وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar Annaba

Badji Mokhtar University - Annaba

جامعة باجي مختار عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de docteur en sciences en mathématiques

Sur l'existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion

Option :
Equations aux Dérivées Partielles

Présentée par

M[me] Barrouk Nabila

DIRECTEUR :	MOUMENI Abdelkader	Prof.	U.B.M. Annaba

Devant le jury

PRÉSIDENTE :	DJELLIT Ilhem	Prof.	U.B.M. Annaba
EXAMINATEURS:	AISSAOUI Mohamed Zine	Prof.	Univ. Guelma
	ARDJOUNI Abdelouaheb	MCA	Univ. Souk-Ahras
	ELLAGGOUNE Fateh	Prof.	Univ. Guelma
	HAIOUR Mohamed	Prof.	U.B.M. Annaba

Année 2016

Table des matières

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à :

Mon défunt père et ma très chère mère.
Tous mes frères et sœurs ainsi que leurs enfants.
Mon très cher mari ainsi que toute sa famille et en particulier mon défunt beau père et ma belle mère.
Ma fille Aicha.
Tous ceux qui me connaissent.

REMERCIEMENTS

Avant d'exposer ce travail

Je remercie **Allah**, le tout puissant de m'avoir donné la force et le courage, pour accomplir cette tâche.

Je tiens à remercier particulièrement mon encadreur le professeur **Moumeni Abdelkader**, dont les orientations opportunes, les recommandations perspicaces et les conseils avisés, m'ont été d'un précieux apport, et auquel j'exprime ma profonde gratitude pour sa gentillesse et pour la grande patience dont il m'a fait preuve tout le long de l'élaboration de ma thèse.

Mes remerciements vont aussi à Madame **Djellit Ilhem**, Professeur à l'université d'Annaba, de présider ce jury.

De même, je remercie vivement Monsieur **Aissaoui Mohamed Zine**, Professeur à l'université de Guelma, Monsieur **Ardjouni Abdelouaheb**, Maître de conférences à l'université de Souk-Ahras, Monsieur **Ellaggoune Fateh,** Professeur à l'université de Guelma et Monsieur **Haiour Mohamed** Professeur à l'université d'Annaba d'avoir accepté d'examiner ma thèse.

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et toutes celles que j'ai connues au département de mathématiques et qui ont rendu mon séjour au département agréable.

Abstract

The aim of this these is to prove the global existence in time of the solutions of a class for the systems of reaction-diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = f(u,v), & \text{in }]0,+\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta u - d_3 \Delta v = g(u,v) & \text{in }]0,+\infty[\times \Omega. \end{cases}$$

For $d_2 = 0$ and $d_2 \neq 0$ **i.e**. with diagonal and triangular matrix of diffusion coefficients.
By combining the compact semi-group methods and some L^1 estimates, we show that global solutions exist for a large class of the functions f and g.

Key words : Semi-groups, reaction-diffusion systems, local solution, global solution.

Résumé

Le but de cette thèse est de prouver l'existence globale en temps des solutions d'une classe pour les systèmes de réaction-diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = f(u,v), & \text{sur }]0,+\infty[\times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta u - d_3 \Delta v = g(u,v) & \text{sur }]0,+\infty[\times \Omega. \end{cases}$$

Pour $d_2 = 0$, et $d_2 \neq 0$ **i.e**. avec matrice de diffusion diagonale et triangulaire. En combinant les méthodes de semi-groupes compacts et certaines estimations L^1, nous montrons que les solutions globales existent pour une large classe de fonctions f et g.

Les mots-clés : Semi-groupe, systèmes de réaction-diffusion, solution locale, solution globale.

ملخص

إن الهدف من هذا العمل هو إثبات الوجود الكلي بالنسبة للزمن لحلول صنف من جملة معادلات التفاعل والإنتشار

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - d_1 \Delta \mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{u}, \mathrm{v}), \text{علي }]0, +\infty[\times \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{d}_2 \Delta \mathrm{u} - \mathrm{d}_3 \Delta \mathrm{u} = \mathrm{g}(\mathrm{u}, \mathrm{v}), \text{علي }]0, +\infty[\times \Omega \end{cases}$$

من أجل $d_2=0$ و$d_2 \neq 0$ أي من أجل مصفوفة الانتشار قطرية و مثلثية.

و نبين أن الحلول العالمية موجودة لفئة كبيرة من الدوال f وg باستعمال طريقة أنصاف الزمر المتراصة وكذلك مقياس التقديرL^1 .

الكلمات المفتاحية: نصف زمرة، أنظمة التفاعل والانتشار، حل المحلي، حل كلي.

Introduction

Durant les années récentes, les systèmes de réaction-diffusion ont reçu un intérêt considérable dans la recherche mathématique, motivé par leur incident répandu dans des modèles de phénomènes biologiques et chimiques, et par la richesse de la structure de leurs ensembles de solutions. Vu les applications nombreuses et variantes de ces systèmes ; on donnera les démarches à suivre pour modéliser certains problèmes chimiques comme les réactions chimiques oscillantes (Brussélateur). Les individus diffèrent d'un problème à un autre :

En chimie, par exemple, ils représentent des substances chimiques. En biochimie, ils peuvent représenter des molécules. En métallurgie, des atomes. En dynamique des populations, ce sont des humains. En génétique des populations, ils représentent des caractères. En biophysique, des charges électriques ou bien des différences de potentiel. En environnement, ils peuvent représenter les animaux ou les plantes d'une forêt, d'une mer ou bien d'un fleuve. . . .Pour la plus grande partie de ces problèmes, on montre qu'on aboutit à des systèmes de réaction-diffusion.

Les conditions aux bords seront choisies selon l'origine et la nature du problème étudié : s'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière du domaine sur lequel le problème est posé, on choisit les conditions aux bords homogènes de Neumann. S'il n'y a pas d'individus sur la frontière, on prend les conditions aux bords homogènes de Dirichlet. L'inconnue (la solution qu'on cherche) est un vecteur dont les composantes sont généralement des fonctions positives : en chimie, par exemple, c'est un vecteur de concentrations chimiques. En biochimie ou en métallurgie, c'est un vecteur de concentrations en nombres de molécules ou d'atomes respectivement. En dynamique des populations et en environnement, c'est un vecteur de densité de populations humaines, animales ou végétales. . . .

Les conditions initiales sont généralement positives ; puisqu'il s'agit de concentrations, densités, charges électriques . . . .

Tous ces problèmes s'écrivent sous la forme :

$$w_t(t,x) - D\Delta w(t,x) = F(w(t,x)),\ t \in]0,+\infty[,\ x \in \Omega, \tag{SRD}$$

avec Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega$, où $w(t,x) = (w_1(t,x), w_2(t,x), \ldots, w_m(t,x))$ est un vecteur de variables dépendantes, et c'est l'inconnue, $w_t := \dfrac{\partial w}{\partial t}$, $\triangle$ est laplacien, $\Delta w = (\Delta w_1, \Delta w_2, \ldots, \Delta w_m)$ où $\triangle w_k := \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 w_k}{\partial x_i^2}$ telle que $k = 1, \ldots, m$. D est une matrice carrée $m \times m$ définie positive, appelée matrice de diffusion, et

$$F(w(t,x)) = (F_1(w(t,x)), F_2(w(t,x)), \ldots, F_m(w(t,x)))$$

c'est la réaction (généralement non linéaire).

Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de w :

Par exemple, en chimie w est un vecteur de concentrations chimiques et F représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations, le terme $D\Delta w$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction.

Nous nous intéressons au modèle mathématique suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1\Delta u = f(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2\Delta u - d_3\Delta v = g(u,v) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,.) = u_0(.),\ v(0,.) = v_0(.) & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ d_2 & d_3 \end{pmatrix}$, $w_0 = (u_0, v_0)$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Lorsque F est régulière et u_0 bornée, l'existence locale de la solution de ce système est standard, mais l'existence globale nécessite des conditions supplémentaires sur F.

Nous allons donner un panorama des résultats obtenus au cours de ces dernières années autour de la question d'existence globale des solutions pour des systèmes de réaction-diffusion qu'on trouve classiquement dans beaucoup d'applications :

D'après A. Haraux et M. Kirane [10] pour prouver l'existence globale de la solution du système (P) pour $g(u,v) = -f(u,v)$, avec f quasi-positive il suffit de trouver une estimation uniforme de la solution pour tout $t \geq 0$. R. H. Martin [20] a utilisé la méthode des domaines invariantes pour trouver l'existence de la solution. S. Kouachi [17] a cherché l'existence de la solution en utilisant la fonctionnelle de lyapunov.

Dans le cas où
$$g(u,v) = -f(u,v) = -uv^{\beta},$$
N. D. Alikakos [1] a établi l'existence globale et aussi la L^{∞}-bornitude des solutions quand
$$1 < \beta < \frac{n+2}{n},$$
avec une méthode de "Bootstrap", basée sur les injections de Sobolev.

L'extension de ce résultat pour $\beta > 1$ est obtenue par K. Masuda [19], et a montré que cette solution converge vers un constant quand $t \to +\infty$, puis par S. L. Hollis, R. H. Martin et M. Pierre [13] qui ont établi l'existence globale avec une méthode basée sur la théorie de L^{p}-régularité pour l'opérateur de chaleur et un principe de dualité. Cette méthode permet de l'appliquer à une classe générale de système de deux équations comme les systèmes appelés "Brussélateur".

Egalement, l'existence d'une solution globale du (P) a été établie par M. Pierre [33] avec des conditions plus faible que les précédentes, en utilisant une technique basée sur L^{1}-estimations.

Récemment, par S. Bonafede et D. Schmitt [4], pour montrer l'existence globale de la solution du (P) en posant que :
$$f + g \leq 0,$$
A. Haraux et A. Youkana [11] ont aussi généralisé le résultat de K. Masuda [19] en utilisant la méthode de la fonctionnelle de Lyapunov où
$$g(u,v) = -f(u,v) = -u\varphi(v),$$
et φ non linéaire et satisfaisant la condition suivante
$$\lim_{v \to +\infty} \frac{(1+\varphi(v))}{v} = 0.$$

En considérant le cas où $\beta = 1$, A. Barabanova [2] a réussi a obtenir l'existence globale de solutions classiques sous la condition :
$$\|u_0\|_{\infty} < \frac{8ab}{\alpha n (a-b)^2}.$$
S. Kouachi et A. Youkana [18] ont généralisé la méthode de A. Haraux et A. Youkana [11] dans le cas d'une matrice triangulaire inférieure. S. Kouachi

[17] a établi l'existence globale de la solution du système dans le cas d'une matrice pleine.

A. Moumeni et L. Salah Derradji [26, 27] ont montré l'existence d'une solution globale (u, v) pour le système (SRD) avec la matrice de diffusion diagonale et triangulaire et sous des conditions encore plus faibles sur f et g par l'effet de régularisant suivant :

Soit $n, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = \dim \Omega$ et $q > \frac{n}{2}$,

si $F(u(t,x)) \in L^{\infty}(0, T_{\max}, L^{q}(\Omega))$, alors la solution est globale.

Ce qui revient donc à montrer que

$$\sup_{\substack{0<t<T_{\max} \\ x\in\Omega}} \|F(u(t,x))\|_{L^{q}(\Omega)} < +\infty.$$

M. Mebarki et A. Moumeni [23] ont travaillé sur l'existence de la solution en utilisant la fonctionnelle de Lyapunov et la technique intitulée région invariante qui est très importante dans le cas où la matrice de diffusion pleine.

Dans ce travail nous allons utiliser une technique basée sur L^1-estimations pour étudier l'existence globale de la solution du système (P).

Plan de la Thèse

L'objet de cette thèse est l'étude du système de réaction-diffusion (SRD) ; plus particulièrement l'existence locale, l'existence globale.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

▶ Le premier chapitre nous rappelons quelques résultats et théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle qui sont fondamentaux pour notre travail.

▶ Dans le deuxième chapitre, sera consacrée à la modélisation des systèmes de réaction-diffusion en utilisant la loi de comportement de Fick. Et nous allons traiter quelques exemples faisant ressortir leur rôle essentiel dans les sciences.

▶ Au troisième chapitre, toutes les notions nécessaires inhérentes à la théorie des opérateurs m-dissipatifs et à celle des semi-groupes seront données. Ensuite, nous nous attacherons à l'étude des problèmes d'évolution semi-linéaires où nous allons aborder quelques questions, parmi lesquelles l'existence locale des solutions, et ses positivités, l'existence globale, etc.

▶ Le résultat le plus important est présenté au quatrième chapitre où, il contient l'étude d'un système de réaction-diffusion avec une matrice de diffusion diagonale via un résultat de compacité. L'étude concerne l'existence locale et globale.

Pour cela nous avons supposé que u_0, v_0 sont deux fonctions non négatives de $L^1(\Omega)$, et à partir de quelques conditions sur les fonction f et g on va montrer l'existence d'une solution d'un système similaire au système (P) dans le cas où $d_2 = 0$ et en utilisant des résultats de S. Bonafede et D. Schmitt [**4**] nous avons trouvé une estimation de cette solution, cette estimation, nous permet de déduire l'existence de la solution globale du (P). (Voir [24])

▶ Enfin, nous nous intéressons au dernier chapitre à l'étude d'un système de réaction-diffusion à une matrice de diffusion triangulaire, pour lequel nous énonçons un résultat d'existence globale (Voir [25]).

Chapitre 1

Quelques rappels utile d'analyse fonctionnelle

Nous rappelons ici les notions essentielles sur les espaces fonctionnels et tout particulièrement, les espaces L^p et les espaces de Sobolev et nous donnons, par la même occasion, quelques définitions et résultats qui seront utiles pour la suite.

1.1 Notations et notions générales

1.1.1 Opérateurs différentiels

Soit n un entier, on note $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$.
On appelle champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ une application $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, qui à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associe $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$.
Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, son gradient est le champ de vecteurs défini par

$$\operatorname{grad} u(x) = \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right),$$

pour un champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on appelle divergence de v la fonction définie par

$$\operatorname{div} v(x) = \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(x) + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n}(x).$$

On appelle Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\Delta u(x) = \operatorname{div}(\nabla u)(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ régulière. On appelle dérivée normale d'une fonction régulière u sur le bord $\partial\Omega$ la fonction définie sur les points de $\partial\Omega$ par

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \nabla u(x).\eta(x),$$

(produit scalaire du vecteur $\nabla u(x)$ avec le vecteur $\eta(x)$).

1.1.2 Espaces fonctionnels

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.
On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^1(\Omega)$ désigne l'espace

$$L^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|\, dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\| = \int_\Omega |u(x)|\, dx.$$

l'espace

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et } \exists c > 0 \text{ tel que } |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess\, |u(x)| = \inf\{c > 0,\ |u(x)| \leq c, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On définit les espaces

$L^p([0,T], X)$, $1 \leq p < \infty$, $L^1([0,T], X)$ et $L^\infty([0,T], X)$ comme suit :

$$L^p([0,T], X) = \left\{ u : [0,T] \to X \text{ mesurable, tel que } \int_0^T \|u\|_X^p\, dt < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p([0,T],X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$L^1([0,T],X) = \left\{ u : [0,T] \to X \text{ mesurable, tel que } \int_0^T \|u\|_X \, dt < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_1 = \int_0^T \|u\|_X \, dt.$$

$$L^\infty([0,T],X) = \left\{ u : [0,T] \to X \text{ mesurable, tel que } \sup_{t\in[0,T]} ess \, \|u\|_X < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty([0,T],X)} = \sup_{t\in[0,T]} ess \, \|u\|_X.$$

Naturellement on a :

$$L^p([0,T], L^p(\Omega)) = L^p([0,T] \times \Omega) \qquad 1 \le p \le \infty$$

$C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme

$$\|u\|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ c'est l'espace de Sobolev défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \ \forall \alpha, \text{ avec } |\alpha| \le m, \ D^\alpha u \text{ existe et } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

alors, $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme $\|.\|_{m,p}$ définie par

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_p, \ \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Lorsque $p = 2$, on notera de préférence

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega),$$

sur $H^m(\Omega)$ on utilisera plutôt la norme équivalente

$$\|u\|_{m,2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

qui fait de $H^m(\Omega)$ un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u . D^\alpha v dx.$$

En particulier, pour $m = 1$ on a

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_\Omega u.v dx + \int_\Omega \nabla u. \nabla v dx.$$

1.2 Quelques inégalités utiles

1.2.1 Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et $\eta(x)$ la normale extérieure au point x. Soient u et v deux fonctions de $H^2(\Omega)$.
Alors la formule de Green s'écrit :

1. Première formule de Green :

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma.$$

2. Seconde formule de Green :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma.$$

3. Troisième formule de Green :

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\sigma.$$

1.2.2 Inégalité de Hölder

Lemme 1.1 *Soient* $1 < p, q < \infty$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Soient* f *une fonction de* $L^p(\Omega)$ *et* g *une fonction de* $L^q(\Omega)$*. Alors* $f.g \in L^1(\Omega)$ *et l'inégalité de Hölder s'écrit :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

Preuve. Voir H. Brezis [5]. ■

1.2.3 Inégalité de Gronwall

Lemme 1.2 *Soit* $T > 0$, $\theta \in L^1(0,T)$ *vérifiant* $\theta \geq 0$ *p.p et* c_1, c_2 *deux constantes positives. Soit* $\varphi \in L^1(0,T)$, $\varphi \geq 0$ *telle que* $\theta\varphi \in L^1(0,T)$ *et*

$$\varphi(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \theta(s)\varphi(s)\,ds, \text{ pour presque tout } t \in (0,T). \tag{1.1}$$

Alors, il découle

$$\varphi(t) \leq c_1 exp\left(c_2 \int_0^t \theta(s)\,ds\right), \text{ pour presque tout } t \in (0,T).$$

Preuve. Supposons

$$\psi(t) = c_1 + c_2 \int_0^t \theta(s)\varphi(s)\,ds = c_1 + c_2(F(t) - F(0)),$$

donc

$$\psi'(t) = c_2\theta(t)\varphi(t).$$

D'après (1.1) on aurait

$$\begin{aligned} \psi'(t) \leq c_2\theta(t)\psi(t) \quad &\Rightarrow \tfrac{\psi'(t)}{\psi(t)} \leq c_2\theta(t) \\ &\Rightarrow \ln\psi(t) - \ln\psi(0) \leq c_2 \int_0^t \theta(s)\,ds \\ &\Rightarrow \psi(t) \leq \psi(0)\exp\left(c_2 \int_0^t \theta(s)\,ds\right), \end{aligned}$$

avec $\psi(0) = c_1$. D'ou $\psi(t) \leq c_1 \exp\left(c_2 \int_0^t \theta(s)\,ds\right)$. Comme $\varphi(t) \leq \psi(t)$, on obtient le résultat. ■

Remarque 1.1 *Si* $c_1 = 0$ *alors* $\varphi = 0$ *p.p.*

Remarque 1.2 *Ce résultat est très utile dans l'étude des problèmes semi-linéaires, aussi bien pour montrer l'unicité des solutions que pour établir des propriétés de bornage.*

1.3 Quelques résultats qu'il faut absolument connaître

Définition 1.1 (Opérateurs compacts) *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *des opérateurs linéaires continus. On dit que* T *est un opérateur compact si l'image par* T *de la boule unité de* E *est relativement compacte dans* F *ou pour toute partie* B *bornée de* E*, l'image* $T.B = \{Tx;\ x \in B\}$ *est relativement compacte dans* F*.*
En d'autres termes, T *est un opérateur compact si, pour toute suite bornée* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* E*, on peut extraire une sous suite* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que la suite* $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge dans* F *quand* $k \to \infty$*.*

Théorème 1.1 (Inégalité des accroissement finis) *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$*, (*$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert) continue et différentiable en chaque point du segment ouvert* $(a, b) := \{a + t(b - a),\ 0 < t < 1\} \subset \Omega$*, on a*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{\xi\in(a,b)} \|f'(\xi)\| \, |b - a|$$

Remarque 1.3 *Dans le cas des fonctions à valeurs réelles le théorème des accroissements finis prend la forme suivante*

$$\exists c \text{ tel que } a < c < b : F(b) - F(a) = (b - a) F'(c).$$

Théorème 1.2 (Convergence dominée de Lebesgue) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *vérifiant :*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω*,*

(ii) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ *telle que*

$$\text{pour chaque } n,\ |f_n(x)| \leq g(x) \ \text{ p.p sur } \Omega.$$

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \ \text{ et } \ \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Preuve. Voir H. Brezis [5]. ■

Proposition 1.1 (Formule d'intégration par partie) *Soient u, v deux fonctions de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$, la formule d'intégration par partie est donnée par*

$$\int_{\Omega} u'vdx = uv|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} uv'dx.$$

les résultats généraux ci-dessous sont très importants pour l'étude théorique des équations aux dérivées partielles.

