

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar
Annaba

Badji Mokhtar University - Annaba



جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences

Année 2016

Département de Mathématiques

Laboratoire LaPS



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat 3^{ème} cycle en Mathématiques

**Résolution numérique de l'équation des milieux
poreux modifiée et limite hydrodynamique**

Option :

Probabilités et Statistique

par

KHOCHEMANE Housseem Eddine

DIRECTEUR DE THÈSE : BOUTABIA Hacène PROF., U.B.M.A

Devant le jury

PRÉSIDENTE : NOURI Fatma Zohra PROF. , U.B.M.A

EXAMINATEUR : HAIOUR Mohamed PROF., U.B.M.A

EXAMINATEUR: MOUSSAOUI Mohand PROF., E.N.S. KOUBA Alger

EXAMINATRICE : DJELLAB Natalia PROF., U.B.M.A

INVITE : SPITERI Pierre PROF., ENSEEIHT Toulouse

Résumé

Le but de ce travail est d'établir l'existence et l'unicité de la solution de l'équation des milieux poreux modifiée, soumise à certaines contraintes, pour les conditions aux limites de Dirichlet et de Dirichlet-Neumann et de la résoudre par différentes méthodes numériques.

Après un changement de variable approprié, on considère un schéma de discrétisation temporel implicite qui conduit à résoudre à chaque pas de temps une suite de problèmes stationnaires non linéaires. Chaque problème stationnaire est équivalent à un problème de minimisation avec contraintes, qui admet une unique solution.

Pour chaque problème stationnaire, on utilise une discrétisation spatiale par la méthode des différences finies. La discrétisation complète du problème stationnaire conduit à chaque pas de temps à la résolution d'un grand système algébrique non linéaire multivoque. Pour cela, on utilise deux méthodes parallèles asynchrones de sous-domaines sans recouvrement et avec recouvrement (méthode alternée de Schwarz). On établit la convergence des deux méthodes, via des techniques de contraction.

Finallement, on présente des résultats numériques en utilisant MATLAB pour les expériences séquentielles et C pour les expériences parallèles.

Abstract

The purpose of this work is to establish the existence and uniqueness of the solution of the modified porous medium equation of, subject to certain constraints, for the boundary conditions of Dirichlet and Dirichlet-Neumann and resolve it by different numerical methods.

After a suitable change of variables, we consider an implicit time discretization scheme that leads to solve each time a sequence of nonlinear stationary problems. Each stationary problem is equivalent to a minimization problem with constraints, which has a unique solution.

Each stationary problem, use a spatial discretization by the finite difference method. The complete discretization of stationary problem leads to each time to solve a multivalued large nonlinear algebraic system. For this, we use two parallel asynchronous methods subdomain without overlapping and with overlapping. We established the convergence of two ways, via contraction techniques.

Finally, we present numerical results using MATLAB for sequential experiences and C for parallel experiments.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو اثبات وجود ووحدة حل معادلة الأوساط المسامية المعدلة الخاضعة لبعض القيود من أجل الشروط الحدية لديريشلي و ديريشلي نيومان نيومان وحلها بطرق عديدة مختلفة.

بعد استعمال تبديل المتغير المناسب، نعتبر مخطط تفريد الوقت الضمني الذي يؤدي كل مرة إلى حل سلسلة من المشاكل الثابتة الغير خطية. كل مشكلة ثابتة تكافئ مشكلة تقليل خاضعة لقيود تقبل حل وحيد.

لكل مشكلة تفريد، نستخدم تفريد مكاني من خلال طريقة الفروق المحدودة. التفريد الكامل لكل مشكلة ثابتة يؤدي في كل مرة إلى حل نظام جبري كبير غير خطي متعدد القيم. لهذا نستخدم طريقتين غير متزامنتين موازية لتفكيك المجالات بدون تغطية وبتغطية (طريقة شوارتز المتناوبة) (بالتناوب). نثبت تقارب الطريقتين باستخدام تقنية التقليل.

أخيرا نقدم نتائج التجارب العددية باستخدام ماتلاب في الحالة التسلسلية وسي في الحالة الموازية.

Remerciements

Je remercie infiniment mon directeur de thèse professeur BOUTABIA Hacène, il restera toujours un mentor pour moi. Merci de m'avoir fait découvrir un très beau sujet et de m'y avoir guidé avec beaucoup de tact.

Je remercie également la présidente de jury professeur NOURI Fatma Zohra et les membres de jury professeurs: HAIOUR Mohamed, MOUSSAOUI Mohand, DJELLAB Natalia, d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Un grand remerciement au professeur Pierre SPITERI pour sa grande participation dans ce travail, sa grande patience et sa disponibilité de m'avoir fait profiter de ses nombreuses compétences.

Enfin un très grand merci à Ming CHAU pour ses efforts dans les expériences numériques séquentielles et parallèles qui ont été fait dans ce travail.

Table des matières

1	Les systèmes de particules	7
1.1	Les différents types de systèmes de particules	8
1.1.1	Modèles à l'équilibre	9
1.1.2	Modèles à longue portée	13
1.1.3	Modèles hors équilibres	16
1.2	Limite hydrodynamique	18
1.2.1	Motivation originale de la limite hydrodynamique	18
1.2.2	Les méthodes mathématiques utilisées pour établir la li- mite hydrodynamique	19
1.2.3	Le modèle mathématique étudié	21
2	Résolution numérique de l'équation des milieux poreux modifiée	24
2.1	Présentation du problème avec les conditions aux limites de Di- richlet	24
2.2	Existence et unicité de la solution des problèmes stationnaires .	27
2.3	Formulation multivoque du problème d'optimisation avec contraintes	37
2.3.1	Généralités et définitions	37
2.3.2	Application au problème avec contraintes	39
2.4	Conditions aux limites mixte de Dirichlet-Neumann	43
3	Solution parallèle du problème	46

3.1	Discrétisation	46
3.2	Algorithme parallèle asynchrone classique	47
3.3	Théorème de convergence	50
3.4	Rappels sur la notion d'accrétivité	53
3.5	Méthodes parallèles asynchrones de sous domaines sans recouvrement	55
3.6	Méthodes parallèles asynchrones de sous domaines avec recouvrement	61
4	Expériences numériques	66
4.1	Expériences séquentielles	67
4.2	Expériences parallèles	69
4.2.1	Résultats sur HPC@LR	70
4.2.2	Résultat sur la GRID'5000	73

Introduction

La motivation original du domaine des systèmes de particules en interaction est venue de la mécanique statistique, s'est largement développé par F. Spitzer aux Etats-Unis en 1970 en tant que branche de la théorie des probabilités, l'objectif est d'identifier les équations régissant l'évolution spatiale et temporelle des systèmes de particules en interaction dont les mesures d'équilibre sont les mesures de Gibbs. Les systèmes de particules sont des modèles stochastiques qui décrivent l'évolution de particules en nombre fini ou infini en interaction sur un réseau, en général le choix canonique étant le réseau d -dimensionnel \mathbb{Z}^d , dont les points sont appelés sites tel que sur chaque site de ce réseau, agit un processus de Markov en temps continu, à espace d'états finis ou infini dénombrable c'est-à-dire au cours de l'évolution du système et à des instants aléatoires. Les particules se déplacent sur le réseau selon une loi de probabilité dépendant de la configuration des particules à cet instant. Ces modèles ont été introduits dans les années 70 [70, 71, 18, 19], d'une part pour des motivations probabilistes, et d'autre part suivant une approche physique notamment en mécanique statistique, comportement aléatoire microscopique de molécules. Depuis, les systèmes de particules ont fait l'objet de nombreux travaux et ont donné lieu à une littérature abondante. Leurs domaines d'application sont très nombreux : physique théorique, analyse d'images, biologie, sondages, etc....

Plusieurs ouvrages rassemblent les principaux aspects probabilistes de ces modèles ; citons par exemple [50, 9, 21, 51], où sont étudiés l'existence de ces processus de Markov en volume infini avec différentes constructions, ainsi que l'existence de leurs mesures invariantes, l'ergodicité, etc....

La description de l'évolution d'un système de particules dans un volume (i.e. réseau) doit se faire à travers un ensemble de variables macroscopiques à partir d'une dynamique microscopique aléatoire. Au niveau microscopique, l'évolution des particules est modélisée sur le volume discrétisé par une dynamique aléatoire en système de particules, après changement d'échelle où renormalisation en espace et en temps, les quantités conservées

par cette dynamique microscopique donnent par passage à la limite dite hydrodynamique des équations aux dérivées partielles appelées équations hydrodynamiques, qui décrivent l'évolution spatiale et temporelle des variables macroscopiques.

D'un point de vue probabiliste, l'étude d'une limite hydrodynamique correspond à une loi des grands nombres pour les mesures empiriques de répartition des particules. La méthode de production d'entropie, introduite par Guo, Papanicolaou & Varadhan dans [34] en 1984 et la méthode d'entropie relative initiée en 1991 par Yau dans [76] pour le processus de Ginzburg-Landau, ont permis de prouver le comportement hydrodynamique d'une grande variété de modèles. Ces méthodes reposent sur l'étude de l'évolution temporelle de l'entropie et de la forme de Dirichlet de l'état du système par rapport à certaines mesures réversibles de référence. Celles-ci correspondent aux états proches de l'équilibre, ou aux mesures produit dont le paramètre est solution de l'équation hydrodynamique. La méthode d'entropie [34] a été étendue aux systèmes dont le générateur ne faisant pas intervenir le gradient. Ceci a permis à Varadhan [73] en 1994, puis Quastel [76] en 1992 de prouver que le courant de particules entre deux sites ne s'exprime pas comme le gradient d'une fonction locale. Les principales méthodes utilisées pour l'étude des comportements hydrodynamiques des systèmes de particules à l'équilibre sont largement détaillées dans les ouvrages [36, 16, 43, 62]. Par la suite les méthodes utilisées par Guo M.Z., G. Papanicolaou G., Varadhan S.R.S. [34], Varadhan S.R.S [74] ont été adaptées aux modèles hors équilibre (voir [26, 27, 44, 45, 28, 59]).

Dans [61], Sasada utilise la méthode de l'entropie relative pour établir la limite hydrodynamique, qui consiste à identifier les équations qui donnent une description à l'état macroscopique des systèmes de particules, dans le cas où les particules sont soumises à une vitesse dépendant d'un paramètre positif θ et d'un nombre de déplacements autorisés $m \geq 2$. Dans cette thèse, on étudie l'équation hydrodynamique présentée par Sasada dans [60] (voir exemple 3.1), qui est l'équation des milieux poreux modifiée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta \left(\left(\frac{u(t,x)}{u(t,x)+\theta} \right)^m \right) = 0 \quad , \quad t \in [0, T] \quad , \quad x \in \Omega = ([0, 1]^d \\ u(0, x) = u_0(x) = \phi(x) \end{array} \right. \quad (1)$$

L'objectif est d'étudier et de résoudre efficacement cette équation par différentes méthodes numériques. Pour cela, on présente des algorithmes parallèles synchrones, ou plus généralement des algorithmes parallèles itératifs de relaxation asynchrones de décomposition de domaines (voir [30, 56, 57, 53]). A l'origine, ces algorithmes ont été introduits en 1969 par D.CHZAN et W.MIRANKER [12] pour la résolution des systèmes linéaires. Par la suite, en 1974, J.C.MIELLOU [39] a généralisé ces algorithmes pour la résolution des systèmes algébriques non linéaires de grande taille.

Dans ce travail, on utilise deux méthodes pour résoudre le problème :

-la première est la méthode parallèle asynchrone de sous-domaines sans recouvrement (relaxation par blocs (voir [56], [53])).

-la deuxième est la méthode parallèle asynchrone de sous-domaines avec recouvrement (méthode alternée de Schwarz (voir [57])).

On établit la convergence des deux méthodes par des techniques de contraction.

La présente étude comporte 4 chapitres et est organisé comme suit :

Dans le chapitre 1, on passe en revue les notions de base sur les systèmes de particules en général et la limite hydrodynamique en particulier.

Dans le chapitre 2, après discrétisation implicite en temps du problème modèle, on établit, via des techniques d'optimisation, l'existence et l'unicité des solutions des problèmes stationnaires pour les conditions aux limites de Dirichlet et de Dirichlet-Neumann. La formulation du problème de minimisation n'est pas facile à utiliser pour la solution numérique du problème ; on transforme donc le problème de minimisation en un problème multivoque sans contraintes en utilisant la notion de sous différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble convexe fermé (voir [56, 57, 53]). Cette nouvelle formulation du problème est plus facile à utiliser pour l'analyse des algorithmes de relaxation séquentiels

et parallèles utilisés pour la résolution du problème, et nous permet donc d'analyser le comportement des méthodes numériques utilisées.

Dans le chapitre 3, on présente de manière unifiée les algorithmes parallèles synchrones et asynchrones séquentiels pour la résolution du problème modèle discrétisé et linéarisé et on montre que les schémas de discrétisation en espace appropriés considérés assurent la convergence de deux méthodes séquentielles et parallèles de sous-domaine synchrone ou asynchrone.

Le chapitre 4 a été consacré à la présentation des expériences séquentielles et parallèles, où on présente des essais numériques séquentielles qui ont été effectuées sur un ordinateur personnel, en utilisant le langage MATLAB dans le cas de 1D, 2D, 3D. On présente également des expériences parallèles qui ont été effectuées sur *le cluster HPC@LR* (High performance computing) qui est situé à Montpellier (France) ; ce *cluster* est composé de noeuds **SMP** bi-processeurs sur un réseau Infiniband 40 Gb/s. Chaque noeud possède 6 processeurs de type Intel Xeon Westmere partageant une mémoire de 24 Gbytes, ces essais sont également comparés à ceux effectués sur 'Grid'5000' la grille nationale de calcul (France). Dans ce cas, *le cluster* se compose des noeuds SMP bi-processeurs sur le réseau Gigabit Ethernet. Chaque noeud possède 4 processeurs de type Intel Xeon Nehalem, partageant une mémoire de 32 Gbytes. On termine cette thèse par la présentation d'une brève conclusion et de quelques perspectives.

Ce travail a permis par la production scientifique suivante :

– **publication internationale**

H.E.Khochemane, H.Boutabia, M.chau, P.Spiteri, *Parallel solution of the modified porous medium equation*, Computers and Mathematics with Applications 71 (2016) 931-948

– **Communication internationale**

H.E.Khochemane, H.Boutabia, M.chau, P.Spiteri, *Parallel solution of the hydrodynamic equation*, The 3rd Abu Dhabi University International Conference : Mathematical Sciences and It's Applications

Chapitre 1

Les systèmes de particules

Le modèle stochastique régissant l'évolution d'un système de particules sur un réseau S est un processus de Markov $(\xi_t)_{t \geq 0}$ d'espace d'états \mathbb{N}^S . La variable $t \in [0, +\infty[$ désigne le temps et à chaque instant t , l'application $\xi_t : s \rightarrow \mathbb{N}$ représente l'état du système à cet instant.

L'évolution d'un système de particules peut être décrite informellement de la manière suivante : on munit chaque site de S d'horloges exponentielles qui sont mutuellement indépendantes. Initialement les particules sont distribuées selon une loi de probabilité sur S , et à chaque fois qu'une horloge sonne en un site $\alpha \in S$, les particules présentent une dynamique, c'est à dire s'échangent, meurent, naissent, entrent en collision, selon des règles d'interactions qui caractérisent le modèle. Ces règles sont définies par des probabilités de transition et par des taux qui dépendent du nombre de particules et de leur répartition dans un voisinage du site α .

Formellement le processus de Markov $(\xi_t)_{t \geq 0}$ est décrit par son générateur infinitésimal \mathcal{L} , l'opérateur linéaire de domaine S :

$$\mathcal{L}f(\xi) = \sum_{\alpha \in S} \mathcal{L}_\alpha f(\xi), \tag{1.1}$$

où pour tout $\alpha \in S$, \mathcal{L}_α est la partie du générateur qui décrit les mouvements et

les transitions de particules, ou de spins, autour du site α . L'évolution temporelle du processus $(\xi_t)_{t \geq 0}$ est définie par le semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ associé à l'opérateur \mathcal{L} . Nous avons les deux relations suivantes, pour tout $f \in S$ et tout $\xi \in S$,

$$s(t)f(\xi) = E^{\delta_\xi}[f(\xi_t)], \quad \frac{d}{dt}T(t)f = T(t)\mathcal{L}f = \mathcal{L}T(t)f.$$

Ces dernières relations qui lient le générateur au semi-groupe sont les équations de Chapman-Kolmogorov.

La première question qui se pose naturellement est l'existence de tels processus : lorsque l'espace d'état S est fini, la construction est garantie par la théorie des processus de Markov à espaces d'états finis (voir par exemple [52, 9]). Dans le cas contraire l'existence d'une large classe de processus a été démontrée par différentes méthodes de construction [50, 9, 21, 51].

1.1 Les différents types de systèmes de particules

Nous distinguerons deux types de systèmes, à l'équilibre et hors équilibre. Les systèmes dits à l'équilibre sont les mieux compris et les plus largement étudiés ; ce sont généralement ; ceux sont des modèles évoluant sur un tore ou un volume infini, ou encore dans un domaine borné en contact avec des réservoirs dont la température est constante. Les mesures invariantes de tels systèmes sont généralement données par les mesures de Gibbs, obtenues à partir des conditions de "balance", qui traduisent la réversibilité du système. Les dynamiques des systèmes hors équilibre ne sont pas réversibles. La mesure stationnaire de tels processus est caractérisée par le flux de la masse de particules à travers le système.

Les systèmes de particules les plus fréquemment utilisés modélisent l'évolution d'un gaz sur un réseau. Dans cette partie, nous allons décrire les différents types de systèmes de particules

On se place en dimension $d \geq 1$, et on fixe un entier N assez grand. Pour tout

entier $k \geq 1$, on note \mathbb{T}_N^k le tore discret k -dimensionnel de taille N . Suivant les modèles à étudier, l'ensemble des sites S peut désigner le tore \mathbb{T}_N^d , le réseau \mathbb{Z}^d , ou encore le cylindre $F_N = \{-N + 1, \dots, N - 1\} \times \mathbb{T}_N^{d-1}$ de \mathbb{Z}^d de hauteur $2N - 1$ et de base \mathbb{T}_N^{d-1} . Dans ce dernier cas, on note $\Xi_N = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{T}_N^{d-1} \mid \alpha_1 = \bar{+}(N - 1) \right\}$ le bord de F_N .

1.1.1 Modèles à l'équilibre

Nous décrivons dans cette partie les processus de portée nulle (zero-range), d'exclusion, de Kawasaki et celui de Glauber. Les taux de saut de ces modèles satisfont des conditions de balance ; les mesures sont réversibles et données par la mesure de Gibbs.

Dans ce qui suit $p : S \times S \longrightarrow [0; 1]$ est une probabilité de transition à portée finie, invariante par translation et spatialement ergodique et on note

$$p(\alpha, \beta) = p(0, \beta - \alpha) =: p(\beta - \alpha), \forall (\alpha, \beta) \in S \times S \quad (1.2)$$

Processus de zero-range.

