

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR- ANNABA



جامعة باجي مختار-عنابة

Faculté des Sciences

Année: 2016

Département de Physique

Laboratoire de Physique des Rayonnements

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCE

Thème:

**Etude de l'influence des effets non linéaire sur la
propagation des solitons dans un milieu non linéaire**

Option: Optique Non Linéaire

Par

Daoui Abdel Kader

DIRECTEUR DE THESE: Triki Houria Professeur U. Badji Mokhtar, Annaba

Devant le jury :

Président: Hamaizi Yamina Maitre de Conférences U. Badji Mokhtar, Annaba

Rapporteur : Triki Houria Professeur U. Badji Mokhtar, Annaba

Examineurs : Bouzid Samia Professeur U. Mentouri, Constantine

Sid Abdelaziz Professeur U. Hadj Lakhdar, Batna

الإهداء

إلى الوالدين الكريمين

ربما لم ابركما تمام البر... لكني اعلم أن قلبكما اكبر من أي بر

إلى من أحمل اسمه بكل فخر...إلى من أنار درب حياتي بوجوده وحرص على إجتهادي...إلى من ألبسني ثوب المعرفة...إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم... إلى الذي لو كرست الدهر كله بجمع أفضاله علي ما أحصيتها ...

إلى أبي العزيز...

إلى من لا يمكن للكلمات أن توفي حقها... إلى التي رأني قلبها قبل عينيها، وحضنتني أحشائها قبل يديها...إلى من أرضعتني من الإيمان مايقويني ...ومن الحنان مايكفيني...ومن العلم ماينير عقلي ووجداني...إلى من ربنتني وأنارت دربي وأعانتني بالصلوات والدعوات...إلى أعلى إنسان في هذا الوجود إلى أمي الحبيبة والغالية...

"واخفض لهما جناح الذل من الرحمة وقل رب ارحمهما كما ربياني صغيرا"

الآية 24، سورة الاسراء

إلى من كانوا يضيئون لي الطريق ويساندونني و يتنازلون عن حقوقهم لإرضائي والعيش في هناء ، إلى من تذوقت معهم أجمل اللحظات ، أحبكم حبا لو مر على أرض قاحلة لتفجرت منها ينابيع المحبة إلى إخوتي...

إلى من ساندتني وأزرتني في دربي وقاسمتني همومي ، إلى من لملت احزاني بين فترة وأخرى ، إلى صاحبة القلب الطيب والنوايا الصادقة إلى زوجتي الوفية...

إلى من لأجلهم سرت في الدرب قرّة عيني و بهجة بصري و سرور فؤادي : عبد الحق ، عبد النور ، ... إلى أبنائي الأعزاء...

...ضاوي عبدالقادر...

Remerciements

Je voudrais exprimer ici ma reconnaissance aux personnes qui m'ont aidé à mener à bien ce travail de recherche.

Tout d'abord, je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à ma directrice de thèse, Professeur Houria TRIKI. Je la remercie grandement pour m'avoir choisi ce projet et pour m'avoir fait confiance tout au long de ces années. Elle a toujours été disponible pour me soutenir et me conseiller au cours de la préparation de cette thèse. Je la remercie aussi pour l'aide compétente qu'elle m'a apportée. Elle m'a beaucoup appris, j'ai apprécié son enthousiasme et sa sympathie. Un grand merci encore une fois pour son aide précieuse pour ma recherche bibliographique et problématique et pour son soutien qui s'est avéré déterminant pour mener ce travail.

J'adresse mes respectueux remerciements à Monsieur Abdessetar El AKRMI, Professeur au département de Physique, Université de Annaba, de m'avoir accueilli au sein du laboratoire de Physique des Rayonnements. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie tout particulièrement Madame Yamina HAMAIZI, Maître de Conférences à l'université de Annaba, pour l'intérêt qu'elle a porté à mon travail et d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Madame Samia BOUZID, Professeur à l'université de Constantine, pour l'honneur qu'elle me fait d'accepter d'être un membre dans ce jury.

Je remercie vivement Monsieur Abdelaziz SID, Professeur à l'université de Batna, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier très vivement Monsieur Mohamed Kamel RABIA, pour ces conseils tout au long de cette étude.

Je tiens enfin à remercier mon collègue Badreddine BOUBIR pour son soutien et son encouragement continu.

ملخص

إن دراسة ديناميكية الانتشار اللاخطي للأمواج المنفردة تمثل موضوع هام من الأبحاث الأساسية في مجال الليزر والضوء اللاخطي حيث تستخدم تقنيات رياضية وعددية متقدمة. يعتمد تشكل الأمواج المنفردة في الأوساط الفيزيائية على توازن مثالي بين فعلي التشتت واللاخطية. نهتم في هذا العمل بدراسة ديناميكية الانتشار اللاخطي للأمواج المنفردة في الأوساط ضعيفة اللاخطية وضعيفة التشتت والتي توصف بمعادلات التطور من نوع كورتويغ دي فريز (Korteweg-de Vries). نهتم بشكل خاص بدراسة انتشار الأمواج المنفردة في الأوساط غير المتجانسة والتي توصف بمعادلات كورتويغ دي فريز و غاردنر (Gardner) المعممة ذات المعاملات المتغيرة. في البداية، أظهرنا أن التطور الزمني و المكاني للأمواج المنفردة من نوع كورتويغ دي فريز يتعلق أساسا بالتغير الزمني لكل من معاملات الضياع واللاخطية للوسط. كخطوة ثانية، إهتمنا بإيجاد حلول دقيقة من نوع موجات تقدمية لمعادلة غاردنر المعممة ذات المعاملات المتغيرة والتي تمثل مزيج من معادلة كادفي ومعادلة كادفي المعدلة. لهذا الغرض، إستخدمنا طريقة المعادلة المساعدة (auxiliary method) لإيجاد مختلف الحلول الدقيقة من نوع موجة تقدمية. في الأخير، قمنا بتطبيق طريقة (G'/G) من اجل إيجاد حلول لمعادلة غاردنر المعممة ذات معاملات لاخطية ذات الرتبة n و ذات معامل التشتت من الدرجة الأولى. تم الحصول على عائلات جديدة من الحلول الدقيقة من نوع الموجات المنفردة، موجات مصطدمة (shock)، والموجة المنعزلة وهذا في إطار شروط محددة. إن الحلول المتحصل عليها تسمح بالفهم الجيد لمختلف الظواهر الناتجة عن إنتشار الأمواج في الأوساط الديناميكية والتي توصف بمعادلات من نوع كادفي و غاردنر. أجرينا أيضا دراسة رقمية وذلك لتحليل ديناميكية الإنتشار اللاخطي للأمواج المنفردة المتحصل عليها.

Résumé

L'étude de la dynamique de propagation non linéaire des solitons où ondes solitaires constitue un sujet de recherche fondamental dans les domaines d'optique non linéaire et lasers, et fait appel à des techniques mathématiques et numériques élaborées. La formation des solitons repose sur un équilibre parfait entre l'effet de la dispersion et la non linéarité, principaux effets physiques intervenant dans la propagation des ondes dans les milieux non linéaires.

Le travail présenté concerne l'étude théorique de la dynamique de propagation non linéaire des solitons dans les milieux faiblement non linéaires et faiblement dispersifs approximés par les équations d'évolution de type Korteweg-de Vries (KdV). On s'intéresse plus particulièrement aux solutions d'ondes solitaires qui peuvent se propager dans les milieux inhomogènes gouvernés par les équations KdV et Gardner généralisée à coefficients variables. En premier lieu, nous avons montré que l'évolution spatio-temporelle du soliton KdV dépend fortement de la variation temporelle des coefficients de perte et de la non linéarité du milieu. Dans une seconde étape, nous nous sommes intéressés à la recherche de solutions explicites de type ondes progressives de l'équation de Gardner généralisée à coefficients variables qui représente une combinaison de deux équations KdV et KdV modifiée. Une technique appelée "*méthode de l'équation auxiliaire*" a été utilisée pour déterminer de nouvelles familles de solutions exactes de types onde progressive. Dans une dernière étape, nous avons adapté une méthode appelée "*méthode (G'/G) étendue*" pour construire les solutions localisées d'un modèle de type Gardner généralisé présentant des termes non linéaires de puissance quelconque et un terme de dispersion du premier ordre. De nouvelles familles de solutions exactes de type ondes solitaires, ondes de choc (kink) et soliton singulier ont été obtenues sous certaines conditions paramétriques. Les solutions ainsi obtenues permettent une bonne compréhension des différents phénomènes intervenant au cours de la propagation des ondes dans les systèmes dynamiques modélisés par les équations de type KdV. Une étude numérique a été accomplie pour analyser la dynamique de propagation spatio-temporelle des solitons obtenus.

Abstract

The study of the nonlinear dynamics propagation of solitary waves or solitons constitutes a fundamental research in the areas of nonlinear optics and lasers, and appeals to powerful mathematical and numerical techniques. The formation of solitons is based on a perfect balance between the dispersion and nonlinearity effects, principal physical effects occurring during the wave propagation in nonlinear media.

In this work, we present a theoretical study on the dynamics of solitons in weakly nonlinear and weakly dispersive media approximated by nonlinear evolution equations of Korteweg-de Vries (KdV) type. In particular, we were interested by solitary wave solutions which can propagate in inhomogeneous media described by KdV and generalized Gardner equations with variable coefficients. First, we showed that the evolution of the KdV soliton in space-time domains depends strongly on the temporal variation of the loss and the nonlinearity coefficients. In the second step, we were interested by finding progressive type wave solutions of a generalized Gardner equation with variable coefficients, which represents a combination of KdV and modified KdV equations. A method called "*auxiliary equation method*" has been used to determine a new family of exact traveling wave solutions. As a last step, we have adapted a method called "*The (G'/G) expansion method*" to construct localized solutions of a generalized Gardner equation including nonlinear terms of any power and first-order dispersion. A new family of exact solitary waves, shock waves (kink) and singular soliton solutions have been obtained under certain parametric conditions. The solutions obtained here permits a good understanding of various phenomena arising in dynamical systems modeled by KdV type equations. A numerical study has been realized in order to analyze the spatio-temporal propagation of the obtained solitons.

Table de matière

Dédicace	2
Remerciements	3
Résumé	5
Table de matière	7
Abréviations	11
Liste des symboles	12
Liste des figures	14
Introduction générale	16
Références	20

CHAPITRE I

Principes de base de l'optique non linéaire

I.1. Introduction.....	22
I.2. Origine de la non linéarité optique	23
I.3. Polarisation non linéaire	24
I.4. Equation de propagation non linéaire	25
I.5. Effets non linéaires	26
I.5.1. Effets non linéaires de second ordre	26
I.5.1.1. Génération de la seconde harmonique	27
I.5.1.2. Somme de fréquences	28
I.5.1.3. Mélange paramétrique.....	28
I.5.1.4. Effet pockels	29
I.5.2. Effets non linéaires du troisième ordre	30
I.5.2.1. Effet Kerr optique.....	30
I.5.2.1.1. Auto-modulation de phase SPM	31
I.5.2.1.2. Modulation de phase croisée XPM.....	32
I.5.2.1.3. Mélange à quatre ondes	33
I.5.2.1.4. Auto focalisation.....	34

I.5.2.2. Diffusion stimulée	34
I.5.2.2.1. Diffusion Raman stimulée SRS	35
I.5.2.2.2. Diffusion Brillouin stimulée SBS	36
I.6. Conclusion	37
Références	38

CHAPITRE II

Equation de Korteweg-de Vries (KdV)

II.1. Introduction	41
II.2. Découverte du soliton.....	42
II.3. Définition d'un soliton	43
II.4. Différents types des solitons.....	44
II.4.1. Solitons spatiaux.....	44
II.4.2. Solitons temporels	44
II.4.3. Solitons spatio-temporels (balles de lumière)	45
II.5. Equation de Korteweg-de Vries et soliton.....	46
II.6. Dérivation de l'équation KdV	46
II.7. Solutions de l'équation KdV	49
II.7.1. Solutions à profile constant	49
II.7.2. Solution soliton.....	50
II.7.3. Solution cnoïdale.....	51
II.8. Lois de conservation de l'équation KdV	52
II.8.1. Hamiltonien	53
II.9. Différentes formes de l'équation KdV	54
II.10. Propagation d'un soliton KdV.....	55
II.10.1. Régime purement non linéaire	55
II.10.2. Régime purement dispersif.....	56
II.10.3. Compromis: dispersion-non linéarité	56
II.11. Interaction des solitons KdV	57

II.12. Équations KdV d'ordre supérieur	58
II.12.1. Équations KdV d'ordre cinq.....	58
II.12.2. Équations KdV d'ordre sept.....	58
II.13. Conclusion.....	59
Références	60

CHAPITRE III

Techniques de résolution des modèles KdV

III.1. Introduction	64
III.2. Méthodes de résolution numérique des modèles KdV.....	65
III.2.1. Méthode de la transformée de Fourier à pas divisé	65
III.2.2. Méthode de Runge-kutta d'ordre quatre.....	68
III.3. Méthodes de résolution analytiques des modèles KdV.....	69
III.3.1. Méthode (G'/G) étendue	70
III.3.2. Méthode de l'équation auxiliaire	72
III.4. Conclusion.....	73
Références	74

CHAPITRE VI

Dynamique de propagation non linéaire des solitons modélisés par les équations KdV et Gardner à coefficients variables

VI.1. Introduction.....	78
VI.2. Équations pour soliton	80
VI.2.1. Milieux homogènes : Équations KdV à coefficients constants	80
VI.2.2. Milieux inhomogènes : Équations KdV à coefficients variables.....	80
VI.3. Impact de la variation temporelle des paramètres sur la dynamique de propagation de l'onde solitaire.....	81
VI.3.1. Impact des pertes	81
VI.3.2. Impact de la non linéarité.....	84

VI.4. Equations de Gardner à coefficients variables	86
VI.4.1. Application de la méthode de l'équation auxiliaire	87
VI.4.2. Application de la méthode (G'/G) étendue	92
VI.5. Conclusion	95
Références	96
Conclusion générale	97

ABREVIATIONS

ONL	Optique Non Linéaire.
GSH	Génération de la Second Harmonique.
OPO	Oscillateur Paramétrique Optique.
FWM	Mélange à quatre ondes.
SPM	Auto-modulation de phase.
XPM	Modulation de phase croisée.
SRS	Diffusion Raman stimulée.
SBS	Diffusion Brillouin stimulée.
KdV	Equation de Korteweg-de-Vries.
mKdV	Équation de Korteweg-de Vries modifiée.
fKdV	Equation KdV de cinquième ordre.
sKdV	Equation KdV de septième ordre.
SSF	Méthode de Fourier à pas divisé.
ODE	Equation différentielle ordinaire.

