وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY ANNABA

جامعة باجي مختار عنابة

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2016

THESE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Option

Mathématiques Appliquées

Titre

Positivité de la solution de quelques problèmes aux limites fractionnaires

Par

Samia KOUACHI

DIRECTEUR DE THESE : Prof. Assia Guezane-Lakoud U.B.M. ANNABA

CO-DIRECTEUR : Prof. Fateh Ellaggoune Université de GUELMA

Devant le jury

PRESIDENT :	**Dr. Khaldi Rabah**	**Prof**	**U.B.M. ANNABA**
EXAMINATEURS :	**Dr. Kelaiaia Smail**	**Prof**	**U.B.M. ANNABA**
	Dr. Amir EL-Haffaf	**M.C.A**	**Université d'Oran (Es-senia)**
	Dr. Khaled Boukerrioua	**M.C.A**	**Université de GUELMA**

Remerciements

« Je remercie en premier lieu Allah le plus puissant. »

Je tient à remercier spécialement et chaleureusement ma directrice de thèse, madame la professeure **Assia Guezane-Lakoud**, *qui est attentive et disponible malgré ses nombreuse charges, transformant ainsi les difficultés rencontrées en une expérience enrichissante. Je lui suis également reconnaissante de m'avoir assuré un encadrement rigoureux tout au long de ces années, Elle m'a toujours accordé généreusement le temps nécessaire pour partager avec moi ses idées et sa grande expérience. J'ai particulièrement apprécié sa très grande ouverture face à ma condition de mère étudiante et la confiance qu'elle a su garder en ma capacité à rendre ce projet à terme. Qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.*

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à mon deuxième encadreur le professeur **Fateh Ellaggoune** *qui a su me faire profiter de ses connaissances et ses compétences scientifiques. Je lui témoigne ma sincère reconnaissance.*

Je remercie le professeur **Rabah Khaldi** *pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.*

Mes remerciements vont aux professeur **Smail Kelaiaia**, *aux docteurs* **Amir EL-Haffaf** *et* **Khaled Boukerrioua** *qui ont bien accepté, avec beaucoup de gentillesse de faire partie du jury.*

Les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à mes parents, et en particulier ma maman Salima qui m'a constamment encouragée et soutenue tout au long de ces années.

Les mots me manquent pour remercier, à sa juste valeur, mon mari, Akram, pour ses soutiens moral et psychologique indispensable.

Mes remerciements vont aussi à mes deux filles Meriem et Assia, ma très chère sœur Lina, mon frère Badri, mon beau père Hamid, ma belle mère Adra, ma belle sœur Marwa, mon beau frère Houssem, mon beau frère Rami et ma belle sœur Ines, ma très chère lilia ainsi que oumaima.

Je profite aussi pour remercier mes collègues, monsieur Kilani Brahim, Hanene, Radia, Lilia, Souad, Wahiba, Nacira et Fouzia.

Je ne saurais terminer sans le soutient amical et chaleureux de mon amie Nacira.

ملخص

الهدف من هذا الأطروحة يكمن في دراسة وجود حلول ايجابية لبعض المسائل ذات الشروط الحدية الكسرية.

أولا نقوم بدراسة وجود حلول إيجابية لمسألة ذات الشروط الحدية الكسرية و ذلك باستخدام كل من "نظرية قيو-كراز نوزلسكي" و "نظرية أفيري- بيترسون" .

في المحور الثاني، نعمل على اثبات وحدانية الحلول لمسألة ذات الشروط الحدية الكسرية مع صدى و ذلك باستعمال " نظرية المصادفة لماوين ".

أخيرا ندرس إيجابية و موقع الحلول لمسألة ذات الشروط الحدية الكسرية مع صدى، و ذلك عن طريق "نظرية العامل المتزايد" و "طريقة الحلول السفلية و العلوية".

كلمات مفتاحية :

نظرية النقطة الصامدة، مسألة ذات الشروط الحدية الكسرية، نظرية المصادفة لماوين، طريقة الحلول السفلية و العلوية.

Résumé

Le but de cette thèse est l'étude de l'existence de solutions positives de quelques problèmes aux limites fractionnaire

En s'intéresse dans un premier temps à l'étude de l'existence de solutions positives d'un problème aux limites fractionnaire en utilisant certains théorèmes de point fixe notamment le théorème de Guo-Krasnosel'skii, ainsi que le théorème d'Avery-Peterson.

Puis dans un deuxième temps l'existence d'un problème aux limites fractionnaire en résonance en utilisant le théorème de coincidence de Mawhin.

Dans le dernier chapitre on a établi l'existence et la localisation de la solution positive d'un problème aux limites fractionnaire en résonance en utilisant la méthode de sous et sur solution combinée avec le théorème de point fixe de l'opérateur croissant.

Mots clés : Problème aux limites fractionnaire, Théorèmes de point fixe, Théorème de coincidence de Mawhin, sous et sur solutions.

Abstract

The objective of this thesis, is to study the existence of positive solutions of some fractional boundary value problems.

Firstly, we study the existence of positive solutions of fractional boundary value problem by using, Guo-Krasnosel’skii theorem and Avery-Peterson theorem.

In a second time, we investigate the existence of solutions of a two-point fractional boundary value problem at resonance, By using the coincidence degree theory of Mawhin.

Finally, we established the existence and localization of positive solutions for a fractional boundary value problem at resonance. By means of a fixed point theorem of increasing operators and lower and upper solutions, the minimal and maximal nonnegative solutions for the problem are obtained.

Keywords : fractional boundary value problem, fixed point theorems, the coincidence degree theory of Mawhin, lower and upper solution.

.

Table des matières

0.1 Introduction générale

Le calcul fractionnaire est devenu une importante branche de mathématiques grace à son immense application dans différents domaine tels que la physique, la chimie, l'ingénierie, finance et d'autre sciences qui ont été développé dans la dernière décenie, en plus de l'intérêt que lui portent beaucoup de chercheur en mathématiques elle même.

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un grand rôle [1, 34, 49].

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base, montrant l'existence des solutions dans divers types d'équations. La théorie du point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans nombreux problèmes non linéaires différents.

Dans ce travail on utilise d'une façon particulière le théorème de Guo-Krasnosel'skii, le théorème d'Avery-Peterson, le théorème de l'opérateur croissant, le théorème de coincidence de Mawhin ainsi que la méthode de sous et sur solution.

Dans [4], R. Almeida et N. Martins ont étudié l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$\begin{aligned} {}^{c}D_q^{\alpha}[x](t) &= g(t,x(t)); \quad 0 \le t \le 1, \\ x(0) &= \gamma_0, \quad {}^{c}D_q^{\alpha}[x](0) = \gamma_1, \\ x(1) &= \gamma_2 \int_0^{\eta} x(s)\, d_q s, \end{aligned} \tag{0.1}$$

Les auteurs ont présenté certaines conditions pour prouver l'existence, l'unicité et la positivité de la solution sur [0.1]. Leurs arguments sont basés sur le théorème du point fixe de Banach, le théorème du point fixe de Krasnoselskii et l'alternative de Leray-Schauder.

Dans [5], Avery et Peterson ont donné un nouveau théorème de point fixe, qui est l'extension du théorème de point fixe de Leggett-Williams. En utilisant ce théorème de point fixe, beaucoup de résultats concernant l'existence de trois solutions positives des problèmes aux limites ordinaires ansi que fractionnaires ont été obtenus [16, 32, 36, 41, 48, 54, 56].

A titre d'exemple, Yang et al.[54], ont établi l'existence de trois solutions positives du problème aux limites du second ordre suivant

$$\begin{aligned} u'' + f(t,u(t),u'(t)) &= 0, \quad t \in [0,1], \\ u'(0) &= \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u'(\xi_i), \quad u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\xi_i) \end{aligned}$$

où

$$0 < \alpha_i < 1, \quad 0 < \beta_i < 1, \quad 0 < \xi_i < 1, \quad i = 1, 2, ..., m-2.$$

$$\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i < 1, \quad \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i < 1.$$

Dans [56], Yang et al, ont étudié l'existence des solutions positives multiples en utilisant le théorème du point fixe d'Avery-Peterson pour le problème aux limite fractionnaire suivant

$$^{c}D_{0^+}^{\alpha} u(t) + f\left(t, u(t), ^{c}D_{0^+}^{\beta} u(t)\right) = 0, \quad t \in (0,1)$$

$$u^{(i)}(0) = 0, \quad 0 \leq i \leq n-2$$

$$\left[^{c}D_{0^+}^{\delta} u(t)\right]_{t=1} = 0, \quad 1 \leq \delta \leq n-2,$$

où $n-1 < \alpha \leq n$, $n > 3$, $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \beta \leq 1$ et $f \in C\left([0,1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^+\right)$.

Dans [25], les auteurs ont établi l'existence des solutions d'une équation différentielle d'ordre trois suivante

$$x'''(t) = f(t, x(t), x'(t)), 0 < t < 1,$$

$$x(0) = x''(0) = 0, x(1) = \frac{2}{\eta^2} \int_0^{\eta} x(t)\, dt, \eta \in (0,1),$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Carathéodory, et $\eta \in (0,1)$.

Un autre outil puissant dans l'analyse non linéaire pour résoudre les problèmes aux limites est la méthode de sous et sur solutions. En utilisant cette méthode on obtient l'existence et la localisation de la solution en présence d'un couple de fonctions, appelées sous-solution et sur-solution, bien ordonnée. Ces sous et sur solutions peuvent être considérées comme des approximations de la solution avec une erreur de signe constant [13, 58].

De plus si on n'a pas l'unicité de la solution, un autre problème se pose et celui de trouver la solution maximale ainsi que la solution minimale entre la sous et sur solution du problème aux limites. L'existence de telles solutions extrémales été étudié en 1885 par G. Peano[42] et en 1915 par O. Perron[43] qui ont considéré le problème de cauchy suivant

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0,$$

avec f continue. Ces auteurs ont supposé l'existence de sous et sur solutions, alors $\alpha(0) = u_0$, $\beta(0) = u_0$, $\alpha \leq \beta$ et

$$D_{l,r}\alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)), D_{l,r}\beta(t) \geq f(t, \beta(t)).$$

i.e. α et β des fonctions continues avec des dérivées à gauche et à droites qui existent ($D_l\alpha$, $D_r\alpha$, $D_l\beta$ et $D_r\beta$).

Ils ont montré alors l'existence d'une solution entre α et β et ont défini

$$\begin{aligned} u_{\max} &= \sup\{u_i \mid u_i \text{ is a lower solution with } \alpha \leq u_i \leq \beta\}, \\ u_{\min} &= \inf\{u_i \mid u_i \text{ is an upper solution with } \alpha \leq u_i \leq \beta\}. \end{aligned}$$

Enfin, ils ont que le maximum de deux sous-solutions est une sous-solution, et que $u_{\max}$ et $u_{\min}$ sont aussi deux solutions, et que chaque solution entre α et β est comprise entre $u_{\max}$ et $u_{\min}$. Il faut dire que la méthode de sous et sur solutions joue un rôle très important dans l'existence de solutions des problémes aux limites ordinaires d'ordres entiers [13] .

Au cours de ces dernières années, de nombreux problèmes aux limites de type résonance liés aux equations différentielles ordinaires ou fractionnaire ont été étudiés et de nombreux resultats ont été obtenus voir [7, 11, 29, 31, 39, 46]. Dans la plupart des documents mentionnés ci-dessus, la théorie du degré de coïncidence a été appliquée pour établir le théorème d'existence [18].

Le phénomène de résonance est la propriété partagée par un très grand nombre d'objets et de systèmes physiques d'absorber préférentiellement de l'énergie, généralement sous forme mécanique ou électromagnétique, lorsqu'ils sont soumis à des forces variant périodiquement dans le temps.

Le principe de résonance appliqué à la balançoire Lorsque la fréquence de variation d'une telle force devient très proche de la fréquence de résonance propre du système physique, celui-ci se met à effectuer un mouvement en réponse à la force d'excitation. L'exemple le plus simple est probablement celui d'un pendule ou d'une balançoire. Le mouvement de balancement ne peut s'amplifier que si on pousse à intervalles réguliers correspondant à la fréquence de la balançoire. C'est ainsi qu'elle peut absorber de l'énergie.

Exemples de phénomènes de résonance [17] De même un circuit électrique de poste de récepteur radio se comportant comme un oscillateur avec une fréquence ajustable se mettra à absorber de l'énergie d'une onde électromagnétique oscillant à une fréquence donnée lorsque sa propre fréquence sera identique ou très voisine de celle de l'onde. C'est ainsi, sommairement, que l'on peut capter des stations de radios. On trouve le phénomène de résonance presque partout en physique, de l'absorption à l'émission de lumière par les atomes aux mouvements des planètes en passant par le mouvement des ponts suspendus en réponse aux rafales de vent, donc le phénomène de resonance consiste en ce qu'un oscillateur linéaire sans frottement de fréquence propre ω_0 excité par une force extérieure de période s'approchant de la période propre correspondante $\frac{2\pi}{\omega_0}$ à des oscillations dont l'amplitude augmente indéfiniment.

La modélisation mathématique correspond au problème linéaire forcé est

$$u'' + \omega_0^2 u = \sin \omega t. \tag{0.2}$$

Pour fixé les idées, si $h(t) = \sin \omega t$, et si on recherche les solutions de période $\frac{2\pi}{\omega}$ de cette équation, alors, l'opérateur L définit dans l'espace des fonctions $\frac{2\pi}{\omega}$ périodiques par $Lu = u'' + \omega_0^2 u$ aura un noyau trivial puisque les solutions $u(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$ de $u'' + \omega_0^2 u = 0$ sont $\frac{2\pi}{\omega_0}$ périodique et ne sont donc pas $\frac{2\pi}{\omega}$ périodiques. Dans ce cas, l'équation (0.2) admettra la solution $\frac{2\pi}{\omega}$ périodique unique

$$u(t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Par contre, si $\omega = \omega_0$, le noyau de L est formé des fonctions $a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$ $(a, b \in \mathbb{R})$ qui sont $\frac{2\pi}{\omega_0}$ et donc $\frac{2\pi}{\omega}$ périodiques. C'est la résonance mathématique. Les solutions de (0.2) sont dans ce cas

$$u(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t - \frac{t}{2\omega}\cos\omega t$$

et aucune d'elle n'est $\frac{2\pi}{\omega}$ périodique. Les solutions oscillent avec une fréquence ω mais avec des amplitudes qui augmente indéfiniment avec t. C'est la résonance physique, qui correspond au cas où le noyau de L n'est pas trivial.

Cette thèse est organisée comme suit

Dans le premier chapitre, on donne quelques notions fondamentales utilisées tout au long de ce manuscrit. Le deuxième chapitre est consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, un aperçu historique et quelques concepts préliminaires seront introduits.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude du problème aux limites fractionnaire (P) suivant

$$\begin{aligned} &{}^cD^q_{0+}u(t) = a(t)f(u(t)), \quad 0 < t < 1, \\ &u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(0) = \alpha u(1), \end{aligned}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée, $2 < q < 3$, $0 < \alpha < 2$, ${}^cD^q_{0+}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $a \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$. On établit l'existence d'au moins une solution positive du problème (P) en utilisant le théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii sur le cône, ensuite sous certaines conditions sur le terme non linéaire, on applique le théorème d'Avery-Peterson pour prouver l'existence d'au moins trois solutions positives.