La dynamique de ce système est décrite par un processus de Markov $(\xi_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $X = \mathbb{N}^S$; pour chaque site $\alpha \in S$, ξ_t désigne le nombre de particules présentes au site α à l'instant t . On considère une fonction $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $g(0) = 0$ et $g(k) > 0$ pour tout $k \geq 1$, appelée taux ou fonction de saut. Le mouvement des particules pour le processus de zero-range suit le mécanisme suivant : si le système est dans l'état $\xi \in X$ le site α est occupé par $\xi(\alpha)$ particules. Une particule va quitter α avec le taux $g(\xi(\alpha))$ et elle est éjectée vers un site β avec probabilité $p(\alpha, \beta)$. Le générateur infinitésimal \mathcal{L} du processus de zero-range à taux $g(\cdot)$ et de probabilité de transition p s'écrit par :

$$\mathcal{L}f(\xi) = \sum_{\alpha \in S} \mathcal{L}_\alpha f(\xi) \quad (1.3)$$

où pour tout $\alpha \in S$

$$\mathcal{L}_\alpha f(\xi) = \sum_{y \in S} p(\alpha, \beta) g(\xi(\alpha)) [f(\xi^{\alpha, \beta}) - f(\xi)]$$

et pour $\alpha, \beta \in S$, $\xi^{\alpha, \beta}$ est la nouvelle configuration obtenue à partir de la configuration ξ après le saut d'une particule du site α au site β :

$$\xi^{\alpha, \beta} = \begin{cases} \xi(\gamma) & \text{if } \gamma \neq \alpha, \beta \\ \xi(\alpha) - 1 & \text{if } \gamma = \alpha \\ \xi(\beta) + 1 & \text{if } \gamma = \beta \end{cases} \quad (1.4)$$

L'existence du processus de zero-range en volume infini est démontrée par Andjel dans [1]. Les mesures invariantes sont données par une famille $(\nu_\varphi)_{0 \leq \varphi \leq \varphi^*}$ de mesures produits des marginales sur X

$$\nu_\varphi(\xi(\alpha) = k) = \frac{1}{Z(\varphi)} \cdot \frac{\varphi^k}{g(k)!} \quad \alpha \in S, k \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

où $g(0)! = 1$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g(k)! = g(1) \dots g(k)$. La fonction de renormalisation $Z : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est donnée par la série entière

$$Z(\varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^k}{g(k)!}$$

et φ^* est son rayon de convergence.

Modèles d'exclusion ou processus d'exclusion

L'espace d'états du processus de Markov $(\xi_t)_{t \geq 0}$ est $X = \{0, \dots, k\}^S$ où $k \in \mathbb{N}^*$ désigne le nombre maximum de particules par site. L'exclusion est décrite comme suit : lorsque le système est dans l'état $\xi \in X$, le taux $p(\alpha, \beta) \cdot r_{\alpha, \beta}(\xi)$ avec lequel un site $\alpha \in S$ qui contient au moins une particule éjecte une particule vers un site β , qui contient strictement moins de k particules, où la fonction $r_{\alpha, \beta}(\xi)$ dépend des occupations des sites α, β et de leurs

voisins. Lorsque $\xi(\alpha) = 0$ ou $\xi(\beta) = k$ le saut de α vers β est impossible. Le générateur infinitésimal du processus de Markov $(\xi_t)_{t \geq 0}$ est défini par :

$$\mathcal{L}f(\xi) = \sum_{\alpha \in S} \mathcal{L}_\alpha f(\xi)$$

où

$$\mathcal{L}_\alpha f(\xi) = \sum_{\beta \in S} p(\alpha, \beta) \cdot r_{\alpha, \beta}(\xi) \cdot \mathbf{1}_{\{\xi(\alpha) > 0, \xi(\beta) < k\}} \cdot [f(\xi^{\alpha, \beta}) - f(\xi)]$$

Nous nous intéresserons à trois types de modèles :

k-exclusion symétrique C'est le cas particulier où $r_{\alpha, \beta} = 1$ et la probabilité de transition p est symétrique et vérifie (1.2). Les mesures réversibles pour ces modèles sont les mesures produits des marginales sur S paramétrées par φ :

$$\nu_\varphi(\xi(\alpha) = k) = \frac{\varphi^k}{1 + \varphi + \dots + \varphi^k} \quad (1.6)$$

L'exclusion simple. C'est le cas où $k = 1$ et $r_{\alpha, \beta} = 1$, le taux de saut s'écrit par $p(\alpha, \beta) \cdot \xi(\alpha) \cdot (1 - \xi(\alpha))$. Le générateur est donné par :

$$\mathcal{L}f(\xi) = \sum_{\alpha \in S} \mathcal{L}_\alpha f(\xi) \quad (1.7)$$

où

$$\mathcal{L}_\alpha f(\xi) = \sum_{\beta \in S} p(\alpha, \beta) \cdot \xi(\alpha) \cdot (1 - \xi(\alpha)) \cdot [f(\xi^{\alpha, \beta}) - f(\xi)]$$

Remarquons qu'ici $\xi^{\alpha, \beta}$ peut être défini comme la configuration $T^{\alpha, \beta} \xi$ obtenue à partir de ξ après avoir échangé l'occupation du site α avec celle du site β :

$$(T^{\alpha,\beta}\xi)(z) = \begin{cases} \xi(\gamma) & \text{if } \gamma \neq \alpha, \beta \\ \xi(\alpha) & \text{if } \gamma = \beta \\ \xi(\beta) & \text{if } \gamma = \alpha \end{cases} . \quad (1.8)$$

Les mesures invariantes pour cette dynamique sont les mesures produits de Bernoulli définies comme suit :

$$v^\lambda(\xi(\alpha) = 1) = \frac{e^\lambda}{1 + e^\lambda} = 1 - v^\lambda(\xi(\alpha) = 0)$$

où λ désigne le potentiel chimique.

L'exclusion avec changement de vitesse Le taux de saut $r_{\alpha,\beta}$ ne dépend pas que de l'occupation des deux sites α et β , mais aussi de celle des sites voisins de α et β . On considère le cas de sauts à plus proche voisin et pour simplifier la description on se place sur le tore \mathbb{T}_N^d . On note (e_1, e_2, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{R}^d .

On considère ici le cas d'un système de particules gradient, c'est-à-dire que le courant de particules à travers deux sites voisins $x, x + e_i$ défini par

$$W_{\alpha,\alpha+e_i}(\xi) = r_{\alpha,\alpha+e_i}(\xi) - r_{\alpha+e_i,\alpha}(\xi) \quad 1 \leq i \leq d \quad (1.9)$$

s'écrit comme la différence d'une fonction locale et de sa translatée.

Le taux de saut est

$$r_{\alpha,\alpha+e_i}(\xi) = 1 + a \{ \xi(\alpha - e_i) + \xi(\alpha + 2e_i) \}, \text{ où } a > \frac{-1}{2}.$$

Le générateur infinitésimal du processus de Markov est donné par

$$\mathcal{L}f(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbf{T}_N^d} \mathcal{L}_\alpha f(\xi) \quad (1.10)$$

où

$$\mathcal{L}_\alpha f(\xi) = \sum_{i=1}^{i=d} r_{\alpha, \alpha+e_i}(\xi) \cdot [f(T^{\alpha, \alpha+e_i} \xi) - f(\xi)] \quad (1.11)$$

Dans ce cas les mesures produits qui correspond au ce cas sont données par les mesures produits de Bernoulli définies comme précédemment.

L'exclusion simple faiblement asymétrique Il s'agit d'une perturbation de l'exclusion simple symétrique. Etant donnée une fonction régulière $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, l'interaction locale entre les particules est déterminée par l'hamiltonien $H_{h,N}$ défini sur X par

$$H_{h,N}(\xi) = - \sum_{\alpha \in S} h\left(\frac{\alpha}{N}\right) \xi(\alpha).$$

Le processus d'exclusion faiblement asymétrique perturbé par l'hamiltonien $H_{h,N}$ et à plus proche voisin sur S est défini par son générateur infinitésimal $\mathcal{L} = \sum_{\alpha \in S} \mathcal{L}_\alpha$, où pour tout $\alpha \in S$,

$$\mathcal{L}_\alpha f(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma \in S \\ |\gamma|=1}} e^{-\frac{1}{2}(H_{h,N}(T^{\alpha, \alpha+\gamma} \xi) - H_{h,N}(\xi))} \cdot [f(T^{\alpha, \alpha+\gamma} \xi) - f(\xi)]$$

Le cas particulier étudié dans l'article [8] (voir section 3), correspond à une fonction linéaire $h(u) = Eu + \lambda$ pour deux réels fixés E et λ . L'asymétrie faible est de l'ordre E/N , le générateur infinitésimal \mathcal{L} s'écrit comme suit

$$\mathcal{L}_\alpha f(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in S} \sum_{\substack{\gamma \in S \\ |\gamma|=1}} e^{-E/(2N)(\xi(\alpha+\gamma) - \xi(\alpha))} \cdot [f(T^{\alpha, \alpha+\gamma} \xi) - f(\xi)]. \quad (1.12)$$

1.1.2 Modèles à longue portée

Il s'agit de modèles des spins perturbés par le potentiel d'interaction de Kac. Fixons un entier N assez grand. Un potentiel de Kac est une fonction $J_N(\cdot)$ définie sur \mathbb{R}^d telle

que

$$J_N(u) = N^{-d}J(u/N), \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}^d, \quad (1.13)$$

où $J \in C^2(\mathbb{R}^d)$ est une fonction symétrique, positive, à support compact dans la boule unité et normalisée, c'est-à-dire $\int_{\mathbb{R}^d} J(u)du = 1$.

Le potentiel d'interaction de Kac a été introduit dans [38] et généralisé dans [48] afin de fournir une analyse rigoureuse de la théorie de transition de phase de Van der Waals. Depuis, la littérature sur le sujet est devenue importante. Citons seulement quelques résultats sur l'évolution macroscopique des dynamiques conservatives [31, 32, 33, 54] ou non-conservatives [11, 14, 54, 5].

Nous considérons dans cette section les modèles avec potentiel de Kac sur le tore ou sur \mathbb{Z}^d . Une autre version du potentiel de Kac pour des modèles qui évoluent sur un domaine borné avec réservoirs est définie dans la sous-section 3 (cf.[34, 60]).

Modèle d'exclusion avec désordre soumis au potentiel d'interaction de Kac

On se place sur le tore $S = T_N^d$. On reprend le modèle d'exclusion avec désordre décrit dans la sous section (3). Etant donné une réalisation $\vartheta \in E_a$ du champ magnétique et un paramètre $\varsigma > 0$ qui désigne l'inverse de la température $T = 1/\varsigma$, on définit l'hamiltonien $H_N^{\vartheta, \varsigma}$ sur X par la somme de deux hamiltoniens :

$$H_N^{\vartheta, \varsigma}(\xi) = \varsigma H_N(\xi) + H^\vartheta(\xi), \quad (1.14)$$

où H^ϑ représente l'interaction locale définie par (1.13) et H_N est l'interaction de longue portée de Kac donnée par

$$H_N(\xi) = -\frac{1}{2} \sum_{(\alpha, \beta) \in S \times S} J_N(\alpha - \beta) \xi(\alpha) \xi(\beta).$$

Notons $\nu_N^{\vartheta, \varsigma, \lambda}$ les mesures de Gibbs sur X associées à l'hamiltonien $H_N^{\vartheta, \varsigma}$ de potentiel

chimique $\lambda \in \mathbb{R}$ et à température $T = \varsigma^{-1}$:

$$v_N^{\vartheta, \varsigma, \lambda}(\xi) = \frac{1}{Z_N^{\vartheta, \varsigma, \lambda}} \exp\{-H_N^{\vartheta, \varsigma}(\xi) + \lambda \sum_{\alpha \in S} \xi(\alpha)\} \quad \xi \in X, \quad (1.15)$$

où $Z_N^{\vartheta, \varsigma, \lambda}$ est le facteur de normalisation.

La dynamique d'exclusion de Kawasaki avec désordre à l'inverse de température $\varsigma > 0$ est le processus de Markov sur X défini par son générateur $\mathcal{L}^{N, \varsigma, \vartheta}$, agissant sur les fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{L}^{N, \varsigma, \vartheta} f(\xi) = \sum_{\alpha \in S} \mathcal{L}_\alpha^{N, \varsigma, \vartheta} f(\xi), \quad (1.16)$$

où

$$\mathcal{L}_\alpha^{N, \varsigma, \vartheta} f(\xi) = \sum_{\substack{\gamma \in S \\ |\gamma|=1}} C_N^{\vartheta, \varsigma}(\alpha, \alpha + \gamma, \xi) [f(T^{\alpha, \alpha + \gamma} \xi) - f(\xi)] \quad (1.17)$$

et les taux $C_N^{\vartheta, \varsigma}(\alpha, \alpha + \gamma, \xi)$ sont définis par

$$C_N^{\vartheta, \varsigma}(\alpha, \alpha + \gamma, \xi) = \Upsilon\{H_N^{\vartheta, \varsigma}(T^{\alpha, \alpha + \gamma} \xi) - H_N^{\vartheta, \varsigma}(\xi)\},$$

où $\Upsilon \in C^2(\mathbb{R}, (0, \infty))$ est définie comme dans (1.15). Les mesures $v_N^{\vartheta, \varsigma, \lambda}$ sont réversibles pour le générateur $\mathcal{L}_N^{\vartheta, \varsigma}$.

Un modèle non conservatif avec désordre

Il s'agit d'un modèle de spin-flip, où les valeurs possibles des spins sont $+1$ et -1 , appelé modèle de Glauber avec champ extérieur aléatoire.

On se place en dimension $d \geq 1$, sur $S = T_N^d$. On définit un espace d'environnements (E, \mathcal{B}, P) , avec une probabilité P qu'on suppose stationnaire.

On notera encore $\vartheta = (\vartheta(\alpha))_{\alpha \in S} \in E$ une configuration typique de E .

On se donne un réel $\varsigma > 0$ et une réalisation du champ magnétique $\vartheta \in E$. Le modèle de Glauber avec potentiel de Kac et avec champ extérieur aléatoire, à température $1/\varsigma$,

est un processus de Markov sur l'espace d'états $X = \{-1, 1\}^{T_N^d}$ défini par son générateur infinitesimal

$$L_N^{\vartheta, \varsigma} f(\sigma) = \sum_{\alpha \in T_N^d} L_{N, \alpha}^{\vartheta, \varsigma} f(\sigma) = \sum_{\alpha \in T_N^d} c_N^{\vartheta, \varsigma}(\alpha, \sigma) [f(\sigma^\alpha) - f(\sigma)], \quad (1.18)$$

où pour $\sigma \in X, \alpha \in T_N^d$,

$$c_N^{\vartheta, \varsigma}(\alpha, \sigma) = \frac{\exp[-(1/2)(H_N^{\vartheta, \varsigma}(\sigma^\alpha) - H_N^{\vartheta, \varsigma}(\sigma))]}{2 \cosh[(1/2)(H_N^{\vartheta, \varsigma}(\sigma^\alpha) - H_N^{\vartheta, \varsigma}(\sigma))]},$$

σ^α est définie par

$$(\sigma^\alpha)(z) = \begin{cases} -\sigma(\alpha) & \text{si } \gamma = \alpha, \\ \sigma(\gamma) & \text{si } \gamma \neq \alpha, \end{cases} \quad (1.19)$$

et l'hamiltonien $H_N^{\vartheta, \varsigma}$ est défini par la formule (1.20). On considère la mesure de Gibbs associée à l'hamiltonien $H_N^{\vartheta, \varsigma}$ définie dans (1.21) avec $\lambda = 0$:

$$v_N^{\vartheta, \varsigma}(\sigma) = \frac{1}{Z_N^{\vartheta, \varsigma}} \exp\{-H_N^{\vartheta, \varsigma}(\sigma)\} \quad \sigma \in X, \quad (1.20)$$

où $Z_N^{\vartheta, \varsigma}$ est le facteur de normalisation. On vérifie que $v_N^{\vartheta, \varsigma}$ satisfait à la condition (1.15) et par conséquent l'opérateur $L_N^{\vartheta, \varsigma}$ est autoadjoint dans $L^2(v_N^{\vartheta, \varsigma})$.

1.1.3 Modèles hors équilibres

Modèle avec réservoirs.

Il s'agit ici des processus qui évoluent sur un domaine borné avec des réservoirs de particules au bord. On se place sur un cylindre et on note Ξ_N le bord de F_N . Nous considérons la superposition de deux dynamiques, de générateur qui s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_b \quad (1.21)$$

La première dynamique décrit l'évolution des particules à l'intérieur du domaine F_N , généralement par un des modèles décrits dans le paragraphe (1.1.1). La seconde dynamique modélise l'action des réservoirs au bord, elle consiste à imposer une densité égale à une fonction $b(\cdot)$ définie au voisinage du bord Ξ_N , et son générateur est noté \mathbb{E}_b . C'est une dynamique de naissance et de mort de particules, construite de telle façon que sa mesure invariante soit de densité imposée égale à $b(\cdot)$.

Processus de saut, de naissance et de mort

D'autres modèles microscopiques dont on ne connaît pas explicitement les mesures invariantes et qui ont un grand intérêt sont les processus de saut, de naissance et de mort. Ils sont également décrits sur l'espace des sites S par la superposition de deux dynamiques, les générateurs sont de type (1.30). Contrairement aux modèles précédents, les deux parties \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_p agissent sur la totalité de l'espace S .

On se place sur le tore discrétisé \mathbf{T}_N^d , l'espace d'état est $X = \mathbb{N}^{\mathbf{T}_N^d}$. Les particules évoluent selon des marches aléatoires symétriques indépendantes, et sujettes à naissances et morts : nous fixons $p \in \mathbb{N}$, en chaque site α , l particules ($l \leq p$) peuvent être créées avec un taux de naissance $b_l(\xi(\alpha))$ ou une particule peut mourir avec un taux de probabilité $d(\xi(\alpha))$, où $(b_l(\cdot))_{1 \leq l \leq p}$ et $d(\cdot)$ sont des fonctions définies sur \mathbb{N} vérifiant $b_l(0) = d(0) = 0$ et $\xi(\alpha)$ désigne le nombre de particules présentes au site α . Pour obtenir une équation hydrodynamique, qui tienne compte des sauts de particules nous accélérons les sauts de particules par N^2 . Le générateur du système de particules s'écrit sous la forme

$$(\mathcal{L}^N f)(\xi) = N^2(\mathcal{L}_0^N f)(\xi) + \mathcal{L}_p^N f(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbf{T}_N^d} \{N^2(\mathcal{L}_{0,\alpha}^N f)(\xi) + (\mathcal{L}_{p,\alpha}^N f)(\xi)\} \quad (1.22)$$

où pour tout $\alpha \in \mathbf{T}_N^d$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{0,\alpha}^N f)(\xi) &= \sum_{\substack{\gamma \in \mathbf{T}_N^d \\ |\gamma|=1}} \xi(\alpha) \cdot [f(\xi^{\alpha, \alpha+\gamma}) - f(\xi)], \\ (\mathcal{L}_{p,\alpha}^N f)(\xi) &= \sum_{l=1}^p b_l(\xi(\alpha)) \cdot [f(\xi^{\alpha, +l}) - f(\xi)] + d(\xi(\alpha)) \cdot [f(\xi^{\alpha, -}) - f(\xi)], \end{aligned} \tag{1.23}$$

pour tous $\xi \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbf{T}_N^d$

$$\xi^{\alpha, +l} = \begin{cases} \xi(\alpha) + l & \text{si } \gamma = \alpha \\ \xi(\gamma) & \text{si } \gamma \neq \alpha \end{cases}$$

$$\xi^{\alpha, -} = \begin{cases} \xi(\alpha) - 1 & \text{si } \gamma = \alpha \\ \xi(\gamma) & \text{si } \gamma \neq \alpha \end{cases}$$

1.2 Limite hydrodynamique

1.2.1 Motivation originale de la limite hydrodynamique

L'objectif physique de l'étude de la limite hydrodynamique est la dérivation des équations régissant l'évolution des systèmes de particules qui ne sont pas invariantes par changement d'échelle. Toutefois, différentes interprétations ont permis de développer des techniques permettant d'obtenir ces équations [20, 23, 24, 25, 46, 4, 3, 47, 2].