LISTE DES SYMBOLES

\vec{E}	Champ électromagnétique.
ϵ_0	Permittivité du vide.
$\chi^{(1)}$	Susceptibilité linéaire du milieu.
$\chi^{(2)}$	Tenseurs de susceptibilité d'ordre 2 du matériau.
$\chi^{(3)}$	Tenseurs de susceptibilité d'ordre 3 du matériau.
\vec{P}	Polarisation
\vec{P}_L	Polarisation linéaire
\vec{P}_{NL}	Polarisation non linéaire
\vec{B}	Champs magnétique.
\vec{D}	Vecteur de l'induction électrique.
\vec{H}	Vecteur de l'induction magnétique.
\vec{J}	Vecteur de la densité de courant.
ρ	Densité de charge.
σ	Conductivité électrique.
μ_0	Perméabilité du vide.
\vec{M}	Vecteur de polarisation magnétique.
ω	Fréquence de l'onde.
n	Indice de réfraction du milieu.
n_0	Indice de réfraction linéaire du milieu.
n_2	Coefficient non-linéaire caractéristique du matériau.
c	Célérité de la lumière dans le vide.
ϕ	Phase de l'onde.

ϕ_L	Phase linéaire de l'onde.
ϕ_{NL}	Phase non linéaire de l'onde.
L_{eff}	Longueur effective de la fibre.
$I(t,z)$	Intensité de l'onde.
P_{cr}	Puissance critique de l'impulsion.
A_{eff}	Aire effective de la fibre.
g_r	Gain Raman.
α	Coefficient de pertes de la fibre optique.
k	Vecteurs d'onde.
λ_p	Longueur d'onde.
v	Vitesse de propagation du fluide (onde).
g	Accélération de la gravité.
h	Profondeur d'eau.
η	Hauteur de la vague.
$u(x,t)$	Amplitude de l'onde au point x et au temps t .
V_{eff}	Pseudo-potentiel.
H	Hamiltonien.
L	Opérateur de la partie linéaire.
N	Opérateur de la partie non linéaire.
t	Temps de propagation.
$K(m)$	Intégrale elliptique complète de première espèce de module m .
m	Module de la fonction elliptique de Jacobi.

LISTE DES FIGURES

Figure I.1	Représentation schématique du mouvement oscillant des charges négatives dans un milieu diélectrique soumis à une onde électromagnétique 23	23
Figure I.2	Schéma descriptif du processus de la génération de second harmonique 27	27
Figure I.3	Schéma de principe de la somme de fréquences 28	28
Figure I.4	Mélange paramétrique 29	29
Figure I.5	Principe de fonctionnement du modulateur Mach-Zehnder 30	30
Figure I. 6	Schéma de processus du mélange à quatre ondes pour $\omega_i = \omega_j$ 33	33
Figure I.7	Auto focalisation par effet Kerr optique 34	34
Figure I.8	Schéma descriptif de l'effet Raman 35	35
Figure II.1	Évolution schématique d'une perturbation de la surface de l'eau dans un réservoir créée par le mouvement d'un piston vers le bas ou vers le haut 42	42
Figure II.2	Soliton spatio-temporel : balle de lumière 45	45
Figure II.3	Surface eau-air 46	46
Figure II.4	Apparence du pseudo-potentiel $V_{\text{eff}}(\varphi)$ 50	50
Figure II.5	Evolution d'une onde cnoïdale pour différentes valeurs du paramètre elliptique k 52	52
Figure II.6	Evolution d'une impulsion dont la dynamique est régie par l'équation de Burger 55	55
Figure II.7	Evolution d'une impulsion dans le cas de l'équation KdV linéarisée 56	56
Figure II.8	Solution soliton de l'équation KdV pour $\nu=4$ et $z = \xi - \nu \tau$ 57	57
Figure II.9	Interaction de deux solutions KdV 57	57
Figure III.1	Organigramme de la méthode du split-step Fourier 66	66
Figure III.2	Plot de la solution numérique de l'équation KdV 69	69
Figure VI.1	Évolution de l'onde solitaire brillante 82	82
Figure VI.2	Évolution du profil de l'onde solitaire 83	83

Figure VI.3	Évolution de l'onde KdV en fonction du temps pour $\gamma(t) = t^2 / 2$	84
Figure VI.4	Évolution de l'onde KdV en fonction du temps pour $\gamma(t) = \sin(t)$	84
Figure VI.5	Évolution de l'onde KdV en fonction du temps pour $\gamma(t) = e^{t-10}$	85
Figure VI.6	Évolution de l'onde KdV en fonction du temps pour $\gamma(t) = \operatorname{sech}(t)\operatorname{tanh}(t)$	85
Figure VI.7	Évolution de l'onde KdV en fonction du temps $\gamma(t) = \left[\frac{2}{3} \tan^2\left(\frac{t}{3}\right) + \left(\frac{t}{3}\right) \right] \tan\left(\frac{t}{3}\right)$	86

INTRODUCTION GENERALE

Le monde de la physique a connu une importante évolution depuis la mise au point du terme "*soliton*" qui vient pour la première fois de l'observation de l'ingénieur Ecossais John Scott Russell en 1834 ayant décidé de suivre un nouveau type d'onde hydrodynamique appelée "*onde solitaire*" qui se propage sans aucune déformation le long d'un canal sur plusieurs dizaines de kilomètres. Le soliton est une onde capable de se propager sur de longues distances, théoriquement infinies, sans aucune déformation notable et qui se révèle exceptionnellement stable en présence de perturbations [1]. Plus tard, la forme de soliton a été expliquée par deux mathématiciens néerlandais Diederik Johannes Korteweg et Gustav de Vries. Ils ont montré que le soliton est également une solution de l'équation de Korteweg-de Vries utilisée pour décrire la propagation des vagues dans un fluide peu profond. La théorie moderne des solitons a commencé par Zabusky et Kruskal en 1965 [2], qui ont inventé le nom soliton pour décrire numériquement des interactions d'ondes solitaires pour le modèle de l'équation KdV [3], le terme *soliton* était alors né. Les solitons trouvent des applications de plus en plus répandues dans le domaine de la physique non linéaire. Ce domaine de science non linéaire a pris une importance considérable et ces ondes solitaires sont maintenant un thème de recherche fondamental dans de nombreuses disciplines scientifiques. On peut citer par exemple la propagation des impulsions dans les fibres optiques, les ondes localisées dans les plasmas astrophysiques, ou bien des aspects microscopiques comme le transport de charge dans les polymères conducteurs, les modes localisés dans des cristaux magnétiques, la dynamique de macromolécules biologiques comme l'ADN et les protéines [4].

Pour analyser la dynamique des solitons, on cherche à exprimer le phénomène de propagation en fonction des paramètres physiques qui le contrôlent. Une modélisation plus réaliste de la propagation des ondes non linéaires dans un milieu matériel requiert de traiter les phénomènes en utilisant les équations d'évolution à coefficients variables. D'une manière générale, ces modèles sont capables de modéliser la dynamique de propagation non linéaire dans des milieux inhomogènes. Il est à noter que les équations d'évolutions à coefficients variables fournissent aussi souvent une approche fructueuse pour décrire la physique d'un système non linéaire.

Ce travail de thèse porte sur l'étude théorique de la dynamique de propagation non linéaire des solitons dans des milieux faiblement non linéaires et faiblement dispersifs. Les équations KdV et Gardner généralisées à coefficients variables qui constituent des modèles de propagation unidirectionnelle pour les ondes longues, sont considérées. L'influence de la

variation temporelle des coefficients de perte et de non linéarité du milieu sur l'évolution spatio-temporelle du soliton KdV est également étudiée.

Pour cet objectif, nous avons choisis parmi les techniques de résolution analytiques une méthode appelée "*méthode de l'équation auxiliaire*" et une autre méthode appelée "*méthode (G'/G) étendue*". De nouvelles familles de solutions exactes de type ondes solitaires, ondes de choc (kink) et soliton singulier ont été obtenues pour les équations d'évolution considérées.

Ce manuscrit se compose des chapitres suivants :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les principes de base de l'optique non linéaire dans un milieu matériel ainsi que ses applications potentielles. Nous présentons également quelques notions nécessaires de la polarisation non linéaire et l'origine physique de la non linéarité. Il est aussi nécessaire de prendre en appréciation l'étude des différents phénomènes non linéaires qui se regroupent en deux catégories selon la susceptibilité non linéaires du milieu: les effets non linéaires d'ordre deux et d'ordre trois. Finalement, nous terminerons ce chapitre par des notions sur les propriétés optiques comme des fonctions dépendantes de la fréquence et de l'intensité du champ appliqué.

Le deuxième chapitre présentera les principaux effets auxquels sont soumis les ondes non linéaires se propageant dans un milieu faiblement non linéaire et faiblement dispersif. Après avoir introduit les différentes propriétés caractéristiques d'un soliton, nous montrerons comment la dispersion et la non linéarité agissent sur la dynamique de propagation. Nous rappelons la dérivation de l'équation de Korteweg-de Vries qui gouverne l'évolution d'une onde dans un milieu faiblement non linéaire et faiblement dispersif ainsi que les différentes lois de conservation qui lui sont associées. A la fin de ce chapitre, nous allons donner d'autres modèles KdV présentant des termes de dispersion d'ordre supérieur.

Le troisième chapitre sera consacré aux différentes méthodes de résolution des modèles KdV. En effet, l'obtention des solutions peut se faire au moyen d'une approche purement numérique, soit au moyen de techniques semi analytiques de type approche variationnelle. Dans ce contexte, nous rappelons certaines méthodes numériques comme par exemple la méthode de Fourier à pas divisé et la méthode de Runge-Kutta ainsi que d'autres méthodes analytiques à savoir la méthode de (G'/G) étendue et la méthode de l'équation auxiliaire.

Le dernier chapitre présente les différents résultats de nos calculs théoriques qui traitent la dynamique de propagation non linéaire dans un système plus compliqué ou les ondes sont gouvernées par les équations de type Korteweg-de Vries à coefficients variables extensible à

des termes de non linéarités de puissance quelconque. Notre étude a été effectuée à l'aide de la méthode de l'équation auxiliaire et la méthode (G'/G) étendue.

REFERENCES

- [1] P. Gravel, "*Solitaires et singuliers solitons, Science et technologie*", (2015).
- [2] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, "*Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*", *Phy Rev. Lett.* 15 (1965) 240-243.
- [3] S. Bertrand, "*Surfaces solitoniques plongées dans des algèbres de Lie associées aux modèles intégrables*", Thèse, université du Québec (2013).
- [4] <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/pendules-couples-soliton.xml>.

CHAPITRE I

Principes de base de l'optique non linéaire

I.1. Introduction

L'interaction entre la lumière et la matière se manifeste par des phénomènes optiques perceptibles dans notre vie quotidienne. Le domaine de l'optique linéaire regroupe les interactions ordinaires comme la réfraction, la réflexion et la diffusion où l'intensité lumineuse transmise est proportionnelle à celle incidente. Tandis que l'intensité lumineuse transmise dans le domaine de l'optique non linéaire ne suit pas la même loi précédente du fait que les propriétés optiques varient en fonction de l'intensité de l'onde incidente de façon carré ou cubique. L'exemple le plus répandu est les sources lasers.

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement les principes de base de l'optique non linéaire dans un milieu matériel. En premier lieu, nous donnerons un bref aperçu sur l'origine physique des non linéarités optique microscopique et macroscopique en introduisant quelques notions sur la polarisation et la susceptibilité non linéaire. Ensuite, nous allons exposer les différents types d'effets non linéaires d'ordre deux et trois existants.

I.2. Origine de la non linéarité optique

Pour décrire clairement l'origine de la non linéarité optique, nous allons considérer un matériau diélectrique parfait excité par un champ électrique, donc les charges positives du matériau diélectrique sont transportées dans la direction du champ par contre les charges négatives sont transportées dans la direction opposée générant ainsi des dipôles induits. De ce fait, le matériau diélectrique devient polarisé de façon uniforme. Il est possible d'envisager pour les hautes fréquences et selon l'approximation de Born-Oppenheimer que seuls les électrons sont entraînés par un mouvement en raison de la grande masse du noyau. De même par action d'une onde électromagnétique de faible intensité, le dipôle induit oscille autour de sa position d'équilibre à la même fréquence que celle du champ électrique de l'onde. L'effet du champ magnétique de l'onde électromagnétique est beaucoup plus faible et peut être négligé. La figure (I.1), donne une description détaillée sur l'origine de la polarisation induite à cause du mouvement oscillatoire du nuage d'électrons déformé par le champ [1].

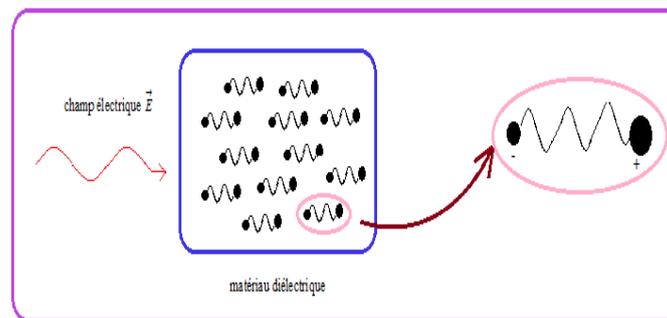


Figure I.1 : Représentation schématique du mouvement oscillant des charges négatives dans un milieu diélectrique soumis à une onde électromagnétique [1].

Dans le cas des faibles intensités, la polarisation induite est directement proportionnelle à l'amplitude du champ électrique externe. Dans ce cas, le matériau présente une réponse optique linéaire donnée par [2] :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi^{(1)}] \vec{E} \quad (\text{I.1})$$

où \vec{P} est la polarisation macroscopique du matériau diélectrique, $\chi^{(1)}$ représente la susceptibilité linéaire du milieu, \vec{E} est le champ électrique externe appliqué au matériau diélectrique et ε_0 est la permittivité du vide.

