

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA

UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA



جامعة باجي مختار -  
عنابة

**Faculté des Sciences**  
Département de Mathématiques

## THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES**  
Option : Mathématiques Appliquées

**Cycles limites des systèmes différentiels  
polynomiaux**

Présentée par

**Diab Zouhair**

**DIRECTEUR DE THÈSE : Makhlouf Amar Prof. U. B. M. Annaba**

Devant le jury

<b>PRÉSIDENT</b>	Laour Abdelhamid	MCA U. B. M. Annaba
<b>EXAMINATEUR</b>	Bebbouchi Rachid	Prof USTHB. Alger
<b>EXAMINATEUR</b>	Ellaggoune Fateh	Prof Université de Guelma
<b>EXAMINATEUR</b>	Salmi Abdelouhab	MCA U. B. M. Annaba
<b>EXAMINATEUR</b>	Badi Sabrina	MCA Université de Guelma

**Année universitaire : 2015/2016**

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Systèmes dynamiques . . . . .	5
1.2 Point critique et point critique hyperbolique . . . . .	5
1.3 Solution stable et asymptotiquement stable . . . . .	6
1.4 Flot d'une équation différentielle . . . . .	6
1.5 Plan et portrait de phase . . . . .	7
1.6 Les fonctions de Lyapunov . . . . .	7
1.7 Conditions de stabilité d'un système différentiel linéaire . . . . .	8
1.8 Solution périodique . . . . .	8
1.9 Cycle limite . . . . .	9
1.10 Cycle limite hyperbolique . . . . .	9
1.11 Amplitude . . . . .	9
1.12 Existence et non-existence de cycle limite . . . . .	9
1.13 Système différentiel autonome . . . . .	10
1.14 Système Hamiltonien . . . . .	10
1.15 Système gradient . . . . .	10
1.16 Stabilité des systèmes différentiels linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	10
1.17 Théorème de Bezout . . . . .	16
1.18 Intégrale première . . . . .	16
<b>2 Méthode de moyennisation</b>	<b>17</b>
2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre . . . . .	17
2.2 Méthode de moyennisation du deuxième ordre . . . . .	23

TABLE DES MATIÈRES

---

<b>3</b>	<b>Cycles limites dans un centre linéaire à quatre dimensions</b>	<b>27</b>
3.1	Introduction . . . . .	27
3.2	Preuve du Théorème 3.1.1 . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Cycles limites pour la classe des systèmes différentiels polynomiaux en d-dimensions</b>	<b>34</b>
4.1	Introduction . . . . .	34
4.2	Cycles limites par la méthode de moyennisation . . . . .	36
4.2.1	Preuve de théorème 4.1.1 . . . . .	37
4.3	Une application du théorème 4.1.1 . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Cycles limites de quelques classes d'équations de Van Der Pol</b>	<b>42</b>
5.1	Applications . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Stabilité asymptotique des solutions périodiques</b>	<b>48</b>
6.1	Introduction . . . . .	48
6.2	Applications . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Nombre maximal de cycles limites d'une classe de systèmes de Liénard généralisés via la théorie de moyennisation</b>	<b>60</b>
7.1	Introduction . . . . .	60
7.2	Démonstration du théorème 7.1.1 . . . . .	60
	<b>Conclusion</b>	<b>63</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>

## Remerciements

En préambule à cette thèse, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant, pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je remercie mes parents d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont toujours été une source de motivation d'encouragements et de beaucoup de bonheur.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse.

En effet, je voudrai remercier mon université, ma famille, mon encadreur et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement Professeur **Makhlouf Amar**, qui, en tant que mon encadreur, s'est toujours montré à l'écoute tout au long de la réalisation de cette thèse, ainsi que pour son aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Merci à mes professeurs et enseignants d'avoir été là, de nous avoir énormément appris par la qualité des enseignements qu'ils nous ont prodigués.

J'adresse mes remerciements aussi à notre chef de département de mathématiques. C'est, encore, un grand plaisir pour moi, d'adresser mes plus sincères remerciements à monsieur : **Laouar Abdelhamid** MCA à l'université Badji Mokhtar-Annaba pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

J'exprime ici toute ma considération à mes examinateurs Messieurs les Professeurs **Bebbouchi Rachid**, Professeur à l'université des sciences et de la Technologie Houari Boumediene d'Alger, Madame **Badi Sabrina** MCA à l'université de Guelma, Monsieur **Salmi Abdelouhab** MCA à l'université Badji Mokhtar-Annaba, et Monsieur **Ellagoune Fateh** Professeur à l'université de Guelma.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont Toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de cette thèse.

Merci à tous et à toutes.



Je dédie ce travail à :  
Mes très chers parents  
A mes chers frères  
A toute ma famille  
A tous mes amis  
Enfin à tous ceux qui me sont très chers



La deuxième partie du 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert ( 13<sup>ème</sup> problème de Smale ) consiste à trouver le nombre maximum de cycles limites qu'un champ de vecteur polynômial d'un degré fixe peut avoir. Une formulation de ces problèmes et leurs développements récents ont été ainsi rappelés. Il y avait plusieurs tentatives de résoudre le 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert et jusqu'ici tous ont échoué. Le système différentiel classique de Liénard est

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x)y; \end{cases} \quad (1)$$

où  $f(x)$  est un polynôme de degré  $n$ . Pour ce système, Lins et al [20] ont énoncé la conjecture que si  $f(x)$  de degré  $n \geq 1$ , alors le système (1) a au plus  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  cycles limites. Ils ont prouvé aussi cette conjecture pour  $n = 1, 2$ . Récemment, la conjecture a été également prouvée pour  $n = 3$ , voir Li et Llibre [18]. Pour  $n \geq 5$ , Dumortier et al [15] et De Maesschalck et Dumortier [11] ont prouvé que la conjecture n'est pas vraie pour  $n \geq 5$ . En bref, à ce moment, la conjecture est seulement ouverte pour  $n = 4$ . Beaucoup de résultats sur les cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux ont été obtenus en considérant les cycles limites qui bifurquent d'un seul point singulier dégénéré (c-à-d d'une bifurcation de Hopf), qui s'appellent les cycles limites de faible amplitude, voir Lloyd [27]. Il y a des résultats partiels au sujet du nombre maximum de cycles limites de faible amplitude pour les systèmes différentiels polynomiaux de Liénard. Le nombre de cycles limites de faible amplitude donne une borne inférieure pour le nombre maximum de cycles limites pour un polynôme différentiel que le système peut avoir. Il y a beaucoup de résultats au sujet de l'existence des cycles limites de faible amplitude pour le système de Liénard généralisé suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y, \end{cases} \quad (2)$$

où  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des polynômes de degré  $n$  et  $m$ , respectivement. Nous dénotons par  $H(m, n)$  le nombre maximum de cycles limites du système (2). Ce nombre s'appelle habituellement le nombre de Hilbert pour ce système.

i) En 1928, Liénard [19] a prouvé que si  $m = 1$  et  $F(x) = \int_0^x f(s)ds$  est une fonction continue et impaire qui a une unique racine positive en  $x = a$ , et qui est strictement croissante pour  $x \geq a$ , alors le système (2) possède un unique cycle limite.

(ii) En 1973, Rychkov [34] a prouvé que si  $m = 1$  et  $F(x)$  est un polynôme de degré cinq et impaire, alors le système

(2) n'a au plus que deux cycles limites.

(iii) En 1977, Lins et al [20] ont prouvé que  $H(1, 1) = 0$  et  $H(1, 2) = 1$ .

(iv) En 1998, Coppel [7] a prouvé que  $H(2, 1) = 1$ .

(v) Dumortier et Rousseau [14] et Dumortier et Li [12] ont prouvé que  $H(3, 1) = 1$ .

(vi) En 1997, Dumortier [13] a prouvé que  $H(2, 2) = 1$ .

(vii) En 2012, Li et Llibre [18] ont prouvé que  $H(1, 3) = 1$ .

Jusqu'à présent et autant que nous connaissons, seulement pour ces cinq cas (iii) – (vii) a nombre de Hilbert pour le système (2) déterminé. Le nombre maximum de cycles limites de faible amplitudes pour le système (2) est dénoté par  $\hat{H}(m, n)$ . Blows et Lloyd [1], Lloyd et Lynch [28] et Lynch [29] ont prouvé que

si  $g$  est impair, puis  $\hat{H}(m, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ,

si  $f$  est pair, alors  $\hat{H}(m, n) = n$ , quelque soit  $g$ ,

si  $f$  est impair, puis  $\hat{H}(m, 2n + 1) = \left\lfloor \frac{m - 2}{2} \right\rfloor + n$ , et

si  $g(x) = x + g_e(x)$ , où  $g_e(x)$  est pair, puis  $\hat{H}(2m, 2) = m$ .

Christopher et Lynch [5], Lynch [30], [31] et Lynch et Christopher [32] ont développé une nouvelle méthode algébrique pour déterminer les quantités de Liapunov du système (2) et ont montré

$$\hat{H}(m, 2) = \left\lfloor \frac{2m + 1}{3} \right\rfloor,$$

$$\hat{H}(2, n) = \left\lfloor \frac{2n + 1}{3} \right\rfloor,$$

$$\hat{H}(m, 3) = 2 \left\lfloor \frac{3m + 2}{8} \right\rfloor, \text{ pour tout } 1 < m \leq 50,$$

$$\hat{H}(3, n) = 2 \left\lfloor \frac{3n + 2}{8} \right\rfloor, \text{ pour tout } 1 < m \leq 50, \text{ et}$$

$$\hat{H}(4, k) = \hat{H}(k, 4), k = 6, 7, 8, 9 \text{ et } \hat{H}(5, 6) = \hat{H}(6, 5).$$

En 1998, Gasull et Torregrosa [16] ont obtenu des bornes supérieures pour  $\hat{H}(7, 6)$ ,  $\hat{H}(6, 7)$ ,  $\hat{H}(7, 7)$  et  $\hat{H}(4, 20)$ .

En 2006, Yu et Han [37] ont prouvé que  $\hat{H}(m, n) = \hat{H}(n, m)$ , pour  $n = 4$ ,  $m = 10$ ,

11, 12, 13;  $n = 5, m = 6, 7, 8, 9, n = 6, m = 5, 6$ ; voir aussi Llibre et al [25] pour une table avec toutes les valeurs en détail.

En 2010, Llibre et al [25] ont calculé le nombre maximum de cycles limites  $\hat{H}(m, n)$  de système (2) qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , utilisant la méthode de moyennisation d'ordre  $k$  où  $k = 1, 2, 3$ .

Le plan de cette **thèse** est le suivant

**Le chapitre 1** présente quelques rappels et des notions préliminaires des systèmes différentiels.

**Dans le chapitre 2** nous présentons les théorèmes importants de la méthode de moyennisation du premier et second ordre avec des exemples.

**Dans le chapitre 3** on étudie l'existence des cycles limites du système différentiel suivant

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \varepsilon f(x, y), \\ \ddot{y} + y = \varepsilon g(x, y), \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit.  $f$  et  $g$  sont des polynômes arbitraires de degré 4 en les variables  $x$  et  $y$ .

Ce chapitre a été publié dans le journal " Annals of Differential Equations". Zouhair Diab and Amar Makhlouf " Limit cycles to a four-dimensional linear center ". 29 No 4, 399 – 405 (2013). Voir [8].

**Dans le chapitre 4** on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre pour étudier le nombre maximum de cycles limites du système différentiel généralisé perturbé suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2(1 + x_1) + \varepsilon (ax_1 + P_1(x_1, \dots, x_d)), \\ \dot{x}_2 = x_1(1 + x_1) + \varepsilon (ax_2 + P_2(x_1, \dots, x_d)), \\ \dot{x}_k = \varepsilon (b_k x_k + P_k(x_1, \dots, x_d)), \end{cases}$$

où  $P_k(x_1, \dots, x_d)$  pour  $k = 1, \dots, d$  sont des polynômes de degré  $n$  commençant par des termes de degré 2, pour  $k = 3, \dots, d$ ,  $a$  et  $b_k \in \mathbb{R}$  sont des constantes arbitraires. Ce chapitre a été publié dans le journal " Journal of Applied Mathematics ". Zouhair Diab and Amar Makhlouf. "Limit Cycles for the Class of D -Dimensional Polynomial Differential Systems". Volume 2016, Article ID 1868027, 5 pages. Voir [10].

**Dans le chapitre 5**, on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre pour étudier l'existence des solutions  $2\pi$ -périodiques de système différentiel non autonome suivant

$$\ddot{x} + x = \varepsilon F(t, x, \dot{x}),$$

et on donne quelques exemples.

**Dans le chapitre 6**, nous allons étudier l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique des solutions périodiques des équations de Van Der Pol suivantes

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \varepsilon(u^2 - 1)\dot{u}^3 + (1 + a\varepsilon)u &= \varepsilon\lambda \sin t, \\ \ddot{u} + \varepsilon(|u| - 1)\dot{u}^3 + (1 + a\varepsilon)u &= \varepsilon\lambda \sin t, \end{aligned}$$

où  $\alpha$  et  $\lambda$  sont deux constantes réelles et  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit. Ce chapitre a été publié dans le journal " Advances in Dynamical Systems and Applications (ADSA) " Zouhair Diab and Amar Makhlouf " Asymptotic Stability of Periodic Solutions for Differential Equations " Volume 11 Number 1, 1–14 (2016). Voir [9].

**Dans le chapitre 7**, on va utiliser la méthode de moyennisation du premier ordre pour étudier le nombre maximal de cycles limites de certains systèmes de Liénard généralisés de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (g_{11}(x) + f_{11}(x, y) y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon (g_{21}(x) + f_{21}(x, y) y), \end{cases}$$

où  $g_{11}$ ,  $g_{21}$  sont des polynômes de degré  $k$ ,  $m$  et  $f_{11}$  et  $f_{21}$  sont des polynômes de degré  $l$ ,  $n$  en  $x$  et  $y$ , respectivement, et  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit.

# CHAPITRE 1

## Notions Préliminaires

Ce chapitre contient quelques définitions et résultats des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires. On commence par définir les systèmes dynamiques, point critique et point critique hyperbolique, solution stable et asymptotiquement stable, flot d'une équation différentielle, plan et portrait de phase, les fonctions de Lyapunov, conditions de stabilité d'un système différentiel linéaire solution périodique, cycle limite, cycle limite hyperbolique, système différentiel autonome, système Hamiltonien, système gradient, stabilité des systèmes différentiels linéaire à coefficients constants dans  $\mathbb{R}^2$ , théorème de Bezout, Intégrale première.

### 1.1 Systèmes dynamiques

**Définition 1.1.1** *Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tel que*

- (1)  $\varphi(., x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue
- (2)  $\varphi(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue
- (3)  $\varphi(0, x) = x$
- (4)  $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

### 1.2 Point critique et point critique hyperbolique

**Définition 1.2.1** *On appelle point critique, point d'équilibre, point singulier ou point fixe du système différentiel non linéaire*

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

*un point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x_0) = 0$ .*

### 1.3. SOLUTION STABLE ET ASYMPTOTIQUEMENT STABLE

---

**Définition 1.2.2** Soit  $x_0$  un point critique de (1.1). Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \text{ ou } A = Df(x_0)$$

$Ax$  est une bonne approximation de (1.1) au voisinage de  $x_0$ , un point critique  $x_0$  est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de  $A$  n'a de partie réelle nulle.

## 1.3 Solution stable et asymptotiquement stable

**Définition 1.3.1** Soit le système différentiel non autonome et non linéaire

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

On suppose que  $f(t, x)$  satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions. Une solution  $\phi(t)$  du système (1.2) telle que  $\phi(t_0) = \phi_0$  est dite stable au sens de Lyapunov si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que pour toute solution  $x(t)$  dont la valeur initiale  $x(t_0)$  vérifie :

$$\|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si en plus :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$ , alors la solution  $\phi(t)$  est un asymptotiquement stable.

## 1.4 Flot d'une équation différentielle

**Définition 1.4.1** Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x),$$

et le problème à valeurs initiales

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0 \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n,$$

E un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^1(E)$ . Pour  $x_0 \in E$  et  $\phi(t, x_0)$  la solution du problème à valeurs initiales, l'ensemble des applications  $\phi_t$  définis par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

est appelé le flot du système différentiel.

## 1.5 Plan et portrait de phase

**Définition 1.5.1** Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.3)$$

un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.3) représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan  $(xoy)$  est le plan de phase.

## 1.6 Les fonctions de Lyapunov

Les fonctions de Lyapunov, à l'instar des fonctions intégrales premières, sont des outils globaux d'étude des systèmes dynamiques. Elles permettent, dans le cas où le théorème de linéarisation ne s'applique pas, de montrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable (stable). L'idée développée par Aleksandr Mikhailovitch Lyapunov, mathématicien russe de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, spécialiste de la stabilité des systèmes, et particulièrement de ceux issus de la mécanique des fluides, a été d'introduire des fonctions réelles et d'étudier leurs variations le long des trajectoires du système (1.1).

**Définition 1.6.1** (Fonctions (semi) définies positives) Une fonction scalaire  $V(x)$  continûment différentiable (par rapport à  $x$ ) est dite définie positive dans une région autour de l'origine si :

- 1)  $V(0) = 0$ ,
- 2)  $V(x) > 0$ , pour tout  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n / x \neq 0$ .

Si (2) est remplacée par  $V(x) \geq 0$ , alors la fonction est dite semi-définie positive.

La méthode des fonctions de Lyapunov consiste à étudier directement la stabilité des points singuliers d'un système différentiel (1.1), à l'aide d'une fonction convenablement choisie  $V(x)$  que l'on appelle fonction de Liapunov et ceci sans rechercher au préalable les solutions du système.

**Théorème 1.6.1** (théorème de Lyapunov de la stabilité) Si pour le système (1.1) il existe une fonction  $V(x)$  (fonction de Lyapunov) de signe défini (définie positive ou définie négative) tel que

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x),$$

est une fonction semi-définie (positive ou négative) de signe inverse de  $V$  ou est identiquement nulle, alors le point singulier  $x = 0$  est stable.

## 1.7. CONDITIONS DE STABILITÉ D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE

---

**Théorème 1.6.2** (théorème de Lyapunov de la stabilité asymptotique) Si pour le système (1.1) il existe une fonction  $V(x)$  (fonction de Lyapunov) de signe défini (définie positive ou définie négative) tel que

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x),$$

est une fonction semi-définie (positive ou négative) de signe inverse de  $V$ , alors le point singulier  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

**Théorème 1.6.3** (théorème de Lyapunov de l'instabilité) Supposons que pour le système (1.1) il existe une fonction  $V(x)$  dérivable au voisinage de l'origine 0 et telle que  $V(0) = 0$ . Si

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x),$$

$f_i(x)$  est définie positive et s'il existe aussi près que l'on veut de l'origine des points en lesquels la fonction  $V(x)$  prend des valeurs positives, alors le point singulier  $x = 0$  est instable.

## 1.7 Conditions de stabilité d'un système différentiel linéaire

Considérons le système différentiel linéaire  $x' = Ax$ , où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $A$  est une matrice carrée  $n \times n$  à coefficients réelles constants.

**Définition 1.7.1** Si toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  ont leur partie réelle strictement négative, alors toutes les solutions de  $x' = Ax$  tendent vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$  et l'origine est un équilibre stable.

Si l'une au moins des valeurs propres est de partie réelle strictement positive, l'origine est un point d'équilibre instable.

Si la matrice  $A$  est diagonalisable et si toutes ses valeurs propres sont de partie réelle négative ou nulle, alors l'origine est un point d'équilibre stable.

## 1.8 Solution périodique

**Définition 1.8.1** On appelle orbite périodique toute trajectoire  $\psi_t(x)$  du système différentiel non linéaire (1.1) telle qu'il existe un nombre  $T > 0$ , vérifiant

$$\psi(t + T, x) = \psi(t, x) \text{ pour } T > 0.$$

Le plus petit réel  $T > 0$  qui vérifie la formule précédente est appelé période. Pour un système autonome, à toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace de phase.