Dans le quatrième chapitre, on étudie l'existence de la solution du problème aux limite fractionnaire en résonance (P_1) suivant

$$
\begin{gathered}
{}^{c}D_{0^+}^{q}u\left(t\right)=f\left(t,u\left(t\right),u'\left(t\right),u''\left(t\right)\right), \qquad 0<t<1, \\
u\left(0\right)=u'\left(0\right)=0\ ,\ u''\left(0\right)=2u\left(1\right),
\end{gathered}
$$

où ${}^{c}D_{0^+}^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $2<q<3$. $f:[0,1]\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ est continue. Le problème aux limites fractionnaire (P_1) est en résonance dans le sens ou son problème aux limites linéaire homogène associé

$$
\begin{gathered}
{}^{c}D_{0^+}^{q}u\left(t\right)=0, \qquad 0<t<1, \\
u\left(0\right)=u'\left(0\right)=0\ ,\ u''\left(0\right)=2u\left(1\right),
\end{gathered}
$$

a une solution non trivial $u\left(t\right)=ct^2$, $c\in\mathbb{R}$. Pour résoudre ce problème, on utilise la théorie du degré de coincidence de Mawhin $[38]$. Cette méthode est basée sur une formulation équivalente dans un espace abstrait et une théorie de degré topologique. Par cette formulation on obtient un opérateur abstrait de la forme $N+L$, où L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro et N est généralement un opérateur non linéaire ayant des propriétés de compacité par rapport à L.

Dans le cinquième chapitre, on considère le problème aux limites fractionnaire en résonance (P_2) suivant :

$$^{c}D_{0^{+}}^{q}u\left(t\right)=f\left(t,u\left(t\right)\right), \qquad 0<t<1,$$

$$u\left(0\right)=u'\left(0\right)=0\ ,\ u''\left(0\right)=2u\left(1\right),$$

où $^{c}D_{0^{+}}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $2<q<3$. On suppose que $f:[0,1]\times\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}_{+}$ est continue. Nos résultats reposent sur la théorie du point fixe de l'opérateur croissant ainsi que sur la méthode de sous et sur solutions.

En transformant le probléme (P_2) en une equation opérationnelle de la forme $Lu=Nu$, où $Lu={}^{c}D_{0^{+}}^{q}u\left(t\right)$ et $Nu=f\left(t,u\left(t\right)\right)$ avec $0<t<1$. On dit que le problème aux limites fractionnaire (P_2) est en résonance si L n'est pas inversible c'est à dire que l'equation linéaire $Lu={}^{c}D_{0^{+}}^{q}u\left(t\right)=0$, sous les conditions aux limites données possède une solution non triviale i.e, si $\dim KerL\neq\{0\}$.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

1.1 Théorème du point fixe de type Banach

Le théorème du point fixe de Banach garanti l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante. Il s'applique aux espaces métriques complets pour démontrer l'existence et l'unicité de solution des équations différentielles ou intégrales.

Théorème de l'application contractante

Définition 1 *Soit (M, d) un espace métrique complet et l'application $T : M \to M$, on dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de M, l'inégalité*

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq k\left(d\left(x, y\right)\right).$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.

Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Théorèm 2 *(Théorème du point fixe de Banach (1922))*[49]

Soit (M,d) un espace métrique complet et soit $T : M \rightarrow M$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \text{Si } x_0 &\in M \textit{ et } x_n = T(x_{n-1}), \\ \lim_{n\to\infty} x_n &= x \textit{ et } d(x_n, x) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0) \qquad n \geq 1, \end{aligned}$$

Remarque 3 *Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe.*

En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grace à l'unicité $T(x) = x$.

Ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

Remarque 4 *Il se peut que T ne soit pas une contraction sur tout l'espace M mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant*

Soit (M,d) un espace métrique complet et $T : B \rightarrow M$ telle que

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x,y) \qquad \forall x, y \in B \textit{ et } k < 1,$$

où

$$B = \{x \in M, d(x,z) < \epsilon\} \quad z \in M \text{ et } \epsilon > 0.$$

Si $d(z, T(z)) < \epsilon(1-k)$, *alors* T *possède un unique point fixe* $x \in B$.

1.2 Théorème du point fixe de type Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorèm 5 [57] *Soit* K *un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach* E *et supposons* $T : K \to K$ *une application continue. Alors* T *admet un point fixe.*

Théorèm 6 [14] *(Théorème de l'alternative non linéaire de Leray Schauder)*

Soit X *un espace de Banach,* Ω *un sous ensemble ouvert borné de* X*, avec* $0 \in \Omega$ *et* $T : \overline{\Omega} \to X$ *une application compacte. alors un des deux énoncés suivants est vérifié*

(i) T *a un point fixe sur* $\overline{\Omega}$

(ii) *il existe* $\lambda \in (0,1)$ *et* $u \in \partial\Omega$ *tel que* $x = \lambda T(x)$.

1.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Définition 7 *Soit* K *un ensemble non vide d'un espace de Banach* E. *On dit que* K *est un cône si* K *est convexe fermé et satisfait les conditions suivantes*

1) $\alpha x \in K, \forall x \in K$ *et* $\alpha \geq 0$

2) x *et* $-x \in K \Longrightarrow x = 0$

tout cône défini une relation d'ordre sur E *par*

$$x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in K.$$

Définition 8 (***Opérateur complètement continu***)

Soient E *un espace de Banach et* Ω *une partie de* E. *On dit que l'opérateur* $T : \Omega \to E$ *est complètement continu s'il est continu et si pour toute partie bornée* B *de* Ω, $T(B)$ *est relativement compact dans* E.

Théorèm 9 [34] *Soit* E *un espace de Banach et* $K \subset E$ *un cône.* Ω_1, Ω_2 *sont deux ouverts de* E *avec* $0 \in \Omega_1$ *et* $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.

Soit $T : K \cap \left(\overline{\Omega_2} \diagdown \Omega_1\right) \to K$ *un opérateur complètement continu tel que*

i) $\|Tu\| \leq \|u\|$ *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_1$, *et* $\|Tu\| \geq \|u\|$ *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_2$. *ou bien*

ii) $\|Tu\| \leq \|u\|$ *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_2$, *et* $\|Tu\| \geq \|u\|$ *pour tout* $u \in K \cap \partial\Omega_1$.

Alors T *possède un point fixe dans* $K \cap \left(\overline{\Omega_2} \diagdown \Omega_1\right)$.

1.4 Théorème du point fixe d'Avery-Peterson

Théorèm 10 [5] *Soit* K *un cône dans un espace de Banach* E. *Soit les fonctionnelles* φ *et* Φ *non négatives, continues et convexes sur* K, *soit la fonctionnelle* Λ *non négative, continue et concave sur* K, *et soit la fonctionnelle* Ψ *non négative et continue* *sur K satisfaisant $\Psi(ku) \leq k\|u\|$ pour $0 \leq k \leq 1$. Définissant les ensembles,*

$$\begin{aligned} K(\varphi, d) &= \{u \in K, \varphi(u) < d\}, \\ K(\varphi, \Lambda, b, d) &= \{u \in K, b \leq \Lambda(u), \varphi(u) \leq d\}, \\ K(\varphi, \Phi, \Lambda, b, c, d) &= \{u \in K, b \leq \Lambda(u), \Phi(u) \leq c, \varphi(u) \leq d\}, \\ R(\varphi, \Psi, a, d) &= \{u \in K, a \leq \Psi(u), \varphi(u) \leq d\}. \end{aligned}$$

Pour les nombres positifs M et d, on a $\Lambda(u) \leq \Psi(u)$ et $\|u\| \leq M\varphi(u)$ pour tout $u \in \overline{K(\varphi, d)}$. On supposant que $T : \overline{K(\varphi, d)} \longrightarrow \overline{K(\varphi, d)}$ est complètement continu et qu'il existe trois nombres positifs a, b et c avec $a < b$ tels que

$(S1)$ $\{u \in K(\varphi, \Phi, \Lambda, b, c, d), \Lambda(u) > b\} \neq \emptyset$ et $\Lambda(Tu) > b$ pour $u \in K(\varphi, \Phi, \Lambda, b, c, d)$,

$(S2)$ $\Lambda(Tu) > b$ pour $u \in K(\varphi, \Lambda, b, d)$ avec $\Phi(Tu) > c$,

$(S3)$ $0 \notin R(\varphi, \Psi, a, d)$ et $\Psi(Tu) < a$ pour $u \in R(\varphi, \Psi, a, d)$ avec $\Psi(u) = a$.

alors T a au moins trois points fixes $u_1, u_2, u_3 \in \overline{K(\varphi, d)}$ tels que

$\varphi(u_i) \leq d$ pour $i = 1, 2, 3$, $b < \Lambda(u_1), a < \Psi(u_2)$ avec $\Lambda(u_2) < b$ et $\Psi(u_3) < a$.

1.5 Théorème du point fixe de l'opérateur croissant

Définition 11 *Soit K un cône dans un espace de Banach E, et soit D un sous-ensemble de E.*

L'opérateur $A : D \to E$ est dit croissant si $x_1 \leq x_2$ $(x_1, x_2 \in D)$ implique $Ax_1 \leq$

Ax_2.

Définition 12 *Un cône $K \subset E$ est dit normal s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que*

$$0 \leq x \leq y \Longrightarrow \|x\| \leq \delta \|y\| \quad \forall x, y \in K.$$

Théorèm 13 [26] *Soit K un cône normal dans un espace de Banach $E, u_0, v_0 \in K, u_0 \leq v_0, A : [u_0, v_0] \subset K \rightarrow K$ un opérateur. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites*

(i) A est un opérateur croissant

(ii) A est completement continu

(iii) $u_0 \leq Au_0, Av_0 \leq v_0$.

Alors A a un point fixe minimal u^* et un point fixe maximal v^* dans $[u_0, v_0]$, de plus

$$u^* = \lim_{n\to\infty} u_n, \quad v^* = \lim_{n\to\infty} v_n,$$

ou

$$u_n = Au_{n-1}, \qquad v_n = Av_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

et

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq ... \leq v_n \leq ... \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0.$$

1.6 Théorème Ascoli-Arzela

Théorèm 14 *Soit* $X = C([a,b])$ *muni de la norme* $\|u\| = \max_{a\leq t\leq b}|u(t)|$, *avec* $-\infty < a < b < +\infty$. *Si* M *est un sous ensemble de* X *tel que*

(*i*) M *est uniformément borné, i.e.* $\exists r > 0,\ \|u\| \leq r, \forall u \in M$,

(*ii*) M *est équicontinu, i.e.*

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \forall t_1, t_2 \in [a,b]$ *tel que* $|t_1 - t_2| < \delta$ *et* $u \in M \Longrightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \varepsilon$.

Alors, M *est relativement compact.*

1.7 Degré topologique [17]

Dans cette section, nous donnons un brêf aperçu de la notion du degré topologique que ce soit en dimension finie ou infinie. Le degré, $\deg(f, \Omega, y)$ de f dans Ω par rapport à y donne une information sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ dans un ensemble ouvert $\Omega \subset X$ où $f : \Omega \subset X \to X$ est continue, $y \notin f(\partial\Omega)$ et X est un espace topologique, métrique la plupart du temps. Pour plus de connaissance et d'amples details voir [14, 40].

1.7.1 Degré topologique de Brouwer

On considère un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et de fermeture $\overline{\Omega}$. $\overline{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ désignera l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, k fois différentiables dans Ω, qui sont continues sur $\overline{\Omega}$. Cet espace sera muni de sa topologie usuelle.

Soit $x_0 \in \Omega$, si f est différentiables en x_0, on note par $J_f(x_0) = \det f'(x_0)$ le Jacobien de f en x_0.

Définition 15 *Soit f une fonction de classe C^1 sur Ω. Notons par $J_f(x_0)$ le Jacobien de f en un point x_0 de Ω. Le point x_0 est dit point critique si $J_f(x_0) = 0$. Dans le cas contraire, x_0 est dit point régulier.*

On désigne par $S_f(\Omega)$ l'ensemble des points critiques. C'est à dire

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\}.$$

Définition 16 *Un élement $y \in \mathbb{R}^n$ est dit valeur régulière de f si $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$. Dans le cas contraire, y est dit valeur singulière.*

Définition 17 *Soient $f \in \overline{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ une valeur régulière de f. On appelle degré topologique de f dans Ω par rapport à y, le nombre entier*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn\ J_f(x),$$

où $Sgn\ J_f(x)$ désigne le signe de $J_f(x)$, défini par $Sgn(t) = 1$ si $t >$ et $Sgn(t) = -1$ si $t < 0$.

Définition 18 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$. On définit le degré topologique de f dans Ω par rapport à y par*

$$\deg(f, \Omega, y) = \lim_{n \to \infty} \deg(f_n, \Omega, y)$$

où $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonction $C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ qui converge uniformément vers f dans $\overline{\Omega}$.

On rappelle à présent quelques propriétés importantes du degré topologique de Brouwer

Théorèm 19 [14] *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné, et on pose*

$$A(\Omega) = \left\{ f \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right) : y \notin f(\partial\Omega) \right\}$$

L'application $\deg(f, \Omega, y) : A(\Omega) \to \mathbb{Z}$ *satisfait les propriétés suivantes*

1. (*Normalisation*) $\deg(I, \Omega, y) = 1$ *si Si* $y \in \Omega$ *et* $\deg(I, \Omega, y) = 0$ *si* $y \in \mathbb{R}^n \diagdown \overline{\Omega}$ *où* I *désigne l'application identité sur* $\overline{\Omega}$.

2. (*Solvabilité*) *Si* $\deg(I - T, \Omega, y) \neq 0$, *alors* $f\ (x) = y$ *admet au moins une solution dans* Ω.

3. (*Invariance par homotopie*) *pour tout* $h : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *et tout* $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *continues telles que* $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ *pour tout* $t \in [0,1]$, $\deg(h(t,.), \Omega, y(t))$ *est indépendant de* t.

4. (*Additivité*) *Soient* Ω_1 *et* Ω_2 *deux sous-ensembles disjoints ouverts de* Ω *et*

$$y \notin f\left(\overline{\Omega} \diagdown (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right).$$

Alors

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y).$$

5. $\deg(f, \Omega, y)$ *est constant sur toute composante connexe de* $\mathbb{R}^n \diagdown f(\partial\Omega)$

6. $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f - y, \Omega, 0)$.

