} e^{-\beta \theta} \prod_{j=1}^n e^{-\theta \frac{N_j}{N_j!}}}{\int \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \theta^{\gamma-1} e^{-\beta \theta} \prod_{j=1}^n e^{-\theta \frac{N_j}{N_j!}} d\theta} \propto \theta^{\gamma + \sum_{j=1}^n N_j - 1} e^{-(\beta + n)\theta}.$$

Le membre de droite est le noyau de la densité d'une loi Gamma de paramètres $\gamma' = \gamma + N_\bullet$ et $\beta' = \beta + n$, d'où l'on obtient F^{Bayes} .

-L'erreur quadratique moyenne de F^{Bayes} est donnée par

$$\begin{aligned} E[(F^{Bayes} - \Theta)^2] &= E[Var(\Theta | N)] = E\left[\frac{\gamma + N_\bullet}{(\beta + n)^2}\right] \\ &= \frac{\gamma}{(\beta + n)^2} \left(1 + \frac{n}{\beta}\right) = \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{n + \beta} \\ &= \frac{\gamma}{\beta^2} (1 - \alpha) = \frac{1}{n} \frac{\gamma}{\beta} \alpha \end{aligned}$$

□

I.4.5 Prime de Bayes dans le cadre exponentiel

Famille exponentielle

Définition I.7. Une distribution de probabilités appartient à la famille exponentielle F_{exp} si sa loi peut s'exprimer sous la forme :

$$dF(x) = \exp\left[\frac{x\theta - b(\theta)}{\sigma^2/\omega} + c(x, \sigma^2/\omega)\right] d\nu(x), x \in A \subset \mathbf{R} \quad (I.14)$$

où ν désigne la mesure de Lebesgue ou la mesure de comptage, $b \in C^2(\Theta, \mathbf{R})$, b' injective, $c : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ et ω et σ^2 constantes [21].

Interprétation des paramètres

- σ^2 est le paramètre de dispersion
- ω le poids a priori associé à l'observation,
- θ le profil de risque

Notons $F_{exp}^{b,c}$ la famille associée aux fonctions b et c et considérons la famille U_{exp}^b des distributions ayant une densité de la forme

$$U_\gamma(\theta) = \exp\left[\frac{x_0\theta - b(\theta)}{\tau^2} + d(x_0, \tau^2)\right], \theta \in \Theta$$

Donc on peut conclure le théorème suivant

Théorème I.8. La famille U_{exp}^b est conjuguée à $F_{exp}^{b,c}$.

Exemple I.1 :

quelques exemples de classes conjuguées dans la famille exponentielle :

- Poisson - gamma,
- Binomial - bêta,
- Gamma - gamma,
- Géométrique - bêta,
- Normal - normal.

Supposons que, pour θ fixé, les composantes de $X = (X_1, \dots, X_n)'$ sont indépendantes, de distribution $F_\theta \in F_{exp}^{b,c}$, toutes avec le même paramètre de dispersion σ^2 et avec les poids $\omega_j, j = 1, \dots, n$.

Théorème I.9. *Pour la famille $F_{exp}^{b,c}$ et sa famille conjuguée U_{exp}^b*

$$P^{ind}(\theta) = b'(\theta), \quad (I.15)$$

$$Var[X_j | \Theta = \theta, \omega_j] = b''(\theta) \frac{\sigma^2}{\omega_j}, \quad (I.16)$$

et sous certaines conditions de régularité,

$$P^{coll} = x_0, \quad (I.17)$$

$$P^{Bayes} = \alpha \bar{X} + (1 - \alpha) P^{coll}, \quad (I.18)$$

où $\bar{X} = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{\omega_{\cdot}} X_j$ et $\alpha = \frac{\omega}{\omega_{\cdot} + \sigma^2 / \tau^2}$.

La prime de Bayes est linéaire en les observations (voir [14],[15]) : on parlera de crédibilité exacte

Chapitre II

Modèle de Bühlmann et Bühlmann Straub

II.1 Introduction

La prime de Bayes $\widetilde{\mu(\Theta)} := E[\mu(\Theta) | X]$ est le meilleur estimateur possible de la prime individuelle $E[X_{n+1} | \theta] =: \mu(\theta)$. En général, elle ne peut s'exprimer de manière analytique car son calcul nécessite alors l'utilisation de méthodes numériques. Sa détermination nécessite en outre de spécifier une distribution conditionnelle et une distribution a priori. La théorie de la crédibilité repose sur l'idée de se restreindre à la classe des estimateurs qui sont linéaires en les observations. Comme dans l'approche bayésienne, la qualité de ces estimateurs sera appréciée par le critère d'erreur quadratique moyenne (voir [3], [25], [29]).

II.2 Prime de crédibilité

II.2.1 Introduction dans un contexte simplifié

Hypothèse 1 (Modèle de crédibilité simplifié)

(H1) Les variables aléatoires $X_j (j = 1; \dots; n)$ sont conditionnellement à $\Theta = \theta$, indépendantes et identiquement distribuées selon une loi F_θ avec les moments conditionnels :

$$\mu(\theta) = E[X_j | \Theta = \theta], \quad (\text{II.1})$$

$$\sigma^2(\theta) = \text{Var}[X_j | \Theta = \theta]. \quad (\text{II.2})$$

(H2) Θ est une variable aléatoire de distribution $U(\theta)$.

Dans ce modèle, on a

$$P^{ind} = \mu(\Theta) = E[X_{n+1} | \Theta],$$

$$P^{coll} = \mu_0 = \int_{\Theta} \mu(\theta) dU(\theta).$$

On souhaite trouver un estimateur de la prime individuelle $\mu(\Theta)$ et l'on va se restreindre à ceux qui sont linéaires par rapport aux les observations $X_j (j = 1; \dots; n)$.

Notons P^{cred} ou $\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}$ le meilleur estimateur linéaire en X de $\mu(\Theta)$. L'estimateur de crédibilité $\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}$ est de la forme :

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}} = \widehat{a}_0 + \sum_{j=1}^n \widehat{a}_j X_j,$$

Où les coefficients $(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_n)$ sont solution de

$$(\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_n) = \min_{a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}} E \left[\left(\mu(\Theta) - a_0 - \sum_{j=1}^n a_j X_j \right)^2 \right].$$

La distribution de X est invariante par permutations des X_j , donc

$$\widehat{a}_1 = \dots = \widehat{a}_n$$

Ainsi, l'estimateur de crédibilité est de la forme

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}} = \widehat{a} + \widehat{b}\overline{X}, \quad (\text{II.3})$$

où $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont solution de

$$(\widehat{a}, \widehat{b}) = \min_{a, b \in \mathbb{R}} E \left[(\mu(\Theta) - a - b\overline{X})^2 \right].$$

Les e.d.p. de ce problème sont

$$\begin{aligned} E[\mu(\Theta) - a - b\overline{X}] &= 0 \\ Cov(\overline{X}, \mu(\Theta)) - bVar(\overline{X}) &= 0. \end{aligned}$$

En effet, en dérive la formule (3.1) par rapport à a , et nous annulons la dérivé :

$$\frac{d}{da} E \left[(\mu(\Theta) - a - b\overline{X})^2 \right] = 0$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} E \left[(\mu(\Theta) - a - b\overline{X})^2 \right] &= E[2(\mu(\Theta) - a - b\overline{X})(-1)] \\ &= E[\mu(\Theta) - a - b\overline{X}] = 0. \end{aligned}$$

Aussi, en dérive la formule (3.1) par rapport à b , et nous annulons la dérivé :

$$\begin{aligned} \frac{d}{db} E \left[(\mu(\Theta) - a - b\overline{X})^2 \right] &= E[-2(\mu(\Theta) - a - b\overline{X})\overline{X}] \\ &= -2(E[\overline{X}\mu(\Theta)] - E[\overline{X}]E[\mu(\Theta)] - bE[\overline{X}^2] \\ &\quad + b(E[\overline{X}])^2 + E[\overline{X}]E[\mu(\Theta)] - aE[\overline{X}] - b(E[\overline{X}])^2) \\ &= Cov(\overline{X}, \mu(\Theta)) - bVar(\overline{X}) + E[\overline{X}]\underbrace{(E[\mu(\Theta) - a - b\overline{X}])}_{=0} \\ &\Leftrightarrow Cov(\overline{X}, \mu(\Theta)) - bVar(\overline{X}) = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E [\mu (\Theta) - a - b\bar{X}] &= 0 \\ Cov(\bar{X}, \mu (\Theta)) - bVar(\bar{X}) &= 0. \end{aligned}$$

Et par la structure de dépendance du modèle, on a

$$\begin{aligned} Cov(\bar{X}, \mu (\Theta)) &= E [Cov(\bar{X}, \mu (\Theta) | \Theta)] + Cov [E [\bar{X} | \Theta], E [\mu (\Theta) | \Theta]] \\ &= Var [\mu (\Theta)] = \tau^2, \\ Var(\bar{X}) &= E [Var(\bar{X} | \Theta)] + Var [E [\bar{X} | \Theta]] \\ &= E \left[Var \left(\frac{1}{n} \sum x_i | \Theta \right) \right] + Var [\mu (\Theta)] \\ &= E \left[\frac{1}{n^2} n Var(x_i | \Theta) \right] + Var [\mu (\Theta)] \\ &= \frac{E[\sigma^2 (\Theta)]}{n} + Var [\mu (\Theta)] \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \tau^2, \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} b &= \frac{\tau^2}{\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n}} = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}, \\ a &= (1 - b) \mu_0. \end{aligned}$$

Théorème II.1. *Sous les Hypothèses (H1) et (H2), l'estimateur de crédibilité est donné par :*

$$\widehat{\widehat{\mu}}(\Theta) = \alpha \bar{X} + (1 - \alpha) \mu_0 \quad (\text{II.4})$$

Où $\mu_0 = E [\mu (\Theta)]$ et $\alpha = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$.

Remarque :

- P^{cred} est une moyenne pondérée de la prime collective et de la prime individuelle observée.

- Le coefficient $k = \frac{\sigma^2}{\tau^2}$ est appelé coefficient de crédibilité.

En l'écrivant sous la forme

$$k = \left(\frac{\sigma / \mu_0}{\tau / \mu_0} \right)^2,$$

◇

Et en remarquant que

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\mu_0} &= \frac{\sqrt{E [Var(X_j | \Theta)]}}{E [X_j]}, \\ \frac{\tau}{\mu_0} &= Cov [\mu (\Theta)]. \end{aligned}$$

$\sqrt{k}$ s'interprète comme le rapport entre la variabilité interne du risque et l'hétérogénéité du portefeuille.

Remarque :

- Le facteur de crédibilité α croît avec le nombre d'années d'observations n , et avec l'hétérogénéité du portefeuille (mesurée par $\frac{\tau}{\mu_0}$). Et décroît avec la variabilité interne au risque (mesurée par $\frac{\sigma}{\mu_0}$).
- La prime de crédibilité fait intervenir les paramètres de structure τ^2 , σ^2 et μ_0 . Ces paramètres pourront être estimés empiriquement sur le collectif ou fixés a priori (avis d'expert). $\diamond$

II.2.2 Interprétation de la prime de crédibilité

1. P^{cred} est une moyenne pondérée de P^{coll} et de $\bar{X}$.
2. $P^{coll} = \mu_0$ est le meilleur estimateur a priori, son erreur quadratique moyenne vaut

$$E[(\mu_0 - \mu(\Theta))^2] = Var[\mu(\Theta)] = \tau^2.$$

3. $\bar{X}$ est le meilleur estimateur linéaire et individuellement non biaisé basé uniquement sur les observations, son erreur quadratique moyenne vaut

$$E[(\bar{X} - \mu(\Theta))^2] = E\left[\frac{\sigma^2(\Theta)}{n}\right] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

II.2.3 Erreur quadratique moyenne de la prime de crédibilité

L'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de crédibilité $\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}$ vaut :

$$E\left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}} - \mu(\Theta)\right)^2\right] = (1 - \alpha)\tau^2 = \alpha\frac{\sigma^2}{n}.$$

Preuve : Par un calcul simple, on a :

$$\begin{aligned} E\left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}} - \mu(\Theta)\right)^2\right] &= E\left[\left(\alpha(\mu(\Theta) - \bar{X}) + (1 - \alpha)(\mu(\Theta) - \mu_0)\right)^2\right] \\ &= \alpha^2\frac{\sigma^2}{n} + (1 - \alpha)^2\tau^2 \\ &= \left(\frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}\right)^2\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{\frac{\sigma^2}{\tau^2}}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}\right)^2\tau^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} = \alpha\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{\sigma^2}{\tau^2}}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}\tau^2 = (1 - \alpha)\tau^2. \end{aligned}$$

□

Remarque :

- α est le coefficient par lequel est réduite l'erreur quadratique moyenne lorsque l'on utilise P^{cred} au lieu de P^{coll} ,

- $(1 - \alpha)$ est le coefficient par lequel est réduite l'erreur quadratique moyenne lorsque l'on utilise P^{cred} au lieu de $\bar{X}$.

◇

Le principal intérêt de la prime de crédibilité réside dans sa simplicité de mise en oeuvre : il n'est pas nécessaire de spécifier une structure (choix conjoint de l'a priori et de la distribution conditionnelle) qui ajoute un risque additionnel de modèle. En contrepartie, la précision de la prime de crédibilité est moindre que celle de la prime de Bayes[4].

II.3 Modèle de Bühlmann

Jusqu'à présent, on s'est intéressé la tarification d'un risque particulier. On va dorénavant considérer un portefeuille de I risques similaires.

On notera $X_i = (X_{i1}; \dots; X_{in})'$ le vecteur des observations associé au risque i et Θ_i son profil de risque. Ces I risques sont similaires dans la mesure où chaque risque i respecte les Hypothèses (H1) et (H2). On se retrouve ainsi dans le cadre décrit par Bühlmann [1967].

II.3.1 Hypothèses du modèle

Hypothèse (Modèle de Bühlmann)

(B1) Les variables aléatoires $X_{ij} (j = 1; \dots; n)$ sont, conditionnellement à $\Theta_i = \theta$, indépendantes et identiquement distribuées selon une loi F_θ avec les moments conditionnels

$$\begin{aligned}\mu(\theta) &= E[X_{ij} | \Theta_i = \theta]; \\ \sigma^2(\theta) &= Var[X_{ij} | \Theta_i = \theta].\end{aligned}$$

(B2) Les couples $(\Theta_1; X_1); \dots; (\Theta_I; X_I)$ sont indépendants et identiquement distribués.

Du fait de (B2), le portefeuille est hétérogène : les profils de risque $1; \dots; I$ sont indépendants et ont la même distribution de structure $U(\theta)$. Ces risques ont néanmoins en commun qu'on ne peut les différencier a priori.

II.3.2 Estimateur de crédibilité

L'objectif est de trouver l'estimateur de crédibilité dans le modèle de Bühlmann. Telque pour chaque risque individuel i , on souhaite estimer la prime individuelle $\mu(\Theta_i)$ par l'estimateur $\widehat{\mu(\Theta_i)}$ qui est linéaire en tout les observations (voir [7],[16]). On estime donc I primes, et l'on supposera que $\widehat{\mu(\Theta_i)}$ est le meilleur estimateur de la classe

$$\left\{ \widehat{\mu(\Theta_i)} : \widehat{\mu(\Theta_i)} = a + \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} X_{kj} \quad ; \quad a, b_{kj} \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{II.5})$$

La distribution de X_i est invariante par permutations des $X_{ij} (j = 1; \dots; n)$, donc :

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = \hat{a}_0^{(i)} + \sum_{k=1}^I \hat{b}_k^{(i)} \bar{X}_k$$

Où $\bar{X}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{kj}$

Et

$$\left(\widehat{a}_0^{(i)}, \widehat{b}_k^{(i)}\right) = \min E \left[\left(\mu(\Theta_i) - a_0^{(i)} - \sum_{k=1}^I b_k^{(i)} \overline{X}_k \right)^2 \right].$$

Les e.d.p. par rapport à $a_0^{(i)}$ et aux $b_k^{(i)}$ donnent

$$Cov(\mu(\Theta_i), \overline{X}_k) = b_k^{(i)} Var[\overline{X}_k].$$

En remarque que $Cov(\mu(\Theta_i), \overline{X}_k) = 0$ si $i \neq k$.

En effet, si $i \neq k$

$$\begin{aligned} Cov(\mu(\Theta_i), \overline{X}_k) &= E[Cov(\overline{X}_k, \mu(\Theta_i) | \Theta_i)] + Cov[E[\overline{X}_k | \Theta_i], E[\mu(\Theta_i) | \Theta_i]] \\ &= E[0] + Cov[\mu_0, \mu(\Theta_i)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors $b_k^{(i)} = 0$ si $i \neq k$, donc l'estimateur de crédibilité de $\mu(\Theta_i)$ ne dépend que des observations associées au risque i .

Il est de la forme

$$\left\{ \widehat{\mu(\Theta_i)} : \widehat{\mu(\Theta_i)} = a + \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{ij} \quad ; a, b_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour un i donné, nous souhaitons minimiser :

$$R = E \left[\mu(\Theta_i) - a - \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{ij} \right]^2 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (\text{II.6})$$

En dérive R par rapport à a et $b_{ij'}$, puis nous annulons la dérivée, nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} R &= -2E \left[\mu(\Theta_i) - a - \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{ij} \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b_{ij'}} R &= -2E \left\{ X_{ij'} \left[\mu(\Theta_i) - a - \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{ij} \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Par simplification, on obtient :

$$E \left[\mu(\Theta_i) - a - \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{ij} \right] = 0$$

Et $\forall j' = 1, \dots, n$

$$E \left\{ X_{ij'} \left[\mu(\Theta_i) - a - \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{ij} \right] \right\} = 0 \quad (\text{II.7})$$

En multiplions (II.3.2) par $E[X_{ij'}]$ et soustraire le résultat à partir de (II.7), on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= Cov \left[X_{ij'}, \mu(\Theta_i) - a - \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{ij} \right] \\ &= Cov[X_{ij'}, \mu(\Theta_i)] - Cov[X_{ij'}, a] - Cov \left[X_{ij'}, \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{ij} \right] \end{aligned}$$

Puisque $Cov[X_{ij'}, a] = 0$ et $Cov[X_{ij'}, \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{ij}] = \sum_{j=1}^n b_{ij} Cov[X_{ij'}, X_{ij}]$, On trouve :

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} Cov[X_{ij'}, X_{ij}] = Cov[\mu(\Theta_i), X_{ij'}] \quad (\text{II.8})$$

Il faut trouver d'abord :

1. $Cov[\mu(\Theta_i), X_{ij'}]$
2. $Cov[X_{ij'}, X_{ij}]$

En a

$$Cov(X, Y) = Cov\{E[X|\Theta], E[Y|\Theta]\} + E\{Cov(X, Y|\Theta)\}$$

En pose $X = X_{ij'}$ et $Y = \mu(\Theta_i)$ et $\Theta = \Theta_i$,

L'espérance conditionnelle de $\mu(\Theta_i)$ par rapport Θ_i est $\mu(\Theta_i)$.

Si $i = i'$ alors

$$E[X_{ij}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i).$$

Inversement, si $i \neq i'$:

$$E[X_{i'j}|\Theta_i] = E[X_{i'j}] = \mu_0$$

Donc :

$$Cov(\mu_0, \mu(\Theta_i)) = 0.$$

Finalement

$$Cov[X_{i'j}, \mu(\Theta_i)] = Var[\mu(\Theta_i)] = \tau^2 \delta_{ii'}.$$

En suite pour $Cov[X_{ij'}, X_{ij}]$:

Si on pose $X = X_{ij'}$ et $Y = X_{ij}$ et $\Theta = \Theta_i$, (II.3.2) devient :

$$Cov[X_{ij'}, X_{ij}] = \underbrace{Cov\{E[X_{ij'}|\Theta_i], E[X_{ij}|\Theta_i]\}}_{=Var[\mu(\Theta_i)]=\tau^2} + E\{Cov(X_{ij'}, X_{ij}|\Theta_i)\}$$

Pour Θ_i donné, $X_{ij} \forall j = 1, \dots, n$ sont conditionnellement indépendants.

Donc si $j' \neq j$, la covariance conditionnelle de X_{ij} et $X_{ij'}$ sachant Θ_i est égal à zéro.