## 1.9 Cycle limite

**Définition 1.9.1** *Pour un système plan, on appelle cycle limite est une orbite fermée isolé. C'est à dire, au voisinage de cette orbite on ne peut pas avoir une autre orbite fermé. La stabilité du cycle limite est liée au comportement des trajectoires de son voisinage.*

*Poincaré introduit cette notion dans son second mémoire de 1882, à partir de ses travaux sur le problème des trois corps notamment.*

## 1.10 Cycle limite hyperbolique

**Définition 1.10.1** *Supposons que le système (1.3) a une orbite périodique  $(x(t), y(t))$  de période  $T$ . Soit*

$$\delta = \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt.$$

*Si  $\delta > 0$  (resp.  $\delta < 0$ ) alors l'orbite périodique  $(x(t), y(t))$  est un cycle limite instable (resp. stable). Une orbite périodique  $(x(t), y(t))$  ayant  $\delta \neq 0$  est un cycle limite hyperbolique.*

## 1.11 Amplitude

**Définition 1.11.1** *L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable  $x$  du cycle limite.*

## 1.12 Existence et non-existence de cycle limite

Une condition suffisante de non-existence de cycle limite est donnée par :

**Théorème 1.12.1** *Il n'y pas de trajectoire fermée dans un domaine simplement connexe  $\Omega$  du plan de phase dans lequel la divergence  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$  garde un signe constant.*

**Théorème 1.12.2** *Si toutes les trajectoires du système (1.3) entrent transversalement dans un domaine fermé et borné  $D$  du plan ne contenant pas de points d'équilibres du système (1.3), et ne ressortent pas de ce domaine, alors ce domaine contient au moins une orbite périodique.*

## 1.13 Système différentiel autonome

Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où le expression  $f(x)$  ne dépend pas de  $t$ , on dit que le système est autonome.

## 1.14 Système Hamiltonien

Soit  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $H \in C^2(E)$  tel que  $H = H(x, y)$  avec  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T, \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \left( \frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^T, \end{aligned}$$

est dit système Hamiltonien à  $n$  degré de liberté sur  $E$ .

## 1.15 Système gradient

Soit  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $V \in C^2(E)$ . Un système de la forme

$$\dot{x} = -\text{grad } V(x),$$

où

$$\text{grad } V(x) = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T,$$

s'appelle système gradient sur  $E$ .

## 1.16 Stabilité des systèmes différentiels linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$

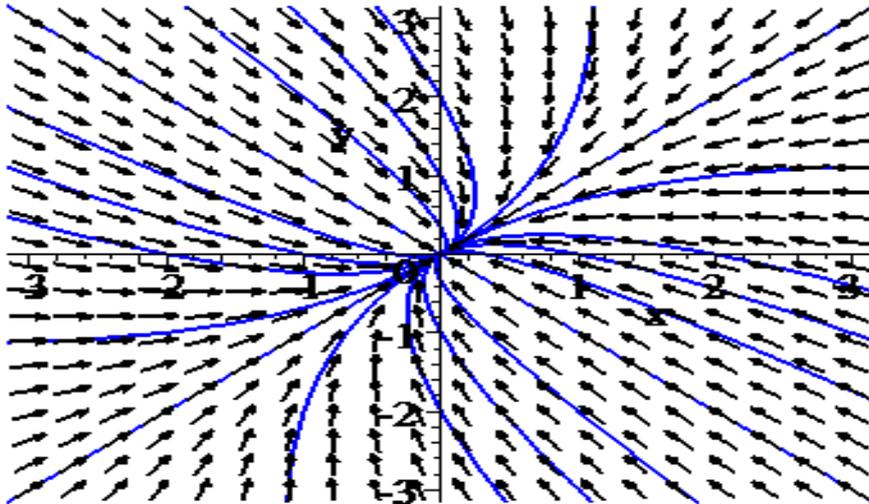
Considérons le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On supposera  $\det A \neq 0$ ; L'origine est un seul point critique de ce système.

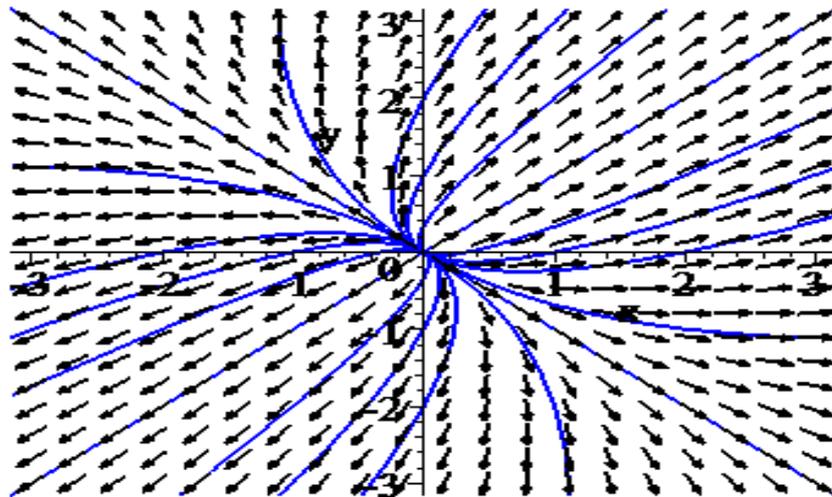
(1) **Les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $A$  sont réelles**

Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont  $< 0$ , ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) le point d'équilibre  $(0, 0)$  est noeud impropre stable



*noeud impropre stable*

si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont  $> 0$ , ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) le point d'équilibre  $(0, 0)$  est noeud propre instable



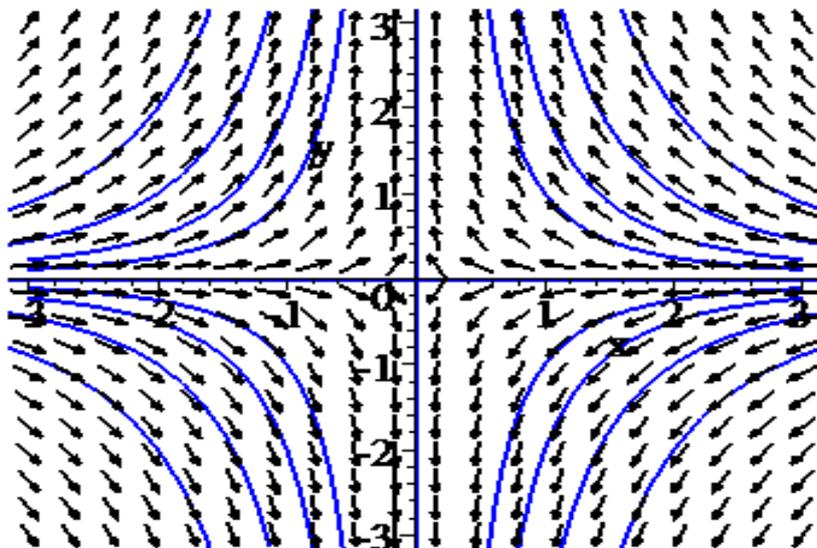
*Noeud impropre instable*

si  $\lambda_1, \lambda_2$  de signes opposés, par exemple  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Il s'agit d'un col (selle)

1.16. STABILITÉ DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRE À COEFFICIENTS CONSTANTS DANS  $\mathbb{R}^2$

---

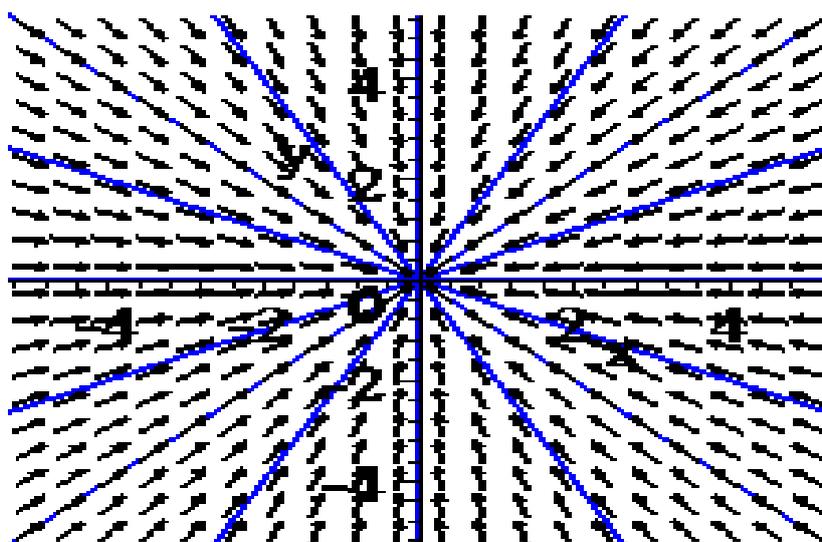
toujours instable



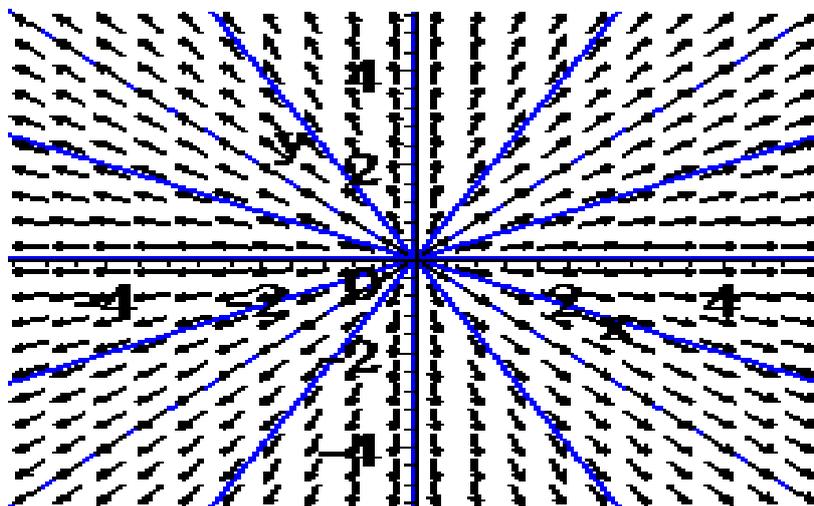
*Selle*

si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Deux cas sont possibles

(a)  $A$  est diagonalisable. Le point d'équilibre  $(0, 0)$  est un noeud propre.

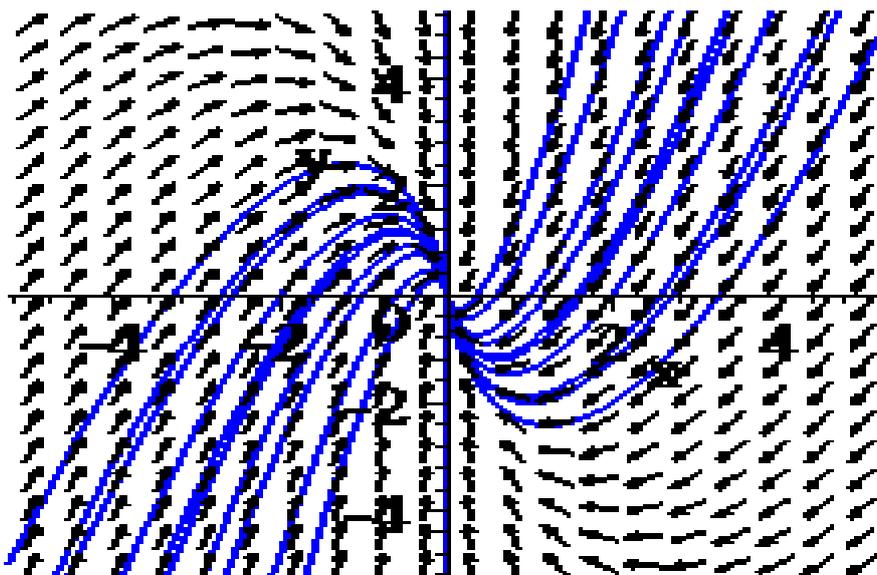


*Noeud propre stable si :  $\lambda < 0$*



*Noeud propre instable si :  $\lambda > 0$*

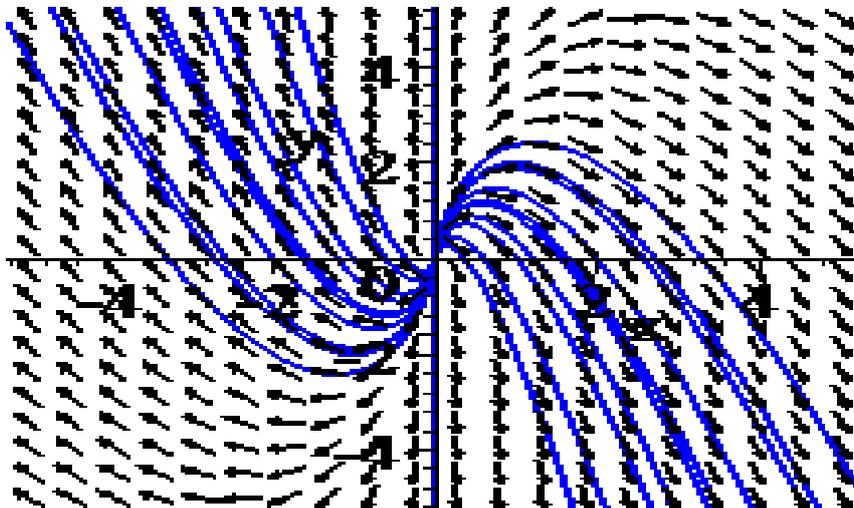
(b)  $A$  est non diagonalisable. Le point d'équilibre  $(0, 0)$  est un noeud exceptionnel.



*Noeud exceptionnel stable si :  $\lambda < 0$*

1.16. STABILITÉ DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRE À COEFFICIENTS CONSTANTS DANS  $\mathbb{R}^2$

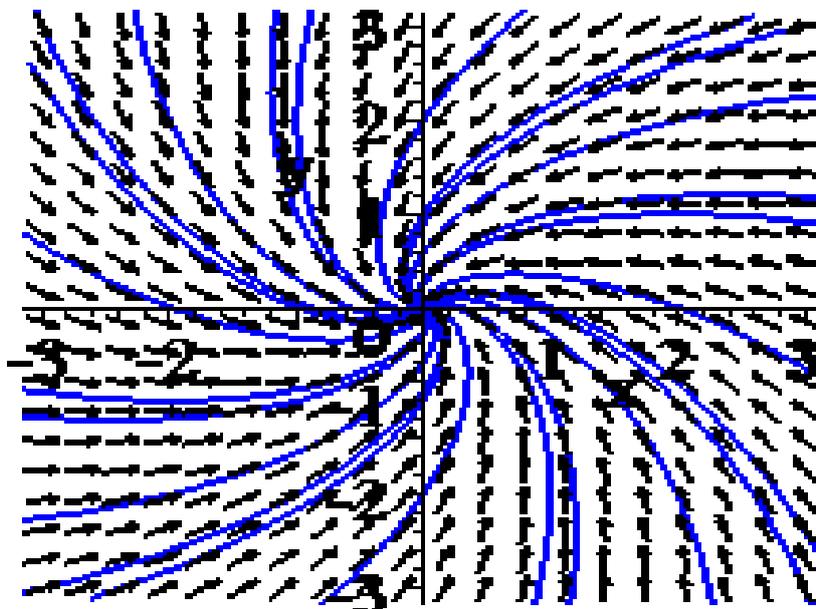
---



*Noeud exceptionnel instable si :  $\lambda > 0$*

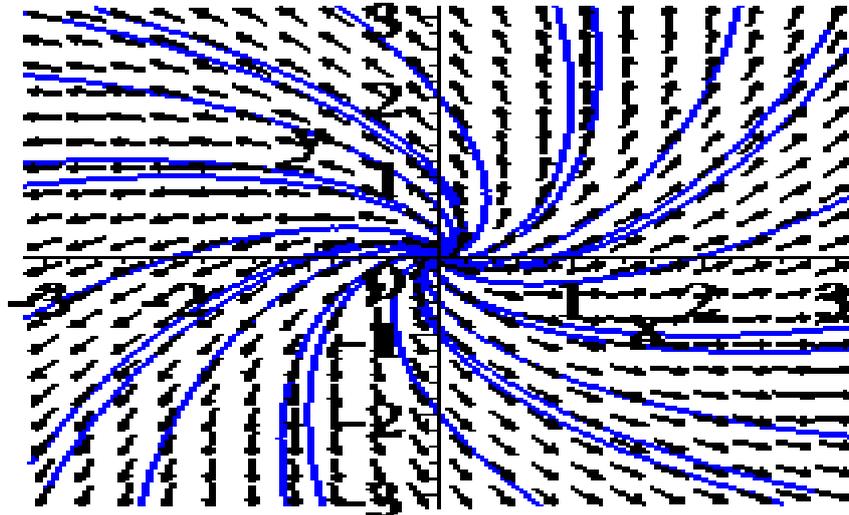
**(2) Les valeurs propres de  $A$  sont complexes**

(a) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  complexe conjuguées avec la partie réelle non nulle, ( $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ) le point d'équilibre  $(0, 0)$  est foyer stable si  $\alpha < 0$ .



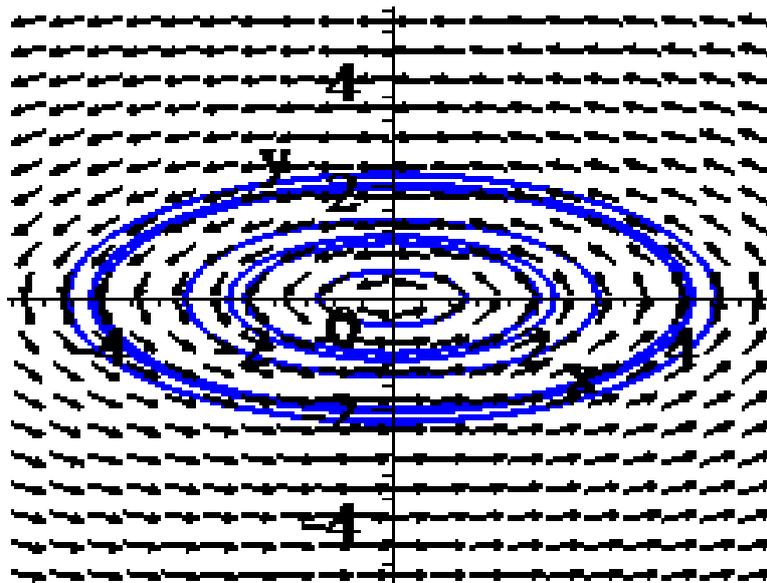
*Foyer stable*

Le point d'équilibre  $(0, 0)$  est foyer instable si  $\alpha > 0$ .



*Foyer instable*

(b) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  imaginaires pures, ( $\lambda_1 = i\beta$ ,  $\lambda_2 = -i\beta$ )  
le point d'équilibre  $(0, 0)$  est centre.



*centre*

## 1.17 Théorème de Bezout

**Théorème 1.17.1** Soient  $P_j, j = 1, \dots, n$  des polynomes en ces variables  $(x_1, x_2, \dots, x_d)$  de degré  $d_j, j = 1, \dots, n$ . Considérons le système polynomial suivant

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ P_2(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ P_n(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0. \end{cases}$$

Où  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ . Si le nombre de solutions de ce système est fini, alors il est borné par

$$d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n.$$

voir [35].

## 1.18 Intégrale première

**Définition 1.18.1** On appelle intégrale première du système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

une fonction  $H(x_1, x_2, t)$  qui est constante sur les trajectoires. La fonction  $H$  vérifie la propriété suivantes

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} \dot{x}_2.$$

## CHAPITRE 2

### Méthode de moyennisation

Le travail essentiel de ce chapitre consiste à la recherche des cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux. Des exemples des systèmes ont été donnés pour montrer que le nombre maximum de cycles limites est atteint.