Dans le cas où l'amplitude du champ électromagnétique de l'onde incidente atteint une valeur proche de celle correspondante à l'attraction coulombienne entre le noyau et les électrons qui est de l'ordre de $\sim 10^9$ V/m, les dipôles oscillent de manière anharmonique et la polarisation

\vec{P} dans ce cas peut s'écrire en fonction des puissances croissantes du champ électrique \vec{E} [1-3] :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi^{(1)}] \vec{E} + \varepsilon_0 [\chi^{(2)}] \vec{E} \vec{E} + \varepsilon_0 [\chi^{(3)}] \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots \quad (\text{I.2})$$

où $\chi^{(1)}$ est le tenseur de susceptibilité d'ordre 1. $\chi^{(2)}$ et $\chi^{(3)}$ sont, respectivement, les tenseurs de susceptibilité d'ordre 2 et 3 du matériau diélectrique.

L'équation de polarisation (I.2) contient un terme de susceptibilité linéaire $\chi^{(1)}$ qui décrit les propriétés linéaires du milieu et d'autres termes de susceptibilités $\chi^{(2)}$ et $\chi^{(3)}$ qui sont à l'origine des propriétés non linéaires du milieu.

I.3. Polarisation non linéaire

Lorsqu'un milieu diélectrique est excité par un champ électromagnétique incident, ce dernier provoque un déplacement des charges et donc crée une polarisation dans le matériau. Pour le cas de faibles amplitudes, la réponse induite est proportionnelle au champ incident qui est donc linéaire d'où une polarisation induite dans le matériau avec une même fréquence et une amplitude proportionnelle au champ externe. Cette réponse linéaire reste confinée à une portion congrue de l'ensemble des réponses possibles comme nous avons montré dans l'équation (I.1). Par contre pour des amplitudes élevées du champ électrique, la réponse induite n'est plus proportionnelle au champ incident et la réponse du milieu est donc une fonction non linéaire. Dans ce cas, on peut exprimer la polarisation résultante sous la forme d'un développement en série de puissance de \vec{E} , où on peut l'interpréter comme la somme de deux contributions : une polarisation linéaire \vec{P}_L proportionnelle au champ \vec{E} et une polarisation non linéaire \vec{P}_{NL} proportionnelle aux puissances de \vec{E} qui est donnée par la relation suivante [4] :

$$\vec{P} = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL} = \varepsilon_0 [\chi^{(1)}] \vec{E} + \varepsilon_0 [\chi^{(2)}] \vec{E} \vec{E} + \varepsilon_0 [\chi^{(3)}] \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots \quad (\text{I.3})$$

Considérons le cas d'une fibre optique ou un champ \vec{E} polarisé rectilignement se propage dans son cœur. La polarisation exprimée par la relation (I.3) se réduit à la forme suivante [4] :

$$P = \varepsilon_0 \chi^{(1)} + \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi^{(3)} |E|^2 E + \dots \quad (\text{I.4})$$

La fibre optique étant composée de la silice fondue sous forme d'un verre amorphe, d'où la symétrie macroscopique liée à la nature centrosymétrique du milieu permet d'annuler le tenseur de la susceptibilité $\chi^{(2)}$ de rang 3 dans l'équation (I.4). Donc, le tenseur $\chi^{(3)}$ de la

susceptibilité d'ordre 3 sera à l'origine de tous les effets non linéaires de plus petit ordre dans la fibre optique [4]. Il est à noter que les propriétés linéaires du milieu sont décrites par le tenseur de susceptibilité linéaire $\chi^{(1)}$ alors que les propriétés non linéaires du milieu sont décrites par le tenseur de susceptibilité de troisième ordre $\chi^{(3)}$.

I.4. Equation de propagation non linéaire

La propagation d'une onde électromagnétique est décrite par les équations de Maxwell [2] :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.5})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.6})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{I.7})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.8})$$

avec \vec{E} et \vec{B} sont le champ électrique et le champ magnétique, respectivement, \vec{D} est le vecteur de l'induction électrique, \vec{H} est le vecteur de l'induction magnétique, \vec{J} représente le vecteur de la densité de courant et ρ est la densité de charge, où:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{I.9})$$

avec σ est la conductivité électrique.

Le vecteur d'induction électrique est donné par la relation suivante:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{I.10})$$

qui peut s'écrire sous la forme:

$$\vec{D} = [\varepsilon] \vec{E} \quad (\text{I.11})$$

où $[\varepsilon]$ est le tenseur de permittivité diélectrique.

De plus, le vecteur du champ magnétique est donné par:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (\text{I.12})$$

avec μ_0 est la perméabilité du vide et \vec{M} est le vecteur de polarisation magnétique.

Ainsi, les équations de Maxwell régissant la propagation mènent à :

$$\nabla^2 \vec{E} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (\text{I.13})$$

La fibre étant un milieu diélectrique, anisotrope, non linéaire et non magnétique, donc $\sigma = 0$ ce qui donne $\vec{J} = 0$ et $\rho = 0$ et par conséquent $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$.

En utilisant la propriété suivante :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (\text{I.14})$$

Et sachant que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0 \quad (\text{I.15})$$

Et en remplaçant \vec{D} , on trouve :

$$\vec{\nabla} \cdot [\varepsilon] \vec{E} = 0 \quad (\text{I.16})$$

Ce qui donne,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{I.17})$$

Ainsi, l'équation (I.13) se réduit à la forme:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (\text{I.18})$$

avec $c^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 1$

L'équation (I.14) est appelée "*équation de propagation non linéaire*".

I.5. Effets non linéaires

Selon l'équation (I.2), on distingue deux types d'effets non linéaires : les effets non linéaires du second ordre et les effets non linéaires du troisième ordre. Dans la suite, nous allons décrire d'une façon détaillée ces deux types.

I.5.1. Effets non linéaires de second ordre

Ceux sont les effets non linéaires décrits par le tenseur de susceptibilité d'ordre 2. Ils sont dus à une dépendance quadratique du dipôle induit par le champ électrique. Ce dipôle est défini par la diagonale du tenseur de la susceptibilité $\chi^{(2)}$ du milieu. La polarisation du milieu non centro-symétrique excité par une onde électromagnétique est donnée comme suit [2] :

$$\vec{P}_{NL} = \varepsilon_0 [\chi^{(2)}] \vec{E} \vec{E} \quad (\text{I.19})$$

Il existe plusieurs types d'effets non linéaires de second ordre qui sont donnés ci-dessous.

1.5.1.1. Génération de la seconde harmonique

La Génération de la Seconde Harmonique «GSH» est la production d'une nouvelle fréquence 2ω à partir d'une onde initiale de fréquence ω . La GSH est un effet non linéaire du second ordre non résonnant qui compromet uniquement la distorsion du nuage électronique et présente des temps de réponses très courts ($\sim 10^{-15}$ s). Le diagramme suivant représente le processus de la GSH dans lequel aucun champ en jeu n'est résonnant avec le matériau non linéaire [1].

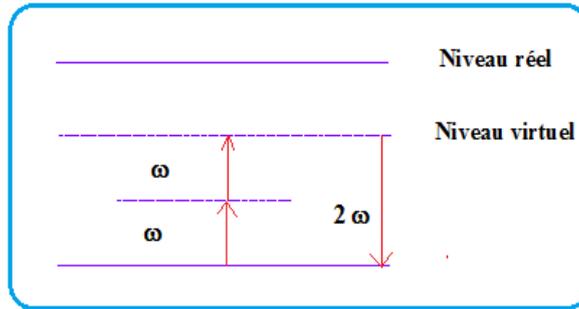


Figure I.2. : Schéma descriptif du processus de la génération de seconde harmonique [5].

La polarisation non linéaire dans ce cas est donnée par la relation suivante [1] :

$$P^{(2)}(\omega_3) = \frac{\epsilon_0}{2} \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) E(\omega_1) E(\omega_2) \quad (I.20)$$

Dans le cas particulier de la GSH où $\omega_2 = \omega_1 = \omega$, la polarisation devient [1] :

$$P^{(2)}(2\omega) = \frac{\epsilon_0}{2} \chi_{ijk}^{(2)}(-2\omega_2, \omega, \omega) E^2(\omega) \quad (I.21)$$

D'après l'équation (I.21), on remarque que les composantes du tenseur des susceptibilités d'ordre 2 présentent une invariance lors de la permutation des indices j et k . Kleinman [5] a montré que le tenseur $\chi^{(2)}$ est symétrique par rapport aux permutations des trois indices $i, j, et k$ [6] pour un domaine de pulsation hors résonance. Considérons maintenant un champ électrique sinusoïdal qui s'écrit sous la forme [7] :

$$E = E_0 \sin(\omega t) \quad (I.22)$$

Dans ce cas, l'équation (1.19) de la composante non linéaire de la polarisation devient [7] :

$$P(2\omega) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 \sin^2(\omega t) = \frac{\epsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2}{2} (1 - \cos(2\omega t)) \quad (I.23)$$

D'après l'équation (I.23), on remarque que la composante non linéaire d'ordre 2 de la polarisation contient en plus du terme constant, un terme oscillant à 2ω . Cette polarisation peut agir à son tour comme une source de lumière, et crée une nouvelle onde de pulsation 2ω . L'utilisation la plus courante de ce phénomène est la conversion d'une fréquence laser infrarouge ou visible en fréquences visibles ou ultraviolettes. Nous pouvons ainsi obtenir des rayonnements cohérent jusqu'à environ 200 nm par doublement de fréquence successif [7].

1.5.1.2. Somme de fréquences

Le doublement de fréquence n'est qu'un cas particulier d'un processus plus général de la somme de fréquences dans lequel deux ondes de fréquences respectives ω_1 et ω_2 interagissent pour donner lieu à une nouvelle onde ayant la fréquence $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ tout en conservons l'énergie. La polarisation de ce phénomène est donnée par [8] :

$$P(\omega_3) = \varepsilon_0 \chi^{(2)}(-\omega_3, \omega_1, \omega_2) E(\omega_1) E(\omega_2) \quad (\text{I.24})$$

Si les intensités incidentes sont plus élevées, l'évolution de la somme de fréquences devient plus importante.

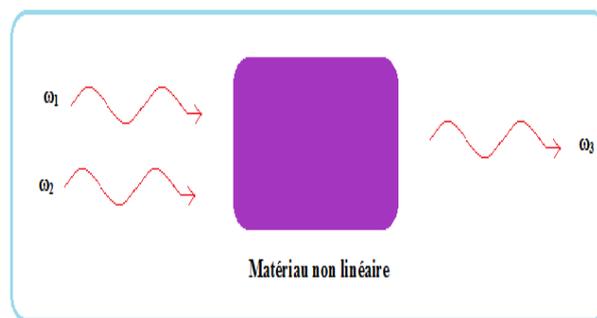


Figure 1.3 : Schéma de principe de la somme de fréquences [7].

Le rendement de conversion ne peut atteindre 100% étant donné que l'intensité de l'onde de la somme devient suffisamment élevée pour induire le processus de dissociation d'un photon de haute fréquence en deux photons de plus basse fréquence. Autre application de la somme des fréquences est la création d'un rayonnement laser accordable dans le visible et l'ultraviolet en utilisant une source accordable de type laser à colorant où laser titane-saphir et en fixant la fréquence des incidents ω_1 fixe et en faisant varier l'autre ω_2 [8].

1.5.1.3. Mélange paramétrique

Le phénomène d'amplification paramétrique est un des processus non linéaires d'ordre 2. Cet effet est basé sur la conversion d'une onde pompe vers deux ondes de fréquences inférieures, par mélange non linéaire, dans un milieu non linéaire. Son principe est le suivant :

si une onde pompe intense de pulsation plus élevée ω_1 est présente dans un milieu non linéaire et qu'une onde signal de faible puissance et de pulsation ω_2 se propage dans ce même milieu, ce processus aura lieu. De ce fait, la génération d'un champ complémentaire de pulsation $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ se produit par mélange non linéaire d'ordre 2 entre les ondes pompe et signal [1].

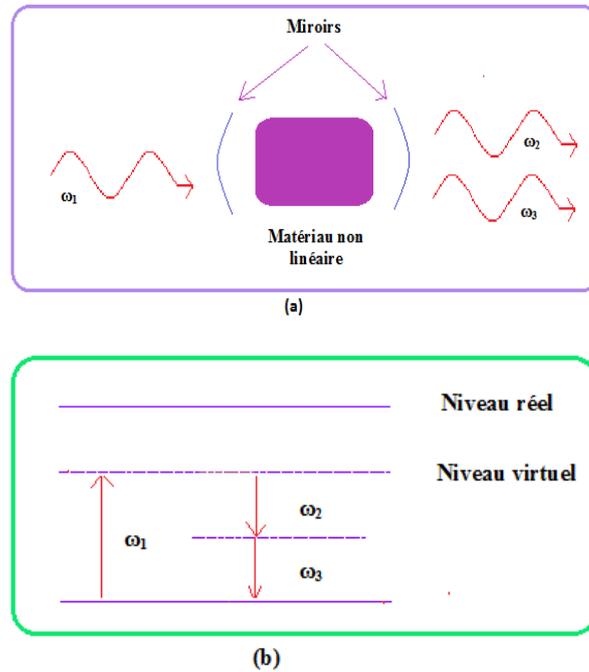


Figure 1.4 : Mélange paramétrique : a) Schéma descriptif du principe de l'oscillateur paramétrique optique, b) Diagramme de l'évolution de Mélange paramétrique [1].

Sur la figure (I.4.a), on a schématisé un dispositif représentant le principe de fonctionnement de l'oscillateur paramétrique optique (OPO) où on utilise une source cohérente, compacte et accordable sur une large gamme spectrale, un cristal non linéaire dans lequel se produit l'interaction paramétrique insérée dans une cavité résonnante, deux miroirs totalement réfléchissants pour les pulsations ω_2 et ω_3 et un miroir de sortie semi-réfléchissant. Le tout est pompé par un laser intense de pulsation ω_1 fréquemment utilisé à des longueurs d'ondes situées dans le domaine infrarouge, domaine spectral où peu de sources lasers accordables sont actuellement disponibles [1].

1.5.1.4. Effet Pockels

C'est un phénomène non linéaire d'ordre 2 qui coïncide avec le phénomène électro-optique induit par l'application simultanée d'un champ électrique statique \vec{E}_0 aux limites du matériau lors du passage de l'onde électromagnétique. Il se produit seulement dans les cristaux non-centrosymétriques. L'effet Pockels est un effet qui décrit la réponse optique linéaire du

matériau au champ électrique excitateur. Il est utilisé dans les modulateurs électro-optiques en particulier dans les modulateurs *Mach-Zehnder* [1] comme le montre la figure suivante.