Théorème 1.3 (Théorème de l'intégrale nulle) *Soit une fonction numérique définie et continue dans le domaine Ω et F une famille dense dans Ω. Si pour tout w de F l'intégrale de Φ dans w est nulle alors, la fonction Φ est identiquement nulle dans Ω.*

Théorème 1.4 (Théorème de la divergence) *Ce théorème énonce que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface. L'expression du théorème est la suivante :*

$$\int_{V} \operatorname{div} F.dV = \int_{\Sigma} F.dS$$

Où V est un volume et $\Sigma = \partial F$ (la frontière de F), dS est le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur.

Théorème 1.5 (Théorème du point fixe de Banach) *Soit X un espace de Banach et $f : X \to X$ une application telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ vérifiant*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \text{ pour tout } (x, y) \in X \times X.$$

Alors il existe un unique point x_0 de X tel que $f(x_0) = x_0$.

1.3.1 Principe du maximum

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $T > 0$, on considère l'ensemble Q dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$Q = \{(t, x) \,/\, 0 < t < T,\, x \in \Omega\},$$

tel que

$$\partial Q = \{(t, x) \,/\, 0 \leq t \leq T,\, x \in \partial\Omega \text{ ou } t = 0,\, x \in \Omega\}.$$

Théorème 1.6 *Si* $u \in C\left([0,T] \times \bar{\Omega}\right) \cap C^{1,2}\left(]0,T[\times \bar{\Omega}\right)$ *vérifiant*

$$u_t - \Delta u \leq 0,$$

alors

$$\max_{Q} u = \max_{\partial Q} u.$$

Preuve. Voir F. John [15]. ■

1.3.2 Critère de comparaison

Le critère de comparaison, appelé aussi méthode des sous-solutions et sur-solutions, est une méthode très utile et largement utilisée dans l'étude des équations différentielles.

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(u) & \text{sur } [0,T] \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } [0,T] \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Théorème 1.7 *Soit* $u, v \in C\left([0,T] \times \bar{\Omega}\right) \cap C^{1,2}\left(]0,T[\times \bar{\Omega}\right)$ *telles que*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u - F(u) \leq v_t - \Delta v - F(v) & \textit{sur } [0,T] \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \leq \frac{\partial v}{\partial \eta} & \textit{sur } [0,T] \times \partial\Omega, \\ u_0 \leq v_0 & \textit{sur } \Omega, \end{cases}$$

où F *est de classe* C^1. *Alors*

$$u(t,x) \leq v(t,x) \ \textit{sur } [0,T] \times \Omega.$$

Preuve. On a

$$u_t - \Delta u - F(u) \leq v_t - \Delta v - F(v)$$

$$\Longleftrightarrow (u_t - v_t) - \Delta(u - v) - (F(u) - F(v)) \leq 0.$$

Posons

$$w = u - v$$

donc

$$w_t - \Delta w - (F(u) - F(v)) \leq 0$$

et d'après la **remarque 1.3** on aura

$$\exists c \text{ tel que } u < c < v : F(u) - F(v) = (u - v) F'(c)$$

d'où

$$w_t - \Delta w - wF'(c) \leq 0, \tag{1.2}$$

on pose $w^+ = \max(w, 0) = w > 0$
En multipliant (1.2) par w^+ et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega w_t w^+ - \int_\Omega \Delta w w^+ - \int_\Omega w w^+ F'(c) \leq 0$$

$$\int_\Omega w_t^+ w^+ - \int_\Omega \Delta w^+ . w^+ - \int_\Omega \left(w^+\right)^2 F'(c) \leq 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \left(w^+\right)^2 + \int_\Omega \left(\nabla \left(w^+\right)\right)^2 - K \int_\Omega \left(w^+\right)^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \left(w^+\right)^2 \leq -\int_\Omega \left(\nabla \left(w^+\right)\right)^2 + K \int_\Omega \left(w^+\right)^2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \left(w^+\right)^2 \leq K \int_\Omega \left(w^+\right)^2 .
\end{aligned}$$

Une intégration directe sur $[0, t]$ donne

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2 - \frac{1}{2} \int_\Omega \left(w_0^+(x)\right)^2 \leq \int_0^t K \int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2$$

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2 \leq \frac{1}{2} \int_\Omega \left(w_0^+(x)\right)^2 + \int_0^t K \int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2$$

$$w_0(x) = u_0(x) - v_0(x) \leq 0 \Rightarrow w_0^+(x) = 0$$

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2 \leq \int_0^t K \int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2$$

et d'après le **Lemme ??**

$$\int_\Omega \left(w^+(t,x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow w^+ = 0 \text{ (contradiction)}$$

donc

$$w \leq 0 \Leftrightarrow u - v \leq 0 \Leftrightarrow u \leq v.$$

■

Chapitre 2

Origines des systèmes de réaction-diffusion

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques applications des systèmes de réaction-diffusion du type suivant :

$$w_t(t,x) - D\Delta w(t,x) = F(w(t,x)),\ t \in \left]0,+\infty\right[,\ x \in \Omega. \qquad \text{(SRD)}$$

Ces systèmes servent de modèles dans de nombreux domaines en constituant un excellent laboratoire théorique pour la compréhension de certains processus naturels.

Ici le temps t varie dans un intervalle $[0,T]$, x dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'inconnue w est une fonction définie sur $[0,T] \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, qui, dans les applications correspond à un m-vecteurs de concentrations d'espèces chimiques, de températures, de densités de populations, etc. D est une matrice carrée d'ordre m définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion, Δ désigne le Laplacien et $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est une fonction non linéaire modélisant les phénomènes de réaction mis en jeu. (Réaction chimique par exemple).

2.1 Modélisation

Les équations de réaction-diffusion ont été proposées par Turing (1952) pour la modélisation des phénomènes de morphogènes, c'est à dire le développement des formes.

Dans cette section, nous allons présenter les étapes à suivre pour établir le système (SRD) : Pour clarifier les idées, notons que pour modéliser un phénomène, on doit simplifier plusieurs termes et négliger d'autres facteurs rentrant dans les réactions, dont le but d'une obtention des équations simples et faciles à étudier.

2.1.1 Diffusion et migration

La diffusion désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogènes les concentrations des espèces en son sein. Le déplacement des atomes, ions ou molécules dans un milieu, que celui-ci soit solide, liquide ou gazeux, est appelé de manière générale "migration". La diffusion est donc la migration sous une certaine agitation.

Lorsqu'un atome se déplace parmi des atomes de même nature, on parle d'autodiffusion. Par la suite en parlera d'autodiffusion du fer pour désigner la migration d'un atome de fer dans un cristal de fer.

Lorsque l'on a deux milieux homogènes différents que l'on met en contact, on parle d'inter diffusion.

2.1.2 Loi de conservation de la masse

Elle s'applique à tout système matériel, indépendamment de sa nature : liquide, gazeuse ou autre c'est-à-dire milieux continus.

Rappelons qu'un milieu est supposé continu si :

(i) Tout volume élémentaire contient au moins un point matériel.

(ii) Deux particules infiniment voisines dans un état de référence sont infiniment voisines après déformations

(iii) Deux particules distincts dans une configuration ne peuvent fusionner après déformations

Sachant qu'un milieu continu est intuitivement un "système de particules" en mouvement. On le modélise à chaque instant par l'ensemble des points d'un ouvert $\Omega(t)$ de $\mathbb{R}^3$. On imagine que chaque point est une particule qui se déplace et que l'ensemble des particules occupe le domaine $\Omega(t)$ à l'instant t. On suppose, de plus, l'existence d'une famille de bijections $S(s,t)_{s,t\geq 0}$ de $\Omega(s)$ dans $\Omega(t)$ dépendant régulièrement de s, $t \geq 0$ et permettant de suivre chacun des points du domaine initial dans sa trajectoire au cours du temps. Soit

► $\rho\,(t,x)$: la densité du milieu à l'instant t, c'est-à-dire la masse par unité de volume dans $\Omega\,(t)$, ainsi la masse $m\,(\Omega)$ est donnée par

$$m\,(\Omega) = \int\limits_{\Omega(t)} \rho\,(t,x)\,dx.$$

Afin de traduire mathématiquement les lois de conservation, nous utiliserons le lemme suivant qui permet d'exprimer la dérivée par rapport au temps d'une intégrale du type

$$K\,(t) = \int\limits_{\Omega(t)} k\,(t,x)\,dx, \tag{2.1}$$

où $k\,(.,.)$ est une fonction définie sur $\Omega\,(t)$. La dérivée de $K\,(t)$ est parfois appelée dérivée particulaire par référence au fait qu'on dérive selon les trajectoires des particules.

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses de régularité, la dérivée par rapport au temps de l'intégrale (2.1) est donnée par*

$$K'\,(t) = \int\limits_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial k}{\partial t}dx + \operatorname{div}\,(k\overrightarrow{v})\right) dx,$$

ou encore

$$K'\,(t) = \int\limits_{\Omega(t)} \frac{\partial k}{\partial t}dx + \int\limits_{\partial\Omega(t)} (k\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{\eta})\,d\sigma,$$

où $\overrightarrow{\eta}$ *est la normale extérieure unitaire à* $\partial\Omega\,(t)$.

Pour une démonstration de ce lemme, voir par exemple G. Duvaut [8].

La loi de conservation de la masse exprime l'invariance par rapport au temps t de la masse de tout sous-système matériel que l'on suit au cours du temps. On a donc

$$\frac{d}{dt}m\,(\Omega\,(t)) = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} \rho\,(t,x)\,dx = 0.$$

D'après le lemme appliqué à $k = \rho$, on a

$$\int\limits_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}dx + \operatorname{div}\,(\rho\overrightarrow{v})\right) dx = 0,$$

on en déduit l'équation de conservation de la masse, dite parfois équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\rho\overrightarrow{v}) = 0.$$

2.1.3 Lois de Fick

Première loi de Fick

La première loi de Fick énonce que

Le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration.

Cette loi est inspirée de la loi de "Fourier" sur la conduction de la chaleur. Elle peut être vue comme une définition du vecteur densité du courant J_i.

Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante :

Soit B un milieu dans lequel se trouve une espèce chimique A, et soit une surface S. On note $C_A(x, y, z, t)$ la concentration de A en un point donné. On appelle J_A le vecteur densité de courant des particules de A, la première loi de Fick s'écrit :

$$J_A = -D_{AB}.\nabla C_A,$$

où D_{AB} est le coefficient de diffusion de A dans le milieu B, il dépend de la température du milieu et de A.

Seconde loi de Fick

La loi de conservation des espèces indique que la variation par unité de temps de la quantité de particules i : $\int\int\int C_i.dv$ dans un volume donné V est égale au flux sortant : $\int\int J_i.ds$ du vecteur densité de courant de particules J_i à travers la surface fermée S délimitant le volume V.

On obtient la deuxième loi de Fick en identifiant les intégrants ci-dessous :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_v C_i.dV = \int\int_s J_i.dS = \int\int\int_v \nabla.J_i.dV.$$

La deuxième égalité ci-dessus est due au théorème de la divergence, dit de "Green-Ostrogradsky", et le signe moins provient du fait que la concentration diminue quand le flux sortant augmente. On a donc

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla.j_i = 0,$$

à une dimension, l'équation devient :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{\partial j_i}{\partial x}.$$

2.1.4 Modélisation des systèmes de réaction-diffusion

Considérons un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ dans lequel des réactions se réalisent. Ω peut être des molécules ou une surface géographique qui forme les lieux des milliers de virus, d'épidémies ou même des rumeurs circulant entre les individus des populations. Ω peut être aussi une cellule vivante qui est le siège de plusieurs réactions chimiques.

Nous avons besoin du principe suivant :

La vitesse de formation de la $i^{ème}$ espèce dans un volume ω est égale à la quantité formée par la réaction otée de son flux à travers la surface S. Soit alors J_i le flux de ces espèces à travers la frontière et soient $u_i\,(t,x)$ la concentration de la $i^{ème}$ espèce prenant part dans une réaction et $fi\,((u_1, u_2, \ldots, u_m)\,, t, x)$ son taux de formation dans la réaction en question à l'instant $t > 0$ et au point x. Considérons alors un volume ω infiniment petit de Ω de frontière $S = \partial\omega$. En terme d'équations, le principe précédant se traduit par

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\omega} u_i\,(t,x)\,dx = \int\limits_{\omega} f_i\,((u_1, u_2, \ldots, u_m)\,, t, x)\,dx - \int\limits_{S} J_i d\sigma.$$

Par application directe du théorème de la divergence, on obtient

$$\int\limits_{S} J_i d\sigma = \int\limits_{\omega} \nabla . J_i dx,\ i = 1, \ldots, n,$$

ceci implique

$$\int\limits_{\omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla J_i - f_i\right) dx = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Puisque ω est infiniment petit et arbitraire, le théorème de l'intégrale nulle nous assure

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla J_i - f_i = 0 \text{ dans } \Omega,\ \ i = 1, \ldots, n.$$

Le phénomène de la diffusion est régi par la loi de Fick, D'après cette loi, J_i est proportionnel au gradient de la concentration des espèces et donné par :

$$J_i = -\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \nabla u_j,\ \ i = 1, \ldots, m,$$

où les a_{ij} sont les coefficients d'autodiffusion, $A := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$est une matrice définie positive appelée matrice de diffusion.

De ce qui précède, on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\Delta u = f(u),$$

et par un changement de variable, la matrice A peut être ramenée à une matrice diagonale $D = (d_1, \ldots, d_m)$ avec $d_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$. (le cas où l'écoulement de la matière se fait des milieux les plus concentrés vers les moins concentrés).

D'où on retrouve finalement le système

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) - D\Delta v = F(v(t,x)), \qquad t \geq 0,\, x \in \Omega. \tag{R.D}$$

Le système (R.D) s'accompagne souvent de certaines conditions initiales et d'autres aux bords.

2.2 Exemples de réaction-diffusion

2.2.1 En chimie

Peut-être la plus grande source de problèmes intéressants dans ce domaine est la modélisation des réactions chimiques multi spécifiques.

Nous considérons un mécanisme général de réaction de la forme

$$\mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 + \ldots + \mu_k R_k \underset{k_r}{\overset{k_f}{\rightleftharpoons}} \nu_1 P_1 + \nu_2 P_2 + \ldots + \nu_l P_l. \tag{2.2}$$

Ici, les R_i et P_i représentent les réactifs et les espèces produits respectivement, et μ_i, $\nu_i \in \mathbb{N}$ pour chaque i. Maintenant, si nous mettons $u_i = [R_i]$ et $v_i = [P_i]$ et laisser k_f, k_r nous faire (l'entier non négatif) avant et arrière des taux de réaction, respectivement, alors nous pouvons modéliser le processus par l'application de la loi de la conservation de la masse et de la seconde loi de Fick (débit) par le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla.(d_i \nabla u_i) = \mu_i \left(k_r \prod_{j=1}^{l} v_j^{\nu j} - k_f \prod_{j=1}^{k} u_j^{\mu j} \right), & i = 1, \ldots, k, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} - \nabla.(d_{k+i} \nabla v_i) = \nu_i \left(k_f \prod_{j=1}^{k} u_j^{\mu j} - k_r \prod_{j=1}^{l} v_j^{\nu j} \right), & i = 1, \ldots, l, \end{cases} \tag{2.3}$$

Nous supposons que la réaction se déroule dans un domaine borné de frontière suffisamment régulière $\partial\Omega$.

Remarque 2.1 *La matrice diagonale D peut dépendre de t, x et u, comme elle peut ne pas être diagonale (c'est le cas lorsque la diffusion d'une espèce affecte le rythme de production des autres).*

Par exemple, considérons la réaction réversible suivante apparemment simple, dont laquelle le dioxyde de soufre réagit avec l'oxygène pour former le trioxyde de soufre :

$$2SO_2 + O_2 \underset{k_r}{\overset{k_f}{\rightleftharpoons}} 2SO_3.$$

Si nous nous fixons $u = [SO_2]$, $v = [O_2]$, et $w = [SO_3]$, puis cette réaction, dans l'hypothèse d'une action massive cinétique, peut être modélisée par le système de réaction-diffusion :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 u = 2\left(k_r w^2 - k_f u^2 v\right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 v = k_r w^2 - k_f u^2 v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - d_3 w = 2\left(k_f u^2 v - k_r w^2\right) \end{cases}$$

Avec conditions initiales non négatives L^∞ et conditions aux bords homogènes de Neumann. Ici, les d_i sont les coefficients positifs de diffusion et k_f, k_r sont respectivement les coefficients positifs avant et arrière de réaction et nous supposons que la réaction se déroule dans un domaine borné de frontière suffisamment régulière (voir S. L. Hollis et J. J. Morgan [14]).

Pour la réaction de l'eau, par exemple, on prend dans (2.2) :

$p = 3$, $I = \{1, 2\}$, $J = \{3\}$, $n_1 = n_3 = 2$ et $n_2 = 1$, $R_1 =$ hydrogène, $R_2 =$ oxygène et $R_3 =$ l'eau, on obtient la réaction classique

$$2H_2 + O_2 \underset{l}{\overset{h}{\rightleftharpoons}} 2H_2O.$$

Les équations décrivant cette réaction s'écrivent alors d'après (2.3)

$$\begin{cases} \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [H_2] = 2\left(-h [H_2]^2 [O_2] + l [H_2O]^2\right), & t > 0,\, x \in \Omega, \\ \frac{\partial [O_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [O_2] = -h [H_2]^2 [O_2] + l [H_2O]^2, & t > 0,\, x \in \Omega, \\ \frac{\partial [H_2O]}{\partial t} - d_3 \Delta [H_2O] = 2\left(h [H_2]^2 [O_2] - l [H_2O]^2\right), & t > 0,\, x \in \Omega, \end{cases}$$

avec conditions aux bords appropriées, par exemple

$$\frac{\partial [H_2]}{\partial \eta} = \frac{\partial [O_2]}{\partial \eta} = \frac{\partial [H_2O]}{\partial \eta} = 0,\, t > 0,\, x \in \partial\Omega$$

et conditions initiales positives, **i.e.**

$$[H_2]_{t=0} = [H_2]_0 > 0,\ [O_2]_{t=0} = [O_2]_0 > 0,\ [H_2O]_{t=0} = [H_2O]_0 > 0.$$

Les coefficients h et l sont supposés des constantes positives, quoi qu'ils peuvent dépendre de la température :

$$h, l \approx cT^{\beta} exp\left(\frac{E}{R}T\right),\ 1 \leq \beta \leq 2,$$

voir S. L. Hollis [12] et J. J. Morgan [22] avec différentes conditions aux bords.