Le passage à la limite hydrodynamique consiste à décrire le comportement macroscopique d'un gaz ou d'un fluide évoluant dans un volume V à partir d'une dynamique microscopique aléatoire [43]. Au niveau macroscopique, le système est caractérisé par la variable $\rho = (\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^k)$. L'évolution de cette variable est régie par des équations aux dérivées partielles, à chaque instant $t \geq 0$ donné ρ est décrite par le semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ tel que $\rho_t = (\rho_t^1, \rho_t^2, \dots, \rho_t^k) = T(t)\rho_0$ représente l'état du système à l'instant t et $\rho_0 = (\rho_0^1, \rho_0^2, \dots, \rho_0^k)$ est la condition initiale.

Après un changement d'échelle en espace et en temps dont les paramètres N^{-1} et $a_N t$ respectivement, on obtient l'état macroscopique du système à partir d'une dynamique microscopique donnée.

La dynamique microscopique est alors donnée par un processus de Markov $(\xi_t)_{t \geq 0}$ de générateur $a_N \mathcal{L}_N$ et de semi-groupe $\{T_N(t), t \geq 0\}$. On distingue deux types de modèles : les modèles hyperboliques dont les paramètres de renormalisations $(\alpha, t) \longrightarrow (\alpha/N, Nt)$, et les modèles dits paraboliques, ou diffusifs qui sont obtenus par le changement d'échelle $(\alpha, t) \longrightarrow (\alpha/N, N^2 t)$.

D'un point de vue probabiliste, la limite hydrodynamique se traduit par une convergence en loi d'une suite de mesures empiriques qui caractérise le système à l'état microscopique vers une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, cette dernière caractérise le système à l'état macroscopique.

1.2.2 Les méthodes mathématiques utilisées pour établir la limite hydrodynamique

On distingue deux grandes familles de méthodes pour établir la limite hydrodynamique : La première méthode, dite de production d'entropie, a été introduite par Guo, Papanicolaou & Varadhan [34] pour les modèles gradient (le courant microscopique entre deux sites voisins α et β , s'exprime comme la différence d'une fonction microscopique locale et de sa translatée), elle repose sur l'étude de l'évolution temporelle de l'entropie et de la forme de Dirichlet de l'état du système par rapport à certaines mesures de référence qui correspondent à des états proches de l'équilibre. Cette méthode a été généralisée aux systèmes non gradient par Varadhan dans [73] et Quastel dans [68] (un modèle dit non gradient si le courant n'étant pas la différence d'une fonction et de sa translatée). La seconde méthode, dite d'entropie relative a été introduite par Yau [76]. Elle consiste à étudier l'évolution temporelle de l'entropie par rapport à des mesures produit dont le paramètre est solution de l'équation hydrodynamique.

Ces méthodes ont été adaptées aux modèles hors équilibre avec réservoirs pour éta-

blir les comportement hydrodynamiques, voir par exemple [13, 26, 27, 44, 6, 45, 3] et les références qui s'y trouvent.

Pour tout entier $k \geq 1$, notons T_N^d le tore discret k -dimensionnel de taille N . Considérons un processus de Markov $(\xi_t)_{t \geq 0}$ qui décrit l'évolution d'un système de particules (cf. Section 2) en volume fini ($S = T_N^d$ ou $S = \{-N + 1, \dots, N - 1\} \times T_N^{d-1}$). Soient ν, ν deux mesures de probabilité sur l'espace d'états X telles que μ soit absolument continue par rapport à ν ; l'entropie de μ par rapport à ν est définie par

$$H[\mu/\nu] = H[f] = \int_X f(\xi) \log(f(\xi)) d\nu(\xi). \quad (1.24)$$

C'est une fonction semi-continue supérieurement, positive, nulle seulement si $f \equiv 1$ et elle coïncide avec la forme variationnelle

$$H[\nu/\nu] = \sup_{U \in C_b(X)} \left[\int U(\xi) d\nu(\xi) - \log \int \exp(U(\xi)) d\nu(\xi) \right], \quad (1.25)$$

où $C_b(X)$ est l'ensemble des fonctions continues bornées sur X .

De la forme (1.34) de l'entropie découlent deux inégalités importantes dites *inégalités entropiques* : pour toute fonction continue bornée U et pour tout $k > 0$

$$\int U(\xi) d\nu(\xi) \leq \frac{1}{k} \log \int \exp(kU(\xi)) d\nu(\xi) + \frac{1}{k} H[\nu/\nu]; \quad (1.26)$$

pour un ensemble mesurable A ,

$$\nu(A) \leq \left[\frac{\log 2 + H[\nu/\nu]}{\log[1 + \frac{1}{\nu(A)}]} \right] \quad (1.27)$$

De même, si $(\varkappa_t)_{t \geq 0}$ et $(\xi_t)_{t \geq 0}$ sont deux processus de Markov sur l'espace d'état X , de lois respectives P_N et \tilde{P}_N , telles que P_N soit absolument continue par rapport à \tilde{P}_N ,

l'entropie de P_N par rapport à \tilde{P}_N est donnée par

$$H[P_N/\tilde{P}_N] = \int_X \frac{dP_N}{d\tilde{P}_N} \log\left(\frac{dP_N}{d\tilde{P}_N}\right) d\tilde{P}_N,$$

où $\frac{dP_N}{d\tilde{P}_N}$ est la dérivée de Radon-Nikodym de P_N par rapport à \tilde{P}_N .

1.2.3 Le modèle mathématique étudié

Dans cette thèse, on considère l'équation hydrodynamique appelée l'équation des milieux poreux modifiée (*EMPM*); dans notre étude, cette dernière est une équation aux dérivées partielles de type parabolique, décrivent l'évolution spatiale et temporelle d'un système de particules évoluant selon un processus de Markov à temps continu $\xi(t)_{t \geq 0}$ d'espace d'état $\mathcal{X}_n^d = \mathbb{N}^{T_N^d}$, où $T_N^d = \{0, \dots, N-1\}^d$ est le tore discret d -dimensionnel (voir[6]). Soit $\xi(\alpha)$ représente la configuration dans \mathcal{X}_n^d telle que $\xi(\alpha) = k$ s'il y a k particules au site α . Le processus est défini à travers la fonction $g(k) = \frac{k}{\theta+k-1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui s'anulle en 0, comme décrite dans [61], exemple 3.1, comme suit : durant l'évolution du système, les mouvements de particules entre les sites des plus proches voisins α et β se produisent avec un taux égal à $\frac{c(\alpha, \beta, \xi)}{\theta + \xi(\beta) - 1}$, où $c(\alpha, \beta, \xi)$ représente le taux d'échange. On note qu'une particule se trouvant au site α saute au site β avec le taux $\frac{k \cdot c(\alpha, \beta, \xi)}{\theta + k - 1}$ s'il y a k particules au site α .

La dynamique des particules à lieu suivant un générateur infinitesimal opérant sur les fonctions cylindriques $f : \mathcal{X}_n^d \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$(\mathcal{L}_N f)(\xi) = \sum_{\alpha, \beta \in T_N^d, |\alpha - \beta| = 1} \frac{\xi(\alpha) \cdot c(\alpha, \beta, \xi)}{\theta + \xi(\alpha) - 1} [f(\xi^{\alpha, \beta}) - f(\xi)], \quad (1.28)$$

où $\theta > 0$ et $|\alpha - \beta| = \sum_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i - \beta_i|$ la norme somme définie sur \mathbb{R}^d et

$$\xi^{\alpha, \beta}(\gamma) = \begin{cases} \xi(\gamma) & \text{si } \gamma \neq \alpha, \beta \\ \xi(\alpha) - 1 & \text{si } \gamma = \alpha \\ \xi(\beta) + 1 & \text{si } \gamma = \beta \end{cases} \quad (1.29)$$

Pour n'importe quel couple (α, β) plus proche voisin, on fixe le taux d'échange $c(\alpha, \beta, \xi)$ égale à zéro si ξ ne satisfait pas une contrainte locale. Pour chaque $m > 1$ on peut choisir $c(\alpha, \beta, \xi)$ de telle sorte que $c(\alpha, \beta, \xi) = c(\beta, \alpha, \xi)$ pour dériver l'équation des milieux poreux modifiée, avec le paramètre m correspondant. Par exemple si $m = 2$, Sasada [61] et Gonçalves [9] considèrent le taux

$$c(\alpha, \alpha + e_j, \xi) = \frac{\xi(\alpha - e_j)}{\theta + \xi(\alpha - e_j) - 1} + \frac{\xi(\alpha + 2e_j)}{\theta + \xi(\alpha + 2e_j) - 1},$$

On considère l'équation *EMPM* avec les conditions initiales et aux limites *C.L* sur le bord de $\Omega = [0, 1]^d$, donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta \left(\left(\frac{u(t, x)}{u(t, x) + \theta} \right)^m \right) = 0 & , \quad t \in [0, T] \quad , \quad x \in \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) = \phi(\cdot) \\ C.L \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.30)$$

où ϕ est la condition initiale, supposée de classe $C^{2+\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, et telle que $\delta_0 \leq \phi(x) \leq \delta_1$, où δ_0, δ_1 sont deux constantes positives, T étant le temps final. Dans toute la suite, on prendra $\delta_0 = 0$.

D'après le théorème A2.4.1 de [10], l'équation (1.30) admet une solution de classe $C^{1+\varepsilon, 2+\varepsilon}([0, T] \times \Omega)$ et satisfait la contrainte suivante :

$$0 = \delta_0 \leq \inf_{t, x} u(t, x) \leq \sup_{t, x} u(t, x) \leq \delta_1.$$

Soit $(\nu_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ une famille de mesures produits des marginales, invariantes sur \mathcal{X}_n^d définies

nies par

$$\nu_\alpha = \{\xi, \xi(\alpha) = k\} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\theta}\right)^k}{\left(\frac{\theta}{\alpha+\theta}\right)^{-\theta} \cdot g(k)!}, \text{ où } g(k)! = \prod_{i=1}^k g(i),$$

et soit

$$\nu_{\phi(\cdot)}^N \{\xi : \xi(\alpha) = k\} = \nu_{\phi(\frac{\alpha}{N})} \{\xi : \xi(\alpha) = k\}.$$

La relation entre la solution de l'équation (1.39) et la limite hydrodynamique, qui a été prouvée par Sasada [60], est la conservation de l'équilibre local suivante : soit $(\nu^N)_N$ une suite de mesures de probabilités sur \mathcal{X}_n^d telle que $\mathcal{H}(\nu^N / \nu_{\phi(\cdot)}^N) = o(N^d)$ et soit μ_t^N la mesure définie par $\nu_t^N = \nu^N S_t^N$, où S_t^N est le semi groupe associé au générateur \mathcal{L} accéléré par N^2 . Pour toute fonction continue $H : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, pour toute fonction cylindrique bornée ψ et pour tout $t \in [0, T]$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E^{\nu_t^N} \left(\left| \frac{1}{N^d} \sum_{\alpha \in \Omega} H\left(\frac{\alpha}{N}\right) \tau_\alpha \psi(\xi) - \int_{\Omega} H(x) E^{\nu_{u(t,x)}^N}(\psi) dx \right| \right) = 0,$$

où τ_α est l'opérateur de translation défini par :

$$\tau_\alpha f(\xi) = f(\tau_\alpha \xi), \quad \tau_\alpha \xi(\gamma) = \xi(\alpha + \gamma), \quad \gamma \in \Omega,$$

et E^ν représente l'espérance sous la mesure ν .

Chapitre 2

Résolution numérique de l'équation des milieux poreux modifiée

2.1 Présentation du problème avec les conditions aux limites de Dirichlet

Dans cette partie, on considère le problème (1.39) avec les conditions aux limites de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta \left(\left(\frac{u(t,x)}{u(t,x)+\theta} \right)^m \right) = 0 & , \quad t \in [0, T] \quad , \quad x \in [0, 1]^d \\ u(0, x) = u_0(x) = \phi(x) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Comme le problème (2.1) n'est pas linéaire, on considère alors le changement de variable suivant :

$$v(t, x) = \left(\frac{u(t, x)}{u(t, x) + \theta} \right)^m.$$

Le problème (2.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta \cdot v(t,x)^{\frac{1}{m}}}{1-v(t,x)^{\frac{1}{m}}} \right) - \Delta v(t,x) = 0, \quad t \in [0, T] \quad , \quad x \in \Omega \\ v(0, x) = \left(\frac{\phi(x)}{\phi(x)+\theta} \right)^m \\ v(t, x) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega . \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Puisque $0 = \delta_0 \leq u(t, x) \leq \delta_1$, alors l'application $u \longrightarrow \frac{u}{u+\theta}$ est une fonction croissante et bornée par deux valeurs distinctes $\bar{d}_0 = 0$ et $\bar{d}_1 = \frac{\delta_1}{\delta_1+\theta}$. De plus, $u = \frac{\theta \cdot v^{\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}}$ est bien définie; en effet l'application $v \longrightarrow \frac{\theta \cdot v^{\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}}$ est croissante, et $0 = \bar{d}_0 \leq v^{\frac{1}{m}} \leq \bar{d}_1 < 1$. Par conséquent $1 - v^{\frac{1}{m}} > 0$ et l'application v est soumise aux contraintes suivantes

$$0 = d_0 = \bar{d}_0^m \leq v \leq d_1 = \bar{d}_1^m . \quad (2.3)$$

On utilise un schéma implicite pour la discrétisation temporelle, on est donc ramené à résoudre à chaque pas de temps le problème stationnaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^{(q+1)}(v^{(q+1)}(x)) - \delta_t \cdot \Delta v^{(q+1)}(x) = \phi^{(q)}(v^{(q)}(x)) = \bar{\phi}, \quad \text{dans } \Omega \\ v^{(q+1)}(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad q \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où $v^{(q+1)}(x) \approx v((q+1)\delta_t, x)$ satisfaisant la contrainte (2.3). $\bar{\phi}$ est définie grace au résultat obtenu à chaque pas de temps précédent, et l'application $v^{(q)} \longrightarrow \phi^{(q)}(v^{(q)})$ est donnée par

$$\phi^{(q)}(v^{(q)}(x)) = \frac{\theta \cdot (v^{(q)}(x))^{\frac{1}{m}}}{1 - (v^{(q)}(x))^{\frac{1}{m}}} \text{ pour tout } q,$$

$$\text{où } \phi^{(0)}(v^{(0)}(x)) = \frac{\theta \cdot v(0,x)^{\frac{1}{m}}}{1-v(0,x)^{\frac{1}{m}}}.$$

En liaison avec le problème stationnaire (2.4), on considère la fonctionnelle suivante :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) + j(v) \quad (2.5)$$

où

$$a(v, v) = \delta_t \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \cdot dx,$$

$$L(v) = \langle \bar{\phi}, v \rangle = \int_{\Omega} \bar{\phi} v dx$$

et

$$j(v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{(1 + \frac{k}{m})} v^{(1 + \frac{k}{m})},$$

où \langle , \rangle est le produit scalaire de $L^2(\Omega)$. Puisque $0 < v < 1$, le rapport de deux termes successifs de la série précédente est égale à $\frac{1 + \frac{k-1}{m}}{1 + \frac{k}{m}} v^{\frac{1}{m}}$ et est inférieur à 1, d'où la convergence de la série. On considère l'ensemble

$$\mathcal{K} = \{v \mid v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \text{ tel que } 0 = d_0 \leq v(x) \leq d_1 \text{ sur } \Omega\},$$

où $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev classique d'ordre 1 défini par

$$\mathcal{H}_0^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n, v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Rappelons que $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|v\|_{1,\Omega} = (\int_{\Omega} (\|\nabla v\|^2 + v^2) dx)^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Hilbert. Evidemment, \mathcal{K} est un ensemble convexe et grâce à l'utilisation du théorème de trace, on peut voir par une méthode simple, que la limite de toute suite convergente de \mathcal{K} appartient à \mathcal{K} ; il résulte alors que \mathcal{K} est un ensemble convexe fermé. On considère maintenant le problème d'optimisation avec contraintes suivant

$$\begin{cases} \text{Trouvé } v \in \mathcal{K} \text{ tel que} \\ J(v) \leq J(w), \forall w \in \mathcal{K} \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2 Existence et unicité de la solution des problèmes stationnaires

Dans ce paragraphe on se propose de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.6).

Lemme 1

Si $0 \leq v \leq 1$, alors l'application $v \longrightarrow j(v)$ est différentiable et sa dérivée est égale à

$$j'(v) = \theta v^{\frac{1}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} = \frac{\theta v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}.$$

Preuve

En effet, on a

$$\begin{aligned} j'(v) &= \theta(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \dots + v^{\frac{k}{m}} + \dots) = \theta(v^{\frac{1}{m}}(1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \dots + v^{\frac{k}{m}} + \dots)) \\ &= \theta v^{\frac{1}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}}. \end{aligned}$$

De plus, puisque $0 < v < 1$, alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - v^{\frac{N+1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right) = \frac{1}{1 - v^{\frac{1}{m}}},$$

d'où le résultat. ■

Lemme 2

L'application $v \longrightarrow j(v)$ est convexe et sa dérivée est croissante.

Preuve

On a

$$j''(v) = \frac{\theta}{mv} \frac{v^{\frac{1}{m}}}{(1 - v^{\frac{1}{m}})^2};$$

et comme $0 < v < 1$, alors $j''(v) \geq 0$, et l'application $v \rightarrow j(v)$ est convexe. De plus, puisque $j''(v) \geq 0$, alors l'application $v \rightarrow j'(v)$ est croissante. ■

Définition 1

Soient X et Y deux espaces vectoriels réels normés, f une application définie sur un ouvert $O \subset X$, à valeurs dans Y et soit $a \in O$. On suppose qu'il existe un opérateur linéaire et continu $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ et une application ε de X dans Y , tels que

$$f(a + d) = f(a) + Ld + \|d\| \varepsilon(d), \quad \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \varepsilon(d) = 0.$$

L'opérateur L est appelé la différentielle de Fréchet de f au point a , et f est dite Fréchet-différentiable (ou différentiable au sens de Fréchet) au point a .

Remarque1

Si l'application f est F-différentiable en a , alors l'opérateur L intervenant dans la définition précédente est unique. Par conséquent, l'application ε est également unique.

Remarque2

Si l'application f est F-différentiable en a , alors elle est continue en ce point.