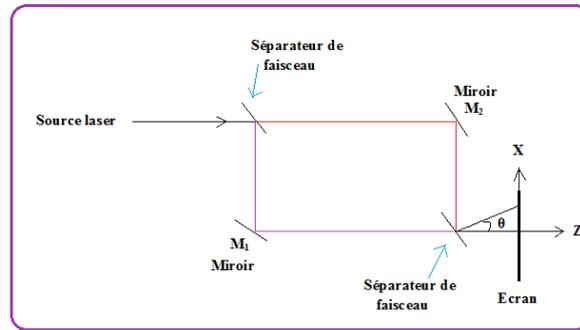


Figure I.5 : Principe de fonctionnement du modulateur Mach-Zehnder.

Dans le but d'envisager les applications dans ce type de dispositif au détriment de cristaux non linéaires comme le composé LiNbO_3 , il faut choisir des matériaux vitreux qui présentent des coefficients électro-optiques supérieurs à 1 pm/V [1].

I.5.2. Effets non linéaires du troisième ordre

Dans le cadre du modèle des susceptibilités et pour les milieux centro-symétriques non magnétiques à réponse locale et instantanée, la polarisation non linéaire du milieu est de troisième ordre [2]:

$$\vec{P}_{NL} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vec{E} \vec{E} \vec{E} \quad (\text{I.25})$$

où la partie réelle de $\chi^{(3)}$ est responsable de la variation non linéaire de l'indice de réfraction, alors que la partie imaginaire est responsable des phénomènes d'absorption non linéaire et des diffusions Raman et Brillouin stimulées. Le signe de $\chi^{(3)}$ est lié à la nature microscopique des non-linéarités optiques et sa valeur dépend des fréquences des ondes en interaction.

I.5.2.1. Effet Kerr optique

Lorsqu'une onde lumineuse intense traverse un milieu non linéaire qui présente une susceptibilité d'ordre 3 dont la partie réelle est non nulle, on découvre une modification des propriétés optiques de ce milieu qui se traduit par une variation de l'indice de réfraction en fonction de la forte intensité du signal lumineux incident. Cet effet est connu sous le nom de l'effet Kerr optique. Ce phénomène se traduit par une modulation de l'indice de réfraction du milieu non-linéaire en fonction de l'intensité de l'onde qui traverse le matériau. La modulation de l'indice de réfraction par l'effet Kerr optique est donnée par [9] :

$$n = n_0 + n_2 |E|^2 \quad (\text{I.26})$$

où n_0 est l'indice de réfraction linéaire du milieu, le second terme n_2/E^2 représente la contribution non linéaire de l'indice avec une quantité proportionnelle à l'intensité du champ électrique de l'onde. n_2 est le coefficient non linéaire caractéristique du matériau exprimé en $m^2.V^{-2}$. Ce dernier est donné par la relation suivante [9, 10, 3]:

$$n_2 = \frac{\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{8n_0} \quad (I.27)$$

L'étude expérimentale a montré qu'il est important d'utiliser une deuxième définition faisant intervenir la densité de puissance I , qui est exprimée par [9, 10, 3, 11]:

$$n = n_0 + n_2^I I \quad (I.28)$$

Les deux définitions (I.26) et (I.28) de la modulation d'indice par l'effet Kerr optique sont semblables et elles sont aussi reliées par l'expression suivante [9, 10, 11] :

$$I = \frac{1}{2} n_0 c \varepsilon_0 |E|^2 \quad (I.30)$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide. D'après les équations (I.25), (I.28) et (I.29), on peut constater que n_2 et n_2^I sont liés par la relation suivante [9]:

$$n_2^I = \frac{2n_2}{n_0 c \varepsilon_0} \quad (I.32)$$

Donc, d'après l'équation (I.27), on obtient l'expression du coefficient non linéaire n_2^I [9]:

$$n_2^I = \frac{3\chi^{(3)}}{4n_0^2 c \varepsilon_0} \quad (I.33)$$

Il est à noter que n_2 est exprimé en $m^2.V^{-2}$ et n_2^I est exprimé en $m^2.W^{-1}$ [9].

L'effet Kerr optique génère trois effets non linéaires qui sont: Le mélange à quatre ondes (FWM) qui consiste en une intermodulation entre trois ondes électromagnétiques qui en génèrent ou amplifient une quatrième, l'auto modulation de phase (SPM) dans laquelle les fluctuations de la puissance optique modulent la phase du signal produisant ainsi un élargissement du spectre, la modulation de phase croisée (XPM) où les fluctuations de l'intensité d'un canal modulent les phases des autres canaux. Dans la suite, une description détaillée sur ces effets sera donnée.

1.5.2.1.1. Auto-modulation de phase SPM

Les effets non linéaires ne modifient pas le profil de puissance. Ils vont se traduire par l'apparition d'un déphasage temporel supplémentaire. Ce phénomène est appelé auto-modulation de phase. L'auto-modulation de la phase se traduit par l'accumulation d'une phase

non linéaire générée au cours de la propagation et qui va engendrer, contrairement à la dispersion, un élargissement du spectre des impulsions [7]. Dans le cas de transmission par fibre optique, cet effet peut générer des sources de très large bande spectrale ce qui est d'une importance considérable dans l'industrie des télécommunications. Son principe est le suivant : lorsqu'une onde optique se propage dans une fibre, elle subit un changement de phase, donnée par [12]:

$$\phi = \phi_L + \phi_{NL} \quad (\text{I.32})$$

avec:

$$\phi = n(\omega, E) k_0 L_{eff} = \left(n_0(\omega) + n_2 |E|^2 \right) k_0 L_{eff} \quad (\text{I.33})$$

où L_{eff} est la longueur effective de la fibre et $k_0 = 2\pi / \lambda$. L'auto-modulation de la phase est décrite par la partie non linéaire de la phase ϕ_{NL} qui dépend de la puissance optique. Elle introduit un glissement de fréquence optique $\delta\omega$ donné par l'expression [12] :

$$\delta\omega = - \frac{\partial \phi_{NL}}{\partial t} = n_2 k_0 L_{eff} \frac{\partial |E|^2}{\partial t} \quad (\text{I.34})$$

avec $\omega = \omega_0 - \delta\omega$

Lorsque $\phi_{NL}(z, t)$ n'est plus négligeable devant π , l'auto-modulation de phase doit être prise en compte. Ce phénomène introduit un élargissement du spectre lorsque son enveloppe temporelle est inchangée.

1.5.2.1.2. Modulation de phase croisée XPM

C'est un décalage de phase non linéaire d'un champ optique induit par la co-propagation des champs à différentes longueurs d'onde. Il conduit à la modulation de phase d'une onde par l'autre. La modulation de phase croisée (Cross Phase Modulation) est observée si plusieurs ondes sont présentes et si le champ \vec{E} est la superposition de plusieurs ondes optiques $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$, alors l'indice de réfraction associé à une des ondes ne dépendra plus uniquement de sa propre intensité mais aussi des intensités des ondes se propageant avec elle.

Dans ce cas, on suppose que le champ \vec{E} incident a deux composantes de polarisation E_x et E_y et on montre que la polarisation non-linéaire affecte irrégulièrement les deux composantes de \vec{E} à cause de la différence des valeurs entre $\chi_{xxx}^{(3)}$ et $\chi_{yyy}^{(3)}$ dont les indices non linéaires sont donnés par [13]:

$$\Delta n_x \equiv n_x - n_0 = n_2 \left(|E_x|^2 + \frac{2}{3} |E_y|^2 \right) \tag{I.35}$$

$$\Delta n_y \equiv n_y - n_0 = n_2 \left(|E_y|^2 + \frac{2}{3} |E_x|^2 \right) \tag{I.36}$$

On observe que le tenseur de susceptibilité du troisième ordre entraîne un couplage non linéaire des composantes de polarisation transverse, qui se manifeste par une biréfringence non linéaire dite parfois auto-induite [13].

I.5.2.1.3. Mélange à quatre ondes

Le mélange à quatre ondes FWM (Four Wave Mixing) est un effet non linéaire de troisième ordre qui se manifeste par la dépendance de l'indice de réfraction du milieu avec l'intensité. Il peut être également décrit par l'annihilation de deux photons de fréquences ω_1 , ω_2 , et la création simultanée de deux autres photons à des fréquences différentes ω_3 , ω_4 . D'une façon générale, lorsque trois ondes de fréquences ω_i , ω_j et ω_k ($k \neq i, j$) interagissent, un signal est généré à une fréquence donnée par [12-14]:

$$\omega_{ijk} = \omega_i + \omega_j - \omega_k \tag{I.38}$$

Ainsi, dans le mélange à quatre ondes, on peut générer neuf nouvelles ondes optiques par trois ondes co-propagatives. S'il y a un espace entre les canaux, les fréquences générées se superposent aux fréquences déjà existantes créant ainsi de la diaphonie (ou cross-talk). La figure (I.6) présente un cas particulier du mélange à quatre ondes correspondant à $\omega_i = \omega_j$ [5] où de nouvelles fréquences sont créées à $\omega_i - \Omega$ et $\omega_k + \Omega$, avec $\Omega = \omega_k - \omega_i$.

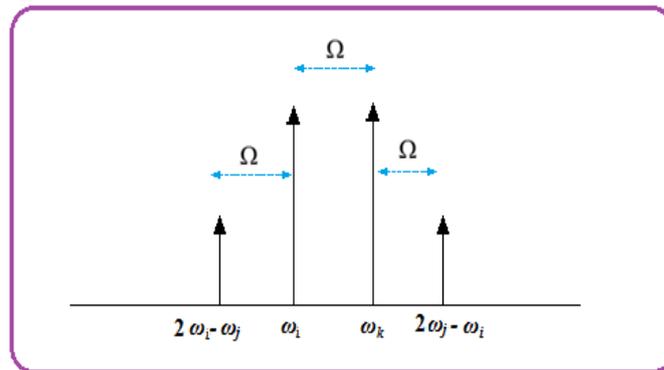


Figure I.6: Schéma de processus du mélange à quatre ondes pour $\omega_i = \omega_j$ [12].

I.5.2.1.4. Auto focalisation

L'auto focalisation du faisceau est considérée comme étant une autre conséquence de l'effet Kerr optique, elle est due à la variation de l'indice de réfraction en fonction de la variation de l'intensité spatiale [15]. La dépendance de l'indice de réfraction effectif n en fonction de la variation de l'intensité $I(t,z)$ est la cause d'une part aux perturbations spectrales qui sont l'origine de l'auto-modulation de phase et d'autre part aux perturbations spatiales qui sont la cause de l'auto-focalisation de l'onde. Dans un matériau d'indice non linéaire positif, si une onde présente une distribution d'intensité transverse non uniforme, ce milieu agit comme une lentille convergente appelée lentille de Kerr [15] (figure (I.7.a)). Lorsque l'intensité est très importante ou bien le milieu non linéaire est long, le faisceau se focalise dans le matériau en un point appelé d'effondrement, qui présente une source de dommages (figure (I.7.b)). Nous soulignons que l'auto focalisation de l'onde est à l'origine de l'autoguidage des impulsions par filamentation [15], et qu'elle intervient toujours si la puissance de l'impulsion est supérieure à une certaine valeur, appelée puissance critique (P_{cr}) indépendante du diamètre du faisceau.

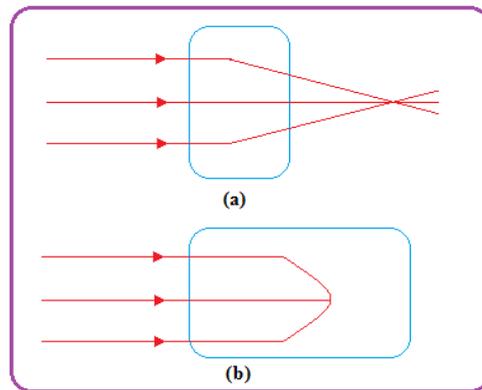


Figure I.7: Auto focalisation par effet Kerr optique [15].

Cette puissance critique qui est une caractéristique du milieu non linéaire traversé est donnée par [15] :

$$P_{cr} = \frac{\pi(0.61)^2 \lambda^2}{8n_0 n_2} \quad (\text{I.38})$$

I.5.2.2. Diffusion stimulée

Les effets non linéaires élastiques cités précédemment sont dans le sens où il n'y a pas d'échange d'énergie entre le champ électrique et le milieu diélectrique. Dans ce qui suit, nous considérons le cas où le champ optique transfère une partie de son énergie vers le milieu non

linéaire, donc les effets sont inélastiques en référence à la non-conservation de la quantité de mouvement en mécanique. Ces effets font intervenir la partie imaginaire de la susceptibilité non linéaire d'ordre 3. Les diffusions Raman et Brillouin stimulées sont parmi ces effets qui interviennent essentiellement dans les systèmes de communication à fibres optiques. Ces diffusions correspondent à l'excitation résonnante, par l'application d'un champ optique intense, de niveaux de vibrations moléculaires de milieu de propagation (la silice): pour la diffusion Raman (les phonons optiques) et pour la diffusion Brillouin (les phonons acoustiques).

I.5.2.2.1. Diffusion Raman stimulée SRS

L'effet Raman stimulée est l'effet non linéaire de troisième ordre le plus connu, qui se produit lors d'une interaction photon-phonon. Son principe de base, représenté sur la figure (I.8), repose sur le fait que le matériau à l'état fondamental peut absorber une fraction $\hbar\Omega_r$ [16] de l'énergie $\hbar\omega$ des photons incidents afin d'évoluer vers un état excité correspondant à une résonance de vibrations intramoléculaires. Les photons résultant de ce processus sont réémis d'une façon co-propagative à une fréquence plus basse appelés photons de Stokes, donnée par [16]:

$$\omega_s = \omega - \Omega_r \quad (\text{I.39})$$

où Ω_r représente le décalage Raman.

De la même façon, les photons anti Stokes sont créés lorsque le nombre de molécules à l'état excité est plus élevé pouvant interagir avec les photons incidents pour revenir à l'état fondamental. La fréquence de photons anti Stokes est donnée par [16] :

$$\omega_{as} = \omega + \Omega_r \quad (\text{I.40})$$

La figure ci-dessous donne une description de la diffusion Raman stimulée:

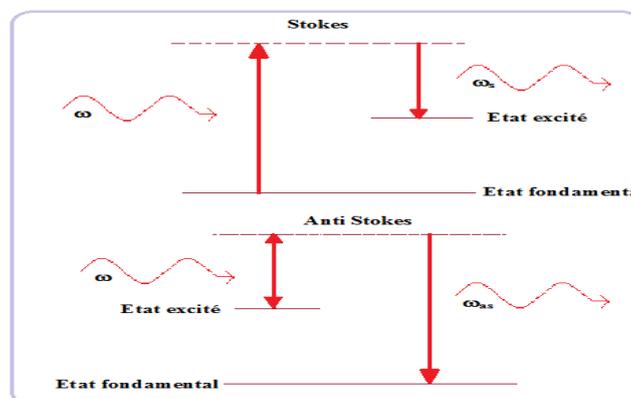


Figure I8: Schéma descriptif de l'effet Raman [16].