2.2.2 En physique nucléaire

Le modèle décrivant une réaction nucléaire est décrit par le système de réaction-diffusion

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 u + u\,(av - b) & \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 v + cv & \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

avec conditions aux bords homogènes de Newman et conditions initiales positives. On montre que (voir C. V. Pao [31]), pour $a > 0$, $b \geq 0$ et $c > 0$, la solution du système (2.4) avec conditions aux bords bien choisies et conditions initiales positives explose en temps fini (cesse d'exister). Cette réaction est analogue à celle de deux enzymes

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} - \sigma u & \text{sur } (0, +\infty) \times (0, 1)\,, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = v_{xx} + \sigma v & \text{sur } (0, +\infty) \times (0, 1)\,, \end{cases}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} \begin{cases} u_x\,(t, 0) = ag_1\,(v\,(t, 0))\,, & t > 0, \\ u_x\,(t, 1) = 0, & t > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} v_x\,(t, 0) = 0, & t > 0, \\ v_x\,(t, 1) = ag_2\,(u\,(t, 1))\,, & t > 0, \end{cases} \end{cases}$$

et conditions initiales positives. Ce modèle a été étudié par C. V. Pao [30], H. D. Thomas et D. G. Aronson [36] et Turner et Ames [37].

2.2.3 Modèles simples

L'équation de réaction-diffusion la plus simple, ne portant que sur la concentration u d'une seule dimension de l'espace

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u),$$

est aussi appelée équation K.P.P (Kolmogorov-Pertrovsky-Piskunov). Si le terme en $f(u)$ (qui représente le facteur de réaction chimique dans le processus) vient de s'annuler, l'équation modélise une simple diffusion. L'équation correspondante est alors l'équation de la chaleur.

Si $f(u) = u(1-u)$, on obtient l'équation qui a été introduite à la fin des années 30 par R. Fisher [9] comme modèle de génétique des populations. Et avec $f(u) = u(1-u)(u-\alpha)$ et $0 < \alpha < 1$, on obtient l'équation de J. Zeldovich [38] qui est employée dans la théorie de la combustion. L'inconnue u représente une densité de gène dominant dans le premier cas et la température en combustion.

2.2.4 Modèles plus évolués

♦ En dynamique des populations (propagation d'une épidémie) (cf. J. D. Murray [28])

La modélisation mathématique en dynamique des populations est en plein essor depuis quelques années. Nous allons ici prendre l'exemple de la diffusion de la rage dans une population de renards. Dans ce modèle, il s'agit d'une répartition spatiale des populations saines et infectées, on est placé dans un cas où les individus sains ne bougent pas (ils respectent les territoires des voisins), et en revanche les malades errent au hasard ayant perdu la notion du territoire. Si l'on note $S(t,x)$ (respectivement $I(t,x)$) la densité de renards sains (respectivement infectés) à l'abscisse x et à l'instant t (les renards se déplacent sur un segment de droite). Ces quantités vérifient des équations de type :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -rIS, \\ \frac{\partial I}{\partial t} = rIS - aI + d\Delta I. \end{cases}$$

La première équation correspond au phénomène de contamination : lorsque cohabitent des individus sains et des individus infectés, un certain nombre d'individus sains sont infectés. Il est par ailleurs naturel de considérer ce terme comme proportionnel au produit IS, en effet, la quantité de microbes dans l'air (donc la probabilité pour un individu sain donné d'être infecté) est proportionnelle à I : il nous faut ensuite multiplier cette probabilité par le nombre d'individus sains, c'est à dire par S : Pour ce qui est les variations de I, le premier terme correspond aux individus contaminés (qui augmente I). Le deuxième terme, en "$-aI$", correspond aux individus qui meurent, et d est la constante de la diffusion.

♦ En génétique (ressemblances et différences entre individus) (cf. J. D. Murray [29])

Un caractère phénotypique dépend d'au moins d'un gène ou de plusieurs gènes. Par exemple, le caractère "couleur des yeux" dépend d'un seul gène. Cependant, la couleur des yeux peut varier d'un individu à l'autre. Ces variantes sont dues à des formes différentes du gène appelées "allèles".

On suppose qu'un certain gène à deux allèles que l'on note a et A : lorsque les deux allèles du couple sont identiques, on dit que l'individu est "Homozygote" pour le caractère (de type aa ou AA). Lorsque les deux allèles sont différents, on dit que l'individu est "hétérozygote" pour ce caractère. (de type aA).

Notons par $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ et $u_3(t,x)$ les densités respectives des individus de type aa, aA et AA à l'instant t et au point x, et supposons que les individus se produisent avec un taux r et se déplacent aléatoirement dans l'espace avec un mouvement Brownien de constante d alors, les densités u_1, u_2, u_3 vérifient le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d\Delta u_1 - a_1 \frac{r}{u}\left(u_1 + \frac{u_2}{2}\right)^2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = d\Delta u_2 - a_2 u_2 + \frac{2r}{u}\left(u_1 + \frac{u_3}{2}\right)\left(u_3 + \frac{u_2}{2}\right), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = d\Delta u_3 - a_3 u_3 + \frac{r}{u}\left(u_3 + \frac{u_2}{2}\right), \end{cases}$$

où $u = u_1 + u_2 + u_3$ et les coefficients a_1, a_2, a_3 sont les taux de décès des trois populations.

2.2.5 Autres exemples

Les systèmes de réaction-diffusion modélisent beaucoup d'autres problèmes tels que :

♦ Problèmes métallurgiques, comme la diffusion du phosphore dans une plaque de silicium.

♦ Problèmes publicitaires, comme la publicité sur un produit où pour lancer un produit, on entreprend une action publicitaire destinée un premier temps à toucher un certain nombre de personnes, lesquelles prolongent par le phénomène "de bouche à l'oreille".

Chapitre 3

Problèmes d'évolution semi-linéaires

Nous allons exposer dans ce chapitre la théorie des équations d'évolution, une théorie qui a permis de donner des réponses aux questions d'existence et d'unicité de solutions pour une large classe d'équations.

Les équations d'évolution sont des équations qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} u \in C\left([0,T], D(A)\right) \cap C^1\left([0,T], X\right), \\ u_t - Au(t) = F(u), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

où $u = u(t,x)$, $A : X \to X$ est un opérateur d'un espace de Banach X dans X, u_0 la donnée initiale et F une application dans X.

Comparativement avec les équations différentielles ordinaires, il est tout à fait raisonnable d'envisager l'existence et l'unicité de la solution du problème précédent à partir des propriétés de l'opérateur A.

3.1 Opérateurs m-accrétifs

3.1.1 Notations et définitions

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$, et $P(X)$ l'ensemble des parties de X.
On appelle Opérateur multivoque de X toute application A de X dans $P(X)$.
On note par :

$D(A) = \{x \in X;\ Ax \neq \phi\}$ le domaine de définition de A.

$R(A) = \bigcup_{x \in X} Ax = \bigcup_{x \in D(A)} Ax$ l'image de A.

$G(A) = \{(x, y) \in X \times X,\ x \in X,\ y \in Ax\}$le graphe de A.

$(x, y) \in A$ signifie que $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Si pour tout $x \in X$, Ax contient au plus un élément, on dit que A et un opérateur **univoque** de X. (on retombe alors sur la théorie classique des opérateurs). Un opérateur univoque de X est complètement déterminé par la donnée de son graphe.

* Dans tout ce qui suit, on considère les opérateurs univoques comme étant les seuls éléments de notre travail.

Définition 3.1 *Un opérateur linéaire dans X est un couple $(A, D(A))$, où $D(A)$ est un sous espace vectoriel de X, et $A : D(A) \to X$ est une application linéaire.*
On dit que A est borné s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au\| \leq M \|u\|$$

Dans le cas contraire, A est dit non borné.

Définition 3.2 (Opérateur accrétif) *Un opérateur A dans X est dit accrétif si*

$$\forall u, u' \in D(A) \text{ et } \forall \lambda > 0, \text{ on a } \|u - u'\| \leq \|u - u' + \lambda (Au - Au')\|.$$

• *Si l'opérateur A est linéaire, pour montrer qu'il est accrétif il suffit de prouver*

$$\forall u \in D(A) \text{ et } \forall \lambda > 0 \text{ on a } \|u\| \leq \|u + \lambda Au\|.$$

Proposition 3.1 *Soit A un opérateur accrétif dans X, alors $\forall \lambda > 0$, l'équation*

$$u + \lambda Au = f,\ \forall f \in X,\ u \in D(A), \tag{3.1}$$

admet au plus une solution.

Preuve. Soit u_1, u_2 deux solutions de (3.1), alors

$$u_1 - u_2 + \lambda (Au_1 - Au_2) = 0,$$

et puisque A est accrétif, et $u_1, u_2 \in D(A)$, on a

$$\|u_1 - u_2\| \leq \|u_1 - u_2 + (Au_1 - Au_2)\| = 0,$$

ce qui implique $u_1 = u_2$ ■

Définition 3.3 (Opérateur m-accrétif) *Un opérateur A dans X est dit m-accrétif si*
(i) A est accrétif dans X,
*(ii) $\forall \lambda > 0,\ R(I+\lambda A) = X$ **i.e.** $\forall f \in X,\ \exists u \in D(A) : u + \lambda Au = f$.*

Définition 3.4 *Un opérateur A est dit dissipatif si l'opérateur $(-A)$ est accrétif et il est dit m-dissipatif si l'opérateur $(-A)$ est m-accrétif.*

3.1.2 Produit semi-intérieur

Définition 3.5 *Pour tout u et v dans X, on définit le produit semi-intérieur noté $[.,.]$ par*

$$[u,v] = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|u+\lambda v\| - \|u\|}{\lambda} = \inf_{\lambda \geq 0} \frac{\|u+\lambda v\| - \|u\|}{\lambda}.$$

Lemme 3.1 *Le produit semi-intérieur admet les propriétés suivantes*
(i) $[u,\alpha v] = \alpha [u,v]$,
(ii) $[u, v+\tilde{v}] \leq [u,v] + [u,\tilde{v}]$,
(iii) $[u, \alpha u + v] = \alpha \|u\| + [u,v]$.

Preuve. (i) $[u,\alpha v] = \alpha [u,v]$:
On a

$$[u,\alpha v] = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|u+\lambda \alpha v\| - \|u\|}{\lambda} = \alpha \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|u+\lambda \alpha v\| - \|u\|}{\alpha \lambda},$$

posons $\beta = \alpha\lambda$, $\beta \to 0$ quand $\lambda \to 0$

$$[u,\alpha v] = \alpha \lim_{\beta \to 0} \frac{\|u+\beta v\| - \|u\|}{\beta},$$

donc

$$[u,\alpha v] = \alpha [u,v].$$

(ii) $[u, v+\tilde{v}] \leq [u,v] + [u,\tilde{v}]$:
On a

$$\|u + \lambda(v+\tilde{v})\| = \frac{1}{2} \|u + 2\lambda v + u + 2\lambda \tilde{v}\| \leq \frac{1}{2} (\|u+2\lambda v\| + \|u + 2\lambda \tilde{v}\|),$$

donc

$$\|u + \lambda(v+\tilde{v})\| - \|u\| \leq \frac{\|u+2\lambda v\| - \|u\|}{2} + \frac{\|u+2\lambda \tilde{v}\| - \|u\|}{2},$$

$$\frac{\|u+\lambda\,(v+\tilde{v})\|-\|u\|}{\lambda}\leq\frac{\|u+2\lambda v\|-\|u\|}{2\lambda}+\frac{\|u+2\lambda\tilde{v}\|-\|u\|}{2\lambda}.$$

Quand on passe à la limite $\lambda\to 0$, on aura

$$[u,v+\tilde{v}]\leq[u,v]+[u,\tilde{v}]\,.$$

(iii) $[u,\alpha u+v]=\alpha\,\|u\|+[u,v]$:
On a

$$\begin{aligned}\frac{\|u+\lambda\,(\alpha u+v)\|-\|u\|}{\lambda} &= \frac{\|(1+\lambda\alpha)\,u+\lambda v\|-\|u\|}{\lambda}\\ &= \frac{(1+\lambda\alpha)\left\|u+\frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}v\right\|}{\lambda}-\frac{\|u\|}{\lambda},\end{aligned}$$

posons $\lambda'=\frac{\lambda}{1+\lambda\alpha}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\|u+\lambda\,(\alpha u+v)\|-\|u\|}{\lambda} &= \frac{\|u+\lambda' v\|}{\lambda'}-\frac{\|u\|}{\lambda}\\ &= \frac{\|u+\lambda' v\|}{\lambda'}-\frac{\|u\|}{\lambda'}+\frac{\|u\|}{\lambda'}-\frac{\|u\|}{\lambda}\\ &= \frac{\|u+\lambda' v\|-\|u\|}{\lambda'}+\alpha\,\|u\|\,,\end{aligned}$$

par passage à la limite $\lambda'\to 0$ quand $\lambda\to 0$, il suit que

$$[u,\alpha u+v]=\alpha\,\|u\|+[u,v]\,.$$

■

Proposition 3.2 *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) A est accrétif,

(ii) $\forall u_1,u_2\in D\,(A):[u_1-u_2,Au_1-Au_2]\geq 0$,

(iii) $\forall\lambda>0$, $(I+\lambda A)^{-1}:R\,(I+\lambda A)\to X$ est une contraction.

Preuve. (i)$\Leftrightarrow$(ii) Soit (u_1,v_1), $(u_2,v_2)\in A$, posons

$$U=u_1-u_2,V=v_1-v_2,$$

et définissons

$$\begin{aligned} g:\ \ ]0,+\infty[\ &\to\mathbb{R}\\ \lambda\ &\to g\,(\lambda)=\tfrac{\|U-\lambda V\|-\|U\|}{\lambda},\end{aligned}$$

d'où

$$[U,V] = \inf_{\lambda \to 0} \frac{\|U + \lambda V\| - \|U\|}{\lambda},$$

ainsi, il est clair que

$$A \text{ accrétif} \Leftrightarrow \frac{\|U + \lambda V\| - \|U\|}{\lambda} \geq 0.$$

(i)⇔(iii) Soit x_1, $x_2 \in R(I + \lambda A)$ donc $\exists u_1$, $u_2 \in D(A)$ tel que :

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + \lambda A u_1, \\ x_2 &= u_2 + \lambda A u_2, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} u_1 &= (I + \lambda A)^{-1} x_1, \\ u_2 &= (I + \lambda A)^{-1} x_2, \end{aligned}$$

comme A est accrétif, on a
$\left\|(I + \lambda A)^{-1} x_1 - (I + \lambda A)^{-1} x_2\right\|$

$$\begin{aligned} &= \|u_1 - u_2\| \\ &\leq \|u_1 - u_2 + \lambda (Au_1 - Au_2)\| \\ &= \left\|(I + \lambda A)^{-1} x_1 - (I + \lambda A)^{-1} x_2 + \lambda \left(A (I + \lambda A)^{-1} x_1 - A (I + \lambda A)^{-1} x_2\right)\right\| \\ &= \left\|(I + \lambda A)(I + \lambda A)^{-1} x_1 - (I + \lambda A)(I + \lambda A)^{-1} x_2\right\| \\ &= \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

d'où A est accrétif⇒ $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction.
La réciproque est claire, d'où le résultat. ■

Proposition 3.3 *Notons $[.,.]_1$ le produit semi-intérieur dans L^1 avec*

$$[u,v]_1 = \int\limits_{\{x: u(x) \neq 0\}} sign\,(u(x))\, v(x)\, dx + \int\limits_{\{x: u(x) = 0\}} |v(x)|\, dx.$$

La fonction sign est définie par

$$sign\,(r) = \begin{cases} 1 & si\ r > 0, \\ 0 & si\ r = 0, \\ -1 & si\ r < 0. \end{cases}$$

Preuve. On a

$$[u,v]_1 = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|u+\lambda v\| - \|u\|}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\int_\Omega |u(x)+\lambda v(x)|\,dx - \int_\Omega |u(x)|\,dx}{\lambda}.$$

Lorsqu'on fait tendre λ vers 0, on aura

$$\frac{|u(x)+\lambda v(x)| - |u(x)|}{\lambda} = \begin{cases} v(x) & \text{si } u(x) > 0, \\ |v(x)| & \text{si } u(x) = 0, \\ -v(x) & \text{si } u(x) < 0, \end{cases}$$

ainsi

$$[u,v]_1 = \int_{\{x:u(x)\neq 0\}} sign\,(u(x))\,v(x)\,dx + \int_{\{x:u(x)=0\}} |v(x)|\,dx. \quad \blacksquare$$

3.1.3 Application

Théorème 3.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et posons $X = L^1(\Omega)$, on définit l'opérateur A_1 par*

$$\begin{cases} D(A_1) = \left\{ u \in L^1(\Omega),\ \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \\ A_1 u = -\Delta u,\ \forall u \in D(A_1). \end{cases}$$

Alors, A_1 est m-accrétif dans X.

Preuve. Puisque $A_1 = -\Delta$ est linéaire, alors pour montrer que l'opérateur A_1 est accrétif**,** il suffit de montrer d'après la **proposition 3.2** que

$$[u, A_1 u]_1 \geq 0.$$

On a

$$[u, A_1 u]_1 = \int_{\{x:u(x)\neq 0\}} -\Delta u(x)\,sign\,(u(x))\,dx + \int_{\{x:u(x)=0\}} |\Delta u(x)|\,dx \geq 0.$$

c'est-à-dire, A_1 est accrétif.
Pour la m-accrétivité, voir Bresis-Strauss **[6]**. $\blacksquare$

3.2 Semi-groupes

Définition 3.6 (Semi-groupes) *La famille* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ *s'appelle semi-groupe sur* X *si elle vérifie les deux conditions suivantes*

(i) $S(0) = Id_X$, *où* Id_X *est l'identité dans* X,

(ii) $S(t+s) = S(t)\,S(s)$, *pour tout* $t,\ s \in \mathbb{R}^+$.

On note $\mathcal{L}(X)$ *l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés.*

Définition 3.7 *Un semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est uniformément continu s'il vérifie*

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = \lim_{t\to 0^+} \sup_{\|u\|\leq 1} \|S(t)\,u - u\| = 0.$$

Définition 3.8 *Le semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *s'appelle semi-groupe fortement continu (ou bien* C_0*-semi-groupe) sur un espace de Banach* X *si*

$$\lim_{t\to 0^+} S(t)\,u = u, \text{ pour tout } u \in X.$$

Définition 3.9 *Un* C_0*-semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe de contractions si*

$$\|S(t)\,u_0 - S(t)\,v_0\| \leq \|u_0 - v_0\|\,,\ \forall u_0, v_0 \in X,$$

et on aura

$$\|S(t)\| \leq 1.$$

3.2.1 Générateur infinitésimal

Définition 3.10 *Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe sur* X. *On appelle générateur infinitésimal de* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *l'opérateur* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *défini par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ u \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)\,u - u}{t} \text{ existe dans } X \right\}, \\ Au = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{S(t)\,u - u}{t} \text{ pour } u \in D(A). \end{cases}$$

Exemple 3.1 *Soit*

$$C_{ub}[0,\infty) = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f \text{ est uniformément continue et bornée}\},$$

avec la norme

$$\|f\|_{C_{ub}[0,\infty)} = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |f(\alpha)|,$$

l'espace $C_{ub}[0,\infty)$ *devient un espace de Banach.*

Définissons

$$(S(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha), \ \forall t \geq 0, \ et\ \alpha \in [0,\infty).$$

Evidemment $S(t)$ *est un opérateur linéaire, et, en plus, on a :*
(i) $(S(0)f)(\alpha) = f(0+\alpha) = f(\alpha)$, *donc* $S(0) = I$.

(ii) $(S(t+s)f)(\alpha) = f(t+s+\alpha) = (S(t)f)(s+\alpha) = (S(t)S(s)f)(\alpha)$, $\forall f \in C_{ub}[0,\infty)$, *donc* $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$.

(iii) $\lim_{t\to 0} \|S(t)f - f\|_{C_{ub}[0,\infty)} = \lim_{t\to 0} \left\{ \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |f(t+\alpha) - f(\alpha)| \right\} = 0$,
$\forall f \in C_{ub}[0,\infty)$.