Lemme 3

Soit la fonctionnelle $g(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$. Alors l'application $v \rightarrow g(v)$ est uniformément convexe au sens que

$$\begin{aligned} \tau g(v) + (1 - \tau)g(w) - g(\tau v + (1 - \tau)w) &\geq c(\Omega) \frac{\tau(1 - \tau)}{2} \|v - w\|_{1, \Omega}^2 \\ \forall \tau &\in]0, 1[, \forall v, w \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

où $c(\Omega)$ est une constante positive. De plus, l'application g est Fréchet-différentiable et sa dérivée au sens de Fréchet est

$$\langle g'(v), w \rangle = a(v, w) - L(w),$$

et on a

$$\langle g''(v).w, w \rangle = a(w, w).$$

Preuve

En effet,

$$\begin{aligned}
& \tau g(v) + (1 - \tau)g(w) + g(\tau v + (1 - \tau)w) \\
= & \tau \left[\frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \right] + (1 - \tau) \left[\frac{1}{2}a(w, w) - L(w) \right] \\
& - \frac{1}{2}a(\tau v + (1 - \tau)w, \tau v + (1 - \tau)w) + L(\tau v + (1 - \tau)w) \\
= & \frac{\tau}{2}a(v, v) - \tau L(v) + \frac{1 - \tau}{2}a(w, w) - (1 - \tau)L(w) - \frac{1}{2}a(\tau v, \tau v) \\
& - \frac{1}{2}a((1 - \tau)w, (1 - \tau)w) - a(\tau v, (1 - \tau)w) + L(\tau v) + L((1 - \tau)w) \\
= & \frac{\tau}{2}a(v, v) - \tau L(v) + \frac{1 - \tau}{2}a(w, w) - (1 - \tau)L(w) - \frac{\tau^2}{2}a(v, v) \\
& - \frac{(1 - \tau)^2}{2}a(w, w) - \tau(1 - \tau)a(v, w) + \tau L(v) + (1 - \tau)L(w) \\
= & \frac{\tau(1 - \tau)}{2}a(v, v) - \tau L(v) + \frac{\tau(1 - \tau)}{2}a(w, w) - (1 - \tau)L(w) \\
& - \tau(1 - \tau)a(v, w) + \tau L(v) + (1 - \tau)L(w) \\
= & \frac{\tau(1 - \tau)}{2}a(v, v) + \frac{\tau(1 - \tau)}{2}a(w, w) - \tau(1 - \tau)a(v, w) \\
= & \frac{\tau(1 - \tau)}{2} [a(v, v) + a(w, w)] - \tau(1 - \tau)a(v, w).
\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
a(v, v) + a(w, w) &= \delta_t \int_{\Omega} (\nabla v \nabla v + \nabla w \nabla w) dx \\
&= \delta_t \int_{\Omega} [\nabla(v - w) \nabla(v - w) + 2\nabla v \nabla w] dx \\
&= \delta_t \int_{\Omega} \nabla(v - w) \nabla(v - w) dx + 2\delta_t \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx \\
&= a(v - w, v - w) + 2a(v, w)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \tau g(v) + (1 - \tau)g(w) + g(\tau v + (1 - \tau)w) \\
= & \frac{\tau(1 - \tau)}{2} [a(v - w, v - w) + 2a(v, w)] - \tau(1 - \tau)a(v, w) \\
= & \frac{\tau(1 - \tau)}{2} a(v - w, v - w) + \tau(1 - \tau)a(v, w) - \tau(1 - \tau)a(v, w) \\
= & \frac{\tau(1 - \tau)}{2} a(v - w, v - w).
\end{aligned}$$

On note classiquement par $\|v\|_{0,\Omega}^2$ la norme classique définie sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$, d'où

$$a(v - w, v - w) = \|v - w\|_{0,\Omega}^2 = \frac{1}{2} \|v - w\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|v - w\|_{0,\Omega}^2.$$

D'après l'inégalité de Poincaré-Friedrich, il existe une constante positive $C(\Omega)$ telle que

$$\|v - w\|_{0,\Omega}^2 \leq C(\Omega) \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega}^2, \forall v, w \in H_0^1(\Omega),$$

et puisque

$$\|v - w\|_{1,\Omega}^2 = \|v - w\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega}^2,$$

alors

$$a(v - w, v - w) \geq \frac{1}{2} \inf\left(1, \frac{1}{C(\Omega)}\right) (\|v - w\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla(v - w)\|_{0,\Omega}^2) = c(\Omega) \|v - w\|_{1,\Omega}^2.$$

L'application g étant Frechet différentiable, alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
g(v + w) &= g(v) + \langle g'(v), w \rangle + \|w\| \varepsilon(w), \quad \text{où } \varepsilon(w) \longrightarrow 0 \text{ quand } \|w\| \longrightarrow 0 \\
g(v + w) - g(v) &= \langle g'(v), w \rangle + \|w\| \varepsilon(w).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
g(v+w) - g(v) &= \frac{1}{2}a(v+w, v+w) - L(v+w) - \frac{1}{2}a(v, v) + L(v) \\
&= \frac{1}{2}[a(v+w, v+w) - a(v, v)] - L(v+w) + L(v) \\
&= \frac{1}{2}[\delta_t \int_{\Omega} (\nabla v + \nabla w)^2 dx - \delta_t \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx] - [\int_{\Omega} (\bar{\phi}v + \bar{\phi}w) dx - \int_{\Omega} \bar{\phi}v dx] \\
&= \frac{1}{2}[\delta_t \int_{\Omega} (\|\nabla w\|^2 + 2\nabla v \nabla w) dx] - \int_{\Omega} \bar{\phi}w dx \\
&= \frac{1}{2}\delta_t \int_{\Omega} \|\nabla w\|^2 dx + \delta_t \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx - \int_{\Omega} \bar{\phi}w dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$\langle g'(v), w \rangle + \|w\| \varepsilon(w) = \frac{1}{2}\delta_t \int_{\Omega} \|\nabla w\|^2 dx + \delta_t \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx - \int_{\Omega} \bar{\phi}w dx.$$

On obtient finalement que

$$\begin{aligned}
\langle g'(v), w \rangle &= \delta_t \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx - \int_{\Omega} \bar{\phi}w dx \\
&= a(v, w) - L(w).
\end{aligned}$$

Puisque g est deux fois Frechet différentiable, alors on peut écrire

$$g(v+w) = g(v) + \langle g'(v), w \rangle + \frac{1}{2}\langle g''(v)w, w \rangle + \|w\|^2 \varepsilon(w),$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[\delta_t \int_{\Omega} (\|\nabla w\|^2 + 2\nabla v \nabla w) dx] - \int_{\Omega} \bar{\phi} w dx - a(v, w) + L(w) \\ &= \frac{1}{2} \langle g''(v)w, w \rangle + \|w\|^2 \varepsilon(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \delta_t \int_{\Omega} \|\nabla w\|^2 dx + \delta_t \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx - \int_{\Omega} \bar{\phi} w dx - a(v, w) + L(w) \\ &= \frac{1}{2} \langle g''(v)w, w \rangle + \|w\|^2 \varepsilon(w), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}a(w, w) + a(v, w) - L(w) - a(v, w) + L(w) = \frac{1}{2} \langle g''(v)w, w \rangle + \|w\|^2 \varepsilon(w).$$

Il résulte alors que

$$a(w, w) = \langle g''(v)w, w \rangle. \blacksquare$$

Corollaire 1

La fonctionnelle $v \longrightarrow g(v) + j(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) + j(v)$ est uniformément convexe.

Preuve

Découle immédiatement des **lemmes 2** et **3**. \blacksquare

Lemme 4

La fonctionnelle $v \longrightarrow g(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ tend vers l'infini quand $\|v\|_{1,\Omega}$ tend vers l'infini.

Preuve

Comme

$$a(v, v) \geq c(\Omega) \|v\|_{1,\Omega}^2, \forall v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

et

$$|L(v)| \leq C \|v\|_{1,\Omega},$$

où C est une constante positive, alors

$$g(v) \geq \left(\frac{c(\Omega)}{2} \|v\|_{1,\Omega} - C\right) \|v\|_{1,\Omega},$$

d'où

$$\lim_{\|v\|_{1,\Omega} \rightarrow \infty} (g(v)) = \infty.$$

■

Lemme 5

La fonctionnelle J , définie par la formule (2.5), tend vers l'infini quand $\|v\|_{1,\Omega}$ tend vers l'infini et est bornée inférieurement sur $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$.

Preuve

Grace aux résultats des **lemmes 1 à 5**, on peut conclure que le problème d'optimisation avec contraintes (2.5) a une unique solution. On a

$$J(v) = g(v) + j(v) \geq \left(\frac{c(\Omega)}{2} \|v\|_{1,\Omega} - C\right) \|v\|_{1,\Omega} + j(v),$$

d'où le résultat. ■

Proposition 1

Le problème d'optimisation avec contraintes (2.6) admet une et une seule solution.

Remarque 4

En fait, on peut minimiser $J(v) = g(v) + j(v)$ sur l'ensemble convexe fermé \mathcal{K} . En effet ; l'application j étant différentiable, convexe et non négative, on peut écrire alors

$$J(w) - J(v) = a(v, w) - L(w) + L(v) - a(v, v) + j(w) - j(v) + \frac{1}{2}a(w - v, w - v).$$

Si $a(w - v, w - v) \geq 0$, alors on aura

$$a(v, w) - L(w) + L(v) - a(v, v) + j(w) - j(v) \geq 0, \forall w \in \mathcal{K},$$

qui s'écrit aussi

$$a(v, w - v) - L(w - v) + j(w) - j(v) \geq 0, \forall w \in \mathcal{K},$$

d'où

$$J(w) - J(v) \geq 0, \forall w \in \mathcal{K}.$$

Inversement, si v est un minimum, en posant $\omega = v + \tau(w - v)$, où $0 \leq \tau \leq 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} J(\omega) - J(v) &= \frac{1}{2}a(\omega, \omega) - L(\omega) + j(\omega) - \frac{1}{2}a(v, v) + L(v) - j(v) \\ &= \frac{1}{2}a(v + \tau(w - v), v + \tau(w - v)) - L(v + \tau(w - v)) + j(\omega) \\ &\quad - \frac{1}{2}a(v, v) + L(v) - j(v) \\ &= \frac{1}{2}a(v, v) + \frac{\tau}{2}a(v, w - v) + \frac{\tau}{2}a(v, w - v) + \frac{\tau^2}{2}a(w - v, w - v) \\ &\quad - L(v) - \tau L(w - v) + j(\omega) - j(v) - \frac{1}{2}a(v, v) + L(v) \\ &= \tau a(v, w - v) + \frac{\tau^2}{2}a(w - v, w - v) - \tau L(w - v) + j(\omega) - j(v) \\ &= \tau(a(v, w - v) - L(w - v) + \frac{\tau}{2}a(w - v, w - v)) + j(\omega) - j(v). \end{aligned}$$

Comme j est convexe, alors $j(\omega) = j((1 - \tau)v + \tau w) \leq (1 - \tau)j(v) + \tau j(w)$, et on a

$$0 \leq \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{J(\omega) - J(v)}{\tau} \right) \leq \lim_{\tau \rightarrow 0} \left((a(v, w - v) - L(w - v)) + \frac{\tau}{2}a(w - v, w - v) \right) + j(\omega) - j(v).$$

Il résulte alors que v est la solution du problème d'optimisation avec contraintes si et

seulement si

$$a(v, w - v) - L(w - v) + j(w) - j(v) \geq 0, \forall w \in \mathcal{K}. \quad (2.7)$$

Caractérisation du problème d'optimisation avec contraintes

En fait, la différentiabilité au sens de Frechet de la fonctionnelle J , nous permet de donner une caractérisation classique de la solution du problème d'optimisation (2.5) qui se formule comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouvé } v \in \mathcal{K} \text{ tel que} \\ \langle J'(v), w \rangle \geq 0, \forall w \in \mathcal{K} \\ \langle J'(v), v \rangle = 0. \end{array} \right.$$

Comme j est également Frechet-différentiable, alors on obtient

$$j(w) = j(v) + \langle j'(v), w \rangle = j(v) + \left\langle \frac{\theta v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}, w \right\rangle$$

et

$$\langle J'(v), w \rangle = \langle g'(v), w \rangle + \langle j'(v), w \rangle = a(v, w) - L(w) + \left\langle \frac{\theta v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}, w \right\rangle \geq 0,$$

d'où d'après la formule de Green

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \langle -\delta_t \Delta v - \bar{\phi}, v \rangle dx + \left\langle \frac{\theta v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}, v \right\rangle = 0, \forall v \in \mathcal{K} \\ \int_{\Omega} \langle -\delta_t \Delta v - \bar{\phi}, w \rangle dx + \left\langle \frac{\theta v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}, w \right\rangle \geq 0, \forall w \in \mathcal{K}. \end{array} \right.$$

Dans le cas d'optimisation sans contraintes, qui correspond au cas $\mathcal{K} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, la condition (2.7) est remplacée par

$$a(v, w - v) - L(w - v) + j(w) - j(v) = 0, \forall w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

En utilisant de nouveau la formule de Green, on obtient

$$\langle -\delta_t \Delta v - \bar{\phi}, w - v \rangle + j(w) - j(v) = 0, \forall w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega);$$

et de la différentiabilité de j , on obtient finalement

$$\langle -\delta_t \Delta v - \bar{\phi}, w \rangle + \langle j'(v), w \rangle = 0, \forall w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

La formulation précédente du problème est équivalente à la formulation du problème stationnaire (2.4) dans le cas sans contraintes. On note aussi que, pour tout $w \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, la dérivée au sens de Fréchet de la fonction J est donnée par

$$\begin{aligned} \langle J'(v), w \rangle &= a(v, w) - L(w) + \left\langle \frac{\theta v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}, w \right\rangle \\ &= \delta_t \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx - \int_{\Omega} \bar{\phi} w dx + \left\langle \frac{\theta v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}, w \right\rangle. \end{aligned}$$

On conclut par la formule de Green et le fait que $\oint_{\partial\Omega} \langle \frac{\partial v}{\partial n}, w \rangle ds = 0$ pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$, que

$$\langle J'(v), w \rangle = \int_{\Omega} \langle -\delta_t \Delta v - \bar{\phi}, w \rangle dx + \oint_{\partial\Omega} \langle \delta_t \frac{\partial v}{\partial n}, w \rangle ds + \left\langle \frac{\theta v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}, w \right\rangle,$$

d'où

$$\langle J'(v), w \rangle = \int_{\Omega} \langle -\delta_t \Delta v - \bar{\phi}, w \rangle dx + \left\langle \frac{\theta v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}, w \right\rangle,$$

et

$$J'(v) = \frac{\theta v^{\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} - \delta_t \Delta v - \bar{\phi}.$$

2.3 Formulation multivoque du problème d'optimisation avec contraintes

2.3.1 Généralités et définitions

Dans la suite, la notion du sous différentiel va jouer un grand rôle pour prendre en compte les contraintes sur v et la projection nécessaire sur l'ensemble convexe fermé \mathcal{K} .

Définition 2

Soit χ une fonction convexe sur l'espace $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ et soit $u \in \mathcal{H}$. On note par $\partial\chi(u)$ l'ensemble des $u' \in \mathcal{H}'$, tels que

$$\chi(v) \geq \chi(u) + \langle v - u, u' \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'}, \text{ pour chaque } v \in \mathcal{H}, \quad (2.8)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit de dualité entre \mathcal{H} et \mathcal{H}' . Les éléments u' sont appelés les sous gradients de χ en u , et $\partial\chi(u)$ est appelé le sous différentiel de χ en u .

Notons que $\partial\chi(u)$ est un ensemble convexe fermé.

Rappelons que le produit de dualité entre \mathcal{H} et \mathcal{H}' est une forme bilinéaire de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}'$ sur \mathbb{R} et que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire sur \mathcal{H} .

Reamarque 5

Soit χ une application convexe Frechet-différentiable en u . Alors $\partial\chi(u)$ contient un seul élément, appelé la différentielle au sens de Frechet de χ en u .

Dans la suite, on va utiliser une formulation multivoque du problème considéré, qui joue un grand rôle pour analyser la méthode pour déterminer la solution numérique dans l'étude du problème non linéaire avec contraintes.

Opérateurs monotones

On désigne par $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ l'ensemble des parties de \mathcal{H} . Soit $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ un opérateur multivoque. Le graphe de T sera noté

$$\mathcal{G}(T) = \{(v, v') \in \mathcal{H} \times \mathcal{P}(\mathcal{H}) : v' \in Tv\}$$

et les ensembles

$$Dom(T) = \{v \in \mathcal{H} : Tv \neq \emptyset\}$$

et

$$R(T) = \cup\{Tv : v \in Dom(T)\}$$

dénotent le domaine et l'image de T . Si pour tout $v \in \mathcal{H}$, l'ensemble Tv contient au plus un élément on dira que T est univoque.

Définition 3

Soit T un opérateur multivoque de \mathcal{H}

- *On dira que T est monotone si*

$$\forall (u, v) \in Dom(T), \quad \langle Tu - Tv, u - v \rangle \geq 0,$$

ou plus précisément

$$\forall u' \in Tu, \forall v' \in Tv, \quad \langle u' - v', u - v \rangle \geq 0.$$

- *On dira que T est strictement monotone si l'inégalité ci-dessus est stricte lorsque $u \neq v$*

Définition 4

On dira qu'un opérateur multivoque monotone $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est maximale si la propriété suivante est satisfaite

$$\left[\langle u' - T\xi, u - \xi \rangle \geq 0, \forall \xi \in Dom(T) \right], \text{ alors } u' \in Tu.$$

Notons que la monotonie de T implique l'unicité de la solution u du problème multivoque suivant

$$0 \in u + T(u),$$

la maximalité d'une multifonction monotone permet de montrer l'existence de la

solution de cette inclusion.

Lemme 6

Soit $u \in \mathcal{H}$. Alors $\chi(u) = \min_{v \in \mathcal{H}}(\chi(v))$ si et seulement si $0 \in \partial\chi(u)$. Dans ce cas, le sous différentiel $\partial\chi(u)$ est un opérateur monotone de \mathcal{H} dans \mathcal{H}' .

Preuve

En effet, soit $u \in \mathcal{H}$ tel que $\chi(u) \leq \chi(v)$, $\forall v \in \mathcal{H}$, ce qui implique $\chi(v) \geq \chi(u) + \langle v - u, 0 \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'}$, et donc $0 \in \partial\chi(u)$. Soient $w \in \mathcal{H}$ et $w' \in \partial\chi(w)$. Alors $\chi(v) \geq \chi(w) + \langle v - w, w' \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'}$, $\forall v \in \mathcal{H}$ et on a $\chi(v) \geq \chi(u) + \langle v - u, v' \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'}$ pour tout $v \in \mathcal{H}$ et pour tout $u' \in \partial\chi(u)$. En sommant la première inégalité avec $v = u$ et la seconde avec $v = w$, on obtient $\langle w - u, w' - u' \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'} \geq 0$. ■

La fonction indicatrice de l'ensemble convexe \mathcal{K} , définie ci-dessous, va jouer un rôle important dans la suite.

Définition 5

La fonction indicatrice $\psi_{\mathcal{K}}$ de \mathcal{K} , est définie par

$$\psi_{\mathcal{K}}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in \mathcal{K} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que $\psi_{\mathcal{K}}$ est convexe et que

$$\partial\psi_{\mathcal{K}}(v) = \left\{ v' \in \mathcal{H}' \mid \langle v - w, v' \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'} \geq 0, \text{ pour tout } w \in \mathcal{K} \right\}.$$

Ceci montre que $D(\partial\psi_{\mathcal{K}}) = D(\psi_{\mathcal{K}}) = \mathcal{K}$ et $\partial\psi_{\mathcal{K}}(v) = \{0\}$ pour tout $v \in \text{int}(\mathcal{K})$. De plus, si v appartient au bord de \mathcal{K} , alors $\partial\psi_{\mathcal{K}}(v)$ coïncide avec le cône normale de \mathcal{K} au point v .