La théorie de moyennisation est un outil classique et mûri pour étudier le comportement de la dynamique des systèmes dynamiques lisses non linéaires, et en particulier de leur orbites périodiques. La méthode de moyennisation a une longue histoire qui commence avec les œuvres classiques de Lagrange et de Laplace qui ont fourni une justification intuitive du processus. La première formalisation de cette procédure est due à Fatou (1928). Des contributions pratiques et théoriques importantes dans cette théorie ont été faites par Bogolioubov et Krylov (voir Bogolioubov et al. (1934) et Bogolioubov (1945)). La méthode de moyennisation du premier ordre pour l'étude des orbites périodiques peut être trouvée dans Verhulst (1991), vous pouvez aussi consulter Guckenheimer et al. (1990).

## 2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel à valeur initiale suivante

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x(t)) + \varepsilon^2 R(t, x(t), \varepsilon) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

avec  $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  un domaine borné et  $t \geq 0$ . Nous supposons que  $F(t, x)$  et  $R(t, x, \varepsilon)$  sont  $T$ -périodiques en  $t$ . Le système moyenné associé au système (2.1) est

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y(t)) \quad , \quad y(0) = x_0, \quad (2.2)$$

## 2.1. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

---

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds. \quad (2.3)$$

Le théorème suivant nous donne des conditions sous lesquelles les points singuliers du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.1).

**Théorème 2.1.1** *Considérons le système (2.1) et supposons que les fonctions vectorielles  $F$ ,  $R$ ,  $D_x F$ , et  $D_x^2 F$  sont continues et bornées pour une constante  $M$  (indépendante de  $\varepsilon$ ) dans  $[0, \infty) \times D$  avec  $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .*

*On suppose que  $F$  et  $R$  sont  $T$ -périodiques en  $t$  avec  $T$  indépendante de  $\varepsilon$ .*

(a) *Si  $p \in D$  est un point singulier du système moyenné (2.2) tel que*

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0 \quad (2.4)$$

*alors pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique  $x_\varepsilon(t)$  du système (2.1) telle que  $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

(b) *Si le point singulier  $y = p$  du système moyenné (2.2) est hyperbolique alors pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, la solution périodique correspondante  $x_\varepsilon(t)$  du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que  $p$ .*

**Preuve.** Les prétentions garantissent que l'existence et l'unicité des solutions des problèmes à valeur initiale (2.1) et (2.2) sur l'échelle de temps  $\frac{1}{\varepsilon}$  que nous considérons

$$u(t, x) = \int_0^t [F(s, x) - f^0(x)] ds. \quad (2.5)$$

Alors

$$\begin{aligned} \|u(t, x)\| &= \left\| \int_0^t [F(s, x) - f^0(x)] ds \right\| = \\ &\leq \int_0^t \|F(s, x)\| ds + \int_0^t \left\| \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds \right\| ds. \end{aligned}$$

Si  $F(s, x)$  est un bornées par constant  $M$  et  $0 \leq t \leq T$  alors

$$\int_0^t \|F(s, x)\| ds + \int_0^t \left\| \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds \right\| ds \leq 2tM \leq 2TM.$$

Alors

$$\|u(t, x)\| \leq 2MT.$$

Nous considérons maintenant une transformation

$$x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t)). \quad (2.6)$$

Cette transformation sera employée pour simplifier l'équation (2.1) Différentiation de (2.6) et substitution dans (2.1) des rendements

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{z} + \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial t} u(t, z) + \frac{\partial}{\partial z} u(t, z) \dot{z} \right) \\ &= \dot{z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} u(t, z) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z) \dot{z} \\ &= \varepsilon F(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 R(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} u(t, z) + \left( I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z) \right) \dot{z} \\ &= \varepsilon (F(t, z) - f^0(z)) + \left( I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z) \right) \dot{z} \\ \implies \varepsilon F(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 R(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) &= \varepsilon (F(t, z) - f^0(z)) \\ &\quad + \left( I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z) \right) \dot{z} \\ \implies \left( I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z) \right) \dot{z} &= \varepsilon F(t, z + \varepsilon u(t, z)) - \varepsilon F(t, z) + \\ &\quad \varepsilon^2 R(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) + \varepsilon f^0(z), \end{aligned}$$

nous écrivons cette équation sous la forme

$$\left( I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z) \right) \dot{z} = \varepsilon f^0(z) + S.$$

Avec  $I$  matrice identité de  $n \times n$  où

$$S = \varepsilon F(t, z + \varepsilon u(t, z)) - \varepsilon F(t, z) + \varepsilon^2 R(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon).$$

Puisque  $\frac{\partial u}{\partial z}$  est uniformément bornée (comm  $u$ ) nous pouvons inverser pour obtenir

$$\left( I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z) \right)^{-1} = I - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} u(t, z) + O(\varepsilon^2), t \geq 0, z \in D. \quad (2.7)$$

De la continuité de Lipschitz nous avons

$$\|F(t, z + \varepsilon u(t, z)) - F(t, z)\| \leq L\varepsilon \|u(t, z)\| \leq L\varepsilon 2MT,$$

## 2.1. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

---

où  $L$  est la constante de Lipschitz. En raison bornée de  $R$  il suit cela pour Une certaine constante positive  $C$ , indépendant de  $\varepsilon$  que nous avons

$$\|S\| \leq \varepsilon^2 C, t \geq 0, z \in D. \quad (2.8)$$

De (2.7) et de (2.8) nous obtenons à  $z$  cela

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + S - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z} f^0(z) + O(\varepsilon^3). \quad (2.9)$$

Si  $S = O(\varepsilon^2)$  en considérons le temps  $\tau = \varepsilon t$  variable nous obtenons que la solution de

$$\frac{dy}{d\tau} = f^0(y), y(0) = z(0),$$

approche la solution de (2.9) avec d'erreur sur  $O(\varepsilon)$  d'échelle de temps 1 dans  $\tau$ . Sur l'échelle de temps  $\frac{1}{\varepsilon}$  dans  $t$ , dans la transformation (2.6) nous obtenons cela

$$x(t) - y(t) = O(\varepsilon). \quad (2.10)$$

Maintenant nous imposerons l'état de périodicité après quoi nous pouvons appliquer le théorème implicite de fonction. Nous transformons  $x \rightarrow z$  avec la transformation (2.6). Alors l'équation pour  $z$  devient

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 S(t, z, \varepsilon). \quad (2.11)$$

En raison du choix du  $u(t, z(t))$ , une solution  $T$ -périodique  $z(t)$  produit une solution  $T$ -périodique  $x(t)$ . Pour  $S$  nous prenons l'expression

$$S(t, z, \varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial z}(t, z)u(t, z) - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z)f^0(z) + R(t, z, 0) + O(\varepsilon).$$

Cette expression est  $T$ -périodique dans  $t$  et sans interruption différentiable en ce qui concerne  $z$ . L'équation (2.11) est équivalente avec l'équation intégrale

$$z(t) = z(0) + \varepsilon \int_0^t f^0(z(s))ds + \varepsilon^2 \int_0^t S(s, z(s), \varepsilon)ds.$$

Le solution  $z(t)$  est  $T$ -périodique si  $z(t+T) = z(t)$  pour tout  $t \geq 0$  qui mène à l'équation

$$h(z(0), \varepsilon) = \int_0^T f^0(z(s))ds + \varepsilon \int_0^T S(s, z(t), \varepsilon)ds. \quad (2.12)$$

Le côté droit de l'équation (2.12) ne dépend pas de  $z(0)$  explicitement. Mais les solutions dépendent des valeurs initiales  $z(0)$ . Il est clair que  $h(p, 0) = 0$ . Si  $\varepsilon$  est

dans un voisinage de  $\varepsilon = 0$ , alors l'équation (2.12) est une unique solution  $z(0)$  en raison de la prétention sur la cause déterminante de Jacobi (2.4). Si  $\varepsilon \rightarrow 0$  alors  $z(0) \rightarrow p$ . Ceci complète la preuve du rapport (a). La conclusion du rapport (a) de théorème 2.1.1 sans avoir besoin des hypothèses différentiables sur la fonction  $F$  et  $R$ . Pour chaque  $z \in D$  nous dénotons par  $x(\cdot, z, \varepsilon)$  la solution de (2.1) avec l'état initial  $x(\cdot, z, \varepsilon) = z$ . Nous considérons la fonction  $\zeta : D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie

$$\zeta(z, \varepsilon) = \int_0^T [\varepsilon F(t, x(t, z, \varepsilon)) + \varepsilon^2 R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon)] dt. \quad (2.13)$$

De (2.1) il suit pour chaque  $z \in D$

$$\zeta(z, \varepsilon) = x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon).$$

La fonction  $\zeta$  peut être écrite sous la forme

$$\zeta(z, \varepsilon) = \varepsilon f^0(z) + O(\varepsilon^2), \quad (2.14)$$

où  $f^0$  est donné par (2.3). D'ailleurs, pour  $|\varepsilon|$  suffisamment petit,  $z = x_\varepsilon(0)$  est un zéro d'isolement de  $\zeta(\cdot, \varepsilon)$  naturellement dû (2.14) au déplacement d'une fonction pour le système (2.1), et ses points fixes sont les solutions  $T$ -périodiques de (2.1). ■

**Exemple 2.1.1** *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon (9y - x^2y + x^2 + y^2). \end{cases} \quad (2.15)$$

*En utilisant les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , ce système devient*

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r \sin(\theta) (-r - 9 \sin(\theta) + r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + (9 \cos(\theta) \sin(\theta) - r^2 \sin(\theta) (\cos(\theta))^3 + \cos(\theta) r) \varepsilon, \end{cases}$$

*où d'une manière équivalente*

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \sin(\theta) (-r - 9 \sin(\theta) + r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta)) + O(\varepsilon^2).$$

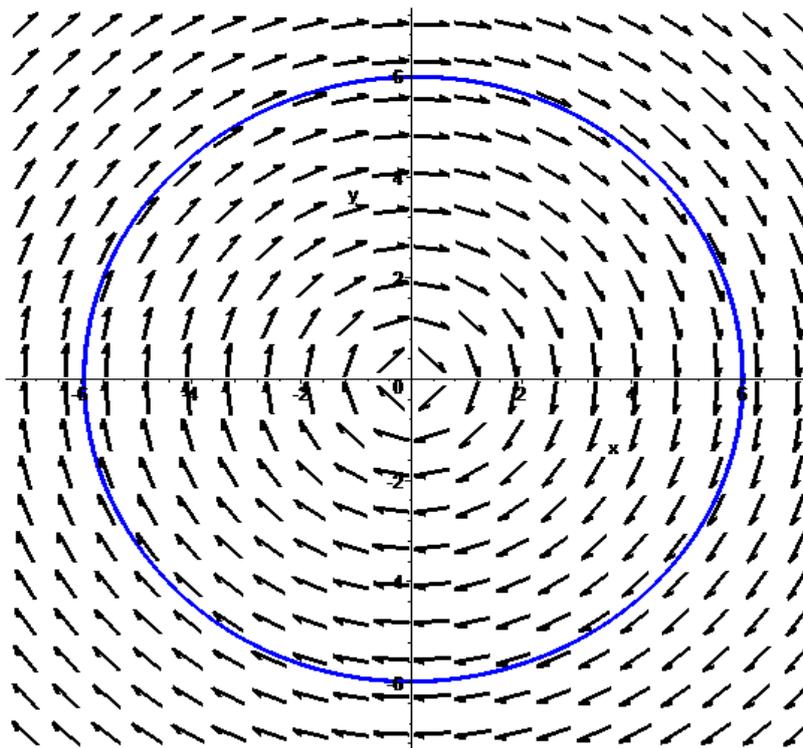
*De (2.3) nous obtenons*

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin(\theta) (-r - 9 \sin(\theta) + r^2 (\cos(\theta))^2 \sin(\theta)) d\theta = \frac{1}{8} r (r^2 - 36).$$

## 2.1. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

---

La racine positive unique de  $f^0(r)$  est  $r = 6$ . Comme  $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(6) = 9$ , d'après, le théorème 2.1.1 il suit que le système (3.19), pour  $|\varepsilon| \neq 0$ , suffisamment petit, admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon 6 du système non perturbé (2.19) avec  $\varepsilon = 0$ . Comme  $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(6) = 9 > 0$ , alors le cycle limite est instable.



Cycle limite pour  $\varepsilon = 0.001$

## 2.2 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

Le théorème suivant fournit une approximation du second ordre pour la solution d'un système différentiel périodique.

**Théorème 2.2.1** *Considérons les deux problèmes à valeurs initiales*

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.16)$$

et

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 f^{10}(y) + \varepsilon^2 g^0(y), \quad y(0) = x_0 \quad (2.17)$$

avec  $F, G : [0, \infty[ \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : [0, \infty[ \times D \times ]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $F, G$  et  $R$  sont des fonctions périodiques de période  $T$  par rapport à la variable  $t$ , et

$$\begin{aligned} f^0(y) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt, \\ f^1(y) &= \frac{\partial f}{\partial x} y^1(t, x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(x), \end{aligned} \quad (2.18)$$

où

$$y^1(t, x) = \int_0^s [f(s, x) - f^0(x)] ds + z(x),$$

avec  $z(x) \in C^1$  tel que la moyenne de  $y^1$  est nulle.

$f^0, g^0$  et  $f^{10}$  sont les moyennes correspondantes respectivement à  $F, G$  et  $f^0$  définies par (2.18)

Supposons que :

(1)  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $G$  et  $R$  sont lipchitziennes par rapport à  $x$  et continues dans leurs domaines de définition.

(2)  $T$  est indépendante de  $\varepsilon$

(3)  $|R(t, x, \varepsilon)|$  est borné uniformément dans  $\left[0, \frac{L}{\varepsilon} \left[ \times D \times ]0, \varepsilon_0 \right]$

(4) la solution  $y(t)$  ne quitte pas l'intérieur de  $D$  pendant d'un temps d'échelle  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + o(\varepsilon^2).$$

Pour la démonstration théorème 2.2.1 voir [36].

## 2.2. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

---

**Corollaire 2.2.1** *Si les conditions de théorème 2.2.1 sont vérifiées de plus  $f^0(y) = 0$  alors on a les résultats suivants*

*Si  $p$  est un point d'équilibre (point critique) de  $f^{10}(y) + g^0(y)$  tel que*

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} (f^{10}(y) + g^0(y)) \right|_{y=p} \neq 0, \quad (2.19)$$

*alors il existe une solution  $T$ -périodique  $\phi(t, \varepsilon)$  de (2.16)*

*tel que*

$$\phi(t, \varepsilon) \rightarrow p \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

**Exemple 2.2.1** *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (x^2 + y^2) + \varepsilon^2 (14x + 2x^2 + 3y + xy + y^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon (8x^2 + 8xy + 8y^2) + \varepsilon^2 (14y + 3xy + y^2). \end{cases} \quad (2.20)$$

*En utilisant les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , ce système s'écrit*

$$\begin{cases} \dot{r} = -r\varepsilon (-3 \cos(\theta) \varepsilon \sin(\theta) - \sin(\theta) \varepsilon r - 8r \sin(\theta) + 8r (\cos(\theta))^3 \\ \quad + 2\varepsilon r (\cos(\theta))^3 - 14\varepsilon - 9r \cos(\theta) - 4 \cos(\theta) \varepsilon r), \\ \dot{\theta} = 8\varepsilon r (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) + 2\varepsilon^2 r (\cos(\theta))^2 \sin(\theta) - \sin(\theta) \varepsilon r \\ \quad - \varepsilon^2 r \sin(\theta) + 8 \cos(\theta) \varepsilon r + 1 - 3\varepsilon^2 + 3 (\cos(\theta))^2 \varepsilon^2, \end{cases}$$

*ou d'une manière équivalente*

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

*tel que*

$$F_1(r, \theta) = r^2 (8 \sin(\theta) - 8 (\cos(\theta))^3 + 9 \cos(\theta)),$$

*et*

$$\begin{aligned} F_2(r, \theta) = & r(r \sin(\theta) + 3 \cos(\theta) \sin(\theta) - 80 (\cos(\theta))^3 r^2 \sin(\theta) \\ & + 64 (\cos(\theta))^5 \sin(\theta) r^2 - 55 \cos(\theta) r^2 \sin(\theta) \\ & + 14 - 144 r^2 (\cos(\theta))^2 + 4r \cos(\theta) - 2r (\cos(\theta))^3 \\ & + 128 (\cos(\theta))^4 r^2 + 8r^2). \end{aligned}$$

*On applique la méthode de moyennisation du deuxième ordre*

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 (8 \sin(\theta) - 8 (\cos(\theta))^3 + 9 \cos(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

CHAPITRE 2. MÉTHODE DE MOYENNISATION

---

On a

$$f_1(r) = 0.$$

On calcule

$$y^1(r, s) = \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta = -1/3 r^2 (-24 + 24 \cos(s) + 8 (\cos(s))^2 \sin(s) - 11 \sin(s)),$$

$$\begin{aligned} f^1(r, s) &= \frac{\partial F_1}{\partial r} y^1(r, s) = \frac{\partial F}{\partial r} \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta \\ &= 2/3 r^3 (-8 \sin(s) + 8 (\cos(s))^3 - 9 \cos(s)) (-24 + 24 \cos(s) \\ &\quad + 8 (\cos(s))^2 \sin(s) - 11 \sin(s)). \end{aligned}$$

On calcule la fonction  $f_2(r)$  tel que

$$\begin{aligned} f_2(r) &= f^{10}(r) + g^0(r), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^1(r, s) ds + F_2(r, s)) ds, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^1(r, s) + F_2(r, s)) ds, \\ &= -2r(-7 + 8r^2) = -16r^3 + 14r, \\ f_2(r) &= -16r^3 + 14r = 0. \end{aligned}$$

La racine positive unique de  $f_2(r)$  est  $r = \frac{\sqrt{14}}{4}$ .

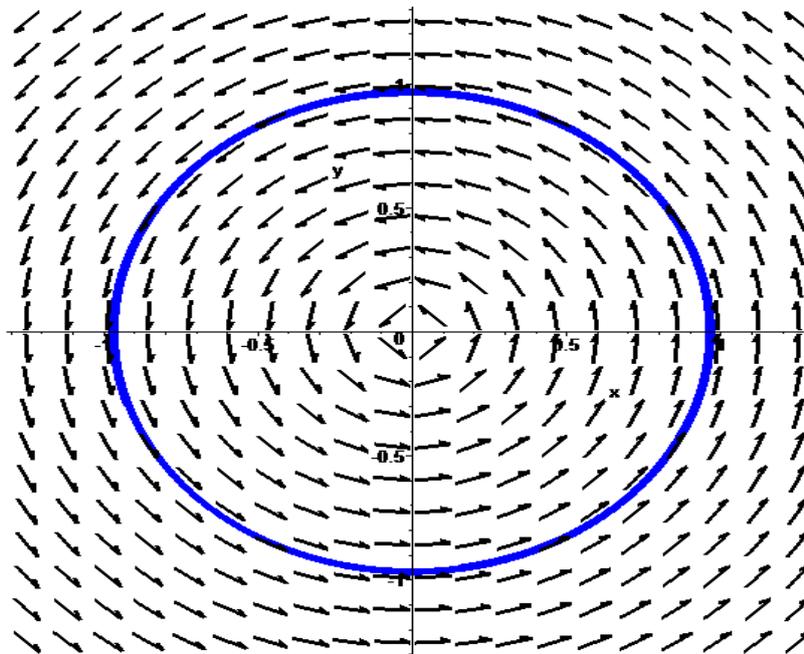
$$\left. \frac{\partial}{\partial r} (f^{10}(r) + g^0(r)) \right|_{r=1} = -48r^2 + 14 \Big|_{r=1} = -28.$$

La racine  $r = \frac{\sqrt{14}}{4}$  est unique. D'après le théorème 2.2.1, le système (2.20) pour  $\varepsilon$  suffisamment petit possède un seul cycle limite.

Puisque  $\left. \frac{\partial}{\partial r} (f^{10}(r) + g^0(r)) \right|_{r=1} < 0$  le cycle limite est stable.