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|S(t)f\|_{C_{ub}[0,\infty)} &= \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |S(t)f(\alpha)| \\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |f(t+\alpha)| \\
&= \sup_{\beta\in[t,\infty)} |f(\beta)| \\
&\leq \sup_{\beta\in[0,\infty)} |f(\beta)| \\
&= \|f\|_{C_{ub}[0,\infty)}, \ \forall t \geq 0,
\end{aligned}$$

donc

$$\|S(t)\| = 1, \ \forall t \geq 0.$$

Par conséquent $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* $C_{ub}[0,\infty)$, *nommé le* C_0*-semi-groupe de translation à droite.*

Soit maintenant $A : D(A) \subset C_{ub}[0,\infty) \to C_{ub}[0,\infty)$ *le générateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Si $f \in D(A)$, *alors, nous avons*

$$Af(\alpha) = \lim_{t\to 0} \frac{(S(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t+\alpha) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha),$$

uniformément par rapport à α. Par conséquent :

$$D(A) \subset \{f \in C_{ub}[0,\infty) \ \text{ tel que } f' \in C_{ub}[0,\infty)\}.$$

Si $f \in C_{ub}[0,\infty)$ tel que $f' \in C_{ub}[0,\infty)$, alors :

$$\left\| \frac{S(t) f - f}{t} - f' \right\|_{C_{ub}[0,\infty)} = \sup_{\alpha \in [0,\infty)} \left| \frac{S(t) f(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right|,$$

mais

$$\begin{aligned}
\left| \frac{S(t) f(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| &= \left| \frac{f(t+\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| \\
&= \left| \frac{1}{t} f(\tau) \Big|_{\alpha}^{t+\alpha} - f'(\alpha) \right| \\
&= \frac{1}{t} \left| \int_{\alpha}^{t+\alpha} [f'(\tau) - f'(\alpha)]\, d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{t+\alpha} |f'(\tau) - f'(\alpha)|\, d\tau \to 0,
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à α, pour $t \to 0$. Par suite :

$$\left\| \frac{S(t) f - f}{t} - f' \right\|_{C_{ub}[0,\infty)} \to 0, \ \ \text{si } t \to 0,$$

d'où $f \in D(A)$ et l'ensemble

$$\{f \in C_{ub}[0,\infty) \ \text{ tel que } f' \in C_{ub}[0,\infty)\} \subset D(A).$$

Par conséquent

$$D(A) = \{f \in C_{ub}[0,\infty) \ \text{ tel que } f' \in C_{ub}[0,\infty)\},$$

et

$$Af = f'.$$

3.2.2 Quelques résultats sur les $\mathbf{C_0}$-semi-groupes

Proposition 3.4 *Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X. Alors* *(i)* $t \to \|S(t)\|$ *est bornée sur tous les compact* $[0,\tau] \subset \mathbb{R}$ *lorsque* $0 < \tau < +\infty$.

(ii) Pour tout $u \in X$, *l'application* $t \to S(t)u$ *est continue (à valeurs dans* X*) sur* $\mathbb{R}^+$.

(iii) Il existe deux constantes réelles $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ *telles que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+.$$

Si $M = 1$ *et* $\omega = 0$, *le semi-groupe est un semi-groupe de contraction.*

Preuve. Voir A. Pazy [32]. ■

Théorème 3.2 *Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach* X *et soit* A *son générateur infinitésimal. Alors*

(i) Pour $u \in X$: $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} S(s)\,uds = S(t)\,u$.

(ii) Pour $u \in X$, $\displaystyle\int\limits_0^t S(s)\,uds \in D(A)$, $A\displaystyle\int\limits_0^t S(s)\,uds = S(t)\,u - u$.

(iii) Pour $u \in D(A)$, $S(t)\,u \in D(A)$: $\dfrac{dS(t)\,u}{dt} = AS(t)\,u = S(t)\,Au$.

(iv) Pour $u \in D(A)$: $S(t)\,u - S(s)\,u = \int\limits_s^t S(\tau)\,Aud\tau = \int\limits_s^t AS(\tau)\,ud\tau$.

Preuve. Voir A. Pazy [32] ■

Définition 3.11 *On dit que le semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est compact si l'opérateur* S *est compact pour tout* $t > 0$.

Définition 3.12 *Soit* A *un opérateur m-dissipatif dans l'espace de Banach* X. *La famille d'opérateurs* $R(\lambda, A)$, $\lambda > 0$ *définie par* $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *est appelée la* ***résolvante*** *de* A *et l'opérateur* $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$ ***l'approximation de Yosida*** *(ou* ***régularisante de Yosida****) de* A.

Théorème 3.3 (Théorème de Hille-Yosida) *Un opérateur linéaire non borné* $(A, D(A))$ *dans* X *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur* X *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites*

(i) A *est fermé,*

(ii) $D(A)$ *est dense dans* X,

(iii) pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ *est une application bijective de* $D(A)$ *sur* X, *et* $(\lambda I - A)^{-1}$ *est un opérateur borné sur* X *vérifiant*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Preuve. Voir A. Pazy [32]. ■

Théorème 3.4 (Théorème de Lumer-Phillips) *Un opérateur linéaire non borné* A *dans* X *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur* X *si et seulement si* A *est m-dissipatif et de domaine dense dans* X.

Preuve. Voir T. Cazenave-A. Haraux [7]. ■

3.3 Problèmes semi-linéaires

Définition 3.13 *Une fonction* $F : X \to X$ *est dite localement lipschitzienne sur* X *si* $\forall M > 0$, $\exists K(M)$ *telle que*

$$\|F(u,v) - F(u',v')\| \leq K(M)(|u-u'| + |v-v'|), \ \forall u,u',v,v' \in B_M,$$

où B_M *est la boule de centre* 0 *et rayon* M.
$K(M)$ *dit constante de lipschitz de* F *sur* B_M.

Théorème 3.5 *Soit* $(A, D(A))$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *fortement continu sur* X, *pour tout* $u_0 \in D(A)$, $u(t) = S(t)u_0$ *est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); X) \\ \frac{du}{dt} - Au = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Preuve. Voir A. Pazy [32] ■

Théorème 3.6 *Soit* A *un opérateur m-dissipatif de domaine dense qui est le générateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $S(t)$ *sur l'espace de Banach réel* X *;* $F : X \to X$ *une fonction localement lipschitzienne sur les bornes de* X, *et* $u_0 \in X$ *est la représentation de la donnée initiale.* ***i.e.***

$$Au = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)u - u}{h},$$

On considère le problème d'évolution semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} u \in C\left([0,T], D(A)\right) \cap C^1\left([0,T], X\right), \\ \frac{du}{dt} - Au = F(u), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{S}$$

alors il existe une solution unique u de problème (S), de plus elle vérifie l'équation intégrale suivante

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s) F(u(s))\, ds, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.2}$$

Preuve. Soit $t \in [0,T]$, et u une solution de (S), on définit φ par

$$\varphi(s) = S(t-s)u(s).$$

Pour tout $h \in [0, t-s]$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h} &= \frac{S(t-s-h)u(s+h) - S(t-s)u(s)}{h} \\ &= S(t-s-h)\frac{u(s+h) - S(h)u(s)}{h} \\ &= S(t-s-h)\frac{u(s+h) - u(s) + u(s) - S(h)u(s)}{h} \\ &= S(t-s-h)\left[\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \frac{S(h)-I}{h}u(s)\right]. \end{aligned}$$

Si on passe à la limite quand h tend vers zéro, on aura

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= S(t-s)\left[u'(s) - Au(s)\right] \\ &= S(t-s)F(u(s)), \end{aligned}$$

puis on intègre de 0 à τ avec $0 < \tau < t$ pour avoir

$$\varphi(\tau) - \varphi(0) = \int_0^\tau \varphi'(s)\, ds,$$

donc

$$\varphi(\tau) - \varphi(0) = \int_0^\tau S(t-s) F(u(s))\, ds,$$

par suite

$$\varphi(\tau) = S(t)\, u_0 + \int_0^{\tau} S(t-s)\, F(u(s))\, ds.$$

En faisant tendre $\tau \to t$, on trouve

$$\varphi(t) = S(t)\, u_0 + \int_0^{t} S(t-s)\, F(u(s))\, ds,$$

puisque

$$\varphi(t) = S(0)\, u(t) = u(t),$$

il en résulte

$$u(t) = S(t)\, u_0 + \int_0^{t} S(t-s)\, F(u(s))\, ds,\ \forall t \in [0,T]. \ \blacksquare$$

Remarque 3.1 *La formule (3.2) définit une solution $u \in C([0,T], X)$.*

Théorème 3.7 *$\forall \theta \in C_0^{\infty}(Q)$, $\theta \geq 0$, il existe une fonction non négative $\Phi \in C^{1,2}(Q)$ où Φ est une solution du problème :*

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - d\Delta\Phi = \theta & sur\ Q, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0 & sur\ [0,T] \times \partial\Omega, \\ \Phi(T,.) = 0 & sur\ \Omega, \end{cases}$$

de plus Φ vérifie :

$$\exists\ c \geq 0,\ \ tel\ que:\ \|\Phi\|_{L^q(Q)} \leq c\, \|\theta\|_{L^q(Q)}.$$

Preuve. Voir S. L. Hollis, R. H. Martin et M. Pierre **[13]** et S. Bonafede et D. Schmitt **[4]** $\blacksquare$

3.4 Résolution des équations de réaction diffusion

Il n'existe pas de solutions générales des systèmes d'équations de réaction-diffusion. On dispose cependant d'informations qualitatives sur l'existence globale des solutions et leurs comportements attendus lorsque la variable t tend vers l'infini.

Le fait que ces systèmes modélisent des phénomènes du monde réel, les questions mathématiques importantes qui les concernent sont :

• Existence et unicité de la solution pour des données initiales données dans une vaste classe de fonctions.

• Positivité de la solution chaque fois que les données initiales sont positives.

• Caractère globale de la solution.

• Comportement asymptotique de la solution globale lorsque le temps t tend vers ∞.

• Dépendance continue de la solution des données initiales.

3.4.1 Existence locale et unicité

Dans le paragraphe suivant la fonction F est localement lipschitzienne, et $K(M)$ son constante de lipschitz de F sur B_M.

Commençons par énoncer un résultat d'unicité.

Lemme 3.2 *Soit $u_0 \in X$ et $T > 0$ alors, le problème (S) admet au plus une solution.*

Preuve. Soient u et v deux solutions de (S) tel que $u, v \in C([0,T], X)$, elles sont donc deux solutions de (3.2). Posons

$$M = \max \left\{ \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|, \sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\| \right\},$$

on a

$$u(t) - v(t) = \int_0^t S(t-s)\left[F(u(s)) - F(v(s))\right] ds,$$

donc

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(v(s))\| \, ds \\ &\leq K(M) \int_0^t \|u(s) - v(s)\| \, ds. \end{aligned}$$

En appliquant la **remarque 1.1** on conclut

$$\|u(s) - v(s)\| = 0,$$

d'où on obtient finalement

$$u = v,$$

le résultat attendu. ■

On donne le résultat de l'existence locale suivant :
Posons maintenant

$$T_M = [2K(2M + \|F(0)\|) + 2]^{-1} > 0, \text{ pour } M > 0.$$

Proposition 3.5 *Soit $M > 0$ et $u_0 \in X$ tel que $\|u_0\| \leq M$. Alors, il existe une unique solution $u \in C([0, T_M], X)$ de (3.2) avec $T = T_M$.*

Preuve. Notons tout d'abord que le **lemme 3.2** nous assure l'unicité de la solution.
Montrons l'existence locale de la solution.
On pose

$$L = 2M + \|F(0)\|,$$

$$E = \{u \in C([0, T_M], X), \ \|u(t)\| \leq L \,;\, \forall t \in [0, T_M]\}.$$

On munit E de la distance d induite par la norme de $C([0, T_M], X)$ donnée par

$$d(u, v) = \max_{t \in [0, T_M]} \|u(t) - v(t)\|, \text{ pour tout } u, v \text{ dans } E.$$

Comme $C([0, T_M], X)$ est un espace de Banach alors (E, d) est un espace métrique complet.

Pour tout $u \in E$, on définit $\Phi_u \in C([0, T_M], X)$ par

$$\Phi_u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))\,ds, \ \forall t \in [0, T_M].$$

1) Montrons que $\Phi_u : E \longrightarrow E$.
pour $s \in [0, T_M]$, on a :

$$F(u(s)) = F(0) + (F(u(s)) - F(0)),$$

donc

$$\begin{aligned}
\|F(u(s))\| &\leq \|F(0)\| + \|F(u(s)) - F(0)\| \\
&\leq \|F(0)\| + LK(L) \\
&\leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M},
\end{aligned}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}
\|\Phi_u(t)\| &\leq \|u_0\| + \int_0^t \|F(u(s))\| \, ds \\
&\leq M + \frac{(M + \|F(0)\|)\, t}{T_M} \\
&\leq M + \frac{(M + \|F(0)\|)\, T_M}{T_M} \\
&\leq L, \forall t \in [0, T_M],
\end{aligned}$$

ainsi, on a bien $\Phi_u : E \longrightarrow E$.

2) Montrons que Φ_u est une contraction.
Notons d'une part que pour tout $u, v \in E$ on a

$$\begin{aligned}
\|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)\| &= \left\| \int_0^t S(t-s)\left[F(u(s)) - F(v(s))\right] ds \right\| \\
&\leq K(L) \int_0^t \|u(s) - v(s)\| \, ds \\
&\leq K(L) \max_{t \in [0, T_M]} \|u(s) - v(s)\| \int_0^t ds \\
&\leq K(L)\, T_M . d(u, v),
\end{aligned}$$

d'autre part on sait que

$$\|F(0)\| + LK(L) \leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M},$$

donc

$$LK(L) \leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M},$$

d'où finalement

$$\begin{aligned} K(L)\,T_M &\leq \frac{M + \|F(0)\|}{L} \\ &= \frac{M + \|F(0)\|}{2M + \|F(0)\|} \\ &< 1, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|\Phi_u(t) - \Phi_v(t)\| < d(u, v).$$

On peut donc conclure que Φ_u étant une contraction sur E, elle admet alors un point fixe $u \in E$ qui est par conséquent une solution de (3.2) et par suite de (S). ■

3.4.2 Positivité de la solution

Définition 3.14 *Une fonction $f = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$ est dite quasi-positive si et seulement si pour tout $i = 1, \ldots, m$ on a $f_i(v) \geq 0$ si $v_i = 0$ pour tout $v = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}_+^m$.*

Proposition 3.6 *Si $f = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$ est quasi-positive, la solution du système*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{S1}$$

est non négative.

Preuve. On pose $u^+ = \max(u, 0)$ et $u^- = \min(u, 0)$, et on désigne par $(\mathrm{S})^+$ le système (S1) où on a remplacé $f(u)$ par $f(u^+)$. On travaille sur la i$^{\text{ème}}$ équation du système, qu'on intègre sur $]0, t[\times \Omega$ après l'avoir multiplié par u_i^-.

$$\int_0^t \int_\Omega u_i^- \frac{\partial u_i}{\partial t} dxdt - \int_0^t \int_\Omega d_i u_i^- \Delta u_i dxdt = \int_0^t \int_\Omega u_i^- f_i(u^+)\, dxdt,$$

en utilisant le fait que $(u_i)_t = -\left(u_i^-\right)_t$ et que $\Delta u_i = -\Delta u_i^-$ si $u_i^- > 0$ et par intégration par parties, on obtient

$$-\frac{1}{2} \int_\Omega \left(u_i^-\right)^2 dx - d_i \int_0^t \int_\Omega \left|\nabla u_i^-\right|^2 dxdt = \int_0^t \int_\Omega u_i^- f_i(u^+)\, dxdt,$$

comme f_i est quasi-positive, on a

$$\begin{cases} u_i^- f_i(u^+) = 0 & \text{si } u \geq 0, \\ \quad \text{et} & \\ u_i^- f_i(u^+) \geq 0 & \text{si } u \leq 0, \end{cases}$$

ainsi

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega} (u_i^-)^2 \, dx - d_i \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_i^-|^2 \, dxdt \geq 0,$$

par conséquent : $u_i^- = 0$ et $u = u_i^+$ qui est solution de (S1). Il s'en suit, par unicité de la solution, que toutes ses composantes sont non négatives. ■

3.4.3 Existence globale

On considère principalement des problèmes paraboliques semi-linéaires de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u), & t > 0,\, x \in \Omega, \\ u = 0, & t > 0,\, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

où f est une fonction de classe C^1 avec une croissance super linéaire.

Proposition 3.7 *Soit X un espace de Banach des fonctions définies dans Ω. On suppose que le problème (3.3) possède pour tout $u_0 \in X$ une solution unique u dans l'intervalle $[0, T]$, où $T = T(u_0)$. Alors il existe $T_{\max} = T_{\max}(u_0) \in (T, \infty]$ avec les propriétés suivantes :*

(i) La solution u est continue dans l'intervalle $[0, T_{\max})$.

(ii) Si $T_{\max} < \infty$, alors u ne peut être continue dans $[0, \tau)$ pour tout $\tau > T_{\max}$. On appelle u la solution maximale et $T_{\max}$ est son temps maximal d'existence.

(iii) D'autre côté on considère que $T = T(\|u_0\|_X)$. Alors l'une de ces deux éventualités suivantes aura lieu :

1) $T_{\max} = \infty$,

2) $T_{\max} < \infty$ et $\lim\limits_{t \to T_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty$.

Preuve. Soit $u_0 \in X$ est fixé. Si u_1 et u_2 sont des solutions de (3.3) dans $[0, T_1)$ et $[0, T_2)$, respectivement, alors $u_1 = u_2$ dans $[0, \min(T_1, T_2))$ due à l'unicité. Soit $\{u_\alpha : [0, T_\alpha) \to X\}$ l'ensemble de toutes les solutions de (3.3) et $\tilde{T} := T_\alpha$. On définit $u : \left[0, \tilde{T}\right) \to X$ par $u(t) := u_\alpha(t)$, où α est un indice

tel que $T_\alpha > t$. Alors u est évidemment une solution de (3.3) dans $\left[0, \tilde{T}\right)$, et les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées.
Sous l'hypothèse dans la propriété (iii), on suppose que :

$$\tilde{T} < \infty \text{ et } \lim_{t \to \tilde{T}} \inf \|u(t)\|_X < \infty.$$

Choisissons $C > 0$ et $t_k \to \tilde{T}$ tel que $\|u(t_k)\|_X < C$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$.A cause de notre hypothèse il existe $T > 0$ indépendant de k tel que le problème (3.3) avec les conditions initiales $u(t_k)$ possède une solution unique $u_k : [0, T] \to X$, $k = 1, 2, \ldots$. Par l'unicité, $u_k(t) = u(t + t_k)$ pour tout t petit. Fixons k tel que $t_k \in \left(\tilde{T} - T, \tilde{T}\right)$ et mettons

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), \ t \in [0, t_k], \\ u(t - t_k), \ t \in [t_k, t_k + T]. \end{cases}$$

Alors $\tilde{u}$ est une solution de (3.3) dans $[0, t_k + T]$ et $t_k + T > \tilde{T}$ dont on a une contradiction avec la définition de $\tilde{T}$. ■

Remarque 3.2 *On note que (3.3) possède une solution globale si $T_{\max} = \infty$. La **proposition 3.7** nous fournit un simple critère pour l'existence globale. Si $\|u(t)\|_X$ reste borné, alors $T_{\max} = \infty$. Puisque les hypothèses de la **proposition 3.7** sont satisfaites avec $X = L^\infty(\Omega)$ si $f \in C^1$, on remarque que la solution est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et suffisante pour son existence globale. Notons que la même déclaration est juste pour plusieurs autres classes générales d'équations et systèmes.*
Si la propriété (1) est satisfaite, on dit que la solution u est globale. Si la propriété (2) est satisfaite, on dit que u explose en temps fini. L'alternative (1)-(2) signifie en d'autres termes que l'existence globale de la solution u est équivalente à l'existence d'une estimation à-priori de $\|u(t)\|$ sur $[0, T_{\max}[$.