2.3.2 Application au problème avec contraintes

Dans la présente sous-section, on va donner une formulation multivoque du problème modèle avec contraintes. Ensuite, on se concentrera principalement sur la formulation

variationnelle associée au problème d'optimisation avec contraintes (voir [8] pour des compléments). La formulation variationnelle du problème est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouvé } v \in \mathcal{K} \text{ tel que} \\ a(v, w - v) + j(w) - j(v) \geq L(w - v), \quad \forall w \in \mathcal{K} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où $a(., .)$ et $L(.)$ sont définis par

$$a(v, w) = \delta_t \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx, \quad L(w) = \langle \bar{\phi}, w \rangle = \int_{\Omega} \bar{\phi} w dx.$$

D'après le théorème de Stampacchia, l'inéquation variationnelle (2.9) a une unique solution. Puisque $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, alors \mathcal{H}' (l'espace dual de \mathcal{H}) est identifié à \mathcal{H} ; d'après le théorème de la représentation de Riesz. Il existe alors un unique élément noté par $\bar{A}v$, une application linéaire \bar{A} continue de $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, telle que

$$a(v, w) = \langle w, \bar{A}v \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'}, \quad \forall w \in \mathcal{H}.$$

De façon similaire, il existe un unique élément, $\bar{\phi}$ tel que

$$L(w) = \langle w, \bar{\phi} \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'}, \quad \forall w \in \mathcal{H}, \quad \bar{\phi} \in \mathcal{H}'$$

Il résulte alors que l'inéquation variationnelle stationnaire (2.9) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouvé } v \in \mathcal{K} \text{ tel que} \\ \left\langle w - v, \bar{A}v - \bar{\phi} \right\rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'} + j(w) - j(v) \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{K} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Comme j est Frechet-différentiable, alors l'inéquation variationnelle (2.10) peut s'écrire

comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouvé } v \in \mathcal{K} \text{ tel que} \\ \left\langle w - v, \bar{A}v + j'(v) - \bar{\phi} \right\rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'} \geq 0, \forall w \in \mathcal{K} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

La nouvelle formulation du problème (2.10) est équivalente au problème multivoque suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouvé } v \in \mathcal{K} \text{ tel que} \\ \bar{A}v + j'(v) - \bar{\phi} + \partial\psi_{\mathcal{K}}(v) \ni 0, \end{array} \right. \quad (2.12)$$

On note que dans (2.12), la projection sur l'ensemble convexe \mathcal{K} est formulée par la perturbation de l'opérateur continu $\bar{A}v + j'(v) - \bar{\phi}$, par un opérateur diagonal croissant multivoque. Ainsi, dans la suite, on utilisera cette formulation multivoque pour analyser le comportement des algorithmes séquentiels et parallèles synchrones et asynchrones de relaxation utilisés pour la résolution du problème.

Proposition 2

Le problème (2.11) est équivalent au problème (2.12)

Preuve :

En effet, la définition du sous différentiel de la fonction indicatrice implique

$$\partial\psi_{\mathcal{K}}(v) = \left\{ \omega' \in \mathcal{H}' \mid \psi_{\mathcal{K}}(w) - \psi_{\mathcal{K}}(v) \geq \left\langle w - v, \omega' \right\rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'}, \forall w \in \mathcal{K} \right\}.$$

On suppose que (2.10) est satisfaite et on va vérifier que l'inégalité suivante est vrai

$$\psi_{\mathcal{K}}(w) - \psi_{\mathcal{K}}(v) \geq \left\langle w - v, \bar{\phi} - \bar{A}v \right\rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'} + j(v) - j(w), \forall w \in \mathcal{K}. \quad (2.13)$$

Soit $w \in \mathcal{K}$, alors on a

$$\left\langle w - v, \bar{\phi} - \bar{A}v \right\rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}'} + j(v) - j(w) \leq 0,$$

l'inégalité est vraie dans ce cas.

Si $w \notin \mathcal{K}$, alors l'inégalité (2.12) est satisfaite puisque $\psi_{\mathcal{K}}(w) = +\infty$ et $\psi_{\mathcal{K}}(v) = 0$. Il résulte alors que (2.11) entraîne (2.12).

Inversement, on suppose que (2.12) est satisfaite. Soit $v \in \mathcal{H}$ tel que $\bar{\phi} - \bar{A}v \in \partial\psi_{\mathcal{K}}(v)$.

Soit $v \in \mathcal{K}$, dans ce cas (2.12) s'écrit comme suit :

$$\psi_{\mathcal{K}}(w) \geq \left\langle w - v, \bar{\phi} - \bar{A}v \right\rangle_{\kappa \times \kappa'} + j(v) - j(w), \forall w \in \mathcal{K},$$

qui s'écrit encore :

$$0 \geq \left\langle w - v, \bar{\phi} - \bar{A}v \right\rangle_{\kappa \times \kappa'} + j(v) - j(w), \forall w \in \mathcal{K},$$

laquelle est satisfaite, d'où (2.12).

Si $v \notin \mathcal{K}$. Or, dans ce cas $\psi_{\mathcal{K}}(v) = +\infty$, et on a

$$\psi_{\mathcal{K}}(w) - \infty \geq \left\langle w - v, \bar{\phi} - \bar{A}v \right\rangle_{\kappa \times \kappa'} + j(v) - j(w), \forall w \in \mathcal{K},$$

d'où

$$-\infty \geq \left\langle w - v, \bar{\phi} - \bar{A}v \right\rangle_{\kappa \times \kappa'} + j(v) - j(w), \forall w \in \mathcal{K},$$

ce qui est absurde. ■

Il résulte de ce qui a été dit précédemment que la solution numérique du problème conduit à résoudre le problème multivoque (2.12). Ainsi, dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, le problème s'écrit comme suit

$$\begin{cases} -\delta_t \cdot \Delta v(x) + j'(v) - \bar{\phi} + \partial\psi_{\mathcal{K}}(v) \ni 0 \\ v(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.14)$$

où $j'(v) = \phi(v)$. On résoud d'abord le problème sans contraintes suivant

$$\begin{cases} -\delta_t \Delta \bar{v}(x) + j'(\bar{v}) = \bar{\phi} \text{ sur } \Omega \\ \bar{v}(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases},$$

puis on projette \bar{v} sur l'ensemble convexe fermé \mathcal{K} .

2.4 Conditions aux limites mixte de Dirichlet-Neumann

Dans ce paragraphe, on considère le cas des conditions aux limites mixte de Dirichlet-Neumann, où $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta v(t,x)^{\frac{1}{m}}}{1-v(t,x)^{\frac{1}{m}}} \right) - \Delta v(t,x) = 0, & t \in [0, T] \quad , \quad x \in \Omega \\ v(0, x) = \left(\frac{\phi(x)}{\phi(x)+\theta} \right)^m \\ v(t, x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \end{cases}. \quad (2.15)$$

En utilisant les mêmes notations, on peut aussi considérer un schéma de discrétisation implicite par rapport au temps, analogue à celui considéré dans la section 2.1, ce qui revient à résoudre à chaque pas de temps le problème stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \phi^{(q+1)}(v^{(q+1)}(x)) - \delta_t \Delta v^{(q+1)}(x) = \phi^{(q)}(v^{(q)}(x)) \equiv \bar{\phi}, \text{ dans } \Omega \\ v^{(q+1)}(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad q \geq 0 \\ \frac{\partial v^{(q+1)}(x)}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \quad q \geq 0 \end{cases}, \quad (2.16)$$

où v est encore une fois soumise à des contraintes définies par (2.3). La fonctionnelle J est définie de manière analogue qu'à la section 2.1. Soit $V \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$ défini par

$$V = \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid \text{tel que } v|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

Classiquement V muni de la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ est un espace de Hilbert. On note aussi

que, par équivalence, l'espace V peut être aussi muni de la norme

$$|v|_{1,\Omega}^2 = \delta_t \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx.$$

qui, classiquement, est une norme équivalente à la norme $\|v\|_{1,\Omega}$ de $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

On considère maintenant le problème analogue d'optimisation avec contraintes (2.6) sur \mathcal{K} , défini par :

$$\mathcal{K} = \{v \mid v \in V, \text{ tel que } 0 = d_0 \leq v(x) \leq d_1 \text{ sur } \Omega\}.$$

Notons que $\mathcal{K} \subset V$. Les résultats des **lemmes 1 et 2** étant toujours valides, on a le **lemme** suivant.

Lemme 7

La fonctionnelle g est uniformément convexe au sens que

$$\begin{aligned} \tau g(v) + (1 - \tau)g(w) + g(\tau v + (1 - \tau)w) &\geq \frac{\tau(1 - \tau)}{2} |v - w|_{1,\Omega}^2 \\ \forall \tau &\in]0, 1[, \forall v, w \in V \end{aligned}$$

De plus, l'application g est deux fois Frechet-différentiable et admet comme dérivée

$$\langle g'(v), w \rangle = a(v, w) - L(w),$$

et comme dérivée seconde

$$\langle g''(v).w, w \rangle = a(w, w).$$

Preuve

En effet, par un calcul simple, on a

$$\tau g(v) + (1 - \tau)g(w) + g(\tau v + (1 - \tau)w) = \frac{\tau(1 - \tau)}{2} a(v - w, v - w).$$

Comme

$$a(v - w, v - w) = |v - w|_{1,\Omega}^2,$$

alors g est uniformément convexe dans V . Le reste de la preuve est analogue à celle du lemme 3. ■

En utilisant une technique analogue que celle considérée à la section 2.1, la fonctionnelle J est uniformément convexe, Fréchet-différentiable sur V , et tend vers l'infini lorsque la norme $\|v\|_{1,\Omega}$ (où $\|v\|_{1,\Omega}$) tend vers l'infini. Il résulte que J est bornée inférieurement sur V et que le problème d'optimisation avec contraintes admet une et une seule solution. De manière analogue à celle considérée au paragraphe 2.3.2, si on considère le problème (2.15), alors ce problème s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\delta_t \Delta v(x) + j'(v) - \bar{\phi} + \partial\psi_{\mathcal{K}}(v) \ni 0, \\ v(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \\ \frac{\partial v(x)}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \end{array} \right.$$

et on résoud numériquement le problème aux limites suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\delta_t \Delta \bar{v}(x) + j'(\bar{v}) = \bar{\phi}, \text{ dans } \Omega \\ \bar{v}(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0, \\ \frac{\partial \bar{v}(x)}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \end{array} \right.$$

puis on projette \bar{v} sur le convexe \mathcal{K} .

De manière analogue le résultat du corollaire 1 est encore valable dans ce nouveau contexte.

Chapitre 3

Solution parallèle du problème

3.1 Discrétisation

Comme indiqué au chapitre 2, en utilisant un schéma de discrétisation temporelle implicite, et après un changement de variable approprié, on a à résoudre une suite de problèmes non linéaires et stationnaires avec contraintes (2.1) avec les conditions aux limites de Dirichlet, où bien les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann. Pour chaque problème stationnaire on résoud numériquement un problème non linéaire avec contraintes (2.14). Pour simplifier les calculs et sans restriction de généralité, on considère, dans toute la suite, que $\Omega = [0, 1]^d$, avec $d = 1, 2, 3$. On considère aussi que Ω est discrétisé par un maillage uniforme de pas $h = \frac{1}{n+1}$, où $n \in \mathbb{N}$; les points de la grille étant constitués par $N = n^d$ points de discrétisation. La discrétisation complète du problème stationnaire aux limites (2.14) conduit, à chaque pas de temps, à la solution d'un grand système algébrique non linéaire multivoque de grande dimension donné par

$$\Phi(V) + \delta_t.AV + \partial\Psi(V) - \bar{\Phi} \ni 0, \quad (3.1)$$

où Φ (resp. $\partial\Psi(V)$) provient de la discrétisation de j' (resp. du sous différentiel de la fonction indicatrice $\psi_{\mathcal{K}}(v)$), $\bar{\Phi}$ est obtenue à partir d'un schéma de discrétisation tempo-

relle associé à (2.4) et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ est la matrice de discrétisation spatiale obtenue par la méthode de différences finies.

Dans le cas tridimensionnel ($d = 3$) on utilise le schéma classique de sept points (resp. cinq points dans le cas bidimensionnel lorsque $d = 2$ et le schéma de trois points dans le cas $d = 1$). La combinaison de la discrétisation spatiale considérée avec un schéma en temps purement implicite conduit, à résoudre à chaque pas de temps, le problème multivoque (3.1). En raison du caractère creux de la matrice A , les algorithmes séquentiels et parallèles itératifs de relaxation sont bien adaptés à la résolution des systèmes algébriques considérés. De plus, afin de réduire les temps de reconstitutions, ces algorithmes de relaxation peuvent être facilement paralléliser et la propagation des erreurs d'arrondis peut être réduite compte tenu du fait qu'on a à résoudre des sous problèmes de tailles plus petites.

Par ailleurs la matrice A est irréductible et à diagonale dominante. Comme les éléments diagonaux de A sont strictement positifs et les hors diagonaux sont négatifs, alors A est une \mathbf{M} -matrice non singulière (voir [42]). Cette propriété jouera un rôle important pour assurer la convergence des algorithmes de relaxation séquentiels et parallèles asynchrones ou synchrones étudié, qui seront présentés dans la suite.

On note que pour une implémentation parallèle, on doit considérer une décomposition par blocs du problème provenant de la décomposition du domaine Ω en sous domaines. Le vecteur d'itération est aussi décomposé en blocs, de manière compatible avec la décomposition en sous domaines.

3.2 Algorithme parallèle asynchrone classique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux algorithmes itératifs de relaxation synchrones et asynchrones pour résoudre des grands systèmes d'équations linéaires ou non-linéaires issus de discrétisations d'équations ou d'inéquations aux dérivées partielles. La modélisation de ces algorithmes est effectuée en introduisant une stratégie de choix des compo-

santes pour tenir compte du parallélisme et une notion de retard pour tenir compte de l'asynchronisme entre les processeurs.

Modèle mathématique décrivant les algorithmes

Soit E un espace de Banach ; on considère que E est un produit fini d'espaces de Banach :

$$E = \prod_{i=1}^{i=\beta} E_i$$

où β est un entier naturel. La décomposition de tout vecteur $V \in E$ s'écrit alors :

$$V = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_\beta)$$

où $\forall i \in \{1, \dots, \beta\}$, $v_i \in E_i$

Chaque espace E_i est muni d'une norme notée par $|\cdot|_i$. La norme vectorielle canonique $q(\cdot)$ de tout vecteur $V \in E$ est le vecteur positif ou nul de \mathbb{R}^β défini comme suit :

$$\forall X \in E, q(V) = (|v_1|_1, \dots, |v_i|_i, \dots, |v_\beta|_\beta).$$

Soit F une application de point fixe de $D(F) \subset E$ à valeurs dans $D(F)$, telle que $D(F) \neq \emptyset$. On s'intéresse alors au problème de point fixe

$$V^* = F(V^*), \quad V^* \in D(F). \tag{3.2}$$

Compte tenu de la décomposition de l'espace E , l'application F se décompose de la manière suivante :

$$F(V) = (F_1(V), \dots, F_i(V), \dots, F_\beta(V))$$

Chaque composante F_i est une application de $D(F)$ à valeurs dans $E_i \cap D(F)$. Nous introduisons à présent les éléments permettant de modéliser le parallélisme ainsi que le comportement asynchrones des algorithmes .

Définition 1 (Stratégie) Une stratégie S est une suite $(s(p))_{p \in \mathbb{N}}$ de parties non vides de $\{1, \dots, \beta\}$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \dots, \beta\}, \{p \in \mathbb{N} \mid i \in s(p)\} \text{ est un ensemble infini} \quad (3.3)$$

Définition 2 (Suite de retards)

Une Suite de retards R est une suite $(r(p))_{p \in \mathbb{N}}$ où :

$$\forall p \in \mathbb{N}, r(p) = (r_1(p), \dots, r_i(p), \dots, r_\beta(p)) \in \mathbb{N}^\beta$$

et telle que pour tout $i \in \{1, \dots, \beta\}$, l'application $\rho : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^\beta$, de composantes $\rho_i : p \longrightarrow p - r_i(p)$ vérifie :

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq \rho_i(p) \leq p, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} (\rho_i(p)) = +\infty. \quad (3.4)$$

Compte tenu de définitions précédentes, les algorithmes parallèles de relaxation asynchrones peuvent être définis comme suit :

Définition 3

Soient $V^0 \in D(F)$ un vecteur quelconque, S une stratégie et R une suite de retards. Un algorithme parallèle asynchrone classique construit récursivement une suite d'itérés $(V^p)_{p \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, \beta\}, v_i^{p+1} = \begin{cases} v_i^p & \text{si } i \notin s(p) \\ F_i(\tilde{V}^p) & \text{si } i \in s(p) \end{cases} \quad (3.5)$$

où

$$\tilde{V}^p = (v_1^{\rho_1(p)}, \dots, v_i^{\rho_i(p)}, \dots, v_\beta^{\rho_\beta(p)}).$$

Remarque 1

La notion de stratégie correspond aux numéros des composantes relaxées et rend bien compte du parallélisme ; à l'itération p on traitera donc en parallèle les composantes dont

les numéros appartiennent à $s(p)$. Il convient toutefois de noter que l'hypothèse (3.3) signifie que l'on doit en théorie relaxer une infinité de fois chacune des composantes du bloc-vecteur. La notion de retards rend compte de l'asynchronisme avec lequel est traitée chacune des composantes du vecteur X ; lorsque les retards sont identiquement nuls, la formulation (3.5) correspond alors aux algorithmes de relaxation synchrones [29]. Si de plus $s(p) = \{1, \dots, \beta\}$, alors $\mathcal{S} = \{\{1, \dots, \beta\}, \dots, \{1, \dots, \beta\}, \dots\}$ avec $\rho(p) = p, \forall p \in \mathbb{N}$, alors (3.5) modélise l'algorithme de Jacobi par blocs et si $s(p) = p \bmod(\beta) + 1$ alors $\mathcal{S} = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{\beta\}, \{1\}, \{2\}, \dots, \{\beta\}, \dots\}$ et $\rho(p) = p, \forall p \in \mathbb{N}$ alors (3.5) modélise l'algorithme de Gauss-Seidel par blocs.

On renvoie à [29] pour des choix de $s(p)$ correspondant à la méthode des directions alternées et à la méthode de Southwell.

On précise également que dans le cas général concernant les algorithmes parallèles asynchrones, l'algorithme défini par (3.5) modélise une méthode de relaxation, où chaque composante v_i est calculée à l'aide des valeurs d'interaction disponibles $w_k = v_k^{\rho_k(p)}$ calculées par les autres processeurs.

On peut alors énoncer le résultat général de convergence suivant établi par J.C. Mielou [41] et G. Baudet [30] :

3.3 Théorème de convergence

Définition 4 (Contraction pour la norme vectorielle)

Soit F une application de $D(F) \subset E$ à valeurs dans $D(F)$, telle que $D(F) \neq \emptyset$. F est contractante en $X^ \in D(F)$ pour la norme vectorielle $q(\cdot)$ s'il existe une matrice J , de taille $\beta \times \beta$, non négative, et de rayon spectrale $\rho(J)$, vérifiant :*

$$J \geq 0 \text{ et } \rho(J) < 1,$$

et telle que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\forall W \in D(F), q(F(W) - F(V^*)) \leq J.q(W - V^*) \quad (3.6)$$

J est une matrice de contraction de F en V^* .

Théorème 1 (Convergence en norme vectorielle)

Soit F une application de $D(F) \subset E$ à valeurs dans $D(F)$, telle que $D(F) \neq \emptyset$.

Si F admet un point fixe $V^* \in D(F)$ et si F est contractante en V^* pour la norme vectorielle $q(\cdot)$, alors la suite $(V^p)_{p \in \mathbb{N}}$ construite à l'aide de l'algorithme séquentiel et parallèle synchrone et asynchrone (23) converge vers le point fixe V^* .

Ce théorème de convergence est démontré par J.C. Miellou dans [41] et par G. Baudet [30].

Remarque 2.