## 2.2. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

---



*Cycle limite pour  $\varepsilon = 0.0001$*

## CHAPITRE 3

### Cycles limites dans un centre linéaire à quatre dimensions

Dans ce chapitre, on va utiliser le théorème 2.1.1 du chapitre 2 afin d'étudier l'existence des cycles limites du système différentiel suivant

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \varepsilon f(x, y), \\ \ddot{y} + y = \varepsilon g(x, y). \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit.  $f$  et  $g$  sont des polynômes arbitraires de degré 4 en ce qui concerne les variables  $x$  et  $y$ . Voir [8].

### 3.1 Introduction

Dans ce travail, nous étudions l'existence des cycles limites du système différentiel à la forme

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \varepsilon f(x, y), \\ \ddot{y} + y = \varepsilon g(x, y). \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit. Ce système apparaît dans de nombreux domaines d'applications. Naturellement, il est équivalent au système à quatre dimensions suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = -x + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} = v, \\ \dot{v} = -y + \varepsilon g(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

formé par des équations différentielles du premier ordre. Pour  $\varepsilon = 0$  système (3.1) devient

$$\dot{x} = u, \quad \dot{u} = -x, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{v} = -y. \quad (3.2)$$

Nous notons que l'origine de  $\mathbb{R}^4$  est un centre isochrone globale pour le système (3.2), c.-à-d, tous les orbites différentes de l'origine sont périodiques à la même période  $2\pi$ .

### 3.2. PREUVE DU THÉORÈME 3.1.1

---

Un cycle limite du système (3.1) est une orbite périodique isolé dans l'ensemble des orbites périodiques (3.1). Nous rappelons qu'un cycle limite d'un système correspond à un zéro isolé de sa fonction de déplacement. Dans [23], J. Llibre et A. Teixeira ont étudié le nombre maximal des cycles limites du système (3.1) où  $f$  et  $g$  sont des polynômes arbitraires de degré 3.

Le théorème suivant est notre principal résultat

**Théorème 3.1.1** *Système (3.1), où  $f$  et  $g$  sont des polynômes arbitraires de degré 4 dans les variables  $x$  et  $y$ , a au plus deux cycles limites bifurquant des orbites périodiques du système (3.2) jusqu'à l'expansion du premier ordre de la fonction de déplacement de (3.1) par rapport au petit paramètre  $\varepsilon$ . En outre, le système (3.2) a exactement deux cycles limites.*

Nous utilisons la méthode de moyennisation pour démontrer le théorème 3.1.1. Pour obtenir des résultats supplémentaires en utilisant la méthode de moyennisation pour calculer les orbites périodiques voir [2], [21] en général, il n'est pas facile de trouver un changement de variables pour passer d'un système différentiel donné à la une forme normale en appliquant la méthode de moyennisation pour trouver des orbites périodiques. En particulier, il n'est pas facile d'appliquer la méthode de moyennisation pour étudier les cycles limites bifurquant des orbites périodiques d'un centre (pour le système à deux dimensions (voir [36], [21]), pour les systèmes de dimension supérieure, voir [17], [3]).

L'idée générale est de relier ce changement de variables pour les intégrales premières du centre.

## 3.2 Preuve du Théorème 3.1.1

Dans cette section,  $f$  et  $g$  sont des polynômes arbitraires de degré 4 dans les variables  $x$  et  $y$ , plus précisément

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 \\ &\quad + a_9y^3 + a_{10}x^4 + a_{11}x^3y + a_{12}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}y^4, \\ g(x, y) &= b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^3 + b_7x^2y + b_8xy^2 \\ &\quad + b_9y^3 + b_{10}x^4 + b_{11}x^3y + b_{12}x^2y^2 + b_{13}xy^3 + b_{14}y^4. \end{aligned}$$

Selon [3] nous laissons

$$x = r \cos(\theta), u = r \sin(\theta), y = s \cos(\theta + \alpha), v = s \sin(\theta + \alpha). \quad (3.3)$$

Nous remarquons que ce changement des variables n'est pas un difféomorphisme lorsque  $r = 0$  ou  $s = 0$ . Donc, nous devons restreindre notre étude sur les cycles limites de système (3.1) de la région de l'espace où  $r > 0$  et  $s > 0$ . Nous notons que  $r, s, \alpha$  sont des constantes, qui sont deux intégrales premières indépendantes

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DANS UN CENTRE LINÉAIRE À QUATRE DIMENSIONS

---

du système (3.2), et que ce changement limité par rapport du plan  $(x, u)$  est un changement de coordonnées polaires. Ensuite, le système (3.1) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon F_1(\theta, r, s, \alpha), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon G(\theta, r, s, \alpha), \\ \dot{s} = \varepsilon F_2(\theta, r, s, \alpha), \\ \dot{\alpha} = \varepsilon F_3(\theta, r, s, \alpha), \end{cases} \quad (3.4)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r, s, \alpha) = & -\sin(\theta) (a_1 r \cos(\theta) + a_2 s \cos(\theta + \alpha) + a_3 r^2 (\cos(\theta))^2 \\ & + a_4 r \cos(\theta) s \cos(\theta + \alpha) + a_5 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 + a_6 r^3 (\cos(\theta))^3 \\ & + a_7 r^2 (\cos(\theta))^2 s \cos(\theta + \alpha) + a_8 r \cos(\theta) s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 \\ & + a_9 s^3 (\cos(\theta + \alpha))^3 + a_{10} r^4 (\cos(\theta))^4 + a_{11} r^3 (\cos(\theta))^3 s \cos(\theta + \alpha) \\ & + a_{12} r^2 (\cos(\theta))^2 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 + a_{13} r \cos(\theta) s^3 (\cos(\theta + \alpha))^3 \\ & + a_{14} s^4 (\cos(\theta + \alpha))^4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\theta, r, s, \alpha) = & (a_1 r (\cos(\theta))^2 + \cos(\theta) a_2 s \cos(\theta + \alpha) + a_3 r^2 (\cos(\theta))^3 \\ & + a_4 r (\cos(\theta))^2 s \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta) a_5 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 \\ & + a_6 r^3 (\cos(\theta))^4 + a_7 r^2 (\cos(\theta))^3 s \cos(\theta + \alpha) \\ & + a_8 r (\cos(\theta))^2 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 + \cos(\theta) a_9 s^3 (\cos(\theta + \alpha))^3 \\ & + a_{10} r^4 (\cos(\theta))^5 + a_{11} r^3 (\cos(\theta))^4 s \cos(\theta + \alpha) \\ & + a_{12} r^2 (\cos(\theta))^3 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 + a_{13} r (\cos(\theta))^2 s^3 (\cos(\theta + \alpha))^3 \\ & + \cos(\theta) a_{14} s^4 (\cos(\theta + \alpha))^4)/r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\theta, r, s, \alpha) = & s \sin(\theta + \alpha) (b_1 r \cos(\theta) + b_2 s \cos(\theta + \alpha) + b_3 r^2 (\cos(\theta))^2 \\ & + b_4 r \cos(\theta) s \cos(\theta + \alpha) + b_5 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 + b_6 r^3 (\cos(\theta))^3 \\ & + b_7 r^2 (\cos(\theta))^2 s \cos(\theta + \alpha) + b_8 r \cos(\theta) s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 \\ & + b_9 s^3 (\cos(\theta + \alpha))^3 + b_{10} r^4 (\cos(\theta))^4 + b_{11} r^3 (\cos(\theta))^3 s \cos(\theta + \alpha) \\ & + b_{12} r^2 (\cos(\theta))^2 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 + b_{13} r \cos(\theta) s^3 (\cos(\theta + \alpha))^3 + b_{14} s^4 (\cos(\theta + \alpha))^4)/r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(\theta, r, s, \alpha) = & -(a_1 r (\cos(\theta))^2 + a_3 r^2 (\cos(\theta))^3 + a_4 r (\cos(\theta))^2 s \cos(\theta + \alpha) \\ & + \cos(\theta) a_5 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 + a_6 r^3 (\cos(\theta))^4 + a_7 r^2 (\cos(\theta))^3 s \cos(\theta + \alpha) \\ & + a_8 r (\cos(\theta))^2 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 + \cos(\theta) a_9 s^3 (\cos(\theta + \alpha))^3 \\ & + a_{10} r^4 (\cos(\theta))^5 + a_{11} r^3 (\cos(\theta))^4 s \cos(\theta + \alpha) + a_{12} r^2 (\cos(\theta))^3 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^2 \\ & + a_{13} r (\cos(\theta))^2 s^3 (\cos(\theta + \alpha))^3 + \cos(\theta) a_{14} s^4 (\cos(\theta + \alpha))^4 + \cos(\theta) a_2 s \cos(\theta + \alpha))/r + \\ & (\cos(\theta + \alpha) b_1 r \cos(\theta) + \cos(\theta + \alpha) b_3 r^2 (\cos(\theta))^2 + b_4 r \cos(\theta) s (\cos(\theta + \alpha))^2 \\ & + b_5 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^3 + \cos(\theta + \alpha) b_6 r^3 (\cos(\theta))^3 + b_7 r^2 (\cos(\theta))^2 s (\cos(\theta + \alpha))^2 \\ & + b_8 r \cos(\theta) s^2 (\cos(\theta + \alpha))^3 + b_9 s^3 (\cos(\theta + \alpha))^4 + \cos(\theta + \alpha) b_{10} r^4 (\cos(\theta))^4 \\ & + b_{11} r^3 (\cos(\theta))^3 s (\cos(\theta + \alpha))^2 + b_{12} r^2 (\cos(\theta))^2 s^2 (\cos(\theta + \alpha))^3 \\ & + b_{13} r \cos(\theta) s^3 (\cos(\theta + \alpha))^4 + b_{14} s^4 (\cos(\theta + \alpha))^5 + b_2 s (\cos(\theta + \alpha))^2)/s. \end{aligned}$$

### 3.2. PREUVE DU THÉORÈME 3.1.1

---

Nous notons que la fonction  $F_3$  n'est pas bien définie lorsque  $r = 0$  ou  $s = 0$ , mais ce n'est pas nécessaire d'étudier les cycles limites de système (3.1) contenus dans la région ( $r > 0, s > 0$ ). Maintenant en prenant  $\theta$  comme variable indépendante, le système (3.4) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r, s, \alpha) + \varepsilon^2 R_1(\theta, r, s, \alpha, \varepsilon), \\ \frac{ds}{d\theta} = \varepsilon F_2(\theta, r, s, \alpha) + \varepsilon^2 R_2(\theta, r, s, \alpha, \varepsilon), \\ \frac{d\alpha}{d\theta} = \varepsilon F_3(\theta, r, s, \alpha) + \varepsilon^2 R_3(\theta, r, s, \alpha, \varepsilon). \end{cases} \quad (3.5)$$

Ce système est déjà dans la forme normale (2.2) pour l'application de la méthode de moyennisation avec  $x = (r, s, \alpha)$  et  $t = \theta$ . Nous notons que le système (3.5) satisfait les hypothèses du théorème 2.1.1 dans une grande boule  $D$  centrée à l'origine. Si, sur la note

$$(f_1, f_2, f_3)(r, s, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_1, F_2, F_3)(\theta, r, s, \alpha) d\theta.$$

Puis

$$\begin{cases} f_1(r, s, \alpha) = (s(2a_8rs \cos(\alpha) + 3a_9s^2 + a_7r^2 + 4a_2) \sin(\alpha))/8, \\ f_2(r, s, \alpha) = -(s(b_8s^2 + 2b_7rs \cos(\alpha) + 4b_1 + 3b_6r^2) \sin(\alpha))/8, \\ f_3(r, s, \alpha) = -(3r^4b_6 \cos(\alpha) + 3b_8s^2r^2 \cos(\alpha) - 4s^2a_2 \cos(\alpha) - 3s^4a_9 \cos(\alpha) \\ + 4srb_2 + 4r^2b_1 \cos(\alpha) - s^3a_8r - 3sr^3a_6 - 4sa_1r + b_7sr^3 \\ + 3b_9s^3r + 2r^3b_7(\cos(\alpha))^2s - 2s^3a_8(\cos(\alpha))^2r - 3s^2a_7r^2 \cos(\alpha))/8sr, \end{cases}$$

d'après le théorème 2.1.1, les zéros  $(r_0, s_0, \alpha_0)$

$$(f_1, f_2, f_3)(r, s, \alpha) = (0, 0, 0), \quad (3.6)$$

tel que

$$\det \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial r & \partial f_1/\partial s & \partial f_1/\partial \alpha \\ \partial f_2/\partial r & \partial f_2/\partial s & \partial f_2/\partial \alpha \\ \partial f_3/\partial r & \partial f_3/\partial s & \partial f_3/\partial \alpha \end{pmatrix} (r_0, s_0, \alpha_0) \neq 0. \quad (3.7)$$

Fournir des solutions périodiques de système (3.1), où  $f$  et  $g$  sont des polynômes du quatrième degré définis comme ci-dessus. Ainsi, en particulier, un zéro à (3.6) doit être isolé de l'ensemble de tous les zéros à (3.6). Nous notons que les zéros à (3.6) ayant  $\sin \alpha = 0$  sont non-isolés, donc on ne peut pas appliquer la méthode de moyennisation pour obtenir les cycles limites. En outre, puisque le système différentiel (3.4) n'est bien définie quand  $s > 0$  et  $r > 0$ , dans le reste de cette section, nous supposons que  $r > 0, s > 0$  et  $\sin \alpha \neq 0$ , et par conséquent, nous devons trouver les zéros

$$(g_1, g_2, g_3)(r, s, \alpha) = (0, 0, 0), \quad (3.8)$$

satisfaisant (3.7), où

$$g_1 = \frac{8f_1}{s \sin \alpha}, \quad g_2 = -\frac{8f_2}{s \sin \alpha}, \quad g_3 = -8rsf_3.$$

Le reste de la preuve du théorème 3.1.1 est divisée en deux

**Cas 1** Supposons  $a_8 \neq 0$ . Ensuite, à partir de  $g_1(r, s, \alpha)$  nous obtenons

$$\cos(\alpha) = -\frac{3a_9s^2 + a_7r^2 + 4a_2}{2a_8rs}.$$

Maintenant, substitution  $\cos(\alpha)$  en  $g_2(r, s, \alpha) = 0$ , on obtient

$$a_8s^2b_8 - 3s^2b_7a_9 - b_7a_7r^2 - 4b_7a_2 + 4a_8b_1 + 3a_8b_6r^2 = 0. \quad (3.9)$$

**Sous cas 1.1** Supposons  $a_7b_7 - 3a_8b_6 \neq 0$ . Ensuite, la résolution de l'équation (3.9) par rapport à  $r$ , nous donne

$$r = \sqrt{\frac{s^2b_8a_8 - 3s^2b_7a_9 - 4b_7a_2 + 4b_1a_8}{b_7a_7 - 3b_6a_8}}.$$

Maintenant, substituons  $\cos \alpha$  et  $r$  en  $g_3(r, s, \alpha) = 0$ . Nous obtenons une équation de la forme  $a + bs^2 = 0$ , qui a au plus une solution positive pour  $s$ . Par conséquent, dans ce sous cas, nous obtenons une valeur unique pour  $r, s$  et  $\cos \alpha$ . Mais celle-ci offre au plus deux solutions pour  $a$ . Ainsi, en supposant que pour ces deux solutions le déterminant (3.9) n'est pas nul, le théorème 3.1.1 entraîne que dans ce système de sous cas a au plus deux solutions périodiques (3.1).

**Sous cas 1.2** Supposons  $a_7b_7 - 3a_8b_6 = 0$ . C'est  $b_6 = a_7b_7/(3a_8)$ , alors, nous devons tenir compte de deux sous cas supplémentaires.

**Sous cas 1.2.1** Supposons  $a_8b_8 - 3a_9b_7 \neq 0$ . Par conséquent, dans la forme (3.9) nous obtenons que

$$s = 2\sqrt{\frac{a_2b_7 - a_8b_1}{a_8b_8 - 3a_9b_7}}.$$

Nous devons considérer que  $a_2b_7 - a_8b_1 \neq 0$ ; autrement  $s = 0$  et, il n'ya pas de solutions périodiques. Nous remplaçons  $\cos \alpha$  et  $s$  en  $g_3(r, s, \alpha) = 0$ , on obtient des solutions périodiques. Nous remplaçons  $\cos \alpha$  et  $s$  en  $g_3(r, s, \alpha) = 0$ , pour obtenir une équation de la forme  $r(a + br^2) = 0$ . Depuis  $r$  doit être positif, de nouveau dans ce sous cas nous obtenons une valeur unique pour  $r, s$  et  $\cos \alpha$ ; et par conséquent au plus deux solutions périodiques du système (3.1).

**Sous cas 1.2.2**

### 3.2. PREUVE DU THÉORÈME 3.1.1

---

Supposons  $a_8b_8 - 3a_9b_7 = 0$ . Puis, à partir de (3.9), nous devons avoir que  $a_2b_7 - a_8b_1 = 0$ , sinon il n'y a pas de solutions. C'est,  $b_1 = \frac{a_2b_7}{a_8}$ . En remplaçant  $\cos \alpha$  en  $g_3(r, s, \alpha) = 0$ , nous obtenons un continuum de solutions pour  $r$  et  $s$ . Donc, dans ce cas, nous ne pouvons pas appliquer le théorème 2.2.1.

**Cas 2** Supposons  $a_8 = 0$ . Encore une fois, nous devons envisager de suivre sous-cas.

**Sous cas 2.1** Supposons  $b_7 \neq 0$ . Puis, à partir de  $g_1(r, s, \alpha) = 0$ , on obtient que

$$r = \sqrt{-\frac{4a_2 + 3a_9s^2}{a_7}}.$$

Nous supposons  $4a_2 + 3a_9s^2 \neq 0$ , sinon  $r = 0$ . Maintenant, nous remplaçons  $r$  en  $g_2(r, s, \alpha) = 0$ .

**Sous cas 2.1.1**

Supposons  $b_7 \neq 0$ . Puis, à partir de  $g_2 = 0$ , on obtient que

$$\cos \alpha = -\frac{4a_7b_1 - 12a_2b_6 + (a_7b_8 - 9a_9b_6)s^2}{2b_7s\sqrt{-a_7(4a_2 + 3a_9s^2)}}.$$

Maintenant, en remplaçant  $r$  et  $\cos \alpha$  en  $g_3(r, s, \alpha) = 0$ , on obtient une équation de la forme

$$s\sqrt{-\frac{4a_2 + 3a_9s^2}{a_7}}(a + bs^2) = 0.$$

Puisque les deux premiers facteurs ne peuvent pas être zéro, comme dans les sous cas précédents, nous pouvons obtenir au plus deux solutions périodiques au système (3.1).

**Sous cas 2.1.2** Supposons  $b_7 = 0$ .

**Sous cas 2.1.2.1**  $a_7b_8 - 9a_9b_6 \neq 0$ . Puis, à partir de  $g_2 = 0$  nous obtenons

$$s = 2\sqrt{\frac{3a_2b_6 - a_7b_1}{a_7b_8 - 9a_9b_6}}.$$

En substituant  $r$  et  $s$  en  $g_3(r, s, \alpha) = 0$ , on obtient une équation de la forme  $a + b\cos \alpha = 0$ . Donc, encore une fois nous obtenons au plus une solution pour  $r, s$  et  $\cos \alpha$ , donc au plus deux solutions périodiques au système (3.1).

**Sous cas 2.1.2.2**  $a_7b_8 - 9a_9b_6 = 0$ . C'est,  $b_8 = \frac{9a_9b_6}{a_7}$ . Maintenant, de  $g_2 = 0$ , il

suit que  $a_7b_1 - 9a_9b_6 = 0$ , sinon il n'y a pas de solutions. Par conséquent,  $b_1 = \frac{3a_2b_6}{a_7}$ .