7. Soit $g : \overline{\Omega} \to F_m$ *une application continue où* F_m *est un sous espace de* $\mathbb{R}^n$, $\dim F_m = m$, $1 \leq m \leq n$. *En supposant que* y *est tel que* $y \notin (I - g)\,\partial\Omega$. *Alors*

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg\left((I - g)_{\overline{\Omega} \cap F_m}, \Omega \cap F_m, y\right).$$

Lemme 20 *Soient* X *un espace de Banach,* $\Omega \subset X$ *un ouvert borné et* $T : \overline{\Omega} \to X$ *une application compacte. Alors, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un espace de dimension finie noté* F *et une application continue* $T_\epsilon : \overline{\Omega} \to F$ *telle que*

$$\|T_\epsilon x - Tx\| < \epsilon \ \ \textit{pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

Définition 21 *Soient* X *un espace de Banach,* $\Omega \subset X$ *un ouvert borné et* $T : \overline{\Omega} \to X$ *une application compacte. En supposant maintenant que* $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$. *Il existe* $\epsilon_0 > 0$ *tel que pour* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, *le degré de Brouwer* $\deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0)$ *est bien défini où* T_ϵ *est défini comme dans le lemme 20. Par conséquent, on définit le degré de Leray-Schauder par*

$$\deg(I - T, \Omega, 0) = \deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F_\epsilon, 0).$$

1.7.2 Degré topologique de Leray-Schauder

Théorèm 22 [14] *Soient* X *un espace de Banach,* $\Omega \subset X$, *un ouvert borné, on pose*

$$K(\Omega) = \left\{(I - T) : \overline{\Omega} \to X,\ T \textit{ est compact et } 0 \notin (I - T)(\partial\Omega)\right\}$$

Le degré de Leray-Schauder possède les propriètés suivantes

1. (Normalité) Si $0 \in \Omega$ *alors* $\deg(I, \Omega, 0) = 1$, *2. (Solvabilité) Si* $\deg(I-T,\Omega,0)\neq 0,$ *alors* $\exists\ x\in\Omega$ *tel que* $(I-T)\,x=0,$

3. (Invariance par homotopie) Soit $H:[0,1]\times\overline{\Omega}$ *une homotopie compacte, telle que* $0\notin(I-H(t,.))(\partial\Omega)$. *Alors* $\deg(I-H(t,.),\Omega,0)$ *ne dépend pas de* $t\in[0,1]$;

4. (Additivité) Soient Ω_1 *et* Ω_2 *deux sous-ensembles disjoints ouverts de* Ω *et*

$$0\notin(I-T)\left(\overline{\Omega}\diagdown(\Omega_1\cup\Omega_2)\right).$$

Alors

$$\deg(I-T,\Omega,0)=\deg(I-T,\Omega_1,0)+\deg(I-T,\Omega_2,0).$$

1.8 Théorème de Mawhin

Théorèm 23 [38] *Soient* $L:domL\subset X\rightarrow Y$ *un opérateur de Fredholm d'indice zéro et* $N:X\rightarrow Y$ *une application* $L-$*compacte sur* $\overline{\Omega}$. *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) $Lu\neq\lambda Nu$ *pour tout* $(u,\lambda)\in[(domL\backslash KerL)]\cap\partial\Omega\times(0,1)$;

(2) $Nu\notin\operatorname{Im}L$ *pour tout* $u\in KerL\cap\partial\Omega$;

(3) $\deg(QN|_{KerL},KerL\cap\Omega,0)\neq 0,$ *où* $Q:Y\rightarrow Y$ *est la projection définie ci dessus avec* $\operatorname{Im}L=KerQ$.

Alors l'équation $Lu=Nu$ *admet au moins une solution dans* $domL\cap\overline{\Omega}$.

1.9 Projection

Soit X un espace vectoriel. On dit qu'un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si $P(P(x)) = P(x), \forall x \in X \ (P^2 = P)$.

Proposition 24 [17] *Soit X, un espace vectoriel. Un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si et seulement si $(I - P)$ est une projection. De plus, si l'espace X est normé, alors P est continu si et seulement si $(I - P)$ est continue.*

Proposition 25 *Si P est une projection dans X, alors*

$$KerP = \operatorname{Im}(I - P) \ \text{ et } \operatorname{Im} P = Ker(I - P.)$$

Lemme 26 ***Projection sur un sous-espace de dimension finie.*** *Si E est un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, alors il existe une projection P continue sur X telle que* $\operatorname{Im}(P) = E$.

Corollaire 27 *Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, il existe un sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ tel que $X = E \oplus Y$.*

Preuve. Il suffit de prendre pour Y le noyau de la projection P de X sur E donnée par le lemme précédent. ■

Définition 28 ***Codimension d'un sous-espace vectoriel.*** *Si l'espace quotient X/Y est de dimension finie, on dit que le sous-espace vectoriel fermé $Y \subset X$ est de codimension finie dans X et on écrit*

$$co\dim(Y) = \dim(X/Y).$$

Lemme 29 *Soient E un espace vectoriel normé, M et N deux sous espaces vectoriels fermés de E tels que $M \cap N = \{0\}$. Si $\dim(M) = co\dim(N) < \infty$, alors $E = M \oplus N$.*

1.10 Opérateur de Fredholm

Définition 30 [40] *Soit X et Y deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels normés ; on dit qu'une application linéaire $L : D(L) \subset X \to Y$ est de Fredholm si elle vérifie les conditions suivantes*

(i) $Ker(L) = L^{-1}(0)$ est de dimension finie.

(ii) $\operatorname{Im}(L) = L(D(L))$ est fermée et de codiemsion finie.

On définit la codimesion de $\operatorname{Im}(L)$ comme étant la dimension de $co\dim\ker(L) = \dim(X/Y)$.

Si L est un opérateur de Fredholm, alors son indice est l'entier

$$ind(L) = \dim(\ker(L)) - co\dim(\operatorname{Im}(L)).$$

Proposition 31 *Si L est un opérateur de Fredholm d'indice nul, alors L est surjective si et seulement si L est injectif.*

Soit $L : D(L) \subset X \to Y$ désigne un opérateur de Fredholm d'indice 0, alors d'aprés ce qui précède, il existe deux projections continues $P : X \to X$ et $Q : Y \to Y$ tels que

$$\operatorname{Im}(P) = Ker(L) \text{ et } Ker(Q) = \operatorname{Im}(L).$$

Posons

$$X_1 = \mathrm{Im}\,(I-P) = KerP \text{ et } Y_1 = \mathrm{Im}\,(Q)\,,$$

alors on peut écrire

$$X = KerL \oplus X_1; \; Y = \mathrm{Im}\,(L) \oplus Y_1$$

Soit l'isomorphisme

$$J : KerL \to \mathrm{Im}\,(Q)\,,$$

dont l'existence est assuré par le fait que $\dim KerL = \dim \mathrm{Im}\,(Q) = n$. On remarque que

$$D\,(L) = KerL \oplus (D\,(L) \cap X_1)$$

et que la restriction de L à $D\,(L) \cap X_1$ est un isomorphisme sur $\mathrm{Im}\,(L)$, on note par L_p cette restriction c'est à dire $L_p : D\,(L) \cap X_1 \to \mathrm{Im}\,(L)\,.$

Lemme 32 *L_p est un isomorphisme algébrique.*

On définit maintenant $K_p := L_p^{-1}$, il est claire que $K_p : \mathrm{Im}\,(L) \subset Y \to D\,(L) \cap KerP$ est bijectif, que $PK_p = 0$, et qu'il vérifie les propriétés suivantes

Lemme 33 (1) *Sur* $\mathrm{Im}\,(L)\,,$ *on a* $LK_p = I$.

(2) *Sur* $D\,(L)\,,$ *on a* $K_pL = I - P$.

On considère l'opérateur $K_{P,Q} : Y \to X$ défini par $L_p^{-1}\,(I-Q)\,,$ on a

Lemme 34 *L'opérateur* $L + JP : D(L) \to Y$ *est un isomorphisme et* $(L + JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q$.

En particulier

$$(L + JP)^{-1} x = J^{-1} x \text{ pour tout } x \in \operatorname{Im} Q.$$

Lemme 35 *Si* $N : \Delta \subset X \to X$ *est une application, le problème*

$$x \in D(L) \cap \Delta, \; Lx = Nx$$

est équivalent au problème du point fixe

$$x \in \Delta, x = Px + J^{-1}QNx + K_{P,Q}Nx.$$

Définition 36 *Soit* $\Omega \subset X$ *un ensemble ouvert borné et* $N : \overline{\Omega} \to Y$. *On dit que* N *est* $L-$*compact si* $K_{P;Q}N : \overline{\Omega} \to X$ *est compacte et* $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ *est borné.*

Définition 37 *Si les opérateurs* L *et* N *satisfont les propriétés mentionnées ci-dessus, alors le degré de coincidence de* L *et* N *sur* Ω *est défini par*

$$\deg\left[(L, N), \Omega\right] = \deg_{LS}(I - M, \Omega, 0)$$

où M *désigne la quantité* $M(P, J, Q) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N$.

Chapitre 2

Intégration et dérivation fractionnaire

2.1 Aperçu historique

Historiquement, c'est au 17ème siècle dans le courier échangé entre l'Hospital et Leibniz qu'on trouve la première mention à la différentielle fractionnaire $d^{\frac{1}{2}}x$, qualifiée de "paradoxe apparent". Dès le 18ème siécle, les prémices du concept de dérivation fractionnaire, apparaissent dans des écrits d'Euler qui est le second grand mathématicien à aborder la question. Les avancées les plus marquantes sont celles de Liouville qui est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semblent l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837, puis la contribution de Riemann en 1847 qui à partir d'une généralisation de la formule de Taylor, propose une définition d'intégrale fractionnaire

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\,dy+\psi(x),$$

où $\psi(x)$ est une "fonction complémentaire" qui le genera en fait dans ses traveaux ultérieurs. Elle sera finalement abandonnée pour donner la définition moderne de l'intégrale fractionnaire. En 1869 l'expression définitive de ce qui est maintenant appelé intégrale fractionnaire de Riemann apparait pour la première fois dans le travail de Sonin. Pour une fonction complexe, en dérivant n fois la formule de Cauchy $(n \in \mathbb{N})$, on obtient

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(y)}{(y-z)^{n+1}}dz.$$

C'est Lacroix en 1879 qui montre que pour $f(x)=x^a$, et $a>0$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}f(x)}{d^{\frac{1}{2}}x}=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}x^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

La première conférence sur le calcul fractionnaire organisée par Ross s'est tenue à l'université de New Haven (Connecticut) en 1974.

2.2 Bases mathématiques du calcul fractionnaire

2.2.1 Fonctions utiles

La fonction Gamma

L'une des fonctions de bases du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

qu'on peut démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \left[-e^{-t} t^z\right]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) **La fonction Beta**

La fonction Beta (qui est un type d'intégrale d'Euler, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par

$$B(p,q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1-\tau)^{q-1} d\tau, \qquad \mathrm{Re}(p) > 0, \qquad \mathrm{Re}(q) > 0.$$

Liens entre la fonction Gamma et la fonction Beta

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ \ \mathrm{Re}(p)>0,\quad \mathrm{Re}(q)>0.$$

2.3 Définitions et propriétés

Dans cette partie on introduit les outils et les résultats utilisés dans notre travail. On commence par donner les définitions d'intégrales fractionnaires les plus courantes puis des dérivées fractionnaires.[47]

2.3.1 Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a,b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On considère l'intégrale

$$I^{(1)}f(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

$$I^{(2)}f(x)=\int_a^x dt\int_a^t f(u)\,du$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I^{(2)}f(x)=\int_a^x (x-t)\,f(t)\,dt,$$

Plus généralement le $n^{iéme}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I^{(n)}f(x)=\int_a^x dx_1\int_a^{x_1} dx_2...\int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{(n-1)}f(t)\,dt, \tag{2.1}$$

pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, Riemann s'est rendu compte que le second membre de (2.1) pourrait avoir un sens même quand n prend une valeur non entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit

Définition 38 *Si $f \in C[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale*

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)\,dt,$$

est appelée intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α, et l'intégrale

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)\,dt$$

est appelée intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre α.

2.4 Dérivées fractionnaire

On présente dans cette partie les définitions de Riemann-Liouville, et Caputo qui sont les plus utilisées dans les applications.

2.4.1 Dérivées de Riemann-Liouville et Caputo

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$. Soit $f \in C[a,b]$.

Définition 39 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par*

$$\forall t \in [a, b]\,, D_{a^+}^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f(t)\right),$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f(\tau)\, d\tau.$$

Définition 40 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha]+1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f est définie par*

$$\forall t \in [a, b]\,, ^c D_{a^+}^{\alpha} f(t) = I_{a^+}^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t),$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

2.5 Propriétés des opérateurs fractionnaires

2.5.1 Linéarité

La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateurs linéaires

$$D_{a^+}^{\alpha} (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D_{a^+}^{\alpha} f(t) + \mu D_{a^+}^{\alpha} g(t),$$

$$I_{a^+}^{\alpha} (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda I_{a^+}^{\alpha} f(t) + \mu I_{a^+}^{\alpha} g(t),$$

2.5.2 Compositions entre opérateurs

La propriété de composition des dérivées usuelles

$$\frac{d^m}{dt^m}\frac{d^n}{dt^n} = \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}},$$

ne s'étend au cas fractinnaire que pour des fonctions dont les dérivées successives sont nulles au bord (sauf si $m+n<1$).

- Soit $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f \in L^1([a,b])$. Alors

$$I_{a^+}^{\alpha}\ I_{a^+}^{\beta} = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f.$$

- Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a,b])$. Alors

$$D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f = f.$$

- Soit $\alpha > 0, n = [\alpha]+1$ et $f \in AC^n([a,b])$. Alors

$$I_{a^+}^{\alpha}\, {}^{c}D_{a^+}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

où $AC^n[a,b] = \left\{ f \in C^{n-1}[a,b],\ f^{(n-1)} \text{ est absolument continue sur } [a,b] \right\}$.

- Soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a,b])$. Alors

$$I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f = D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f = f.$$

- Soit $0 < \alpha < \beta$ et $f \in L^1([a,b])$. Alors

$$D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f = I_{a^+}^{\beta-\alpha} f.$$

- Soit $\alpha > 0$ et $f \in AC\left([a,b]\right)$. Alors

$$^{c}D_{a^{+}}^{\alpha} f\left(t\right) = 0 \text{ a une solution } g\left(t\right) = c_{1} + c_{2}t + c_{3}t^{2} + ... + c_{n}t^{n-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., n$ et $n = [\alpha] + 1$,

- Si $p \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dt^p} D_{a^+}^{\alpha} &= \frac{d^{p+n}}{dt^{p+n}} I_{a^+}^{n-\alpha}, \\ &= \frac{d^{p+n}}{dt^{p+n}} I_{a^+}^{(p+n)-(p+\alpha)}, \\ &= D_{a^+}^{p+\alpha}. \end{aligned}$$

De même

$$^{c}D_{a^{+}}^{\alpha} \frac{d^p}{dt^p} =^{c} D_{a^{+}}^{\alpha+p}.$$

Les démonstrations de ces propriétés se trouvent dans [48].

Chapitre 3

Existence de solutions positives pour un problème aux limites fractionnaire

Résumé

On discute l'existence des solutions positives d'un problème aux limites fractionnaire en utilisant certains théorèmes de point fixe et sous certaines conditions sur le terme non linéaire.

Les résultats ont fait l'objet de la publication internationale [20].

A. Guezane-Lakoud, S. Kouachi and F. Ellaggoune : Positive solutions for a fractional boundary value problem. Commun. Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1, 63 (2014), N°.2,177-187.

3.1 Introduction

Le but de ce travail est de donner les conditions suffisantes pour l'existence de trois solutions positives du problème fractionnaire (P) suivant

$$
\begin{aligned}
&{}^{c}D_{0^+}^{q}u(t) = a(t)f\left(u(t)\right), \quad 0 < t < 1, \\
&u\left(0\right) = u'(0) = 0, \quad u''\left(0\right) = \alpha u\left(1\right),
\end{aligned}
$$

où $f \in C\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+\right)$, $2 < q < 3$, $0 < \alpha < 2$, ${}^{c}D_{0^+}^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $a \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$. On montre que sous certaines conditions de croissance sur le terme non linéaire f, le problème aux limites fractionnaire (P) a une ou trois solutions positives.

Les équations différentielles fractionnaires ont récemment prouvé qu'elles sont des outils précieux dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science, de l'ingénierie, de la physique et de l'économie. On peut trouver de nombreuses applications dans la visco-élasticité, l'électrochimie, les réseaux électriques, la théorie du contrôle, les biosciences, électromagnétiques, des processus de signalisation, la mécanique et dans les procédés de diffusion, voir $[29, 35, 39, 45]$. Les développements sur les équations différentielles fractionnaires peuvent être trouvés dans les monographies de Kilbas et al [29], Miller et Ross [39], Lakshmikantham et al. [35], Podlubny [45]. Les équations différentielles ordinaires et fractionnaires ont été étudié par de nombreux auteurs en utilisant la théorie de point fixe, voir$[2, 3, 9, 15, 20-24, 51, 52]$.