On peut appliquer la proposition sur l'exemple suivant :

Exemple 3.2 *Considérons le problème bien posé*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{p-1} u, & t > 0, x \in \Omega, \\ u = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

avec $p = 1 + 4/n$ Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et on suppose $T := T_{\max}(u_0) < \infty$. alors

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \geq C(n, p) |\log(T - t)|^{\frac{1}{2}}, \ t \to T.$$

Maintenant on fait retour à l'étude de l'existence globale.

Théorème 3.8 (Existence Globale par effet régularisant) *Soit l'équation (SRD), si*

$$f(t,x,u) \in L^{\infty}(0,T,L^{p}(\Omega)) \text{ pour } p > \frac{n}{2} \text{ où } n = \dim \Omega.$$

i.e.

$$\begin{aligned} f(t,x,u) \quad \in \quad & L^{\infty}(0,T,L^{p}(\Omega)) \iff \sup_{\substack{0 \le t < T \\ x \in \Omega}} \|f(t,x,u)\|_{L^{p}(\Omega)} < +\infty \\ \iff \quad & \exists c > 0, \int_{\Omega} |f(t,x,u)|^{p} \, dx \le c, \; \forall t \in [0,T], \end{aligned}$$

alors la solution de l'équation est globale (voir D. Henry [12]).

Théorème 3.9 *Il existe un $T_{\max} \in (0,\infty]$ tel que (SRD) possède une solution unique dans $[0,T_{\max}) \times \bar{\Omega}$, en outre si $T_{\max} < \infty$ alors $\lim\limits_{t \to T_{\max}} \|u(t)\|_{\infty,\Omega} = \infty$.*

Preuve. Voir J. Ryan [35], ce théorème semble être bien connu (D. Henry [12]), mais nous ne pourrons pas le trouver dans la littérature sous la forme énoncée ici et étudié dans l'ouvrage de F. Rothe ([34] avec démonstration). ■

Exemple 3.3 *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u + f(u,v), & t > 0, \; x \in \Omega, \\ v_t = b\Delta v + g(u,v), & t > 0, \; x \in \Omega, \\ u_\eta = v_\eta = 0, & t > 0, \; x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ v(0,x) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

où a, b sont des constantes positives. Ici Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ et $(u_0,v_0) \in \{(u_0,v_0) \in L^{\infty}(\Omega) \times L^{\infty}(\Omega) : u_0, v_0 \ge 0\}$, On suppose que f, $g : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ sont des C^1-fonctions et satisfont :

$$f(0,v), \; g(u,0) \ge 0, \text{ pour } u,v \ge 0, \tag{3.6}$$

ce qui assure que le système (3.5) préserve la positivité.
Les deux classes célèbres sont le Système de Gierer-Meinhardt et le système avec la dissipation de la masse dont on s'intéresse que par l'étude de ce dernier.

Cette classe correspond aux non-linéarités satisfaisant la condition de structure

$$f(u,v) + g(u,v) \leq 0, \text{ pour toutes } u, v \geq 0. \tag{3.7}$$

Dans le cas de la diffusion égale $a = b$, il est facile de voir qu'on a l'existence globale de solution.
En effet $w = u + v$ alors satisfait :

$$w_t - a\Delta w = f + g \leq 0,$$

ainsi

$$0 \leq u + v \leq \|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty,$$

par le principe du maximum et l'existence globale suivant.
Dans le cas des diffusions différentes $a \neq b$, un cas souvent produit dans les applications, ceci est longtemps resté ouvert et a motivé un grand travail, avec des questions relatives. Un important cas particulier est lorsque $f \leq 0$, ce qui signifie que la première substance est absorbée par la réaction (systèmes de structure triangulaire).
Alors on obtient immédiatement, u qui est uniformément bornée puisque

$$u \leq \|u_0\|_\infty, \; x \in \bar{\Omega}, \; t \in (0, T_{\max}),$$

par le principe de maximum.
Le problème est alors réduit pour obtenir une estimation uniforme de v.
Un simple cas quand ceci peut être fait est lorsque $a > b$. Ce qui signifie que la substance diffuse rapidement que d'autres substances. Le résultat suivant $\Omega = \mathbb{R}^n$ est prouvé dans R. H. Martin et M. Pierre [21]. Un résultat similaire est obtenu dans I. Kanel et M. Kirane [16] pour Ω borné, mais la preuve est plus sensible.

Théorème 3.10 *Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$, $a > b > 0$ et on suppose*

$$f(u,v) \leq 0 \leq g(u,v), \text{ pour toutes } u, v \geq 0, \tag{3.8}$$

avec (3.6),(3.7). Alors, pour toutes

$$(u_0, v_0) \in \{f(u_0, v_0) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega) : u_0, v_0 \geq 0\},$$

la solution de problème (3.5) est globale d'ailleurs, u, v sont uniformément bornées dans $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$.

Preuve. La preuve est basée sur une simple propriété de comparaison concernant les noyaux associés avec les opérateurs $\partial_t - a\Delta$ et $\partial_t - b\Delta$. $\blacksquare$
Toujours restant dans le cas $f \leq 0$ mais on ne suppose pas que $a > b$, nous avons encore l'existence globale de solution sous l'hypothèse à croissance polynômiale de g :

$$g(u,v) \leq C(1+u+v)^{\gamma}, \text{ pour } u,v \geq 0 \text{ et } \gamma \geq 1. \tag{3.9}$$

Théorème 3.11 *Supposons Ω borné et soit $a, b > 0$, $a \neq b$, et $\gamma \geq 1$. Supposons (3.6),(3.7), (3.8) et (3.9).*
Alors, pour toutes $(u_0, v_0) \in \{f(u_0,v_0) \in L^{\infty}(\Omega) \times L^{\infty}(\Omega) : u_0, v_0 \geq 0\}$, la solution de problème (3.5) est globale.

Preuve. Ce résultat est prouvé dans S. L. Hollis, R. H. Martin et M. Pierre [13].On peut montrer par ailleurs que u, v sont uniformément bornées dans $[0,\infty) \times \Omega$. $\blacksquare$
Si f, g ne disposent pas de signe, il est toujours possible de montrer l'existence globale avec la condition additionnelle de dissipation :

$$\lambda f(u,v) + g(u,v) \leq 0, \text{ pour } u,v \geq 0,$$

avec $\lambda > 1$ suffisamment grand, en supposant aussi que f, g satisfont :

$$f(u,v), g(u,v) \leq C(1+u+v)^{\gamma}, \text{ pour toutes } u,v \geq 0 \text{ et certains } \gamma \geq 1.$$

3.5 Compacité d'opérateur

Dans ce paragraphe on va donner un résultat de compacité de l'opérateur L définissant la solution du problème (S) dans le cas où la valeur initiale égale zéro $[u(0) = 0]$, **i.e** :

$$L(F)(t) = u(t) = \int_0^t S(t-s)F(u(s))\,ds, \ \forall t \in [0,T].$$

Théorème 3.12 *Si pour tout $t > 0$, les opérateurs $S(t)$ sont compacts, alors, L est compact de $L^1([0,T], X)$ dans $L^1([0,T], X)$.*

Preuve. Etape 1 : Montrons que $S(\lambda)L : F \to S(\lambda)L(F)$ est compact dans $L^1([0,T], X)$ **i.e** :
montrons que : l'ensemble $\{S(\lambda)L(F)(t)\,;\ \|F\|_1 \leq 1\}$ est relativement compact dans $L^1([0,T], X)$, $\forall t \in [0,T]$.

Comme $S(t)$ est compact alors, l'application : $t \to S(t)$ est continue de $]0, +\infty[$ dans $\pounds(X)$ donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0,\ \exists \eta > 0.\ \forall 0 \leq h \leq \eta,\ \forall t \geq \delta,\ \|S(t+h) - S(t)\|_{\pounds(X)} \leq \varepsilon.$$

Choisissons $\lambda = \delta$, on a pour $0 \leq t \leq T - h$

$$\begin{aligned}
&S(\lambda) u(t+h) - S(\lambda) u(t) \\
&= S(\lambda) \int_0^{t+h} S(t+h-s) F(u(s))\, ds - S(\lambda) \int_0^t S(t-s) F(u(s))\, ds \\
&= \int_0^{t+h} S(\lambda) S(t+h-s) F(u(s))\, ds - \int_0^t S(\lambda) S(t-s) F(u(s))\, ds \\
&= \int_0^{t+h} S(\lambda+t+h-s) F(u(s))\, ds - \int_0^t S(\lambda+t-s) F(u(s))\, ds \\
&= \int_0^t S(\lambda+t+h-s) F(u(s))\, ds + \int_t^{t+h} S(\lambda+t+h-s) F(u(s))\, ds \\
&- \int_0^t S(\lambda+t-s) F(u(s))\, ds \\
&= \int_t^{t+h} S(\lambda+t+h-s) F(u(s))\, ds \\
&+ \int_0^t [S(\lambda+t+h-s) - S(\lambda+t-s)] F(u(s))\, ds,
\end{aligned}$$

comme $S(t)$ est continue on a

$$\|S(\lambda+t+h-s) - S(\lambda+t-s)\|_{\pounds(X)} \leq \varepsilon,$$

et comme $S(t)$ est un semi-groupe de contraction on a

$$\|S(\lambda+t+h-s)\|_{\pounds(X)} \leq 1,$$

d'où :

$$\|S(\lambda) u(t+h) - S(\lambda) u(t)\|_X \leq \int_t^{t+h} \|F(u(s))\|_X\, ds + \varepsilon \int_0^t \|F(u(s))\|_X\, ds.$$

On définit $v(t)$ par :

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

Donc

$$\int_0^T \|S(\lambda) v(t+h) - S(\lambda) v(t)\|_X \, dt$$
$$\leq \int_0^T \int_t^{t+h} \|F(u(s))\|_X \, ds dt + \varepsilon \int_0^T \int_0^t \|F(u(s))\|_X \, ds dt,$$

i.e.

$$\|S(\lambda) v(t+h) - S(\lambda) v(t)\|_1$$
$$\begin{aligned} &\leq (t+h-t) \int_0^T \|F(u(s))\|_X \, dt + \varepsilon (t-0) \int_0^T \|F(u(s))\|_X \, dt \\ &\leq h \|F(u(s))\|_1 + \varepsilon T \|F(u(s))\|_1 , \end{aligned}$$

donc
$$\|S(\lambda) v(t+h) - S(\lambda) v(t)\|_1 \leq (h + \varepsilon T) \|F(u(s))\|_1 ,$$

d'après P. Baras, J. C. Hasan et L. Veron [3], l'ensemble $\{S(\lambda)L(F)(t); \|F\|_1 \leq 1\}$ est relativement compact dans $L^1([0,T], X)$. Ainsi $S(\lambda) L$ est compact.

Etape 2 : Montrons que $S(\lambda) L$ converge vers L lorsque λ tend vers 0, dans $L^1([0,T], X)$.
On a :

$$S(\lambda) u(t) - u(t) = \int_0^t S(\lambda + t - s) F(u(s)) \, ds - \int_0^t S(t-s) F(u(s)) \, ds,$$

donc pour $0 \leq t < \delta$ on a :

$$\|S(\lambda) u(t) - u(t)\|$$
$$= \left\| \int_0^t S(\lambda + t - s) F(u(s)) \, ds - \int_0^t S(t-s) F(u(s)) \, ds \right\|$$
$$\leq \left\| \int_0^t S(\lambda + t - s) F(u(s)) \, ds \right\| + \left\| \int_0^t S(t-s) F(u(s)) \, ds \right\|$$
$$\leq \int_0^t \|S(\lambda + t - s) F(u(s))\| \, ds + \int_0^t \|S(t-s) F(u(s))\| \, ds$$
$$\leq 2 \int_0^t \|F(u(s))\| \, ds, \text{ (car } S(t) \text{ est un semi-groupe de contraction)},$$

et pour $t \geq \delta$ on a :

$$\|S(\lambda)u(t)-u(t)\| \leq \int_{\delta}^{t}\|S(\lambda+s)-S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\|F(u(s))\|\,ds+2\int_{t-\delta}^{t}\|F(u(s))\|\,ds.$$

Choisissons $0<\lambda<\eta$ et comme $S(t)$ est continue alors :

$$\|S(\lambda)u(t)-u(t)\| \leq \varepsilon\int_{\delta}^{t}\|F(u(s))\|\,ds+2\int_{t-\delta}^{t}\|F(u(s))\|\,ds,$$

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{T}\|S(\lambda)u(t)-u(t)\|\,dt\\
&\quad\leq \varepsilon\int_{0}^{T}\int_{\delta}^{t}\|F(u(s))\|\,dsdt+2\int_{0}^{T}\int_{t-\delta}^{t}\|F(u(s))\|\,dsdt\\
&\quad\leq \varepsilon(t-\delta)\int_{0}^{T}\|F(u(s))\|\,dt+2(t-t+\delta)\int_{0}^{T}\|F(u(s))\|\,dt\\
&\quad\leq \varepsilon T\int_{0}^{T}\|F(u(s))\|\,dt+2\delta\int_{0}^{T}\|F(u(s))\|\,dt.
\end{aligned}$$

Comme $F\in L^1([0,T],X)$ d'ou :

$$\|S(\lambda)u(t)-u(t)\|_1 \leq (\varepsilon T+2\delta)\|F(u(s))\|_1,$$

donc si $\lambda\to 0$ alors $S(\lambda)u\to u$ dans $L^1([0,T],X)$.
D'où l'opérateur L est une limite uniforme d'opérateur linéaire compact entre deux espaces de Banach donc L est compact dans $L^1([0,T],X)$. ■

Remarque 3.3 *Le semi-groupe $S(t)$ engendré par l'opérateur Δ est compact dans $L^1(\Omega)$.*

Chapitre 4

Existence globale de la solution d'un système de réaction-diffusion avec une matrice de diffusion diagonale

4.1 Introduction

Soit le système de réaction-diffusion suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = f(u,v) \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = g(u,v) \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \tag{4.2}$$

avec les conditions aux bord

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \tag{4.3}$$

et les conditions initiales

$$u(0,x) = u_0(x), \; v(0,x) = v_0(x) \qquad \text{sur } \Omega. \tag{4.4}$$

Où $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$, $t > 0$, $x \in \Omega$. Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, avec frontière $\partial\Omega$, η est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$ et d_1, d_2 sont deux constantes positives, $f, g : ([0,+\infty[)^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions localement Lipshitziennes et continues.
Nous allons montre l'existence d'une solution globale de (4.1)-(4.4) à partir d'un ensemble de conditions sur les données initiales et les fonctions f et g.

Hypothèses :

$$u_0(x), v_0(x) \text{ sont deux fonctions non négatives de } L^1(\Omega), \tag{4.5}$$

$$f(0,v) \geq 0,\ g(u,0) \geq 0, \quad \forall u,v \geq 0, \tag{4.6}$$

$$\exists C \geq 0 : \begin{cases} f(u,v) + g(u,v) \leq C(u+v+1), & \forall u,v \geq 0, \\ f(u,v) \leq C(u+v+1), & \forall u,v \geq 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Comme une conséquent du chapitre précédent et des résultats classiques on peut déduire l'existence globale de solution de (4.1)-(4.4) à partir du théorème suivant :

Théorème 4.1 *Supposons que les hypothèses présidentes sont satisfaites, alors il existe (u,v) solution de problème (4.1)-(4.4), de plus elle vérifie l'équation intégrale suivante*

$$\begin{cases} u,v \in C([0,+\infty[\,, L^1(\Omega)), \\ f(u,v), g(u,v) \in L^1(Q) \quad où\ Q = (0,T)\times\Omega, \\ u(t,x) = S_1(t)u_0 + \int_0^t S_1(t-s) f(u(s),v(s))\,ds, & \forall t \in [0,T[\,, \\ v(t,x) = S_2(t)v_0 + \int_0^t S_2(t-s) g(u(s),v(s))\,ds, & \forall t \in [0,T[\,. \end{cases} \tag{4.8}$$

Où $S_1(t)$, $S_2(t)$ sont les semi-groupes engendrés dans $L^1(\Omega)$ respectivement par les opérateurs $d_1\Delta$, $d_2\Delta$.

Pour montrer ce théorème on va étudier un système plus simple.

4.2 Etude d'un système particulier

Pour tout $n > 0$, on définit les fonctions u_{n_0} et v_{n_0} par :

$$u_{n_0} = \min(u_0, n) \geq 0, \text{ et } v_{n_0} = \min(v_0, n) \geq 0,$$

$$u_{n_0} = \min(u_0, n) = \begin{cases} u_0 & \text{si } u_0 \leq n, \\ n & \text{si non,} \end{cases}$$

alors

$$\int_\Omega u_{n_0}dx = \begin{cases} \int_\Omega u_0 dx < \infty & \text{car } u_0 \in L^1(\Omega) \quad \text{si } u_0 \leq n, \\ \int_\Omega n dx = n\,|\Omega| < \infty & \text{car } \Omega \text{ est borné} \quad \text{si non,} \end{cases}$$

donc $\int_\Omega u_{n_0}dx < \infty$ ce que implique que $u_{n_0} \in L^1(\Omega)$, même chose pour v_{n_0}, alors u_{n_0} et v_{n_0} vérifie (4.5), **i.e** :

$$\begin{array}{lll} u_{n_0} & \in & L^1(\Omega), \qquad u_{n_0} \geq 0, \\ v_{n_0} & \in & L^1(\Omega), \qquad v_{n_0} \geq 0. \end{array}$$

Considérons le problème suivant :

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - d_1 \Delta u_n = f(u_n, v_n) \qquad \text{sur } [0,T[\times \Omega, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} - d_2 \Delta v_n = g(u_n, v_n) \qquad \text{sur } [0,T[\times \Omega, \tag{4.10}$$

avec les conditions aux bord

$$\frac{\partial u_n}{\partial \eta} = \frac{\partial v_n}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur } [0,T[\times \partial\Omega, \tag{4.11}$$

et les conditions initiales

$$u_n(0,x) = u_{n_0}(x),\ v_n(0,x) = v_{n_0}(x) \qquad \text{sur } \Omega, \tag{4.12}$$

4.2.1 Existence locale

On transforme le problème (4.9)-(4.12) en une équation différentielle abstraite de premier ordre sous la forme

$$\begin{cases} w_n'(t) = Aw_n(t) + F(w_n(t)),\ t > 0, \\ w_n(0) = w_{n_0}, \end{cases}$$

où $w_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} d_1\Delta & 0 \\ 0 & d_2\Delta \end{pmatrix}$ et $w_{n_0} = \begin{pmatrix} u_{n_0} \\ v_{n_0} \end{pmatrix}$, avec les conditions aux bords de Neumann $\frac{\partial u_n}{\partial \eta} = \frac{\partial v_n}{\partial \eta} = 0$.