Lorsque $j' = j$

$$E\{Cov(X_{ij'}, X_{ij}|\Theta_i)\} = E\{Var(X_{ij'}|\Theta_i)\} = \sigma^2$$

Donc

$$Cov[X_{ij'}, X_{ij}] = \tau^2 + \sigma^2 \delta_{jj'} \quad (\text{II.9})$$

Nous routerons à (II.3.2) et (II.8), on trouve

$$a + \mu_0 \sum_{j=1}^n b_{ij} = \mu_0 \quad (\text{II.10})$$

$$\sigma^2 b_{ij'} + \tau^2 \sum_{j=1}^n b_{ij} = \tau^2 \quad (\text{II.11})$$

Pour $\forall j' = 1, \dots, n$; le système d'équations est symétrique par rapport b_{ij} , on peut écrire $b_{i1} = b_{i2} = \dots = b_{in} = b$

$$\begin{aligned} a + \mu_0 n b &= \mu_0 \\ \sigma^2 b + \tau^2 n b &= \tau^2 \end{aligned}$$

Nous trouvons

$$b = \frac{\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} = \frac{\alpha}{n}$$

Telque $\alpha = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$. et $a = (1 - \alpha) \mu_0$

Finalement, l'estimateur de crédibilité de $\mu(\Theta_i)$ est de la forme

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = \alpha \bar{X}_i + (1 - \alpha) \mu_0 \quad (\text{II.12})$$

II.3.3 Estimateur de crédibilité homogène

Définition II.2. L'estimateur homogène de crédibilité $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}}$ de $\mu(\Theta_i)$ est le meilleur estimateur de la classe des estimateurs collectivement sans biais [34]

$$\left\{ \widehat{\mu(\Theta_i)} : \widehat{\mu(\Theta_i)} = \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} X_{kj} \quad ; \quad E[\mu(\Theta_i)] = \mu_0, b_{kj} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (\text{II.13})$$

Remarquons que

$$E \left[\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} \right] = E[\mu(\Theta_i)] = E[X_{kj}] = \mu_0,$$

Pour tous i, j et k . On en déduit donc la contrainte sur les paramètres

$$\sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} = 1.$$

Définition II.3. Dans le modèle de Bühlmann, l'estimateur homogène de crédibilité est donné par :

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = \alpha \bar{X}_i + (1 - \alpha) \bar{X}, \quad (\text{II.14})$$

Où $\alpha = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$. et $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$ et

$$\bar{X} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \bar{X}_i = \frac{1}{In} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n X_{ij}. \quad (\text{II.15})$$

Preuve : Dans le cas non homogène, a représente la somme des données collectives.

Dans le cas homogène et si on minimise :

$$E \left[\mu(\Theta_i) - \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{ij} \right]^2$$

Sous la contrainte $E[\mu(\Theta_i)] = \sum_{j=1}^n b_{ij} E[X_{ij}]$ pour $\forall b_{ij} ; j = 1, \dots, n$.

La solution devient $b_{ij} = \frac{1}{n}$, pour $j = 1, \dots, n$.

En souhaite que l'estimateur de $\mu(\Theta_i)$ est $\bar{X}_i$, tel qu'il vérifie la contrainte de non biais, mais cet estimateur n'est pas incorporer toutes les informations sur le collective.

Cependant, pour incorporer toutes les informations sur le collective, il faut reformuler l'équation de minimisation

$$\mathfrak{R}_{(b_{kj})} = E \left[\mu(\Theta_i) - \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} X_{kj} \right]^2, \quad \forall i = 1, \dots, I \text{ et } j = 1, \dots, n.$$

Puisque en a besoin de non biais de l'estimateur linéaire, il faut que :

$$E[\mu(\Theta_i)] = \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} E[X_{kj}]$$

En peut écrire $\mu_0 = \mu_0 \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj}$, donc $\sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} = 1$, par la multiplication de $\sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} - 1$ par le multiplicateur de Lagrange λ , et soustraire la résultat, $\mathfrak{R}_{(b_{kj})}$ devient

$$\mathfrak{R}_{(b_{kj})} = E \left[\mu(\Theta_i) - \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} X_{kj} \right]^2 - \lambda \left[\sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} - 1 \right].$$

En dérive $\mathfrak{R}_{(b_{kj})}$ par rapport $b_{k'j'}$, et nous annulons la dérivé, en obtient :

$$\frac{\partial}{\partial b_{k'j'}} \mathfrak{R}_{(b_{kj})} = -2E \left\{ X_{k'j'} \left[\mu(\Theta_i) - \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} X_{kj} \right] \right\} - \lambda = 0,$$

Pour $k'=1, \dots, I$ et $j'=1, \dots, n$. Ainsi

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} &= E[X_{k'j'} \mu(\Theta_i)] - \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} E[X_{k'j'} X_{kj}] \\ &= E[X_{k'j'} \mu(\Theta_i)] - \mu_0^2 - \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} \{E[X_{k'j'} X_{kj}] - \mu_0^2\} \\ &= Cov[X_{k'j'}, \mu(\Theta_i)] - \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} Cov[X_{k'j'}, X_{kj}]. \end{aligned}$$

Dans le cas $k = k'$

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} &= \tau^2 \delta_{k'i} - \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} (\tau^2 + \sigma^2 \delta_{j'j}) \\ &= \tau^2 \delta_{k'i} - \tau^2 \sum_{j=1}^n b_{k'j} - \sigma^2 b_{k'j'} \end{aligned}$$

Puisque $Cov[X_{k'j'}, \mu(\Theta_i)] = \tau^2 \delta_{k'i}$ et $Cov[X_{k'j'}, X_{kj}] = \tau^2 + \sigma^2 \delta_{j'j}$ pour $k = k'$, et $Cov[X_{k'j'}, X_{kj}] = 0$ si $k \neq k'$.

Le système des équations est symétrique par rapport b_{kj} , on peut écrire b_{kj} comme $b_{k'j'}$,
Donc $\sum_{j=1}^n b_{kj} = nb_{k'j'}$.

$$\frac{\lambda}{2} + \tau^2 \delta_{k'i} = \tau^2 nb_{k'j'} + \sigma^2 b_{k'j'}$$

Alors

$$b_{k'j'} = \frac{\tau^2 \delta_{k'i} + \frac{\lambda}{2}}{\tau^2 n + \sigma^2}$$

En sait que $\sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n b_{kj} = 1$, il devient

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k'=1}^I \sum_{j'=1}^n \frac{\tau^2 \delta_{k'i} + \frac{\lambda}{2}}{\tau^2 n + \sigma^2} \\ 1 &= \frac{\tau^2 n}{\tau^2 n + \sigma^2} + \frac{\lambda}{2} \frac{In}{\tau^2 n + \sigma^2} \end{aligned}$$

En pose $\alpha = \frac{\tau^2 n}{\tau^2 n + \sigma^2}$, donc

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{(1 - \alpha)}{I\alpha/\tau^2}$$

Lorsque on remplace $\frac{\lambda}{2}$ dans (II.3.3), on trouve :

$$\begin{aligned} b_{k'j'} &= \frac{\tau^2 \delta_{k'i} + \frac{(1-\alpha)}{I\alpha/\tau^2}}{\tau^2 n + \sigma^2} \\ &= \frac{\tau^2 \delta_{k'i} + (1 - \alpha) \tau^2 / I\alpha}{\tau^2 n + \sigma^2} \\ &= \frac{I\alpha \tau^2 \delta_{k'i} + (1 - \alpha) \tau^2}{(\tau^2 n + \sigma^2) I\alpha} \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \sum_{k'=1}^I \sum_{j'=1}^n b_{k'j'} X_{k'j'} &= \sum_{k'=1}^I \sum_{j'=1}^n \frac{I\alpha \tau^2 \delta_{k'i}}{(\tau^2 n + \sigma^2) I\alpha} X_{k'j'} + \sum_{k'=1}^I \sum_{j'=1}^n \frac{(1 - \alpha) \tau^2}{(\tau^2 n + \sigma^2) I\alpha} X_{k'j'} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k'=1}^I \sum_{j'=1}^n \frac{n\tau^2 \delta_{k'i}}{(\tau^2 n + \sigma^2)} X_{k'j'} + \frac{(1 - \alpha)}{I\alpha n} \sum_{k'=1}^I \sum_{j'=1}^n \frac{n\tau^2}{(\tau^2 n + \sigma^2)} X_{k'j'} \\ &= \alpha \bar{X}_i + (1 - \alpha) \bar{X}. \end{aligned}$$

□

II.3.4 Estimation des paramètres de structure

Théorème II.4. *Les estimateurs suivants sont sans biais [1]*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{I(n-1)} \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n (X_{kj} - \bar{X}_k)^2 \quad (\text{II.16})$$

$$\hat{\tau}^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{k=1}^I (\bar{X}_k - \bar{X})^2 - \frac{\hat{\sigma}^2}{n}. \quad (\text{II.17})$$

Preuve : 1. En sait que $E[X_{kj}] = E[\bar{X}_k]$, on a :

$$E[X_{kj} - \bar{X}_k]^2 = Var[X_{kj}] + Var[\bar{X}_k] - 2Cov[X_{kj}, \bar{X}_k]$$

de plus

$$Cov[X_{kj'}, X_{kj'}] = \tau^2 + \sigma^2 \delta_{jj'}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} Cov[X_{kj'}, \bar{X}_k] &= \frac{1}{n} \sum_{j'=1}^n Cov[X_{kj'}, X_{kj'}] \\ &= \tau^2 + \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} Var[\bar{X}_k] &= Cov[\bar{X}_k, \bar{X}_k] = \frac{1}{n} \sum_{j'=1}^n Cov[X_{kj'}, \bar{X}_k] \\ &= \tau^2 + \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Et

$$Var[X_{kj'}] = Cov[X_{kj'}, X_{kj'}] = \tau^2 + \sigma^2$$

Ainsi

$$E[X_{kj} - \bar{X}_k]^2 = \frac{(n-1)}{n} \sigma^2$$

de plus

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n E[X_{kj} - \bar{X}_k]^2 &= \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)}{n} \sigma^2 \\ &= I(n-1) \sigma^2 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{1}{I(n-1)} \sum_{k=1}^I \sum_{j=1}^n E[X_{kj} - \bar{X}_k]^2 &= \frac{I(n-1)}{I(n-1)} \sigma^2 \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

D'ou

$$E[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2.$$

Alors l'estimateur $\hat{\sigma}^2$ est sans biais.

Pour τ^2 : on a

$$E[\bar{X}_k - \bar{X}]^2 = Var[\bar{X}_k] + Var[\bar{X}] - 2Cov[\bar{X}_k, \bar{X}]. \quad (\text{II.18})$$

En remarquant que

$$Var[\bar{X}_k] = Cov[\bar{X}_k, \bar{X}_k] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Cov[X_{kj}, \bar{X}_k] = \tau^2 + \frac{\sigma^2}{n} \quad (\text{II.19})$$

et

$$Var [\bar{X}] = Cov [\bar{X}, \bar{X}] = \frac{1}{I} \sum_{k=1}^I Cov [\bar{X}_k, \bar{X}] \quad (II.20)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{I^2} \sum_{k=1}^I \sum_{k'=1}^I Cov [\bar{X}_k, \bar{X}_{k'}] \\ &= \frac{1}{I^2} \sum_{k=1}^I \left(\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n} \right) = \frac{\tau^2}{I} + \frac{\sigma^2}{In} \end{aligned} \quad (II.21)$$

Et

$$Cov [\bar{X}_k, \bar{X}] = \frac{1}{I} \sum_{k'=1}^I Cov [\bar{X}_k, \bar{X}_{k'}] \stackrel{k=k'}{=} \frac{1}{I} \left(\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n} \right) = \frac{\tau^2}{I} + \frac{\sigma^2}{In} \quad (II.22)$$

d'où l'on obtient à partir (II.19), (II.20) et (II.22)

$$\begin{aligned} E [\bar{X}_k - \bar{X}]^2 &= \tau^2 + \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\tau^2}{I} + \frac{\sigma^2}{In} - 2 \left(\frac{\tau^2}{I} + \frac{\sigma^2}{In} \right) \\ &= \frac{(1-I)}{I} \tau^2 + \frac{(1-I)}{I} \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Et

$$\sum_{k=1}^I E [\bar{X}_k - \bar{X}]^2 = (1-I) \tau^2 + \frac{\sigma^2}{n} (1-I)$$

donc

$$\frac{1}{(1-I)} \sum_{k=1}^I E [\bar{X}_k - \bar{X}]^2 = \tau^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

Finalement $E [\hat{\tau}^2] = \tau^2$.

□

II.4 Modèle de Bühlmann-Straub

Dans les années 60, de nombreux modèles de crédibilité avaient été développés mais ils présentaient deux défauts :

- Certains, comme le modèle des fluctuations limitées manquaient de fondations mathématiques solides
- D'autres modèles, de type paramétrique, comme le modèle de poisson gamma reposaient sur des Hypothèses très fortes concernant les lois des données. En 1967, Bühlmann proposa un premier modèle semi paramétrique dont les bases mathématiques étaient rigoureuses. Ce modèle comportait un défaut : il supposait tous les contrats identiques a priori, sans tenir compte de leur taille.

En 1970, Bühlmann et Straub ont amélioré le modèle pour inclure l'information liée à la taille du contrat. Dans ce chapitre, Considérons la situation d'un portefeuille de contrats d'assurance non vie qui doivent être tarifés.

Ce portefeuille a fait l'objet d'une segmentation qui a conduit à la création de classes de risque à l'intérieur ou les risques ne peuvent être différenciés a priori. La théorie de

la crédibilité va permettre, pour chaque risque, d'enrichir l'information a priori grâce au passé sinistre.

Dans cette optique, le modèle de Bühlmann utilise une Hypothèse peu réaliste :

$$\sigma^2(\Theta_i) = \text{Var}[X_{ij} | \Theta_i]. \quad (\text{II.23})$$

Il apparaît en effet assez naturel que cette variance conditionnelle devrait être décroissante avec l'exposition du risque i . Pour cela, le modèle de Bühlmann-Straub vient généraliser le modèle de Bühlmann en relâchant cette Hypothèse par l'introduction de poids. Ce modèle est largement utilisé en pratique que ce soit en assurance non-vie, en assurance vie ou en réassurance.

Dans la suite, nous traiterons un portefeuille de I risques (ou classes de risques) et nous noterons X_{ij} le ratio de sinistres (ou la fréquence de sinistres ou la taille moyenne des sinistres ou tout autre indicateur) du risque i pendant l'année j et ω_{ij} le poids associé.

II.4.1 Hypothèses du modèle

Pour chaque contrat $i = 1, \dots, I$ X_{ij} est la moyenne de groupe de ω_{ij} contrats, où ω_{ij} est le poids (taille) de groupe i à l'année j , avec $j = 1, \dots, n$:

$$X_{ij} = \frac{1}{\omega_{ij}} \sum_{r=1}^{\omega_{ij}} X_{ij}^{(r)}, j = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad i = 1, \dots, I$$

Hypothèse (Modèle de Bühlmann-Straub)

Le risque i est caractérisé par le profil de risque θ_i qui est une réalisation de Θ_i .

(BS1) Les variables aléatoires X_{ij} ($j = 1, \dots, n$) sont, conditionnellement à Θ_i , indépendantes avec les moments conditionnels

$$\begin{aligned} \mu(\Theta_i) &= E[X_{ij} | \Theta_i], \\ \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\omega_{ij}} &= \text{Var}[X_{ij} | \Theta_i]. \end{aligned}$$

En pratique, comme on ne connaît pas Θ , on ne connaît pas non plus $\mu(\Theta_i)$. C'est la quantité que l'on veut estimer.

Plus généralement

$$\text{Cov}(X_{ij}, X_{is} | \Theta_i) = \frac{\delta_{js}}{\omega_{ij}} \sigma^2(\Theta_i)$$

(BS2) Les couples $(\Theta_1, X_1); \dots; (\Theta_I, X_I)$ sont indépendants et les $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ sont indépendants et identiquement distribués.

Remarque : Le nombre des années des observations peut varier entre les risques. Aussi les risques

sont indépendants : les sinistres engendrés par deux contrats différents sont indépendants. La variance conditionnelle est inversement proportionnelle aux poids que l'on se donne. En pratique les poids sont des mesures du volume de risque (durée d'exposition au risque, montants assurés en incendie, masse salariale en santé, chiffre d'affaire réalisé par la cédante en réassurance, etc.).

◇

II.4.2 Paramètres de structure

- Prime individuelle : $\mu(\Theta_i) = E[X_{ij} | \Theta_i]$.
- Prime collective : $\mu_0 = E[\mu(\Theta_i)]$,
- Mesure du risque interne au risque individuel : $\sigma^2 = E[\sigma^2(\Theta_i)]$, est la variance intra contrat (ou dans le temps). Elle mesure la tendance d'un contrat à fluctuer dans le temps.
- Mesure l'hétérogénéité du portefeuille : $\tau^2 = \text{Var}[\mu(\Theta_i)]$, la variance inter contrat (ou dans l'espace). Plus τ^2 est grand et plus les contrats peuvent s'éloigner de la moyenne du portefeuille

Notation

$$\begin{aligned}\omega_{\bullet\bullet} &= \sum_{i=1}^I \omega_{i\bullet} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \\ Z_i &= \frac{\tau^2 \omega_{i\bullet}}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2} \quad \text{et} \quad Z_{\bullet} = \sum_{i=1}^I Z_i \\ X_{i\omega} &= \sum_{j=1}^n \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} X_{ij} \\ X_{\omega\omega} &= \sum_{i=1}^I \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} X_{i\omega} \\ X_{z\omega} &= \sum_{i=1}^I \frac{Z_i}{Z_{\bullet}} X_{i\omega}\end{aligned}$$

II.4.3 Estimateur de crédibilité

Pour chaque risque i , on cherche l'estimateur de crédibilité $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ de son ratio de sinistres individuel $\mu(\Theta_i)$. On dispose de données $X = (X'_1, \dots, X'_I)'$ sur l'ensemble du portefeuille. Les risques étant indépendants (**BS2**), $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}$ dépend des observations X rattachées aux risques, soit

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = c_0^i + \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i X_{rj} .$$

Par ailleurs, en notant $\omega_{i\bullet} = \sum_{j=1}^n \omega_{ij}$, le meilleur estimateur individuellement sans biais de $\mu(\Theta_i)$ est

$$X_{i\omega} = \sum_j \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} X_{ij} ,$$

pour lequel on a

Lemme II.5. *Les relations suivantes sont vérifiées*

$$1. \quad E[X_{i\omega} | \Theta_i] = \mu(\Theta_i), \quad (\text{II.24})$$

$$2. \quad \text{Var}[X_{i\omega} | \Theta_i] = \sum_j \left(\frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} \right)^2 \text{Var}[X_{ij} | \Theta_i] = \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\omega_{i\bullet}}, \quad (\text{II.25})$$

$$3. \quad \text{Var}[X_{i\omega}] = \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} + \tau^2. \quad (\text{II.26})$$

Preuve : 1.

$$\begin{aligned} E[X_{i\omega} | \Theta_i] &= E \left[\sum_j \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} X_{ij} \mid \Theta_i \right] = \sum_j \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} E[X_{ij} \mid \Theta_i] \\ &= \underbrace{\sum_j \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}}}_{=1} \mu(\Theta_i) = \mu(\Theta_i) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Var[X_{i\omega} | \Theta_i] &= Var \left[\sum_j \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} X_{ij} \mid \Theta_i \right] \\ &= \sum_j \left(\frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} \right)^2 \underbrace{Var[X_{ij} | \Theta_i]}_{=\frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\omega_{ij}}} = \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\omega_{i\bullet}}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} Var[X_{i\omega}] &= Var[E[X_{i\omega} | \Theta_i]] + E[Var[X_{i\omega} | \Theta_i]] \\ &= \underbrace{Var[\mu(\Theta_i)]}_{=\tau^2} + E \left[\frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\omega_{i\bullet}} \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} + \tau^2. \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant représente la prime de crédibilité

Théorème II.6. Dans le modèle de Bühlmann-Straub, l'estimateur (non-homogène) de crédibilité est donné par :

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = (1 - Z_i) \mu_0 + Z_i X_{i\omega} \quad (\text{II.27})$$

tel que $\mu_0 = E[\mu(\Theta_i)]$ et $Z_i = \frac{\tau^2 \omega_{i\bullet}}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2}$.