La diffusion Raman stimulée est plus utilisée dans les amplificateurs de type Raman. Quand un signal traverse un milieu non linéaire d'ordre 3, il crée une onde Stokes. Si cette dernière n'est pas négligeable devant le signal incident, on observe un régime de diffusion Raman stimulée dans lequel les basses fréquences sont continuellement amplifiées par les hautes fréquences. Ceci intervient si la puissance de l'onde Stokes est égale à la puissance de la pompe à la sortie de la fibre. La puissance critique d'injection dans ce cas est donnée par [16]:

$$P_{crit} = \frac{16A_{eff}}{g_r L_{eff}} \quad (I.41)$$

où A_{eff} est l'aire effective de la fibre, g_r est le gain Raman et L_{eff} représente la longueur effective de la fibre donnée par [16] :

$$L_{eff} = \frac{1 - e^{(-\alpha L)}}{\alpha} \quad (I.42)$$

où α est le coefficient de pertes de la fibre optique en m^{-1} et L la longueur de la fibre en m .

On peut exploiter la diffusion Raman stimulée pour la génération de nouvelles fréquences et de larges continums. Elle est aussi utilisée comme amplificateur en ligne afin de compenser les pertes d'un système télécom. En plus, le gain Raman a une bande spectrale étant relativement large (~ 20 -THz, soit environ 100 nm) qui permet d'amplifier une large bande de canaux dans des systèmes multiplexés en longueur d'onde (WDM) [16].

I.5.2.2.2. Diffusion Brillouin Stimulée (SBS)

La diffusion Brillouin est un phénomène non linéaire d'ordre 3, qui correspond à une diffusion inélastique de la lumière par les phonons acoustiques et thermiques d'un milieu non linéaire. Cet effet se manifeste par la génération d'une onde Stokes contra-propagative contenant une grande partie de l'énergie incidente. La diffusion Brillouin est due essentiellement à l'interaction entre trois ondes: l'onde pompe, l'onde Stokes Brillouin rétrodiffusée et l'onde acoustique. Donc, un photon de l'onde pompe est annihilé afin de générer un photon Stokes et un phonon acoustique. L'énergie et le moment cinétique étant conservés, les fréquences et les vecteurs d'onde sont donnés par [16] :

$$\Omega_a = \omega_p - \omega_s \quad (I.43)$$

$$k_a = k_p - k_s \quad (I.44)$$

où ω_p , ω_s sont les pulsations et k_p , k_s sont respectivement les vecteurs d'onde des ondes pompe et Stokes. Ω_a et k_a correspondent à la pulsation et au vecteur d'onde de l'onde acoustique.

L'onde acoustique ainsi générée module l'indice optique de la fibre et constitue localement un réseau optique de type Bragg [16]. Ce dernier réfléchit une partie de la lumière incidente sous la forme d'une onde Stokes. Le décalage de l'onde Stokes ν_b est donné par la relation suivante [16]:

$$\nu_b = \frac{\Omega_a}{2\pi} = \frac{2n \nu_a}{\lambda_p} \quad (\text{I.45})$$

où n est l'indice optique du milieu, λ_p est la longueur d'onde de la pompe et ν_a représente la vitesse de propagation de l'onde acoustique dans le milieu.

Le seuil Brillouin P_{crit} est défini comme étant la puissance à l'entrée de la fibre pour laquelle la puissance réfléchie est égale à la puissance injectée. Il est donné par [16]:

$$P_{crit} = \frac{21A_{eff}}{g_b(\nu_b)L_{eff}} \left(1 + \frac{\Delta\nu_p}{\Delta\nu_b} \right) \quad (\text{I.46})$$

où A_{eff} est l'aire effective de la fibre, L_{eff} sa longueur effective, $\Delta\nu_p$ est la largeur spectrale de la pompe, $\Delta\nu_b$ représente la largeur spectrale du gain Brillouin (10-MHz pour la silice) et $g_b(\nu_b)$ est le gain maximal de la courbe de gain Brillouin, typiquement égale à $5 \cdot 10^{-11}$ m/W pour la silice [16].

La diffusion Brillouin stimulée joue un rôle important dans plusieurs applications qui découlent de la diffusion des ondes lasers par interaction avec les ondes acoustiques présentes dans le milieu.

I.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principes de base de l'optique non linéaire, en commençant par quelques rappels sur les notions de l'interaction rayonnement-matière. De plus, on a fait un aperçu sur les effets non linéaires dont la polarisation du milieu présente une dépendance quadratique ou cubique du champ électrique appliqué en soulignant au passage que les propriétés non linéaires sont décrites par des tenseurs de susceptibilité d'ordre 2 et d'ordre 3. Finalement, le chapitre se termine par des notions sur l'effet de Kerr optique et les diffusions Raman et Brillouin stimulées, en citant quelques exemples.

REFERENCES

- [1] M. Guignard, " *Verres et vitrocéramiques infrarouges à base de chalcogénures pour l'optique non linéaire du second ordre*", Thèse de doctorat, Université de Rennes I, (2005).
- [2] H. Triki, " *Dynamique de propagation non linéaire des solitons KdV*", Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, Algérie, (2003).
- [3] R. W. Boyd, " *Non Linear Optics*", (2003), Second édition.
- [4] A. Sauter, " *Attraction de polarisation et instabilité modulationnelle incohérente dans les fibres optiques*", Thèse de doctorat, Université de Bourgogne, (2007).
- [5] J. Y. Courtois, " *Les lasers et leurs applications scientifiques et médiates*", optique non linéaire, Institut d'optique théorique et appliquée, France.
- [6] D. A. Kleinman, Phys. Rev. 26, (1962), (1977).
- [7] A. Faïçal, " *Etude de la dynamique de propagation non linéaire des solitons optiques modélisés par l'équation de Schrödinger non linéaire*", Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, Algérie, (2010).
- [8] E. Nasreddine, " *Synthèse, étude de la ferroélectricité, de la superconductivité et de l'optique non linéaire des nouveaux composés issus de la famille de KDP*", Thèse de doctorat, Université de Sfax, (2012).
- [9] F. Drouart, " *Non-linéarité Kerr dans les fibres optiques microstructurées*", Thèse de doctorat, Institut Fresnel CNRS – Marseille, (2008).
- [10] G. P. Agrawal, " *Nonlinear fiber optics, Academic press*", San Diego, 2001, third edition.
- [11] R. A. Sammut, C. Pask, " *Gaussian and equivalent-step-index approximations for nonlinear waveguides*", J. Opt. Soc (1991) 395–402.
- [12] E. O. Herrero, " *Étude des effets non linéaires dans les lasers et amplificateurs de puissance à fibre double gaine dopée Er^{3+}/Yb^{3+}* ", Thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure des télécommunications Paris, (2003).
- [13] L. Meignien, " *Système de mesure THz à ondes guidées, basé sur une détection électro-optique*", Thèse de doctorat, Ecole doctorale sciences et technologies de l'information des télécommunications et des systèmes", Université Paris Sud11, (2008).
- [14] D. L. Mills, " *Nonlinear optics: basic concepts*", Berlin, Springer, 263 (1998),3-540-64182-3.

- [15] A. Jullien, " *Génération d'impulsions laser ultra-brèves et ultra-intenses a contraste temporel élevé* ", Thèse de doctorat, Ecole polytechnique,(2006).
- [16] J. Fatome, " *Propagation d'impulsions ultra-courtes à 160-Gb/s dans des lignes de fibres optiques gérées en dispersion* ", Thèse de doctorat, Université de Bourgogne, (2004).

CHAPITRE II

Equation de Korteweg-de Vries (KdV)

II.1. Introduction

La modélisation mathématique des effets non linéaires a permis de mettre en évidence un nouveau type d'onde appelé "*soliton*". Ce concept a été découvert en 1834 par l'ingénieur Ecossais John Scott Russell et surgi actuellement dans de nombreux domaines de la physique comme par exemple la mécanique des fluides, l'optique non linéaire, la physique des plasmas, l'astrophysique, etc. Parmi les propriétés intéressantes des solitons c'est qu'ils interagissent entre eux sans modifier leur forme ni leur vitesse. L'explication de ce phénomène ne peut se faire qu'en faisant appel au concept de non linéarité. A cet objectif, deux mathématiciens hollandais Korteweg et de Vries (KdV) ont établi, en 1895, un modèle d'équation d'onde hydrodynamique non linéaire connue sous le nom d'équation KdV.

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'équation de Korteweg-de Vries qui constitue une des équations d'évolution intégrables ayant des solutions de type soliton pour lequel l'effet de dispersion et l'effet non linéaire sont juste en balance. On présentera tout d'abord l'historique du soliton hydrodynamique en passant par sa découverte. Par la suite, nous donnerons une description détaillée de la dérivation de l'équation KdV dans le cas des ondes hydrodynamiques de surface. Il paraît aussi nécessaire de déterminer la forme analytique qui caractérise la solution soliton KdV pour analyser le profil d'intensité correspondant. Finalement, nous allons présenter les lois de conservations associées à l'équation KdV, les différentes formes de cette équation ainsi que les équations de type KdV d'ordre supérieur. De plus, nous montrerons les effets influençant la propagation d'un soliton KdV à savoir la non linéarité, la dispersion ou les deux à la fois.

II.2. Découverte du soliton

L'observation du soliton pour la première fois a été faite en 1834 par l'ingénieur Ecossais John Scott Russell (1808-1882). Russell a dit «*J'observais le mouvement d'un bateau qui était tiré rapidement le long d'un canal étroit par une paire de chevaux quand, soudain, le bateau s'arrêta. Mais il n'en fut pas de même pour la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal. Elle s'accumula autour de la proue du bateau dans un état de violente agitation; puis, soudainement, l'abandonna, roula vers l'avant à grande vitesse, prenant la forme d'une grande élévation solitaire, d'un paquet d'eau rond, à la forme douce et bien définie, qui continua sa course dans le canal, apparemment sans changement de forme ou diminution de vitesse. Je la suivis à cheval et la dépassais alors qu'elle roulait encore à la vitesse de 8 ou 9 miles à l'heure, préservant, sa forme originale de 30 pieds de long et d'un pied et demi en hauteur. La hauteur diminua peu à peu, et après une poursuite d'un ou deux miles, je la perdais dans les méandres du canal. Tel fut, dans le mois d'août 1834, était ma première rencontre avec ce phénomène magnifique et singulier que je l'ai appelé onde de translation*» [1].

L'interprétation théorique de cette observation, cependant, a dû attendre jusqu'en 1895 avec les travaux de Korteweg et de Vries qui ont proposé une équation qui porte maintenant leurs noms "équation KdV". Cette équation était néanmoins implicitement présentée dans les travaux de Joseph Boussinesq (1842-1929) publiés en 1872 [1-3]. L'étude de J. S. Russell a permis de comprendre les idées de base du concept de soliton.

La figure (II.1) montre un dispositif similaire à celui de J. S. Russell utilisé pour étudier expérimentalement la "grande vague solitaire". Les vagues sont produites par un piston à l'extrémité d'un canal. J. S. Russell a pu vérifier les propriétés suivantes [1]:

- Une excitation initiale produit selon son amplitude et sa forme une, deux, ou plusieurs ondes solitaires.
- Les ondes se propagent à une vitesse supérieure à la vitesse des ondes linéaires de grande longueur d'onde $v_0 = \sqrt{gh}$, où g est l'accélération de la gravité et h est la profondeur d'eau dans le canal. L'écart à v_0 est proportionnel à la hauteur de la vague η : la vitesse de propagation suit par conséquent la loi de la forme $v = v_0(1 + A\eta)$.
- Les ondes solitaires de type dépression ne sont pas observées.

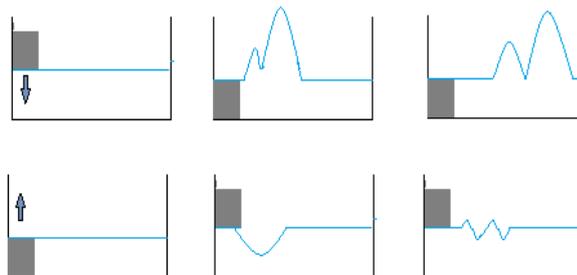


Figure II.1: Évolution schématique d'une perturbation de la surface de l'eau dans un réservoir créée par le mouvement d'un piston vers le bas ou vers le haut [1].

Les études de J. S. Russell ont été très critiquées par la communauté scientifique à cette époque, qui avait l'habitude de considérer les effets non linéaires comme étant secondaire suscitant ainsi de nombreux débats qui ont contribué à mettre en évidence les propriétés étonnantes de solitons [1].

Après avoir observé une onde solitaire sur un canal près d'Édimbourg, John Scott Russell a passé plusieurs années de sa vie à étudier le phénomène du soliton, qui était une révélation. Ce n'est qu'après 130 ans que les scientifiques réalisent réellement l'importance de sa découverte. Il rédigea un premier rapport en 1838, avant de publier les résultats de ces expériences en 1844 [1-5].

Ce rapport a été malheureusement très mal reçu par deux personnalités qui ont ruiné ses espoirs. Le premier est le célèbre astronome Sir G. B. Airy (1801-1892) [1] qui a vivement critiqué le travail dans un document sur les marées et les vagues libérés en 1845. Son principal argument était que la formule obtenue pour la vitesse de l'onde solitaire contredit sa propre théorie des ondes dans l'eau peu profonde. Le deuxième est G. G. Stokes (1819-1903), l'un des pères de la mécanique des fluides, bien qu'ayant étudié les travaux de J. S. Russell avec plus de précautions, il a abouti à la conclusion qu'une onde solitaire ne pouvait pas exister dans les liquides en l'absence de viscosité. Ceci signa l'arrêt des recherches de J. S. Russell.

Personne ne savait à l'époque que l'autre classe de solitons, c-à-d les solitons optiques, serait considéré pour les télécommunications transatlantiques de 21 siècle!