Dans [15], El-Shahed a considéré le problème aux limites fractionnaire non linéaire suivant

$$D_{0^+}^q u(t) + \lambda a(t) f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u'(0) = u'(1) = 0,$$

où $2 < q < 3$, et $D_{0^+}^q$ désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. En utilisant le théorème du point fixe de Krasnoselskii sur le cône, l'auteur a prouvé l'existence et non existence des solutions positives de ce problème fractionnaire.

Dans [8], Bai et Lu ont étudié l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites de l'équation différentielles fractionnaire suivante

$$\begin{aligned} D_{0^+}^q u(t) + f(t, u(t)) &= 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

où $1 < q < 2$, et $D_{0^+}^q$ désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. En appliquant la théorie des théorèmes de point fixe sur le cône, les auteurs ont prouvé certains résultats d'existence et de multiplicité des solutions positives

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section suivante, on discute de l'existence d'au moins une solution positive du problème (P) en utilisant le théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii sur le cône, ensuite sous certaines conditions sur le terme non linéaire, on applique le théorème Avery-Peterson pour prouver l'existence d'au moins trois solutions positives. A la fin de cette section, on donne deux exemples illustrant les résultats obtenus.

3.2 Existence des solutions positives

Soit $E = C[0,1]$, muni de la norme $\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$. On commence par résoudre un problème auxiliaire qui permettra d'obtenir l'expression de la solution.

Lemme 41 *On suppose que $\alpha \neq 2$ et $y \in C([0,1],\mathbb{R})$, alors, le problème*

$$^{c}D_{0^+}^{q}u(t) = y(t), \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(0) = \alpha u(1),$$

a une solution unique donnée par

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s)\, y(s) ds,$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} (t-s)^{q-1} + \frac{\alpha}{2-\alpha} t^2 (1-s)^{q-1}, & 0 \leq s \leq t, \\ \frac{\alpha}{2-\alpha} t^2 (1-s)^{q-1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Preuve. En utilisant les propriétées du calcul fractionnaire, on a

$$u(t) = I_{0^+}^{q} y(t) + a + bt + ct^2. \tag{3.1}$$

La condition $u(0) = 0$ implique que $a = 0$. En dérivant les deux membres de (3.1) et en utilisant la condition initiale $u'(0) = 0$, on trouve $b = 0$. La condition $u''(0) = \alpha u(1)$,donne que $u''(0) = 2c = \alpha u(1)$, $2c = \alpha[I_{0^+}^{q} y(1) + c]$, $2c - \alpha c = \alpha I_{0^+}^{q} y(1)$, et $c = \dfrac{\alpha}{2-\alpha} I_{0^+}^{q} y(1)$. En remplçant a, b et c par leurs valeurs dans (3.1), on obtient

$$u(t) = I_{0^+}^{q} y(t) + \frac{\alpha}{2-\alpha} t^2 I_{0^+}^{q} y(1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}y(s)ds + \frac{\alpha}{2-\alpha}\frac{1}{\Gamma(q)}t^2\int_0^1 (1-s)^{q-1}y(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 G(t,s)y(s)ds. \end{aligned}$$

■

Maintenant on suppose que $0 < \alpha < 2$ et les hypothèses suivantes

(H_1) $a \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$ et il existe $\tau \in]0,1[$ tel que $\int_\tau^1 (1-s)^{q-1} a(s)ds \neq 0.$

(H_2) $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

On définit l'opérateur intégral $T : E \to E$ par

$$T(u)(t) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 G(t,s)\, a(s) f(u(s))\, ds, \tag{3.2}$$

qui peut être écrit comme

$$T(u)(t) = I_{0^+}^q a(t) f(u(t)) + \frac{\alpha}{2-\alpha}t^2 I_{0^+}^q a(1) f(u(1)). \tag{3.3}$$

Définition 42 *La fonction u est dite solution positive du problème (P) si $u(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]$ et elle satisfait les conditions aux limites dans (P).*

On introduit les notations suivantes $A_0 = \lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}$, $A_\infty = \lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}$. Le cas $A_0 = 0$ et $A_\infty = \infty$ est appelé le cas super linéaire tandis que le cas $A_0 = \infty$ et $A_\infty = 0$ est appelé le cas sous linéaire.

Lemme 43 *Si $0 < \alpha < 2$ alors la fonction G a les propriétées suivantes :*

(1) $G(t,s) \geq 0$, et

$$G(t,s) \leq 2\gamma(s), \forall t,s \in [0,1], \tag{3.4}$$

(2) *Pour tout* $t \in [\tau, 1]$ *et* $s \in [0,1]$, $\tau > 0$, $0 < \tau < 1$, *on a*

$$G(t,s) \geq \alpha\tau^2\gamma(s) \geq 0, \tag{3.5}$$

où $\gamma(s) = \frac{(1-s)^{q-1}}{2-\alpha}$.

Preuve. Pour $t \in [0,1]$, alors on obtient

$$G(t,s) \leq (1-s)^{q-1}\left(\frac{2}{2-\alpha}\right) = 2\gamma(s).$$

Si $t \in [\tau, 1]$, on trouve

$$G(t,s) \geq (1-s)^{q-1}\left(\frac{\alpha t^2}{2-\alpha}\right) \geq (1-s)^{q-1}\left(\frac{\alpha\tau^2}{2-\alpha}\right) = \alpha\tau^2\gamma(s). \tag{3.6}$$

■

Lemme 44 *La solution du problème aux limite fractionnaire* (P) *satisfait*

$$\min u(t)_{t\in[\tau,1]} \geq \frac{\alpha\tau^2}{2}\|u\|. \tag{3.7}$$

Preuve. Du Lemme 43, on a $\forall t \in [\tau, 1]$ $G(t,s) \geq \alpha\tau^2\gamma(s)$, donc $\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 \alpha\tau^2\gamma(s)y(s)ds. \leq u(t)$ ce qui implique $\min u(t)_{t\in[\tau,1]} \geq \frac{\alpha\tau^2}{2}\|u\|$. ■

Théorèm 45 *En supposant que les conditions* $(H_1) - (H_2)$ *sont vérifiées, alors le problème aux limite* (P) *a au moins une solution positive dans les deux cas sous-linéaire et super-linéaire.*

Pour prouver le théorème 45, on applique le théorème du point fixe de Guo-Krasnosel'skii sur le cône.

Preuve. On note par E^+ l'ensemble définit par $E^+ = \{u \in E, u(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]\}$ et on défini le cone K par

$$K = \left\{ u \in E^+, \min_{t \in [\tau,1]} u(t) \geq \frac{\alpha \tau^2}{2} \|u\| \right\}, \tag{3.8}$$

Il est facile de voir que K est un sous ensemble de E non vide, fermé et convexe, donc c'est un cone. On peut vérifier aussi que $TK \subset K$. Il est evident de voir que T est continu puisque les fonctions f, a et G sont continues. Maintenant on prouve que T est complètement continu.

(i) $T(B_r)$ est uniformément borné, où $B_r = \{u \in K, \|u\| \leq r\}$.

Comme les fonctions a et f sont continues, alors il existe une constante c telle que $\max_{t \in [0,1]} |a(t) f(u(t))| = c$ pour tout $u \in B_r$. A partir du lemme 43 on obtient

$$|Tu(t)| \leq \frac{2c}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \tag{3.9}$$

Donc $T(B_r)$ est uniformément borné.

(ii) $T(B_r)$ est equicontinu, pour tout $t_1, t_2 \in [0,1], t_1 < t_2, u \in B_r$.

on a

$$\begin{aligned} \left|(Tu)'(t)\right| &= \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 (q-1)(t-s)^{q-2} a(s) f(u(s)) ds \\ + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 2t \frac{\alpha}{2-\alpha} (1-s)^{q-1} a(s) f(u(s)) ds \end{array} \right| \\ &\leq \frac{c}{\Gamma(q-1)} \int_0^1 (1-s)^{q-2} ds + \frac{4c}{\Gamma(q)(2-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} ds \\ &\leq \frac{c}{\Gamma(q)} \left(1 + \frac{2}{(2-\alpha)}\right) = \frac{c_1}{\Gamma(q)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

donc

$$|Tu(t_2) - Tu(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} (Tu)'(t)\, dt \right| \leq \frac{c_1 (t_2 - t_1)}{\Gamma(q)},$$

Par conséquent $T(B_r)$ est equicontinu. Par application du théorème d' Arzela-Ascoli en déduit que T est complètement continu.

On considère en premier temps le cas super linéaire.

Comme $A_0 = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_1 > 0$, tel que si $0 < u \leq R_1$ alors $f(u) \leq \varepsilon u$. Soit $\Omega_1 = \{u \in E, \|u\| < R_1\}$, pour chaque $u \in K \cap \partial\Omega_1$, on a

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s)\, a(s) f(u(s) ds, \\ &\leq \frac{2\varepsilon \|u\|}{\Gamma(q)} \int_0^1 \gamma(s) a(s) ds, \end{aligned} \tag{3.11}$$

Donc si on choisit $\varepsilon = \Gamma(q)/2\int_0^1 \gamma(s)a(s)ds$, on obtient $||Tu|| \leq ||u||$, pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$.

Deuxièment, de $A_\infty = \infty$, on déduit que pour tout $M > 0$, il existe $R_2 > 0$, tel que $f(u) \geq Mu$ pour $u \geq R_2$.

Soit $R = \max\left\{R_1, \frac{2R_2}{\alpha\tau^2}\right\}$, et on note Ω_2 l'ensemble ouvert défini par

$$\Omega_2 = \{u \in E : \ ||u|| < R\}.$$

Si $u \in K \cap \partial\Omega_2$, alors

$$\min_{t\in[\tau,1]} u(t) \geq \frac{\alpha\tau^2}{2} \|u\| = \frac{\alpha\tau^2}{2} R \geq R_2. \tag{3.12}$$

En utilisant (3.5) et le lemme 44, on obtient pour $t \in [\tau, 1]$

$$Tu(t) \geq \frac{\alpha^2\tau^4 M \|u\|}{2\Gamma(q)} \int_0^1 \gamma(s) a(s) ds, \tag{3.13}$$

Si on choisit $M = 2\Gamma(q)/\alpha^2\tau^4 \int_0^1 \gamma(s)a(s)ds$, on obtient $||Tu|| \geq ||u||, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Le théorème du point fixe de Krasnoselskii implique que T admet un point fixe dans $K \cap \left(\overline{\Omega_2} \diagdown \Omega_1\right)$ tel que $R_2 \leq ||u|| \leq R$.

Pour prouver le cas sous linéaire on procède d'une manière similaire au cas précedant. ■

On définit sur K, les fonctionnelles non négatives et continues suivantes

$*\ \Lambda(u) = \min_{t\in[\tau,1]} |u(t)|$, concave et on a $\Lambda(u) \leq \|u\|$,

$*\ \varphi(u) = \Phi(u) = \|u\|$, φ et Φ sont convexes

$*\ \Psi(u) = \|u\|$, on a alors $\Psi(ku) \leq k\|u\|$ pour $0 \leq k \leq 1$.

Théorèm 46 *On suppose que $(H_1)-(H_2)$ sont satisfaites, et qu'il existe des constantes positives a, b, c, d, μ, β et ν telles que $a < b, \mu > \frac{2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} a(s)\, ds, \beta < \frac{\alpha\tau^2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int_\tau^1 (1-s)^{q-1} a(s)\, ds$, et*

(i) $f(u) \leq \frac{d}{\mu}$ pour $u \in [0, d]$,

(ii) $f(u) \leq \frac{b}{\beta}$ pour $u \in [b, c]$,

(iii) $f(u) \leq \frac{a}{\mu}$ pour $u \in [0, a]$.

Alors le problèm (P) a au moins trois solutions positives $u_1, u_2, u_3 \in \overline{K(\varphi, d)}$ telles que

$$\varphi(u_i) \leq d \text{ pour } i = 1, 2, 3,\ b < \Lambda(u_1), a < \Psi(u_2) \text{ avec } \Lambda(u_2) < b \text{ et } \Psi(u_3) < a.$$

Pour montrer ce théorème, on applique le théorème du point fixe d'Avery-Peterson.

Preuve. En procédant de manière analogue que celle de la preuve du théorème 45, on montre que T est complètement continue sur $\overline{K(\varphi, d)}$.

1) $T\left(\overline{K(\varphi, d)}\right) \subset \overline{K(\varphi, d)}$. Pour chaque $u \in \overline{K(\varphi, d)}$, alors $\|u\| \leq d$. Donc a l'aide de la supposition (i) on a

$$\begin{aligned}
\varphi(Tu) &= \|Tu\| = \max_{t\in[0,1]} \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s)\, a(s) f(u(s)) ds \\
&\leq \frac{2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} a(s)\, f(u(s))\, ds \\
&\leq \frac{d}{\mu} \frac{2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} a(s)\, ds < d,
\end{aligned}$$

alors $Tu \in \overline{K(\varphi, d)}$.

2) Soit $y(t) = b\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)$ avec $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, alors

$$\Phi(y) = \varphi(y) = \|y\| = b\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) < \frac{b}{1-\lambda}.$$

De plus on a

$$\Lambda(y) = \min_{t\in[\tau,1]} y(t) = b\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) > b > (1-\lambda)\|y\|.$$

Alors $y \in K\left(\varphi, \Phi, \Lambda, b, \frac{b}{1-\lambda}, d\right)$, donc $\left\{u \in K\left(\varphi, \Phi, \Lambda, b, \frac{b}{1-\lambda}, d\right), \Lambda(u) > b\right\} \neq \emptyset$.

Pour chaque $u \in K\left(\varphi, \Phi, \Lambda, b, \frac{b}{1-\lambda}, d\right)$, puis $b \leq u(t) \leq \frac{b}{1-\lambda}$, de plus en appliquant le lemme 43 et la supposition (ii), on obtient

$$\begin{aligned}
\Lambda(Tu) &= \min_{t\in[\tau,1]} |Tu(t)| \geq \frac{\alpha\tau^2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int_\tau^1 (1-s)^{q-1} a(s)\, f(u(s))\, ds \\
&\geq \frac{\alpha\tau^2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \frac{b}{\beta} \int_\tau^1 (1-s)^{q-1} a(s)\, ds > b.
\end{aligned}$$

Donc la condition $(S1)$ est satisfaite.

3)Pour chaque $u \in K(\varphi, \Lambda, b, d)$ tel que $\Phi(Tu) = \|Tu\| > c$, alors

$$\Lambda(Tu) = \min_{t\in[\tau,1]} |Tu(t)| \geq b,$$

ceci implique que $(S2)$ est vraie.