Ce que démontre que le problème (4.9)-(4.12) est ramené au forme du système (S) dans le chapitre précédent.
Ainsi que si (u_n, v_n) est une solution de (4.9)-(4.12), alors elle vérifie les équations intégrales suivantes

$$\begin{cases} u_n(t,x) = S_1(t)\, u_{n_0} + \int\limits_0^t S_1(t-s)\, f(u_n(s), v_n(s))\, ds, \\ v_n(t,x) = S_2(t)\, v_{n_0} + \int\limits_0^t S_2(t-s)\, g(u_n(s), v_n(s))\, ds. \end{cases} \tag{4.13}$$

Théorème 4.2 *Il existe $T_M > 0$ et (u_n, v_n) une solution locale de (4.9)-(4.12) pour tout $t \in [0, T_M]$.*

Preuve. Soit

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) & 0 \\ 0 & S_2(t) \end{pmatrix}$$

le semi-groupe de contraction engendré par l'opérateur A, car d'après le chapitre trois, on sait que $S_1(t)$, $S_2(t)$ sont des semi-groupes de contractions engendrés respectivement par les opérateurs $d_1\Delta$ et $d_2\Delta$ et comme F est localement Lipshitzienne et :

$$0 \leq u_{n_0}, v_{n_0} \leq n.$$

D'après la **proposition 3.5** on a :

$$\exists T_M > 0 \text{ et } (u_n, v_n) \text{ une solution locale de (4.9)-(4.12) sur } [0, T_M].$$

■

4.2.2 Positivité de la solution

Lemme 4.1 *Soit (u_n, v_n) la solution de problème (4.9)-(4.12) tel que*

$$u_{n_0}(x) \geq 0,\ v_{n_0}(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \Omega,$$

alors

$$u_n(t,x) \geq 0 \text{ et } v_n(t,x) \geq 0, \qquad \forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega.$$

Preuve. Positivité de u_n.
En peut écrire (4.9) comme suivant

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - d_1 \Delta u_n - f(u_n, v_n) = 0.$$

Si on prend $\bar{u}_n(t,x) = 0$ sur $(0,T) \times \Omega$, $\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} = 0$, $\Delta \bar{u}_n = 0$, alors

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - d_1 \Delta u_n - f(u_n, v_n) = 0 \geq \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} - d_1 \Delta \bar{u}_n - f(\bar{u}_n, v_n), \\ u_n(0,x) = u_{n_0}(x) \geq 0 = \bar{u}_n(0,x). \end{cases}$$

D'après le critère de comparaison $u_n(t,x) \geq \bar{u}_n(t,x)$, $\forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega$ d'où

$$u_n(t,x) \geq 0 \qquad \forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega,$$

même chose pour v_n.
donc $u_n(t,x) \geq 0$ et $v_n(t,x) \geq 0$, $\quad \forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega$. ■

4.2.3 Existence globale

Remarque 4.1 *Pour étudier l'existence globale de la solution du système (4.9)-(4.12), c'est-à-dire déterminer si* $T_{\max} = +\infty$, *nous utilisons la caractérisation du temps maximal d'existence :*

$$\begin{cases} \text{s'il existe une fonction } M : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty) \text{ continue telle que} \\ \|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty \leq M(t) \text{ pour tout } t \in [0, T_{\max}), \\ \text{alors } T_{\max} = +\infty, \end{cases}$$

c'est-à-dire, si les fonctions $u(t)$ *et* $v(t)$ *sont bornées pour tout* $t \in [0,T]$, $T < T_{\max}$, *alors* $T_{\max} = +\infty$.

Par conséquent, pour montrer l'existence globale de solutions classiques, il suffit de montrer que celles-ci restent uniformément bornées sur leur temps d'existence.
Pour cela on donne le lemme suivant qui montre l'existence d'une estimation de la solution de (4.9)-(4.12) dans $L^1(\Omega)$.

Lemme 4.2 *Soit* (u_n, v_n) *une solution de (4.9)-(4.12), alors, il existe* $M(t)$ *qui dépend seulement de* t, *tel que pour tout* $0 \leq t \leq T_M$, *on a*

$$\|u_n(t) + v_n(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq M(t).$$

Preuve. De l'équation (4.9) et l'équation (4.10), on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_n + v_n) - \Delta(d_1 u_n + d_2 v_n) = f(u_n, v_n) + g(u_n, v_n),$$

l'hypothèse **(4.7)** implique :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_n + v_n) - \Delta(d_1 u_n + d_2 v_n) \leq C(u_n + v_n + 1).$$

Intégrons sur Ω, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}(u_n + v_n)\,dx - d_1\int_{\Omega}\Delta u_n dx - d_2\int_{\Omega}\Delta v_n dx \leq C\int_{\Omega}(u_n + v_n + 1)\,dx.$$

La formule de Green donne

$$\int_{\Omega}\Delta u_n dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega}\Delta v_n dx = 0,$$

i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}(u_n + v_n)\,dx \leq C\int_{\Omega}(u_n + v_n + 1)\,dx,$$

aussi

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{\Omega}(u_n + v_n)\,dx}{\displaystyle\int_{\Omega}(u_n + v_n + 1)\,dx} \leq C.$$

Intégrons sur $[0, t]$, on trouve

$$\ln\int_{\Omega}(u_n + v_n + 1)\,dx\Big]_0^t \leq Ct,$$

ainsi

$$\ln\frac{\displaystyle\int_{\Omega}(u_n + v_n + 1)\,dx}{\displaystyle\int_{\Omega}(u_{n_0} + v_{n_0} + 1)\,dx} \leq Ct,$$

alors

$$\frac{\int\limits_{\Omega}(u_n+v_n+1)dx}{\int\limits_{\Omega}\left(u_{n_0}+v_{n_0}+1\right)dx} \leq \exp(Ct)$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_{\Omega}(u_n+v_n+1)\,dx \leq \exp(Ct)\int\limits_{\Omega}(u_{n_0}+v_{n_0}+1)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_{\Omega}(u_n+v_n)\,dx \leq \int\limits_{\Omega}(u_n+v_n+1)\,dx \leq \exp(Ct)\int\limits_{\Omega}(u_{n_0}+v_{n_0}+1)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_{\Omega}(u_n+v_n)\,dx \leq \exp(Ct)\int\limits_{\Omega}(u_0+v_0+1)\,dx \text{ car } u_{n_0} \leq u_0,\ v_{n_0} \leq v_0.$$

On pose :

$$M(t) = \exp(Ct)\,\|u_0+v_0+1\|_{L^1(\Omega)},$$

comme u_n, v_n sont positives, alors :

$$\|u_n+v_n\|_{L^1(\Omega)} \leq M(t), \qquad 0 \leq t \leq T_M.$$

■

On peut conclure à partir de cette estimation que la solution (u_n, v_n) donnée par le **théorème 4.2** est une solution globale.

4.3 Existence globale de la solution du système (4.1)-(4.4)

On donne le lemme suivant qui montre l'existence d'une estimation de la solution (u_n, v_n) du système (4.9)-(4.12) dans $L^1(Q)$.

Lemme 4.3 *Pour toute solution (u_n, v_n) du (4.9)-(4.12), il existe une constante $K(t)$ qui dépend seulement de t, tel que :*

$$\|u_n(t)+v_n(t)\|_{L^1(Q)} \leq K(t)\left(\|u_0+v_0\|_{L^1(\Omega)}+1\right).$$

Preuve. Pour montrer ce lemme on utilise le **théorème 3.7.**
Par l'intégration par parti on obtient :

$$\int_Q S_1(t)\,u_{n_0}(x)\left(\frac{-\partial\Phi}{\partial t}-d_1\Delta\Phi\right)dxdt$$

$$=\int_Q \Phi(t,x)\left(\frac{\partial}{\partial t}-d_1\Delta\right)(S_1(t)\,u_{n_0}(x))\,dxdt-d_1\int_{\partial\Omega} S_1(t)\,u_{n_0}(x)\,\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}d\sigma$$

$$+d_1\int_{\partial\Omega}\Phi\frac{\partial}{\partial\eta}(S_1(t)\,u_{n_0}(x))\,d\sigma+\int_\Omega\left[-\Phi(t,x)\,(S_1(t)\,u_{n_0}(x))\right]_0^T dx.$$

En utilise les conditions au bord on a

$$\int_Q S_1(t)\,u_{n_0}(x)\left(\frac{-\partial\Phi}{\partial t}-d_1\Delta\Phi\right)dxdt=\int_\Omega u_{n_0}(x)\,\Phi(0,x)\,dx.$$

Par application du théorème de fubini on obtient

$$\int_Q\left(\int_0^t S_1(t-s)\,f(u_n,v_n)\,ds\right)\left(\frac{-\partial\Phi}{\partial t}-d_1\Delta\Phi\right)dxdt$$

$$=\int_0^T\left(\int_s^T\int_\Omega\left(\frac{-\partial\Phi}{\partial t}-d_1\Delta\Phi\right)(S_1(t-s)\,f(u_n,v_n))\,dxdt\right)ds.$$

Pour tout $s\in(0,T)$ on a

$$\int_s^T\int_\Omega\left(\frac{-\partial\Phi}{\partial t}-d_1\Delta\Phi\right)(S_1(t-s)\,f(u_n,v_n))\,dxdt=\int_\Omega f(u_n,v_n)\,\Phi(s,x)\,dx.$$

En intégrant sur $(0,T)$ on obtient

$$\int_Q\left(\int_0^t S_1(t-s)f(u_n,v_n)ds\right)\left(\tfrac{-\partial\Phi}{\partial t}-d_1\Delta\Phi\right)dxdt=\int_Q f(u_n,v_n)\Phi(s,x)dxds,$$

d'où

$$\int_Q S_1(t)\,u_{n_0}(x)\,\theta dxdt=\int_\Omega u_{n_0}(x)\,\Phi(0,x)\,dx, \tag{4.14}$$

et

$$\int_Q\left(\int_0^t S_1(t-s)\,f(u_n,v_n)\,ds\right)\theta dxdt=\int_Q f(u_n,v_n)\,\Phi(s,x)\,dxds, \tag{4.15}$$

multiplions la première équation de (4.13) par θ et intégrons sur Q en utilisant (4.14) et (4.15), on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_Q u_n \theta dxdt &= \int_Q S_1(t) u_{n_0}(x) \theta dxdt + \int_Q \left(\int_0^t S_1(t-s) f(u_n, v_n) ds \right) \theta dxdt \\
&= \int_\Omega u_{n_0}(x) \Phi(0,x) dx + \int_Q f(u_n, v_n) \Phi(s,x) dxds,
\end{aligned}$$

de même pour la deuxième équation de (4.13) on a :

$$\int_Q v_n \theta dxdt = \int_\Omega v_{n_0}(x) \Phi(0,x) dx + \int_Q g(u_n, v_n) \Phi(s,x) dxds,$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_Q (u_n + v_n) \theta dxdt \\
&= \int_\Omega (u_{n_0}(x) + v_{n_0}(x)) \Phi(0,x) dx + \int_Q (f(u_n, v_n) + g(u_n, v_n)) \Phi(s,x) dxds \\
&\leq \int_\Omega (u_0(x) + v_0(x)) \Phi(0,x) dx + \int_Q C(u_n + v_n + 1) \Phi(s,x) dxds,
\end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Hölder, on aura :

$$\begin{aligned}
&\int_Q (u_n + v_n) \theta dxdt \\
&\leq \|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} . \|\Phi(0,x)\|_{L^\infty(\Omega)} + C \|u_n + v_n + 1\|_{L^1(Q)} . \|\Phi(s,x)\|_{L^\infty(Q)} \\
&= \|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} . \|\Phi(0,x)\|_{L^\infty(Q)} + C \|u_n + v_n + 1\|_{L^1(Q)} . \|\Phi(s,x)\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq c \|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} . \|\theta\|_{L^\infty(Q)} + cC \|u_n + v_n + 1\|_{L^1(Q)} . \|\theta\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq c \left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + C \left(\|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} + T|\Omega| \right) \right) . \|\theta\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq c \max(1, C, CT|\Omega|) \left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + \|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} + 1 \right) \|\theta\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq k_1(t) \left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + \|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} + 1 \right) . \|\theta\|_{L^\infty(Q)},
\end{aligned}$$

où $k_1(t) \geq c \max(1, C, CT|\Omega|)$,
comme θ est arbitraire dans $C_0^\infty(Q)$ on a :

$$\|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} \leq k_1(t) \left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + \|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} + 1 \right),$$

i.e.

$$\|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} - k_1(t)\|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} \leq k_1(t)\left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + 1\right),$$

on prend $k(t) = \frac{k_1(t)}{1-k_1(t)}$, on trouve

$$\|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} \leq k(t)\left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + 1\right).$$

■

Preuve du théorème 4.1. On définit l'application L par :

$$L : (w_0, h) \to S_d(t) w_0 + \int_0^t S_d(t-s) h(s) ds,$$

où $S_d(t)$ le semi-groupe de contraction engendré par : $d\Delta$.
D'après le **théorème 3.12** et comme $S_d(t)$ est compact, alors l'application L, est l'addition de deux applications compacts dans $L^1(Q)$ donc on a bien que L est compact de $L^1(Q) \times L^1(Q)$ dans $L^1(Q)$.
Par conséquent du résultat précédent, il existe une sous-suite $\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)$ de (u_n, v_n) et (u, v) de $L^1(Q) \times L^1(Q)$, tel que :

$$\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \text{ converge vers } (u, v).$$

Montrons que (u, v) est une solution de (4.1)-(4.4).
Comme $\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)$ est une solution du (4.9)-(4.12), on a :

$$\begin{cases} u_{n_j}(t,x) = S_1(t) u_{n_0} + \int_0^t S_1(t-s) f\left(u_{n_j}(s), v_{n_j}(s)\right) ds, \\ v_{n_j}(t,x) = S_2(t) v_{n_0} + \int_0^t S_2(t-s) g\left(u_{n_j}(s), v_{n_j}(s)\right) ds. \end{cases} \tag{P$_{\mathrm{j1}}$}$$

Du **chapitre 3**, il suffit de montrer que (u, v) vérifie (4.8).
Il est clair que si $j \to +\infty$ on a bien les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \to f(u,v), & \text{p.p}, \\ g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \to g(u,v), & \text{p.p}, \end{array} \tag{4.16}$$

et

$$\begin{array}{ccc} u_{n_0} & \to & u_0, \\ v_{n_0} & \to & v_0. \end{array}$$

D'autre part d'après le **lemme 4.3** en utilisant le théorème de convergence dominé de Lebesgue **théorème 1.2** on peut conclure que $\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)$ converge vers (u, v) dans $L^1(Q)$.
donc pour montrer que (u, v) vérifie (4.8), il reste à montrer que :

$$\begin{array}{rcl} f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) & \rightarrow & f(u, v), \\ g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) & \rightarrow & g(u, v), \end{array}$$

dans $L^1(Q)$ lorsque $j \rightarrow +\infty$.
L'application de la formule de Green donne

$$\int_Q \Delta u_{n_j} dxdt = 0, \qquad \int_Q \Delta v_{n_j} dxdt = 0.$$

L'intégrale de l'équation (4.9) sur Q donne :

$$\int_\Omega \int_0^t \frac{d}{dt} u_{n_j} dtdx = \int_\Omega \int_0^t f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dtdx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega u_{n_j} dx - \int_\Omega u_{n_0} dx = \int_\Omega \int_0^t f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dtdx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega u_{n_j} dx - \int_\Omega u_{n_0} dx = \int_Q f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dxdt$$

$$\Rightarrow -\int_\Omega u_{n_0} dx \leq \int_\Omega u_{n_j} dx - \int_\Omega u_{n_0} dx = \int_Q f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dxdt$$

$$\Rightarrow -\int_\Omega u_{n_0} dx \leq \int_Q f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dxdt,$$

de même pour l'équation (4.10) on a

$$-\int_\Omega v_{n_0} dx \leq \int_Q g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dxdt,$$

d'où :

$$-\int_Q f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dxdt \leq \int_\Omega u_{n_0} dx,$$

$$-\int_Q g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dxdt \leq \int_\Omega v_{n_0} dx,$$

comme $u_{n_0} \leq u_0$ et $v_{n_0} \leq v_0$ alors

$$-\int_Q f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dxdt \leq \int_\Omega u_0 dx, \tag{4.17}$$

$$-\int_Q g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dxdt \leq \int_\Omega v_0 dx. \tag{4.18}$$

Posons :

$$N_n = C\left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right) - f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right), \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} M_n &= C\left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right) - f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) - g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \\ &= N_n - g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right), \end{aligned} \tag{4.20}$$

il est clair de (4.7) que N_n et M_n sont positives
de (4.17) on a

$$\int_Q N_n dxdt$$

$$\begin{aligned} &\leq C\int_Q \left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right) dxdt + \int_\Omega u_0 dx \\ &= C\left\|u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right\|_{L^1(Q)} + \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C\left(\left\|u_{n_j} + v_{n_j}\right\|_{L^1(Q)} + 1\right) + \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C\left(K(t)\left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + 1\right) + 1\right) + \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \ \textbf{(lemme 4.3)} \\ &< +\infty \text{ (d'après } \textbf{(4.5))}, \end{aligned}$$

de même pour (4.18)

$$\begin{aligned} \int_Q M_n dxdt &\leq C\int_Q \left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right) dxdt + \int_\Omega (u_0 + v_0)\, dx \\ &= C\left\|u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right\|_{L^1(Q)} + \|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C\left(\left\|u_{n_j} + v_{n_j}\right\|_{L^1(Q)} + 1\right) + \|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq C\left(K(t)\left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + 1\right) + 1\right) + \|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

donc

$$\int_Q N_n dxdt < +\infty,$$

$$\int_Q M_n dxdt < +\infty,$$

d'après (4.19) on a

$$f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) = C\left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right) - N_n$$

$$\Rightarrow \left|f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| = \left|C\left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right) - N_n\right| \leq \left|C\left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right)\right| + \left|N_n\right|,$$

et (4.20) donne
$g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) = N_n - M_n \Rightarrow \left|g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| = \left|N_n - M_n\right| \leq \left|M_n\right| + \left|N_n\right|,$
mais C, u_{n_j}, v_{n_j}, N_n et M_n sont positives alors

$$\left|f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| \leq C\left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right) + N_n \text{ et } \left|g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| \leq M_n + N_n,$$

ceci en train :

$$\begin{aligned} \int_Q \left|f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| dxdt &\leq C\int_Q \left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right) dxdt + \int_Q N_n dxdt < +\infty, \\ \int_Q \left|g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| dxdt &\leq \int_Q M_n dxdt + \int_Q N_n dxdt < +\infty. \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} h_n &= N_n + C\left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right), \\ \Psi_n &= N_n + M_n, \end{aligned}$$

on a h_n et Ψ_n sont de $L^1(Q)$, et aussi sont positives, de plus :

$$\begin{aligned} \left|f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| &\leq h_n \quad \text{p.p,} \\ \left|g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| &\leq \Psi_n \quad \text{p.p.} \end{aligned}$$

Combinaisons ce résultat avec (4.16) et on applique le **théorème 1.2**, on aura bien que :

$$\begin{matrix} f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \to f(u,v), \\ g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \to g(u,v), \end{matrix} \quad \text{dans } L^1(Q),$$

par passage à la limite quand j tend vers l'infini de ($\mathrm{P_{j1}}$) dans $L^1(Q)$, on trouve :

$$\begin{cases} u(t,x) = S_1(t)\,u_0 + \displaystyle\int_0^t S_1(t-s)\,f(u(s),v(s))\,ds, \\ v(t,x) = S_2(t)\,v_0 + \displaystyle\int_0^t S_2(t-s)\,g(u(s),v(s))\,ds, \end{cases}$$

donc (u,v) vérifie (4.8) par conséquent (u,v) est une solution du (4.1)-(4.4). ■

Chapitre 5

Existence globale d'un système de réaction-diffusion avec une matrice de diffusion triangulaire

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du système d'équations de réaction-diffusion suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = f(u, v) \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta u - d_3 \Delta v = g(u, v) \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \tag{5.2}$$

avec les conditions aux bord

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \tag{5.3}$$

et les conditions initiales

$$u(0, x) = u_0(x), \; v(0, x) = v_0(x) \qquad \text{sur } \Omega. \tag{5.4}$$

Notons que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$, avec frontière $\partial\Omega$, η est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$, $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$, $t > 0$, $x \in \Omega$ sont les inconnues, et les constantes de diffusion d_1, d_2, d_3 sont supposées non-négatives tel que $d_2^2 < 4d_1 d_3$ et $d_1 > d_3$, f, g sont deux fonctions continûment différentiables sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Dans tout ce qui suit, on suppose

$$u_0(x),\ v_0(x) \text{ sont deux fonctions non négatives de } L^1(\Omega), \tag{5.5}$$

$$f(0,v) \geq 0, \qquad \forall v \geq 0, \tag{5.6}$$

$$\exists C \geq 0 : \begin{cases} f(u,v) + g(u,v) \leq C(u+v+1), & \forall u,v \geq 0, \\ f(u,v) \leq C(u+v+1), & \forall u,v \geq 0, \end{cases} \tag{5.7}$$

$$d_2 f(u,v) \leq (d_1 - d_3)\, g(u,v), \qquad \forall u,v \geq 0, \tag{5.8}$$

Théorème 5.1 *Sous les hypothèses (5.5)***-***(5.8) le problème (5.1)-(5.4) admet une solution (u,v), de plus elle vérifie l'équation intégrale suivante*

$$\begin{cases} u,v \in C\left([0,+\infty[\,, L^1(\Omega)\right), \\ f(u,v)\,, g(u,v) \in L^1(Q)\,, \\ u(t,x) = S_1(t)\,u_0 + \displaystyle\int_0^t S_1(t-s)\, f(u(s), v(s))\, ds \quad \forall t \in [0,T[\,, \\ v(t,x) = S_3(t)\left(v_0 - \frac{d_2}{d_1-d_3} u_0\right) + \frac{d_2}{d_1-d_3} S_1(t)\, u_0 \\ + \frac{d_2}{d_1-d_3} \displaystyle\int_0^t \left[S_1(t-s) - S_3(t-s)\right] f(u(s), v(s))\, ds \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t S_3(t-s)\, g(u(s), v(s))\, ds, \qquad \forall t \in [0,T[\,. \end{cases} \tag{5.9}$$

Où $S_1(t)$, $S_3(t)$ sont les semi-groupes engendrés dans $L^1(\Omega)$ respectivement par les opérateurs $d_1\Delta$, $d_3\Delta$.