On envisage à présent l'introduction d'un paramètre de relaxation ω dans l'algorithme (3.5) on considère donc une application F_ω , de domaine $D(F)$, définie par :

$$\forall V \in D(F), F_\omega(V) = (1 - \omega)V + \omega F(V).$$

D'après [41], F_ω possède le même point fixe que F et elle est contractante en norme vectorielle si :

$$\omega \in \left] 0, \frac{2}{1 + \rho(J)} \right[,$$

et la matrice de contraction est :

$$J_\omega = |1 - \omega| I + \omega J.$$

De plus, l'estimation de la vitesse asymptotique de convergence de l'algorithme est : ([41])

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup |V^p - V^*|^{\frac{1}{p}} \leq \rho(J).$$

Un résultat de convergence en norme scalaire

Soit $\rho(J)$ le rayon spectral de la matrice J ; grâce au théorème de Perron-Frobenius on sait que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \nu \in [\rho(J), 1[, \text{ il existe un vecteur } \Gamma \text{ de } \mathbb{R}^\beta \text{ de composantes strictement positives tel que :} \\ J.\Gamma \leq \nu.\Gamma \end{array} \right.$$

Soit γ_i la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur Γ ; alors on peut définir la norme scalaire suivante sur $E = \prod_{i=1}^{\beta} E_i$ (voir [58]) :

$$\forall X \in E, \|X\|_{\Gamma} = \max_{1 \leq i \leq \beta} \left(\frac{|x_i|}{\gamma_i} \right), \quad (3.7)$$

et établir un résultat de convergence en norme uniforme avec poids établi par M.N.El Tarazi [58] :

Théorème 2

Soit F une application de $D(F) \subset E$ à valeurs dans $D(F)$, telle que $D(F) \neq \emptyset$.

Alors on a :

1-Si F est contractante pour la norme vectorielle q alors elle l'est pour la norme scalaire $\|\cdot\|_{\Gamma}$ définie par (3.7)

2-Si F admet un point fixe $V^ \in D(F)$ et si F est contractante en V^* pour une norme uniforme avec poids $\|\cdot\|_{\Gamma}$, autrement dit*

$$\exists \theta \in]0, 1[, \forall W \in D(F), \|F(W) - F(V^*)\|_{\Gamma} \leq \theta \|W - V^*\|_{\Gamma}$$

alors la suite $(V^p)_{p \in \mathbb{N}}$ construite à l'aide de l'algorithme séquentiel et parallèle synchrone et asynchrone (3.5) converge vers le point fixe V^ , pour la norme $\|\cdot\|_{\Gamma}$.*

3.4 Rappels sur la notion d'accrétivité

Pour analyser la convergence des algorithmes séquentiels et parallèles synchrones et asynchrones et donner ainsi des conditions suffisantes de convergence liées aux propriétés des opérateurs à inverser, nous rappelons la notion d'opérateur accréatif.

Opérateurs accréatifs

On indique ci-dessous les définitions générales portant sur l'accrétivité dans les espaces de Banach. Pour une présentation approfondie, nous renvoyons à [63].

Soit E un espace de Banach et E^* son dual topologique, de norme respectives $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|^*$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre E et E^* qui est une forme bilinéaire de $E \times E^*$ dans \mathbb{R} . Soit Λ un opérateur de domaine $\mathcal{D}(\Lambda) \subset E$ à valeurs dans E . Afin de simplifier les énoncés, on considère Λ univoque.

Définition 5 (Opérateur de dualité)

On appelle opérateur de dualité $G(\cdot)$ associé à E , l'opérateur de E vers E^* défini par

$$\forall V \in E, G(V) = \{g \in E^* \mid \|g\|^* = \|V\| \text{ et } \langle V, g \rangle = \|V\|^2\}.$$

On montre que cette multi-application est non-vidée, fermée et que c'est le sous différentiel de la fonction $V \longrightarrow \frac{1}{2} \|V\|^2$.

Remarque 4

Dans le cas où E est un espace de Hilbert, E^* est identifié à E , $G(V)$ se réduit à V et le produit scalaire est substitué au produit de dualité.

Définition 6 (Accrétivité)

Λ est un opérateur accréatif si

$$\forall V, V' \in \mathcal{D}(\Lambda) \times \mathcal{D}(\Lambda), \exists g \in G(V - V') \text{ tel que } \langle \lambda(V) - \lambda(V'), g \rangle \geq 0,$$

où $\lambda(V) \in \Lambda(V)$ et $\lambda(V') \in \Lambda(V')$. Λ est strictement accréatif si l'inégalité précédente

est stricte.

Définition 7 (Accrétivité forte)

Λ est un opérateur fortement accréatif s'il existe un réel c positif tel que :

$$\forall V, V' \in \mathcal{D}(\Lambda) \times \mathcal{D}(\Lambda), \exists g \in G(V - V') \text{ tel que } \langle \lambda(V) - \lambda(V'), g \rangle \geq c \|V - V'\|^2, \text{ où } \lambda(V) \in \Lambda(V) \text{ et } \lambda(V') \in \Lambda(V')$$

Accrétivité en dimension finie

Nous nous intéressons à présent à la caractérisation des applications linéaires accréatives de \mathbb{R}^n . Pour une étude détaillée, nous renvoyons à [65], notamment pour les démonstrations.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et de coefficients $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition 1 (Accrétivité forte dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$)

Une matrice A est fortement accréative dans \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ si et seulement si A est fortement définie positive, c'est à dire :

$$\exists c \geq 0, \forall V \in \mathbb{R}^n (V \neq 0), \langle AV, V \rangle \geq c \|V\|_2^2.$$

Corollaire 1 (Accrétivité dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$)

Une matrice A est accréative dans \mathbb{R}^n muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ si et seulement si A est une matrice semi-définie positive.

Il est également intéressant de caractériser les matrices accréatives de \mathbb{R}^n normé par :

$$\begin{aligned} -\|V\|_1 &= \sum_{i=1}^n |v_i|, \\ -\|V\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|. \end{aligned}$$

Comme on va le constater, les hypothèses correspondantes sont techniquement beaucoup plus simples à vérifier que l'inégalité précédente.

Proposition 2 (Accrétivité forte dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$)

Une matrice A est fortement accréative dans \mathbb{R}^n muni de la norme $\|\cdot\|_1$ si et seulement

s'il existe un réel positif c tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$a_{ii} \geq c \text{ et } a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \geq c.$$

Corollaire 2 (Accrétivité dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$)

Une matrice A est accrétive dans \mathbb{R}^n muni de la norme $\|\cdot\|_1$ si et seulement si :

1—les coefficients diagonaux de A sont positifs ou nuls,

2 — A est diagonale dominante en colonne.

Proposition 3 (Accrétivité forte dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$)

Une matrice A est fortement accrétive dans \mathbb{R}^n muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement s'il existe un réel positif c tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$a_{ii} \geq c \text{ et } a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \geq c.$$

Corollaire 4 (Accrétivité dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$)

Une matrice A est accrétive dans \mathbb{R}^n muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si :

1—les coefficients diagonaux de A sont positifs ou nuls,

2 — A est à diagonale dominante en ligne.

3.5 Méthodes parallèles asynchrones de sous domaines sans recouvrement

Dans ce qui suit, on considère la formulation des méthodes séquentielles et parallèles de sous-domaines synchrones et asynchrone sans recouvrement pour la résolution du problème avec contraintes (voir [56, 53]). Ces algorithmes seront utilisés pour la résolution séquentielle et parallèle du système discrétisé d'équations algébriques (3.1). Chaque méthode séquentielle et parallèle correspond à une méthode parallèle de relaxation par blocs, dans laquelle un sous-domaine est obtenu en réunissant plusieurs blocs adjacents.

On considère la décomposition par blocs du problème (3.1) en β ($\beta \in \mathbb{N}$) sous domaines

On résoud (3.1) par une méthode séquentielle et parallèle itérative de sous-domaines sans recouvrement de type (3.5), ce qui correspond à une méthode de relaxation parallèle par grands blocs :

$$\Phi_i(V_i^*) + \delta_t A_{ii} V_i^* + \delta_t \sum_{j \neq i} A_{ij} V_j^* - \bar{\Phi}_i + \partial \Psi_i(V_i^*) \ni 0, \forall i \in \{1, \dots, \beta\}, \quad (3.8)$$

où $V_i, \bar{\Phi}_i \in E_i = \mathbb{R}^{n_i}$, $\sum_{i=1}^{\beta} n_i = N$, $A = (A_{ij})$, et Φ_i, Ψ_i sont obtenues à partir de la décomposition par blocs.

En fait, la $i^{\text{ème}}$ composante du sous différentiel est donnée par

$$\partial \Psi_{\mathcal{K}}(V)_i = \begin{cases} \emptyset & \text{si } V_i \langle d_0 \\ 0 & \text{si } d_0 \langle V_i \langle d_1 \\]-\infty, 0] & \text{si } V_i = d_0 \\ [0, +\infty[& \text{si } V_i = d_1 \\ \emptyset & \text{si } V_i \rangle d_1 \end{cases}$$

et le graphe correspondant est présenté en Figure 1.

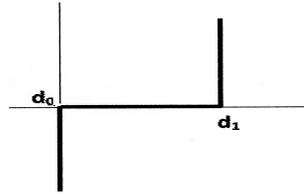


Figure 1 : *Sous différentiel de la fonction $\Psi_{\mathcal{K}}$*

L'application sous différentiel étant multivoque, alors on peut écrire la relation précédente comme suit :

$$\Phi_i(V_i^*) + \delta_t A_{ii} V_i^* + \delta_t \sum_{j \neq i} A_{ij} V_j^* - \bar{\Phi}_i + w_i^* = 0, w_i^* \in \partial \Psi_i(V_i^*), \forall i \in \{1, \dots, \beta\}. \quad (3.9)$$

On associe au problème (3.9) l'application de point fixe suivante :

$$V_i^* = (\delta_t A_{ii})^{-1} (\bar{\Phi}_i - \Phi_i(V_i^*) - \delta_t \sum_{j \neq i} A_{ij} V_j^* - w_i^*) = F_i(V^*), \forall i \in \{1, \dots, \beta\}. \quad (3.10)$$

On considère maintenant, une itération séquentielle ou parallèle synchrone ou asynchrone associée à la résolution du sous problème (3.8) (voir [30], [39]), qui s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \Phi_i(V_i^{p+1}) + \delta_t A_{ii} V_i^{p+1} + w_i^{p+1} = \bar{\Phi}_i - \delta_t \sum_{j \neq i} A_{ij} \cdot \mathcal{W}_j & \text{si } i \in s(p), \\ V_i^{p+1} = V_i^p, & \text{si } i \notin s(p) \end{cases} \quad (3.11)$$

où $\{\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{i-1}, -, \mathcal{W}_{i+1}, \dots, \mathcal{W}_\beta\}$ sont les valeurs disponibles des composantes de V_j pour $j \neq i$, au $(p+1)^{\text{ème}}$ pas de relaxation définies par $\mathcal{W}_j = V_j^{\rho_j(p)}$, qui indiquent les composantes disponibles à la $(p+1)^{\text{ème}}$ pas de relaxation où $\mathcal{S} = \{s(p)\}_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite non vide de sous ensembles de $\{1, \dots, \beta\}$ modélisant le parallélisme le cas échéant et $\mathcal{R} = \{\rho_1(p), \dots, \rho_\eta(p)\}_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathbb{N}^β modélisant l'asynchronisme

Les relaxations parallèles asynchrones sont effectuées sans ordre ni synchronisation. Ils décrivent en fait une méthode de sous-domaine sans recouvrement. Durant ces calculs effectués itérativement les processeurs vont à leur propre rythme en fonction de leurs caractéristiques intrinsèques et de leur charge de calcul. Le parallélisme entre les processeurs est bien décrite par \mathcal{S} qui contient le numéro des composants relaxés. Théoriquement, chaque composante du vecteur doit être relaxé un nombre infini de fois. Le choix des composants relaxés peut être guidée par un critère et en particulier, un critère naturel consiste à sélectionner les valeurs les plus récentes disponibles des composants calculés de manière asynchrone par les autres processeurs.

Remarque 5

L'algorithme (3.11) décrit une méthode de calcul, où les communications entre les processeurs peuvent être synchrones ou asynchrones. Pour les méthodes synchrones pa-

rallèles, il suffit de considérer une suite de retards nuls. Dans ce contexte, les méthodes de relaxations séquentielles classiques sont modélisées par des choix particuliers de \mathcal{S} :

Si $s(p) = \{1, \dots, \beta\}$, alors $\mathcal{S} = \{\{1, \dots, \beta\}, \dots, \{1, \dots, \beta\}, \dots\}$ et $\rho(p) = p, \forall p \in \mathbb{N}$, donc (3.11) décrit la méthode séquentielle de Jacobi par bloc.

Convergence de la méthode parallèle de sous domaine sans recouvrement

En soustrayant (3.11) de (3.9), on obtient pour tout $i \in s(p)$

$$\Phi_i(V_i^{p+1}) - \Phi_i(V_i^*) + \delta_t A_{ii}(V_i^{p+1} - V_i^*) + w_i^{p+1} - w_i^* = - \sum_{j \neq i} A_{ij}(W_j - V_j^*). \quad (3.12)$$

Soit $g_i \in G_i(V_i^{p+1} - V_i^*)$ un élément de l'opérateur de dualité, où pour tout $i \in \{1, \dots, \beta\}$, et pour tout $k \in [1, \infty]$, g_i satisfait

$$G_i(V_i^{p+1} - V_i^*) = \{g_i \in \mathbb{R}^{n_i} \mid \langle V_i^{p+1} - V_i^*, g_i \rangle_i = \|(V_i^{p+1} - V_i^*)\|_k \text{ et } \|g_i\|_k^* = 1\};$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ est le produit de dualité entre l'espace \mathbb{R}^{n_i} et son dual. On sait que $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ est une forme bilinéaire, $\|\cdot\|_k$ est la norme classique (l_k -norme) définie sur \mathbb{R}^{n_i} et que $\|\cdot\|_k^*$ est la norme définie sur l'espace dual. Par multiplication de (3.12) par g_i , on obtient pour tout $i \in s(p)$

$$\langle \Phi_i(V_i^{p+1}) - \Phi_i(V_i^*), g_i \rangle_i + \langle w_i^{p+1} - w_i^*, g_i \rangle_i + \delta_t \langle A_{ii}(V_i^{p+1} - V_i^*), g_i \rangle_i = -\delta_t \sum_{j \neq i} \langle A_{ij}(W_j - V_j^*), g_i \rangle_i.$$

A étant une M-matrice, les sous-matrices diagonales A_{ii} , pour $i \in \{1, \dots, \beta\}$, sont également des M-matrices. La caractérisation des M-matrices de [67], entraîne la forte accréativité de ces sous-matrices, c'est à dire que $\forall i \in \{1, \dots, \beta\}$ l'inégalité suivante est vérifiée

$$\langle A_{ii}(V_i^{p+1} - V_i^*), g_i \rangle_i \geq \mu_{ii} \|V_i^{p+1} - V_i^*\|_k, (\mu_{ii} > 0). \quad (3.13)$$

Comme le sous différentiel est une application monotone et l'opérateur Φ_i est monotone croissant, alors le premier membre de la relation précédente, est minoré par $\mu_{ii} \|V_i^{p+1} - V_i^*\|_k$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ étant une forme bilinéaire, le second membre est majoré par :

$$\sum_{j \neq i} \langle A_{ij}(W_j - V_j^*), g_i \rangle_i \leq \sum_{j \neq i} \mu_{ij} \|W_j - V_j^*\|_k, (\mu_{ij} > 0), \quad (3.14)$$

pour tout $j \in \{1, \dots, \beta\}$, $j \neq i$ et pour tout $k \in [1, \infty]$, où $\mu_{ij} = \|A_{ij}\|_\infty$. En tenant compte les relations (3.13) et (3.14), on obtient finalement l'inégalité

$$\|V_i^{p+1} - V_i^*\|_k \leq \sum_{j \neq i} \frac{\mu_{ij}}{\mu_{ii}} \|W_j - V_j^*\|_k, \forall i \in \{1, \dots, \beta\}. \quad (3.15)$$

On note maintenant par \tilde{J} la matrice non négative de taille $\beta \times \beta$:

$$\tilde{J} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{\mu_{ij}}{\mu_{ii}} & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

On défini la norme vectoriel d'un vecteur Y par le vecteur positif de \mathbb{R}^β , dont les composants sont

$$Y \longrightarrow |Y| = \{\dots, \|Y_j\|_k, \dots\};$$

l'inégalité (3.15) s'écrit alors :

$$|V^{p+1} - V^*| \leq \tilde{J} |W - V^*|, \forall W$$

En fait \tilde{J} est la matrice de Jacobi d'une matrice \tilde{M} de coefficients diagonaux égaux à μ_{ii} et hors diagonaux égaux à $-\mu_{ij}$. Si \tilde{M} est une M-matrice irréductible alors \tilde{J} sera une matrice non négative irréductible et toutes les valeurs propres de \tilde{J} seront de module

inférieure à un. On note par ν le rayon spectral de la matrice \tilde{J} et par $\Gamma \in \mathbb{R}^\beta$ le vecteur propre associé. Par le théorème de Perron-Frobenius, toutes les composantes de Γ sont strictement positives et l'inégalité $\tilde{J}\Gamma \leq \nu\Gamma$ est satisfaite pour $0 \leq \nu < 1$ (voir [22]). Si on considère la norme uniforme avec poids suivante

$$\|V\|_{\Gamma, \infty} = \max_{1 \leq i \leq \beta} \left(\frac{\|V_i\|_k}{\Gamma_i} \right),$$

alors on obtient

$$\left\| F(V) - F(V') \right\|_{\Gamma, \infty} \leq \nu \left\| V - V' \right\|_{\Gamma, \infty} \quad \forall V, V' \in \mathbb{R}^N.$$

Il résulte que l'application de point fixe associé aux méthodes séquentielles et parallèles synchrones et asynchrones (3.11) est une contraction par rapport à la norme uniforme pondérée ci-dessus [58]. Par conséquent, la méthode asynchrone converge vers la solution du problème (3.1) (voir [58]).

Proposition 4

On considère le système algébrique (3.1), où l'on suppose que la matrice \tilde{M} dont les éléments diagonaux μ_{ii} sont définis dans (3.12) et les éléments hors diagonaux $-\mu_{ij}$, $i \neq j$, définis par (3.14), est une M-matrice. Alors, les méthodes séquentielles et parallèles de sous-domaine synchrone et asynchrone de relaxation sans recouvrement (3.11) convergent vers la solution du problème (3.1).

D'un point de vue pratique, certains cas particuliers peuvent être considérés. En effet, l'analyse mathématique précédente devient facile quand $k = 1$ où $k = \infty$, ceci est dû aux propriétés de diagonale dominance des matrices par blocs A_{ii} , $\forall i \in \{1, \dots, \beta\}$. Dans ces cas, lorsque par exemple le problème est défini dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, alors les entiers μ_{ij} de la matrice \tilde{M} correspondent à la décomposition par blocs de A sont donnés par $\mu_{ii} = 4$, $\mu_{ij} = 1$ où $\mu_{ij} = 0$. Si on considère le cas de $2D$ les composantes de \tilde{M} sont données par $\mu_{ii} = 2$, $\mu_{ij} = 1$ où $\mu_{ij} = 0$, (voir [49]). Si \tilde{M} est une M-matrice, alors $0 \leq \nu < 1$ et les méthodes parallèles synchrones et asynchrones de sous-domaines sans

recouvrement convergent.