4) Pour chaque $u \in R(\varphi, \Psi, a, d)$, alors $0 < a \leq \|u\| \leq d$, et donc $0 \notin R(\varphi, \Psi, a, d)$ avec $\Psi(u) = \|u\| = a$, en utilisant le lemme 43 et la supposition (iii), on obtient

$$\begin{aligned}
\Psi(Tu) &= \max_{t\in[0,1]} \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 G(t,s)\,a(s)\,f(u(s))\,ds \\
&\leq \frac{2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1}\,a(s)\,f(u(s))\,ds \\
&\leq \frac{a}{\mu}\frac{2}{(2-\alpha)\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1}\,a(s)\,ds < a,
\end{aligned}$$

Alors $(S3)$ est satisfaite. ■

3.3 Exemples

Exemple 47 *On considère le problème aux limites fractionnaire suivant*

$$^cD_{0^+}^{\frac{8}{3}}u(t) = a(t)f(u(t)), \quad 0 < t < 1,$$

où $q = \frac{8}{3}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $f(u) = \exp(-u)$, $a(t) = t$, $\tau = \frac{4}{5}$, *un simple calcul donne* $\int_0^{0,8} a(s)\,ds = \int_0^{0,8} s ds = 0,32 \neq 0$. *Alors les hypothèses* $(H_1) - (H_2)$ *sont véfiées et* $A_0 = \infty$, $A_\infty = 0$. *En appliquant le théorème 45, on en déduit qu'il existe au moins une solution positive.*

Exemple 48 *On considère le problème aux limites fractionnaire suivant*

$$^{c}D_{0^+}^{\frac{9}{4}}u(t) = a(t)f(u(t)), \quad 0 < t < 1,$$

où $q = \frac{9}{4}$, $\alpha = 1$, $a(t) = \sqrt{1+t}$, $\tau = \frac{9}{10}$,

$$f(u,v) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{u^3}{2} \quad , \ 0 \leq u \leq 3 \\ \\ \frac{7u^2}{2} - 13 \ , \ 3 \leq u \leq 4, \\ \\ 38 \quad , \quad u \geq 4, \end{array} \right\},$$

Comme les hypothèses $(H_1) - (H_2)$ *sont satisfaites, on vérifie les hypothèses du théorème 46*

$$\begin{aligned} \mu &> \frac{2\,(0,1)^{\frac{5}{4}}}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)} \int_0^1 \sqrt{1+s}ds = 2.151\,7, \\ \beta &< \frac{(0,9)^2\,(0,1)^{\frac{5}{4}}}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)} \int_{0,9}^1 \sqrt{1+s}ds = 0,87149, \end{aligned}$$

Si on choisit $\mu = 2,30$, $\beta = 0,5$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 0,1$, $d \geq 127,65$, *alors les hypothèses du théorème 46 sont satisfaites, par conséquent, il existe au moins trois solutions positives* $u_1, u_2, u_3 \in \overline{K(\varphi, d)}$ *telles que*

$\|u_i\| \leq d = 128$, $3 < \min_{t \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]} u_1(t)$, $2 < \|u_2\|$, *avec* $\min_{t \in \left[\frac{9}{10}, 1\right]} u_2(t) < 3$ *et* $\|u_3\| < 2$.

Chapitre 4

Problème aux limites fractionnaire en deux points en résonance

Résumé

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites fractionnaire en deux points en résonance. En utilisant le concept de la théorie du degré de coincidence de Mawhin, on établit l'existence de la solution d'une équation différentielle fractionnaire. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication internationale [21] .

A. Guezane-Lakoud, S. Kouachi and F. Ellaggoune : Two point fractional boundary value problem at resonance. . J. Appl. Math. & Informatics vol. 33(2015), No. 3-4, pp. 425-434.

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'existence de la solution du problème aux limites fractionnaire suivant

$$
\begin{aligned}
&{}^{c}D_{0+}^{q}u\left(t\right) = f\left(t, u\left(t\right), u'\left(t\right), u''\left(t\right)\right), \qquad 0 < t < 1, \qquad (4.1)\\
&u\left(0\right) = u'\left(0\right) = 0\ ,\ u''\left(0\right) = 2u\left(1\right),
\end{aligned}
$$

où ${}^{c}D_{0+}^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $2 < q < 3$. $f : [0,1] \times \mathbb{R}^{3} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Le problème aux limites fractionnaire (4.1) est en résonance dans le sens ou le problème linéaire homogène associé

$$
\begin{aligned}
&{}^{c}D_{0+}^{q}u\left(t\right) = 0, \qquad 0 < t < 1,\\
&u\left(0\right) = u'\left(0\right) = 0\ ,\ u''\left(0\right) = 2u\left(1\right),
\end{aligned}
$$

a une solution non trivialle $u\left(t\right) = ct^{2}$, $c \in \mathbb{R}$. Pour résoudre ce problème, on utilise la théorie du degré de coincidence de Mawhin [38]. Cette méthode est basée sur une formulation équivalente dans un espace abstrait qui conduit généralement à un opérateur abstrait de la forme $N + L$, où L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro et N est généralement un opérateur non linéaire ayant des propriétés de compacité par rapport à L.

Dans [60], l'auteur étudie en utilisant la théorie du degré de coincidence de Mawhin, le problème fractionnaire en résonance suivant

$$^{c}D_{0+}^{q}x(t) = f\left(t, x(t), x'(t)\right), \quad 0 < t < 1,$$

$$u\left(0\right) = 0, \quad u'\left(0\right) = u'\left(1\right),$$

où $^{c}D_{0+}^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $1 < q \leq 2$ et $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Dans [31] , le problème suivant a été considérée :

$$D_{0+}^{\alpha}x(t) = f\left(t, x(t), x'(t)\right), \quad 0 < t < 1, 1 < \alpha < 2$$

$$D_{0^{+}}^{\alpha-2}u\left(0\right) = 0, \quad \eta u\left(\xi\right) = u\left(1\right), 0 < \xi < 1, \eta\xi^{\alpha-1} = 1$$

Les auteurs ont appliqué la théorie du degré de coincidence de Mawhin pour demontrer l'existence de la solution.

4.2 Resultat d'existence

On rappelle quelques notations et des résultats fondamentaux intervenant dans la reformulation du problème.

Soient X, Y deux espaces de Banach et soit $L : dom\left(L\right) \subset X \to Y$ un opérateur de Fredholm d'indice zéro et $P : X \to X$, $Q : Y \to Y$ deux projections continues telles que $\operatorname{Im} P = KerL,\ KerQ = \operatorname{Im} L$et $X = KerL \oplus KerP, Y = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im} Q$. Il en suit que $L|_{KerP\cap domL} : KerP \cap dom\,(L) \to \operatorname{Im} L$ est inversible, on note par K_P son inverse. Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de X tel que $dom\,(L) \cap \Omega \neq \emptyset$, l'application $N : X \to Y$ est dite L-compact sur $\overline{\Omega}$ si $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ est bornée et $K_p\,(I-Q)\,N : \overline{\Omega} \to X$ est compacte.

De plus, puisque $\dim \operatorname{Im} Q = \dim KerL < \infty$, il existe un isomorphisme $J : \operatorname{Im} Q \to KerL = \operatorname{Im} P$.

Soit $X = C^2\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ muni de la norme $\|u\|_X = \max\left\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty, \|u''\|_\infty\right\}$, $Y = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|y\|_Y = \|y\|_\infty$, ou $\|u\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |u\,(t)|$, et l'opérateur linéaire $L : domL \subset X \to Y$ est défini par

$$Lu = {}^c D^q_{0^+} u, \tag{4.2}$$

où

$$domL = \left\{u \in X \mid D^q_{0^+} u\,(t) \in Y, u\,(0) = u'\,(0) = 0, u''\,(0) = 2u\,(1)\right\}.$$

On définit l'opérateur $N : X \to Y$ par

$$Nu\,(t) = f\left(t, u\,(t), u'\,(t), u''\,(t)\right), \forall t \in [0,1].$$

Alors le problème aux limites (4.1) est equivalent à

$$Lu = Nu, u \in domL.$$

Il est connu de [38] que l'équation de coïncidence $Lu = Nu$ est équivalente à

$$u = (P + JQN)u + K_P(I-Q)Nu.$$

Le théorème principal de ce chapitre, soit celui d'existence de solution du problème (4.1), est donné comme suit

Théorèm 49 *On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites*

(H_1) *Il existe des fonctions positives* $p, q, r, z \in C[0,1]$ *avec* $\Gamma(q-1) - 2q_1 - 2r_1 - 2z_1 > 0$ *telle que*

$$|f(t,u,v,w)| \leq p(t) + q(t)|u| + r(t)|v| + z(t)|w|, \forall t \in [0,1], (u,v,w) \in \mathbb{R}^3,$$

où $p_1 = \|p\|_\infty, q_1 = \|q\|_\infty, r_1 = \|r\|_\infty, z_1 = \|z\|_\infty.$

(H_2) *Il existe une constante* $A > 0$ *tel que, si* $|w| > A$, $\forall w \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\begin{aligned} wf(t,u,v,w) &> 0, \forall t \in [0,1], (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\ & \textit{ou} \\ wf(t,u,v,w) &< 0, \forall t \in [0,1], (u,v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Alors le problème aux limites fractionnaire (4.1) *admet au moins une solution dans* X.

Pour demontrer ce théorème on a besoin de quelques lemmes.

Lemme 50 *Soit* L *défini par* (4.2), *alors*

$$KerL = \left\{u \in X | u(t) = c_2 t^2, c_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]\right\}, \tag{4.3}$$

$$\operatorname{Im} L = \left\{y \in Y | \int_0^1 (1-s)^{q-1} y(s)\, ds = 0\right\}. \tag{4.4}$$

Preuve. De l'équation $D_{0^+}^q u(t) = 0$ on déduit que $u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ où $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Comme $u(0) = u'(0) = 0$ et $u''(0) = 2u(1)$, alors $c_0 = c_1 = 0$ par suite

$$KerL = \left\{ u \in X | u(t) = c_2 t^2, c_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1] \right\}.$$

Soit $y \in \operatorname{Im} L$, alors il existe $u \in domL$ tel que $y = Lu \in Y$. On a

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} y(s)\, ds + c_0 + c_1 t + c_2 t^2. \tag{4.5}$$

En dérivant deux fois (4.5), et en utilisant les conditions aux limites, on trouve

$$\int_0^1 (1-s)^{q-1} y(s)\, ds = 0.$$

D'autre part, soit $y \in Y$ satisfaisant $\int_0^1 (1-s)^{q-1} y(s)\, ds = 0$, alors $u(t) = I_{0^+}^q y(t) \in domL$ et ${}^c D_{0^+}^q u(t) = y(t)$, donc $y \in \operatorname{Im} L$. ■

Lemme 51 *L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Les opérateurs de projections linéaires continus $P : X \to X$ et $Q : Y \to Y$ sont définis par*

$$Pu(t) = u(1)\, t^2, \forall t \in [0,1],$$

$$Qy(t) = q \int_0^1 (1-s)^{q-1} y(s)\, ds, \forall t \in [0,1].$$

L'opérateur linéaire $K_p = \left(L|_{domL \cap KerP}\right)^{-1} : \operatorname{Im} L \to domL \cap KerP$ est défini par

$$\begin{aligned} K_p y(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} y(s)\, ds - \frac{t^2}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} y(s)\, ds, \forall t \in [0,1] \\ &= I^q y(t) - t^2 I^q y(1). \end{aligned}$$

Preuve. Il découle de $u = (u - Pu) + Pu$ que $X = KerP + KerL$. Par un simple calcul, on obtient $KerP \cap KerL = \{0\}$, alors $X = KerP \oplus KerL$.

De la même manière on prouve que $Y = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im} Q$. Pour $y \in Y$, on a $y = (y - Qy) + Qy$ d'où $y - Qy \in KerQ = \operatorname{Im} L$ car $(Q^2y = Qy)$ et $Qy \in \operatorname{Im} Q$ alors $Y = \operatorname{Im} L + \operatorname{Im} Q$. De plus $\operatorname{Im} L \cap \operatorname{Im} Q = \{0\}$, en effet, soit $y \in \operatorname{Im} L \cap \operatorname{Im} Q$, $y \in \operatorname{Im} L$ donc $y = KerQ \Rightarrow Qy = 0$, de plus $y \in \operatorname{Im} Q$ donc $y = Qy'$ d'où $Q^2y' = Qy' = Qy = y = 0$ et donc si $y \in \operatorname{Im} L \cap \operatorname{Im} Q \Rightarrow y = Qy = 0$ ce qui montre que $\operatorname{Im} L \cap \operatorname{Im} Q = \{0\}$, d'où $Y = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im} Q$ et $\dim KerL = \dim \operatorname{Im} Q = co \dim \operatorname{Im} L = 1$ donc Ind $L = \dim KerL - co \dim \operatorname{Im} L = 0$, alors L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

De la définition de P et K_P, il est facile de voir que l'inverse de L est K_P. En effet, pour $y \in \operatorname{Im} L$, en utilisant les propriètés du calcul fractionnaire on a

$$LK_P y = {}^c D_{0^+}^q \left(I_{0^+}^q y(t) \right) + I_{0^+}^q y(1) {}^c D_{0^+}^q t^2 = y. \tag{4.6}$$

De plus, pour $u \in domL \cap KerP$, on a $u(0) = u'(0) = 0$ et $u''(0) = 2u(1)$, alors on obtient

$$I_{0^+}^q Lu(t) = I_{0^+}^q D_{0^+}^q u(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2, c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

en combinant avec $u(0) = u'(0) = 0$, $u''(0) = 2u(1)$ on trouve

$$K_P Lu = u. \tag{4.7}$$

d'où $K_P = \left(L|_{domL \cap KerP} \right)^{-1}$. ■

Lemme 52 *Si Ω est un sous ensemble ouvert borné de X tel que $domL \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$, alors N est L-compact sur $\overline{\Omega}$.*

Preuve. N est $L-$compacte sur Ω si $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ est borné et $K_{P,Q}N:\overline{\Omega}\rightarrow X$ est compacte. Comme $\overline{\Omega}$ est borné, alors il existe $R>0,\forall u\in\overline{\Omega}:\|u\|\leq R$. On a $\forall u\in\overline{\Omega}$, alors

$$\begin{aligned}
|QNu(t)| &= q\left|\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,u(s),u'(s),u''(s))\,ds\right| \\
&\leq p_1+[q_1+r_1+z_1]R=R_1,
\end{aligned}$$

qui implique

$$\|QNu\|_\infty \leq R_1 \Longrightarrow QN\left(\overline{\Omega}\right) \text{ est borné.}$$

On montre que $K_{P,Q}N=K_P(I-Q)Nu$ est compacte. On a

$$\begin{aligned}
|K_P(I-Q)Nu(t)| &= \left|I_{0^+}^q(I-Q)Nu(t)-t^2I_{0^+}^q(I-Q)Nu(1)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}(I-Q)Nu(s)\,ds\right. \\
&\quad \left.\frac{t^2}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1}(I-Q)Nu(s)\,ds\right| \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(q)}\int_0^1 [|Nu(s)|+|QNu(s)|]\,ds \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(q)}\left[\|Nu\|_\infty+\|QN\|_\infty\right].
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
|Nu(t)| &= |f(t,u(t),u'(t),u''(t))| \\
&\leq \max\left(|f(t,u(t),u'(t),u''(t))|,\|u\|\leq R,0\leq t\leq 1\right)=M_1,
\end{aligned}$$

alors $\|Nu\|_\infty \leq M_1$ et par suite $\|K_P(I-Q)Nu\|_\infty$ est bornée.

De même on démontre que $(K_P(I-Q)N)'$ et $(K_P(I-Q)N)''$ sont bornés sur $\overline{\Omega}$ donc $\|K_P(I-Q)Nu\|$ est bornée.

En vue du théorème Arzelà-Ascoli, on prouve que $K_P(I-Q)N\left(\overline{\Omega}\right) \subset X$ est équicontinu.