Le savant français Joseph Boussinesq Valentine (1842-1929) [1] a offert une nouvelle description des ondes en eau peu profonde, admettant des solutions similaires à celui qu'il a été découvert par J. S. Russell.

Lord Rayleigh (1842-1919) qui est un ancien étudiant de G. G. Stokes, a confirmé ces résultats en 1876, et par la suite en 1885 Adhémar Jean-Claude Barré de Saint Venant a établi une théorie mathématique correcte de ces phénomènes, et donc démontré l'erreur de Sir G. B. Airy et G. G. Stokes [1].

II.3. Définition d'un soliton

En général, un soliton est une solution à certaines équations différentielles non linéaires. Cette solution est caractérisée par une amplitude représentant la puissance et une forme spécifique. Elle peut se propager sans distorsion pour une distance, théoriquement, infinie.

Plus précisément, chaque solution d'une équation différentielle non linéaire qui se propage périodiquement sans changement de forme en fonction de la distance, est connue sous le nom "*onde solitaire*". Mais, les solutions d'ondes solitaires considérées comme solitons sont

les ondes pouvant entrer en collision de manière à ce que l'une passe à travers l'autre sans qu'il y est un changement de forme. Donc, toutes les solutions conduisant à des ondes solitaires ne sont pas toutes obligatoirement des solitons.

Parmi les caractéristiques remarquables des solitons est leur stabilité sous l'effet des perturbations [6, 7]. Cette propriété de stabilité fait tout l'intérêt des solitons en physique car ainsi il existe une très forte probabilité qu'une excitation intense conduise à leurs formations.

L'équation KdV et les canaux de marine n'est pas les seuls à admettre la propagation de soliton, car Hasegawa et Tappert [8] ont montré théoriquement en 1973 qu'il existe aussi une propagation non linéaire de type soliton dans les fibres optiques. Après, Mollenauer et ces collaborateurs [9] ont affirmé le travail de Hasegawa et Tappert expérimentalement par la découverte de la propagation non linéaire de type soliton dans les fibres optiques.

II.4. Différents types des solitons

Lors de sa propagation dans un milieu dispersif, une impulsion lumineuse subit une dispersion d'énergie parce que ses diverses composantes ne subissent pas le même déphasage. A cet effet, il en résulte trois types de solitons optiques [10]:

II.4.1. Solitons spatiaux

La dispersion de l'énergie considérée est due à la diffraction de la lumière, de fait de la divergence naturelle du faisceau lumineux de faible diamètre. Si la diffraction est maintenue en équilibre par la non linéarité, on s'attend à la propagation des structures localisées appelées "*solitons spatiaux*". Ces derniers existent dans différents dispositifs opto-électroniques comme par exemple les guides plans.

II.4.2. Solitons temporels

La dispersion de l'énergie considérée ici est la dispersion chromatique, puisque les différentes longueurs d'onde de l'impulsion lumineuse ne se propagent pas à la même vitesse. En réalisant une compensation mutuelle entre l'effet de dispersion chromatique et la non linéarité du milieu, des solitons temporels sont générés. De tels solitons sont obtenus dans les fibres optiques en utilisant des durées d'impulsions de quelques picosecondes et des puissances de quelques milliwatt. Ils ont été proposés pour les transmissions trans-océaniques à très haut débit [11]. La dynamique de ce type de soliton conduit à définir la largeur temporelle et l'étendue spectrale d'une impulsion optique traversant le milieu diélectrique.

II.4.3. Solitons spatio-temporels (balles de lumière)

Ce sont des solitons spatio-temporels qui se propagent dans des géométries très complexes. Ils apparaissent quand la dispersion et la diffraction sont simultanément compensées par la non linéarité saturante. L'énergie lumineuse est confinée dans trois dimensions comme une bille. Ce type de soliton a l'avantage de pouvoir transporter une forte puissance avec une faible énergie, ce qui diminue le problème du surchauffement. Des études expérimentales récentes ont montré que les matériaux possédant une non linéarité saturante avec un indice de réfraction non linéaire négatif d'ordre 4 permettent cette propagation solitonique. C'est le cas du Polydiacétylène para-Toluène Sulfonate (PTS).

La différence fondamentale entre les systèmes à fibres où se propagent les solitons temporels et les géométries plus complexes envisagées pour exploiter les solitons spatio-temporels est due au fait que les premiers sont intrinsèquement stables alors que les autres ne le sont pas en général.

La figure (II.2) montre un soliton spatio-temporel qui se produit dans l'espace et dans le temps. En effet, les non-linéarités peuvent être utilisées pour compenser la diffraction et la dispersion chromatique simultanément sous des conditions spécifiques. Les balles de lumière peuvent exister en exploitant une non-linéarité quadratique ou cubique [10].

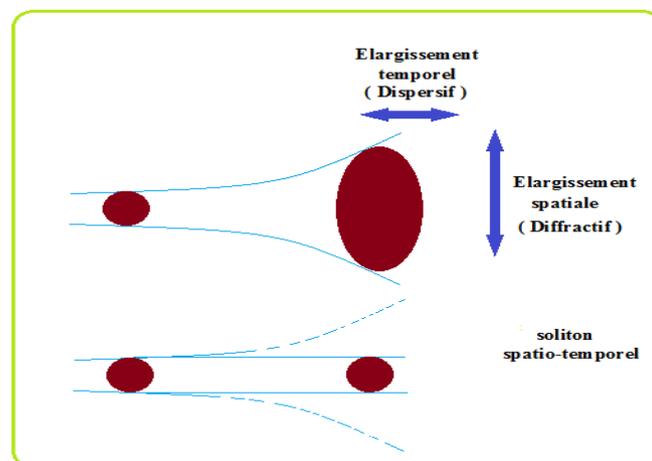


Figure II.2: Soliton spatio-temporel : balle de lumière [10].

Ce type très spécial des solitons constitue une source d'applications potentielles, notamment le traitement optique de l'information à trois dimensions [10].

II.5. Equation de Korteweg-de Vries et soliton

En 1895, deux mathématiciens hollandais Diederik Johannes Korteweg et Gustav de Vries ont fait une interprétation mathématique du soliton hydrodynamique où ils ont établi un modèle d'équation dite " *équation KdV*" qui permet de décrire le phénomène du soliton. En 1965, Zabusky et Kruskal ont redécouvert ce modèle d'équation et ils ont trouvé que deux solitons peuvent entrer en collision tout en tend gardant la même enveloppe et la même vitesse propre après leurs chevauchements [12]. Ainsi le soliton était né.

II.6. Dérivation de l'équation KdV

Dans ce qui suit, nous allons dériver l'équation KdV gouvernant la propagation des ondes en eau peu profonde à partir des équations de base de l'hydrodynamique. Cette équation est obtenue en effectuant un développement au deuxième ordre des équations d'Euler en supposant que le liquide est incompressible, l'écoulement irrotationnel $z = h(x, t)$ à la surface, la composante verticale de la vitesse est nulle au fond du canal, et en utilisant l'équation de Newton reliant accélération et forces exercées sur les particules du fluides (figure II.3). Quand le fluide est au repos, sa surface libre est définie par l'altitude $z = h$. Si une perturbation est présentée de la hauteur de la surface libre du fluide, l'altitude est exprimée dans ce cas par $h + \eta$. [13].

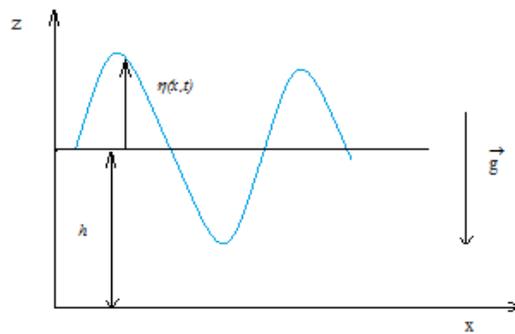


Figure II.3: Surface eau-air [13].

où h est la profondeur, et $\eta(x,t)$ est la hauteur de la surface de liquide au-dessus de son niveau d'équilibre.

En considérant un fluide parfait, incompressible et irrotationnel, nous avons [13]:

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\nabla \wedge v = 0 \quad (\text{II.2})$$

où v exprime la vitesse du fluide. De plus le champ de vitesse du fluide est le gradient d'un potentiel scalaire,

$$(\exists u)v = \nabla u \quad (\text{II.3})$$

La condition d'incompressibilité (II.1) donne alors l'équation dynamique du problème [13],

$$\Delta u = 0 \quad (\text{II.4})$$

La condition d'imperméabilité est la seule condition qui s'applique dans le cas d'un fluide parfait et au fond de la couche de fluide. Dans ce cas la vitesse verticale égale à 0, on a donc:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (\text{II.5})$$

Le terme d'advection de l'équation d'Euler est donné par [13] :

$$(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\frac{1}{2} \nabla v^2 - v \wedge (\nabla \wedge v) \quad (\text{II.6})$$

Nous pouvons écrire l'équation d'Euler comme suite:

$$\nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla u)^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (\text{II.7})$$

Le terme entre parenthèses est égal à une fonction dépendante seulement du temps. Comme le potentiel n'a pas de sens physique, mais uniquement son gradient, il peut être redéfini de sorte que cette fonction est égale à zéro. A la surface libre, en tenant compte de la tension de surface γ , la pression $P_{atm} = \gamma/R$, où R est le rayon de courbure en (x, t) , on déduit donc [13]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla u)^2 + g(z-h) - \frac{\gamma}{\rho R} \right)_{z=h+\eta(x,t)} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Cette dernière équation exprime la définition même de l'interface. En prenant en compte le terme d'advection, la vitesse verticale du fluide doit être égale à la vitesse de l'interface,

$$\left. \frac{d\eta}{dt} \right|_{z=h+\eta(x,t)} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (v \cdot \nabla) u \right) \eta \Big|_{z=h+\eta(x,t)} = 0 \quad (\text{II.9})$$

Soit:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h+\eta(x,t)} = 0 \quad (\text{II.10})$$

Les équations (II.8) et (II.10) comportent toutes les non-linéarités du problème où l'inconnu η est un argument du potentiel des vitesses v .

Passons maintenant à la relation de dispersion qui peut être déterminée d'une façon plus simple en utilisant une approche heuristique. Cette relation est donnée par [14]:

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \tanh(kh) \quad (\text{II.11})$$

où k représente le nombre d'onde. Dans le cas des grandes longueurs d'onde $kh \ll 1$, et pour des ondes linéaires, l'amplitude est donc négligeable devant h . On a alors [13, 14] :

$$\tanh(kh) \approx kh - \left(\frac{(kh)^3}{3} \right) \quad (\text{II.12})$$

Pour $kh \ll 1$, l'équation (II.11) devient [14]:

$$\omega = v_0 k \left(1 - \frac{k^3 h^2}{6} \right) \quad (\text{II.13})$$

avec

$$v_0 = \sqrt{gh} \quad (\text{II.14})$$

En utilisant les équivalences suivantes :

$$\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad k \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{II.15})$$

et

$$\omega^n \rightarrow i^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad , \quad k^n \rightarrow (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \quad (\text{II.16})$$

On obtient à partir de la relation de dispersion, une équation aux dérivées partielles donnée par [14]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - v_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_0 \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{II.17})$$

L'équation (II.17) présente une version linéarisée de l'équation KdV qui contient un terme de dispersion.

La vitesse de l'onde est donnée (selon la composition des vitesses de Galilée) par [14]:

$$v = v_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h} \right) \quad (\text{II.18})$$

Le terme non linéaire de l'équation KdV peut être obtenu de manière heuristique à partir des équations de Saint-Venant données par [14] :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.19})$$

Finalement, l'équation KdV qui contient les deux termes dispersif et non linéaire est donnée par [14]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - v_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_0 \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{II.20})$$

L'équation KdV (II.20) décrit les ondes qui se propagent vers les x positifs seulement. En faisant les transformations $X=x-v_0 t$ et $T=t$, il est possible d'annuler le second terme et l'équation (II.20) devient [1]:

$$\frac{1}{v_0} \frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{3}{2h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3} = 0 \quad (\text{II.21})$$

Finalement, en choisissant des variables adimensionnées telles que $u = \eta/h$, $\xi = X/x_0$ et $\tau = T/T_0$ où X_0 est une longueur et T_0 est un temps, nous obtenons la forme standard de l'équation KdV [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + 6u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\text{II.22})$$

II.7. Solutions de l'équation KdV

L'équation KdV est une équation non linéaire possédant une grande variété de solutions. Dans la suite, nous présentons une classe intéressante des solutions exactes de cette équation.

II.7.1. Solutions à profil constant

Supposons que la solution de l'équation (II.22) est sous la forme d'une onde progressive telle que : $u(\xi, \tau) = u(\xi - v\tau)$, avec: $z = \xi - v\tau$.

En substituant cette dernière dans l'équation (II.21), on obtient [15]:

$$-vu_z + 6uu_z + u_{zzz} = 0 \quad (\text{II.23})$$

où : $u_z = \partial u / \partial z$.

On peut réécrire l'équation (II.23) sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dz} (-vu_z + 3u^2 + u_{zz}) = 0 \quad (\text{II.24})$$

L'intégration de l'équation (II.24) donne alors:

$$u_{zz} + 3u^2 - vu + c_1 = 0 \quad (\text{II.25})$$

où c_1 est une constante d'intégration.

En multipliant l'équation (II.25) par u_z puis intégrant une fois par rapport à z , on obtient [15]

$$\frac{1}{2} u_z^2 + u^3 - \frac{1}{2} vu^2 + c_1 u = c_2 \quad (\text{II.26})$$

où: c_2 est une constante d'intégration. L'équation (II.26) est semblable à l'équation exprimant la conservation de l'énergie d'une particule de masse unitaire dont la position u , soumise à un potentiel (V_{eff}) [1], dont:

$$V_{eff}(u) = u^3 - \frac{1}{2}vu^2 + c_1u \tag{II.27}$$

On peut donc réécrire l'équation (II.26) en fonction du V_{eff} comme suit [15]

$$\frac{1}{2}u_z^2 + V_{eff}(u) = c_2 \tag{II.28}$$

L'équation (II.28) est formellement analogue à l'équation exprimant la conservation de l'énergie d'une particule de masse unitaire, dont la position est u , soumise à un potentiel effectif $V_{eff}(u) = u^3 - \frac{1}{2}vu^2 + c_1u$ [1, 15]. Pour obtenir des solutions d'ondes localisées, on doit prendre des constantes d'intégration c_1 et c_2 nulles.