Pour démontrer ce théorème on va se baser sur l'étude d'un système plus simple à travers duquel il est plus commode de déduire cette preuve.

5.2 Etude d'un système particulier

Pour tout $n > 0$, on définit les fonctions u_{n_0} et v_{n_0} par :

$$u_{n_0} = \min(u_0, n)\,, \text{ et } v_{n_0} = \min(v_0, n)\,,$$

il est clair que u_{n_0} et v_{n_0}vérifie (5.5), **i.e** :

$$\begin{array}{rcll} u_{n_0} & \in & L^1(\Omega), & u_{n_0} \geq 0, \\ v_{n_0} & \in & L^1(\Omega), & v_{n_0} \geq 0. \end{array}$$

Considérons le problème suivant :

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - d_1 \Delta u_n = f(u_n, v_n) \qquad \text{sur } [0, T[\times \Omega, \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} - d_2 \Delta u_n - d_3 \Delta v_n = g(u_n, v_n) \qquad \text{sur } [0, T[\times \Omega, \tag{5.11}$$

avec les conditions aux bords

$$\frac{\partial u_n}{\partial \eta} = \frac{\partial v_n}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur } [0, T[\times \partial\Omega, \tag{5.12}$$

et les conditions initiales

$$u_n(0, x) = u_{n_0}(x), \; v_n(0, x) = v_{n_0}(x) \qquad \text{sur } \Omega. \tag{5.13}$$

5.2.1 Existence locale

On transforme le problème (5.10)-(5.13) en une équation différentielle abstraite de premier ordre dans l'espace de Banach $X = L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ sous la forme du système (S)

$$\begin{cases} w_n'(t) = Aw_n(t) + F(w_n(t)), \; t > 0, \\ w_n(0) = w_{n_0} = (u_{n_0}, v_{n_0}). \end{cases}$$

Sachant que : $w_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ et l'opérateur $A = \begin{pmatrix} d_1\Delta & 0 \\ d_2\Delta & d_3\Delta \end{pmatrix}$, avec les conditions aux bords de Neumann $\frac{\partial u_n}{\partial \eta} = \frac{\partial v_n}{\partial \eta} = 0$.

Proposition 5.1 *Pour tout $t \geq 0$ on définit l'opérateur linéaire $S(t)$ de X dans X sous la forme*

$$S(t)(u_{n_0}, v_{n_0}) = \left(S_1(t)\, u_{n_0}, S_3(t)\left(v_{n_0} - \tfrac{d_2}{d_1 - d_3} u_{n_0}\right) + \tfrac{d_2}{d_1 - d_3} S_1(t)\, u_{n_0}\right).$$

Alors $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ est un semi-groupe dans X de générateur infinitésimal A.

Ainsi que si (u_n, v_n) est une solution de (5.10)-(5.13), alors elle vérifie les équations intégrales suivantes

$$\begin{cases} u_n(t,x) = S_1(t)\,u_{n0} + \int\limits_0^t S_1(t-s)\,f(u_n(s),v_n(s))\,ds, \\ v_n(t,x) = S_3(t)\left(v_{n0} - \frac{d_2}{d_1-d_3}u_{n0}\right) + \frac{d_2}{d_1-d_3}S_1(t)\,u_{n0} \\ \quad +\frac{d_2}{d_1-d_3}\int\limits_0^t [S_1(t-s) - S_3(t-s)]\,f(u_n(s),v_n(s))\,ds \\ \qquad +\int\limits_0^t S_3(t-s)\,g(u_n(s),v_n(s))\,ds. \end{cases} \tag{5.14}$$

Preuve. L'opérateur $\begin{pmatrix} d_1\Delta & 0 \\ 0 & d_3\Delta \end{pmatrix}$ engendre le semi-groupe $\begin{pmatrix} S_1(t) & 0 \\ 0 & S_3(t) \end{pmatrix}$. (Voir chapitre 04)
Cherchons maintenant le semi-groupe $S(t)$ engendré par A, pour cela en fait le changement de variable suivant

$$\begin{cases} \tilde{u}_n = u_n, \\ \tilde{v}_n = v_n - \frac{d_2}{d_1-d_3}u_n, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n = \tilde{u}_n, \\ v_n = \tilde{v}_n + \frac{d_2}{d_1-d_3}\tilde{u}_n, \end{cases}$$

le système homogène du problème (5.10)-(5.13) est

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = d_1\Delta u_n, \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = d_2\Delta u_n + d_3\Delta v_n, \tag{5.16}$$

l'équation (5.15) reste $\frac{\partial u_n}{\partial t} = d_1\Delta u_n$.
On a $\frac{\partial v_n}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} + \frac{d_2}{d_1-d_3}\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} + \frac{d_2}{d_1-d_3}\frac{\partial u_n}{\partial t}$, $\Delta v_n = \Delta\tilde{v}_n + \frac{d_2}{d_1-d_3}\Delta u_n$, donc
$\frac{\partial v_n}{\partial t} = d_2\Delta u_n + d_3\Delta v_n$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} + \frac{d_2}{d_1-d_3}\frac{\partial u_n}{\partial t} = d_2\Delta u_n + d_3\left(\Delta\tilde{v}_n + \frac{d_2}{d_1-d_3}\Delta u_n\right) \\ &\Longleftrightarrow \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} + \frac{d_2}{d_1-d_3}\frac{\partial u_n}{\partial t} = d_2\Delta u_n + d_3\Delta\tilde{v}_n + \frac{d_2 d_3}{d_1-d_3}\Delta u_n \\ &\Longleftrightarrow \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} = d_3\Delta\tilde{v}_n + \frac{d_2}{d_1-d_3}\left[-\frac{\partial u_n}{\partial t} + (d_1-d_3)\,\Delta u_n + d_3\Delta u_n\right] \\ &\Longleftrightarrow \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} = d_3\Delta\tilde{v}_n + \frac{d_2}{d_1-d_3}\left(-\frac{\partial u_n}{\partial t} + d_1\Delta u_n\right), \end{aligned}$$

donc l'équation (5.16) devient

$$\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} = d_3 \Delta \tilde{v}_n + \frac{d_2}{d_1 - d_3}\left(-\frac{\partial u_n}{\partial t} + d_1 \Delta u_n\right),$$

ainsi, d'après l'équation (5.15) on a

$$-\frac{\partial u_n}{\partial t} + d_1 \Delta u_n = 0,$$

donc

$$\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} = d_3 \Delta \tilde{v}_n,$$

donc le problème (5.15)-(5.16) devient

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = d_1 \Delta u_n, \\ \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} = d_3 \Delta \tilde{v}_n, \end{cases} \tag{5.17}$$

et cette derniers est équivalente à

$$\begin{pmatrix} u_n \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} d_1 \Delta & 0 \\ 0 & d_3 \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix},$$

est un système diagonale, donc la solution de (5.17) est donnée par

$$\begin{pmatrix} u_n \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(t) & 0 \\ 0 & S_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n_0} \\ \tilde{v}_{n_0} \end{pmatrix},$$

ce implique que

$$\begin{cases} u_n(t) = S_1(t)\, u_{n_0}, \\ \tilde{v}_n(t) = S_3(t)\, \tilde{v}_{n_0}. \end{cases}$$

On remplace $\tilde{v}_n$ par $v_n - \frac{d_2}{d_1 - d_3} u_n$ on obtient

$$v_n - \frac{d_2}{d_1 - d_3} u_n = S_3(t)\left(\frac{-d_2}{d_1 - d_3} u_{n_0} + v_{n_0}\right),$$

donc $v_n = S_3(t)\, v_{n_0} + \frac{d_2}{d_1 - d_3}\left[S_1(t) - S_3(t)\right] u_{n_0}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(t) & 0 \\ \frac{d_2}{d_1 - d_3}\left[S_1(t) - S_3(t)\right] & S_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n_0} \\ v_{n_0} \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} (u_n, v_n) &= S(t)\,(u_{n_0}, v_{n_0}) \\ &= \left(S_1(t)\, u_{n_0}, S_3(t)\left(v_{n_0} - \frac{d_2}{d_1 - d_3} u_{n_0}\right) + \frac{d_2}{d_1 - d_3} S_1(t)\, u_{n_0}\right). \end{aligned}$$

On sait que la solution des problèmes non homogènes est

$$w(t) = S(t)\, w_0 + \int_0^t S(t-s)\, F(w(s))\, ds.$$

On remplace $w = (u_n, v_n)$, $w_0 = (u_{n_0}, v_{n_0})$,

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) & 0 \\ \frac{d_2}{d_1-d_3}\left[S_1(t) - S_3(t)\right] & S_3(t) \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(t) & 0 \\ \frac{d_2}{d_1-d_3}\left[S_1(t) - S_3(t)\right] & S_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n_0} \\ v_{n_0} \end{pmatrix}$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} S_1(t-s) & 0 \\ \frac{d_2}{d_1-d_3}\left[S_1(t-s) - S_3(t-s)\right] & S_3(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u_n(s), v_n(s)) \\ g(u_n(s), v_n(s)) \end{pmatrix} ds.$$

Cette dernier donne la formule (5.14). ∎
Comme F est localement lipschitzienne et : $0 \leq u_{n_0}, v_{n_0} \leq n$.
On peut facilement déduire l'existence locale d'une solution (u_n, v_n) de (5.10)-(5.13) définie sur un intervalle maximal $[0, T_M]$.

5.2.2 Positivité de la solution

Lemme 5.1 *Soit (u_n, v_n) la solution de problème (5.10)-(5.13) tel que*

$$u_{n_0}(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \Omega,$$

et

$$v_{n_0}(x) \geq \frac{d_2}{d_1 - d_3} u_{n_0}(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \Omega,$$

alors

$$u_n(t,x) \geq 0 \text{ et } v_n(t,x) \geq \frac{d_2}{d_1 - d_3} u_n(t,x) \geq 0, \qquad \forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega.$$

Preuve. Positivité de u_n. En peut écrire (5.10) comme suivant

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - d_1 \Delta u_n - f(u_n, v_n) = 0.$$

Si on prend $\bar{u}_n(t,x) = 0$ sur $(0,T) \times \Omega$, $\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} = 0$, $\Delta \bar{u}_n = 0$, alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - d_1 \Delta u_n - f(u_n, v_n) = 0 \geq \dfrac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} - d_1 \Delta \bar{u}_n - f(\bar{u}_n, v_n), \\ u_n(0,x) = u_{n_0}(x) \geq 0 = \bar{u}_n(0,x). \end{cases}$$

D'après le critère de comparaison $u_n(t,x) \geq \bar{u}_n(t,x)$, $\forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega$ d'où

$$u_n(t,x) \geq 0, \qquad \forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega.$$

Positivité de v_n. On utilise (5.14) on trouve

$$u_n(t,x) = S_1(t)\, u_{n_0} + \int_0^t S_1(t-s)\, f(u_n(s), v_n(s))\, ds$$

$$\begin{aligned}
v_n(t,x) &= S_3(t)\left(v_{n_0} - \tfrac{d_2}{d_1-d_3} u_{n_0}\right) \\
&\quad + \tfrac{d_2}{d_1-d_3}\left[S_1(t)\, u_{n_0} + \int_0^t S_1(t-s)\, f(u_n(s), v_n(s))\, ds\right] \\
&\quad + \int_0^t S_3(t-s)\left[\tfrac{-d_2}{d_1-d_3} f(u_n(s), v_n(s)) + g(u_n(s), v_n(s))\right] ds \\
&= S_3(t)\left(v_{n_0} - \tfrac{d_2}{d_1-d_3} u_{n_0}\right) + \tfrac{d_2}{d_1-d_3} u_n(t) \\
&\quad + \int_0^t S_3(t-s)\left[\tfrac{-d_2}{d_1-d_3} f(u_n(s), v_n(s)) + g(u_n(s), v_n(s))\right] ds,
\end{aligned}$$

d'après **(5.8)**

$$\int_0^t S_3(t-s)\left[\frac{-d_2}{d_1-d_3} f(u_n(s), v_n(s)) + g(u_n(s), v_n(s))\right] ds \geq 0,$$

$d_2 \geq 0$, $d_1 > d_3$, $u_n(t) \geq 0 \Rightarrow \frac{d_2}{d_1-d_3} u_n(t) \geq 0$
et $v_{n_0} \geq \frac{d_2}{d_1-d_3} u_{n_0} \Rightarrow S_3(t)\left(v_{n_0} - \frac{d_2}{d_1-d_3} u_{n_0}\right) \geq 0$,
donc

$$v_n(t,x) \geq \frac{d_2}{d_1-d_3} u_n(t,x) \geq 0, \qquad \forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega.$$

■

5.2.3 Existence globale

Pour prouver l'existence de cette solution pour tout t non négatif, c'est-à-dire une solution globale, il suffit de trouver une estimation de la solution pour tout $t \geq 0$.
Pour cela on donne le lemme suivant qui montre l'existence d'une estimation de la solution de (5.10)-(5.13) dans $L^1(\Omega)$.

Lemme 5.2 *Soit (u_n, v_n) une solution de (5.10)-(5.13), alors, il existe $M(t)$ dépendant seulement de t, tel que pour tout :*

$$0 \leq t \leq T_M : \|u_n(t) + v_n(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq M(t).$$

Preuve. De l'équation (5.10) et l'équation (5.11), on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_n + v_n) - \Delta(d_1 u_n + d_2 u_n + d_3 v_n) = f(u_n, v_n) + g(u_n, v_n),$$

l'hypothèse **(**5.7**)** implique :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_n + v_n) - \Delta((d_1 + d_2) u_n + d_3 v_n) \leq C(u_n + v_n + 1),$$

intégrons sur Ω, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (u_n + v_n)dx - (d_1 + d_2)\int_\Omega \Delta u_n dx - d_3 \int_\Omega \Delta v_n dx \leq C\int_\Omega (u_n + v_n + 1)dx.$$

La formule de Green donne

$$\int_\Omega \Delta u_n dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_\Omega \Delta v_n dx = 0,$$

i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (u_n + v_n)\,dx \leq C\int_\Omega (u_n + v_n + 1)\,dx,$$

aussi

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_\Omega (u_n + v_n)\,dx}{\displaystyle\int_\Omega (u_n + v_n + 1)\,dx} \leq C,$$

intégrons sur $[0, t]$, on trouve

$$\ln \int_\Omega (u_n + v_n + 1)\,dx \Bigg]_0^t \leq Ct,$$

ainsi

$$\ln \frac{\int_\Omega (u_n + v_n + 1)\, dx}{\int_\Omega (u_{n_0} + v_{n_0} + 1)\, dx} \leq Ct,$$

alors

$$\frac{\int_\Omega (u_n+v_n+1)dx}{\int_\Omega \left(u_{n_0}+v_{n_0}+1\right)dx} \leq \exp(Ct)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_\Omega (u_n + v_n + 1)\, dx \leq \exp(Ct) \int_\Omega (u_{n_0} + v_{n_0} + 1)\, dx \\
&\Rightarrow \int_\Omega (u_n + v_n)\, dx \leq \int_\Omega (u_n + v_n + 1)\, dx \leq \exp(Ct) \int_\Omega (u_{n_0} + v_{n_0} + 1)\, dx \\
&\Rightarrow \int_\Omega (u_n + v_n)\, dx \leq \exp(Ct) \int_\Omega (u_0 + v_0 + 1)\, dx \text{ car } u_{n_0} \leq u_0,\ v_{n_0} \leq v_0.
\end{aligned}$$

On pose :

$$M(t) = \exp(Ct) \int_\Omega (u_0 + v_0 + 1)\, dx,$$

comme u_n, v_n sont positives, alors :

$$\|u_n + v_n\|_{L^1(\Omega)} \leq M(t).$$

■

Nous conclure d'après cette estimation que la solution (u_n, v_n) du système (5.10)-(5.13) est une solution globale

5.3 Existence globale de la solution de (5.1)-(5.4)

On donne le lemme suivant qui montre l'existence d'une estimation de la solution (u_n, v_n) du système (5.10)-(5.13) dans $L^1(Q)$.