Soit $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, $\forall u \in \overline{\Omega}$, alors

$$\begin{aligned}
& \left|\left(K_{P,Q}u\right)(t_2) - \left(K_{P,Q}u\right)(t_1)\right| \\
\leq\ & \frac{M_1}{\Gamma(q)}\left[\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{q-1}-(t_1-s)^{q-1}\right)ds\right. \\
& \left.+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\,ds+\left(t_2^2-t_1^2\right)\int_0^1(1-s)^{q-1}\,ds\right] \\
=\ & \frac{M_1}{\Gamma(q+1)}\left[\left(t_2^q-t_1^q\right)+\left(t_2^2-t_1^2\right)\right]\underset{t_1\to t_2}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left|K'_{P,Q}u(t_2) - K'_{P,Q}u(t_1)\right| \\
\leq\ & \frac{2M_1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{q-2}-(t_1-s)^{q-2}\right)ds\right. \\
& \left.+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-2}\,ds+(t_2-t_1)\right] \\
\leq\ & \frac{2M_1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\left(t_2^{q-1}-t_1^{q-1}\right)+(t_2-t_1)^{q-1}+(t_2-t_1)\right]\underset{t_1\to t_2}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left|K''_{P,Q}u(t_2) - K''_{P,Q}u(t_1)\right| \\
\leq\ & \frac{2A}{\Gamma(q)}\left[(q-2)\int_0^{t_1}\left((t_2-s)^{q-3}-(t_1-s)^{q-3}\right)ds\right. \\
& \left.+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-3}\,ds+(t_2-t_1)\right] \\
\leq\ & \frac{2M_1}{\Gamma(q+1)}\left[\left(t_2^{q-2}-t_1^{q-2}\right)+(t_2-t_1)^{q-2}+(t_2-t_1)\right]\underset{t_1\to t_2}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

Par conséquent $K_{P,Q}\left(\overline{\Omega}\right)$ est équicontinu. Alors $K_{P,Q} : \overline{\Omega} \to X$ est compacte. $\blacksquare$

Lemme 53 *En supposant que* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées, alors l'ensemble*

$$\Omega_1 = \{u \in domL \setminus KerL \mid Lu = \lambda Nu, \lambda \in (0,1)\}$$

est borné.

Preuve. Soit $u \in \Omega_1$, alors $Nu \in \operatorname{Im} L$. De (4.4), on obtient

$$\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s, u(s), u'(s), u''(s))\, ds = 0.$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne d'une intégrale, on conclut qu'il existe une constante $h \in (0,1)$ telle que $f(h, u(h), u'(h), u''(h)) = 0$. En tenant compte de la condition (H_2), on conclut que $|u''(h)| \leq A$. Comme

$u \in domL$, alors $u(0) = u'(0) = 0$. Donc

$$|u(t)| = \left| u(0) + \int_0^t u'(s)\, ds \right| \leq \|u'\|_\infty .$$

et

$$|u'(t)| = \left| u'(0) + \int_0^t u''(s)\, ds \right| \leq \|u''\|_\infty .$$

ainsi

$$\|u\|_\infty \leq \|u'\|_\infty \leq \|u''\|_\infty . \tag{4.8}$$

Comme $Lu = \lambda Nu$ et $u \in domL$, on a alors

$$u(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, u(s), u'(s), u''(s))\, ds + \frac{1}{2} u''(0)\, t^2,$$

et

$$u''(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(q-2)} \int_0^t (t-s)^{q-3} f(s, u(s), u'(s), u''(s))\, ds + u''(0) .$$

Si on prend $t = h$, on obtient

$$u''(h) = \frac{\lambda}{\Gamma(q-2)} \int_0^h (h-s)^{q-3} f(s, u(s), u'(s), u''(s))\, ds + u''(0)$$

En combinant avec $|u''(h)| \leq A$, (H_1) et (4.8), on trouve

$$\begin{aligned}
|u''(0)| &\leq |u''(h)| + \frac{1}{\Gamma(q-2)} \int_0^h (h-s)^{q-3} |f(s, u(s), u'(s), u''(s))|\, ds \\
&\leq A + \frac{1}{\Gamma(q-2)} \int_0^h (h-s)^{q-3} [p(s) + q(s)|u(s)| \\
&\quad + r(s)|u'(s)| + z(s)|u''(s)|] \\
&\leq A + \frac{1}{\Gamma(q-1)} [p_1 + q_1 \|u\|_\infty + r_1 \|u'\|_\infty + z_1 \|u''\|_\infty] \\
&\leq A + \frac{1}{\Gamma(q-1)} [p_1 + [q_1 + r_1 + z_1] \|u''\|_\infty].
\end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned}
\|u''\|_\infty &\leq \frac{1}{\Gamma(q-2)} \int_0^t (t-s)^{q-3} |f(s, u(s), u'(s), u''(s))|\, ds + |u''(0)| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q-1)} [p_1 + [q_1 + r_1 + z_1] \|u''\|_\infty] + |u''(0)| \\
&\leq A + \frac{2}{\Gamma(q-1)} [p_1 + [q_1 + r_1 + z_1] \|u''\|_\infty]
\end{aligned}$$

puisque $\Gamma(q-1) - 2q_1 - 2r_1 - 2z_1 > 0$, on obtient

$$\|u''\|_\infty \leq \frac{2p_1 + A\Gamma(q-1)}{\Gamma(q-1) - 2q_1 - 2r_1 - 2z_1} = M,$$

et

$$\|u\|_\infty \leq \|u'\|_\infty \leq \|u''\|_\infty \leq M.$$

Donc, $\|u\|_X \leq M$, ce qui implique que Ω_1 est borné. ■

Lemme 54 *En supposant que* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées, alors l'ensemble*

$$\Omega_2 = \{u | u \in KerL,\ Nu \in \operatorname{Im} L\}$$

est borné

Preuve. Soit $u \in \Omega_2$, on a $u(t) = ct^2, c \in \mathbb{R}$, et $Nu \in \operatorname{Im} L$. Alors on a

$$\int_0^1 (1-s)^{q-1} f\left(s, cs^2, 2cs, 2c\right) ds = 0,$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne et la condition (H_2) on conclut que $|2c| \leq A$, donc $\|u\|_X \leq A$. Par conséquent Ω_2 est borné. ■

Lemme 55 *Si la première partie de la condition* (H_2) *est satisfaite, alors l'ensemble*

$$\Omega_3 = \{u | u \in KerL,\ \lambda Ju + (1-\lambda) QNu = 0, \lambda \in [0,1]\}$$

est borné. Où $J : KerL \to ImQ$ *est un isomorphisme défini par* $J(ct^2) = c$, $\forall c \in \mathbb{R}, t \in [0,1]$.

Preuve. Soit $u \in \Omega_3$, on a $u(t) = ct^2$, $c \in \mathbb{R}$, et

$$\lambda c + (1-\lambda) q \int_0^1 (1-s)^{q-1} f\left(s, cs^2, 2cs, 2c\right) ds = 0. \tag{4.9}$$

Si $\lambda = 0$, alors $q \int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s, cs^2, 2cs, 2c)\, ds = 0$, ainsi $|2c| \leq A$ en vue de la première partie de (H_2). Si $\lambda \in (0,1]$, On a toujours $|2c| \leq A$. Autrement, si $|2c| > A$, en tenant compte de la première partie de (H_2), on a

$$\lambda c^2 + (1-\lambda) qc \int_0^1 (1-s)^{q-1} f\left(s, cs^2, 2cs, 2c\right) ds > 0,$$

ce qui contredit (4.9). Donc, Ω_3 est borné. ■

Lemme 56 *Si la deuxième partie de la condition* (H_3) *est satisfaite, alors l'ensemble*

$$\Omega_3' = \{u|u \in KerL, \ -\lambda Ju + (1-\lambda) QNu = 0, \lambda \in [0,1]\}$$

est borné.

Preuve. D'une manière analogue à la preuve du lemme précédent, on prouve que Ω_3' est borné. ■

4.3 Preuve du théorème 49

La preuve du théorème 49 est une conséquence immédiate des lemmes ci- dessus et le théorème de coincidence de Mawhin.

Preuve. Soit Ω un sous ensemble ouvert de X tel que $\cup_{i=1}^{3}\overline{\Omega} \subset \Omega$. Il résulte des lemmes précédents que L est un opérateur de Fredholm d'indice zero et N est L-compact sur $\overline{\Omega}$, ainsi que les deux conditions suivantes sont satisfaites

(1) $Lu \neq \lambda Nu$ pour tout $(u,\lambda) \in [(domL \setminus KerL) \cap \partial\Omega] \times (0,1)$, car $\Omega_1 \cap \partial\Omega \times (0,1) = \emptyset$

(2) $Nu \notin \operatorname{Im} L$ pour tout $u \in KerL \cap \partial\Omega$, car $\Omega_2 \cap \partial\Omega = \emptyset$

On a $H(u,\lambda) = \pm\lambda Ju + (1-\lambda) QNu \neq 0$ pour tout $u \in KerL \cap \partial\Omega$, car $\Omega_3 \cap \partial\Omega = \emptyset$, donc par la propriété d'invariance par homotopie du degré on obtient

$$\begin{aligned}
\deg\left(QN|_{KerL}, KerL \cap \Omega, 0\right) &= \deg\left(H(.,0), KerL \cap \Omega, 0\right) \\
&= \deg\left(H(.1), KerL \cap \Omega, 0\right) \\
&= \deg\left(\pm J, KerL \cap \Omega, 0\right) \neq 0.
\end{aligned}$$

Donc par le théorème d'existence du point fixe de Mawhin, l'équation $Lu = Nu$ admet au moins une solution dans $domL \cap \overline{\Omega}$, alors (4.1) a au moins une solution $u \in C^2\,[0,1]$. $\blacksquare$

Chapitre 5

Existence, localisation et positivité des solutions d'un problème aux limites fractionnaire en résonance

Résumé

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et la localisation de la solution positive d'un problème aux limites fractionnaire en resonance. Le théorème du point fixe de l'opérateur croissant ainsi que la méthode de sous et sur solutions sont principalement les approches utilisées. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication internationale [22] .

Samia Kouachi, Assia Guezane-Lakoud and Fateh Ellaggounne : Existence and localization of positive solution for fractional boundary value problem at resonance. Advances in Difference Equations, 316 (2015).

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on considère le problème aux limites fractionnaire (P) suivant :

$$^{c}D_{0^+}^{q}u(t) = f(t, u(t)), \qquad 0 < t < 1, \tag{5.1}$$

$$u(0) = u'(0) = 0 \ , \ u''(0) = 2u(1), \tag{5.2}$$

où $^{c}D_{0^+}^{q}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. On suppose que $f : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est continue. On dit que le problème aux limites fractionnaire (P) est en résonance si l'équation linéaire $Lu =^{c} D_{0^+}^{q}u(t) = 0$, sous les conditions aux limites (5.2) possède une solution non triviale i.e, $\dim \ker L = 1$.

Ces dernières années, de nombreux problèmes aux limites de type résonance liés aux equations différentielles ordinaires ou fractionnaires ont été étudiés et de nombreux resultats ont été obtenus voir $[7, 11, 27, 28, 31, 55, 59]$ ainsi que leurs références. Dans la plupart des documents mentionnés ci-dessus, la théorie du degré de coïncidence a été appliquée pour établir le théorèmes d'existence. Cependant dans $[46, 50]$, les auteurs ont obtenu les solutions positives minimales et maximales en utilisant le théorème du point fixe de l'opérateur croissant. Cette méthode sera utilisée dans ce chapitre pour résoudre le problème aux limite (P).

On rappelle quelques notations et des résultats fondamentaux intervenant dans la reformulation du problème (P).

Soit X, Y deux espaces de Banach et soit $L : dom(L) \subset X \to Y$ un opérateur de Fredholm d'indice zero et $P : X \to X$, $Q : Y \to Y$ deux projections continues telles que $\operatorname{Im} P = KerL$, $KerQ = \operatorname{Im} L$ et $X = KerL \oplus KerP, Y = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im} Q$. Il s'en suit que $L|_{KerP \cap domL} : KerP \cap dom\,(L) \to \operatorname{Im} L$ est inversible, on note par K_P son application inverse. Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de X tel que $dom\,(L) \cap \Omega \neq \emptyset$, l'application $N : X \to Y$ est dite L-compact sur $\overline{\Omega}$ si $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ est bornée et $K_p\,(I-Q)\,N : \overline{\Omega} \to X$ est compacte.

De plus, puisque $\dim \operatorname{Im} Q = \dim KerL < \infty$, il existe un isomorphisme $J : \operatorname{Im} Q \to KerL = \operatorname{Im} P$. soit $H = L + J^{-1}P$, alors $H : dom\,(L) \subset X \to Y$ est une bijection linéaire avec un inverse borné et

$$(JQ + K_p\,(I-Q))\,(L + J^{-1}P) = (L + J^{-1}P)\,(JQ + K_p\,(I-Q)) = I.$$

On a $K_1 = H\,(K \cap dom\,(L))$ est un cône dans Y [12] , et on a le théorème suivant

Théorèm 57 [12] *$N\,(u) + J^{-1}P\,(u) = H\,(\overline{u})$, où $\overline{u} = P\,(u) + JQN\,(u) + K_p\,(I-Q)\,N\,(u)$, et $\overline{u}$ est determiné d'une façon unique.*

Proposition 58 [12] *En conséquence, l'auteur a obtenu l'équivalence des deux assertions suivantes*

(i) $P + JQN + K_p\,(I-Q)\,N : K \cap dom\,(L) \to K \cap dom\,(L)$,

(ii) $N + J^{-1}P : K \cap dom\,(L) \to K_1$

Maintenant, on introduit la notion de sous et sur solutions

Définition 59 [50] *Soit K un cone normal dans l'espace de Banach X, $u_0 \leq v_0$, et*

$u_0,\ v_0 \in K \cap dom\,(L)$ sont les sous et sur solutions de l'équation $Lu = Nu$ si

$$\begin{cases} Lu_0 \leq Nu_0, \\ Lv_0 \geq Nv_0. \end{cases}$$

Théorèm 60 [50] *Soient $L : dom\,(L) \subset X \to Y$ l'opérateur de Fredholm d'indice zéro, K un cone normal dans l'espace de Banach X, $u_0,\ v_0 \in K \cap dom\,(L)$, $u_0 \leq v_0$, et $N : [u_0, v_0] \to Y$ L-compact et continue. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites*

(C_1) u_0 et v_0 sont des sous et sur solutions de l'équation $Lu = Nu$.

(C_2) $N + J^{-1}P : K \cap dom\,(L) \to K_1$ est un opérateur croissant.

Alors l'équation $Lu = Nu$ a une solution minimale u^* et une solution maximale v^* dans $[u_0, v_0]$.

De plus, $u^* = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, et $v^* = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, ou

$$\begin{aligned} u_n &= \left(L + J^{-1}P\right)^{-1}\left(N + J^{-1}P\right)u_{n-1}, \\ v_n &= \left(L + J^{-1}P\right)^{-1}\left(N + J^{-1}P\right)v_{n-1}, \text{ pour } n = 1, 2, 3, ... \\ u_0 &\leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq ... \leq v_n \leq ... \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0. \end{aligned}$$

5.2 Préliminaires

Soient $X = Y = C\,[0,1]$ muni de la norme $\|u\| = \sup_{t\in[0,1]} |u\,(t)|$, le cône $K = \{u \in X : u\,(t) \geq 0, t \in [0,1]\}$ et l'opérateur linéaire $L : dom\,(L) \subset X \to Y$ défini par

$$Lu\,(t) =^c D^q_{0+} u\,(t)\,,$$

$$dom\,(L) = \left\{u \in AC^3\,[0,1] :^c D^q_{0^+} u\,(t) \in C\,[0,1]\,, u\,(0) = u'\,(0) = 0, u''\,(0) = 2u\,(1)\right\}$$

Soit l'opérateur $N : X \to Y$ défini par

$$Nu\,(t) = f\,(t, u\,(t))\,, \forall t \in [0,1]\,,$$

Alors le problème aux limites (P) est équivalent à $Lu = Nu, u \in K \cap dom\,(L)$.