En substituant  $r$  en  $g_3(r, s, \alpha) = 0$ , on obtient un continuum de solutions. Ainsi, les hypothèses du théorème 2.1.1 ne sont pas satisfaites

**Sous cas 2.2** Supposons un  $a_7 = 0$ . Pour en équation  $g_1(r, s, \alpha) = 0$ , nous voyons que  $a_9$  ne peut pas être nul, sinon  $g_1 = 0$  se réduit à un  $a_2 = 0$ , et donc il

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DANS UN CENTRE LINÉAIRE À QUATRE DIMENSIONS

---

n'ya pas de solutions ou il y'a un continuum de solutions. Par conséquent, de  $g_1 = 0$ , nous obtenons

$$s = 2\sqrt{-\frac{a_2}{3a_9}}.$$

Nous remplaçons  $s$  en  $g_2(r, s, \alpha) = 0$ .

**Sous cas 2.2.1**

Supposons  $b_7 \neq 0$ . Puis, à partir de  $g_2 = 0$ , il en résulte que

$$\cos \alpha = \frac{12a_9b_1 - 4a_2b_8 + 9a_9b_6r^2}{4b_7\sqrt{-3a_2a_9r}}.$$

En substituant  $s$  et  $\cos \alpha$  en  $g_3(r, s, \alpha) = 0$ , on obtient une équation de la forme  $r(a + br^2) = 0$ . Par conséquent, comme dans sous cas précédent le système (3.1) a au plus deux solutions périodiques.

**Sous cas 2.2.2**

Supposons  $b_7 = 0$ . Ensuite, l'équation  $g_2 = 0$  est de la forme  $a + br^2 = 0$ , donc a une solution la plus positive pour  $r$ . De plus, en remplaçant  $s$  et  $r$  en  $g_3(r, s, \alpha) = 0$  nous obtenons une équation de la forme  $c + d \cos \alpha = 0$ . Par conséquent, elle a au plus une solution pour  $\cos \alpha$ . En bref, il existe au plus une solution pour  $s$ ,  $r$  et  $\cos \alpha$ . Donc, le système (3.1) a au plus deux solutions périodiques. En résumé, d'après le théorème 2.1.1, nous pouvons obtenir au plus deux solutions périodiques du système (3.1) lorsque  $f$  et  $g$  sont des polynômes arbitraires de degré 4 en les variables  $x$  et  $y$ . Nous affirmons que la fonction de déplacement du système (2.1) pour la section transversale  $u = 0$ , écrite dans les coordonnées (3.3), a la forme

$$\varepsilon(f_1, f_2, f_3)(r, s, \alpha) + \varepsilon^2(1).$$

Par conséquent, cette allégation achève la démonstration de la première partie du théorème 3.1.1.

Pour compléter la démonstration du théorème 3.1.1, nous devons fournir un système (3.1) avec donnée polynômes  $f$  et  $g$  de degré 4, pour lequel le théorème 2.1.1 fournit exactement deux cycles limites.

Nous considérons un système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = -x + \varepsilon(2x + y + x^2y - 2xy^2 + 6x^4 + x^2y^2 + xy^3 + 4y^4), \\ \dot{y} = v, \\ \dot{v} = -y + \varepsilon\left(-5x - \frac{53}{20}y + \frac{1}{2}x^3 + 2x^2y + \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{20}y^3 + x^4 + 3x^3y - xy^3 + 3y^4\right). \end{cases}$$

Ensuite, il est facile de vérifier que  $(r, s, \alpha) = \left(2, 2, \pm\frac{\pi}{3}\right)$  sont des zéros du système (3.6) de déterminant (3.7) égale  $\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$ , respectivement. Ainsi, ce système a deux solutions périodiques provenant d'orbites périodiques vers le centre (3.2).

## CHAPITRE 4

# Cycles limites pour la classe des systèmes différentiels polynomiaux en d-dimensions

Dans ce chapitre, on va utiliser le théorème 2.1.1 du chapitre 2 afin d'étudier le nombre maximal des cycles limites du système différentiel (4.4).

### 4.1 Introduction

Un des problèmes principaux de la théorie de systèmes différentiels est l'étude de leurs orbites périodiques, leur existence, leur nombre et leur stabilité. Comme d'habitude un cycle limite d'un système différentiel est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques du système différentiel.

Dans l'article [6], les auteurs ont étudié le système différentiel suivant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \varepsilon(ax + P(x, y)), \\ \dot{y} &= x + \varepsilon(ay + Q(x, y)),\end{aligned}\tag{4.1}$$

où  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  sont des polynômes arbitraires de degré  $n$  commençant par des termes de degré 2,  $a$  est un paramètre réel et  $\varepsilon$  est un suffisamment petit. Ils ont prouvé que le nombre maximal de cycles limites est  $\frac{(n-1)}{2}$  si  $n$  est impair et  $\frac{(n-2)}{2}$  si  $n$  est pair, bifurquant des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$ .

Dans le même article, les auteurs ont étudié les cycles limites du système différentiel suivant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \varepsilon(ax + P(x, y, z)), \\ \dot{y} &= x + \varepsilon(ay + Q(x, y, z)), \\ \dot{z} &= \varepsilon(bz + R(x, y, z)),\end{aligned}\tag{4.2}$$

où  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  et  $R(x, y, z)$  sont des polynômes arbitraires de degré  $n$  commençant par des termes de degré 2 et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors existe  $\varepsilon_0 > 0$  suffisamment petit tel que pour  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , alors le système différentiel (4.2) a au plus  $\frac{n(n-1)}{2}$  cycles limites bifurquant des orbites périodiques du système  $\dot{x} = -y$ ,  $\dot{y} = x$ ,  $\dot{z} = 0$ . Dans l'article [24], J. Llibre et Jiang Yu ont étudié le nombre de cycles limites du système différentiel suivant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y(1+x) + \varepsilon(ax + P(x, y, z)), \\ \dot{y} &= x(1+x) + \varepsilon(ay + Q(x, y, z)), \\ \dot{z} &= \varepsilon(bz + R(x, y, z)),\end{aligned}\tag{4.3}$$

où  $F(x, y, z)$ ,  $G(x, y, z)$  et  $R(x, y, z)$  sont des polynômes de degré  $n$  commençant par des termes de degré 2. Alors existe  $\varepsilon_0 > 0$  suffisamment petit tel que pour  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , le système différentiel (4.3) a au plus  $n^2$  cycles limites bifurquant des orbites périodiques du système  $\dot{x} = -y(1+x)$ ,  $\dot{y} = x(1+x)$ ,  $\dot{z} = 0$ .

Obtenir des solutions analytiquement périodiques est en général un travail très difficile, souvent impossible. Ici, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre pour étudier le nombre maximum de cycles limites du système différentiel en  $\mathbb{R}^d$  suivant

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2(1+x_1) + \varepsilon(ax_1 + P_1(x_1, \dots, x_d)), \\ \dot{x}_2 &= x_1(1+x_1) + \varepsilon(ax_2 + P_2(x_1, \dots, x_d)), \\ \dot{x}_k &= \varepsilon(b_k x_k + P_k(x_1, \dots, x_d)),\end{aligned}\tag{4.4}$$

où  $P_k(x_1, \dots, x_d)$  pour  $k = 1, \dots, d$  sont des polynômes arbitraires de degré  $n$  commençant par des termes de degré 2 et  $a, b_k \in \mathbb{R}$ . Voir [10].

Le problème de l'étude des cycles limites du système (4.4) est réduit en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre à celui de trouver les zéros d'un système non linéaire de  $d-2$  équations avec  $d-2$  inconnues. Il est connu que la théorie de moyennisation pour trouver des solutions périodiques ne fournissant pas en générales toutes les solutions périodiques du système. Pour expliquer cette idée, il ya deux raisons principales. Tout d'abord, la théorie de moyennisation pour l'étude des solutions périodiques d'un système différentiel est basée sur la fonction dite de déplacement, dont les zéros fournissent des solutions périodiques. Cette fonction de déplacement en général est pas globale et par conséquent elle ne peut pas contrôler toutes les solutions périodiques, celles ceux qui sont dans son domaine de définition et qui sont hyperboliques. D'autre part, la fonction de déplacement est développée en série de puissance d'un petit paramètre  $\varepsilon$ , et la théorie de moyennisation peut seulement contrôler les zéros du terme dominant de cette fonction de déplacement. Lorsque le terme dominant est  $\varepsilon^k$ , nous parlons de la théorie de moyennisation d'ordre  $k$ . Pour plus de détails, voir par exemple [26] et les références citées là. Pour plus d'informations à propos de la méthode de moyennisation, voir le chapitre 2.

**Théorème 4.1.1** *En appliquant la méthode de moyennisation du premier ordre au système différentiel (4.4), au plus  $n^{d-1}$  cycles limites bifurquent des orbites pé-*

## 4.2. CYCLES LIMITES PAR LA MÉTHODE DE MOYENNISATION

---

riodiques du système différentiel  $\dot{x}_1 = -x_2(1 + x_1)$ ,  $\dot{x}_2 = x_1(1 + x_1)$ ,  $\dot{x}_3 = 0$ ,  $\dot{x}_4 = 0, \dots, \dot{x}_d = 0$ .

## 4.2 Cycles limites par la méthode de moyennisation

**Lemme 4.2.1** Pour  $i, j \in \mathbb{N}$ ,

$$I_{i,j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^i \theta \sin^j \theta}{1 + \cos \theta} d\theta.$$

Puis  $I_{i,j} = 0$  si et seulement si  $j$  est pair.  
Pour  $i, j \in \mathbb{N}$ , où  $j$  pair,

$$I_{i,j} = \sum_{\substack{s=0 \\ s \text{ even}}}^j (-1)^{s/2} \binom{j/2}{s/2} I_{i+s,0}.$$

**Lemme 4.2.2** Soient Les égalités suivantes.

1) Pour  $k \in \mathbb{N}$

$$E_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^k \theta = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair,} \\ C_k^{k/2} 2^{-k} & \text{si } k \text{ pair.} \end{cases}$$

2)

$$I_{0,0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + r \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

**Lemme 4.2.3** Pour  $i \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$\begin{aligned} I_{i,0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^i \theta}{1 + r \cos \theta} d\theta, \\ &= \frac{(-1)^i}{r^i \sqrt{1 - r^2}} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \equiv i \pmod{2}}}^i (-1)^{l-1} 2^{l-i} \binom{i-l}{(i-l)/2} r^{-l}. \end{aligned}$$

### 4.2.1 Preuve de théorème 4.1.1

En utilisant les coordonnées polaires  $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$ , le système (4.4) devient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon \left( ar + \sum_{i=2}^n \sum_{i_1+\dots+i_d=i} r^{i_1+i_2} x_3^{i_3} \dots x_d^{i_d} (a_{i_1, i_2, \dots, i_d}^{i,1} \cos^{i_1+1} \theta \sin^{i_2} \theta \right. \\ &\quad \left. + a_{i_1, i_2, \dots, i_d}^{i,2} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2+1} \theta) \right), \\ \dot{\theta} &= 1 + r \cos \theta + \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=2}^n \sum_{i_1+\dots+i_d=i} r^{i_1+i_2} x_3^{i_3} \dots x_d^{i_d} (a_{i_1, i_2, \dots, i_d}^{i,2} \cos^{i_1+1} \theta \sin^{i_2} \theta \right. \\ &\quad \left. - a_{i_1, i_2, \dots, i_d}^{i,1} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2+1} \theta) \right), \\ \dot{x}_k &= \varepsilon (b_k x_k + \sum_{i=2}^n \sum_{i_1+\dots+i_d=i} a_{i_1, i_2, \dots, i_d}^{i,k} r^{i_1+i_2} x_3^{i_3} \dots x_d^{i_d} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2} \theta), \end{aligned}$$

où  $k = 3, \dots, d$ , considérons maintenant  $\theta$  comme la variable indépendante de  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon F(\theta, r, x_3, \dots, x_d) + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dx_k}{d\theta} &= \varepsilon (G_k(\theta, r, x_3, \dots, x_d)) + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{4.5}$$

pour  $k = 3, \dots, d$ , où

$$\begin{aligned} F(\theta, r, x_3, \dots, x_d) &= ar D_{0,0} + \sum_{i=2}^n \sum_{i_1+\dots+i_d=i} r^{i_1+i_2} x_3^{i_3} \dots x_d^{i_d} (a_{i_1, i_2, \dots, i_d}^{i,1} D_{i_1+1, i_2} \\ &\quad + a_{i_1, i_2, \dots, i_d}^{i,2} D_{i_1, i_2+1}), \end{aligned}$$

et

$$G_k(\theta, r, x_3, \dots, x_d) = b_k x_d D_{0,0} + \sum_{i=2}^n \sum_{i_1+\dots+i_d=i} a_{i_1, i_2, \dots, i_d}^{i,k} r^{i_1+i_2} x_3^{i_3} \dots x_d^{i_d} D_{i_1, i_2},$$

où

$$D_{i_1, i_2} = \frac{\cos^{i_1} \theta \sin^{i_2} \theta}{1 + r \cos \theta}.$$

Maintenant, en utilisant la notation introduite dans le Lemme 4.2.1 et appliquant la méthode de moyennisation du premier ordre, nous devons trouver les zéros du système

$$f(r, x_3, \dots, x_d) = 0, \quad g_k(r, x_3, \dots, x_d) = 0 \text{ pour } k = 3, \dots, d. \tag{4.6}$$

où

$$\begin{aligned}
 f(r, x_3, \dots, x_d) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r, x_3, \dots, x_d) d\theta, \\
 &= arI_{0,0} + \sum_{i=2}^n \sum_{i_1+\dots+i_d=i} r^{i_1+i_2} x_3^{i_3} \dots x_d^{i_d} (a_{i_1, i_2, \dots, i_d}^{i,1} I_{i_1+1, i_2} \\
 &\quad + a_{i_1, i_2, \dots, i_d}^{i,2} I_{i_1, i_2+1}), \\
 g_k(r, x_3, \dots, x_d) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_k(\theta, r, x_3, \dots, x_d) d\theta, \\
 &= b_k x_k I_{0,0} + \sum_{i=2}^n \sum_{i_1+\dots+i_d=i} a_{i_1, i_2, \dots, i_d}^{i,k} r^{i_1+i_2} x_3^{i_3} \dots x_d^{i_d} I_{i_1, i_2}, \\
 \text{pour } k &= 3, \dots, d
 \end{aligned}$$

et

$$I_{i,j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_{i_1, i_2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^{i_1} \theta \sin^{i_2} \theta}{1 + \cos \theta} d\theta.$$

**Théorème 4.2.1** Soit  $t = \sqrt{1-r^2}$  et  $k = 3\dots d$ . La fonction  $t \times g_k(t, x_3, \dots, x_d)$  est un polynôme de degré  $n$  en ces variables  $t$  et  $x_k$ , tandis que  $r \times t \times f(t, x_3, \dots, x_d)$  est un polynôme de degré  $n+1$ .

de plus  $r \times t \times f(t, x_3, \dots, x_d) = (t-1)Q(t, x_3, \dots, x_d)$ , où  $Q$  est un polynôme en ces variables  $t$  et  $x_3, x_4, \dots, x_d$  du degré au plus  $n$ .

**Preuve.** La fonction  $g_k$  peut être toute combinaison linéaire  $x_k I_{0,0}$  et  $r^{i_1+i_2} x_3^{i_3} \dots x_d^{i_d} I_{i_1, i_2}$ , où  $2 \leq i_1 + i_2 + \dots + i_d \leq n$ .

Lemma 4.2.1 affirme que

$$r^m I_{m,0} = (-1)^m \left( \sqrt{1-r^2} \right)^{-1} + X_m(r), \quad (4.7)$$

où  $X_m$  est un polynôme pair du degré exactement  $m-1$  et  $m$  est impair et du degré exactement  $m-2$  autrement.

En utilisant  $t = \sqrt{1-r^2}$  nous concluons que

$$r^m I_{m,0} = \frac{(-1)^m + \widehat{X}_m(t)}{t},$$

où  $\widehat{X}_m(t)$  est un polynôme de degré impair exactement  $m$  ou  $m-1$ , respectivement. Puisque  $r^m I_{m,0}$  disparaît à  $r=0$ , les fonctions  $r^k I_{k,0}$  pour  $k=2, \dots, m$  engendrent

l'espace des fonctions de la forme  $[A + \widehat{X}(t)]/t$  disparaît à  $t = 1$  avec  $\deg \widehat{X}(t) = m$  or  $m - 1$ , respectivement. Lemma 4.2.1 implique que toute fonction  $r^{i+j}I_{i,j}$  est de la forme

$$\phi_{i,j} = \frac{Y_{i,j}(t) + \widehat{X}_{i+j}(t)}{t},$$

où  $Y_{i,j}(t)$  sont des polynômes pairs en  $t$  du degré exactement  $j$  ( $j$  est nécessairement pair, par Lemme 4.2.1).  $\widehat{X}_{i+j}(t)$  sont polynômes en  $t$  du degré  $i + j$  ou  $i + j - 1$ . Nous concluons les fonctions  $r^{i_1+i_2}I_{i_1,i_2}$ , où  $2 - (i_3 + \dots + i_d) \leq i_1 + i_2 \leq n - (i_3 + \dots + i_d)$ , engendrent l'espace des fonctions  $Z(t)/t$ , où  $\deg Z \leq n - (i_3 + \dots + i_d)$  (et, de plus,  $Z(1) = 0$ ). Par conséquent  $\{P_k(t, x_3, \dots, x_d)/t, \deg P_k \leq n\}$ ,  $k = 3 \dots d$ . De la même manière,  $f$  peut être n'importe quelle combinaison linéaire de  $r$  et des termes  $r^{i_1+i_2}x_3^{i_3} \dots x_d^{i_d}I_{i_1+1,i_2}$  et  $r^{i_1+i_2}x_3^{i_3} \dots x_d^{i_d}I_{i_1,i_2+1}$ , où  $2 \leq i_1 + i_2 + \dots + i_d \leq n$ . Nous concluons les fonctions  $r^{i_1+i_2}I_{i_1+1,i_2}$  et  $r^{i_1+i_2}I_{i_1,i_2+1}$ , où  $2 - (i_3 + \dots + i_d) \leq i_1 + i_2 \leq n - (i_3 + \dots + i_d)$ , engendre l'espace des fonctions  $Z(t)/rt$ , où  $\deg Z \leq n + 1 - (i_3 + \dots + i_d)$ .

Nous avons  $f(0, x_3, \dots, x_d) = 0$  qui implique  $Z(1) = 0$ .

Par conséquent  $\{(t-1)Q(t, x_3, \dots, x_d)/rt, \deg Q \leq n\}$ . Ainsi  $Q(t, x_3, \dots, x_d)$  et  $t \times g_k(t, x_3, \dots, x_d)$  sont deux polynômes en des variables  $t, x_3, \dots, x_d$  du degré au plus  $n$ . Ainsi par le théorème de Bezout, le nombre maximal commune de  $t \times g_k(t, x_3, \dots, x_d)$  et  $Q(t, x_3, \dots, x_d)$  est à plus  $n^{d-1}$  pour  $0 < t < 1$ . Ainsi, d'après le théorème 2.1.1 dans le chapitre 2, le nombre maximum de cycles limites du système (4.4) est  $n^{d-1}$ .