Avant de prouver le théorème, voici quelques relations importantes

Lemme II.7. Les relations suivantes sont vérifiées :

$$1. Cov(\mu(\Theta_i), X_{rj}) = \delta_{ir} \tau^2. \quad (\text{II.28})$$

$$2. Cov(X_{rj}, X_{ij}) = 0. \quad (\text{II.29})$$

$$3. Cov(X_{ij}, X_{ij'}) = \tau^2 + \frac{\delta_{jj'} \sigma^2}{\omega_{ij}} \quad (\text{II.30})$$

Preuve :[Preuve de lemme] 1. D'abord en prend le cas $i = r$

$$\begin{aligned} Cov(\mu(\Theta_i), X_{ij}) &= E[Cov(\mu(\Theta_i), X_{ij} | \Theta_i)] + Cov[E(\mu(\Theta_i) | \Theta_i), E(X_{ij} | \Theta_i)] \\ &= E[\mu(\Theta_i) E(X_{ij} | \Theta_i)] - \mu(\Theta_i) E(X_{ij} | \Theta_i) + Cov[\mu(\Theta_i), \mu(\Theta_i)] \\ &= E[0] + Var[\mu(\Theta_i)] = \tau^2. \end{aligned}$$

Pour $i \neq r$, en obtient

$$\begin{aligned} Cov(\mu(\Theta_i), X_{rj}) &= E[Cov(\mu(\Theta_i), X_{rj} | \Theta_i)] + Cov[E(\mu(\Theta_i) | \Theta_i), E(X_{rj} | \Theta_i)] \\ &= E[\mu(\Theta_i) E(X_{rj} | \Theta_i)] - \mu(\Theta_i) E(X_{rj} | \Theta_i) + Cov[\mu(\Theta_i), E(X_{rj} | \Theta_i)] \\ &= E[0] + Cov[\mu(\Theta_i), \mu_0] \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Si on fait une combinaison de deux cas, on obtient $Cov(\mu(\Theta_i), X_{rj}) = \delta_{ir}\tau^2$.
2.

$$\begin{aligned} Cov(X_{rj}, X_{ij}) &= E[Cov(X_{rj}, X_{ij} | \Theta_i)] + Cov[E(X_{rj} | \Theta_i), E(X_{ij} | \Theta_i)] \\ &= E[E(X_{rj} | \Theta_i) E(X_{ij} | \Theta_i)] - E(X_{rj} | \Theta_i) E(X_{ij} | \Theta_i) \\ &\quad + Cov[E(X_{rj}), \mu(\Theta_i)] \\ &= E[0] + Cov[\mu_0, \mu(\Theta_i)] = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

3. Soit $j, j' = 1, \dots, n$, $j \neq j'$. Nous écrivons

$$\begin{aligned} Cov(X_{ij}, X_{ij'}) &= E[Cov(X_{ij}, X_{ij'} | \Theta_i)] + Cov[E(X_{ij} | \Theta_i), E(X_{ij'} | \Theta_i)] \\ &= E[E(X_{ij} | \Theta_i) E(X_{ij'} | \Theta_i)] - E(X_{ij} | \Theta_i) E(X_{ij'} | \Theta_i) \\ &\quad + Cov[\mu(\Theta_i), \mu(\Theta_i)] \\ &= E[0] + Var[\mu(\Theta_i)] = 0 + \tau^2 = \tau^2. \end{aligned}$$

Soit $j = j' (= 1, \dots, n)$. Nous écrivons

$$\begin{aligned} Cov(X_{ij}, X_{ij}) &= Var(X_{ij}) = E[Var(X_{ij} | \Theta_i)] + Var[E(X_{ij} | \Theta_i)] \\ &= E\left[\frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\omega_{i\bullet}}\right] + Var[\mu(\Theta_i)] = \frac{1}{\omega_{ij}}\sigma^2 + \tau^2 \\ &= \tau^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{ij}}. \end{aligned}$$

□

Preuve :[Preuve de théorème] pour i fixé, telque $i = 1, \dots, I$, $\mu(\Theta_i)$ est estimé par la fonction

$$g_i(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{In}) = c_0^i + \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i X_{rj}$$

Le but est minimisé la fonction de carré de perte :

$$E \left\{ \left[\mu(\Theta_i) - c_0^i - \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i X_{rj} \right]^2 \right\}$$

on dérive (II.4.3) par rapport à c_0^i , et nous annulons la dérivée, on obtient

$$2E \left[-1 \left(\mu(\Theta_i) - c_0^i - \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i X_{rj} \right) \right] = 0$$

$$E[\mu(\Theta_i)] - c_0^i - \mu_0 \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i = 0$$

D'où

$$c_0^i = \mu_0 \left[1 - \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i \right]$$

on dérive (II.4.3) par rapport à $c_{r'j'}^i$, et on remplace c_0^i par (II.4.3), nous annulons la dérivée, on obtient le système des équations $\forall r' = 1, \dots, I$ et $\forall j' = 1, \dots, n$:

$$0 = \frac{d}{dc_{r'j'}^i} E \left\{ \left[\mu(\Theta_i) - c_0^i - \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i X_{rj} \right]^2 \right\}$$

$$= -2 \left[\begin{aligned} & Cov(\mu(\Theta_i), X_{r'j'}) - \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i Cov(X_{rj}, X_{r'j'}) \\ & + E[X_{r'j'}] \underbrace{\left[E \left[\mu(\Theta_i) - c_0^i - \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i X_{rj} \right] \right]}_{=0} \end{aligned} \right]$$

D'après la relation (II.30) du lemme (II.7)

$$Cov(\mu(\Theta_i), X_{r'j'}) = \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i Cov(X_{rj}, X_{r'j'})$$

$$\stackrel{r'=r}{=} \sum_{j=1}^n c_{r'j}^i \left[\tau^2 + \frac{\delta_{jj'} \sigma^2}{\omega_{r'j'}} \right]$$

Il existe deux cas :

Le premier cas

Si $r' \neq i \implies Cov(\mu(\Theta_i), X_{r'j'}) = 0$, d'après la relation (II.28) du lemme (II.7) la relation (II.31) devienne :

$$\sum_{j=1}^n c_{r'j}^i \left[\tau^2 + \frac{\delta_{jj'} \sigma^2}{\omega_{r'j'}} \right] = 0$$

$$\tau^2 c_{r'\bullet}^i + \frac{\sigma^2 c_{r'j'}^i}{\omega_{r'j'}} = 0$$

En multipliant la dernière par $\omega_{r'j'}$, on trouve

$$\tau^2 c_{r'\bullet}^i \omega_{r'j'} + \sigma^2 c_{r'j'}^i = 0$$

On fait la somme par rapport à j' , on obtient

$$\tau^2 c_{r'\bullet}^i \omega_{r'\bullet} + \sigma^2 c_{r'\bullet}^i = c_{r'\bullet}^i \underbrace{[\tau^2 \omega_{r'\bullet} + \sigma^2]}_{\neq 0} = 0$$

D'après l'Hypothèse de modèle $\left\{ \begin{array}{l} \tau^2 \neq 0 \\ \sigma^2 \neq 0 \end{array} \right.$, alors $c_{r'\bullet}^i = 0 \quad \forall r' = 1, \dots, I$, d'où $c_{r'j}^i = 0$
 $\forall r' = 1, \dots, I$ et $j' = 1, \dots, n$

Le deuxième cas
 $\dot{r} = i$, d'après (II.31)

$$\tau^2 = \tau^2 c_{i\bullet}^i + \frac{\sigma^2 c_{ij'}^i}{\omega_{ij'}}$$

pour $j' = 1, \dots, n$, Avec $c_{i\bullet}^i = \sum_{j'=1}^n c_{ij'}^i$, encore, en multipliant (II.4.3) par $\omega_{ij'}$ et on fait la somme par rapport à j' :

$$\sum_{j'=1}^n \tau^2 \omega_{ij'} = \tau^2 c_{i\bullet}^i \sum_{j'=1}^n \omega_{ij'} + \sigma^2 c_{i\bullet}^i$$

Puisque $\omega_{i\bullet} = \sum_{j'=1}^n \omega_{ij'}$, on obtient

$$c_{i\bullet}^i = \frac{\tau^2 \omega_{i\bullet}}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2}$$

En remplace (II.4.3) dans (II.4.3), on trouve

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{\tau^4 \omega_{i\bullet}}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2} + \frac{\sigma^2 c_{ij'}^i}{\omega_{ij'}} \\ \frac{\tau^2}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2} &= \frac{c_{ij'}^i}{\omega_{ij'}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} c_{ij'}^i &= \frac{\tau^2 \omega_{ij'}}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2} \\ &= \frac{\tau^2 \omega_{i\bullet}}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2} \left[\frac{\omega_{ij'}}{\omega_{i\bullet}} \right] = Z_i \left[\frac{\omega_{ij'}}{\omega_{i\bullet}} \right] \end{aligned}$$

Maintenant, pour $r \neq i$ on a $c_{rj}^i = 0$, alors (II.4.3) devient

$$\begin{aligned} c_0^i &= \mu_0 \left(1 - Z_i \sum_{j=1}^n \left[\frac{\omega_{ij'}}{\omega_{i\bullet}} \right] \right) \\ c_0^i &= \mu_0 (1 - Z_i) \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} g_i(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{In}) &= \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = c_0^i + \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i X_{rj} \\ &= \mu_0 (1 - Z_i) + Z_i \sum_{j=1}^n \left[\frac{\omega_{ij'}}{\omega_{i\bullet}} \right] X_{ij}, \end{aligned}$$

donc

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \mu_0 (1 - Z_i) + Z_i X_{i\omega}$$

□

II.4.4 L'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de crédibilité

μ_0 est meilleur estimateur basé uniquement sur les informations à priori et leur erreur quadratique

$$E [(\mu_0 - \mu(\Theta_i))^2] = \text{Var}(\mu(\Theta_i)) = \tau^2. \quad (\text{II.31})$$

$X_{i\omega}$ est meilleur estimateur basé uniquement sur l'observation de risque i et leur erreur quadratique

$$E [(X_{i\omega} - \mu(\Theta_i))^2] = E \left\{ E \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} (X_{ij} - \mu(\Theta_i)) \right)^2 \middle| \Theta_i \right] \right\} \quad (\text{II.32})$$

$$= E [\sigma^2(\Theta_i) / \omega_{i\bullet}] = \sigma^2 / \omega_{i\bullet}. \quad (\text{II.33})$$

L'estimateur de crédibilité est une moyenne pondérée de deux estimateurs.

Théorème II.8. *L'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de crédibilité est donnée par*

$$E \left[\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} - \mu(\Theta_i) \right]^2 = (1 - Z_i) \tau^2 = Z_i \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}}. \quad (\text{II.34})$$

Preuve :

$$\begin{aligned} E \left[\left(\mu(\Theta_i) - \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} \right)^2 \right] &= E \left[\{ Z_i (\mu(\Theta_i) - X_{i\omega}) + (1 - Z_i) (\mu(\Theta_i) - \mu_0) \}^2 \right] \\ &= Z_i^2 \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} + (1 - Z_i)^2 \tau^2 \\ &= \left(\frac{\tau^2 \omega_{i\bullet}}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2} \right)^2 \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} + \left(\frac{\sigma^2}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2} \right)^2 \tau^2 \\ &= \frac{\tau^2 \sigma^2}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2} = \left(\frac{\tau^2 \omega_{i\bullet}}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2} \right) \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} = Z_i \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} \\ &= \left(\frac{\sigma^2}{\tau^2 \omega_{i\bullet} + \sigma^2} \right) \tau^2 = (1 - Z_i) \tau^2. \end{aligned}$$

□

II.4.5 Estimateur homogène de crédibilité

Dans le cas homogène on a le théorème suivant

Théorème II.9. *La solution de problème de minimisation :*

$$\underset{c_i}{\text{Min}} E \left\{ \left[\mu(\Theta_i) - \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i X_{rj} \right]^2 \right\} \quad (\text{II.35})$$

Aussi

$$E [\mu(\Theta_i)] = \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i E [X_{rj}] \quad (\text{II.36})$$

est

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} = (1 - Z_i) X_{z\omega} + Z_i X_{i\omega} \quad (\text{II.37})$$

$$\text{Ou } X_{z\omega} = \sum_{i=1}^I \frac{Z_i}{Z_{\bullet}} X_{i\omega}, \text{ et } Z_i = \frac{\tau^2 \omega_{i\bullet}}{\omega_{i\bullet} \tau^2 + \sigma^2} \text{ et } Z_{\bullet} = \sum_{i=1}^I Z_i$$

Preuve : pour un i fixé, (II.36) peut s'écrire comme $\sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i = 1$, car $E[X_{rj}] = E[\mu(\Theta_i)] = \mu_0$. Nous insérons cette condition dans (II.35), et nous ajoutons le dans la fonction de minimisation avec le multiplicateur de Lagrange 2α . On trouve un nouveau problème

$$\text{Min}_{c_i} \left(E \left\{ \left[\mu(\Theta_i) - \mu_0 - \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i (X_{rj} - \mu_0) \right]^2 \right\} + 2\alpha \left(1 - \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i \right) \right)$$

Puisque (II.4.5) est une forme quadratique positive, il est suffisant de trouver la solution avec dérivations partiels. On prend la dérivation par rapport $c_{r'j'}^i$ pour $r' = 1, \dots, I$ et $j' = 1, \dots, n$ et en annulons la dérivé :

$$\begin{aligned} 0 &= -2E \left[(X_{r'j'} - \mu_0) \left[\mu(\Theta_i) - \mu_0 - \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i (X_{rj} - \mu_0) \right] \right] - 2\alpha \\ 0 &= -\alpha - E[X_{r'j'} \mu(\Theta_i)] + E[X_{r'j'} \mu_0] + E X_{r'j'} \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i (X_{rj} - \mu_0) \\ &\quad + E[\mu_0 \mu(\Theta_i)] - E[\mu_0^2] - E \left[\mu_0 \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i (X_{rj} - \mu_0) \right] \end{aligned}$$

en trouve

$$\alpha + \text{Cov}[\mu(\Theta_i), X_{r'j'}] = \sum_{r=1}^I \sum_{j=1}^n c_{rj}^i \text{Cov}(X_{rj}, X_{r'j'})$$

On utilise l'expressions du lemme (II.7)

$$\alpha + \delta_{ir'} \tau^2 = \sum_{j=1}^n c_{r'j}^i \left(\tau^2 + \delta_{jj'} \frac{\sigma^2}{\omega_{r'j}} \right) \text{ pour } r' = 1, \dots, I \text{ et } j' = 1, \dots, n$$

En effet, Le coté droit de l'équation(II.4.5) peut successivement écrit

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\sum_{r=1}^I c_{rj}^i \text{Cov}(X_{rj}, X_{r'j'}) \right] &= \sum_{j=1}^n \left[c_{r'j}^i \text{Cov}(X_{r'j}, X_{r'j'}) + \sum_{\substack{r=1 \\ r' \neq r}}^I c_{rj}^i \text{Cov}(X_{rj}, X_{r'j'}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left[c_{r'j}^i \left(\tau^2 + \delta_{jj'} \frac{\sigma^2}{\omega_{r'j}} \right) + \sum_{\substack{r=1 \\ r' \neq r}}^I c_{rj}^i 0 \right] \\ &= \sum_{j=1}^n c_{r'j}^i \left(\tau^2 + \delta_{jj'} \frac{\sigma^2}{\omega_{r'j}} \right) \text{ pour } r' = 1, \dots, I \text{ et } j' = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Cette équation peut simplifier comme suit

$$\alpha + \delta_{ir'}\tau^2 = \tau^2 c_{r'\bullet}^i + \frac{\sigma^2 c_{r'j'}^i}{\omega_{r'j'}} \quad \text{avec } c_{r'\bullet}^i = \sum_{j=1}^n c_{rj}^i$$

En effet, Le coté droit de l'équation(II.4.5) peut successivement écrit

$$\begin{aligned} \tau^2 c_{r'\bullet}^i + \sigma^2 \sum_{j=1}^n \delta_{jj'} \frac{c_{r'j}^i}{\omega_{r'j}} &= \tau^2 c_{r'\bullet}^i + \sigma^2 \left(\frac{c_{r'j'}^i}{\omega_{r'j'}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j'}}^n 0 \frac{c_{r'j}^i}{\omega_{r'j}} \right) \\ &= \tau^2 c_{r'\bullet}^i + \sigma^2 \frac{c_{r'j'}^i}{\omega_{r'j'}} \end{aligned}$$

Nous multipliant équation(II.4.5) par $\omega_{r'j'}$ et on fait la somme par rapport à j' en trouve pour r' donné :

$$(\alpha + \delta_{ir'}\tau^2) \omega_{r'\bullet} = c_{r'\bullet}^i \tau^2 \omega_{r'\bullet} + \sigma^2 c_{r'\bullet}^i$$

Donc

$$c_{r'\bullet}^i = (\alpha + \delta_{ir'}\tau^2) \omega_{r'\bullet} / (\sigma^2 + \tau^2 \omega_{r'\bullet})$$

En remplace (II.4.5) dans (II.4.5)en obtient une expression pour $c_{r'j'}^i$:

$$\begin{aligned} \alpha + \delta_{ir'}\tau^2 &= \tau^2 (\alpha + \delta_{ir'}\tau^2) \omega_{r'\bullet} / (\sigma^2 + \tau^2 \omega_{r'\bullet}) + \sigma^2 \frac{c_{r'j'}^i}{\omega_{r'j'}} \\ c_{r'j'}^i &= (\alpha + \delta_{ir'}\tau^2) (1 - Z_i) \omega_{r'j'} / \sigma^2 \end{aligned}$$

A partir de ça, l'estimateur homogène pour le modèle de Bühlmann-Straub(II.37)

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} = \sum_{r'=1}^I \sum_{j'=1}^n c_{r'j'}^i X_{r'j'} = \sum_{r'=1}^I \sum_{j'=1}^n [(\alpha + \delta_{ir'}\tau^2) (1 - Z_i) \omega_{r'j'} / \sigma^2] X_{r'j'}$$

On détermine α sous la condition $\sum_{r'=1}^I \sum_{j'=1}^n c_{r'j'}^i$

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{r'=1}^I \left(\sum_{j'=1}^n c_{r'j'}^i \right) = \sum_{r'=1}^I c_{r'\bullet}^i = \sum_{r'=1}^I (\alpha + \delta_{ir'}\tau^2) \omega_{r'\bullet} / (\sigma^2 + \tau^2 \omega_{r'\bullet}) = \\ &= \frac{\alpha}{\tau^2} \sum_{r'=1}^I \tau^2 \omega_{r'\bullet} / (\sigma^2 + \tau^2 \omega_{r'\bullet}) + \sum_{r'=1}^I \delta_{ir'} Z_{r'} = \frac{\alpha}{\tau^2} Z_{\bullet} + Z_i \end{aligned}$$

Et on trouve la valeur de

$$\alpha = \tau^2 (1 - Z_i) / Z_{\bullet}$$

Finalement, en fait quelques manipulations algébrique pour trouver l'estimateur optimale pour $\mu(\Theta_i)$

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} &= \sum_{r'=1}^I \sum_{j'=1}^n c_{r'j'}^i X_{r'j'} \\
&= \sum_{r'=1}^I \sum_{j'=1}^n [(\tau^2(1-Z_i)/Z_{\bullet} + \delta_{ir'}\tau^2) ((1-Z_i)\omega_{r'j'}/\sigma^2)] X_{r'j'} \\
&= \sum_{r'=1}^I \sum_{j'=1}^n \frac{\tau^2(1-Z_i)}{Z_{\bullet}} \frac{(1-Z_i)\omega_{r'j'}}{\sigma^2} X_{r'j'} + \sum_{j'=1}^n \frac{\tau^2(1-Z_i)\omega_{r'j'}}{\sigma^2} X_{r'j'} \\
&= \sum_{r'=1}^I \sum_{j'=1}^n \frac{\tau^2(1-Z_i)\omega_{r'j'}}{Z_{\bullet}\sigma^2} X_{r'j'} - \sum_{r'=1}^I \sum_{j'=1}^n \frac{\tau^2(1-Z_i)Z_i\omega_{r'j'}}{Z_{\bullet}\sigma^2} X_{r'j'} \\
&\quad + \sum_{j'=1}^n \frac{\tau^2(1-Z_i)\omega_{r'j'}}{\sigma^2} X_{r'j'}
\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\frac{Z_i}{(1-Z_i)} = \frac{\tau^2\omega_{i\bullet}}{\sigma^2}$$

et

$$\frac{1}{\omega_{i\bullet} + \sigma^2/\tau^2} = \frac{Z_i}{\omega_{i\bullet}}$$

(II.38) devient

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} = (1-Z_i)X_{z\omega} + Z_iX_{i\omega}$$

□

Théorème II.10. (Propriété de balance)

Sous les hypothèses du modèle de Bühlmann-Straub, on a

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \omega_{ij} X_{ij}. \quad (\text{II.38})$$

Ce résultat nous indique que si la prime homogène de crédibilité avait été utilisée dans la passé, il y aurait eu équilibre entre primes et prestations.

Preuve : On sait que $\omega_{i\bullet}(1-Z_i) = (\sigma^2/\tau^2)Z_i$, S'ensuivre :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^I \omega_{i\bullet} \left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - X_{i\omega} \right) &= \sum_{i=1}^I \omega_{i\bullet} \left(-(1-Z_i)X_{i\omega} + (1-Z_i)\widehat{\widehat{\mu_0}} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{\tau^2} \sum_{i=1}^I Z_i (X_{z\omega} - X_{i\omega}) = 0
\end{aligned}$$

Dans le dernier ligne, en utilise $X_{z\omega} = \sum_{i=1}^I \frac{Z_i}{Z_{\bullet}} X_i$ et $X_{i\omega} = \sum_j^n \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} X_{ij}$.