Lemme 61 *On a*

$$KerL = \left\{u \in dom\,(L) : u\,(t) = ct^2, c \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]\right\},$$

et

$$\operatorname{Im} L = \left\{y \in Y : \int_0^1 (1-s)^{q-1}\, y\,(s)\, ds = 0\right\}.$$

Preuve. la fonction $u\,(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2, c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ est solution de

$Lu =^c D^\alpha_{0^+} u\,(t) = 0$. Comme $u\,(0) = u'\,(0) = 0$, alors $c_0 = c_1 = 0$ donc

$$KerL = \left\{u \in dom\,(L) : u\,(t) = ct^2, c \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]\right\}.$$

Montrons que

$$\operatorname{Im} L = \left\{y \in Y : \int_0^1 (1-s)^{q-1}\, y\,(s)\, ds = 0\right\}.$$

Pour $y \in \operatorname{Im} L$, il existe $u \in dom\,(L)$ telle que $y = Lu \in Y$. Alors

$$u\,(t) = \frac{1}{\Gamma\,(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1}\, y\,(s)\, ds + c_0 + c_1 t + c_2 t^2.$$

Il est facile d'obtenir

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(q-1)} \int_0^t (t-s)^{q-2} y(s)\, ds + c_1 + 2c_2 t,$$

$$u''(t) = \frac{1}{\Gamma(q-2)} \int_0^t (t-s)^{q-3} y(s)\, ds + 2c_2,$$

Alors la condition (4.2) implique

$$\int_0^1 (1-s)^{q-1} y(s)\, ds = 0.$$

D'autre part, en supposant que $y \in Y$ et satisfait $\int_0^1 (1-s)^{q-1} y(s)\, ds = 0$, et en posant $u(t) = I_{0+}^q y(t) + ct^2$, alors $u \in dom(L)$ et ${}^c D_{0+}^q u(t) = y(t)$, ainsi, $y \in \operatorname{Im} L$.

■

Maintenant, on définit les opérateurs $P : X \to X$ par

$$Pu(t) = \frac{1}{2} q(q+1)(q+2) t^2 \int_0^1 (1-s)^{q-1} u(s)\, ds$$

et $Q : Y \to Y$ par

$$Qy(t) = q \int_0^1 (1-s)^{q-1} y(s)\, ds, \forall t \in [0,1].$$

Il est facile de voir que les opérateurs P et Q sont des projections. En effet, pour $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} P^2 u(t) &= P(Pu)(t) = \frac{1}{2} q(q+1)(q+2) t^2 \int_0^1 (1-s)^{q-1} (Pu)(s)\, ds \\ &= \frac{1}{4} q^2 (q+1)^2 (q+2)^2 t^2 \int_0^1 (1-s)^{q-1} u(s)\, ds. \int_0^1 (1-s)^{q-1} s^2 ds \\ &= \frac{1}{2} q(q+1)(q+2) t^2 \int_0^1 (1-s)^{q-1} u(s)\, ds = Pu(t). \end{aligned}$$

De même, on montre que, pour $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} Q^2 y(t) &= Q(Qy)(t) = q\int_0^1 (1-s)^{q-1}(Qy)(s)\,ds \\ &= q^2\int_0^1 (1-s)^{q-1} y(s)\,ds.\int_0^1 (1-s)^{q-1}\,ds \\ &= q\int_0^1 (1-s)^{q-1} y(s)\,ds = Qy(t). \end{aligned}$$

Cependant, $\operatorname{Im} P = KerL$ et $KerQ = \operatorname{Im} L$.

Lemme 62 *L'opérateur* $L : dom(L) \subset X \to Y$ *est un opérateur de Fredholm d'indice zero, et son inverse est l'opérateur linéaire* $K_p : \operatorname{Im} L \to KerP \cap dom(L)$ *qui est donné par*

$$K_p y(t) = \int_0^1 k(t,s)\,y(s)\,ds, \forall t \in [0,1],$$

où

$$k(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} - q(q+1)(q+2)\,t^2 \frac{\Gamma(q)}{2\Gamma(2q)}\ \ (1-s)^{2q-1}\ \ , \\ \qquad 0 \le s \le t \le 1. \\ -q(q+1)(q+2)\,t^2 \frac{\Gamma(q)}{2\Gamma(2q)}\ \ (1-s)^{2q-1}, \\ \qquad 0 \le t \le s \le 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Preuve. Il découle de $u = (u - Pu) + Pu$ que $X = KerP + KerL$. Par un simple calcul, on obtient $KerP \cap KerL = \{0\}$, alors $X = KerP \oplus KerL$.

De la même on prouve que $Y = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im} Q$. Pour $y \in Y$, on a $y = (y - Qy) + Qy$ d'où $y - Qy \in KerQ = \operatorname{Im} L$ car $(Q^2 y = Qy)$ et $Qy \in \operatorname{Im} Q$ alors $Y = \operatorname{Im} L + \operatorname{Im} Q$. De plus $\operatorname{Im} L \cap \operatorname{Im} Q = \{0\}$, en effet, si $y\in \operatorname{Im}L=KerQ\Rightarrow Qy=0$, si $y\in \operatorname{Im}Q:\exists y'\in Y$ tel que $y=Qy'\Rightarrow$ $Qy=Q^{2}y'=Qy'=y=0$ car $(Qy=0)$ et donc $y\in \operatorname{Im}L\cap \operatorname{Im}Q\Rightarrow y=Qy=0$ ce qui verifie que $\operatorname{Im}L\cap \operatorname{Im}Q=\{0\}$, d'où $Y=\operatorname{Im}L\oplus \operatorname{Im}Q$ et $\dim KerL=1=$ $\dim \operatorname{Im}Q=co\dim \operatorname{Im}L=1$ donc $Ind\ L=\dim KerL-co\dim \operatorname{Im}L=0$, alors L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

L'expression de $K_{p}:\operatorname{Im}L\rightarrow KerP\cap dom\left(L\right)$. Soit $u\in dom(L)\cap KerP$, alors $y\left(t\right)={}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)\in \operatorname{Im}L$ et

$$K_{P}y\left(t\right)=u\left(t\right)=I_{0+}^{q}y\left(t\right)+Ct^{2}=\frac{1}{\Gamma\left(q\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{q-1}y\left(s\right)ds+Ct^{2}. \tag{5.4}$$

Puisque $u\in dom(L)\cap KerP$, alors

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{0}^{1}\left(1-t\right)^{q-1}u\left(t\right)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(q\right)}\int_{0}^{1}\left(1-t\right)^{q-1}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{q-1}y\left(s\right)dsdt+C\int_{0}^{1}t^{2}\left(1-t\right)^{q-1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(q\right)}\int_{0}^{1}y\left(s\right)\int_{s}^{1}\left(1-t\right)^{q-1}\left(t-s\right)^{q-1}dtds+\frac{2C}{q\left(q+1\right)\left(q+2\right)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
C &= -\frac{q\left(q+1\right)\left(q+2\right)}{2\Gamma\left(q\right)}\int_{0}^{1}y\left(s\right)\int_{s}^{1}\left(1-t\right)^{q-1}\left(t-s\right)^{q-1}dtds, \\
&= -q\left(q+1\right)\left(q+2\right)\frac{\Gamma^{2}\left(q\right)}{2\Gamma\left(2q\right)}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{2q-1}y\left(s\right)ds.
\end{aligned}$$

En remplaçant C par sa valeur dans (5.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\left(K_{P}y\right)\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(q\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{q-1}y\left(s\right)ds \\
&\quad -q\left(q+1\right)\left(q+2\right)t^{2}\frac{\Gamma\left(q\right)}{2\Gamma\left(2q\right)}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{2q-1}y\left(s\right)ds \\
&= \int_{0}^{1}k\left(t,s\right)y\left(s\right)ds,
\end{aligned}$$

où $k(t,s)$ est donné par (5.3). ■

5.3 Résultat d'existence de la solution positive

On définit l'isomorphisme $J : \operatorname{Im} Q \to KerL$ par $J(c) = \frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha+2)ct^2$. On a le résultat suivant

Lemme 63 *On a*

$$(JQN + K_p(I-Q)N)u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\,ds,$$

où

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} - q(q+1)(q+2)t^2\frac{\Gamma(q)}{2\Gamma(2q)}(1-s)^{2q-1} \\ +q(q+1)(q+2)t^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(q)}{4\Gamma(2q)}\right)(1-s)^{q-1} - \frac{t^q}{\Gamma(q)}(1-s)^{q-1} \\ 0 \le s \le t \le 1, \\ -q(q+1)(q+2)t^2\frac{\Gamma(q)}{2\Gamma(2q)}(1-s)^{2q-1} \\ +q(q+1)(q+2)t^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma(q)}{4\Gamma(2q)}\right)(1-s)^{q-1} - \frac{t^q}{\Gamma(q)}(1-s)^{q-1} \\ 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$$

G est continue et positive sur $[0,1]\times[0,1]$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} QNu(t) &= q\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,u(s))\,ds, \\ K_p(I-Q)Nu(t) &= \int_0^1 k(t,s) f(s,u(s))\,ds \\ &\quad -q\left(\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,u(s))\,ds\right)\left(\int_0^1 k(t,s)\,ds\right). \end{aligned}$$

alors

$$
\begin{aligned}
&(JQN + K_p (I - Q) N) u(t) = \frac{q(q+1)(q+2)t^2}{2} \int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s, u(s))\, ds \\
&+ \int_0^1 k(t,s) f(s,u(s))\, ds - q \left(\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,u(s))\, ds \right) \left(\int_0^1 k(t,s)\, ds \right) \\
&= \quad \frac{q(q+1)(q+2)t^2}{2} \int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,u(s))\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,u(s))\, ds \\
&\quad - q(q+1)(q+2)t^2 \frac{\Gamma(q)}{2\Gamma(2q)} \int_0^1 (1-s)^{2q-1} f(s,u(s))\, ds \\
&\quad + \left(-\frac{t^q}{\Gamma(q)} + q(q+1)(q+2)t^2 \frac{\Gamma(q)}{4\Gamma(2q)} \right) \left(\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,u(s))\, ds \right).
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que G est continu par rapport aux deux variables s, $t \in [0,1]$. Soit $t \leq s \leq 1$, donc

$$
\begin{aligned}
G(t,s) &= -q(q+1)(q+2)t^2 \tfrac{\Gamma(q)}{2\Gamma(2q)} (1-s)^{2q-1} \\
&\quad + q(q+1)(q+2)t^2 \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\Gamma(q)}{4\Gamma(2q)} \right) (1-s)^{q-1} - \tfrac{t^q}{\Gamma(q)} (1-s)^{q-1} \\
&\geq \left(-q(q+1)(q+2)t^2 \tfrac{\Gamma(q)}{4\Gamma(2q)} - \tfrac{t^2}{\Gamma(q)} + \tfrac{1}{2} q(q+1)(q+2)t^2 \right) (1-s)^{\alpha-1} \\
&\geq \left(-q(q+1)(q+2) \tfrac{\Gamma(q)}{4\Gamma(2q)} - \tfrac{1}{\Gamma(q)} + \tfrac{1}{2} q(q+1)(q+2) \right) t^2 (1-s)^{q-1} \\
&\geq 6t^2 (1-s)^{q-1} \geq 0.
\end{aligned}
$$

De même on a pour $0 \leq s \leq t \leq 1$,

$$
G(t,s) \geq \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} + 6t^2 (1-s)^{\alpha-1} \geq 0.
$$

■

Lemme 64 *L'opérateur N est L-compact et continu sur $\overline{\Omega}$, où Ω est un sous ensemble ouvert borné de $K \cap dom(L)$.*

Preuve. On va prouver que $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ est borné et $K_p\left(I-Q\right)\left(\overline{\Omega}\right)$ est compacte. Soit $u \in \overline{\Omega}$ et $M = \max\left(f\left(s,u\left(s\right)\right), 0 \leq s \leq 1, u \in \overline{\Omega}\right)$, alors

$$\begin{aligned} \left|QNu\left(t\right)\right| &= q\left|\int_0^1 \left(1-s\right)^{q-1} f\left(s,u\left(s\right)\right) ds\right| \\ &\leq M, \end{aligned}$$

donc

$$\left\|QNu\right\| \leq M,$$

alors $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ est borné.

Remarquant que $\left|k\left(t,s\right)\right| \leq 21$, on a

$$\left|K_p\left(I-Q\right)Nu\left(t\right)\right| \leq \int_0^1 f\left(s,u\left(s\right)\right)\left|k\left(t,s\right)\right| ds$$

$$+q\left(\int_0^1 \left(1-s\right)^{q-1} f\left(s,u\left(s\right)\right) ds\right)\left(\int_0^1 \left|k\left(t,s\right)\right| ds\right) \leq 42M,$$

alors $\left\|K_p\left(I-Q\right)Nu\right\| \leq 42M$, donc $K_p\left(I-Q\right)N$ est uniformément borné sur $\overline{\Omega}$.

Soit $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, ainsi

$$\left|K_p\left(I-Q\right)Nu\left(t_2\right) - K_p\left(I-Q\right)Nu\left(t_1\right)\right| \leq$$

$$\tfrac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} \left(\left(t_2-s\right)^{q-1} - \left(t_1-s\right)^{q-1}\right) f\left(s,u\left(s\right)\right) ds$$

$$+\tfrac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} \left(t_2-s\right)^{q-1} f\left(s,u\left(s\right)\right) ds$$

$$+q\left(q+1\right)\left(q+2\right)\left(t_2^2-t_1^2\right)\tfrac{\Gamma(q)}{2\Gamma(2q)} \int_0^1 \left(1-s\right)^{2q-1} f\left(s,u\left(s\right)\right) ds$$

$$+\left(\int_0^1 \left(1-s\right)^{q-1} f\left(s,u\left(s\right)\right) ds\right)\left(\left(t_2^q-t_1^q\right) + \left(q+1\right)\left(q+2\right)\left(t_2^2-t_1^2\right)\tfrac{\Gamma(q)}{2\Gamma(2q)}\right)$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(q)}\left[q\left(t_2-t_1\right)+\frac{\Gamma^2(q)}{2\Gamma(2q)}\left(q+1\right)^2\left(q+2\right)\left(t_2^2-t_1^2\right)+\left(t_2^q-t_1^q\right)\right].$$

quand $t_1 \to t_2$, on a $\|K_p(I-Q)Nu(t_2)-K_p(I-Q)Nu(t_1)\| \to 0$, par conséquent $K_p(I-Q)\left(\overline{\Omega}\right)$ est equicontinu. En vue du théorème Arzela-Ascoli, $K_p(I-Q)\left(\overline{\Omega}\right)$ est compact. ■

Théorèm 65 *On Suppose que*

(H_1) *Ils existent $u_0, v_0 \in K \cap dom(L)$ tel que $u_0 \leq v_0$ et*

$$\begin{cases} {}^cD_{0^+}^q u_0(t) \leq f\left(t, u_0(t)\right), & \forall t \in [0,1], \\ {}^cD_{0^+}^q v_0(t) \geq f\left(t, v_0(t)\right), & \forall t \in [0,1]. \end{cases}$$

(H_2) *Pour tout $x, y \in K \cap dom(L)$, $u_0(t) \leq y(t) \leq x(t) \leq v_0(t)$, $\forall t \in [0,1]$, la fonction f satisfait*

$$f(t,x(t))-f(t,y(t)) \geq -q\left(\int_0^1 (1-t)^{q-1}x(t)\,dt-\int_0^1 (1-t)^{q-1}y(t)\,dt\right).$$

Alors le problème (P) a une solution minimale u^* et une solution maximale v^* sur $[u_0, v_0]$.