La figure (II.4) montre la variation de V_{eff} en fonction de l'amplitude u pour deux vitesses d'onde $v > 0$ et $v < 0$.

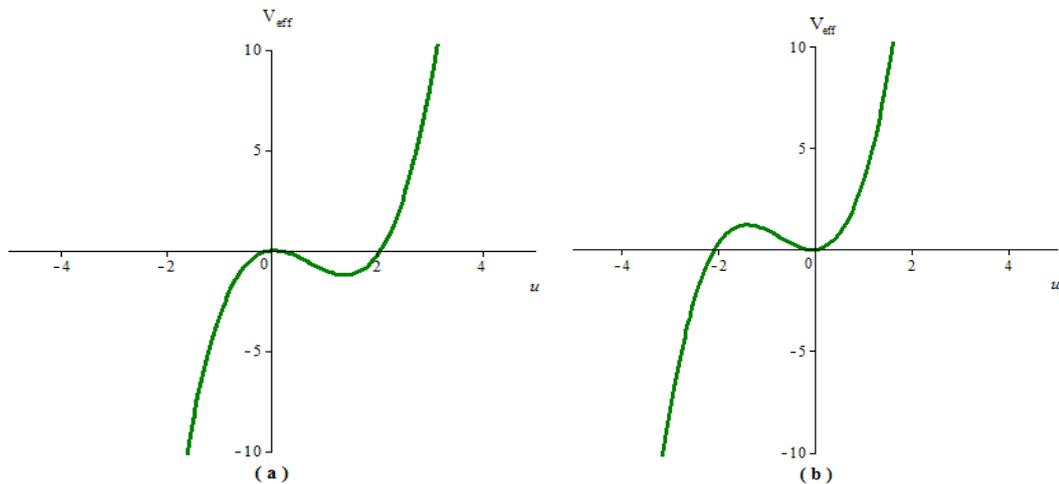


Figure II.4: Apparence du pseudo-potentiel $V_{eff}(u)$ lorsque: a) $v > 0$, b) $v < 0$ [1].

D'après cette figure, nous pouvons confirmer qu'il n'existe pas de solutions soliton localisées avec une amplitude négative. L'équation KdV ne peut avoir des solutions spatialement localisées de type soliton que lorsque v est positive.

II.7.2. Solution soliton

Une caractéristique essentielle de l'équation KdV est l'existence des solutions de type ondes solitaires appelées solitons. Le mot "*soliton*" fut introduit en 1965 par N. J. Zabusky et Kruskal [16, 17]. Il évoque la notion d'onde solitaire. La terminaison en "*on*" indique que cette impulsion a des propriétés qui se rapprochent de celles d'une particule dans un réseau de

vibration ayant un comportement non linéaire, d'où le nom soliton (en analogie avec phonon, photon...et). De manière simple, un soliton est une déformation locale d'une grandeur physique (élévation d'un fluide, enveloppe d'un champ électromagnétique...), ou un paquet d'ondes localisées, qui en perturbant suffisamment la réponse d'un environnement matériel adapté, peut compenser l'étalement linéaire naturel de la déformation elle-même. La propagation peut ainsi devenir invariante et dans certains cas robuste vis-à-vis aux perturbations externes et ou aux collisions éventuelles avec d'autres solitons. Cela signifie que u , u_z , et u_{zz} tendent vers zéro (ou $z=\xi-v\tau$) lorsque $|z|$ tend vers l'infini et par conséquent les constantes d'intégration c_1 et c_2 doivent être considérées comme nulles. En tenant compte de ces conditions, l'équation (II.26) se réduit à [18]:

$$\frac{1}{2}u_z^2 + u^3 - \frac{1}{2}vu^2 = 0 \quad (\text{II.29})$$

On peut réécrire l'équation (II.29) sous la forme suivante :

$$dz = \frac{du}{\sqrt{vu^2 - 2u^3}} \quad (\text{II.30})$$

En faisant l'intégration de cette dernière équation, on obtient la solution soliton de l'équation KdV [18]:

$$u = \frac{v}{2} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{v}{4}}z\right) \quad (\text{II.31})$$

Puisque la vitesse est positive ($v>0$), on voit clairement que le soliton KdV prend le profil d'une fonction "sech²".

On peut alors écrire la solution (II.31) sous la forme suivante:

$$u(\xi, \tau) = A \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{A}{2}}(\xi - 2A\tau)\right) \quad (\text{II.32})$$

où $A=v/2$ est l'amplitude de l'onde.

On déduit que A doit être positif pour que ce type de solution existe.

II.7.3. Solution cnoïdale

Pour le cas des ondes hydrodynamique, les solutions périodiques de l'équation KdV sont des ondes cnoïdales données par [1, 19]:

$$u(x, t) = u_0 - \frac{k^2 q^2}{2} \operatorname{cn}^2\left(\frac{qx}{2}, k\right) \quad (\text{II.33})$$

où: $\operatorname{cn}(x, k)$ est la fonction cosinus elliptique de Jacobi, k est le module de la fonction. On note que pour $k=0$, $\operatorname{cn}(x, 0) = \cos(x)$ mais pour $k=1$, on trouve que $\operatorname{cn}(x, 1) = \operatorname{sech}(x)$.

II.7.4. Solutions multi-solitons

Il est à noter que l'équation KdV possède une infinité de solutions, elle est appelées solutions multi-soliton. L'évolution temporelle de ces solutions décrit le phénomène d'interaction entre les solitons voisins [20]. Ce type de solution est donné par l'expression suivante [21]:

$$u_N(x, t) \approx \sum_{n=1}^N 2\eta_n^2 \operatorname{sech}^2\left(\eta_n(x - 4\eta_n^2 t \pm x_n^\pm)\right) \quad t \rightarrow \pm\infty \quad (\text{II.34})$$

où x_n^\pm est la phase et l'amplitude de la solution est égale à $A_n = 2\eta_n^2$.

La solution N -soliton $u_N(x, t)$ décrit un nombre N d'ondes solitaires de différentes amplitudes se propageant à différentes vitesses. Alors, il est intéressant d'étudier la solution multi-solitons car elle nous renseigne sur le comportement des solitons lors d'une interaction.

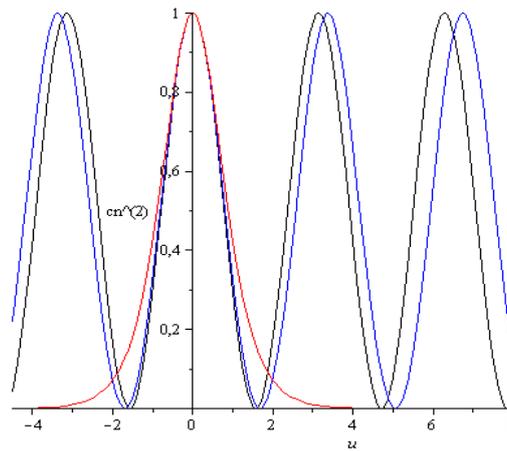


Figure II.5: Evolution de la fonction $cn(x, k)$ pour différentes valeurs du module k : $k=0$ (rouge), 0.5 (noire) et 1 (bleu).

D'après la figure (II.5), lorsque k augmente la courbure de l'onde augmente et la solution cnoidale tend vers la solution de l'onde solitaire ($k \rightarrow 1$). Pour $k=0$, nous avons un profil proche d'une onde linéaire (sinusoïdale). Pour $k=0,5$, la dégradation est partiellement faible par rapport au premier cas et pour $k=1$, on constate que les pics de l'onde sont séparés par des vallées plus aplaties.

II.8. Lois de conservation de l'équation KdV

L'équation KdV est une équation intégrable possédant un nombre infini de relations de conservation. Dans la suite, on va donner quelques propriétés mathématiques de cette équation.

II.8.1. Hamiltonien

Un système est dit Hamiltonien si son évolution temporelle peut être décrite par un ensemble d'équations d'Hamilton [22]. Dans le cas d'un système comportant un nombre fini de degrés de liberté, on a les équations suivantes [22]:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \{q_i, p_i\} \quad (\text{II.35})$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \{p_i, q_i\} \quad (\text{II.36})$$

où q_i et p_i sont respectivement les coordonnées et les moments canoniques, et H est l'Hamiltonien.

On peut exprimer l'équation KdV comme un système Hamiltonien avec un nombre infini de degrés de liberté. Elle s'écrit donc sous la forme [22]:

$$u_t = \{u(x), H\} \quad (\text{II.37})$$

où $\{ , \}$ représente un crochet de Poisson.

Il convient maintenant d'établir un Hamiltonien et un crochet de Poisson qui devraient satisfaire les conditions ordinaires (l'antisymétrie et l'identité de Jacobi), de la reproduction de l'équation KdV. En réécrivant l'équation KdV sous la forme suivante [22]:

$$\partial_t u = \partial_x (-\partial_x^2 u + 3u^2) \quad (\text{II.38})$$

On remarque aisément que l'équation entre parenthèses est la dérivée fonctionnelle de l'intégrale suivant [22]:

$$H^{(1)} = \frac{1}{2} \int dx [(\partial_x u)^2 + 2u^3] \quad (\text{II.39})$$

L'équation KdV peut être exprimée à l'aide de sa seconde structure Hamiltonienne donnée par [22]:

$$\partial_t u = \{u, H^{(2)}\} \quad (\text{II.40})$$

avec

$$H^{(2)} = \frac{1}{2} \int dx u^2 \quad (\text{II.41})$$

Nous soulignons qu'il existe une autre loi de conservation pour l'équation KdV qui exprime la conservation de la masse dans le système. Elle est donnée par l'expression suivante [23]:

$$H_1 = \frac{1}{2} \int u dx \quad (\text{II.42})$$

Il est à noter que l'équation KdV a un nombre infini de quantités conservées. C'est la raison pour laquelle chaque onde solitaire reste stable lors des interactions mutuelles. Les

quantités conservées garantissent l'indépendance des paramètres par rapport au temps (caractéristique propre des solitons), ce qui engendre la stabilité des solitons.

II.9. Différentes formes de l'équation KdV

Il existe de nombreuses variantes de l'équation KdV non linéaire. On cite en particulier, les équations suivantes:

- Équation KdV à coefficients constants [24]:

$$\partial_t u + 6u \partial_x u + \partial_x^3 u = 0 \quad (\text{II.43})$$

- Équation KdV cylindrique [25]:

$$\partial_t u + \partial_x^3 u - 6u \partial_x u + \frac{u}{2t} = 0 \quad (\text{II.44})$$

- Équation KdV modifiée [25]:

$$\partial_t u \pm 6u^2 \partial_x u + \partial_x^3 u = 0 \quad (\text{II.45})$$

- Équation KdV sphérique [25]:

$$\partial_t u + \partial_x^3 u - 6u \partial_x u + \frac{u}{t} = 0 \quad (\text{II.46})$$

- Équation KdV-Burgers [25]:

$$\partial_t u + \mu \partial_x^3 u + 2u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = 0 \quad (\text{II.47})$$

- Équation KdV généralisée [26]:

$$\partial_t u + u^p \partial_x u + \partial_x^3 u = 0 \quad (\text{II.48})$$

- Équation KdV à coefficients variables [25]:

$$\partial_t u + \beta(t) \partial_x^3 u + 6u \partial_x u = 0 \quad (\text{II.49})$$

- Équation KdV de type K(m, n), n>0 [27]:

$$\partial_t u + \partial_x^3 (u^n) + \partial_x (u^m) = 0 \quad (\text{II.50})$$

- Équation KdV déformée [28]:

$$\partial_t u + \partial_x \left(\partial_x^2 u - 2\eta u^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{u(\partial_x u)^2}{\eta + u^2} \right) \right) = 0 \quad (\text{II.51})$$

II.10. Propagation d'un soliton KdV

Examinons maintenant les conditions qui mènent à l'obtention d'un soliton KdV modélisé par l'équation (II.22). Pour cela, nous allons étudier la propagation des ondes dans deux régimes distincts : le régime de propagation dispersif et le régime de propagation non-linéaire.

II.10.1. Régime purement non linéaire

Nous allons résoudre l'équation différentielle de KdV dans le cas d'un régime non linéaire en négligeant l'impact de la dispersion. Donc, l'équation (II.22) se réduit à la forme suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{II.52})$$

Cette dernière étant l'équation dite de Burger [29], qui d'écrit la propagation d'une onde dans un système non linéaire sans dispersion.

La solution de l'équation (II.52) est donnée par l'expression suivante [30]:

$$u(\xi, \tau) = h(\xi - u(\xi, \tau)\tau) \quad (\text{II.53})$$

où h est une fonction arbitraire.

Pour avoir l'impact de l'effet non linéaire sur l'évolution de l'onde, on a supposé que $h = \exp(\xi - u(\xi, \tau)\tau)$. La figure (II.6) schématise la solution de l'équation de Burger donnée par la formule (II.53). On constate que la présence de la non linéarité tend à favoriser la formation de fronts raides ou d'ondes de choc, puisque les points représentant un amplitude plus grand se propagent plus vite.

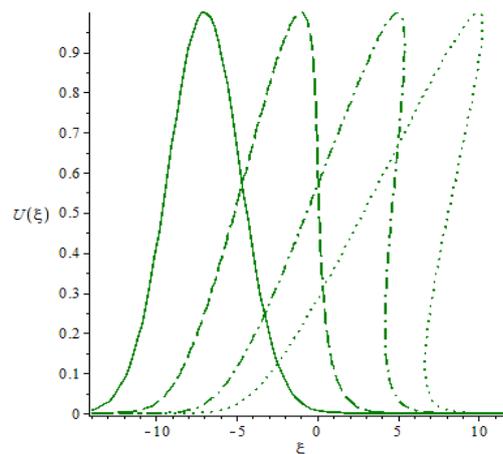


Figure II.6: Evolution d'une impulsion dont la dynamique est régie par l'équation de Burger [29].

II.10.2. Régime purement dispersif

Nous allons s'intéresser maintenant au cas où les effets non-linéaires sont négligés par rapport aux effets dispersifs. Dans ce cas l'équation KdV sera linéarisée [29]:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\text{II.54})$$

Cette dernière admet les ondes planes sous la forme :

$$u = A e^{i(k\xi - \omega\tau)} \quad (\text{II.55})$$

L'équation (II.55) est considérée comme un type de solution sous la condition que la pulsation ω et le nombre d'onde k soient reliés par la relation de dispersion suivante : $\omega = -k^3$. Ces ondes possèdent une vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$ [29], qui dépend de la valeur du nombre d'onde k . Ainsi, les composantes de Fourier d'une d'impulsion étroite dans un tel milieu ont des vitesses différentes, provoquant un étalement de l'onde comme le montre la figure suivante.