□

II.4.6 L'erreur quadratique moyenne de l'estimateur homogène de crédibilité

Théorème II.11. *Sous les Hypothèses du modèle de Bühlmann-Straub, l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur homogène de crédibilité est donnée par*

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \tau^2 (1 - Z_i) \left(1 + \frac{1 - Z_i}{Z_{\bullet}} \right). \quad (\text{II.39})$$

L'erreur quadratique moyenne de l'estimateur homogène de crédibilité est égale à celle de l'estimateur (nonhomogène) majorée par le coefficient $\frac{1-Z_i}{Z_{\bullet}}$. Cette perte de précision résulte de l'estimation de μ_0

Preuve :

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] + E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} - \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} \right)^2 \right]$$

a partir de théorème II.8

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = (1 - Z_i) \tau^2$$

Le deuxième terme

$$E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} - \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} \right)^2 \right] = (1 - Z_i)^2 E [(X_{z\omega} - \mu_0)^2]$$

et

$$\begin{aligned} E [(X_{z\omega} - \mu_0)^2] &= E \left[\left(\sum_{i=1}^I \frac{Z_i}{Z_{\bullet}} (X_{i\omega} - \mu_0) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^I \left(\frac{Z_i}{Z_{\bullet}} \right)^2 \underbrace{E [(X_{i\omega} - \mu_0)^2]}_{\text{Var}(X_{i\omega}) = E[\text{Var}(X_{i\omega} | \Theta_i)] + \text{Var}(E(X_{i\omega} | \Theta_i))} \\ &= \sum_{i=1}^I \left(\frac{Z_i}{Z_{\bullet}} \right)^2 \underbrace{\left(\frac{\sigma^2 + \omega_{i\bullet} \tau^2}{\omega_{i\bullet} \tau^2} \right)}_{=Z_i^{-1}} \tau^2 = \frac{\tau^2}{Z_{\bullet}}. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E \left[\left(\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] &= \tau^2 (1 - Z_i) + (1 - Z_i)^2 \frac{\tau^2}{Z_{\bullet}} \\ &= \tau^2 (1 - Z_i) \left(1 + \frac{1 - Z_i}{Z_{\bullet}} \right), \end{aligned}$$

□

II.4.7 Estimation des paramètres de structure

L'estimation de la prime de crédibilité passe par l'estimation des paramètres de structure (voir [9], [31], [32]). Rappelons que ces grandeurs interviennent : dans le calcul des facteurs de crédibilité pour l'estimation de $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}}$ et $\widehat{\mu(\Theta_i)}$, aussi dans l'estimation de μ_0 . Pour cela leur estimation nécessite donc une attention particulière.

Théorème II.12. *Les estimateurs*

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{I(n-1)} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \omega_{ij} (X_{ij} - X_{i\omega})^2, \quad (\text{II.40})$$

$$\widehat{\tau}^2 = \frac{\omega_{\bullet\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}^2 - \sum_{i=1}^I \omega_{i\bullet}^2} \left\{ \sum_{i=1}^I \omega_{i\bullet} (X_{i\omega} - X_{\omega\omega})^2 - (I-1) \widehat{\sigma}^2 \right\}, \quad (\text{II.41})$$

sont sans biais

Avant de prouver le théorème, nous donnons quelques relations impotentes

Lemme II.13. *Les relations suivantes sont vérifiées*

$$1. \text{Cov}(X_{ij}, X_{i\omega}) = \tau^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} \quad (\text{II.42})$$

$$2. \text{Cov}(X_{i\omega}, X_{i\omega}) = \tau^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} \quad (\text{II.43})$$

$$3. \text{Cov}(X_{i\omega}, X_{\omega\omega}) = \tau^2 \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} + \frac{\sigma^2}{\omega_{\bullet\bullet}} \quad (\text{II.44})$$

$$4. \text{Var}[\bar{X}] = \tau^2 \sum_{i=1}^I \left(\frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{\bullet\bullet}} \quad (\text{II.45})$$

Preuve : 1. on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{ij}, X_{i\omega}) &= \sum_{j'} \frac{\omega_{ij'}}{\omega_{i\bullet}} \text{Cov}(X_{ij}, X_{ij'}) \\ &= \sum_{j'} \frac{\omega_{ij'}}{\omega_{i\bullet}} \left[\frac{\delta_{jj'} \sigma^2}{\omega_{ij}} + \tau^2 \right] \\ &= \tau^2 + \underbrace{\sum_{j'} \frac{\omega_{ij'}}{\omega_{i\bullet}} \left[\frac{\delta_{jj'} \sigma^2}{\omega_{ij}} \right]}_{j=j'} \\ &= \tau^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}}. \end{aligned}$$

2. on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{i\omega}, X_{i\omega}) &= \sum_j \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} \text{Cov}(X_{ij}, X_{i\omega}) \\ &= \sum_j \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} \left(\tau^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} \right) \\ &= \tau^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}}. \end{aligned}$$

3. on a

$$\begin{aligned}
 Cov(X_{i\omega}, X_{\omega\omega}) &= \sum_k \frac{\omega_{k\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} Cov(X_{i\omega}, X_{k\omega}) \\
 &\stackrel{k=i}{=} \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} Cov(X_{i\omega}, X_{i\omega}) \\
 &= \tau^2 \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} + \frac{\sigma^2}{\omega_{\bullet\bullet}}.
 \end{aligned}$$

4. on a

$$\begin{aligned}
 Var[X_{\omega\omega}] &= Cov(X_{\omega\omega}, X_{\omega\omega}) = \sum_i \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} Cov(X_{i\omega}, X_{i\omega}) \\
 &= \sum_i \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} \left(\tau^2 \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} + \frac{\sigma^2}{\omega_{\bullet\bullet}} \right) \\
 &= \tau^2 \sum_i \left(\frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{\bullet\bullet}}.
 \end{aligned}$$

□

Maintenant en fait la preuve de théorème

Preuve : On démontre que $\hat{\sigma}^2$ est sans biais, d'abord

$$\begin{aligned}
 E[(X_{ij} - X_{i\omega})^2] &= Var[X_{ij}] + Var[X_{i\omega}] - 2Cov(X_{ij}, X_{i\omega}) \\
 &= \tau^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{ij}} + \tau^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} - 2 \left(\tau^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} \right) \\
 &= \frac{\sigma^2}{\omega_{ij}} - \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}}
 \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
 E \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \omega_{ij} (X_{ij} - X_{i\omega})^2 \right] &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \omega_{ij} E[(X_{ij} - X_{i\omega})^2] \\
 &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \left[\frac{\sigma^2}{\omega_{ij}} - \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} \right] \\
 &= \sigma^2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \frac{\omega_{ij}}{\omega_{ij}} - \sigma^2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} \\
 &= \sigma^2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^n 1 - \sigma^2 \sum_{i=1}^I \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{i\bullet}} \\
 &= \sigma^2 In - \sigma^2 I \\
 &= (In - I) \sigma^2
 \end{aligned}$$

Donc

$$E[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2$$

pour $\widehat{\tau^2}$, on a

$$\begin{aligned}
 E[(X_{i\omega} - X_{\omega\omega})^2] &= \text{Var}[X_{i\omega}] + \text{Var}[X_{\omega\omega}] - 2\text{Cov}(X_{i\omega}, X_{\omega\omega}) \\
 &= \tau^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{i\bullet}} + \tau^2 \sum_i \left(\frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{\omega_{\bullet\bullet}} - 2 \left(\tau^2 \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} + \frac{\sigma^2}{\omega_{\bullet\bullet}} \right) \\
 &= \tau^2 \left(1 - 2 \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} + \sum_i \left(\frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} \right)^2 \right) + \sigma^2 \left(\frac{1}{\omega_{i\bullet}} - \frac{1}{\omega_{\bullet\bullet}} \right)
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 E \left[\sum_i \omega_{i\bullet} (X_{i\omega} - X_{\omega\omega})^2 \right] &= \tau^2 \sum_i \left(\omega_{i\bullet} - 2 \frac{\omega_{i\bullet}^2}{\omega_{\bullet\bullet}} + \omega_{i\bullet} \sum_i \left(\frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} \right)^2 \right) + (I-1) \sigma^2 \\
 &= \tau^2 \left(\omega_{\bullet\bullet} - 2 \sum_i \frac{\omega_{i\bullet}^2}{\omega_{\bullet\bullet}} + \underbrace{\sum_i \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{\bullet\bullet}} \sum_i \frac{\omega_{i\bullet}^2}{\omega_{\bullet\bullet}}}_{=1} \right) + (I-1) \sigma^2 \\
 &= \tau^2 \left(\omega_{\bullet\bullet} - \frac{\sum_i \omega_{i\bullet}^2}{\omega_{\bullet\bullet}} \right) + (I-1) \sigma^2 \\
 &= \tau^2 \left(\frac{\omega_{\bullet\bullet}^2 - \sum_i \omega_{i\bullet}^2}{\omega_{\bullet\bullet}} \right) + (I-1) \sigma^2
 \end{aligned}$$

donc $E \left[\widehat{\tau^2} \right] = \tau^2$.

□

Estimateur empirique de crédibilité

En pratique, on utilisera l'estimateur de crédibilité empirique $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{emp}$ qui est obtenu en remplaçant les paramètres de structure par leurs estimateurs dans la formule de $\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{hom}$

Théorème II.14. *L'estimateur empirique de crédibilité est donné par*

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{emp} = \widehat{Z}_i X_{i\omega} + (1 - \widehat{Z}_i) \widehat{\mu}_0, \quad (\text{II.46})$$

où

$$\begin{aligned}
 \widehat{Z}_i &= \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{i\bullet} + \widehat{\sigma^2}/\widehat{\tau^2}}, \\
 \widehat{\mu}_0 &= \frac{\sum_i \widehat{Z}_i X_{i\omega}}{\sum_i \widehat{Z}_i}.
 \end{aligned}$$

II.4.8 Récapitulatif de la démarche à suivre en pratique

1. Détermination des poids ω_{ij}
2. Calcul de $X_{i\omega} = \sum_j \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i\bullet}} X_{ij}$
3. Estimation de σ^2 par $\hat{\sigma}^2$
4. Estimation de τ^2 par $\hat{\tau}^2$
5. Estimation des Z_i par $\hat{Z}_i = \frac{\omega_{i\bullet}}{\omega_{i\bullet} + \hat{\sigma}^2 / \hat{\tau}^2}$
6. Estimation de μ_0 par $\hat{\mu}_0$
7. Calcul des $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{emp} = \hat{Z}_i X_{i\omega} + (1 - \hat{Z}_i) \hat{\mu}_0$.

Chapitre III

Crédibilité multivariée appliquée au modèle collectif

III.1 Introduction

La crédibilité est une forme de tarification de l'assurance qui est largement utilisée, en particulier en Amérique du Nord. Ce chapitre étend les formules traditionnelles de crédibilité dans deux aspects. Les nouvelles procédures sont appelés "La crédibilité de plusieurs variables" parce que les deux aspects se servent de sources de données supplémentaires par rapport aux formules classiques. Plus précisément, la première partie de cette étude examine les données à la fois du nombre et montant de sinistres. La deuxième partie du chapitre examine les données de processus de revendications "nombre et montant de plusieurs secteurs d'activité". En utilisant les covariances entre les secteurs d'activité (la condition que l'hétérogénéité est non observée)(voir [11]).

III.2 Les données

Plusieurs lois sur les assurances et les règlements exigent l'utilisation de la crédibilité. La théorie de la crédibilité a été appelé pierre angulaire du champ de la science actuarielle (Hick- l'homme et Heacox 1999). La crédibilité a depuis longtemps trouvé une utilisation dans la pratique, Mowbray (1914). Voir Hickman et Heacox (1999) et Venter (1996) pour les comptes historiques. La théorie moderne de la crédibilité a commencé par les travaux de Bühlmann (1967), dans ce que nous appelons aujourd'hui "statistiques effets aléatoires". C'est Jewell (1974) qui souligne d'abord la nécessité de la crédibilité multivariée. En regardant la crédibilité dans une perspective bayésienne, Jewell a examiné les familles exponentielles linéaires multivariées et a montré comment obtenir des formules de crédibilité exacte dans des cas particuliers, y compris le cas d'une normale conjuguée préalable.

La première partie de ce chapitre considère les données à partir des nombres des sinistres et des montants des sinistres. Nous supposons un modèle des pertes totales des sinistres, pour trouver les formules de prime optimale d'assurance. La deuxième partie de ce chapitre considère les données à partir des nombres et des montants des sinistres de plusieurs lignes d'assurance. Par l'utilisation des covariances entre les lignes d'assurance (ËË), ce chapitre dérive des primes d'assurance plus efficaces.

Les données disponibles comprennent par class de risque i (ville), au cours du temps t (année) et par secteur d'activité j . Pour chaque observation $\{itj\}$, les réponses comprennent de montant de la réclamation S_{itj} et nombre de réclamation N_{itj} . Nous avons également l'exposition e_{itj} . Pour résumer, les données disponibles se composent de

$$\{S_{itj}, N_{itj}, e_{itj}, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T_i, i = 1, \dots, n\}$$

Il y a n des sujets et chaque sujet est observé T fois, et il y a J des secteurs d'activité.

Pour répondre à l'hétérogénéité des risques, il a supposé qu'il existe des variables aléatoires invariantes dans le temps (non observé) $\{\alpha_i\}$, connu sous le nom "variables de structure" dans la littérature la crédibilité.

Supposons également que les montants des réclamations suivaient un modèle de la perte globale, de sorte que :

$$S_{itj} = \sum_{k=1}^{N_{itj}} C_{itj,k}.$$

Ici, $\{C_{itj,k}, K = 1, 2, \dots\}$ Sont des réclamations résultant des pertes individuelles de la même distribution. Conditionnellement à α_i , les réclamations sont indépendants. et les variables aléatoires $N_{itj}, C_{itj,k}, K = 1, 2, \dots$, sont indépendantes. Aussi les variables aléatoires $\{N_{itj}, S_{itj}\}, t = 1, \dots, T_i$, sont indépendantes entre les classes de risque.

III.3 Unique secteur d'activité

III.3.1 Hypothèses

Pour le calcul de la prime de crédibilité, ce chapitre exige les deux premiers moments. Ainsi, dans le contexte de pertes cumulées, nous allons utiliser les vecteurs des données $N_i = (N_{i,1}, \dots, N_{i,T_i})$, $S_i = (S_{i,1}, \dots, S_{i,T_i})$, $y_i = (\dot{N}_i, \dot{S}_i)$, Et $y = (Y_1, \dots, Y_n)$. Pour définir les deux premiers moments conditionnels des processus de nombre des réclamations, on a :

$$\lambda_{1,i} = E[N_{it} | \alpha_i] / e_{it} \text{ et } \lambda_{2,i} = Var[N_{it} | \alpha_i] / e_{it}$$

Pour les deux premiers moments conditionnels de processus de montants des réclamations, on a :

$$\gamma_{1,i} = E[C_{it,k} | \alpha_i] \text{ et } \gamma_{2,i} = Var[C_{it,k} | \alpha_i].$$

Parce que $\{\alpha_i\}$ sont indépendants de i , que nous avons $\{\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}, \gamma_{1,i}, \gamma_{2,i}\}$ sont indépendants de i . De plus, parce que la fréquence et la gravité sont conditionnellement indépendantes à α_i , que nous avons $\{\lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}\}$ et $\{\gamma_{1,i}, \gamma_{2,i}\}$ sont indépendants, conditionnellement à α_i .

Pour les moments inconditionnels :

$$\gamma_1 = E[\gamma_{1,i}], \gamma_2 = E[\gamma_{2,i}] \text{ et } \sigma_\gamma^2 = Var[\gamma_{1,i}].$$

Pour la distribution du nombre réclamations :

$$\lambda_1 = E[\lambda_{1,i}], \lambda_2 = E[\lambda_{2,i}] \text{ et } \sigma_\lambda^2 = Var[\lambda_{1,i}].$$

Dans les sections suivantes, nous avons également besoin des constantes :

$$c_1 = E[Var[S_{it} | \alpha_i] / e_{it}] = \lambda_2(\sigma_\gamma^2 + \gamma_1^2) + \lambda_1\gamma_2$$

Et

$$c_2 = Var[E[S_{it} | \alpha_i] / e_{it}] = \sigma_\lambda^2\sigma_\gamma^2 + \sigma_\lambda^2\gamma_1^2 + \lambda_1^2\sigma_\gamma^2.$$

Pour résumer les premiers moments d'une forme vectorielle, nous avons besoin des expositions $e_i = (e_{i1}, \dots, e_{i,T_i})$. Ainsi, avec $E[N_{it}] = \lambda_1 e_{it}$ et $E[S_{it}] = \lambda_1 \gamma_1 e_{it}$,

Nous avons

$$E[y_i] = \begin{pmatrix} E[N_i] \\ E[S_i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_i \\ \lambda_1 \gamma_1 e_i \end{pmatrix}.$$

Pour seconds moments, nous avons besoin de la matrice $V_i = Var[y_i]$ à $2T_i \times 2T_i$, est une matrice donnée par

$$V_i = Var[y_i] = \begin{pmatrix} Var[N_i] & Cov[N_i, S_i] \\ Cov[N_i, S_i] & Var[S_i] \end{pmatrix}.$$

III.3.2 Prédiction de crédibilité

Considérons une situation générale dans laquelle nous observons un $N \times 1$ vecteur aléatoire y de moyenne $E[y]$, et une matrice variance-covariance $Var[y] = V$. Nous tenons à prévoir une variable aléatoire W , qui a une moyenne $E[W]$. Notons le vecteur des covariances entre W et y comme $Cov[W, y]$. Le meilleur estimateur linéaire (en y) non biaisée de W est W^*

$$W^* = E[W] + Cov[W, y]V^{-1}[y - E[y]].$$

Ici, l'adjectif «meilleur» se réfère au minimum d'erreur quadratique moyenne. Dans de nombreux cas, W^* peut être interprété comme une prime de crédibilité. Plus précisément, dans le contexte de pertes cumulées, nous souhaitons pour prédire $W = E[S_{i,T_{i+1}} | \alpha_i] = E[N_{i,T_{i+1}} | \alpha_i]E[C_{i,T_{i+1}} | \alpha_i] = e_{i,T_{i+1}}\lambda_{1,i}\gamma_{1,i}$. Avec ce choix de W , W^* représente notre prime de crédibilité pour les pertes globales du i -ème classe de risque. La proposition suivante fournit une formule pour la prime de crédibilité qui est facile à calculer et facile à interpréter.

Proposition III.1. *Sous les hypothèses. Définir*

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &= \frac{1}{T_i} \sum_{t=1}^{T_i} e_{it}, \bar{N}_i = \frac{1}{T_i} \sum_{t=1}^{T_i} N_{it}, \bar{S}_i = \frac{1}{T_i} \sum_{t=1}^{T_i} S_{it}, \\ \bar{N}_{e,i} &= \bar{N}_i / \bar{e}_i \quad \text{et} \quad \bar{S}_{e,i} = \bar{S}_i / \bar{e}_i. \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Et

$$\zeta_{N,i} = \frac{c_5 T_i \bar{e}_i}{\lambda_2 + \sigma_\lambda^2 T_i \bar{e}_i} \frac{1}{c_3 + c_4 T_i \bar{e}_i} \quad \text{et} \quad \zeta_{S,i} = \frac{c_4 T_i \bar{e}_i}{c_3 + c_4 T_i \bar{e}_i}, \quad (\text{III.2})$$

Avec $c_3 = \lambda_2 \sigma_\gamma^2 + \lambda_1 \gamma_2$, $c_4 = \sigma_\gamma^2 (\sigma_\lambda^2 + \lambda_1^2)$ et $c_5 = \lambda_1 \{\sigma_\lambda^2 \gamma_2 - \lambda_1 \lambda_2 \sigma_\gamma^2\}$. Avec cette notation, le meilleur estimateur linéaire sans biais pour $W = E[S_{i,T_{i+1}} | \alpha_i]$ Est

$$W^* = e_{i,T_{i+1}} [\lambda_1 \gamma_1 (1 - \zeta_{N,i} - \zeta_{S,i}) + \zeta_{N,i} \gamma_1 \bar{N}_{e,i} + \zeta_{S,i} \bar{S}_{e,i}]. \quad (\text{III.3})$$

Remarque : Nous interprétons W^* comme la prime de crédibilité pour les pertes globales. nous voyons que cette expression pour la prime de crédibilité est facile à calculer. En outre, Est une moyenne pondérée des données à partir du i -ième classe de risque et la moyenne global. Une caractéristique de l'équation (III.3), c'est qu'il y a deux facteurs, un pour la distribution en nombre revendications et un pour la distribution quantité revendications.

La proposition est un cas particulier du multiple secteurs d'activités qui seront donnés plus tard. Pour développer l'intuition supplémentaire pour la proposition, considérer un certain nombre de cas particuliers.