Remarque 6

En pratique, le système algébrique est divisé en $\bar{\beta}$ blocs adjacents, où $\bar{\beta} \leq \beta$, correspondant à une décomposition grossière de sous-domaines sans recouvrement. On peut démontrer que les méthodes séquentielles et parallèles synchrones et asynchrones de relaxation par blocs convergent (voir [41]). En outre, si la décomposition de sous-domaine associée à β blocs est une décomposition par points, alors les méthodes parallèles asynchrones de relaxation par blocs classiques convergent pour n'importe quelle décomposition plus grossière en sous-domaines. L'analyse précédente peut être résumée comme suit :

corollaire 1

On considère la solution du système algébrique (3.1) par les méthodes séquentielles et parallèles synchrones et asynchrones de relaxation (3.11) ; on suppose que A est une M -matrice et que les hypothèses de la proposition 4 sont vérifiées ; alors les méthodes parallèles asynchrones de relaxation par blocs convergent pour n'importe quelle décomposition grossière de sous-domaines.

3.6 Méthodes parallèles asynchrones de sous domaines avec recouvrement

Rappel sur la méthode de Schwarz

La méthode alternée de Schwarz est une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement qui est bien adaptée au parallélisme [57]. On se place maintenant dans \mathbb{R}^3 et on considérons une décomposition de Ω en β sous-domaines non vides, notée $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq \beta}$, telle que :

$$\Omega_i \subset \Omega, \quad i \in \{1, \dots, \beta\},$$

$$\bigcup_{i=1}^{\beta} \Omega_i = \Omega.$$

On note par $adj(i)$ l'ensemble des sous-domaines adjacents à Ω_i , défini comme suit :

$$adj(i) = \{j \mid \Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset, j \neq i\}.$$

On considère les traces des bords des sous-domaines Ω_i définies par

$$\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \quad i \in \{1, \dots, \beta\},$$

et

$$\gamma_i^j = \partial\Omega_i \cap \Omega_j, \quad j \in adj(i).$$

Compte tenu de ces notations, on va présenter la méthode de Schwarz alternée pour la solution du problème (3.1). La méthode de Schwarz est un algorithme itératif, où chaque itération consiste à résoudre β sous-problèmes, de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda u = f \text{ sur } \Omega \\ Bu = g \text{ sur } \Gamma \end{array} \right. ,$$

définis sur les sous-domaines $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq \beta}$. Soient $f_i = f|_{\Omega_i}$ les restrictions du second membre sur chacun des sous-domaines. La suite des vecteurs itérés engendrée par l'algorithme de Schwarz est notée $(u_1^p, u_2^p, \dots, u_\beta^p)_{p \in \mathbb{N}}$, où u_i^p est une fonction définie sur Ω_i . Chaque itération est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_i u_i^{p+1} = f_i \text{ sur } \Omega_i \\ B_i u_i^{p+1} = g_1 \text{ sur } \Gamma_i \\ u_{i|\gamma_i^j}^{p+1} = u_{j|\gamma_i^j}^p, \text{ pour tout } j \in \text{adj}(i) \end{array} \right. , \quad i \in \{1, \dots, \beta\}, \quad p \in \mathbb{N},$$

où Λ_i et B_i représentent la restriction des opérateurs Λ et B sur Ω_i . Chaque sous problème est résolu indépendamment des autres en prenant en compte les valeurs d'interaction calculées sur les autres sous-domaines. L'introduction du parallélisme asynchrone dans cet algorithme est techniquement analogue à ce qui a été présenté aux paragraphes 3.2 et 3.5 ; on introduit comme précédemment une stratégie \mathcal{S} et des retards \mathcal{R} , d'où l'algorithme

$$\left\{ \begin{array}{l} i \in S(p) \implies \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_i u_i^{p+1} = f_i \text{ dans } \Omega_i \\ B_i u_i^{p+1} = g_1 \text{ sur } \Gamma_i \\ u_{i|\gamma_i^j}^{p+1} = \tilde{u}_{j|\gamma_i^j}^p, \text{ pour tout } j \in \text{adj}(i) \end{array} \right. , \quad p \in \mathbb{N}, \\ i \notin S(p) \implies u_{i|\gamma_i^j}^{p+1} = u_{j|\gamma_i^j}^p \end{array} \right.$$

où $\tilde{u}_j^p = u_j^{\rho_j(p)}$, $j \in \text{adj}(i)$ et $\rho_i(p) \geq 0$, $i = 1, \dots, \beta$, où $\text{adj}(i)$ désigne l'ensemble des sous-domaines adjacents à Ω_i .

Dans la suite, on se concentrera sur la solution du problème non linéaire constitué d'un système algébrique linéaire avec une M-matrice perturbée par un opérateur diagonale non-linéaire d'opérateur diagonale multivoque qui prend en compte les contraintes sur la solution.

Analyse de la convergence des méthodes parallèles asynchrones de sous domaines avec recouvrement

La méthode alternée de Schwarz conduit à résoudre au lieu du problème (3.1) équivalent le problème suivant :

$$\tilde{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{V}}) = \tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{V}}) + \delta_i \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{V}} + \partial\Psi(\tilde{\mathcal{V}}) - \tilde{\Phi} \ni 0 \quad (3.16)$$

où $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{V}}$, $\tilde{\Phi}(\tilde{\mathcal{V}})$ et $\partial\Psi(\tilde{\mathcal{V}})$ sont obtenus par le procédé d'augmentation de Schwarz [16]. On considère une décomposition du problème (3.16) en β sous-problèmes, comme suit

$$\delta_t \tilde{\mathcal{A}}_{ii} \tilde{\mathcal{V}}_i^* - \tilde{\Phi}_i + \delta_t \sum_{j \neq i} \tilde{\mathcal{A}}_{ij} \tilde{\mathcal{V}}_j^* + \tilde{\Phi}_i(\tilde{\mathcal{V}}_i^*) + \partial\Psi_i(\tilde{\mathcal{V}}_i^*) \ni 0, \forall i \in \{1, \dots, \beta\}, \quad (3.17)$$

où $\tilde{\mathcal{V}}_i, \tilde{\Phi}_i, \tilde{\Phi}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, m_i la taille du $i^{\text{ième}}$ bloc de ces vecteurs et $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{\mathcal{A}}_{ij})_{1 \leq i, j \leq \beta}$ désigne la matrice augmentée issue de la méthode de Schwarz. Le problème (3.17) peut s'écrire comme suit

$$\delta_t \tilde{\mathcal{A}}_{ii} \tilde{\mathcal{V}}_i^* - \tilde{\Phi}_i + \delta_t \sum_{j \neq i} \tilde{\mathcal{A}}_{ij} \tilde{\mathcal{V}}_j^* + \tilde{\Phi}_i(\tilde{\mathcal{V}}_i^*) + \tilde{\mathcal{W}}_i^* = 0, \tilde{\mathcal{W}}_i^* \in \partial\Psi_i(\tilde{\mathcal{V}}_i^*), \forall i \in \{1, \dots, \beta\}. \quad (3.18)$$

On considère maintenant, la résolution du problème augmenté (3.16) par la méthode parallèle asynchrone de Schwarz défini comme suit :

$$\begin{cases} \delta_t \tilde{\mathcal{A}}_{ii} \tilde{\mathcal{V}}_i^{p+1} + \partial\Psi_i(\tilde{\mathcal{V}}_i^{p+1}) + \tilde{\Phi}_i(\tilde{\mathcal{V}}_i^{p+1}) \ni \tilde{\Phi}_i - \delta_t \sum_{j \neq i} \tilde{\mathcal{A}}_{ij} \tilde{\mathcal{V}}_j & \text{si } i \in s(p), \\ \tilde{\mathcal{V}}_i^{p+1} = \tilde{\mathcal{V}}_i^p, & \text{si } i \notin s(p) \end{cases} \quad (3.19)$$

où $\{\tilde{\mathcal{V}}_1, \tilde{\mathcal{V}}_2, \dots, \tilde{\mathcal{V}}_\beta\}$ sont les valeurs disponibles des composantes de $(\tilde{\mathcal{V}}_j)_{j \neq i}$ définies par $\tilde{\mathcal{V}}_j = \tilde{\mathcal{V}}_j^{p_j(p)}$ pour $j \neq i$.

Proposition 5

Sous les mêmes hypothèses que celles de la Proposition 4, on considère l'application de point fixe \mathcal{F} définie par (3.19). Cette application \mathcal{F} est contractante, et son point fixe est l'unique solution du problème (3.16). De plus, les méthodes séquentielles et parallèles synchrones et asynchrones de Schwarz alternées définies par (3.19) convergent vers cette solution.

Preuve

Comme A est une M-matrice, alors la matrice augmentée $\tilde{\mathcal{A}}$ obtenue par le procédé d'augmentation de la méthode de Schwarz alternée, est une M-matrice (voir [17]). De plus, les opérateurs $\Phi(\tilde{\mathcal{V}})$, $\partial\Psi(\tilde{\mathcal{V}})$ obtenues du procédé d'augmentation de Schwarz sont diagonaux monotones. Par suite, la perturbation de l'application affine construite à l'aide de la M-matrice $\tilde{\mathcal{A}}$, par les deux opérateurs précédents ont pour effet que le système augmenté (3.16) garde les mêmes propriétés que le système algébrique initial (3.1). La suite de la démonstration se fait alors en deux étapes. Avec le même raisonnement que celui utilisé lors des démonstrations de la Proposition 4 et du Corollaire 1, on considère d'abord une décomposition par points du problème (3.16), dont l'application de point fixe associée est contractante; ensuite on utilise un résultat obtenu dans [41] pour conclure que pour chaque décomposition plus grossière par blocs, l'application de point fixe \mathcal{F} associée est contractante. De plus, la convergence de la méthode parallèle asynchrone et synchrone de Schwarz alternative définie par (3.19) résulte du même argument que celui utilisé lors de la démonstration du Corollaire 1. Ce qui achève la démonstration. ■

Chapitre 4

Expériences numériques

On implémente deux algorithmes séquentiels de relaxation projetée, qui correspondent à un couplage de la méthode de Newton avec la méthode de relaxation de Jacobi et de Gauss-Seidel. On considère ensuite la comparaison des méthodes parallèles de sous-domaines synchrones et asynchrones sans recouvrement. Les résultats de chaque expérience numérique sont résumés dans la suite.

Dans nos expériences numériques, le domaine Ω est $[0, 1]^d$, $d = 1, 2, 3$ et la discrétisation par différences finies est effectuée sur une grille cartésienne classique. Dans le processus de linéarisation, à chaque pas de temps, les équations linéaires sont résolues par une méthode de relaxation de Gauss-Seidel par points. Le critère d'arrêt pour stopper les itérations associé est défini par le fait que la norme uniforme de la différence entre deux vecteurs d'itérations successives est inférieure à une tolérance donnée. Le changement de variable peut être écrit comme suit :

$$v = \left(\frac{u}{u + \theta} \right)^m. \quad (4.1)$$

L'algorithme de discrétisation par rapport au temps pour la solution de l'équation de milieux poreux modifiée s'écrit comme suit :

$$\Phi(V^{q+1}) + \delta_t A V^{q+1} + \partial \Psi(V^{q+1}) - \Phi(V^q) \ni 0. \quad (4.2)$$

Dans le cas du problème sans contraintes, le schéma itératif qui calcule V^{p+1} est l'algorithme de Newton défini par :

$$\begin{cases} V^{q+1,0} = V^q \\ (\delta_t A + \Phi'(V^{q+1,p}))\delta V = -(\Phi(V^{q+1,p}) + \delta_t A V^{q+1,p} - \Phi(V^q)) \\ V^{q+1,p+1} = V^{q+1,p} + \delta V, \end{cases} \quad (4.3)$$

où

$$\Phi'(z) = \frac{\theta z^{\frac{1}{m}-1}}{m(1 - z^{\frac{1}{m}})^2}. \quad (4.4)$$

Dans le cas avec contraintes, il faut projeter la valeur corrigée $V^{(q+1,p+1)}$ sur l'ensemble convexe.

4.1 Expériences séquentielles

Les expériences séquentielles ont été réalisées sur un ordinateur personnel, où l'implémentation a été effectuée en utilisant le logiciel Matlab. Dans le tableau 1, on a indiqué le nombre maximum de pas de temps et le nombre de points de discrétisation spatial sur chaque axe pour chaque valeur de d .

$d = 1$		$d = 2$	
pas de temps	points de discretisation	pas de temps	points de discretisation
20	1000	20	50*50=12500
$d = 3$			
pas de temps	points de discretisation		
20	50*50*50=125000		

Tableau 1 : Nombre de pas de temps et de points de discrétisation sur chaque axe pour $d = 1, 2, 3$.

Pour la résolution du problème modèle, on a résolu de grands systèmes algébriques creux. Les méthodes itératives de relaxation sont généralement bien adaptées, sauf pour le cas $d = 1$, où on a considéré la solution de chaque système algébrique par la méthode (**TDMA**), qui correspond à la méthode de Gauss adaptée au cas où la matrice A est une matrice tridiagonale. Notons aussi que, pour les grandes valeurs de d , les méthodes de relaxation par points sont bien adaptées à la résolution du problème avec contraintes. Les méthodes de relaxation par blocs ont besoin de l'élimination de Gauss de chaque bloc tridiagonal à chaque étape de la méthode de Newton, et nécessitent donc beaucoup plus de temps de calcul. Enfin, les autres méthodes itératives, comme celle du gradient conjugué ou celle du gradient conjugué préconditionné ne sont pas pertinentes pour ces classes de problèmes, notamment lorsque les contraintes sur la solution sont saturées car dans ce cas, il est difficile de trouver une direction conjuguée.

On considère pour les expériences séquentielles, l'utilisation de la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre les systèmes linéaires issus de l'utilisation de la méthode de Newton. En effet, d'une part, la méthode de Gauss-Seidel est deux fois plus rapide que la méthode de Jacobi et d'autre part, on ne peut pas considérer l'utilisation d'un paramètre de relaxation dû au fait qu'à chaque étape de la méthode de Newton, la matrice à inverser n'est pas la même. Les résultats numériques sont donnés dans le tableau **2**.

Newton-Relaxation 3D			Newton-Relaxation 2D		
temps	linéarisation	itéré de G.S	temps	linéarisation	itéré de G.S
1458.9	2	60(1)	9.42	2	16(1)
-	-	59(2)	-	-	1(2)
-	-	-	-	-	-

Newton-Relaxation 1D			Newton-Gauss 1D	
temps	linéarisation	itéré de G.S	temps	linéarisation
536.08	3	6364(1)	5.03	4 où 3
-	-	109(2)	-	-
-	-	1(3)	-	-

Tableau 2 : Temps de calcul (en secondes), nombre de linéarisations et nombre moyen d'itérations de Gauss – Seidel pour chaque phase de linéarisation, pour $d = 1, 2, 3$.

On note que la convergence est rapide, que le temps de calcul est très court et que la méthode de Newton - relaxation est bien adaptée à la résolution du problème non linéaire avec contraintes.

4.2 Expériences parallèles

La décomposition du domaine consiste à diviser le cube $[0, 1]^3$ en parallélépipèdes (seul les axes des y et des z sont coupés). L'ensemble des formules du paragraphe précédent est parallélisé et implémenté avec MPI. Les expériences numériques parallèles ont été effectuées d'une part sur HPC@ LR, centre de supercalculateurs situé à Montpellier (France) et d'autre part sur Grid'5000.

Paramètres

Les paramètres qui ont été pris pour les expériences numériques sont :

- nombre de point de discrétisation pour les axes x, y, z : 300,
- $\theta = 0.5$,
- $\delta_t = 0.01$,
- nombre de pas de temps :5,
- seuil d'arrêt des itérations de linéarisation : 10^{-8} ,
- seuil d'arrêt de Gauss-Seidel-Relaxation : 10^{-10} ,

De plus, dans les expériences numériques on a choisi des conditions initiales compatibles avec les conditions aux limites de Dirichlet.

4.2.1 Résultats sur HPC@LR

Le cluster de HPC@LR est composé des nœuds bi-processeurs de type SMP interconnectés par le réseau Infiniband de vitesse 40 Gb/s . Chaque nœud dispose de 2 processeurs Intel Xeon Westmere avec 6 coeurs par processeur partageant 24 G octets de mémoire.

Les efficacités parallèles rapportées dans le tableau 3 ne sont pas optimales en raison du découpage du domaine à cause de la transmission de messages. Comme la technique CPU des processeurs tend a une meilleur amélioration que la bande passante d'interconnexion, l'impact de la communication va augmenter. Notons que pour le même type de parallélisation, les rendements obtenus dans [54] étaient meilleurs. Cette situation est très intéressante pour l'étude des algorithmes itératifs asynchrones.

Le tableau 3 montre que les relaxations asynchrones ne sont pas intéressantes au dessous de 8 nœuds et qu'à partir de 8 nœuds, les relaxations asynchrones donnent de meilleure résultats comparés aux relaxation parallèles synchrone. Le tableau 4 suggère que la chute d'efficacité observée pour l'algorithme synchrone est due à l'augmentation du nombre de relaxations. En effet, ce comportement est lié à la parallélisation de la méthode de relaxation de Gauss-Seidel. Toutefois, le tableau 5 montre que la chute d'efficacité est principalement due aux communications de messages entre les processeurs. En effet, dans le cas synchrone, les efficacités moyennes d'une relaxation sont proche de l'efficacité globale.

Nb.Noeuds	Nb. Coeurs	Synchrone			Asynchrone		
		Temps	Vitesse	Efficacité	Temps	Vitesse	Efficacité
1	1	54264	-	-	-	-	-
1	6	14328	3.78	0.63	16600	3.26	0.54
1	12	8621	6.29	0.52	10140	5.35	0.44
2	24	4100	13.23	0.55	4652	11.66	0.48
4	48	2307	23.52	0.48	2399	22.61	0.47
6	72	1505	36.05	0.50	1613	33.64	0.46
8	96	1666	32.57	0.33	1255	43.23	0.45
10	120	1358	39.95	0.33	978	55.48	0.46

Tableau 3 : Temps de calcul (en secondes), vitesse et l'efficacité de la solution de l'équation des milieux poreux modifiée en 3D ($300 \times 300 \times 300$) sur 5 pas de temps, par HPC@LR

Nb.Noeuds	Nb. Coeurs	Synchrone		Asynchrone	
		Relaxations	Iter.lin.	Relaxations	Iter.lin.
1	1	80489	21	-	-
1	6	81025	21	93088	21
1	12	81073	21	91710	21
2	24	81421	21	89311	22
4	48	81700	21	89284	25
6	72	81880	21	90238	26
8	96	82148	21	94722	27
10	120	82292	21	94210	26

Tableau 4

Nombre total de relaxations de Gauss-Seidel et nombre total d'iterations de linearisation de la solution de l'équation des milieux poreux modifiée en 3D ($300 \times 300 \times 300$)

sur 5 pas de temps, par HPC@LR

Nb.Noeuds	Nb. Coeurs	Efficité moyenne par relaxation	
		Synchrone	Asynchrone
1	6	0.63	0.63
1	12	0.52	0.50
2	24	0.55	0.53
4	48	0.49	0.52
6	72	0.50	0.52
8	96	0.34	0.52
10	120	0.34	0.54

Tableau 5

Efficacité moyenne par relaxation pour la résolution de l'équation des milieux poreux modifiée ($300 \times 300 \times 300$) sur 5 pas de temps, par HPC@LR

De plus, les tableaux 4 et 5 montrent que l'utilisation de la méthode asynchrone conduit à une convergence plus lente; c'est dû au grand nombre de relaxations, mais cette baisse de la vitesse de convergence est compensée par des relaxations parallèles plus efficaces. En effet, plus on effectue de relaxations et plus la qualité de la solution obtenue s'améliore. L'efficacité moyenne d'une relaxation parallèle est plus élevée dans le cas asynchrone au delà de 2 nœuds. En outre, les relaxations parallèles asynchrones ne sont pas dégradées par les communications de messages à partir de 8 nœuds. La performance globale du calcul parallèle a moins de variation que dans le cas asynchrone.