Preuve. On prouve que toute les conditions du théorème 60 sont satisfaites. De la preuve du lemme 62, on sait que L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Compte tenu de la condition (H_1), on a $Lu_0 \leq Nu_0$ et $Lv_0 \geq Nv_0$, donc la condition (C_1) du théorème 60 est satisfaite. Pour $u \in K$, on a

$$(P+JQN+K_p(I-Q)N)u(t)=$$

$$\frac{1}{2}q(q+1)(q+2)t^2\int_0^1 (1-s)^{q-1}u(s)+\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\,ds.$$

Puisque $G(t,s)$ est continue et positive pour $t,s \in [0,1]$, on a

$$(P + JQN + K_p(I-Q)N)(K) \subset K.$$

En vertu des assertions d'équivalence (p.62), on conclu que

$$N + J^{-1}P : K \cap dom(L) \to K_1.$$

La condition (H_2) implique que $N + J^{-1}P : K \cap dom(L) \to K_1$ est un opérateur croissant. En effet pour $x, y \in K \cap dom(L)$, $y(t) \leq x(t)$, $\forall t \in [0,1]$, on a

$$\left(N + J^{-1}P\right)x(t) - \left(N + J^{-1}P\right)y(t) =$$

$$f(t,x(t)) - f(t,y(t)) + q\left(\int_0^1 (1-t)^{q-1} x(t)\,dt - \int_0^1 (1-t)^{q-1} y(t)\,dt\right) \geq 0,$$

donc la condition (C_2) est satisfaite. Finalement on conclut par le théorème 60 que l'équation $Lu = Nu$ a une solution minimale u^* et une solution maximale v^* dans $[u_0, v_0]$, où $u^* = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, et $v^* = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, uniformément par rapport a t, les suites u_n et v_n sont définies par

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(L + J^{-1}P\right)^{-1}\left(N + J^{-1}P\right)u_{n-1} \\
&= \left(JQ + K_p(I-Q)\right)\left(N + J^{-1}P\right)u_{n-1} \\
&= \left(JQ + K_p(I-Q)\right)\left(f(s,u_{n-1}(s)) + q\int_0^1 (1-s)^{q-1} u_{n-1}(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,u_{n-1}(s))\,ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+q(q+1)(q+2)t^2\frac{\Gamma(q)}{4\Gamma(2q)}\int_0^1(1-s)^{q-1}f(s,u_{n-1}(s))\,ds\\
&-\frac{t^q}{\Gamma(q)}\int_0^1(1-s)^{q-1}f(s,u_{n-1}(s))\,ds\\
&-q(q+1)(q+2)\frac{t^2\Gamma(q)}{2\Gamma(2q)}\int_0^1(1-s)^{2q-1}f(s,u_{n-1}(s))\,ds\\
&+\frac{1}{2}q(q+1)(q+2)t^2\int_0^1(1-s)^{q-1}u_{n-1}(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

de même on a l'expression de v_n, de plus, on a

$$
u_0\le u_1\le u_2\le ...\le u_n\le ...\le v_n\le ...\le v_2\le v_1\le v_0.
$$

■

Exemple 66 *Soit le problème aux limite fractionnaire suivant*

$$
\begin{cases}
{}^cD_{0^+}^{\frac{5}{2}}u(t)=t^2+\frac{u}{u+1}, & 0<t<1,\\
u(0)=u'(0)=0, \quad u''(0)=2u(1).
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

On peut choisir

$$
u_0(t)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\int_0^t(t-s)^{\frac{3}{2}}s^2ds\le\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\int_0^t(t-s)^{\frac{3}{2}}(s+1)^2ds=v_0(t),
$$

alors

$$
\begin{aligned}
{}^cD_{0^+}^{\frac{5}{2}}u_0(t) &= t^2\le(t+1)^2={}^cD_{0^+}^{\frac{5}{2}}v_0(t).\\
{}^cD_{0^+}^{\frac{5}{2}}u_0(t) &\le f(t,u_0(t)),{}^cD_{0^+}^{\frac{5}{2}}v_0(t)\ge f(t,v_0(t)),\forall t\in[0,1].
\end{aligned}
$$

Pour $x,y\in K\cap dom(L)$, on a

$$
\left(t^2+\frac{x}{x+1}\right)-\left(t^2+\frac{y}{y+1}\right)\ge-\frac{5}{2}\left(\int_0^1(1-t)^{q-1}x(t)\,dt-\int_0^1(1-t)^{q-1}y(t)\,dt\right),
$$

où $u_0(t) \leq y(t) \leq x(t) \leq v_0(t)$, $\forall t \in [0,1]$. *Du théorèm 65, on conclut que le problème aux limites (5.1) a une solution minimale* u^* *et une solution maximale* v^* *dans* $[u_0, v_0]$.

Conclusion

Dans ce travail, on a étudié la positivité des solutions de quelques problèmes aux limites fractionnaires. En utilisant le théorème de Guo-Krasnoselskii, on a montré, l'existence d'au moins une solution positive, ensuite, en appliquant le théorème d'Avery-Peterson, on a prouvé l'existence d'au moins trois solutions positives d'un problème aux limites fractionnaire dont la partie non linéaire est un produit de deux fonctions continues.

Grâce a la théorie de coincidence de Mawhin, on a montré l'existence de la solution dans C^2 d'un problème aux limites fractionnaire en résonance.

Finalement, par application de la méthode de sous et sur solutions et le théorème de l'opérateur croissant, on a établi l'existence de la solution maximale et de la solution minimale d'un problème aux limites fractionnaire en résonance.

Les résultats de cette thèse ont fait l'objet des publications [20,21,22]

Ces résultats peuvent être généralisés aux équations différentielles fractionnaires avec d'autre type de dérivée comme la dérivée de Riemann au lieu de la dérivée de Caputo et avec un ordre plus élevé et d'autres types de conditions aux limites.

Publications Internationales :

- A. Guezane-Lakoud, S . Kouachi and F. Ellaggoune : Positive solutions for a fractional boundary value problem. Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A 1 Volume 63, Number 2, Pages 177-187 (2014) ISSN 1303-5991

- A. Guezane-Lakoud, S . Kouachi and F. Ellaggoune : Two point fractional boundary value problem at resonance. J. Appl. Math. & Informatics Vol. 33(2015), No. 3 - 4, pp. 425 - 434 http ://dx.doi.org/10.14317/jami.2015.425

- Samia Kouachi, Assia Guezane-Lakoud and Fateh Ellaggounne : Existence and localization of positive solution for fractional boundary value problem at resonance. Advances in Difference Equations, 316 (2015).

Communications Internationales :

1) Journées internationales Algéro-Turque de mathématiques. Septembre 12-14, 2013, Istanbul.

2) International Conference on advences in Applied Mathematics. December, 22-25, 2014, Hammamet, Tunisia.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan : Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press, 141, 2001.

[2] R. P. Agarwal, D. O'Regan and P. J. Y. Wong : Positive Solutions of differential difference and integral equations, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[3] B. Ahmed, J. J. Nieto and J. Pimentel : Some boundary value problems of fractional differential equations and inclusions, Computers Mathematics with Applications , Vol. 62 no. 3, 1238–1250, 2011.

[4] R. Almeida, N. Martins, Existence results for fractional q-difference equations of order $\alpha \in]2,3[$ with three-point boundary conditions, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 19 (2014), 1675–1685. 1

[5] R. I. Avery and A. C. Peterson : Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Computers Mathematics with Applications , vol. 42, no. 35, pp. 313-322, 2001.

[6] Z. Bai : On positive solutions of nonlocal fractional boundary value problem, Nonlinear Analysis, vol. 72, no. 2, pp. 916-924, 2010.

[7] C. Bai, J. Fang : Existence of positive solution for boundary value problems at resonance. J. Math. Anal. Appl. 291.

[8] Z. Bai and H. Lu : Positive solutions for boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 311, no. 2, pp. 495-505, 2005.

[9] B. Bonilla, M. Rivero, L. Rodriguez-Germa, and J. J. Trujillo : Fractional differential equations as alternative models to nonlinear differential equations, Applied Mathematics and Computation, vol. 187, no. 1, pp. 79-88, 2007.

[10] D.W. Boyd and J.S.W. Wong : On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 20(1969) 458-464

[11] Y. Chen, X. Tang : Positive solutions of fractional differential equations at resonance on the half-line. Boundary Value Problems 2012 2012 :64.

[12] CT. Cremins : A fixed-point index and existence theorems for semilinear equations in cones. Nonlinear Anal. 42, 789-806 (2001).

[13] C. De Coster and P. Habets : Two-Point Boundary value problems, Lower and upper Solutions. Mathematics in Science and Engineering, Volume 205. Series Editor : C.K. CHUI.

[14] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, Germany, 1985.

[15] M. El-Shahed : Positive solutions for boundary value problem of nonlinear frac-

tional differential equation, Absract and Applied Analysis, vol. 2007, Article ID 10368, 8 pages, 2007.

[16] H. Feng, W. Ge : Existence of three positive solutions for m-point boundary-value problems with one-dimensional p-Laplacian. Nonlinear Anal. TMA 68, 2017-2026 (2008)

[17] A. Friou : Problème aux limites non locaux associés aux équations ordinaires. Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar-Annaba 2014.

[18] R.E. Gaines, J.L. Mawhin : Coincidence Degree and Nonlinear Differential equation, Berlin , 1977.

[19] R. Gorenflo, F. Mainardi, M. Raberto, E. Scalas :Fractional diffusion in finance, Basic theory, InModelli dinamici in economia e nanza. Urbino :MDF, 2000.

[20] A. Guezane-Lakoud, S. Kouachi and F. Ellaggoune : Positive solutions for a fractional boundary value problem. Commun. Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1, 63 (2014), N°.2,177-187.

[21] A. Guezane-Lakoud, S. Kouachi and F. Ellaggoune : Two point fractional boundary value problem at resonance. J. Appl. Math. & Informatics vol. 33(2015), No. 3-4, pp. 425-434.

[22] Samia Kouachi, Assia Guezane-Lakoud and Fateh Ellaggounne : Existence and localization of positive solution for fractional boundary value problem at resonance. Advances in Difference Equations, 316 (2015).

[23] A. Guezane-Lakoud and R. Khaldi : Solvability of two-point fractional boundary value problem, The Journal of Nonlinear Science and Applications, vol. 5, 64-73, 2012.

[24] A. Guezane-Lakoud and R. Khaldi : Positive solution to a higher order fractional boundary value problem with fractional integral condition, Romanian Journal of Mathematics and Computer Sciences, vol. 2, pp. 28-40, 2012.

[25] A. Guezane-Lakoud and A. Frioui, "Third Order Boundary Value Prolem with Integral Condition at Resonance", Theory and Applications of Mathematics & Computer Sciences, 3 (1) (2013) 56-64.

[26] D. Guo, V. Lakshmikantham : Nonlinear problems in abstract cones. Academic Press, San Diego. 1988.

[27] X. Han : Positive solutions for a three-point boundary value problem at resonance. J. Math. Anal. Appl. 36, 556-568 (2007).

[28] G. Infante, M. Zima : Positive solutions of multi-point boundary value problems at resonance. Nonlinear Anal. 69, 2458-2465 (2008).

[29] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo : Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[30] A. A. Kilbas and S.A. Marzan : Nonlinear Equations with the Caputo Fractional Derivative in the space of Continuously Differentiable Functions. Differential

Equations 41 (2005), N°. 1, 84-89, Translated from Differentsialnye Uravneniya 41(2005), N°. 1, 82-86.

[31] N. Kosmatov : Multi-point boundary value problems on an unbounded domain at resonance. Nonlinear Anal. 68, 2158-2171 (2008).

[32] N. Kosmatov : Symmetric solutions of a multi-point boundary value problem. J. Math. Anal. Appl. 309, 25-36 (2005)

[33] N. Kosmatov, "A boundary value problem of fractional order at resonance", Electron. J. Differ. Equ. 135 (2010) 1-10.

[34] M.A. Krasnoselskii : Positive solutions of operator equations, Noordhoff, Groningen 1964.

[35] V. Lakshmikantham, A. S. Vatsala : Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Analysis, vol. 69, no. 8, pp. 2677-2682, 2008.

[36] H. Lian, H. Pang, W. Ge : Triple positive solutions for boundary value problems on infinite intervals. Nonlinear Anal. TMA 67, 2199-2207 (2007)

[37] SQ. Liang, L. Mu : Multiplicity of positive solutions for singular three-point boundary value problem at resonance. Nonlinear Anal. 71, 2497-2505 (2009).

[38] J. Mawhin : Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems, CBMS Reg. Conf. in Math., No 40, American Math. Soc., Providence, RI, 1979

[39] K. S. Miller, B. Ross : An introduction to the fractional calculus and differential equations, John Wiley, New York, 1993.

[40] D. O'Regan, Y. Je Cho and Y.Q. Chen : Topological Degree Theory and Applications, Series in Mathematical Analysis and Applications, vol. 10, Chapman & Hall/CRC, (2006).

[41] H. Pang, H. Lian, W. Ge : Multiple positive solutions for second-order four-point boundary value problem. Comput. Math. Appl. 54, 1267-1275 (2007)

[42] G. Peano : Sull integrabilita dell equazioni differenziali di primo ordine, Atti Acad. Torino 21 (1885), 677-685.

[43] O. Perron : Ein neuer Existenzbeweis fur die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Math. Ann. 76 (1915), 471-484.

[44] O. Perron : Eine neuer Behandlung des ersten Randwerproblems fur $\Delta u = 0$. Math. Z. 18 (1923), 42-54.

[45] I. Podlubny / Fractional Differential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.

[46] H. Qu, X. Liu : Existence of nonnegative solutions for a fractional m-point boundary value problem at resonance. Boundary Value Problems 2013 2013 :127.

[47] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. Fractional integrals and derivatives : theory and applications. Gordon and Breach (1993).

[48] X. Shu, Y. Xu : Triple positive solutions for a class of boundary value problem of second-order functional differential equations. Nonlinear Anal. TMA 61, 1401-1411 (2005)

[49] D.R. Smart : Fixed point theory, Cambridge Uni. Press, Cambridge 1974.

[50] F. Wang, YJ. Cui, F. Zhang : Existence of nonnegative solutions for second order m-point boundary value problems at resonance. Appl. Math. Comput. 217, 4849-4855 (2011).

[51] J. R. L. Webb and G. Infante : Positive solutions of nonlocal boundary value problems involving integral conditions. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, April 2008, Volume 15, Issue 1-2, pp 45-67.

[52] J. R. L. Webb, G. Infante and D. Franco : Positive solutions of nonlinear fourth-order boundary-value problems with local and non-local boundary conditions. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics, Vol. 138, no. 2, pp 427-446, 2008.

[53] A. Yakar, M.E. Koksal, Existence results for solutions of nonlinear fractional differential equations source. Abstract. Appl. Anal. (2012). doi. 10.1155/2012/267108.

[54] L. Yang, X. Liu, M. Jia : Multiplicity results for second-order m-point boundary value problem. J. Math. Anal. Appl. 324, 532-542 (2006).

[55] A. Yang and H. Wang : Positive solutions of two-point boundary value problems of nonlinear fractional differential equation at resonance. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. no. 71. pp. 1-15 (2011).

[56] L. Yang, C. Shen, D. Xie : Multiple positive solutions for nonlinear boundary

value problem of fractional order differential equation with the Riemann-Liouville derivative. Advances in Difference Equations 2014, 2014 :284

[57] E. Zeidler : Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.

[58] S. Zhang, X. Su ; The existence of a solution for a frational differential equation with nonlinear boundary conditions considered using upper and lower solutions in reversed order, Compu. Math. Appl. 62 (2011) 1269-1274.

[59] HE. Zhang, J-P. Sun : Positive solutions of third-order nonlocal boundary value problems at resonance. Boundary Value Problems 2012 2012 :102.

[60] H. Zhigang. L. Wenbin. C. Taiyong, "Two-point Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations at resonance", Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 36 (3) (2013), 747-755.