◇

Corollaire III.2. *Utilisez les hypothèses et les notations de la proposition précédente. En outre Supposons que les expositions et les nombres de sinistres sont identiquement égale à un, de sorte que $e_{itj} = N_{itj} = 1$ pour tout i, t, j . Nous avons $\zeta_{N,i} = 0$,*

$$\zeta_{S,i} = \frac{\sigma_\gamma^2 T_i}{\gamma_2 + \sigma_\gamma^2 T_i} \quad (\text{III.4})$$

Et

$$W^* = \gamma_1 (1 - \zeta_{S,i}) + \bar{S}_i \zeta_{S,i}. \quad (\text{III.5})$$

Corollaire III.3. *Utilisez les hypothèses et les notations de la proposition précédente. En outre n'assumons aucune hétérogénéité au sein de le montant des réclamations, de sorte que $\sigma_\gamma^2 = 0$. Dans ce cas, Nous avons $c_3 = \lambda_1\gamma_2$, $c_4 = 0$ et $c_5 = \lambda_1\sigma_\lambda^2\gamma_2$, donc $\zeta_{S,i} = 0$,*

$$\zeta_{N,i} = \frac{\lambda_1\sigma_\lambda^2\gamma_2 T_i \bar{e}_i}{\lambda_2 + \sigma_\lambda^2 T_i \bar{e}_i} \frac{1}{\lambda_1\gamma_2} = \frac{\sigma_\lambda^2 T_i \bar{e}_i}{\lambda_2 + \sigma_\lambda^2 T_i \bar{e}_i} \quad (\text{III.6})$$

Et

$$W^* = \gamma_1 e_{i,T_{i+1}} [\lambda_1(1 - \zeta_{N,i}) + \bar{N}_{e,i} \zeta_{N,i}].$$

Corollaire III.4. *Utilisez les hypothèses et les notations de la proposition précédente. En outre n'assumons aucune hétérogénéité au sein de nombre des réclamations, de telle sorte que $\sigma_\lambda^2 = 0$. Dans ce cas, nous avons $c_4 = \lambda_1^2\sigma_\gamma^2$, $c_5 = -\lambda_1^2\lambda_2\sigma_\gamma^2$, et*

$$\zeta_{S,i} = \frac{\lambda_1^2\sigma_\gamma^2 T_i \bar{e}_i}{c_3 + \lambda_1^2\sigma_\gamma^2 T_i \bar{e}_i}.$$

En outre,

$$\zeta_{N,i} = \frac{-\lambda_1^2\lambda_2\sigma_\gamma^2 T_i \bar{e}_i}{\lambda_2} \frac{1}{c_3 + \lambda_1^2\sigma_\gamma^2 T_i \bar{e}_i} = -\zeta_{S,i}.$$

Ainsi,

$$W^* = e_{i,T_{i+1}} [\lambda_1\gamma_1 + \zeta_{S,i}(\bar{S}_{e,i} - \gamma_1\bar{N}_{e,i})].$$

Corollaire III.5. *Utilisez les hypothèses et les notations de proposition précédente. Supposons, aucune hétérogénéité, de sorte que $\sigma_\gamma^2 = 0$ et $\sigma_\lambda^2 = 0$. Dans ce cas, nous avons*

$$W^* = E[S_{i,T_{i+1}}] = e_{i,T_{i+1}} \lambda_1\gamma_1.$$

Remarque : Les formes linéaires des estimateurs de crédibilité dans la proposition précédente et corollaries(III.2) et (III.3) permettent de voir facilement les cas dans lesquels "crédibilité totale" est atteinte. Par exemple, pour le cas de non hétérogénéité dans le montant des réclamations, d'après le corollaire(III.3) nous voyons que $\zeta_{N,i} \rightarrow 1$ comme étant (1) $\sigma_\lambda^2 \rightarrow \infty$, (2) $\lambda_2 \rightarrow 0$, (3) $T_i \bar{e}_i \rightarrow \infty$. D'après la proposition (III.1), on voit que $\zeta_{N,i} \rightarrow \infty$ et $\zeta_{S,i} \rightarrow 1$ si l'une (1) $\sigma_\lambda^2 \rightarrow \infty$ ou (2) $T_i \bar{e}_i \rightarrow \infty$ détient. Il est intéressant, d'après la proposition (III.1), si $\sigma_\gamma^2 \rightarrow \infty$, puis des calculs simples montrent que

$$\zeta_{N,i} \rightarrow \frac{-\lambda_1^2\lambda_2 T_i \bar{e}_i}{(\lambda_2 + \sigma_\lambda^2 T_i \bar{e}_i)(\lambda_2 + (\sigma_\lambda^2 + \lambda_1^2) T_i \bar{e}_i)}$$

Et

$$\zeta_{S,i} \rightarrow \frac{(\sigma_\lambda^2 + \lambda_1^2) T_i \bar{e}_i}{\lambda_2 + (\sigma_\lambda^2 + \lambda_1^2) T_i \bar{e}_i}.$$

Autrement dit, le facteur de crédibilité $\zeta_{N,i}$ devrait être négative pour les grandes valeurs de σ_γ^2 .

◇

Remarques complémentaires

L'estimateur de crédibilité traditionnelle pour les pertes globales données par Bühlmann (1971) est

$$W_B^* = e_{i,T_{i+1}} [\lambda_1\gamma_1(1 - \zeta_{B,i}) + \zeta_{B,i}\bar{S}_{e,i}]$$

où $\zeta_{B,i} = c_2 T_i \bar{e}_i / (c_1 + c_2 T_i \bar{e}_i)$, Dans la notation de le présent document. Toutefois, ce prédicteur utilise uniquement les informations dans l'ensemble des pertes S_i et pas dans le nombre N_i .

III.4 Multiples secteurs d'activité

Cette section fournit une extension multivariée de la section précédente[10]. Les idées sont les mêmes, mais avec développement de la prime de crédibilité optimale comme une combinaison pondérée des moyens inconditionnels et les moyennes de l'échantillon. Ici, les poids optimaux s'avèrent être des matrices. Ainsi, nous allons seulement être capable d'analyser l'expérience sur un secteur-par-secteur selon la méthode linéaire, essentiellement en raison de la covariance des branches d'activité. En raison de la nature multidimensionnelle du problème, cette section utilise la langue d'algèbre matricielle, l'avantage est que nous pouvons préciser la formule optimale dans différentes positions. En outre, ces formules peuvent être directement programmées à l'aide n'importe quel langage de programmation matricielle fiable.

III.4.1 Hypothèses

Pour plusieurs secteurs d'activité, nous utilisons $N_{ij} = (N_{i1j}, \dots, N_{i,T_i,j})$, $S_{ij} = (S_{i1j}, \dots, S_{i,T_i,j})$, $y_{ij} = (N_{ij}, S_{ij})$, $y = (y_{i1}, \dots, y_{iJ})$, et $y = (y_1, \dots, y_n)$. Pour les expositions, nous utilisons $e_{ij} = (e_{i1j}, \dots, e_{i,T_i,j})$ et E_{ij} , $T_i \times T_i$ une matrice diagonale avec e_{irj} dans la r -ième position diagonale.

Pour les premiers moments, nous avons

$$E[y_{ij}] = \begin{pmatrix} E[N_{ij}] \\ E[S_{ij}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1j} e_{ij} \\ \lambda_{1j} \gamma_{1j} e_{ij} \end{pmatrix}.$$

Pour les moments seconds, la matrice $V_i = Var[y_i]$ à $2JT_i \times 2JT_i$

$$V_i = \begin{pmatrix} Var[y_{i1}] & \dots & Cov(\gamma_{i1}, \gamma_{iJ}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\gamma_{iJ}, \gamma_{i1}) & \dots & Var[y_{iJ}] \end{pmatrix}.$$

Pour covariance entre les secteurs d'activité, nous avons besoin

$$Cov(\gamma_{ij}, \gamma_{ik}) = \begin{pmatrix} Cov(N_{ij}, N_{ik}) & Cov(N_{ij}, S_{ik}) \\ Cov(S_{ij}, N_{ik}) & Cov(S_{ij}, S_{ik}) \end{pmatrix}.$$

Pour analyser le processus de nombre de réclamations, nous avons

$$\begin{aligned} Cov[N_{irj}, N_{isk}] &= E[Cov[N_{irj}, N_{isk} | \alpha_i]] + Cov[E[N_{irj} | \alpha_i], E[N_{isk} | \alpha_i]] \\ &= I(r = s, j = k) e_{irk} E[\lambda_{2,ik}] + e_{irj} e_{isk} Cov[\lambda_{1,ij}, \lambda_{2,ik}] \\ &= I(r = s, j = k) e_{irk} \lambda_{2k} + e_{irj} e_{isk} \sigma_{\lambda,jk}. \end{aligned}$$

Ainsi ,

$$Cov[N_{ij}, N_{ik}] = I(j = k) \lambda_{2j} E_{ik} + \sigma_{\lambda,jk} e_{ij} e'_{ik}.$$

De même,

$$\begin{aligned} Cov[N_{irj}, S_{isk}] &= E[Cov[N_{irj}, S_{isk} | \alpha_i]] + Cov[E[N_{irj} | \alpha_i], E[S_{isk} | \alpha_i]] \\ &= \gamma_{1k} E[Cov[N_{irj}, N_{isk} | \alpha_i]] + \gamma_{1k} Cov[E[N_{irj} | \alpha_i], E[N_{isk} | \alpha_i]] \\ &= \gamma_{1k} Cov[N_{irj}, N_{isk}]. \end{aligned}$$

Cela donne

$$Cov[N_{ij}, S_{ik}] = \gamma_{1k} Cov[N_{ij}, N_{ik}].$$

En outre,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[S_{irj}, S_{isk}] &= E[\text{Cov}[S_{irj}, S_{isk} | \alpha_i]] + \text{Cov}[E[S_{irj} | \alpha_i], E[S_{isk} | \alpha_i]] \\ &= I(r = s, j = k)E[\text{Var}[S_{irj} | \alpha_i]] + \text{Cov}[E[N_{irj} | \alpha_i]E[C_{irj} | \alpha_i], E[N_{isk} | \alpha_i]E[C_{isk} | \alpha_i]] \\ &= e_{irj}I(r = s, j = k)c_{1i} + e_{irj}e_{isk}c_{2jk}, \end{aligned}$$

Avec $c_{1j} = \lambda_{1,j}\gamma_{2,j} + \lambda_{2,j}E[\gamma_{1,ij}^2]$ et $c_{2jk} = \text{Cov}[\lambda_{1,ij}\gamma_{1,ij}, \lambda_{1,ik}\gamma_{1,ik}]$.

Cela donne

$$\text{Cov}[S_{ij}, S_{ik}] = I(j = k)c_{1j}E_{ij} + c_{2jk}e_{ij}e'_{ik}$$

Pour exprimer ces relations avec une manière plus compacte, nous également utiliser le produit direct (Kronecker) :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[y_{ij}, y_{ik}] &= I(j = k) \begin{pmatrix} \lambda_{2,j} & \gamma_{1,j}\lambda_{2,j} \\ \gamma_{1,j}\lambda_{2,j} & c_{1,j} \end{pmatrix} \otimes E_{ij} + \begin{pmatrix} \sigma_{\lambda,jk} & \gamma_{1,k}\sigma_{\lambda,jk} \\ \gamma_{1,j}\sigma_{\lambda,jk} & c_{2,jk} \end{pmatrix} \otimes e_{ij}e'_{ik} \\ &= I(j = k)C_{1,j} \otimes E_{ij} + C_{2,j} \otimes e_{ij}e'_{ik}. \end{aligned}$$

Pour donner une expression compacte pour V

Définir les

$$\begin{aligned} C_1 &= \text{blockdiag}(C_{1,1}, \dots, C_{1,J}), C_2 = (C_{2,jk})_{jk}, \\ D_{1,i} &= \text{blockdiag}(C_{1,1} \otimes E_{i1}, \dots, C_{1,J} \otimes E_{iJ}), \end{aligned}$$

Et

$$D_{2,i} = \begin{pmatrix} I_2 \otimes e_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_2 \otimes e_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & I_2 \otimes e_{iJ} \end{pmatrix}.$$

Avec cette notation, nous avons

$$V_i = D_{1,i} + D_{2,i}C_2D'_{2,i}.$$

III.4.2 Prédiction de la crédibilité

Considérons maintenant un "faisceau de garanties" à prévoir la combinaison linéaire $W = E[a_1S_{i,T_{i+1,1}} + \dots + a_JS_{i,T_{i+1,J}} | \alpha_i]$. Ici, les poids a_i sont supposés des constantes connues. La forme générale pour le meilleur prédicteur linéaire, W^* est donné par l'équation (III.3.2). Pour la k -ième couverture, nous souhaitons à prédire $W_k = E[a_1S_{i,T_{i+1,k}} | \alpha_i]$. Le meilleur prédicteur linéaire de cette variable aléatoire est

$$W_k^* = E[S_{i,T_{i+1,k}}] + \text{Cov}[W_k, y]V^{-1}[y - E[y]].$$

Par la linéarité de la covariance, nous avons $W^* = \sum_{j=1}^J a_j W_j^*$. Ainsi, pour déterminer la prime optimale pour un ensemble de garanties W nous avons besoin de se concentrer uniquement sur la tarification de chaque couverture individuelle W_k .

Pour énoncer la proposition principale de cette section, d'abord définir le vecteur résiduel

$$R_{i,j} = \begin{pmatrix} \bar{N}_{e,ij} - \lambda_{1j} \\ \bar{S}_{e,ij} - \lambda_{1j}\gamma_{1j} \end{pmatrix}$$

Et $R_i = (R_{i,1}, \dots, R_{i,J})'$ aussi bien que la matrice basée sur les expositions moyennes

$$\bar{E}_{2,i} = \begin{pmatrix} I_2 \bar{e}_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_2 \bar{e}_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & I_2 \bar{e}_{iJ} \end{pmatrix}.$$

Proposition III.6. *Sous les hypothèses précédentes, on définir*

$$c_{4,j,k} = \begin{pmatrix} \gamma_{1k} \sigma_{\lambda,kj} \\ c_{2,kj} \end{pmatrix}$$

Et $2J \times 1$ vecteur ligne $c_{4,k} = (c'_{4,1,k}, \dots, c'_{4,J,k})$. Avec cette notation, le meilleur prédicteur linéaire sans biais pour $W_k = E[a_1 S_{i,T_{i+1},k} | \alpha_i]$ est

$$W_k^* = e_{i,T_{i+1},k} (\lambda_{1k} \gamma_{1k} + c'_{4,k} (T_i^{-1} \bar{E}_{2,i} C_1 + C_2)^{-1} R_i).$$

Remarque : Proposition (III.6) généralise la proposition (III.1) au cas de plusieurs secteurs d'activité. La covariance entre les secteurs d'activité est déterminée par le vecteur $c_{4,k}$, définies dans la proposition (III.6). La prime de crédibilité pour la k -ème secteur d'activité, W_k^* est une combinaison linéaire de l'espérance globale $\lambda_{1k} \gamma_{1k}$, le vecteur des résidus pour le secteur k d'activité, $R_{i,k}$, et les résidus pour les autres secteurs d'activité. Pour le cas de la crédibilité totale, nous pouvons penser à la somme des expositions venir grande. Plus formellement, nous sommes intéressés à une formule de tarification où $T_i^{-1} \bar{E}_{2,i} \rightarrow 0$ (élément par élément). Pour gérer cela, définir le prédicteur de la crédibilité totale

$$W_k^* = e_{i,T_{i+1},k} (\lambda_{1k} \gamma_{1k} + c'_{4,k} c'_{4,k} C_2^{-1} R_i)$$

À l'inverse, on peut penser à la situation où $T_i^{-1} \bar{E}_{2,i} \rightarrow 0$.

Dans ce cas, nous définissons le prédicteur

$$W_k^* = e_{i,T_{i+1},k} \lambda_{1k} \gamma_{1k}$$

◇

Pour obtenir des nouvelles informations sur la proposition (III.6), prenons le cas particulier des secteurs d'activité conditionnellement indépendants.

Corollaire III.7. *Sous les hypothèses de la proposition (III.6). Supposons en outre que le nombre des réclamations et les montants des réclamations sont conditionnellement indépendants, de sorte que, $\sigma_{\lambda,jk} = c_{2jk} = 0$ pour $j \neq k$.*

On définit

$$\begin{aligned} \zeta_{N,i,k} &= \frac{c_{5,k} T_i \bar{e}_{ik}}{\lambda_{2k} + \sigma_{\lambda k}^2 T_i \bar{e}_{ik}} \frac{1}{c_{3k} + c_4 T_i \bar{e}_{ik}} \\ \zeta_{S,i,k} &= \frac{c_4 T_i \bar{e}_{ik}}{c_{3k} + c_4 T_i \bar{e}_{ik}}, \end{aligned}$$

Avec $c_{3k} = \lambda_{2k} \sigma_{\gamma k}^2 + \lambda_{1k} \gamma_{2k}$, $c_{4k} = \sigma_{\gamma k}^2 (\sigma_{\lambda k}^2 + \lambda_{1k}^2)$ et $c_{5k} = \lambda_{1k} \{ \sigma_{\lambda k}^2 \gamma_{2k} - \lambda_{1k} \lambda_{2k} \sigma_{\gamma k}^2 \}$. Aussi $\zeta_{i,k} = (\gamma_{1k} \zeta_{N,i,k} \zeta_{S,i,k})$.

Avec cette notation, nous avons

$$\begin{aligned} W_k^* &= e_{i,T_{i+1},k} [\lambda_{1k} \gamma_{1k} + \zeta'_{i,k} R_{i,k}] \\ &= e_{i,T_{i+1},k} [\lambda_{1k} \gamma_{1k} (1 - \zeta_{N,i,k} - \zeta_{S,i,k}) + \zeta_{N,i,k} \gamma_{1k} \bar{N}_{e,i,k} + \zeta_{S,i,k} \bar{S}_{e,i,k}]. \end{aligned}$$

Remarque : Corollaire (III.7) est une généralisation de la proposition (III.1). Avec le corollaire (III.7), on voit immédiatement que la proposition (III.1) détient avec le choix $k = 1$.

◇

Pour les preuves des propositions et les corollaires voir (Frees)

III.5 Autour de la crédibilité multivariée : Propriétés de la matrice de covariance.

III.5.1 Introduction

Selon Rodermund (1989), la notion de crédibilité est " la plus importante et la contribution durable des sciences actuarielles". En ce sens, la théorie de la crédibilité est utilisée pour déterminer les sinistres prévus d'un risque individuel lorsque ces risques ne sont pas homogènes, étant donné que le risque individuel appartient à un collectif hétérogène. Pour les introductions récentes détaillées à la théorie de la crédibilité, voir Norberg (2004), Bühlmann et Gisler (2005).

La formule de crédibilité de Frees (2003) considère que les données à la fois le nombre et montant des sinistres en processus. Dans ce chapitre, nous allons ajouter quelques propriétés de la matrice de covariance, qui a un rôle important théoriquement et pratiquement. plus quelques propriétés sur les matrices qui sont utilisées dans le travail de Frees(2003).

D'abord, nous parlons de la matrice de variance-covariance V , où est définie en tant que :

$$V_i = Var Y_i = \begin{pmatrix} Var(N_i) & Cov(N_i, S_i) \\ Cov(N_i, S_i) & Var(S_i) \end{pmatrix}$$

(voir équation (4) dans [3] . Dans le travail de Frees cette matrice sera inversée. Mais cette inversion n'est pas correcte ou valide si la condition de l'inversion n'est pas vérifiée. Donc, c'est suffisant que la matrice V est définie positive. ce qui a conduit à ce chapitre.

III.5.2 l'irréductibilité d'une suite de variables aléatoires

Définition III.8. Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $L^2 = L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ l'espace de Hilbert de variables aleatoires carrées intégrables (voir [18], [36]). une séquence des variables aléatoires $X = (X_1, \dots, X_n)$ est appelé (linéaire) **réductible** par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ s'il existe des coefficients réels α_0 et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ telque :

$$\mathbb{Q} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i = \alpha_0 \right) = 1. \quad (\text{III.7})$$

Dans le contexte de $\mathbb{Q}$ -variables aléatoires de carré intégrable, l'irréductibilité d'une suite de variables aléatoires peut être caractérisée comme suit :

Proposition III.9. La suite $X = (X_1, \dots, X_n)$ de $\mathbb{Q}$ variables aléatoires carré intégrables sont irréductibles si et seulement si la matrice de covariance $\mathbb{Q}$

$$cov_{\mathbb{Q}}(X) := \left(cov_{\mathbb{Q}}(X_i, X_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (\text{III.8})$$

est définie positive.

Preuve : Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \in (L^2(\mathbb{Q}))^n$.

La matrice $cov_{\mathbb{Q}}(X)$ ne pas être définie positive est équivalente à avoir 0 comme valeur spectrale. Ce dernier est équivalent à $\alpha^{tr} cov_{\mathbb{Q}}(X) \alpha = var_{\mathbb{Q}}(\sum_i \alpha_i X_i) = 0$ pour certains $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$. Mais la disparition de l' $\mathbb{Q}$ -variance est à nouveau équivalent à $\sum_i \alpha_i X_i = E_{\mathbb{Q}}(\sum_i \alpha_i X_i) = \alpha_0$, i.e. la réductibilité de X .

□

III.5.3 Modification de modèle

La notion d'inversion des variables aléatoires dans Frees (2003), les hypothèses sont ajoutées comme suit [8] :

- Les données disponibles sont désagrégées selon la classe de risque i (ville), au cours du temps t (année) et par secteur d'activité j .
- Pour chaque observation itj , les réponses se composent du montant de sinistre S_{itj} au nombre du sinistre N_{itj} et nous avons l'exposition e_{itj} .
- Les montants des sinistres suivent un modèle de perte totale, de sorte que :

$$S_{itj} = \sum_{k=1}^{N_{itj}} C_{itj,k}.$$

Ici, $\{C_{itj,k}, k = 1, 2, \dots\}$ sont des sinistres résultant de pertes individuelles de la même distribution.

- Conditionnellement à α_i , les sinistres S_{itj} sont indépendants, où α_i est une variable de structure.
- Conditionnelle à α_i , les nombres des sinistres N_{itj} sont indépendants avec les montants des sinistres $\{C_{itj,k}, k = 1, 2, \dots\}$.
- Les variables aléatoires $\{N_{itj}, S_{itj}, t = 1, \dots, T_i\}$ sont indépendantes entre les classes de risque.