■

### 4.3 Une application du théorème 4.1.1

Dans le système (4.4) nous considérons le cas de  $n$  pair et

$$\begin{aligned} P_1(x_1, \dots, x_d) &= \sum_{i=2}^n a_{0,0,\dots,i}^{i,1} x_d^i + a_{1,0,\dots,0,1}^{2,1} x_1 x_d & (4.8) \\ P_2(x_1, \dots, x_d) &= 0, \\ P_k(x_1, \dots, x_d) &= \sum_{i=2, i \text{ pair}}^n \left( a_{i,0,\dots,0}^{i,k} x_1^i + a_{0,i,\dots,0}^{i,k} x_2^i \right) \text{ pour } k = 3, \dots, d. \end{aligned}$$

Calculant les fonctions moyennes et on prenant  $t = \sqrt{1 - r^2}$ , nous avons  $r\sqrt{1 - r^2}f(r, x_3, x_4, \dots, x_d) = ar^2 + \left( a_{1,0,\dots,0,1}^{2,1} x_d - \sum_{i=2}^n a_{0,0,\dots,i}^{i,1} x_d^i \right) (1 - \sqrt{1 - r^2})$   
 $= (1 - t) \left( a(1 + t) + a_{1,0,\dots,0,1}^{2,1} x_d - \sum_{i=2}^n a_{0,0,\dots,i}^{i,1} x_d^i \right) = (1 - t) (a(1 + t) - \overline{Q}(x_d))$ ,  
 où  $\overline{Q}(x_d)$  est un polynôme arbitraire en  $x_d$  du degré  $n$  tel que  $\overline{Q}(0) = 0$ . En même

### 4.3. UNE APPLICATION DU THÉORÈME 4.1.1

---

temps, la fonction de moyenne à  $P_k(x_1, \dots, x_d)$  satisfait

$$\sqrt{1-r^2}g_k(r, x_3, x_4, \dots, x_d) = b_k x_k + \sqrt{1-r^2} \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ even}}}^n r^i \left( a_{i,0,0,\dots,0}^{i,k} I_{i,0} + a_{0,i,0,\dots,0}^{i,k} I_{0,i} \right),$$

pour  $k = 3 \dots d$

Il est facile d'obtenir les relations suivantes

$$\frac{r^k \cos^k \theta}{1+r \cos \theta} = (-1)^k \frac{1}{1+r \cos \theta} + \sum_{v=1}^k (-1)^k \cos^{k-v} \theta r^{k-v},$$

$$\frac{r^k \sin^k \theta}{1+r \cos \theta} = \sum_{s=0, s \text{ even}}^k (-1)^{s/2} \binom{k/2}{s/2} \times [(-1)^k \frac{r^{k-s}}{1+r \cos \theta} + \sum_{v=1}^s (-1)^{v-1} \cos^{s-v} \theta r^{k-v}].$$

En regardant le second terme de la première relation et le premier terme de la deuxième relation, nous obtenons  $r^i I_{i,0}$ , et  $r^i I_{0,i}$  pour  $n$  pair  $2 \leq i \leq n$  sont indépendants. En particulier, en utilisant les lemmes 4.2.1, 4.2.2 et 4.2.3, nous obtenons

$$\sqrt{1-r^2}g_k(r, x_3, x_4, \dots, x_d) = b_k x_k + g_{1,k}(r) + g_{2,k}(r), \text{ pour } k = 3, \dots, d$$

où

$$g_{1,k} = \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ even}}}^n a_{i,0,0,\dots,0}^{i,k} - \sqrt{1-r^2} \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ even}}}^{n-1} r^m \sum_{\substack{i=m+1 \\ i \text{ even}}}^n a_{i,0,\dots,0}^{i,k} 2^{-m} \binom{m}{m/2}$$

$$g_{2,k} = \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ even}}}^n A_{m,k} r^m + \sqrt{1-r^2} \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ even}}}^{n-1} B_{m,k} r^m,$$

où

$$A_{m,k} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ even}}}^n a_{0,i,0,\dots,0}^{i,k} d_{i-m,i}, \quad B_{m,k} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ even}}}^n a_{0,i,0,\dots,0}^{i,k} d_{i-m,i} \sum_{\substack{l>0 \\ l \text{ even}}}^n e_{i-m,l},$$

et

$$d_{i-m,i} = (-1)^{(i-m)/2} \binom{i/2}{(i-m)/2}, \quad e_{i-m,l} = (-1)^{l-1} 2^{l-(i-m)} \binom{i-m-l}{(i-m-l)/2}.$$

En posant  $t = \sqrt{1-r^2}$ , les polynômes  $g_{s,k}(r) = P_{s,k}(t)$  satisfont les conditions  $g_{s,k}(0) = P_{s,k}(1) = 0$  pour  $s = 1, 2$  et  $k = 3 \dots d$ . Ensuite, on peut définir un polynôme de degré  $n$  en  $t$

$$\bar{P}_k(t) = P_{1,k}(t) + P_{2,k}(t) = (t-1)\tilde{P}_k(t).$$

En raison de l'indépendance de  $r^i I_{i,0}$  et  $r^i I_{0,i}$  et l'arbitraire des coefficients  $a_{i,0,0,\dots,0}^{i,k}$  et  $a_{0,i,0,\dots,0}^{i,k}$  le polynôme  $\bar{P}_k(t)$  est un polynôme arbitraire tel que  $\bar{P}_k(1) = 0$ . En fait, il est évident que  $g_{1,k}$  et  $g_{2,k}$  possède  $\frac{n}{2}$  paramètres, respectivement, où  $\frac{n}{2}$  coefficients  $a_{0,i,0,\dots,0}^{i,k}$  permet de choisir le premier terme de  $g_{2,k}$  permettent de choisir le premier

CHAPITRE 4. CYCLES LIMITES POUR LA CLASSE DES SYSTÈMES  
DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX EN D-DIMENSIONS

---

terme  $m = 0$ , impliquant que  $n$  pair les termes de  $\overline{P}_k(t)$  sont arbitraires sauf pour le terme constant ; Tandis que l'autre  $\frac{n}{2}$  coefficients  $a_{i,0,0,\dots,0}^{i,k}$  permettent de choisir le deuxième terme de  $g_{1,k}$  arbitrairement, ce qui implique que les termes impairs de  $\overline{P}_k(t)$  sont arbitraires. Par conséquent, le polynôme  $\overline{P}_k(t)$  du degré  $n$  satisfait  $\overline{P}_k(1) = 0$  et  $n$  coefficients arbitraires. Le nombre de solutions de  $f(r, x_3, x_4, \dots, x_d) = 0$ ,  $g_k(r, x_3, x_4, \dots, x_d) = 0$ , pour  $k = 3, \dots, d$  est égal au nombre des points d'intersection des courbes de

$$\begin{aligned} l_1 &: a(1+t) - \overline{Q}(x_d) = 0. \\ l_{k-1} &: b_k x_k + \overline{P}_k(t) = 0, \text{ pour } k = 3, \dots, d. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ainsi par le théorème de Bezout, le nombre maximal de solutions communes du système (4.9) est au plus  $n^{d-1}$  pour  $0 < t < 1$ . Nous pouvons trouver  $n^{d-1}$  points d'intersection sur  $f(r, x_3, \dots, x_d) = 0$  avec  $g_k(r, x_3, \dots, x_d) = 0$  pour  $k = 3 \dots d$ ,  $r \in (r_0, 1)$ ,  $0 < r_0 \ll 1$ , qui (en utilisant la méthode de moyennisation, voir théorème 2.1.1 dans le chapitre 2) donne  $n^{d-1}$  cycles limites bifurquent des orbites périodiques du système  $\dot{x}_1 = -x_2(1+x_1)$ ,  $\dot{x}_2 = x_1(1+x_1)$ ,  $\dot{x}_3 = 0$ ,  $\dot{x}_4 = 0, \dots, \dot{x}_d = 0$ .

## CHAPITRE 5

### Cycles limites de quelques classes d'équations de Van Der Pol

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la théorie de moyennisation pour étudier l'existence de la solution périodique de l'équation différentielle suivante

$$\ddot{x} + x = \varepsilon F(t, x, \dot{x}),$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit et  $F$  est une fonction  $2\pi$ -périodique en  $t$ . En outre, nous donnons une application aux oscillateurs de Van Der Pol.

**Théorème 5.0.1** *Nous considérons l'équation différentielle suivante*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon F(t, x, \dot{x}), \quad (5.1)$$

où  $F(t + 2\pi, x, \dot{x}) = F(t, x, \dot{x})$  et  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petite.

Soient

$$f_1(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F(t, x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)) dt,$$

$$f_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) F(t, x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)) dt.$$

Si, pour chaque  $(x_0^*, y_0^*)$ , la solution du système

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) = 0, \\ f_2(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

satisfait

$$\det \left( \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x, y)} \right) \Big|_{(x_0, y_0) = (x_0^*, y_0^*)} \neq 0,$$

alors l'équation différentielle (5.1) a une solution périodique  $x(t, \varepsilon)$  qui tend à la solution

$$x(t) = x_0^* \cos t + y_0^* \sin t,$$

de l'équation différentielle  $\ddot{x} + x = 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Preuve.** Voir [33]. ■

## 5.1 Applications

**Exemple 5.1.1 (Oscillateur de Van Der Pol classique)** On étudie l'existence de la solution périodique de l'équation

$$\ddot{x} + x = \varepsilon (1 - x^2) \dot{x} - a\varepsilon x + \varepsilon \lambda \sin(t). \quad (5.2)$$

On pose  $a = 2, \lambda = 1$  dans l'équation (5.1) nous obtenons

$$\ddot{x} + x = \varepsilon (1 - x^2) \dot{x} - 2\varepsilon x + \varepsilon \sin(t). \quad (5.3)$$

Posons

$$f_1(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F(t, x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)) dt,$$

$$f_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) F(t, x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)) dt.$$

$$F(t, x, \dot{x}) = (1 - x^2) \dot{x} - 2x + \sin(t),$$

alors

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} x_0^3 + y_0 - \frac{1}{8} y_0^2 x_0 + \frac{1}{2} x_0, \\ f_2(x_0, y_0) = -x_0 - \frac{1}{8} y_0^3 + \frac{1}{2} y_0 - \frac{1}{8} x_0^2 y_0. \end{cases}$$

On résout le système

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) = 0, \\ f_2(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

On trouve la racine

$$(x_0, y_0) = (x_0 = 0.1936478545, y_0 = 0.4081154908).$$

On calcule le déterminant suivant

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial y_0} \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0) = (0.1936478545, 0.4081154908)}$$

## 5.1. APPLICATIONS

---

on obtient

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{3}{8}x_0^2 - \frac{1}{8}y_0^2 + \frac{1}{2} & 1 - \frac{1}{4}x_0y_0 \\ -1 - \frac{1}{4}x_0y_0 & -\frac{3}{8}y_0^2 - \frac{1}{8}x_0^2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Bigg|_{(x_0, y_0) = (0.1936478545, 0.4081154908)} = 1.200937418.$$

Alors l'équation (5.3) possède exactement une seule solution  $2\pi$ -périodique  $x(t, \varepsilon)$  telle que  $x(t, \varepsilon) \rightarrow x(t)$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 5.1.2 (Oscillateur de Van Der Pol non lisse)** On étudie l'existence de la solution périodique de l'équation

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left(1 - \sqrt{x^2}\right) \dot{x} - a\varepsilon x + \varepsilon \lambda \sin(t). \quad (5.4)$$

Posons

$$f_1(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F(t, x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)) dt,$$

$$f_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) F(t, x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)) dt,$$

où

$$F(t, x, \dot{x}) = \left(1 - \sqrt{x^2}\right) \dot{x} - 2x + \sin(t).$$

Alors

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} x_0^3 + \frac{1}{2} a x_0, \\ f_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2} y_0 - \frac{1}{2} a x_0. \end{cases}$$

On résout le système

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) = 0, \\ f_2(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

On trouve la racine

$$(x_0, y_0) = \left( x_0 = \frac{\lambda}{1+a^2}, y_0 = \frac{a\lambda}{1+a^2} \right).$$

On calcule le déterminant suivant

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial y_0} \end{pmatrix} \Bigg|_{(x_0, y_0) = \left( x_0 = \frac{\lambda}{1+a^2}, y_0 = \frac{a\lambda}{1+a^2} \right)}$$

CHAPITRE 5. CYCLES LIMITES DE QUELQUES CLASSES D'ÉQUATIONS DE VAN DER POL

---

On obtient

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Bigg|_{(x_0, y_0) = \left(x_0 = \frac{\lambda}{1+a^2}, y_0 = \frac{a\lambda}{1+a^2}\right)} = \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}.$$

Alors l'équation (5.4) possède exactement une seule solution  $2\pi$ -périodique  $x(t, \varepsilon)$  telle que  $x(t, \varepsilon) \rightarrow x(t)$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 5.1.3** On étudie l'existence de la solution périodique de l'équation de Van Der Pol

$$\ddot{x} + x = \varepsilon (1 - x^2) (\dot{x})^3 - a\varepsilon x + \varepsilon \lambda \sin(t), \quad (5.5)$$

on pose  $a = 2$ ,  $\lambda = 1$  dans l'équation nous obtenons

$$\ddot{x} + x = \varepsilon (1 - x^2) (\dot{x})^3 - 2\varepsilon x + \varepsilon \sin(t). \quad (5.6)$$

Posons

$$f_1(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F(t, x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)) dt,$$

$$f_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) F(t, x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)) dt,$$

où

$$F(t, x, \dot{x}) = (1 - x^2) (\dot{x})^3 - 2x + \sin(t).$$

Alors

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) = -1/2 + 3/8 x_0 y_0^2 - 1/8 y_0^2 x_0^3 - 1/16 y_0^4 x_0 + 3/8 x_0^3 + y_0 - 1/16 x_0^5, \\ f_2(x_0, y_0) = 3/8 y_0^3 + 3/8 x_0^2 y_0 - 1/16 y_0^5 - x_0 - 1/8 y_0^3 x_0^2 - 1/16 x_0^4 y_0. \end{cases}$$

On résout le système

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) = 0, \\ f_2(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

On trouve la racine

$$(x_0, y_0) = (x_0 = 0.4423116409, y_0 = 0.4960560995).$$

On calcule le déterminant suivant

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial y_0} \end{pmatrix} \Bigg|_{(x_0, y_0) = (0.4423116409, 0.4960560995)}$$

## 5.1. APPLICATIONS

---

On obtient

$$\det \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial y_0} \end{array} \right) \Bigg|_{(x_0, y_0) = (0.4423116409, 0.4960560995)} = 1.023136107.$$

Alors l'équation (5.6) possède exactement une seule solution  $2\pi$ -périodique  $x(t, \varepsilon)$  telle que  $x(t, \varepsilon) \rightarrow x(t)$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 5.1.4** On étudie l'existence de la solution périodique de l'équation de Van Der Pol

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left( 1 - \sqrt{x^2} \right) (\dot{x})^3 - a\varepsilon x + \varepsilon \lambda \sin(t), \quad (5.7)$$

on pose  $a = 2$ ,  $\lambda = 1$  dans l'équation nous obtenons

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left( 1 - \sqrt{x^2} \right) \dot{x} - 2\varepsilon x + \varepsilon \sin(t). \quad (5.8)$$

Posons

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F(t, x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)) dt, \\ f_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) F(t, x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t)) dt, \end{aligned}$$

où

$$F(t, x, \dot{x}) = \left( 1 - \sqrt{x^2} \right) (\dot{x})^3 - 2x + \sin(t).$$

Alors

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) = \frac{3}{8} x_0 y_0^2 + \frac{3}{8} x_0^3 + y_0 - \frac{1}{2}, \\ f_2(x_0, y_0) = \frac{3}{8} y_0^3 + \frac{3}{8} x_0^2 y_0 - x_0. \end{cases}$$

On résout le système

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) = 0, \\ f_2(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

On trouve la racine

$$(x_0, y_0) = (x_0 = 0.4607545580, y_0 = 0.4957174238),$$

On calcule le déterminant suivant

$$\det \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial y_0} \end{array} \right) \Bigg|_{(x_0, y_0) = (0.4607545580, 0.4957174238)}$$

CHAPITRE 5. CYCLES LIMITES DE QUELQUES CLASSES D'ÉQUATIONS  
DE VAN DER POL

---

On obtient

$$\det \begin{pmatrix} \frac{3}{8}y_0^2 + \frac{9}{8}x_0^2 & \frac{3}{4}x_0y_0 - 1 \\ \frac{3}{4}x_0y_0 - 1 & \frac{9}{8}y_0^2 + \frac{3}{8}x_0^2 \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0) = (0.4607545580, 0.4957174238)} = 1.025917444.$$

Alors l'équation (5.8) possède exactement une seule solution  $2\pi$ -périodique  $x(t, \varepsilon)$  telle que  $x(t, \varepsilon) \rightarrow x(t)$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

# CHAPITRE 6

## Stabilité asymptotique des solutions périodiques

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'existence, la stabilité et l'unicité asymptotique des solutions périodiques des équations de Van Der Pol suivante

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \varepsilon(u^2 - 1)\dot{u}^3 + (1 + a\varepsilon)u &= \varepsilon\lambda \sin t, \\ \ddot{u} + \varepsilon(|u| - 1)\dot{u}^3 + (1 + a\varepsilon)u &= \varepsilon\lambda \sin t, \end{aligned}$$

où  $\alpha$  et  $\lambda$  sont deux constantes réelles et  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit. Voir [9].

### 6.1 Introduction

Soit le système

$$\dot{x} = \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \tag{6.1}$$

où  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre et  $g \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times [0.1], \mathbb{R}^k)$  est  $T$ -périodique par rapport à  $t$  et localement Lipschitzienne par rapport à la second variable  $x$ .

On considère la fonction moyennée

$$g_0(v) = \int_0^T g(\tau, v, 0) d\tau, \tag{6.2}$$

et on cherche les solutions périodiques qui commencent près de  $v_0 \in g_0^{-1}(0)$ . Si  $g_0$  est de classe  $C^1$  alors la condition  $\det(g_0)'(v_0) \neq 0$  assure l'existence et l'unicité, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit d'une solution  $T$ -périodique du système (6.1) dans un voisinage de  $v_0$ . Cependant le fait que toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne  $(g_0)'(v_0)$  ont des parties réelles négatives, engendrent aussi sa stabilité asymptotique.

CHAPITRE 6. STABILITÉ ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS  
PÉRIODIQUES

---

Dans l'article [4] les auteurs ont étudié l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique des solutions périodiques des équations de l'oscillateur de Van Der Pol

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \varepsilon(u^2 - 1)\dot{u} + (1 + a\varepsilon)u &= \varepsilon\lambda \sin t, \\ \ddot{u} + \varepsilon(|u| - 1)\dot{u} + (1 + a\varepsilon)u &= \varepsilon\lambda \sin t. \end{aligned}$$

Dans ce chapitre nous étudions l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique des solutions périodiques des équations de l'oscillateur de Van Der Pol

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \varepsilon(u^2 - 1)\dot{u}^3 + (1 + a\varepsilon)u &= \varepsilon\lambda \sin t, \\ \ddot{u} + \varepsilon(|u| - 1)\dot{u}^3 + (1 + a\varepsilon)u &= \varepsilon\lambda \sin t, \end{aligned}$$

où  $\alpha$  et  $\lambda$  sont deux constantes réelles et  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit.

**Théorème 6.1.1** Soit  $g \in C^0(\mathbb{R} \times \Omega \times [0, 1], \mathbb{R}^2)$ , où  $\Omega$  est un ouvert dans  $\mathbb{R}^2$ , Soit  $v_0 \in \Omega$  tel que  $g_0(v_0) = 0$  et  $g_0$  est continument différentiable dans un voisinage de  $v_0$ .