Notons qu'en utilisant des relaxations asynchrones à l'intérieur du processus de linéarisation, le nombre d'itérations peut être plus élevé.

4.2.2 Résultat sur la GRID'5000

Les expériences numériques parallèles ont été effectuées sur GRID'5000, la grille nationale de calcul en France.

Les clusters qui ont été utilisés pour les expériences numériques sont ceux de Sophia-

Antipolis. Les nœuds sont composés de bi-processeurs SMP sur le réseau Gigabit Ethernet. Chaque nœud possède 4 processeurs de type Intel Xeon Nehalem, partageant une mémoire de 32 Gbytes. Notons que seuls 2 coeurs par nœud ont été utilisés au cours de ces expériences.

Nb.Noeuds	Nb. Coeurs	Synchrone			Asynchrone		
		Temps	Vitesse	Efficacité	Temps	Vitesse	Efficacité
1	1	73085	-	-	-	-	-
1	2	37070	1.97	0.98	40559	1.80	0.90
2	4	18657	3.91	0.97	19619	3.72	0.93
4	8	10609	6.88	0.86	9954	7.34	0.91
6	12	7940	9.20	0.76	6660	10.97	0.91
8	16	6584	11.09	0.69	4937	14.80	0.92
10	20	6382	11.45	0.57	3949	18.50	0.92
12	24	3990	18.31	0.76	3330	21.94	0.91
14	28	3665	19.93	0.71	2951	24.75	0.88
16	32	3221	22.68	0.70	2587	28.24	0.88
18	36	3609	20.24	0.56	2346	31.14	0.86

Tableau 6 : Temps de calcul (en secondes), vitesse et efficacité de la résolution de l'équation des milieux poreux modifiée en 3D ($300 \times 300 \times 300$) sur 5 pas de temps, par Grid'5000

Nb.Noeuds	Nb. Coeurs	Synchrone		Asynchrone	
		Relaxations	Iter.lin	Relaxations	Iter.lin
1	1	80489	21	-	-
1	2	80847	21	88965	21
2	4	81187	21	91495	21
4	8	81236	21	89894	21
6	12	81073	21	89479	23
8	16	81282	21	88190	21
10	20	81264	21	87577	23
12	24	81421	21	89686	24
14	28	81432	21	90738	22
16	32	81567	21	91681	22
18	36	81579	21	93030	23

Tableau 7

Nombre total de relaxations de Gauss-Seidel et nombre total d'iterations de linearisation pour la résolution de l'équation des milieux poreux modifiée en 3D ($300 \times 300 \times 300$) sur 5 pas de temps, par Grid'5000

Nb.noeuds	Nb.cores	Efficité moyenne par relaxation	
		synchrone	asynchrone
1	2	0.99	0.99
2	4	0.98	1.05
4	8	0.86	1.02
6	12	0.77	1.01
8	16	0.70	1.01
10	20	0.57	1.00
12	24	0.77	1.01
14	28	0.72	0.99
16	32	0.71	1.00
18	36	0.56	0.99

Tableau 8

Efficacité moyenne par relaxation pour la résolution de l'équation des milieux poreux modifiée ($300 \times 300 \times 300$) sur 5 pas de temps, par Grid'5000

Le tableau 6 montre que les relaxations asynchrones sont intéressantes à partir de 4 noeuds. Au dessus de 4 noeuds, les relaxations synchrones ont de meilleures performances.

On peut observer dans le tableau 7 la même augmentation du nombre de relaxations, lorsque le nombre de processeurs augmente. Dans le cas synchrone, cela est dû à la parallélisation du schéma de relaxation de Gauss-Seidel. Mais ceci n'est pas la cause de la baisse d'efficacité de l'algorithme parallèle synchrone, car le tableau 8 montre que l'efficacité moyenne d'une relaxation synchrone est liée à l'efficacité globale présentée dans le tableau 6.

Par ailleurs, le tableau 8 montre que les relaxations asynchrones ne sont pas dégradées par la communication de messages ; en effet l'efficacité moyenne d'une relaxation ne varie pas beaucoup, mais la convergence plus lente (voir le tableau 7), a une influence sur l'efficacité parallèle globale (voir le tableau 6). Dans le cas asynchrone, la chute du taux

de convergence est compensée par des relaxations parallèles plus efficaces.

Notons que les tableaux 4 et 7 montrent le même comportement des itérations de linéarisation.

Conclusion et perspectives

Dans cette étude, on a résolu l'équation des milieux poreux modifiée par différentes méthodes numériques où l'on a considéré les conditions aux limites de Dirichlet et de Dirichlet-Neumann. En raison des contraintes sur la solution, la formulation du problème la plus commode est obtenue par perturbation du problème par le sous-différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble convexe décrivant ces contraintes. En utilisant le fait que la matrice de discrétisation spatiale est une M-matrice et également le fait que le système affine est perturbé par des opérateurs diagonaux croissants, cette formulation permet d'étudier d'une manière unifiée le comportement des méthodes de relaxation parallèles et séquentielles utilisées pour la résolution du problème discrétisé par différences finies. Les expériences séquentielles et parallèles menées montrent l'efficacité des méthodes étudiées.

Comme perspectives, on peut envisager dans un travail futur, la situation où les conditions aux limites de Robin (Fourier) et de Neumann sont considérées. Ces situations sont plus complexes d'un point de vue théorique et peuvent nécessiter l'utilisation de notions mathématiques théoriques différentes. À titre de référence, il peut être également intéressant de comparer de façon plus intensive les performances des différents algorithmes parallèles et séquentielles. Plus généralement, on pourrait appliquer les techniques présentées dans ce travail à divers cas complexes modélisés par des problèmes aux limites non linéaires discrétisés ; la discrétisation peut s'obtenir par une application affine construite par une M-matrice et perturbée par des opérateurs croissants diagonaux éventuellement multivoques.

Bibliographie

- [1] A. Berman, R.J. Plemmons, Nonnegative matrices in the mathematical sciences, SIAM, 1994.
- [2] Beltrán, J., Landim, C. : A lattice gas model for the incompressible Navier Stokes equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Statist.* 44, (2008), no. 5, 886-914.
- [3] Benois, O., Esposito, R., Marra, R., Mourragui, M. : Hydrodynamics of a driven lattice gas with open boundaries : The asymmetric simple exclusion. *Markov Process. Related Fields*, 10, (2004), no. 1, 89-112.
- [4] Benois O., Koukkous A., Landim C. : Diffusive behaviour of asymmetric zero range processes. *J. Stat. Phys.* 87, (1997), 577-591.
- [5] Benois, O., Mourragui, M. , Orlandi, E., Saada, E., Triolo, L. : Quenched large deviations for Glauber evolution with Kac interaction and Random Field. *Markov Process. Related Fields*, 18, (2012), 215-268.
- [6] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Large deviations for the boundary driven simple exclusion process. *Math. Phys. Anal. Geom.* 6, 231-267 (2003).
- [7] Bertini L., De Sole A., Gabrielli D., Jona-Lasinio G., Landim C. : Large deviations of the empirical current in interacting particle systems. *Theory of Probability and its Applications*, 51, (2007), 2-27.
- [8] Bertini, L. Landim, C., Mourragui, M. : Dynamical large deviations for the boundary driven weakly asymmetric exclusion process. *Ann. Probab.* Volume 37, Number 6,

(2009), 2357-2403.

- [9] Chen, M.F. : From Markov chains to non-equilibrium particle systems. World Scientific. Singapore. (1992).
- [10] C. Kipnis, C. Landim, Scaling limits of interacting particle systems, in : Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 320, Springer-Verlag, Berlin 1999.
- [11] Comets, F. : Nucleation for a long range magnetic model. Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Statist. 23, (1987), no. 2 135 178.
- [12] D. Chazan and W. Miranker. Chaotic relaxation. Linear Algebra Appl., 2 :199{222, 1969.
- [13] DeMasi, A., Ferrari, P. : A remark on the hydrodynamics of the zero range processes. J. Stat. Phys. 36, (1984), 81-87.
- [14] De Masi A., Orlandi E., Presutti E., Triolo L. : Glauber evolution with Kac potentials I. Mesoscopic and macroscopic limits, interface dynamics. Nonlinearity, 7, (1996), 287 301. Glauber evolution with Kac potentials II. Fluctuation. Nonlinearity, 9, (1996), 27 51. Glauber evolution with Kac potentials. III. Spinodal decomposition. Nonlinearity, 9, (1996), 53 114.
- [15] De Masi A., Presutti E., Tsagkarogiannis D. : Fourier Law, phase transition and the stationary Stephan problem. Arch. Rat. Mech. Anal. DOI : 10.1007/s00205-011-0423-1,
- [16] De Masi, A., Presutti, E., Mathematical methods for hydrodynamic limits. Volume 1501 of Lecture Notes in Mathematics, Springer- Verlag, New York, (1991).
- [17] D.J. Evans, W. Deren, An asynchronous parallel algorithm for solving a class of nonlinear simultaneous equations, Parallel Computing, 17 (1991) 165–180.
- [18] Dobrushin, R.L. : Markov processes with a large number of locally interacting components : existence of a limit process and his ergodicity. Problems Inform. Transmition, 7, (1971), 149 164.

- [19] Dobrushin, R.L. : Markov processes with many locally interacting components : the reversible case and generalization. *Problems Inform. Transmission*, 7 (1971), 235-241.
- [20] Dobrushin, R.L. : Caricature of Hydrodynamics, *proceed. IX th International Congress of Math Phys.*, 17-27 July 1988, Simon, Truman, Davies ed., Adam Hilger (1989), 117-132.
- [21] Durrett, R. : ten lectures on particle systems. *Saint Flour Lecture Notes, Lect. Notes. Math.* 1608, (1995), 97-201.
- [22] E. Kaszkurewicz, A. Bhaya, *Matrix diagonal stability in systems and computation*, Birkhauser, 1999.
- [23] Esposito R., Marra R. : On the derivation of the incompressible Navier-Stokes equation for Hamiltonian particle systems, *Jour. Stat. Phys.*, 74,(1993), 981-1004.
- [24] Esposito, R., Marra, R., Yau, H.T. : Diffusive limit of asymmetric simple exclusion. *Review in Math. Phys.* 6, (1994), 1233-1267.
- [25] Esposito, R., Marra, R., Yau, H.T. : Navier-Stokes equations for stochastic particle systems on the lattice, *Commun. Math. Phys.* 182, (1996), 395-456.
- [26] Eyink G., Lebowitz J. L., Spohn H. : Hydrodynamics of stationary nonequilibrium states for some lattice gas models. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 132, (1990), 252-283.
- [27] Eyink G., Lebowitz J. L., Spohn H. : Lattice Gas Models in Contact with Stochastic Reservoirs : Local Equilibrium and Relaxation to the Steady State. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 140, (1991), 119-131.
- [28] Farfan, J.S. Landim, C., Mourragui, M. : Hydrostatics and dynamical large deviations of boundary driven gradient symmetric exclusion processes. *Stochastic Processes and their Applications*, (2010).
- [29] F. Robert, M. Charnay, and F. Musy. Itérations chaotiques série-parallèle pour des équations non linéaires de point fixe. *Aplikate Matematiky*, 20 :1-38, 1975.
- [30] G. Baudet, Asynchronous iterative methods for multiprocessor, *Journal of A.C.M.*, 25-2 (1978) 226-244.

- [31] Giacomini G., Lebowitz J. L. : Phase segregation dynamics in particle systems with long range interaction I. Macroscopic limits. *J. Stat. Phys.* 87(1997), 37-61.
- [32] Giacomini G., Lebowitz J. L. : Phase segregation dynamics in particle systems with long range interaction II. Interface Motion. *SIAM J. Appl. Math.* 58(1998), 1707-1729.
- [33] Giacomini, G., Lebowitz, J. L., Marra, R. : Macroscopic evolution of particle systems with short- and long-range interactions. *Nonlinearity*. 13, (2000), 2143-2162.
- [34] Guo M.Z., G. Papanicolaou G., Varadhan S.R.S. : Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions. *Comm. Math. phys.* 118, (1988), 31-59.
- [35] H. Brezis, opérateurs maximaux monotones et semi groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-H/AMERICAN. ELSEVIER. January 15, 1973
- [36] H. Spohn, Large Scale Dynamics Of Interacting Particles, Springer-Verlag, 1991.
- [37] H.T. Yau, Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models, *Lett. Math. Phys.*, 22 (1) (1991) 63-80.
- [38] Kac M., Uhlenbeck G., Hemmer P.C. : On the vander Waals theory of vapour-liquid equilibrium. I. Discussion of a one-dimensional model. *J. Math. Phys.* 4 (1963), 216-228. II. Discussion of the distribution functions. *J. Math. Phys.* 4 (1963), 229-247. III. Discussion of the critical region. *J. Math. Phys.* 5 (1964), 60-74.
- [39] J.C. Miellou. Algorithmes de relaxation chaotique a retards. *RAIRO*, 1 :55-82, 1975.
- [40] J.C. Miellou, D. El Baz, P. Spiteri, A new class of asynchronous iterative algorithms with order interval, *Mathematics of Computation*, 67-221 (1998), 237-255.
- [41] J.C. Miellou, P. Spiteri, Un critère de convergence pour des méthodes générales de point fixe, *M2AN*, 19 (1985), 645-669.
- [42] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic Press, New York, 1970.

- [43] Kipnis C. ; Landim C. : Scaling limits of interacting particle systems. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 320. Springer-Verlag, Berlin, (1999).
- [44] Kipnis C., Landim C., Olla S. : Macroscopic properties of a stationary non-equilibrium distribution for a non-gradient interacting particle system. Ann. Inst. H. Poincaré., Vol. 31, (1995), pp. 191-221.
- [45] Landim C., Mourragui M., Sellami S. : Hydrodynamical limit for a nongradient interacting particle system with stochastic reservoirs. Teor. Veroyatnost. i Primenen. Probab. 45, N. 4, (2000), 694 717. Translation in Theory Probab. Appl. 45, N. 4, (2002), 604 623.
- [46] Landim, C., Olla, S., Yau, H.T. : First order correction for the hydrodynamic limit of asymmetric simple exclusion processes in dimension $d \geq 3$, Communications on Pure and Applied Mathematics 50, (1997), 149-203.
- [47] Landim, C., Sued, M., Valle, G. : Hydrodynamic Limit of Asymmetric Exclusion Processes Under Diffusive Scaling in $d=3$. Commun. Math. Phys. 249, N. 2, (2004), 215-247
- [48] Lebowitz J., Penrose O. : Rigorous treatment of the Van der Waals Maxwell theory of the liquid-vapour transition. J. Math. Phys. 7 (1966), 98 113.
- [49] L. Giraud, P. Spiteri, Résolution parallèle de problèmes aux limites non linéaires, M2 AN, 25 (1991) 579-606.
- [50] Liggett, T.M. : Interacting Particle Systems. Springer-Verlag. Berlin, New York, (1985).
- [51] Liggett, T.M. : Stochastic Interacting Systems : Contact, Voter and Exclusion Processes. Springer Verlag., (1999).
- [52] Liggett, T.M. : Continuous time Markov processes : an introduction. Graduate Studies in Mathematics., Vol 113, AMS. (2010).

- [53] L. Ziane-Khodja, M. Chau, R. Couturier, J. Bahi, P. Spiteri, Parallel solution of American options derivatives on GPU clusters, *International Journal of Computers Mathematics with Applications*, 65 - 11 (2013), 1830 -1848.
- [54] Marra R., Mourragui M. : Phase segregation dynamics for the Blume- Capel model with Kac interaction. *Stoch. Proc. Appl.* 88(2000), 79-124.
- [55] M. Chau, D. El Baz, R.Guivarch, and P. Spiteri, MPI implementation of parallel sub-domain methods for linear and nonlinear convection-diffusion problems, *J. Parallel Distrib. Comput.*, 67(5)(2007) 581 - 591.
- [56] M. Chau, R. Couturier, J. Bahi, P. Spiteri, Asynchronous grid computation for american options derivative, *Advances in Engineering Software*, 60-61 (2013) , 136 - 144.
- [57] M. Chau, T. Garcia, P. Spiteri, Asynchronous Schwarz methods applied to constrained mechanical structures in grid environment, *Advances in Engineering Software*, 74 (2014), 1 - 15.
- [58] M. El Tarazi, Some Convergence Results for Asynchronous Algorithms, *Numerische-Mathematik*, 39 (1982), 325-340.
- [59] Mourragui, M. Comportements hydrodynamiques et grandes déviations des systèmes de particules en interaction à l'équilibre et hors équilibre Document de synthèse en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches, l'université de Rouen, 2012
- [60] Mourragui, M. Orlandi, E. : Lattice gas model in random medium and open boundaries : hydrodynamic and relaxation to the steady state. *Journal of Statistical Physics*. Volume 136, (2009), 685-714.
- [61] Mourragui, M., Orlandi, E. : Macroscopic properties and dynamical large deviations of the boundary driven Kawasaki process with long range interaction. To be published in *Nonlinearity*, 26, (2013) 141-175.

- [62] M. Sasada, Hydrodynamic limit for particle systems with degenerate rates without exclusive constraints, 7 (2010) 277-292.
- [63] Presutti, E. : Scaling limits in Statistical Mechanics and Microstructures in Continuum of Mechanics. Springer. Berlin, Theoretical and mathematical Physics, (2010).
- [64] P. Benilan. Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications. Thèse de Doctorat es Sciences, Orsay, 1972.
- [65] P. Faurre, Analyse numérique, notes d'optimisation, Ellipse, Ecole Polytechnique, 1988
- [66] P. Gonçalves, C. Landim and C. Toninelli, Hydrodynamic limit for a particle system with degenerate rates. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 45 (4) (2009) 887-909.
- [67] P. Spiteri. Contribution à l'étude de grands systèmes non lineaires. Thèse de Doctorat des Sciences, Faculté des Sciences et des Techniques de l'Université de Franche-Comté, 1984.
- [68] P. Spiteri, A new characterization of M-matrices and H-matrices, BIT numerical Mathematics, 43 (2003) 1019 - 1032.
- [69] Quastel, J. : Diffusion of color in the simple exclusion process, Comm. Pure. Appl. Math, XLV, (1992), 623-679.
- [70] R. Glowinski, J.L. Lions, R. Tremolieres, Analyse numérique des inéquations variationnelles, DUNOD, tome 1 and 2, 1976.
- [71] Spitzer, F. : Random process de ned through the interaction of an infinite particle system. Springer Lecture Notes in Mathematics, vol 89, (1969), 201 223.
- [72] Spitzer, F. : Interaction of Markov Processes, Adv. Math. 5, (1970), 246 290.
- [73] T. Liggett, Interacting Particle Systems, Springer-Verlag, NewYork 1985.
- [74] Varadhan S.R.S. : Large Deviations and Applications. CBMS- NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 46 (1984).

- [75] Varadhan S.R.S. : Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions II. in *Asymptotic Problems in Probability Theory : Stochastic Models and Diffusion on Fractals*, edited by K. Elworthy and N. Ikeda, Pitman Research Notes in Mathematics 283, Wiley (1994).
- [76] V. Barbu. *Non linear semi-groups and differential equations in Banach spaces*. Noordhoff international publishing, Groningen, 1976.
- [77] Yau H. T. : Relative entropy and hydrodynamics of Ginsburg-Landau models. *Letters Math. Phys.* 22, (1991), 63-80.