Nous allons travailler sur un seul secteur d'activité. Nous faisons l'hypothèse suivante :
Hypothèses $\tau = 1, 2$. De plus, sur un ensemble non négligeable $(S_{i,s}, N_{i,s})$ est supposé être $\mathbb{P}(\cdot|\Theta_i)$ -irréductible :

$$\mathbb{P}_\Theta \{ \omega | (S_{i,s}, N_{i,s}) \text{ est } \mathbb{P}(\cdot|\Theta_i(\omega))\text{-irréductible} \} > 0. \quad (\text{III.9})$$

Nous utilisons les notations suivantes :

$$y'_i = (N'_i, S'_i)', \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n)'.$$

Avec $\gamma_1 = E[C|\alpha]$, $\lambda_1 = E[N|\alpha]$.

Et

$$E(y_i) = \begin{pmatrix} E(N_i) \\ E(S_i) \end{pmatrix}.$$

Pour le deuxième moment, nous avons besoin de la matrice $V_i = \text{Var} y_i$ la matrice est donnée par :

$$V = \text{Var}(N_i, S_i) = \begin{pmatrix} \text{Var}(\overline{N_i}) & \text{Cov}(\overline{N_i}, \overline{S_i}) \\ \text{Cov}(\overline{N_i}, \overline{S_i}) & \text{Var}(\overline{S_i}) \end{pmatrix}$$

Le meilleur prédicteur linéaire (en y) non biaisé de W où W est une variable aléatoire :

$$W^* = E(W) + \text{Cov}(W, y) V^{-1} [y - E(y)].$$

Sous l'hypothèse d'irréductibilité, la matrice de covariance V est définie positive, et inversible (voir [28], [20]). Aussi, nous pouvons facilement démontrer que le dénominateur de la crédibilité de l'estimateur de rapport de Frees (2003) est différent de zéro.

Par [4], avec un seul contrat d'assurance et pas de poids (ou volumes), la formule générale de la crédibilité dans [3] est :

$$\alpha \overline{S} + \beta \overline{N} \gamma_1 + \eta \gamma_1 \lambda_1$$

Avec

$$\begin{aligned}\alpha &:= \frac{\text{Cov}(E(S|\Theta), \bar{S}) - \text{Cov}(E(S|\Theta), \bar{N})\gamma_1}{\text{Var}(\bar{S}) - \text{Var}(\bar{N})(\gamma_1)^2} \\ \beta &:= \frac{\text{Cov}(E(S|\Theta), \bar{N})}{\text{Var}(\bar{N})\gamma_1} - \alpha \\ \eta &:= 1 - \alpha - \beta\end{aligned}$$

Un premier résultat des hypothèses retenues est la proposition suivante :

Proposition III.10. *Sous les hypothèses du modèle, nous avons*

$$\text{Var}(\bar{S}) - \text{Var}(\bar{N})(\gamma_1)^2 > 0. \quad (\text{III.10})$$

Preuve : Pour montrer (14), nous savons que la suite des variables aléatoires (S, N) est $\mathbb{P}$ -irréductible, est donc le couple $(\bar{S}, \bar{N})$. Proposition 2 nous dit que leur matrice de covariance est définie positive :

$$\text{cov}_{\text{Pr}}(\bar{S}, \bar{N}) = \begin{pmatrix} \text{Var}(\bar{N}) & \text{Cov}(\bar{N}, \bar{S}) \\ \text{Cov}(\bar{N}, \bar{S}) & \text{Var}(\bar{S}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Var}(\bar{N}) & \text{Var}(\bar{N})\gamma_1 \\ \text{Var}(\bar{N})\gamma_1 & \text{Var}(\bar{S}) \end{pmatrix}.$$

Cela implique que le déterminant de $\text{Var}(\bar{S}) - \text{Var}(\bar{N})(\gamma_1)^2$ de la dernière matrice est strictement positive. □

Remarque :

Si nous regardons les matrices $(T_i^{-1}\bar{E}_{2,i}C_2 + C_2)$ dans l'équation (19) et $(T_i^{-1}\bar{E}_{3,i}\Sigma_2 + \Sigma_\lambda)$ dans l'équation(20) et $C_2, \bar{E}_{2,i}$ dans la page (24) et $\bar{E}_{3,i}$ définis dans la proposition (3) sans certaines conditions pour l'inversé, sont tous inverser , il est donc nécessaire :

- $\det(T_i^{-1}\bar{E}_{2,i}C_2 + C_2) \neq 0$;
- $\det(T_i^{-1}\bar{E}_{3,i}\Sigma_2 + \Sigma_\lambda) \neq 0$;
- $\det(C_2) \neq 0$;
- $\det(E_{2,i}) \neq 0$;
- $\det(E_{3,i}) \neq 0$.

Où $\det(X)$ signifié le déterminant de la matrice X . ◇

III.5.4 Conclusion

Cette section décrit la matrice variance-covariance menant aux formules de crédibilité de Frees (2003)[1], où l'état de l'irréductibilité des variables (montant de et nombre des sinistres) peuvent être calculés. En outre, les formules de crédibilité de Frees (2003) peuvent être dérivées.

Chapitre IV

La crédibilité bivariate

IV.1 Introduction

la théorie de la crédibilité est une méthode de tarification actuarielle. En raison de cette théorie, l'assureur peut calculer la prime d'un portefeuille de contrats. la théorie de la crédibilité combine les données disponibles sur le portefeuille et chaque individu (le contrat). Plusieurs modèles de crédibilité ont été établis. Pour cela, nous proposons dans ce chapitre nouvelles primes de crédibilité du contrat d'assurance. Dans de nombreux cas, nous constatons que dans l'assurance, il existe une relation entre le nombre et le montant des sinistres d'un contrat pour une seule période (voir[11]). Nous écrivons de nouveaux estimateurs de prime individuelle.

Le problème indispensable de la crédibilité linéaire est de déterminer l'estimateur de la prime individuelle pour un contrat ou d'un portefeuille de contrats d'assurance. Comme l'estimateur de crédibilité est linéaire par rapport aux les observations du portefeuille. Et pour déterminer une forme précise de l'estimateur de crédibilité, nous devons résoudre le problème de minimisation :

$$\Psi = \inf_{\zeta^i, \xi^i} E \left[\left(\mu^{(1)}(\Theta) - \widehat{\mu}^{(1)}(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}) \right)^2 + \left(\mu^{(2)}(\Theta) - \widehat{\mu}^{(2)}(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \right)^2 \right]$$

Avec $i = 1, 2$ et $\mu^{(1)}(\Theta)$, $\mu^{(2)}(\Theta)$ sont respectivement l'espérance conditionnelle du montant des sinistres, et l'espérance conditionnelle de nombre des sinistres. Ici, $\widehat{\mu}^{(1)}(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})$ et $\widehat{\mu}^{(2)}(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ sont des formes linéaires qui seront précisées dans les différents modèles.

IV.2 Préliminaires

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $L^2 = L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espace de Hilbert de variables aléatoires de carré intégrable.

La tâche de la théorie de la crédibilité est de fournir des décisions ou des estimateurs pour les futurs événements incertains. certains événements où déterministes ne doivent pas nécessairement être estimés ; ils peuvent simplement être calculés. Il est donc raisonnable d'éliminer les dépendances déterministes au sein des structures aléatoires considérées. D'autre part, la théorie de la crédibilité est limitée à trouver des estimateurs linéaires à l'aide de la structure de l'espace de Hilbert de L^2 , en particulier son orthogonalité. Ainsi, il est suffisant pour éliminer dépendances **linéaires** déterministes dans la configuration de la crédibilité. Cela conduit à la définition suivante :

Définition IV.1. Une suite de variables aléatoires $X = (X_1, \dots, X_n)$ est appelé (linéaire) **réductible** par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ s'il en existe des coefficients réels α_0

et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ tel que :

$$\mathbb{Q} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i = \alpha_0 \right) = 1. \quad (\text{IV.1})$$

Dans le contexte de variables aléatoires $\mathbb{Q}$ -carré-intégrables l'irréductibilité d'une séquence de variables aléatoires peut être caractérisée comme suit :

Proposition IV.2. *Une suite $X = (X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires $(\mathbb{Q})$ -carré-intégrables sont irréductibles si et seulement si leur matrice de covariance $\mathbb{Q}$*

$$\mathbf{cov}_{\mathbb{Q}}(X) := \left(\mathbf{cov}_{\mathbb{Q}}(X_i, X_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad (\text{IV.2})$$

est définie positive.

Preuve : Soit $X = (X_1, \dots, X_n) \in (L^2(\mathbb{Q}))^n$.

La matrice $\mathbf{cov}_{\mathbb{Q}}(X)$ ne pas être définie positive est équivalent à avoir 0 comme valeur spectrale. Ce dernier est équivalente à $\alpha^{tr} \mathbf{cov}_{\mathbb{Q}}(X) \alpha = \mathbf{var}_{\mathbb{Q}}(\sum_i \alpha_i X_i) = 0$ pour certains $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$. Mais la disparition de la $\mathbb{Q}$ -variance est à nouveau l'équivalent de $\sum_i \alpha_i X_i = E_{\mathbb{Q}}(\sum_i \alpha_i X_i) = \alpha_0$, à savoir la réductibilité de X . □

IV.3 Modèle bivalent de Bühlmann

Nous considérons un portefeuille homogène de l'assurance consiste à $n \geq 2$ contrats. Chaque contract i a été activé dans les dernières périodes t au moins pour une période. Par $T(i) \subseteq \{1, \dots, t\}$ on note l'ensemble des périodes passées activées du contrat i , en supposant que sa cardinalité $t_i := |T(i)| \geq 2$. Nous avons fixé $t_0 := \sum_{1 \leq i \leq n} t_i$. Afin d'être en mesure d'inclure la future période $t + 1$, nous avons mis en $T^+(i) := T(i) \cup \{t + 1\}$. Maintenant, nous avons pour chaque contrat i l'ensemble des paires de variables aléatoires :

$$(Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}) = (Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)})_{s \in T^+(i)}, \quad (\text{IV.3})$$

$i = 1, \dots, n$. Par exemple, $Z_{i,s}^{(1)}$ et $Z_{i,s}^{(2)}$ peut être interprété respectivement le montant et nombre de sinistre de contrat i dans la période s . Les variables aléatoires de modèle sont notées par

$$(Z^{(1)}, Z^{(2)}) = (Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)})_{i=1, \dots, n}. \quad (\text{IV.4})$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- (B1) Les variables aléatoires $(\Theta_i)_{i=1, \dots, n}$ ont la distribution identique P_{Θ} .
- (B2) Les familles de variables aléatoires $(\Theta_i, Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)})$, $i = 1, \dots, n$, sont mutuellement non corrélées avec $Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)} \in L^2$ pour tous $s \in T^+(i)$, $i = 1, \dots, n$. L'ensemble des variables aléatoires $\{Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)} | s \in T^+(i), i = 1, \dots, n\}$ est supposé être P -irréductible.
- (B3) Pour fixe i et conditionné par Θ_i , les paires de variables aléatoires $(Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)})_{s \in T^+(i)}$ sont mutuellement non corrélés avec les premiers et second moments conditionnels ne dépendant que de Θ_i :

$$E[Z_{i,s}^{(\tau)} | \Theta_i] := \mu^{(\tau)}(\Theta_i), \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{Var}[Z_{i,s}^{(\tau)} | \Theta_i] := \alpha^{(\tau)}(\Theta_i), \quad (\text{IV.6})$$

$$\mathbf{cov}(Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)} | \Theta_i) := \kappa(\Theta_i), \quad (\text{IV.7})$$

$\tau = 1, 2$. En outre, sur un ensemble non négligeable de la paire $(Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)})$ est supposé être $P(\cdot | \Theta_i)$ - irréductible :

$$P_{\Theta} \{ \omega | (Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)}) \text{ is } P(\cdot | \Theta_i(\omega))\text{-irréductible} \} > 0. \quad (\text{IV.8})$$

Pour des moments non conditionnels, nous utilisons les notations suivantes, $\tau = 1, 2$:

$$E[\mu^{(\tau)}(\Theta)] := M^{(\tau)} \quad (\text{IV.9})$$

$$E[\alpha^{(\tau)}(\Theta)] := A^{(\tau)} \quad (\text{IV.10})$$

$$\text{Var}[\mu^{(\tau)}(\Theta)] := B^{(\tau)} \quad (\text{IV.11})$$

$$E[\kappa(\Theta)] := K \quad (\text{IV.12})$$

$$\mathbf{cov}[\mu^{(1)}(\Theta), \mu^{(2)}(\Theta)] := L \quad (\text{IV.13})$$

Un premier résultat à partir des hypothèses est la suivante :

Proposition IV.3. *Sous les hypothèses (B1) - (B3) nous avons*

$$D_{i,1} := (t_i B^{(1)} + A^{(1)}) (t_i B^{(2)} + A^{(2)}) - (t_i L + K)^2 > 0 \quad \text{et} \quad (\text{IV.14})$$

$$D_2 := A^{(1)} A^{(2)} - K^2 > 0. \quad (\text{IV.15})$$

Preuve : Pour montrer (IV.14), nous savons par hypothèse (B1) que la séquence de variables aléatoires $(Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)})$ est Pr -irréductible, et est donc $(\sum_{s \in T(i)} Z_{i,s}^{(1)}, \sum_{s \in T(i)} Z_{i,s}^{(2)})$. Proposition IV.2 nous dit que leur matrice de covariance est définie positive :

$$\mathbf{cov}_{\mathbb{P}} \left(\left(\sum_{s \in T(i)} Z_{i,s}^{(1)}, \sum_{s \in T(i)} Z_{i,s}^{(2)} \right) \right) = \begin{pmatrix} t_i B^{(1)} + A^{(1)} & t_i L + K \\ t_i L + K & t_i B^{(2)} + A^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Cela implique que le déterminant $D_{i,1} := (t_i B^{(1)} + A^{(1)}) (t_i B^{(2)} + A^{(2)}) - (t_i L + K)^2$ de la dernière matrice est strictement positif qui est la déclaration (IV.14). Pour l'inégalité (IV.15), l'hypothèse (B3) implique la Proposition IV.2 que sur un ensemble de $\mathbb{P}_{\Theta}$ -mesure positive, la covariance matrice par rapport à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot | \Theta_i)$ de la paire $(Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)})$ est définie positive :

$$\mathbf{cov}_{\mathbb{P}(\cdot | \Theta_i)} ((Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)})) = \begin{pmatrix} \alpha^{(1)}(\Theta_i) & \kappa(\Theta_i) \\ \kappa(\Theta_i) & \alpha^{(2)}(\Theta_i) \end{pmatrix}.$$

Cela implique que pour toute paire $(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ la variance conditionnelle

$\text{var}_{\mathbb{P}(\cdot | \Theta_i)} (\alpha_1 Z_{i,s}^{(1)} + \alpha_2 Z_{i,s}^{(2)}) \geq 0$ est strictement positive sur un ensemble $\mathbb{P}_{\Theta}$ -de mesure positive. Par conséquent aussi

$$E_{\Theta} [\text{var}_{\mathbb{P}(\cdot | \Theta_i)} (\alpha_1 Z_{i,s}^{(1)} + \alpha_2 Z_{i,s}^{(2)})] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(1)} & K \\ K & A^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} > 0$$

Cela montre que la matrice $\begin{pmatrix} A^{(1)} & K \\ K & A^{(2)} \end{pmatrix}$ est définie positive et par conséquent, son déterminant $D_2 = A^{(1)} A^{(2)} - K^2$ est strictement positive. □

Nous voulons trouver un estimateur de crédibilité linéaire du système bivariées $(Z_{i,t+1}^{(1)}, Z_{i,t+1}^{(2)})$. Par conséquent, il est supposé que ces estimateurs de $Z_{i,t+1}^{(\tau)}$, $\tau = 1, 2$, ont la forme

$$\hat{\mu}_i^{(\tau)}(Z^{(1)}, Z^{(2)}) = \zeta_{i,0}^{(\tau)} + \sum_{j=1}^n \sum_{s \in T(j)} (\zeta_{i,j,s}^{(\tau,\tau)} Z_{j,s}^{(\tau)} + \zeta_{i,j,s}^{(\tau,3-\tau)} Z_{j,s}^{(3-\tau)}) \quad (\text{IV.16})$$

avec des coefficients réels $\zeta_i^{(\tau)} = (\zeta_{i,0}^{(\tau)}, \zeta_{i,j,s}^{(\tau,\tau)}, \zeta_{i,j,s}^{(\tau,3-\tau)})$.

Théorème IV.4. *Sous les hypothèses (B1)–(B3) la solution optimale de problème de la crédibilité linéaire est :*

$$\hat{\mu}_i^{(\tau)*}(Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}) = (1 - \zeta_i^{(\tau, \tau)}) M^{(\tau)} + \frac{1}{t_i} \sum_{s \in T(i)} (\zeta_i^{(\tau, \tau)} Z_{i,s}^{(\tau)} + \zeta_i^{(\tau, 3-\tau)} (Z_{i,s}^{(3-\tau)} - M^{(3-\tau)})) \quad (\text{IV.17})$$

$\tau = 1, 2$, telque **coefficients de crédibilité** $\zeta_i^{(\tau, \tau)}, \zeta_i^{(\tau, 3-\tau)}$ sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \zeta_i^{(\tau, \tau)} &= \frac{t_i}{D_{i,1}} (B^{(\tau)}(t_i B^{(3-\tau)} + A^{(3-\tau)}) - L(t_i L + K)) \\ \zeta_i^{(\tau, 3-\tau)} &= \frac{t_i}{D_{i,1}} (A^{(\tau)} L - B^{(\tau)} K). \end{aligned}$$

Remarque : Contrairement à la formule de crédibilité standard, entendre les facteurs de crédibilité $\zeta_i^{(\tau, \tau)}, \zeta_i^{(\tau, 3-\tau)}$ ne sont pas nécessairement $[0, 1]$. ◇

Preuve : Le problème de crédibilité est :

$$\inf_{\zeta_i^{(1)}, \zeta_i^{(2)}} E \left[\sum_{\tau=1,2} \left(Z_{i,t+1}^{(\tau)} - \hat{\mu}_i^{(\tau)}(Z^{(1)}, Z^{(2)}) \right)^2 \right] = \sum_{\tau=1,2} \inf_{\zeta_i^{(\tau)}} E \left[\left(Z_{i,t+1}^{(\tau)} - \hat{\mu}_i^{(\tau)}(Z^{(1)}, Z^{(2)}) \right)^2 \right]$$

peut être séparé. Comme les conditions nécessaires d'optimalité, nous avons $i, j \leq n$ et $s \in T(j)$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \zeta_{i,0}^{(\tau)}} \Psi = E \left[Z_{i,t+1}^{(\tau)} - \zeta_{i,0}^{(\tau)} - \sum_{j=1}^n \sum_{s \in T(j)} (\zeta_{i,j,s}^{(\tau, \tau)} Z_{j,s}^{(\tau)} + \zeta_{i,j,s}^{(\tau, 3-\tau)} Z_{j,s}^{(3-\tau)}) \right] \quad (\text{IV.18})$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \zeta_{i,j,s}^{(\tau, \tau)}} \Psi = E \left[Z_{j,s}^{(\tau)} \left(Z_{i,t+1}^{(\tau)} - \zeta_{i,0}^{(\tau)} - \sum_{j' \leq n, s' \in T(j')} (\zeta_{i,j',s'}^{(\tau, \tau)} Z_{j',s'}^{(\tau)} + \zeta_{i,j',s'}^{(\tau, 3-\tau)} Z_{j',s'}^{(3-\tau)}) \right) \right] \quad (\text{IV.19})$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \zeta_{i,j,s}^{(\tau, 3-\tau)}} \Psi = E \left[Z_{j,s}^{(3-\tau)} \left(Z_{i,t+1}^{(\tau)} - \zeta_{i,0}^{(\tau)} - \sum_{j' \leq n, s' \in T(j')} (\zeta_{i,j',s'}^{(\tau, \tau)} Z_{j',s'}^{(\tau)} + \zeta_{i,j',s'}^{(\tau, 3-\tau)} Z_{j',s'}^{(3-\tau)}) \right) \right] \quad (\text{IV.20})$$

Il en découle que $\zeta_{i,0}^{(\tau)} = M^{(\tau)} - \sum_{j' \leq n, s' \in T(j')} (\zeta_{i,j',s'}^{(\tau, \tau)} M^{(\tau)} + \zeta_{i,j',s'}^{(\tau, 3-\tau)} M^{(3-\tau)})$. Remplacement $\zeta_{i,0}^{(\tau)}$ dans (IV.20) il se trouve que l'on peut passer à des moments centralisés. Les deux dernières lignes (IV.20) sont maintenant égaux à :