- (a) Si  $\det(g_0)'(v_0) \neq 0$ , alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  le système (6.1) possède au moins une solution périodique  $x_\varepsilon$  de période  $T$  telle que  $x_\varepsilon(0) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v_0$ .
- (b) Si les deux conditions suivantes (i) et (ii) sont vérifiées :
  - (i) Pour  $L > 0$  on a  $\|g(t, v_1, \varepsilon) - g(t, v_2, \varepsilon)\| \leq L \|v_1 - v_2\|$  pour  $t \in [0, T]$ ,  $v_1, v_2 \in \Omega, \varepsilon \in [0, 1]$ .
  - (ii) soit  $\tilde{\gamma} > 0$ , il existe  $\tilde{\delta} > 0$  et  $M \subset [0, T]$  mesurable au sens de Lebesgue avec  $mes(M) < \tilde{\gamma}$  tel que pour chaque  $v \in B_{\tilde{\delta}}(v_0), t \in [0, T] \setminus \{M\}$  et  $\varepsilon \in [0, \tilde{\delta}]$  nous savons que  $g(t, \cdot, \varepsilon)$  est différentiable en  $v$  et  $\|g'_v(t, v, \varepsilon) - g'_v(t, v, 0)\| \leq \tilde{\gamma}$ . Si on suppose que

$$\det(g_0)'(v_0) > 0 \text{ et } ([g_0]_1)'_{(1)}(v_0) + ([g_0]_2)'_{(2)}(v_0) < 0, \quad (6.3)$$

alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  le système (6.1) possède exactement une solution  $T$ - périodique  $x_\varepsilon$  telle que  $x_\varepsilon(0) \rightarrow v_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En outre cette solution  $x_\varepsilon$  asymptotiquement stable.

$$\text{on a } \|g(t, v, \varepsilon)\| = \left\| \begin{pmatrix} g_1(t, v, \varepsilon) \\ g_2(t, v, \varepsilon) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(g_1(t, v, \varepsilon))^2 + (g_2(t, v, \varepsilon))^2}$$

- (c) Si  $\det(g_0)'(v_0) < 0$ , alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  le système (6.1) possède au moins une solution  $T$ - périodique non asymptotiquement stable telle que  $x_\varepsilon(0) \rightarrow v_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Preuve.** Voir [4]. ■

## 6.2 Applications

**Exemple 6.2.1** *On étudie l'existence et la stabilité asymptotique de la solution périodique de l'équation de Van Der Pol*

$$\ddot{u} + \varepsilon(u^2 - 1)\dot{u}^3 + (1 + a\varepsilon)u = \varepsilon\lambda \sin t. \quad (6.4)$$

On pose  $(z_1, z_2) = (u, \dot{u})$  alors

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -\varepsilon(z_1^2 - 1)z_1^3 - (1 + a\varepsilon)z_1 + \varepsilon\lambda \sin t. \end{cases} \quad (6.5)$$

On s'intéresse à l'existence d'une seule solution périodique (un seul cycle limite). Pour cela, on doit vérifier les deux conditions (6.3) du théorème précédent avec la condition  $g_0(v_0) = 0$ .

Posons

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} z_1 = \cos(t)x_1 + \sin(t)x_2, \\ z_2 = -\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2, \end{cases}$$

$$Z = BX \Rightarrow X = B^{-1}Z,$$

tel que

$$Z = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{cases} x_1 = \cos(t)z_1 - \sin(t)z_2, \\ x_2 = \sin(t)z_1 + \cos(t)z_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin(t)z_1 + \cos(t)\dot{z}_1 - \cos(t)z_2 - \sin(t)\dot{z}_2, \\ \dot{x}_2 = \cos(t)z_1 + \sin(t)\dot{z}_1 - \sin(t)z_2 + \cos(t)\dot{z}_2. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon(\sin(-t)(-a(\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2) - ((\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2)^2 - 1)(-\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2)^3 + \lambda \sin(t)), \\ \dot{x}_2 = \varepsilon(\cos(-t)(-a(\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2) - ((\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2)^2 - 1)(-\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2)^3 + \lambda \sin(t)). \end{cases}$$

On pose

$$x_1 = M \text{ et } x_2 = N,$$

CHAPITRE 6. STABILITÉ ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS  
PÉRIODIQUES

---

$$\begin{cases} g_1(t, M, N) = \sin(-t)(-a(\cos(t)M + \sin(t)N) - ((\cos(t)M + \sin(t)N)^2 \\ \quad - 1)(-\sin(t)M + \cos(t)N)^3 + \lambda \sin(t), \\ g_2(t, M, N) = \cos(-t)(-a(\cos(t)M + \sin(t)N) - ((\cos(t)M + \sin(t)N)^2 \\ \quad - 1)(-\sin(t)M + \cos(t)N)^3 + \lambda \sin(t). \end{cases}$$

On pose

$$M = A \sin(\phi) \text{ et } N = A \cos(\phi),$$

Alors

$$\begin{cases} g_1(t, A \sin(\phi), A \cos(\phi)) = aA \sin(t) \sin(\phi + t) + A^5 \sin(t) \sin^2(\phi + t) \cos^3(\phi + t) \\ \quad - A^3 \cos^3(\phi + t) \sin(t) - \lambda \sin^2(t), \\ g_2(t, A \sin(\phi), A \cos(\phi)) = -aA \cos(t) \sin(\phi + t) - A^5 \cos(t) \sin^2(\phi + t) \cos^3(\phi + t) \\ \quad + A^3 \cos(t) \cos^3(\phi + t) + \lambda \sin(t) \cos(t). \end{cases}$$

Ensuite on calcule

$$\begin{cases} g_0]_1(M, N) = \int_0^{2\pi} g_1(t, M, N) dt, \\ g_0]_2(M, N) = \int_0^{2\pi} g_2(t, M, N) dt, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g_0]_1(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) &= \int_0^{2\pi} g_1(t, A \sin(\phi), A \cos(\phi)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} aA \sin(t) \sin(\phi + t) dt + \int_0^{2\pi} A^5 \sin(t) \sin^2(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} A^3 \sin(t) \cos^3(\phi + t) dt - \int_0^{2\pi} \lambda \sin^2(t) dt, \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} aA \sin(t) \sin(\phi + t) dt &= aA \cos(\phi) \pi. \\ \int_0^{2\pi} A^5 \sin(t) \sin^2(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt &= -\frac{1}{8} A^5 \sin(\phi) \pi. \\ \int_0^{2\pi} A^3 \sin(t) \cos^3(\phi + t) dt &= -\frac{3}{4} A^3 \sin(\phi) \pi. \\ \int_0^{2\pi} \lambda \sin^2(t) dt &= \lambda \pi. \end{aligned}$$

Alors

$$g_0]_1(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) = aA \cos(\phi) \pi - \frac{1}{8} A^5 \sin(\phi) \pi + \frac{3}{4} A^3 \sin(\phi) \pi - \lambda \pi.$$

## 6.2. APPLICATIONS

---

$$\begin{aligned}
g_0]_2(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) &= \int_0^{2\pi} g_2(t, A \sin(\phi), A \cos(\phi)) dt \\
&= - \int_0^{2\pi} aA \cos(t) \sin(\phi + t) dt \\
&\quad - \int_0^{2\pi} A^3 \cos(t) \sin^2(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \\
&\quad + \int_0^{2\pi} A \cos(t) \cos^3(\phi + t) dt + \int_0^{2\pi} \lambda \sin(t) \cos(t) dt,
\end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} aA \cos(t) \sin(\phi + t) dt &= aA \sin(\phi)\pi. \\
\int_0^{2\pi} A^5 \cos(t) \sin^2(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt &= \frac{1}{8} A^5 \cos(\phi)\pi. \\
\int_0^{2\pi} A^3 \cos(t) \cos^3(\phi + t) dt &= \frac{3}{4} A^3 \cos(\phi)\pi. \\
\int_0^{2\pi} \lambda \sin(t) \cos(t) dt &= 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$g_0]_2(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) = -aA \sin(\phi)\pi - \frac{1}{8} A^5 \cos(\phi)\pi + \frac{3}{4} A^3 \cos(\phi)\pi,$$

puisque

$$M = A \sin(\phi) \text{ et } N = A \cos(\phi).$$

Alors

$$\begin{cases} g_0]_1(M, N) = a\pi N - \frac{1}{8}(M^2 + N^2)^2 M\pi + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)M\pi - \lambda\pi, \\ g_0]_2(M, N) = -a\pi M - \frac{1}{8}(M^2 + N^2)^2 N\pi + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)N\pi. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} a\pi N - \frac{1}{8}(M^2 + N^2)^2 M\pi + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)M\pi - \lambda\pi = 0, \\ -a\pi M - \frac{1}{8}(M^2 + N^2)^2 N\pi + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)N\pi = 0. \end{cases}$$

Alors la solution  $2\pi$ -périodique de système (6.5)

$$\begin{cases} z_1(t) = M \cos(t) + N \sin(t), \\ z_2(t) = -M \sin(t) + N \cos(t). \end{cases}$$

On calcule la matrice jacobienne de  $g_0(M, N)$

$$B = J_{g_0}(M, N) = \begin{pmatrix} ([g_0]_1)'_M(M, N) & ([g_0]_1)'_N(M, N) \\ ([g_0]_2)'_M(M, N) & ([g_0]_2)'_N(M, N) \end{pmatrix},$$

CHAPITRE 6. STABILITÉ ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS  
PÉRIODIQUES

---

tel que

$$\begin{aligned} ([g_0]_1)'_M(M, N) &= -\frac{1}{8}(M^2 + N^2)^2 \pi - \frac{1}{2}M^2(M^2 + N^2)\pi + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)\pi + 3/2M^2\pi, \\ ([g_0]_1)'_N(M, N) &= a\pi - \frac{1}{2}M(M^2 + N^2)\pi N + \frac{3}{2}MN\pi, \\ ([g_0]_2)'_M(M, N) &= -a\pi - \frac{1}{2}M(M^2 + N^2)\pi N + \frac{3}{2}MN\pi, \\ ([g_0]_2)'_N(M, N) &= -\frac{1}{8}(M^2 + N^2)^2 \pi - \frac{1}{2}N^2(M^2 + N^2)\pi + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)\pi + \frac{3}{2}N^2\pi. \end{aligned}$$

On calcule  $\det(B)$  et  $\text{trace}(B)$

$$\begin{aligned} \text{trace}(B) &= \text{trace}(J_{g_0}(M, N)) = ([g_0]_1)'_M(M, N) + ([g_0]_2)'_N(M, N) \\ &= 3\pi(M^2 + N^2) - \frac{3}{4}\pi(M^2 + N^2)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(g_0'(M, N)) = \frac{5}{64}\pi^2 M^8 - \frac{3}{4}\pi^2 M^6 + \frac{27}{16}N^4\pi^2 + \frac{27}{16}M^4\pi^2 \\ &\quad - \frac{3}{4}\pi^2 N^6 + \frac{5}{64}\pi^2 N^8 + \frac{5}{16}\pi^2 M^2 N^6 - \frac{9}{4}\pi^2 M^4 N^2 \\ &\quad + \frac{15}{32}\pi^2 M^4 N^4 + \frac{5}{16}\pi^2 M^6 N^2 + \frac{27}{8}M^2\pi^2 N^2 - \frac{9}{4}\pi^2 M^2 N^4 + a^2\pi^2. \end{aligned}$$

Puisque

$$M = A \sin(\phi) \text{ et } N = A \cos(\phi),$$

alors

$$\text{trace}(B) = 3\pi A^2 - \frac{3}{4}\pi A^4 < 0,$$

et

$$\det(B) = \pi^2 \left( a^2 + \frac{27}{16}A^4 - \frac{3}{4}A^6 + \frac{5}{64}A^8 \right) > 0,$$

$$\begin{cases} g_0]_1(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) = aA \cos(\phi)\pi - \frac{1}{8}A^5 \sin(\phi)\pi + \frac{3}{4}A^3 \sin(\phi)\pi - \lambda\pi = 0, \\ g_0]_2(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) = -aA \sin(\phi)\pi - \frac{1}{8}A^5 \cos(\phi)\pi + \frac{3}{4}A^3 \cos(\phi)\pi = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \frac{aA}{\lambda}, \\ \sin(\phi) &= -\frac{1}{8\lambda}A^5 + \frac{3}{4\lambda}A^3. \end{aligned}$$

On remarque que  $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$ , alors :  $(\frac{aA}{\lambda})^2 + (-\frac{1}{8\lambda}A^5 + \frac{3}{4\lambda}A^3)^2 = 1 \Rightarrow$   
 $\frac{A^2}{\lambda^2}(a^2 + (-\frac{1}{8}A^4 + \frac{3}{4}A^2)^2) = 1$

$$A^2(a^2 + (-\frac{1}{8}A^4 + \frac{3}{4}A^2)^2) = \lambda^2.$$

## 6.2. APPLICATIONS

---

En résumé, l'équation (6.4) possède exactement un seul cycle limite asymptotiquement stable si les trois équations suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} A^2(a^2 + (-\frac{1}{8}A^4 + \frac{3}{4}A^2)^2) - \lambda^2 = 0, \\ \text{trace}(B) = 3\pi A^2 - \frac{3}{4}\pi A^4 < 0, \\ \det(B) = \pi^2 (a^2 + \frac{27}{16}A^4 - \frac{3}{4}A^6 + \frac{5}{64}A^8) > 0, \end{cases}$$

$$3\pi A^2 - \frac{3}{4}\pi A^4 < 0 \Rightarrow A^2 > 4 \Rightarrow |A| > 2.$$

**Exemple 6.2.2** On étudie l'existence et la stabilité asymptotique de la solution périodique de l'équation de Van Der Pol

$$\ddot{u} + \varepsilon(|u| - 1)\dot{u}^3 + (1 + a\varepsilon)u = \varepsilon\lambda \sin t. \quad (6.6)$$

On pose  $(z_1, z_2) = (u, \dot{u})$ .

Alors

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -\varepsilon(|z_1| - 1)z_2^3 - (1 + a\varepsilon)z_1 + \varepsilon\lambda \sin t. \end{cases} \quad (6.7)$$

On s'intéresse à l'existence d'une seule solution périodique (un seul cycle limite). Pour cela, on doit vérifier les deux conditions (6.3) du théorème précédent avec la condition  $g_0(v_0) = 0$ .

Posons

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} z_1 = \cos(t)x_1 + \sin(t)x_2, \\ z_2 = -\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2, \end{cases}$$

$$Z = BX \Rightarrow X = B^{-1}Z,$$

tel que

$$Z = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{cases} x_1 = \cos(t)z_1 - \sin(t)z_2, \\ x_2 = \sin(t)z_1 + \cos(t)z_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin(t)z_1 + \cos(t)\dot{z}_1 - \cos(t)z_2 - \sin(t)\dot{z}_2, \\ \dot{x}_2 = \cos(t)z_1 + \sin(t)\dot{z}_1 - \sin(t)z_2 + \cos(t)\dot{z}_2, \end{cases} \quad (6.8)$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon \sin(-t)(-a(\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2) - (|\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2| - 1)(-\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2)^3 + \lambda \sin(t), \\ \dot{x}_2 = \varepsilon \cos(-t)(-a(\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2) - (|\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2| - 1)(-\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2)^3 + \lambda \sin(t). \end{cases}$$

CHAPITRE 6. STABILITÉ ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS  
PÉRIODIQUES

---

On pose

$$x_1 = M \text{ et } x_2 = N,$$

$$\begin{cases} g_1(t, M, N) = \sin(-t)(-a(\cos(t)M + \sin(t)N) - (|\cos(t)M + \sin(t)N| \\ - 1)(-\sin(t)M + \cos(t)N)^3 + \lambda \sin(t), \\ g_2(t, M, N) = \cos(-t)(-a(\cos(t)M + \sin(t)N) - (|\cos(t)M + \sin(t)N| \\ - 1)(-\sin(t)M + \cos(t)N)^3 + \lambda \sin(t). \end{cases}$$

On pose

$$M = A \sin(\phi) \text{ et } N = A \cos(\phi).$$

Alors

$$\begin{cases} g_1(t, A \sin(\phi), A \cos(\phi)) = aA \sin(t) \sin(\phi + t) + |A| A^3 \sin(t) |\sin(\phi + t)| \cos^3(\phi + t) \\ - A^3 \sin(t) \cos^3(\phi + t) - \lambda \sin^2(t), \\ g_2(t, A \sin(\phi), A \cos(\phi)) = -aA \cos(t) \sin(\phi + t) - |A| A^3 \cos(t) \sin^2(\phi + t) \cos^3(\phi + t) \\ + A^3 \cos(t) \cos^3(\phi + t) + \lambda \sin(t) \cos(t). \end{cases}$$

Ensuite on calcule

$$\begin{cases} g_0]_1(M, N) = \int_0^{2\pi} g_1(t, M, N) dt, \\ g_0]_2(M, N) = \int_0^{2\pi} g_2(t, M, N) dt, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g_0]_1(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) &= \int_0^{2\pi} g_1(t, A \sin(\phi), A \cos(\phi)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} aA \sin(t) \sin(\phi + t) dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} |A| A^3 \sin(t) |\sin(\phi + t)| \cos^3(\phi + t) dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} A^3 \sin(t) \cos^3(\phi + t) dt - \int_0^{2\pi} \lambda \sin^2(t) dt, \end{aligned}$$

tel que

$$|\sin(\phi + t)| = \begin{cases} \sin(\phi + t) \text{ si } \phi + t \in [0, \pi] \\ -\sin(\phi + t) \text{ si } \phi + t \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow$$

$$|\sin(\phi + t)| = \begin{cases} \sin(\phi + t) \text{ si } t \in [-\phi, \pi - \phi] \\ -\sin(\phi + t) \text{ si } t \in [\pi - \phi, 2\pi - \phi] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} aA \sin(t) \sin(\phi + t) dt &= aA \cos(\phi) \pi, \\ \int_0^{2\pi} A^3 \sin(t) \cos^3(\phi + t) dt &= -\frac{3}{4} A^3 \sin(\phi) \pi, \\ \int_0^{2\pi} \lambda \sin^2(t) dt &= \lambda \pi. \end{aligned}$$

## 6.2. APPLICATIONS

---

Si  $\phi > 0$  alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} |A| A^3 \sin(t) |\sin(\phi + t)| \cos^3(\phi + t) dt &= |A| A^3 \left[ \int_0^{\pi-\phi} \sin(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \right. \\
 &\quad - \int_{\pi-\phi}^{2\pi-\phi} \sin(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \\
 &\quad \left. + \int_{2\pi-\phi}^{2\pi} \sin(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \right] \\
 &= |A| A^3 \left[ -\frac{4}{5} \sin(\phi) \right],
 \end{aligned}$$

Si  $\phi < 0 \Rightarrow -\phi > 0$  alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} aA \sin(t) \sin(\phi + t) dt &= aA \cos(\phi)\pi, \\
 \int_0^{2\pi} |A| A^3 \sin(t) |\sin(\phi + t)| \cos(\phi + t) dt &= |A| A^3 \left[ - \int_0^{-\phi} \sin(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt, \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\phi}^{\pi-\phi} \sin(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt - \int_{\pi-\phi}^{2\pi} \sin(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \right] \\
 &= |A| A^3 \left[ -\frac{4}{5} \sin(\phi) \right].
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 g_0]_1(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) &= aA \cos(\phi)\pi - \frac{4}{5} |A| A^3 \sin(\phi) + \frac{3}{4} A^3 \sin(\phi)\pi - \lambda\pi, \\
 g_0]_2(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) &= \int_0^{2\pi} g_2(t, A \sin(\phi), A \cos(\phi)) dt, \\
 &= - \int_0^{2\pi} aA \cos(t) \sin(\phi + t) dt - \int_0^{2\pi} A |A| \cos(t) \sin^2(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \\
 &\quad + \int_0^{2\pi} A^3 \cos(t) \cos^3(\phi + t) dt + \int_0^{2\pi} \lambda \sin(t) \cos(t) dt,
 \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} aA \cos(t) \sin(\phi + t) dt &= aA \sin(\phi)\pi, \\
 \int_0^{2\pi} A^3 \cos(t) \cos^3(\phi + t) dt &= \frac{3}{4} A^3 \cos(\phi)\pi, \\
 \int_0^{2\pi} \lambda \sin(t) \cos(t) dt &= 0.
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 6. STABILITÉ ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS  
PÉRIODIQUES

---

Si  $\phi > 0$  alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} |A| A^3 \cos(t) |\sin(\phi + t)| \cos^3(\phi + t) dt &= |A| A^3 \left[ \int_0^{\pi-\phi} \cos(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \right. \\
 &\quad - \int_{\pi-\phi}^{2\pi-\phi} \cos(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \\
 &\quad \left. + \int_{2\pi-\phi}^{2\pi} \cos(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \right] \\
 &= |A| A^3 \left[ \frac{4}{5} \cos(\phi) \right],
 \end{aligned}$$