Lemme 5.3 *Pour toute solution (u_n, v_n) du (5.10)-(5.13), il existe une constante $K(t)$ dépendant seulement de t, tel que :*

$$\|u_n(t) + v_n(t)\|_{L^1(Q)} \leq K(t)\left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + 1\right).$$

Preuve. Pour montrer ce lemme on utilise le **théorème 3.7.**
Par l'intégration par parti et en utilise les conditions au bord on a

$$\int_Q S_1(t)\, u_{n_0}(x)\left(\frac{-\partial\Phi}{\partial t} - d_1\Delta\Phi\right) dxdt = \int_\Omega u_{n_0}(x)\,\Phi(0,x)\,dx, \tag{5.18}$$

$$\int_Q S_3(t)\, u_{n_0}(x)\left(\frac{-\partial\Phi}{\partial t} - d_1\Delta\Phi\right) dxdt = \int_\Omega u_{n_0}(x)\,\Phi(0,x)\,dx, \tag{5.19}$$

$$\int_Q S_3(t)\, v_{n_0}(x)\left(\frac{-\partial\Phi}{\partial t} - d_1\Delta\Phi\right) dxdt = \int_\Omega v_{n_0}(x)\,\Phi(0,x)\,dx,$$

$$\int_Q \left(\int_0^t S_1(t-s)\, f(u_n, v_n)\, ds\right)\left(\frac{-\partial\Phi}{\partial t} - d_1\Delta\Phi\right) dxdt$$

$$= \int_Q f(u_n, v_n)\,\Phi(s,x)\,dxds, \tag{5.20}$$

$$\int_Q \left(\int_0^t S_3(t-s)\, f(u_n, v_n)\, ds\right)\left(\frac{-\partial\Phi}{\partial t} - d_1\Delta\Phi\right) dxdt$$

$$= \int_Q f(u_n, v_n)\,\Phi(s,x)\,dxds, \tag{5.21}$$

$$\int_Q \left(\int_0^t S_3(t-s)\, g(u_n, v_n)\, ds\right)\left(\frac{-\partial\Phi}{\partial t} - d_1\Delta\Phi\right) dxdt$$

$$= \int_Q g(u_n, v_n)\,\Phi(s,x)\,dxds.$$

(5.18)-(5.19) donne

$$\int\limits_Q [S_1(t) - S_3(t)]\, u_{n_0}(x) \left(\frac{-\partial \Phi}{\partial t} - d_1 \Delta \Phi \right) dxdt = 0,$$

et (5.20)-(5.21) donne

$$\int\limits_Q \left(\int\limits_0^t [S_1(t-s) - S_3(t-s)]\, f(u_n, v_n)\, ds \right) \left(\frac{-\partial \Phi}{\partial t} - d_1 \Delta \Phi \right) dxdt = 0,$$

d'où

$$\int\limits_Q S_1(t)\, u_{n_0}(x)\, \theta dxdt = \int\limits_\Omega u_{n_0}(x)\, \Phi(0,x)\, dx, \tag{5.22}$$

$$\int\limits_Q \left(S_3(t)\, v_{n_0}(x) + \tfrac{d_2}{d_1 - d_3} (S_1(t) - S_3(t))\, u_{n_0}(x) \right) \theta dxdt$$

$$= \int\limits_\Omega v_{n_0}(x)\, \Phi(0,x)\, dx, \tag{5.23}$$

et

$$\int\limits_Q \left(\int\limits_0^t S_1(t-s)\, f(u_n, v_n)\, ds \right) \theta dxdt = \int\limits_Q f(u_n, v_n)\, \Phi(s,x)\, dxds, \tag{5.24}$$

$$\int\limits_Q [\int\limits_0^t S_3(t-s) g(u_n, v_n) ds + \tfrac{d_2}{d_1 - d_3} \int\limits_0^t (S_1(t-s) - S_3(t-s)) f(u_n, v_n) ds] \theta dxdt$$

$$= \int\limits_\Omega g(u_n, v_n)\, \Phi(s,x)\, dx, \tag{5.25}$$

multiplions la première équation de (5.14) par θ et intégrons sur Q en utilisant (5.22) et (5.24), on trouve :

$$\begin{aligned} \int\limits_Q u_n \theta dxdt &= \int\limits_Q S_1(t)\, u_{n_0}(x)\, \theta dxdt + \int\limits_Q \left(\int\limits_0^t S_1(t-s)\, f(u_n, v_n)\, ds \right) \theta dxdt \\ &= \int\limits_\Omega u_{n_0}(x)\, \Phi(0,x)\, dx + \int\limits_Q f(u_n, v_n)\, \Phi(s,x)\, dxds, \end{aligned}$$

de même on multiplions la deuxième équation de (5.14) par θ et intégrons sur Q en utilisant (5.23) et (5.25), on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_Q v_n \theta dxdt &= \int_Q \left(S_3(t) v_{n_0} + \tfrac{d_2}{d_1-d_3}\left(S_1(t) - S_3(t)\right) u_{n_0}\right) \theta dxdt \\
&+ \int_Q \tfrac{d_2}{d_1-d_3} \left(\int_0^t \left[S_1(t-s) - S_3(t-s)\right] f(u_n, v_n) ds\right) \theta dxdt \\
&+ \int_Q \left(\int_0^t S_3(t-s) g(u_n, v_n) ds\right) \theta dxdt \\
&= \int_\Omega v_{n_0}(x) \Phi(0,x) dx + \int_Q g(u_n, v_n) \Phi(s,x) dxds,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_Q (u_n + v_n) \theta dxdt \\
&\quad = \int_\Omega (u_{n_0}(x) + v_{n_0}(x)) \Phi(0,x) dx + \int_Q (f(u_n, v_n) + g(u_n, v_n)) \Phi(s,x) dxds \\
&\quad \leq \int_\Omega (u_0(x) + v_0(x)) \Phi(0,x) dx + \int_Q C(u_n + v_n + 1) \Phi(s,x) dxds,
\end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Hölder, on aura :

$$\begin{aligned}
&\int_Q (u_n + v_n) \theta dxdt \\
&\quad \leq \|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} . \|\Phi(0,x)\|_{L^\infty(Q)} + C \|u_n + v_n + 1\|_{L^1(Q)} . \|\Phi\|_{L^\infty(Q)} \\
&\quad \leq k_1(t) \left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + \|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} + 1\right) . \|\theta\|_{L^\infty(Q)},
\end{aligned}$$

comme θ est arbitraire dans $C_0^\infty(Q)$ on a :

$$\|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} \leq k_1(t) \left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + \|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} + 1\right),$$

d'où : $\|u_n + v_n\|_{L^1(Q)} \leq k(t) \left(\|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)} + 1\right)$ où $k(t) = \frac{k_1(t)}{1-k_1(t)}$. ■

Preuve du théorème 5.1. On définit l'application L par :

$$L : (w_0, h) \to S_d(t) w_0 + \int_0^t S_d(t-s) h(s) ds,$$

où $S_d(t)$ le semi-groupe de contraction engendré par : $d\Delta$.

D'après le **théorème 3.12** et comme $S_d(t)$ est compact, alors l'application L, est l'addition de deux applications compacts dans $L^1(Q)$ donc on a bien que L est compact de $L^1(Q) \times L^1(Q)$ dans $L^1(Q)$.
Par conséquent, il existe une sous-suite $\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)$ de (u_n, v_n) et (u,v) de $L^1(Q) \times L^1(Q)$, tel que :

$$\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \text{ converge vers } (u,v).$$

Montrons que (u,v) vérifie (5.9) :
Comme $\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)$ est une solution du (5.10)-(5.13), on a :

$$\begin{cases} u_{n_j}(t,x) = S_1(t)\, u_{n_0} + \int_0^t S_1(t-s)\, f\left(u_{n_j}(s), v_{n_j}(s)\right) ds, \\ v_{n_j}(t,x) = S_3(t)\left(v_{n_0} - \frac{d_2}{d_1-d_3} u_{n_0}\right) + \frac{d_2}{d_1-d_3} S_1(t)\, u_{n_0} \\ \quad + \frac{d_2}{d_1-d_3} \int_0^t \left[S_1(t-s) - S_3(t-s)\right] f\left(u_{n_j}(s), v_{n_j}(s)\right) ds \\ \qquad + \int_0^t S_3(t-s)\, g\left(u_{n_j}(s), v_{n_j}(s)\right) ds, \end{cases} \tag{P$_{\text{j2}}$}$$

il est clair que si $j \to +\infty$ on a bien les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \to f(u,v), & \text{p.p,} \\ g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \to g(u,v), & \text{p.p,} \end{array} \tag{5.26}$$

et

$$\begin{array}{rcl} u_{n_0} & \to & u_0, \\ v_{n_0} & \to & v_0, \end{array}$$

donc pour montrer que (u,v) vérifie (5.9), il reste à montrer que :

$$\begin{array}{rcl} f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) & \to & f(u,v), \\ g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) & \to & g(u,v), \end{array}$$

dans $L^1(Q)$ lorsque $j \to +\infty$.
L'application de la formule de Green donne

$$\int_Q \Delta u_{n_j} dxdt = 0, \qquad \int_Q \Delta v_{n_j} dxdt = 0.$$

L'intégrale de l'équation (5.10) et l'équation (5.11) sur Q donne

$$\int_\Omega \int_0^t \frac{d}{dt} u_{n_j} dt dx = \int_\Omega \int_0^t f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dt dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega u_{n_j} dx - \int_\Omega u_{n_0} dx = \int_\Omega \int_0^t f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dt dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega u_{n_j} dx - \int_\Omega u_{n_0} dx = \int_Q f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dx dt$$

$$\Rightarrow -\int_\Omega u_{n_0} dx \leq \int_\Omega u_{n_j} dx - \int_\Omega u_{n_0} dx = \int_Q f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dx dt$$

donc

$$-\int_\Omega u_{n_0} dx \leq \int_Q f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dx dt,$$

de même

$$-\int_\Omega v_{n_0} dx \leq \int_Q g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dx dt,$$

d'où :

$$\begin{aligned} -\int_Q f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dx dt &\leq \int_\Omega u_{n_0} dx, \\ -\int_Q g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dx dt &\leq \int_\Omega v_{n_0} dx, \end{aligned}$$

comme $u_{n_0} \leq u_0$ et $v_{n_0} \leq v_0$ alors

$$-\int_Q f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dx dt \leq \int_\Omega u_0 dx, \tag{5.27}$$

$$-\int_Q g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) dx dt \leq \int_\Omega v_0 dx. \tag{5.28}$$

Posons :

$$N_n = C\left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right) - f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right), \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned} M_n &= C\left(u_{n_j} + v_{n_j} + 1\right) - f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) - g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \\ &= N_n - g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right), \end{aligned} \tag{5.30}$$

il est clair de (5.7) que N_n et M_n sont positives
donc de (5.27) on a :

$$\begin{aligned}
\int\limits_Q N_n dxdt &\leq C\int\limits_Q \left(u_{n_j}+v_{n_j}+1\right)dxdt+\int\limits_\Omega u_0 dx\\
&= C\left\|u_{n_j}+v_{n_j}+1\right\|_{L^1(Q)}+\|u_0\|_{L^1(\Omega)}\\
&\leq C\left(\left\|u_{n_j}+v_{n_j}\right\|_{L^1(Q)}+1\right)+\|u_0\|_{L^1(\Omega)}\\
&\leq C\left(K(t)\left(\|u_0+v_0\|_{L^1(\Omega)}+1\right)+1\right)+\|u_0\|_{L^1(\Omega)}\\
&< +\infty \text{ (d'après (5.5)),}
\end{aligned}$$

de même pour (5.28) on a

$$\begin{aligned}
\int\limits_Q M_n dxdt &\leq C\int\limits_Q \left(u_{n_j}+v_{n_j}+1\right)dxdt+\int\limits_\Omega (u_0+v_0)\, dx\\
&= C\left\|u_{n_j}+v_{n_j}+1\right\|_{L^1(Q)}+\|u_0+v_0\|_{L^1(\Omega)}\\
&\leq C\left(\left\|u_{n_j}+v_{n_j}\right\|_{L^1(Q)}+1\right)+\|u_0+v_0\|_{L^1(\Omega)}\\
&\leq C\left(K(t)\left(\|u_0+v_0\|_{L^1(\Omega)}+1\right)+1\right)+\|u_0+v_0\|_{L^1(\Omega)}\\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

donc

$$\int\limits_Q N_n dxdt < +\infty,$$

$$\int\limits_Q M_n dxdt < +\infty,$$

d'après (5.29) on a

$$f\left(u_{n_j},v_{n_j}\right)=C\left(u_{n_j}+v_{n_j}+1\right)-N_n,$$

$$\Rightarrow \left|f\left(u_{n_j},v_{n_j}\right)\right|=\left|C\left(u_{n_j}+v_{n_j}+1\right)-N_n\right|\leq\left|C\left(u_{n_j}+v_{n_j}+1\right)\right|+|N_n|,$$

et (5.30) donne

$$g\left(u_{n_j},v_{n_j}\right)=N_n-M_n,$$

$$\Rightarrow \left|g\left(u_{n_j},v_{n_j}\right)\right|=|N_n-M_n|\leq|M_n|+|N_n|,$$

mais C, u_{n_j}, v_{n_j}, N_n et M_n sont positives alors

$$\left|f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| \leq C\left(u_{n_j}+v_{n_j}+1\right)+N_n \text{ et } \left|g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| \leq M_n+N_n,$$

ceci en train :

$$\begin{aligned}
\int_Q \left|f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| dxdt &\leq C\int_Q \left(u_{n_j}+v_{n_j}+1\right) dxdt+\int_Q N_n dxdt<+\infty, \\
\int_Q \left|g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| dxdt &\leq \int_Q M_n dxdt+\int_Q N_n dxdt<+\infty.
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
h_n &= N_n+C\left(u_{n_j}+v_{n_j}+1\right), \\
\Psi_n &= N_n+M_n,
\end{aligned}$$

on a h_n et Ψ_n sont de $L^1(Q)$, et aussi sont positives, de plus :

$$\begin{aligned}
\left|f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| &\leq h_n \quad \text{p.p,} \\
\left|g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right)\right| &\leq \Psi_n \quad \text{p.p.}
\end{aligned}$$

Combinaisons ce résultat avec (5.26) et on applique le **théorème 1.2**, on aura bien que :

$$\begin{array}{l}
f\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \rightarrow f(u, v), \\
g\left(u_{n_j}, v_{n_j}\right) \rightarrow g(u, v),
\end{array} \text{ dans } L^1(Q),$$

par passage à la limite quand j tend vers l'infini de (P_{j2}) dans $L^1(Q)$, on trouve :

$$\begin{cases}
u(t, x)=S_1(t) u_0+\int_0^t S_1(t-s) f(u(s), v(s)) ds, \\
v(t, x)=S_3(t)\left(v_0-\frac{d_2}{d_1-d_3} u_0\right)+\frac{d_2}{d_1-d_3} S_1(t) u_0 \\
+\frac{d_2}{d_1-d_3} \int_0^t \left[S_1(t-s)-S_3(t-s)\right] f(u(s), v(s)) ds \\
\qquad +\int_0^t S_3(t-s) g(u(s), v(s)) ds,
\end{cases}$$

donc (u, v) vérifie (5.9) par conséquent (u, v) est une solution du (5.1)-(5.4). ■

Conclusion

Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes couplés d'équations aux dérivées partielles de type parabolique. Leurs applications sont très variées ; en chimique-physique (propagation de flammes laminaires), en écologie (prédation de proies par des prédateurs)....

Dans leur forme la plus simple, ces équations sont de la forme

$$u_t = D\Delta u + f(u),$$

où $u = u(t,x)$ est le vecteur des variables dépendantes ; $f(u)$ est une fonction vectorielle non linéaire de la fonction u, $f(u)$ est appelé terme de réaction, et D est une matrice de diffusion.

Le sujet proposé pour ce thèse de doctorat est d'étudier une classe de systèmes d'équations de réaction-diffusion avec une matrice de diffusion diagonale et triangulaire.

L'étude concerne la génération de semi-groupes compacts dans des espaces de Banach concrets, l'existence locale des solutions et ses positivités, la globalité des solutions.

Bibliographie

[1] N. D. Alikakos, L^p-bounds of solutions of reaction-diffusion equations, Comm. Differential Equations 4 (1979), 827-868.

[2] A. Barabanova, On the global existence of solutions of a reaction-diffusion equation with exponential nonlinearity, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), 827-831.

[3] P.Baras, J.C.Hasan, L.Veron : "Compacité de l'opérateur définissant la solution d'une équation d'évolution non homogène", C.R.Acad. Sc. Paris, t. 284 (1977), 799-802.

[4] S. Bonafede, D. Schmitt, Triangular reaction-diffusion systems with integrable initial data, Nonlinear analysis, 33 (1998), 785-801.

[5] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications. Masson, Paris, (1983).

[6] Brezis-Strauss, "Semilinear second order elliptic equations in L^1", J. Math, Japon, 25 (1973).

[7] T. Cazenave-A. Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires, Edition Ellipses (1990).

[8] G. Duvaut, "Mécanique des milieux continus", Masson, Paris, (1990).

[9] R. Fisher, "The advance of advantageous genes", Ann. Eugenics, 7 (1937), 335-369.

[10] A. Haraux and M. Kirane, Estimations C^1 pour des problèmes paraboliques semi-linéaires, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 5 (1983), 265-280.

[11] A. Haraux and A. Youkana, On a result of K. Masuda concerning reaction-diffusion equations, Tohoku Math. J. 40 (1988), 159-163.

[12] D. Henry, Geometric theory of semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, New-York, (1984).

[13] S. L. Hollis, R. H. Martin And M. Pierre, Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems.SIAM J. Math anal, 18 (1987), 744-761.

[14] S. L. Hollis and J. J. Morgan, On the blow-up of solutions to some semilinear and quasilinear reaction-diffusion systems, Rocky Moutain J. Math. vol 14. N°. 4 (1994), 1447-1465.

[15] F. John, Partial differential equations, fourth ed ; vol. 1 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New-York, (1982).

[16] I. Kanel and M. Kirane, Global existence and large time behavior of positive solutions to a reaction-diffusion system, Differential Integral Equations 13 (2000), 255-264.

[17] S. Kouachi, Existence of global solutions to reaction-diffusion systems via a Lyapunov functional, Electron Jornal of Differential Equations, Vol. 2001 N°. 68 (2001), 1-10.

[18] S. Kouachi and A. Youkana, Global existence for a class of reaction-diffusion systems. Bull. Polish Acad. Sci. Math. 49 N°. 3 (2001), 303-308.

[19] K. Masuda, On the global existence and asymptotic behaviour of solutionof reaction-diffusion equations. Hokkaido Math, J. 12 (1983), 360-370.

[20] R. H. Martin Jr, Global existence questions for reaction-diffusion systems in semi-groups. Theory and Applications. Ed. H. Brezis, M. Crandall, F. Kappel. Pitman Research Notes in Math, Vol. 1 (1986). 169-177.

[21] R. H. Martin and M. Pierre, Nonlinear reaction-diffusion systems, Nonlinear equations in the applied sciences, Math. Sci. Engrg., 185, Academic Press, Boston, MA, (1992), 363-398.

[22] J. J. Morgan, Global existence for semilinear parabolic systems, SIAM J. Math. Anal. 20, (1989), 1128-1144.

[23] M. Mebarki and A. Moumeni, Global solution of reaction-diffusion system with full matrix, GJMA, 3 (3) (2015), 109-120.

[24] A. Moumeni and N. Barrouk, Existence of global solutions for systems of reaction-diffusion with compact result, IJPAM. 102(2) (2015), 169-186.

[25] A. Moumeni and N. Barrouk, Triangular reaction-diffusion systems with compact result, GJPAM. 11(6) (2015), 4729–4747.

[26] A. Moumeni and L. Salah Derradji, Global existence of solution for reaction-diffusion systems, IAENG, Int. J. Appl. Math. 40(2) (2010), 84-90.

[27] A. Moumeni and L. Salah Derradji, Global existence of reaction-diffusion system with non diagonal matrix, Demonstratio Mathematica Vol. XLV(1) (2012), 81-93.

[28] J. D. Murray, "Mathematical biologic", Springer Verlag, (1993).

[29] J. D. Murray, "Mathematical biologie", Third Ed, Inter disciplinary applied Mathematics, Springer Verlag, (2002).

[30] C. V. Pao, On Nonlinear Diffusion Systems. J. Math.Analysis. App. 87. (1982) 165-198.

[31] C. V. Pao, "Reaction-diffusion equations with nonlinear boundary conditions", Non-linear Analysis 5, (1981), 1077-1094.

[32] A. Pazy, Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, New York, (1983).

[33] M. Pierre, An L^1-method to prove global existence in some reaction-diffusion systems, in contributions to nonlinear partial differential equations, J. I. Diaz and P. L. Lions, eds. Pitman Res. Notes Math. Ser. Longman, Harlow, UK, (1987), 220-231.

[34] F. Rothe, Global solutions of reaction-diffusion systems, Lecture Notes in Math. 1072, Springer, Berlin, (1984).

[35] J. Ryan, Global existence of reaction-diffusion equations over multiple domains, Thises Texas A&M University (2004).

[36] H. D. Thomas and D. G. Aronson, Oscillation in a Nonlinear Parabolic Model of Separated Cooperatively Coupled Enzymes. Nonlinear Systems and Applics. Academi Press. New York (1977).

[37] Turner and Ames, Twi-Sided Bounds for Linked Unknown Nonlinear Boundary Conditions of Reaction-Diffusion Systems. J. Math. Analysis and App.,71, (1979), 336-378.

[38] J. Zeldovich and D. Frank - Kamenetski,"A theory of thermal propagation of flame". Lecture notes in mathematics. 1072, Acta physiochimica URSS, 9 (1938), 341-350.