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{i,j} B^{(\tau)} - \sum_{j' \leq n, s' \in T(j')} \delta_{j,j'} (\zeta_{i,j',s'}^{(\tau, \tau)} (B^{(\tau)} + \delta_{s,s'} A^{(\tau)}) + \zeta_{i,j',s'}^{(\tau, 3-\tau)} (L + \delta_{s,s'} K)) \\ &= \delta_{i,j} B^{(\tau)} - \sum_{s' \in T(j)} (\zeta_{i,j,s'}^{(\tau, \tau)} (B^{(\tau)} + \delta_{s,s'} A^{(\tau)}) + \zeta_{i,j,s'}^{(\tau, 3-\tau)} (L + \delta_{s,s'} K)) \\ 0 &= \delta_{i,j} L - \sum_{j' \leq n, s' \in T(j')} \delta_{j,j'} (\zeta_{i,j',s'}^{(\tau, \tau)} (L + \delta_{s,s'} K) + \zeta_{i,j',s'}^{(\tau, 3-\tau)} (B^{(3-\tau)} + \delta_{s,s'} A^{(3-\tau)})) \\ &= \delta_{i,j} L - \sum_{s' \in T(j)} (\zeta_{i,j,s'}^{(\tau, \tau)} (L + \delta_{s,s'} K) + \zeta_{i,j,s'}^{(\tau, 3-\tau)} (B^{(3-\tau)} + \delta_{s,s'} A^{(3-\tau)})) \end{aligned}$$

Si $\zeta_{i,j}^{(\tau,\sigma)} := \sum_{s \in T(j)} \zeta_{i,j,s}^{(\tau,\sigma)}$, $\tau, \sigma = 1, 2$, la sommation sur $s \in T(j)$ donne :

$$\begin{aligned}\delta_{i,j} t_j B^{(\tau)} &= \zeta_{i,j}^{(\tau,\tau)} (t_j B^{(\tau)} + A^{(\tau)}) + \zeta_{i,j}^{(\tau,3-\tau)} (t_j L + K) \\ \delta_{i,j} t_j L &= \zeta_{i,j}^{(\tau,\tau)} (t_j L + K) + \zeta_{i,j}^{(\tau,3-\tau)} (t_j B^{(1-\tau)} + A^{(3-\tau)})\end{aligned}$$

Par (IV.14) le déterminant du système linéaire (IV.21) est positif tel que $0 = \zeta_{i,j}^{(\tau,\tau)} = \zeta_{i,j}^{(\tau,3-\tau)}$ pour $i \neq j$ et $\zeta_{i,i}^{(\tau,\tau)} =: \zeta_i^{(\tau,\tau)}$ et $\zeta_{i,i}^{(\tau,3-\tau)} =: \zeta_i^{(\tau,3-\tau)}$ comme indiqué dans (IV.18). Connaissance de $\zeta_{i,j}^{(\tau,\tau)}$ et $\zeta_{i,j}^{(\tau,3-\tau)}$, (IV.21) donne en outre

$$\begin{aligned}(\delta_{i,j} - \zeta_{i,j}^{(\tau,\tau)}) B^{(\tau)} - \zeta_{i,j}^{(\tau,3-\tau)} L &= \zeta_{i,j,s}^{(\tau,\tau)} A^{(\tau)} + \zeta_{i,j,s}^{(\tau,3-\tau)} K \\ (\delta_{i,j} - \zeta_{i,j}^{(\tau,\tau)}) L - \zeta_{i,j}^{(\tau,3-\tau)} B^{(3-\tau)} &= \zeta_{i,j,s}^{(\tau,\tau)} K + \zeta_{i,j,s}^{(\tau,3-\tau)} A^{(3-\tau)}\end{aligned}$$

et étant donné que le déterminant D_2 de système est positif par (IV.15), la solution unique doit être $\zeta_{i,j,s}^{(\tau,\tau)} = \zeta_{i,j}^{(\tau,\tau)} / t_j$ et $\zeta_{i,j,s}^{(\tau,3-\tau)} = \zeta_{i,j}^{(\tau,3-\tau)} / t_j$. □

Etant donné que dans les applications les paramètres apparaissant dans le théorème IV.4 ne sont pas connus, les estimateurs de moment standard suivants sont généralement utilisés.

Théorème IV.5. 1. Pour les paramètres $M^{(\tau)}$, $A^{(\tau)}$, K , et L , ($\tau = 1, 2$), il suit que les estimateurs suivants sont non biaisés :

$$\hat{M}^{(\tau)} := \frac{1}{t_0} \sum_{i \leq n, s \in T(i)} Z_{i,s}^{(\tau)}, \quad (\text{IV.21})$$

$$\hat{A}^{(\tau)} := \frac{1}{t_0 - n} \sum_{i \leq n, s \in T(i)} \left(Z_{i,s}^{(\tau)} - \overline{Z_i^{(\tau)}} \right)^2, \quad (\text{IV.22})$$

$$\hat{K} := \frac{1}{t_0 - n} \sum_{i \leq n, s \in T(i)} \left(Z_{i,s}^{(1)} - \overline{Z_i^{(1)}} \right) \left(Z_{i,s}^{(2)} - \overline{Z_i^{(2)}} \right), \quad (\text{IV.23})$$

$$\hat{L} := \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n \left(\overline{Z_i^{(1)}} - \overline{Z^{(1)}} \right) \left(\overline{Z_i^{(2)}} - \overline{Z^{(2)}} \right) - \frac{\hat{K}}{n} \sum_{i \leq n} 1/t_i \right]. \quad (\text{IV.24})$$

Avec $\overline{Z_i^{(\tau)}} := 1/t_i \sum_{s \in T(i)} Z_{i,s}^{(\tau)}$, $\overline{Z^{(\tau)}} = 1/n \sum_{1 \leq i \leq n} \overline{Z_i^{(\tau)}}$.

2. Pour les paramètres $B^{(\tau)}$, ($\tau = 1, 2$), seul l'opérateur de partie positive $[\cdot]^+$ empêche les estimateurs suivants d'être biaisés :

$$\hat{B}^{(\tau)} := \frac{1}{n-1} \left[\sum_{1 \leq i \leq n} \left(\overline{Z_i^{(\tau)}} - \overline{Z^{(\tau)}} \right)^2 - \frac{\hat{A}^{(\tau)}}{n} \sum_{i \leq n} 1/t_i \right]^+. \quad (\text{IV.25})$$

Preuve : Soit ($\tau = 1, 2$). De toute évidence, l'estimateur linéaire, $\hat{M}^{(\tau)}$ est biaisé. Que l'estimateur $\hat{A}^{(\tau)}$ ne soit pas biaisé résulte du fait que $E \left[\sum_{s \in T(i)} \left(Z_{i,s}^{(\tau)} - \overline{Z_i^{(\tau)}} \right)^2 \right] = (t_i - 1)A^{(\tau)}$. De même, $E \left[\sum_{s \in T(i)} \left(Z_{i,s}^{(1)} - \overline{Z_i^{(1)}} \right) \left(Z_{i,s}^{(2)} - \overline{Z_i^{(2)}} \right) \right] = (t_i - 1)K$ montre que $\hat{K}$ est un estimateur sans biais. De plus,

$$\begin{aligned}\sum_i E \left[\left(\overline{Z_i^{(1)}} - \overline{Z^{(1)}} \right) \left(\overline{Z_i^{(2)}} - \overline{Z^{(2)}} \right) \right] &= \frac{n-1}{n} \sum_i \frac{1}{t_i^2} \sum_{s, s' \in T(i)} \text{cov}(Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s'}^{(2)}) \\ &= (n-1) \left[L + \frac{K}{n} \sum_i 1/t_i \right]\end{aligned}$$

montre aussi que l'estimateur $\hat{L}$ est biaisé. Finalement,

$$E \left[\sum_i \left(\overline{Z_i^{(\tau)}} - \overline{Z^{(\tau)}} \right)^2 \right] = \frac{n-1}{n} \sum_i \frac{1}{t_i^2} \sum_{s, s' \in T(i)} \text{cov}(Z_{i,s}^{(\tau)}, Z_{i,s'}^{(\tau)}) = (n-1) \left[B^{(\tau)} + \frac{A^{(\tau)}}{n} \sum_i 1/t_i \right]$$

donne le résultat en (ii). □

IV.4 Modèle bivalent de Bühlmann-Straub

Quand on regarde attentivement les hypothèses du modèle précédent, nous notons que l'hypothèse :

$$\text{var}[Z_{i,s}^{(1)} | \Theta_i] := \alpha^{(1)}(\Theta_i) \quad \text{et} \quad \text{var}[Z_{i,s}^{(2)} | \Theta_i] := \alpha^{(2)}(\Theta_i)$$

nous savons que ces variances conditionnelles descendent avec le risque d'exposition i . Pour cela, le modèle Bühlmann-Straub généralise le modèle Bühlmann par l'introduction de poids. Nous considérons dans ce chapitre un portefeuille d'assurance homogène constitué $n \geq 2$ contrats. Chaque contrat i a été activé dans le dernier t périodes au moins pour une période. Par $T(i) \subseteq \{1, \dots, t\}$ on note l'ensemble des périodes passées activées du contrat i , en supposant que sa cardinalité $t_i := |T(i)| \geq 2$. Nous fixons $t_0 := \sum_{1 \leq i \leq n} t_i$. Afin d'être en mesure d'inclure la période future $t+1$, nous fixons $T^+(i) := T(i) \cup \{t+1\}$. donc, nous considérons les mêmes données de modèle passé et nous introduisons les poids : $\varphi_{i,s}^{(\tau)}$ for $Z_{i,s}^{(\tau)}$ pour tous $s \in T^+(i)$, $i = 1, \dots, n$. Maintenant, nous avons pour chaque contrat i l'ensemble des couples de variables aléatoires :

$$(Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}) = (Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)})_{s \in T^+(i)}, \quad (\text{IV.26})$$

$i = 1, \dots, n$. Par exemple, $Z_{i,s}^{(1)}$ et $Z_{i,s}^{(2)}$ peut être interprété comme respectivement le montant et le nombre des revendications du contrat i dans la période s . Les variables aléatoires de l'ensemble du modèle sont désignées par

$$(Z^{(1)}, Z^{(2)}) = (Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)})_{i=1, \dots, n}. \quad (\text{IV.27})$$

Nous faisons les hypothèses de modèles suivants :

(BS1) Les variables de structure aléatoires $(\Theta_i)_{i=1, \dots, n}$ à une distribution identique Pr_{Θ} .

(BS2) Les familles de variables aléatoires $(\Theta_i, Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)})$, $i = 1, \dots, n$, sont mutuellement non corrélées avec $Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)} \in L^2$ pour tous $s \in T^+(i)$, $i = 1, \dots, n$. L'ensemble des variables aléatoires $\{Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)} | s \in T^+(i), i = 1, \dots, n\}$ est supposée Pr -irréductible.

(BS3) Pour i fixé et conditionné par Θ_i , les couples de variables aléatoires $(Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)})_{s \in T^+(i)}$ sont mutuellement non corrélés avec les premiers et second moments conditionnels dépendant uniquement Θ_i :

$$E[Z_{i,s}^{(\tau)} | \Theta_i] := \mu^{(\tau)}(\Theta_i), \quad (\text{IV.28})$$

$$\text{var}[Z_{i,s}^{(\tau)} | \Theta_i] := \frac{\alpha^{(\tau)}(\Theta_i)}{\varphi_{i,s}^{(\tau)}}, \quad (\text{IV.29})$$

$$\text{cov}(Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)} | \Theta_i) := \kappa(\Theta_i), \quad (\text{IV.30})$$

$\tau = 1, 2$. En outre, sur un ensemble non négligeable de la paire $(Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)})$ est supposée $\mathbb{P}(\cdot | \Theta_i)$ -irréductible :

$$\mathbb{P}_\Theta \{ \omega \mid (Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)}) \text{ is } \Pr \mathbb{P}(\cdot | \Theta_i(\omega))\text{-irréductible} \} > 0. \quad (\text{IV.31})$$

Pour des moments non conditionnels, nous utilisons la même notation de la section précédente IV.13. Un premier résultat à partir des hypothèses est la suivante :

Proposition IV.6. *Selon les hypothèses du modèle (BS1) - (BS3) nous avons pour chaque i :*

$$D_{i,1} := \begin{pmatrix} B^{(1)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(1)} \otimes \Delta_i^{(1)} & L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) \\ L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) & B^{(2)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(2)} \otimes \Delta_i^{(2)} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

Est une matrice inversible

$$D_2 := \frac{A^{(1)}}{\varphi_{i,s}^{(1)}} \frac{A^{(2)}}{\varphi_{i,s}^{(2)}} - K^2 > 0 \forall s. \quad (\text{IV.33})$$

Où $E_{t_i \times t_i}$ est la matrice $t_i \times t_i$ où toutes les composantes égales à 1, et $(\Delta_i^{(\tau)} = \text{diag}(\frac{1}{\varphi_{i,s}^{(\tau)}}))$ est une matrice diagonale, $\tau = 1, 2$ et $s = 1, \dots, t_i$.

Preuve : Pour monter (IV.32), nous savons, par hypothèse, (BS1) que la séquence de variables aléatoires $(Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)})$ est $\mathbb{P}$ -irréductible, et est donc le vecteur de paire

$(\sum_{s \in T(i)} Z_{i,s}^{(1)}, \sum_{s \in T(i)} Z_{i,s}^{(2)})$. Proposition IV.2 nous dit que leur matrice de covariance est définie positive qui est la déclaration (IV.32) :

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}_{\mathbb{P}} \left(\left(\sum_{s \in T(i)} Z_{i,s}^{(1)}, \sum_{s \in T(i)} Z_{i,s}^{(2)} \right) \right) = \\ \begin{pmatrix} B^{(1)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(1)} \otimes \Delta_i^{(1)} & L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) \\ L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) & B^{(2)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(2)} \otimes \Delta_i^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour l'inégalité (IV.33), l'hypothèse (BS3) implique la proposition IV.2 que sur un ensemble de positif $\mathbb{P}_\Theta$ -mesurer la matrice de covariance par rapport à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot | \Theta_i)$ de couple $(Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)})$ est définie positive :

$$\mathbf{cov}_{\mathbb{P}(\cdot | \Theta_i)} ((Z_{i,s}^{(1)}, Z_{i,s}^{(2)})) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^{(1)}(\Theta_i)}{\varphi_{i,s}^{(1)}} & \kappa(\Theta_i) \\ \kappa(\Theta_i) & \frac{\alpha^{(2)}(\Theta_i)}{\varphi_{i,s}^{(2)}} \end{pmatrix}.$$

Ceci implique que pour tout couple $(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ la variance conditionnelle $\text{var}_{\mathbb{P}(\cdot | \Theta_i)}(\alpha_1 Z_{i,s}^{(1)} + \alpha_2 Z_{i,s}^{(2)}) \geq 0$ est strictement positive sur un ensemble de positif $\mathbb{P}_\Theta$ -mesure. Par conséquent aussi

$$E_\Theta [\text{var}_{\mathbb{P}(\cdot | \Theta_i)} (\alpha_1 Z_{i,s}^{(1)} + \alpha_2 Z_{i,s}^{(2)})] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A^{(1)}}{\varphi_{i,s}^{(1)}} & K \\ K & \frac{A^{(2)}}{\varphi_{i,s}^{(2)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} > 0$$

Ceci montre que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{A^{(1)}}{\varphi_{i,s}^{(1)}} & K \\ K & \frac{A^{(2)}}{\varphi_{i,s}^{(2)}} \end{pmatrix}$ est définie positive et son déterminant $D_2 =$

$\frac{A^{(1)}}{\varphi_{i,s}^{(1)}} \frac{A^{(2)}}{\varphi_{i,s}^{(2)}} - K^2$ est strictement positif.

□

Nous voulons trouver une estimation de la crédibilité linéaire du système bivariées $(Z_{i,t+1}^{(1)}, Z_{i,t+1}^{(2)})$. Par conséquent, il est supposé que ces estimateurs de $Z_{i,t+1}^{(\tau)}$, $\tau = 1, 2$, ont la forme

$$\hat{\mu}_i^{(\tau)}(Z^{(1)}, Z^{(2)}) = \zeta_{i,0}^{(\tau)} + \sum_{j=1}^n \sum_{s \in T(j)} (\zeta_{i,j,s}^{(\tau,\tau)} Z_{j,s}^{(\tau)} + \zeta_{i,j,s}^{(\tau,3-\tau)} Z_{j,s}^{(3-\tau)}) \quad (\text{IV.34})$$

avec des coefficients réels $\zeta_i^{(\tau)} = (\zeta_{i,0}^{(\tau)}, \zeta_{i,j,s}^{(\tau,\tau)}, \zeta_{i,j,s}^{(\tau,3-\tau)})$.

Théorème IV.7. *Selon les hypothèses (BS1) - (BS3) la solution optimale au problème de crédibilité linéaire est :*

$$\hat{\mu}_i^{(\tau)*}(Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}) = M^{(\tau)} + \sum_{i,s \in T(i)} (\zeta_i^{(\tau,\tau)} (Z_{i,s}^{(\tau)} - M^{(\tau)}) + \zeta_i^{(\tau,3-\tau)} (Z_{i,s}^{(3-\tau)} - M^{(3-\tau)})) \quad (\text{IV.35})$$

$\tau = 1, 2$, telque **coefficients de crédibilité** $\zeta_i^{(\tau,\tau)}, \zeta_i^{(\tau,3-\tau)}$ sont données par les formules suivantes :

$$\begin{pmatrix} \zeta_i^{(\tau,\tau)} \\ \zeta_i^{(\tau,3-\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{(\tau)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(\tau)} \otimes \Delta_i^{(\tau)} & L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) \\ L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) & B^{(3-\tau)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(3-\tau)} \otimes \Delta_i^{(3-\tau)} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} B^{(\tau)} \otimes I \\ L \otimes I \end{pmatrix} \quad (\text{IV.36})$$

Où I est un vecteur $(t_i \times 1)$ avec toutes les composantes égales à 1.

Remarque : Contrairement à la formule de crédibilité standard, entendre les facteurs de crédibilité $\zeta_i^{(\tau,\tau)}, \zeta_i^{(\tau,3-\tau)}$ ne sont pas nécessairement $[0, 1]$. ◇

Preuve : Le problème de crédibilité est :

$$\inf_{\zeta_i^{(1)}, \zeta_i^{(2)}} E \left[\sum_{\tau=1,2} \left(Z_{i,t+1}^{(\tau)} - \hat{\mu}_i^{(\tau)}(Z^{(1)}, Z^{(2)}) \right)^2 \right] = \sum_{\tau=1,2} \inf_{\zeta_i^{(\tau)}} E \left[\left(Z_{i,t+1}^{(\tau)} - \hat{\mu}_i^{(\tau)}(Z^{(1)}, Z^{(2)}) \right)^2 \right]$$

peuvent être séparés. Comme les conditions nécessaires d'optimalité, nous avons pour $i, j \leq n$ et $s \in T(j)$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \zeta_{i,0}^{(\tau)}} \Psi = E \left[Z_{i,t+1}^{(\tau)} - \zeta_{i,0}^{(\tau)} - \sum_{j=1}^n \sum_{s \in T(j)} (\zeta_{i,j,s}^{(\tau,\tau)} Z_{j,s}^{(\tau)} + \zeta_{i,j,s}^{(\tau,3-\tau)} Z_{j,s}^{(3-\tau)}) \right] \quad (\text{IV.37})$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \zeta_{i,j,s}^{(\tau,\tau)}} \Psi = E \left[Z_{j,s}^{(\tau)} \left(Z_{i,t+1}^{(\tau)} - \zeta_{i,0}^{(\tau)} - \sum_{j' \leq n, s' \in T(j')} (\zeta_{i,j',s'}^{(\tau,\tau)} Z_{j',s'}^{(\tau)} + \zeta_{i,j',s'}^{(\tau,3-\tau)} Z_{j',s'}^{(3-\tau)}) \right) \right] \quad (\text{IV.38})$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \zeta_{i,j,s}^{(\tau,3-\tau)}} \Psi = E \left[Z_{j,s}^{(3-\tau)} \left(Z_{i,t+1}^{(\tau)} - \zeta_{i,0}^{(\tau)} - \sum_{j' \leq n, s' \in T(j')} (\zeta_{i,j',s'}^{(\tau,\tau)} Z_{j',s'}^{(\tau)} + \zeta_{i,j',s'}^{(\tau,3-\tau)} Z_{j',s'}^{(3-\tau)}) \right) \right] \quad (\text{IV.39})$$

Il en découle que $\zeta_{i,0}^{(\tau)} = M^{(\tau)} - \sum_{j' \leq n, s' \in T(j')} (\zeta_{i,j',s'}^{(\tau,\tau)} M^{(\tau)} + \zeta_{i,j',s'}^{(\tau,3-\tau)} M^{(3-\tau)})$. Remplacement $\zeta_{i,0}^{(\tau)}$ dans (IV.39) il se trouve que l'on peut passer à des moments centralisés. Les deux

dernières lignes (IV.39) sont maintenant égal à :