Si  $\phi < 0 \Rightarrow -\phi > 0$  alors

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} |A| A^3 \cos(t) |\sin(\phi + t)| \cos^3(\phi + t) dt &= |A| A^3 \left[ - \int_0^{-\phi} \cos(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \right. \\
 &\quad + \int_{-\phi}^{\pi-\phi} \cos(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \\
 &\quad \left. - \int_{\pi-\phi}^{2\pi} \cos(t) \sin(\phi + t) \cos^3(\phi + t) dt \right] \\
 &= |A| A^3 \left[ \frac{4}{5} \cos(\phi) \right],
 \end{aligned}$$

alors

$$g_0]_2(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) = -aA \sin(\phi)\pi - \frac{4}{5} |A| A^3 \cos(\phi)\pi + \frac{3}{4} A^3 \cos(\phi)\pi,$$

Puisque

$$M = A \sin(\phi) \text{ et } N = A \cos(\phi),$$

alors

$$\begin{cases} g_0]_1(M, N) = a\pi N + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)M\pi - \frac{4}{5}(M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}M\pi - \lambda\pi, \\ g_0]_2(M, N) = -a\pi M + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)N\pi - \frac{4}{5}(M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}N\pi. \end{cases}$$

On pose

$$M = A \sin(\phi) \text{ et } N = A \cos(\phi).$$

## 6.2. APPLICATIONS

---

Alors

$$\begin{cases} g_0]_1(M, N) = a\pi N + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)M\pi - \frac{4}{5}(M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}M\pi - \lambda\pi, \\ g_0]_2(M, N) = -a\pi M + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)N\pi - \frac{4}{5}(M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}N\pi. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} a\pi N + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)M\pi - \frac{4}{5}(M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}M\pi - \lambda\pi = 0, \\ -a\pi M + \frac{3}{4}(M^2 + N^2)N\pi - \frac{4}{5}(M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}N\pi = 0. \end{cases}$$

Alors la solution  $2\pi$ -périodique de système (6.7) est

$$\begin{cases} z_1(t) = M \cos(t) + N \sin(t), \\ z_2(t) = -M \sin(t) + N \cos(t). \end{cases}$$

On calcule la matrice jacobienne de  $g_0(M, N)$

$$B = J_{g_0}(M, N) = \begin{pmatrix} ([g_0]_1)'_M(M, N) & ([g_0]_1)'_N(M, N) \\ ([g_0]_2)'_M(M, N) & ([g_0]_2)'_N(M, N) \end{pmatrix}.$$

tel que

$$\begin{aligned} ([g_0]_1)'_M(M, N) &= \frac{3}{4}(M^2 + N^2)\pi + \frac{3}{2}M^2\pi - \frac{4}{5}(M^2 + N^2)^{\frac{5}{2}} - 4M^2(M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}, \\ ([g_0]_1)'_N(M, N) &= a\pi + \frac{3}{2}MN\pi - 4M(M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}N, \\ ([g_0]_2)'_M(M, N) &= -a\pi + \frac{3}{2}MN\pi - 4M(M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}N, \\ ([g_0]_2)'_N(M, N) &= \frac{3}{4}(M^2 + N^2)\pi + \frac{3}{2}N^2\pi - \frac{4}{5}(M^2 + N^2)^{\frac{5}{2}} - 4N^2(M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

On calcule,  $\det(B)$  et  $\text{trace}(B)$

$$\begin{aligned} \text{trace}(B) &= \text{trace}(J_{g_0}(M, N)) = ([g_0]_1)'_M(M, N) + ([g_0]_2)'_N(M, N) \\ &= 3M^2\pi + 3N^2\pi - \frac{28}{5}\sqrt{M^2 + N^2}M^4 \\ &\quad - \frac{56}{5}\sqrt{M^2 + N^2}M^2N^2 - \frac{28}{5}\sqrt{M^2 + N^2}N^4 \\ &= 3\pi(M^2 + N^2) - \frac{28}{5}(\sqrt{M^2 + N^2})(M^2 + N^2)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(g'_0(M, N)) = \frac{27}{16}M^4\pi^2 + \frac{27}{16}N^4\pi^2 - \frac{27}{5}M^6\sqrt{M^2 + N^2}\pi - \\ &\quad \frac{81}{5}M^4\sqrt{M^2 + N^2}\pi N^2 - \frac{81}{5}N^4\pi\sqrt{M^2 + N^2}M^2 - \frac{27}{5}N^6\pi\sqrt{M^2 + N^2} \\ &\quad + \frac{27}{8}M^2\pi^2N^2 + \frac{96}{25}M^{10} + \frac{96}{5}M^8N^2 + \frac{192}{5}M^6N^4 + \frac{192}{5}M^4N^6 \\ &\quad + \frac{96}{5}M^2N^8 + \frac{96}{25}N^{10} + a^2\pi^2. \end{aligned}$$

CHAPITRE 6. STABILITÉ ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS  
PÉRIODIQUES

---

Puisque

$$M = A \sin(\phi) \text{ et } N = A \cos(\phi).$$

Alors

$$\text{trace}(B) = -\frac{1}{5}A^2 (-15\pi + 28 |A| A^2),$$

et

$$\det(B) = a^2\pi^2 + \frac{27}{16}A^4\pi^2 - \frac{27}{5}A^6 |A| \pi + \frac{96}{25}A^{10},$$

$$\begin{cases} g_0]_1(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) = aA \cos(\phi)\pi - \frac{4}{5}|A| A^3 \sin(\phi) + \frac{3}{4}A^3 \sin(\phi)\pi - \lambda\pi = 0, \\ g_0]_2(A \sin(\phi), A \cos(\phi)) = -aA \sin(\phi)\pi - \frac{4}{5}|A| A^3 \cos(\phi)\pi + \frac{3}{4}A^3 \cos(\phi)\pi = 0. \end{cases}$$

On pose

$$\cos(\phi) = \alpha, \sin(\phi) = \beta.$$

Alors

$$\begin{cases} aA\pi\beta + (\frac{3}{4}A^3\pi - \frac{4}{5}A^3 |A|)\alpha - \lambda\pi = 0, \\ \frac{3}{4}A^3\pi\beta + (-aA\pi - \frac{4}{5}A^3 |A|)\alpha = 0. \end{cases}$$

On résout le système. Alors

$$\alpha = \frac{20\pi (-4a^2 + 3A\lambda)}{A^2 (45A^2\pi + 64 |A| a - 48A^2 |A|)},$$

$$\beta = \frac{4(15aA\pi + 16 |A| \lambda - 16A |A| a)}{A (45A^2\pi + 64 |A| a - 48A^2 |A|)}.$$

On remarque que  $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$ , alors

$$\begin{aligned} & -2304A^9 + (-2025\pi^2 + 4320 |A| \pi) A^8 + 6144A^7a \\ & -5760A^6\pi |A| a + (3600a^2\pi^2 - 7680a^2\pi |A| - 8192\lambda a) A^4 \\ & + (7680a\pi |A| \lambda + 4096\lambda^2) A^3 + 3600\pi^2 A^2 \lambda^2 \\ & -9600\pi^2 a^2 A \lambda + 6400\pi^2 a^4 = 0. \end{aligned}$$

En résumé, l'équation (6.6) possède exactement un seul cycle limite asymptotiquement stable si les trois équations suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} -2304A^9 + (-2025\pi^2 + 4320 |A| \pi) A^8 + 6144A^7a \\ -5760A^6\pi |A| a + (3600a^2\pi^2 - 7680a^2\pi |A| - 8192\lambda a) A^4 \\ + (7680a\pi |A| \lambda + 4096\lambda^2) A^3 + 3600\pi^2 A^2 \lambda^2 \\ -9600\pi^2 a^2 A \lambda + 6400\pi^2 a^4 = 0, \\ \text{trace}(B) = -\frac{1}{5}A^2 (-15\pi + 28 |A| A^2) < 0, \\ \det(B) = a^2\pi^2 + \frac{27}{16}A^4\pi^2 - \frac{27}{5}A^6 |A| \pi + \frac{96}{25}A^{10} > 0. \end{cases}$$

$$-\frac{1}{5}A^2 (-15\pi + 28 |A| A^2) < 0 \Rightarrow -15\pi + 28 |A| A^2 > 0 \Rightarrow |A|^3 > \frac{15\pi}{28}.$$

## CHAPITRE 7

# Nombre maximal de cycles limites d'une classe de systèmes de Liénard généralisés via la théorie de moyennisation

## 7.1 Introduction

Dans l'article [22] les auteurs ont étudié le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (g_{11}(x) + f_{11}(x)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon (g_{21}(x) + f_{21}(x)y), \end{cases} \quad (7.1)$$

où  $g_{11}$ ,  $f_{11}$ ,  $g_{21}$  et  $f_{21}$  sont des polynômes de degré  $k$ ,  $l$ ,  $m$  et  $n$ , respectivement, et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

Dans ce chapitre, on va utiliser le théorème 2.1.1 du chapitre 2 afin d'étudier le nombre maximal de cycles limites de certains systèmes de Liénard généralisés de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (g_{11}(x) + f_{11}(x,y)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon (g_{21}(x) + f_{21}(x,y)y), \end{cases} \quad (7.2)$$

où  $g_{11}$ ,  $g_{21}$  sont des polynômes de degré  $k$ ,  $m$  et  $f_{11}$  et  $f_{21}$  sont des polynômes de degré  $l$ ,  $n$  en  $x$  et  $y$ , respectivement, et  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit.

**Théorème 7.1.1** *En appliquant la méthode de moyennisation du premier ordre au système (7.2), au plus  $\max \left\{ \left[ \frac{l}{2} \right], \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{n}{2} \right] \right\}$  cycles limites bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ .*

## 7.2 Démonstration du théorème 7.1.1

Pour démontrer le théorème 7.1.1, on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre. Nous écrivons le système (7.1) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$

CHAPITRE 7. NOMBRE MAXIMAL DE CYCLES LIMITES D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES DE LIÉNARD GÉNÉRALISÉS VIA LA THÉORIE DE MOYENNISATION

---

où  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ ,  $r > 0$ .

Avec ceci, le système (7.1) se met sous la forme standard pour pouvoir appliquer la méthode de moyennisation

$$f_{11}(x, y) = \sum_{i+j=0}^l a_{i,j,1} x^i y^j, f_{21}(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{i,j,2} x^i y^j, g_{11}(x) = \sum_{i=0}^k b_{i,1} x^i$$

et  $g_{21}(x) = \sum_{i=0}^m b_{i,2} x^i$ .

Le système (7.1) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \left( \sum_{i+j=0}^l a_{i,j,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i \cos^{i+1} \theta + \right. \\ \quad \left. \sum_{i+j=0}^n a_{i,j,2} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \cos^i \theta \sin \theta \right), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \left( \sum_{i+j=0}^n a_{i,j,2} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^{i-1} \cos^{i+1} \theta \right. \\ \quad \left. - \sum_{i+j=0}^l a_{i,j,1} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta - \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^{i-1} \cos^i \theta \sin \theta \right). \end{cases} \quad (7.3)$$

On considère maintenant  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante; le système (7.3) s'écrit sous la forme

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \left( \sum_{i+j=0}^l a_{i,j,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i+j=0}^n a_{i,j,2} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \cos^i \theta \sin \theta \right) + O(\varepsilon^2)$$

et

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i+j=0}^l a_{i,j,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i=0}^k b_{i,1} r^i \cos^{i+1} \theta + \sum_{i+j=0}^n a_{i,j,2} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i=0}^m b_{i,2} r^i \cos^i \theta \sin \theta \right) d\theta.$$

## 7.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.1.1

---

Pour calculer l'expression exacte de  $F_{10}$  on utilise les formules suivantes

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ pair ou } j \text{ pair} \\ \alpha_{ij} & \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ pair} \\ \beta_i & \text{si } i \text{ impair} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ impair} \\ \gamma_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin \theta d\theta = 0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots$$

d'où

$$F_{10}(r) = \sum_{\substack{i+j=2, \\ \text{si } i \text{ impair et } j \text{ impair}}}^l a_{i,j,1} r^{i+j+1} \alpha_{ij} + \sum_{i=1, i \text{ impair}}^k b_{i,1} r^i \beta_i$$

$$+ \sum_{\substack{i+j=0, \\ i \text{ pair et } j \text{ pair}}}^n a_{i,j,2} r^{i+j+1} \gamma_{ij}.$$

Donc le polynôme  $F_{10}(r)$  a au plus  $\max \left\{ \left[ \frac{l}{2} \right], \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{n}{2} \right] \right\}$  racines positives, et de plus on peut choisir les coefficients  $a_{i,j,1}$  avec  $i$  impair et  $j$  impair,  $a_{i,j,2}$  avec  $i$  pair et  $j$  pair et  $b_{i,1}$  avec  $i$  impair de tel que  $F_{10}(r)$  admet exactement  $\max \left\{ \left[ \frac{l}{2} \right], \left[ \frac{k-1}{2} \right], \left[ \frac{n}{2} \right] \right\}$  racines positives simples. Ceci complète la démonstration du théorème 7.1.1.

La méthode de moyennisation est une méthode efficace pour étudier le nombre maximal des cycles limites et la stabilité de ces cycles limites, et de l'approximation des cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux. Cette méthode consiste à donner une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique non autonome et celle de son système différentiel moyenné lequel est autonome. L'application de cette méthode du premier ordre au système différentiel

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \varepsilon f(x, y), \\ \ddot{y} + y = \varepsilon g(x, y). \end{cases}$$

Où  $\varepsilon$  est un paramètre suffisamment petit  $f$  et  $g$  sont des polynômes arbitraires de degré 4 en ce qui concerne les variables  $x$  et  $y$  a donné des résultats intéressants. Notre travail futur consistera à l'application de cette méthode au système différentiel

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \varepsilon f(x, y), \\ \ddot{y} + y = \varepsilon g(x, y). \end{cases}$$

Où  $f$  et  $g$  sont des polynômes arbitraires de degré  $n > 4$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Blows, T.R., Lloyd, N.G. : The number of small-amplitude limit cycles of Lié-nard equations. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 95, 359 – 366 (1984).
- [2] Buică, A., Llibre, J. : Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree. *Bull. Sci. Math.* 128, 7 – 22 (2004).
- [3] Buică, A., Llibre, J. : Bifurcations of limit cycles from a 4–dimensional center in control systems. *Internat. J. Bifur. chaos Appl. Sci. Eng.* 15, 2653 – 2662 (2004).
- [4] Buică, A., Llibre, J., Makarenkove, O. : Asymptotic stability of periodic solutions for nonsmooth differential equations with application to the nonsmooth van der pol oscillator continuous and discrete dynamical systems. *Siam J. Math. Anal.* 40, 2478 – 2495 (2009).
- [5] Christopher, C., J., Lynch, S. : Small-amplitude limit cycle bifurcations for Lié-nard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces. *Nonlinearity*. 12, 1099 – 1112 (1999).
- [6] Cima, A., Llibre, J., Teixeira, M. A. : Limit cycles of some polynomial differential systems in dimension 2, 3 and 4, via averaging theory. *Applicable Analysis*. 87 : 2, 149 – 164 (2008).
- [7] Coppel, W. A. : Some quadratic systems with at most one limit cycles. In *Dynamics reported*. 2, 61 – 68. New York, NY : Wiley (1998).
- [8] Diab, Z., Makhlof, A. : Limit Cycles To Four–Dimensional Linear Center. *Ann. of Diff. Eqs.* 29 : 4, 399 – 405 (2013).
- [9] Diab, Z., Makhlof, A. : Asymptotic Stability of Periodic Solutions for Differential Equations . *Advances in Dynamical Systems and Applications*. 11, 1 – 14 (2016).
- [10] Diab, Z., Makhlof, A. : Limit Cycles for the Class of D -Dimensional Polynomial Differential Systems. *Journal of Applied Mathematics*. Volume 2016, Article ID 1868027, 5 pages.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [11] De Maesschalck, P., Dumortier, F. : Classical Liénard equations of degree  $n \geq 6$  can have  $[(n - 1)/2] + 2$  limit cycles. *J. Diff. Equ.* 250, 2162 – 2176 (2011).
- [12] Dumortier, F., Li, C.: On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Liénard equations. *Nonlinearity* 9, 1489 – 1500 (1996).
- [13] Dumortier, F., Li, C. : Quadratic Liénard equations with quadratic damping. *J. Diff. Equ.* 139, 41 – 59 (1997) .
- [14] Dumortier, F., Rousseau. C. : Cubic Liénard equations with linear damping. *Nonlinearity.* 3, 1015 – 1039 (1990) .
- [15] Dumortier, F., Panazzolo, D., Roussarie, R. : More limit cycles than expected in Liénard systems. *Proc. Am. Math. Soc.* 135, 1895 – 1904 (2007).
- [16] Gasull, A., Torregrosa, J.: Small-amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity. *J. Diff. Equ.* 159, 186 – 211 (1998).
- [17] Han, M., Jiang, K., Green, D. : Bifurcations of periodic orbits subharmonic solutions and invariant tori of high-dimensional systems. *Nonlinear Anal.*, 36, 319 – 329 (1999).
- [18] Li, C., Llibre, J. : Uniqueness of limit cycle for Liénard equations of degree four. *J. Diff. Equ.* 252, 3142 – 3162 (2012).
- [19] Liénard, A. : Étude des oscillations entretenues. *Rev. Gén. Electricité.* 23, 946 – 954 (1928).
- [20] Lins, A., de Melo. W., Pugh, C. C.: On Liénard’s equation. *Lecture Notes in Mathematics.* 597, 335 – 357. Berlin, Germany : Springer, (1977).
- [21] Llibre, J. : Averaging theory and limit cycles for quadratic systems. *Radovi Math.* 11, 1 – 14 (2002).
- [22] Llibre, J., Valls, G. : On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems. *Proc. R. Soc .* 468, 2347 – 2360 (2012).
- [23] Llibre, J., Teixeira, M. A. : Limit cycles for a mechanical system coming from the perturbation of a four-dimensional linear center, *J. Dynamics and Differential Equations*, 18 : 4, 931 – 941 (2006).
- [24] Llibre, J., Yu, J. : Limit cycles for a class of three-dimensional polynomial differential systems. *Journal of Dynamical and Control Systems.* 13 : 4, 531–539 (2007).
- [25] Llibre, J., Mereu, A.C., Teixeira, M. A. : Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 148, 363–383 (2010).
- [26] Llibre, J., Novaes, D.D., Teixeira, M.A. : Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree. *Nonlinearity.* 27 : 3 563 – 583 (2014).
- [27] Lloyd, N. G. : Limit cycles of polynomial systems-some recent developments. *London Mathematical Society Lecture Note Series.* 127, 192 – 234 (1988).

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [28] Lloyd, N.G., Lynch, S. : Small-amplitude limit cycles of certain Liénard systems. Proc. R. Soc. Lond. A418, 199 – 208 (1988).
- [29] Lynch, S. : Limit cycles of generalized Liénard equations. Appl. Math. Lett. 8, 15 – 17 (1995).
- [30] Lynch, S. : Generalized quadratic Liénard equations. Appl. Math. Lett. 11, 7 – 10 (1998).
- [31] Lynch, S. : Generalized cubic Liénard equations. Appl. Math. Lett. 12, 1 – 6 (1999).
- [32] Lynch, S., Christopher, C. J. : Limit cycles in highly non-linear differential equations. J. Sound Vib. 224, 505 – 517 (1999).
- [33] Makhlof, A., Ouanas, N. : Limit cycles of perturbed Lienard equations. Ann. of Diff. Eqs, 29 : 2, 177 – 187 (2013).
- [34] Rychkov, G. S. : The maximum number of limit cycle of the system  $\dot{x} = y - a_1x^3 - a_2x^5$ ,  $\dot{y} = -x$  is two. Diff. Uravneniya. 11, 380 – 391 (1975).
- [35] Shafarevich, I.R. : Basic Algebraic Geometry. Springer, Berlin, Germany (1974).
- [36] Verhulst, F. : Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Springer, Berlin, Germany (1991).
- [37] Yu, P., Han, M. : Limit cycles in generalized Liénard systems. Chaos Solitons Fractals. 30, 1048 – 1068 (2006).