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta_{i,j} B^{(\tau)} - \sum_{j' \leq n, s' \in T(j')} \delta_{j,j'} \left(\zeta_{i,j',s'}^{(\tau,\tau)} (B^{(\tau)} + \delta_{s,s'} \frac{A^{(\tau)}}{\varphi_{i,s}^{(\tau)}}) + \zeta_{i,j',s'}^{(\tau,3-\tau)} (L + \delta_{s,s'} K) \right) \\
 &= \delta_{i,j} B^{(\tau)} - \sum_{s' \in T(j)} \left(\zeta_{i,j,s'}^{(\tau,\tau)} (B^{(\tau)} + \delta_{s,s'} \frac{A^{(\tau)}}{\varphi_{i,s}^{(\tau)}}) + \zeta_{i,j,s'}^{(\tau,3-\tau)} (L + \delta_{s,s'} K) \right) \\
 0 &= \delta_{i,j} L - \sum_{j' \leq n, s' \in T(j')} \delta_{j,j'} \left(\zeta_{i,j',s'}^{(\tau,\tau)} (L + \delta_{s,s'} K) + \zeta_{i,j',s'}^{(\tau,3-\tau)} (B^{(3-\tau)} + \delta_{s,s'} \frac{A^{(3-\tau)}}{\varphi_{i,s}^{(3-\tau)}}) \right) \\
 &= \delta_{i,j} L - \sum_{s' \in T(j)} \left(\zeta_{i,j,s'}^{(\tau,\tau)} (L + \delta_{s,s'} K) + \zeta_{i,j,s'}^{(\tau,3-\tau)} (B^{(3-\tau)} + \delta_{s,s'} \frac{A^{(3-\tau)}}{\varphi_{i,s}^{(3-\tau)}}) \right)
 \end{aligned}$$

Comme le déterminant de la matrice de covariance est positif, le déterminant du système linéaire :

$$\begin{aligned}
 \delta_{i,j} B^{(\tau)} &= \sum_{s' \in T(j)} \left(\zeta_{i,j,s'}^{(\tau,\tau)} (B^{(\tau)} + \delta_{s,s'} \frac{A^{(\tau)}}{\varphi_{i,s}^{(\tau)}}) + \zeta_{i,j,s'}^{(\tau,3-\tau)} (L + \delta_{s,s'} K) \right) \\
 \delta_{i,j} L &= \sum_{s' \in T(j)} \left(\zeta_{i,j,s'}^{(\tau,\tau)} (L + \delta_{s,s'} K) + \zeta_{i,j,s'}^{(\tau,3-\tau)} (B^{(3-\tau)} + \delta_{s,s'} \frac{A^{(3-\tau)}}{\varphi_{i,s}^{(3-\tau)}}) \right)
 \end{aligned}$$

Tel que $0 = \zeta_{i,j}^{(\tau,\tau)} = \zeta_{i,j}^{(\tau,3-\tau)}$ pour $i \neq j$ Par conséquent, nous obtenons le système d'équations linéaires :

$$\begin{pmatrix} B^{(\tau)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(\tau)} \otimes \Delta_i^{(\tau)} & L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) \\ L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) & B^{(3-\tau)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(3-\tau)} \otimes \Delta_i^{(3-\tau)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_i^{(\tau,\tau)} \\ \zeta_i^{(\tau,3-\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{(\tau)} \otimes I \\ L \otimes I \end{pmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} \zeta_i^{(\tau,\tau)} \\ \zeta_i^{(\tau,3-\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{(\tau)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(\tau)} \otimes \Delta_i^{(\tau)} & L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) \\ L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) & B^{(3-\tau)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(3-\tau)} \otimes \Delta_i^{(3-\tau)} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} B^{(\tau)} \otimes I \\ L \otimes I \end{pmatrix}$$

□

IV.5 Comparaison entre modèle bivariant de Bühlmann et modèle bivariant de Bühlmann-Straub

Remarque : Dans le cas où : $\varphi_{i,1}^{(\tau)} = \dots = \varphi_{i,t_i}^{(\tau)} = \varphi_{i,1}^{(3-\tau)} = \dots = \varphi_{i,t_i}^{(3-\tau)} = 1$, nous avons la matrice de covariance égale à :

$$\begin{aligned}
 \text{cov}_{\mathbb{P}} \left(\sum_{s \in T(i)} Z_{i,s}^{(\tau)}, \sum_{s \in T(i)} Z_{i,s}^{(3-\tau)} \right) &= \\
 &\begin{pmatrix} B^{(\tau)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(\tau)} \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) & L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) \\ L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) & B^{(3-\tau)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(3-\tau)} \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Donc le système (IV.40) devient :

$$\begin{pmatrix} \zeta_i^{(\tau,\tau)} \\ \zeta_i^{(\tau,3-\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{(\tau)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(\tau)} \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) & L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) \\ L \otimes E_{t_i \times t_i} + K \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) & B^{(3-\tau)} \otimes E_{t_i \times t_i} + A^{(3-\tau)} \otimes \text{diag}(1, \dots, 1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B^{(\tau)} \otimes I \\ L \otimes I \end{pmatrix} \quad (\text{IV.41})$$

L'application de la somme sur s , donne

$$\begin{pmatrix} \sum_{s \in T(i)} \zeta_i^{(\tau,\tau)} \\ \sum_{s \in T(i)} \zeta_i^{(\tau,3-\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i B^{(\tau)} + A^{(\tau)} & t_i L + K \\ t_i L + K & t_i B^{(3-\tau)} + A^{(3-\tau)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_i B^{(\tau)} \\ t_i L \end{pmatrix} \quad (\text{IV.42})$$

Où

$$\begin{pmatrix} \sum_{s \in T(i)} \zeta_i^{(\tau,\tau)} \\ \sum_{s \in T(i)} \zeta_i^{(\tau,3-\tau)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Xi_i^{(\tau)}} \begin{pmatrix} t_i B^{(\tau)}(t_i B^{(\tau)} + A^{(\tau)}) - t_i L(t_i L + K) \\ -t_i B^{(\tau)}(t_i L + K) + t_i L(t_i B^{(3-\tau)} + A^{(3-\tau)}) \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.43})$$

Tel que $(\Xi_i^{(\tau)} = (t_i B^{(\tau)} + A^{(\tau)})(t_i B^{(3-\tau)} + A^{(3-\tau)}) - (t_i L + K)^2)$

Maintenant (IV.40) peut être réécrite comme :

$$\begin{pmatrix} A^{(\tau)} & K \\ K & A^{(3-\tau)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_{i,s'}^{(\tau,\tau)} \\ \zeta_{i,s'}^{(\tau,3-\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \zeta_i^{(\tau)})B^{(\tau)} - \zeta_i^{(3-\tau)}L \\ (1 - \zeta_i^{(\tau)})L - \zeta_i^{(3-\tau)}B^{(\tau)} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.44})$$

$$\begin{pmatrix} \zeta_{i,s'}^{(\tau,\tau)} \\ \zeta_{i,s'}^{(\tau,3-\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(\tau)} & K \\ K & A^{(3-\tau)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (1 - \zeta_i^{(\tau)})B^{(\tau)} - \zeta_i^{(3-\tau)}L \\ (1 - \zeta_i^{(\tau)})L - \zeta_i^{(3-\tau)}B^{(\tau)} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.45})$$

$$\begin{pmatrix} \zeta_{i,s'}^{(\tau,\tau)} \\ \zeta_{i,s'}^{(\tau,3-\tau)} \end{pmatrix} = \frac{1}{A^{(\tau)}A^{(3-\tau)} - K^2} \begin{pmatrix} A^{(3-\tau)} & -K \\ -K & A^{(\tau)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (1 - \zeta_i^{(\tau)})B^{(\tau)} - \zeta_i^{(3-\tau)}L \\ (1 - \zeta_i^{(\tau)})L - \zeta_i^{(3-\tau)}B^{(\tau)} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.46})$$

Finalement nous avons :

$$\begin{pmatrix} \zeta_{i,s'}^{(\tau,\tau)} \\ \zeta_{i,s'}^{(\tau,3-\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{B^{(\tau)}(t_i B^{(\tau)} + A^{(\tau)}) - L(t_i L + K)}{\Xi_i^{(\tau)}} \\ \frac{-B^{(\tau)}(t_i L + K) + L(t_i B^{(3-\tau)} + A^{(3-\tau)})}{\Xi_i^{(\tau)}} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.47})$$

◇

IV.6 Estimation des paramètres de strucutre

Théorème IV.8. *Les estimations suivantes sont non biaisées :*

1. Pour les moments $M^{(\tau)}$, $A^{(\tau)}$, K , et L , ($\tau = 1, 2$), les estimateurs respectifs suivants ne sont pas biaisés :

$$\begin{aligned}\hat{M}^{(\tau)} &:= \frac{1}{t_0} \sum_{i \leq n, s \in T(i)} Z_{i,s}^{(\tau)}, \\ \hat{A}^{(\tau)} &:= \frac{1}{t_0 - n} \sum_{i \leq n, s \in T(i)} \varphi_{i,s}^{(\tau)} (Z_{i,s}^{(\tau)} - Z_{i,\varphi}^{(\tau)})^2, \\ \hat{K} &:= \frac{1}{c_1} \sum_{i \leq n, s \in T(i)} (Z_{i,s}^{(\tau)} - Z_{i,\varphi}^{(\tau)}) (Z_{i,s}^{(3-\tau)} - Z_{i,\varphi}^{(3-\tau)}) \\ \hat{L} &:= \frac{1}{n - 2 + n \sum_i \frac{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)} \varphi_{i,\bullet}^{(3-\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)} \varphi_{\bullet,\bullet}^{(3-\tau)}}} \left[\sum_{i=1}^n (Z_{i,\varphi}^{(\tau)} - Z_{\varphi,\varphi}^{(\tau)}) (Z_{i,\varphi}^{(3-\tau)} - Z_{\varphi,\varphi}^{(3-\tau)}) - K \cdot c_3 \right],\end{aligned}$$

2. Pour les paramètres $B^{(\tau)}$, ($\tau = 1, 2$), seul l'opérateur de partie positive $[\cdot]^+$ empêche les estimateurs suivants d'être biaisés :

$$\hat{B}^{(\tau)} := c_2 \cdot \left[\frac{n}{n-1} \sum_{i \leq n} \frac{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)}} (Z_{i,\varphi}^{(\tau)} - Z_{\varphi,\varphi}^{(\tau)})^2 - n \frac{\hat{A}^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)}} \right]^+. \quad (\text{IV.48})$$

Où :

$$\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)} := \sum_{s=1} \varphi_{i,s}^{(\tau)}. \quad (\text{IV.49})$$

$$\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)} := \sum_{i=1} \varphi_{i,\bullet}^{(\tau)}. \quad (\text{IV.50})$$

$$Z_{i,\varphi}^{(\tau)} := \sum_s \frac{\varphi_{i,s}^{(\tau)}}{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)}} Z_{i,s}^{(\tau)} \quad (\text{IV.51})$$

$$Z_{\varphi,\varphi}^{(\tau)} := \sum_i \frac{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)}} Z_{i,s}^{(\tau)}. \quad (\text{IV.52})$$

$$c_1 := t_0 - 2n - \sum_{i \leq n, s \in T(i)} t_i \frac{\varphi_{i,s}^{(\tau)} \varphi_{i,s}^{(3-\tau)}}{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)} \varphi_{i,\bullet}^{(3-\tau)}} \quad (\text{IV.53})$$

$$c_3 := \sum_{i \leq n, s \in T(i)} \varphi_{i,s}^{(\tau)} \varphi_{i,s}^{(3-\tau)} \left(\frac{1}{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)} \varphi_{i,\bullet}^{(3-\tau)}} - \frac{1}{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)} \varphi_{\bullet,\bullet}^{(3-\tau)}} - \frac{1}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)} \varphi_{i,\bullet}^{(3-\tau)}} + \frac{n}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)} \varphi_{\bullet,\bullet}^{(3-\tau)}} \right). \quad (\text{IV.54})$$

Et

$$c_2 = \frac{n-1}{n} \left[\sum_{i \leq n} \frac{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)}} \left(1 - \frac{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)}} \right) \right]^{-1} \quad (\text{IV.55})$$

Preuve : Soit ($\tau = 1, 2$). De toute évidence, l'estimateur linéaire, $\hat{M}^{(\tau)}$ est biaisé. Que l'estimateur $\hat{A}^{(\tau)}$ ne soit pas biaisé résulte du fait que $E \left[\sum_{i \leq n, s \in T(i)} \varphi_{i,s}^{(\tau)} (Z_{i,s}^{(\tau)} - Z_{i,\varphi}^{(\tau)})^2 \right] = (t_0 - n)A^{(\tau)}$.

De même, $E \left[\sum_{i \leq n, s \in T(i)} (Z_{i,s}^{(\tau)} - Z_{i,\varphi}^{(\tau)}) (Z_{i,s}^{(3-\tau)} - Z_{i,\varphi}^{(3-\tau)}) \right] = c_1 K$ telque $\hat{K}$ est un estimateur sans biais. Prochain,

$$\begin{aligned} \sum_i E \left[(Z_{i,\varphi}^{(\tau)} - Z_{\varphi,\varphi}^{(\tau)}) (Z_{i,\varphi}^{(3-\tau)} - Z_{\varphi,\varphi}^{(3-\tau)}) \right] &= \sum_i \left[L \left[1 - \frac{\varphi_{i,\bullet}^{(3-\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(3-\tau)}} - \frac{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)}} + \sum_i \frac{\varphi_{i,\bullet}^{(3-\tau)} \varphi_{i,\bullet}^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(3-\tau)} \varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)}} \right] \right. \\ &\quad \left. + K \left[\sum_{s \in T(i)} \frac{\varphi_{i,s}^{(3-\tau)} \varphi_{i,s}^{(\tau)}}{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)} \varphi_{i,\bullet}^{(3-\tau)}} - \sum_{s \in T(i)} \frac{\varphi_{i,s}^{(3-\tau)} \varphi_{i,s}^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(3-\tau)} \varphi_{i,\bullet}^{(\tau)}} - \sum_{s \in T(i)} \frac{\varphi_{i,s}^{(3-\tau)} \varphi_{i,s}^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)} \varphi_{i,\bullet}^{(3-\tau)}} + \sum_{i \leq ns \in T(i)} \frac{\varphi_{i,s}^{(3-\tau)} \varphi_{i,s}^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)} \varphi_{\bullet,\bullet}^{(3-\tau)}} \right] \right]. \end{aligned}$$

Montre que aussi l'estimateur $\hat{L}$ est biaisé. Finalement,

$$E \left[\sum_{i \leq n} \frac{\varphi_{i,\bullet}^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)}} (Z_{i,\varphi}^{(\tau)} - Z_{\varphi,\varphi}^{(\tau)})^2 \right] = B^{(\tau)} \left(\frac{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)2} - \sum_{i \leq n} \varphi_{i,\bullet}^{(\tau)2}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)2}} \right) + (n-1) \frac{A^{(\tau)}}{\varphi_{\bullet,\bullet}^{(\tau)2}}$$

donne le résultat en (ii). □

Conclusion générale

La thèse qui s'achève fut consacré à un élément principale, relatif à la théorie de la crédibilité multivariée : l'irréductibilité des variables aléatoires (nombres et montants des sinistres).

Après une rapide historique de la théorie de la crédibilité et au formalisation bayésienne, nous avons présenté, au chapitre 2, les principes de base de la théorie de la crédibilité, modèle de Bühlmann et modèle de Bühlmann-Straub, on a présenté l'estimateur de crédibilité et l'erreur quadratique moyenne de la prime de crédibilité des deux modèles (Bühlmann et de Bühlmann-Straub) avec estimation des paramètres de structure pour les deux modèles.

Au chapitre suivant, la crédibilité multivariée appliquée au modèle collectif a fait l'objet de cet chapitre.

En fin, ne restait alors plus qu'à discuter de l'irréductibilité des variables aléatoires de la crédibilité multivariée, si l'inversion de la matrice Variance-Covariance des variables aléatoires (nombres et montants des sinistres) n'est pas possible, donc leur calcul pose, en revanche, un réel problème. pour rassurer l'qui 'est introduit au chapitre 4.

Comme le problème indispensable de la crédibilité linéaire est de déterminer estimateur de la prime individuelle pour un contrat ou d'un portefeuille de contrats d'assurance. l'estimateur de la crédibilité est linéaire dans les observations du portefeuille, donc nous sommes actuellement sur l'application de GEE (generalized estimating equation) sur la crédibilité bivariate.

Liste des tableaux

I.1	Tableau de Ragnar Norberg.	8
-----	------------------------------------	---

Bibliographie

- [1] H. Belhadj, V. Goulet, and T. Ouellet. On parameter estimation in hierarchical credibility. *ASTIN Bulletin*, vol 39 no 2, 2009.
- [2] J. Besson and C. Partrat. Trend et système de bonus-malus. *ASTIN Bulletin*, vol 22 no 1, 1992.
- [3] H. Bühlmann. Experience rating and credibility 1. *ASTIN Bulletin*, vol 4 no 3, 1966
- [4] H. Bühlmann. Experience rating and credibility 2. *ASTIN Bulletin*, vol 5 no 2, 1967.
- [5] H. Bühlmann and A. Gisler. *A Course in Credibility Theory and its Applications*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York, pages 16-230, 2005.
- [6] F. Bichsel. Erfahrungstarifizierung in der Motorfahrzeug-Haftpflicht-Versicherung. *Bulletin of Swiss Ass. of Act.*, pages 119-130, 1964.
- [7] M. Denuit, X. Maréchal, S. Pitrebois, and J. Walhin. *Actuarial modelling of claim counts*. Wiley and Sons, Ltd, 2007.
- [8] A. Djebbar, and R. Remita, and H. Zeghdoudi. Around of multivariate credibility : covariance matrix. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. vol 12 no 1, 2016.
- [9] A. Dubey, A. Gisler. On parameter estimators in credibility. *Bulletin of Swiss Association of Actuaries*, pages 187-212, 1981.
- [10] M. Englund, M. Guillén, and al. Multivariate latent risk. A credibility approach. *Astin Bulletin*, vol 38 no 1, 2008.
- [11] W. Frees. Multivariate credibility for aggregate loss models. *North American Actuarial Journal*, vol 7 no 3 :199-130, 2003.
- [12] J. Hickman, L. Heacock. Credibility theory : the cornerstone of actuarial science. *North american actuarial journal*, vol 3 no 2, 1999.
- [13] W. Jewell. Credibility approximations for bayesian prediction of second moments. *Astin Bulletin*, vol 15 no 2, 1985.
- [14] W. Jewell. Credible means are exact bayesian for exponential families. *Astin Bulletin*, vol 15 no 2, 1985.
- [15] R. Kaas, D. Dannenburg, and M. Goovaerts. Exact credibility for weighted observations. *Astin Bulletin*, vol 27 no 2, 1997.
- [16] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene and D. Dannenburg. *Modern actuarial risk theory*. Springer, second edition, 2008.
- [17] R. Keffer. An experience rating formula. *Transaction of the Society of Actuaries*, vol 15, pages 223-235, 1929.
- [18] A.N. Kolmogorov, V.S. Fomin. *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, New York, 1970.
- [19] G. Hansel, D. Grouhko. Prédiction séquentielle par la méthode de Bayes. *Revue de Statistique appliquée*, vol 13 no 3, 1965.
- [20] R.A. Horn, C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.

- [21] H. Gerber. A teachers remark on exact credibility. *Astin Bulletin*, 25, pages 189-192, 1995.
- [22] E. Goomez-Deniz. Some bayesian credibility premiums obtained by using posterior regret Γ -minimax. *Bayesian analysis*, vol 4 number 2, pages 223-242, 2009.
- [23] E. Goomez-Deniz. J.M. Pérez-Sanchez. and F.J. Vazquez-Polo. On the use of posterior regret Γ -minimax actions to obtain credibility premiums. *Insurance Mathematics and Economics* vol 39, pages 115-121, 2006.
- [24] V. Goulet. A. Forgues, and J. Lu. Credibility for severity revisited. *North American Actuarial Journal*, vol 10, 2005.
- [25] V. Goulet. Extentions en théorie de la crédibilité à classification croisée. Phd thesis, Laval university, Qebec, Canada, 1999.
- [26] T. N. Herzog. Introduction to credibility theory, 3rd ed. Actex Publ., 1999.
- [27] E. Makov. Principal applications of bayesian methods in actuarial science : a perspective. *North American Actuarial Journal*, vol 5 no 4, 2001.
- [28] M. Marcus, H. Minc. A survey of matrix theory and matrix inequalities. Dover Publications, 1992.
- [29] R. Norberg. Credibility theory. *Encyclopedia of Actuarial Science*. Wiley, Chichester, UK, 2004.
- [30] R. Norberg. Hierarchical Credibility : Analysis of a random effect model with nested classification. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 204-222, 1986
- [31] R. Norberg. On optimal parameter estimation in credibility. *Insurance : Mathematics and Economics*, vol 1, pages 73-90, 1982.
- [32] E. Ohlsson. Simplified estimation of structure parameters in hierarchical credibility. *Astin Collquium*, 2005.
- [33] M. Rodermund. Introduction, Chapter 1 of *Foundations of Casualty Actuarial Science*. New York : Casualty Actuarial Society, 1989.
- [34] B. Sundt. Homogeneous credibility estimators. *Bulletin of Swiss Ass. of Act.*, pages 193-209, 1998.
- [35] L. Tremblay. Using the poisson inverse gaussian in bonus-malus system. *Astin Bulletin*, vol 22 no 1, 1992.
- [36] F. Vyllder. Geometrical credibility. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 121-149, 1976.