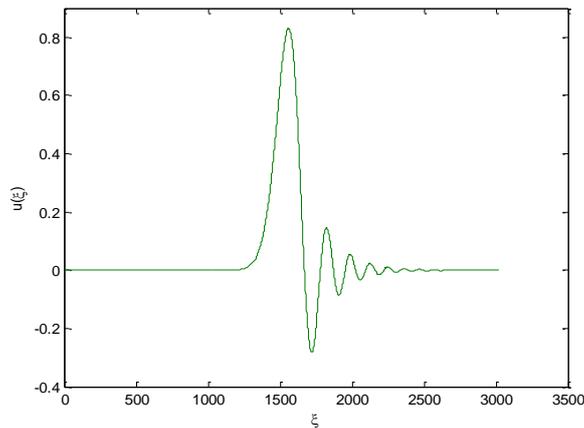


Figure II.7: Evolution d'une onde dans le cas de l'équation KdV linéarisée [29].

II.10.3. Compromis: dispersion-non linéarité

La création d'un soliton KdV est due à un équilibre parfait entre deux effets: la non linéarité et la dispersion. La non linéarité tend à localiser l'excitation alors que la dispersion l'étaie. L'équilibre entre ces deux effets conduit à la formation d'une onde stable appelée soliton. La figure (II.8) montre l'évolution spatio-temporelle d'un soliton KdV dont l'amplitude est donnée par l'équation (II.32). On remarque que cette onde se propage sans aucune déformation notable.

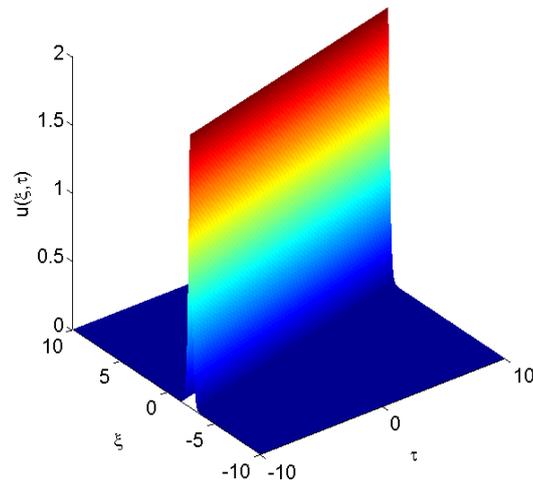


Figure II.8: Solution soliton de l'équation KdV pour $v=4$ et $z = \xi - v\tau$.

II.11. Interaction des solitons KdV

Les ondes solitaires peuvent interagir comme des particules, du fait qu'ils sont appelées *solitons* [17, 20]. Donc, l'interaction des solitons est un phénomène qui fait intervenir deux solitons où plus à la même longueur d'onde à des temps d'émission différents. La figure suivante présente une simulation numérique par matlab de l'interaction de deux solitons.

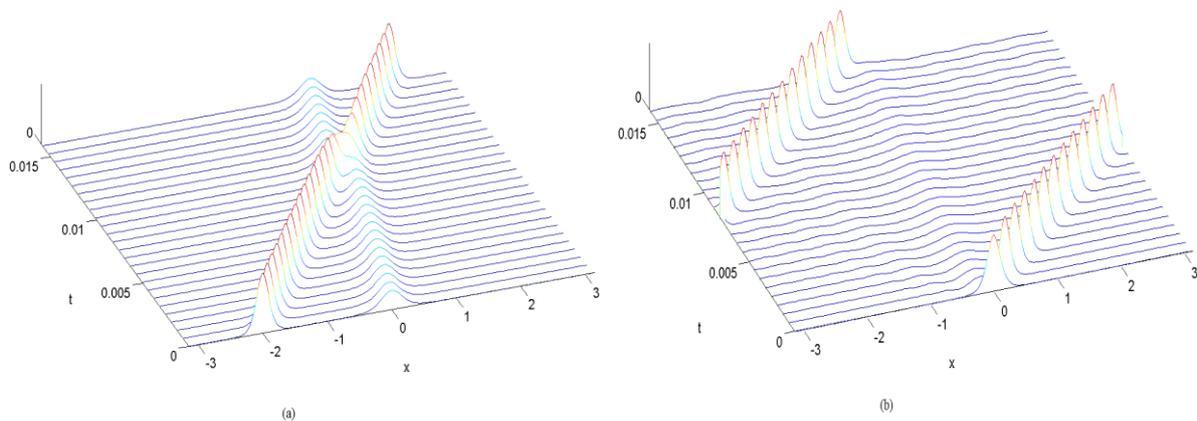


Figure II.9: Interaction de deux solutions KdV :

a) Evolution de deux ondes KdV en phase, b) Evolution de deux ondes KdV en opposition.

On voit que les deux solitons en phase (figure II.9) s'approchent alors que les deux solitons en opposition de phase s'éloignent asymptotiquement.

II.12. Equations KdV d'ordre supérieur

Dans ce qui suit, nous allons présenter une famille des équations de type KdV d'ordre supérieur. Ce genre d'équation fait intervenir les termes de dispersion et de non linéarité d'ordre supérieur, à savoir la dispersion de cinquième et de septième ordre et plus.

II.12.1. Équations KdV d'ordre cinq

L'équation KdV d'ordre cinq prend la forme suivante [31]:

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{xx} + \gamma u u_{xxx} + u_{xxxx} = 0 \quad (\text{II.56})$$

où α , β et γ sont des paramètres réelles non nulles.

On voit qu'en plus du terme de dispersion de troisième ordre u_{3x} , cette équation contient un terme u_{5x} décrivant la dispersion de cinquième ordre. Notons que, selon les valeurs des paramètres α , β et γ , on peut trouver une variété d'équations de type KdV d'ordre 5 à savoir l'équation de Sawada-Kotera, l'équation de Caudrey-Dodd-Gibbon, l'équation de Lax, l'équation Kaup-Kuperschmidt, et l'équation d'Ito [31].

II.12.2. Équations KdV d'ordre sept

L'équation KdV de septième ordre est donnée par la forme généralisée suivante [31]:

$$u_t + au^3 u_x + bu_x^3 + cuu_x u_{xx} + du^2 u_{xxx} + eu_{xx} u_{xxx} + fu_x u_{xxx} + uu_{xxxx} + u_{xxxxx} = 0 \quad (\text{II.57})$$

où a , b , c , d , e , f , et g sont des paramètres non nuls et arbitraires.

Il existe trois cas particuliers bien connus de l'équation (II.57) obtenus en utilisant une extension de la forme bilinéaire de l'équation KdV standard. Ces formes sont:

1. Équations de Sawada-Kotera-Ito [31]:

$$u_t + 252u^3 u_x + 63u_x^3 + 378uu_x u_{xx} + 126u^2 u_{xxx} + 63u_{xx} u_{xxx} + 42u_x u_{xxx} + 21uu_{xxxx} + u_{xxxxx} = 0 \quad (\text{II.58})$$

2. Équations de Lax [31]:

$$u_t + 140u^3 u_x + 70u_x^3 + 280uu_x u_{xx} + 70u^2 u_{xxx} + 70u_{xx} u_{xxx} + 42u_x u_{xxx} + 14uu_{xxxx} + u_{xxxxx} = 0 \quad (\text{II.59})$$

3. Équations de Kaup-Kuperschmidt [31] :

$$u_t + 2016u^3 u_x + 630u_x^3 + 2268uu_x u_{xx} + 504u^2 u_{xxx} + 252u_{xx} u_{xxx} + 147u_x u_{xxx} + 42uu_{xxxx} + u_{xxxxx} = 0 \quad (\text{II.60})$$

Notons que ces trois cas de l'équation KdV de septième ordre sont complètement intégrables. Cela signifie que chacun de ces équations admet un nombre infini de lois de conservation et par

conséquent chacune donne un nombre de solution *soliton*.

II.13. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que l'équation KdV non linéaire admet l'onde solitaire ou le soliton comme type de solution sous la forme d'une fonction $sech^2$. Cette solution marque une certaine particularité au sein de la famille d'ondes solitaires, et cela par sa vitesse de propagation et sa largeur de son amplitude. Par une simple analyse, nous avons montré que le modèle de propagation descriptif pour un soliton KdV peut être considéré comme un mélange de deux équations: l'une est la propagation d'une onde dispersive et l'autre est celle de type Burger (exprimant l'onde de choc). La compensation entre ces deux effets antagonistes entraîne la formation d'une structure localisée dans le domaine espace-temps qui présente le soliton KdV. A la fin de ce chapitre, on a étudié le phénomène d'interaction des solitons dans le cas de l'équation KdV où on a montré que l'interaction des solitons est un phénomène qui fait intervenir deux solitons de même longueur d'onde, émis à des temps différents.

REFERENCES

- [1] M. Peyrard, T. Dauxois, *"Physique des solitons"*, EDP Sciences, (2004).
- [2] J. W Miles, *"The Korteweg-de Vries equation: a historical essay"*, Journal of Fluid Mechanics 106 (1980) 131-147.
- [3] J. Boussinesq, *"Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond"*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 17 (1872) 55-108.
- [4] S. Emmersogn, J. S. Russell, *"A Great Victorian Engineer and Naval Architect"*, (1977).
- [5] S. Russell, *"Report on Waves"*, Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, John Murray, Londres (1844) 311-390.
- [6] O. J. P. Eboli and G. C. Marques, *"Solitons as Newtonian particles"*, Phys. Rev. B. 28 (1983) 689-695.
- [7] Kazumi Maki, *"Soliton damping and topological order in quasi-one-dimensional systems"*, Phys. Rev. B 24 (1983) 335.
- [8] Hasegawa, Tappert, *"Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers"*, App. Phys. Lett. 23 (1973) 142.
- [9] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, J. P. Gordon, *"Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers"*, Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 1095.
- [10] N. Khelfaoui, *"Auto-focalisation infrarouge dans le Phosphore d'Indium dopé fer"*, Thèse de doctorat, Unité de recherche commune à l'Université de Metz, (2006).
- [11] Mesatoshi Suzuki, *"Successful test of a long distance large-capacity"*, soliton transmission system, Lightwave communication systems groupe KDD and D Laboratories (2001).
- [12] V. Coda, *"Solitons optiques spatiaux Kerr et photoréfractifs : Propriétés fondamentales et application à l'adressage optique"*, Thèse de doctorat, UFR des sciences et techniques de l'université de Franche-Comté, (2006).
- [13] <http://didel.script.univ-parisdiderot.fr/claroline/backends/download.php?url=L0NvdXJzX09uZGVzUE1BLnBkZg%3D%3D&cidReset=true&cidReq=36PH4381>, ondes dispersives nonlinéaires, univ-paris.
- [14] J. Chambarel, *"Etude des vagues extrêmes en eaux peu profondes"*, Thèse de doctorat, Université de Provence - Aix-Marseille I, (2009).

- [15] K. Banks, "Solitons and the Korteweg-de Vries Equation: Starting with Shallow Water Waves", (2012).
- [16] S. Bertrand, "Surfaces solitoniques plongées dans des algèbres de Lie associées aux modèles intégrables", Thèse de l'université du Québec, (2013).
- [17] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal, "Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states", Phys. Rev. Lett. 15 (1965) 240-243.
- [18] P. G. Drazin, R. S. Johnson, "Solitons : An Introduction", livre, université de Cambridge, (1989).
- [19] F. Vigie, "Etude expérimentale d'un écoulement à surface libre au-dessus d'un obstacle", Thèse de doctorat, (2005).
- [20] N. J. Zabusky, G. S. Deem, M. D. Kruskal, "Formation propagation and interaction of soliton", a film available on free loan from Bell laboratories, USA (1968).
- [21] G. A. El, "Korteweg-de Vries equation: solitons and undular bores", In: Solitary Waves in Fluids, Advances in Fluid Mechanics 47 (2007), ed. by R. Grimshaw.
- [22] P. Dargis, "Structures non-locales dans les systèmes intégrables: systèmes KdV supersymétriques et chaînes de spins", Thèse de Philosophie Doctor, université Laval, (1999).
- [23] A. Landry, "Les extensions bosoniques et fermioniques de l'équation Benjamin-Ono supersymétriques et autres", Mémoire de M.Sc, université Laval, (2010).
- [24] K. Brauer, "The Korteweg-de Vries equation: history, exact solutions and graphical representation", university of Osnabrück, Germany, (2000).
- [25] D. Andrei, Polyanin, F. Valentin, Zaitsev, "Handbook of nonlinear partial differential equations", (2004).
- [26] J. L. BONA, V. A. Dougalis, O. A. Karakashian, W. R. Mckinney, "Conservative high-order, numerical schemes for the generalized Korteweg-de Vries equation", Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 351 (1995) 107-164.
- [27] R. A. Meyers, "Mathematics of complexity and dynamical systems", Springer Science, Business Media, LLC, (2012).
- [28] E. W. Weisstein, "Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica", Chapman & Hall CRC, second edition, (2003).
- [29] C. Angeli, G. Derrien, S. Gabriel, R. Vandenbavière, "De l'onde au soliton", Projet d'approfondissement physique - Insa de Lyon (2008).
- [30] M. Nadjakhah, "Exact solution of generalized inviscid burgers' equation", Proceeding séminaire, Iran University of Science and Technology, (2014).

- [31] A. M. Wazwaz, " *Partial differential equations and solitary waves theory*", livre, Springer, (2009).

CHAPITRE III

Techniques de résolution des modèles KdV

III.1. Introduction

La propagation des ondes non linéaires dans divers milieux physiques est décrite par les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ces équations non linéaires sont largement utilisées pour décrire des phénomènes complexes dans différents domaines des sciences, en particulier dans la physique telles que la physique des plasmas, la mécanique des fluides, fibres optiques, l'optique non linéaire,... . L'effort pour trouver une solution exacte à une équation non-linéaire est important pour comprendre la plupart des phénomènes physiques non linéaires. Il existe un grand nombre d'approches analytiques et numériques qui sont utilisées pour déterminer les solutions pour de nombreuses équations d'évolutions non linéaires.

Les méthodes analytiques donnent une solution dite exacte de l'équation non linéaire par contre les méthodes numériques donnent une solution approximative. Soulignons en toute rigueur qu'il n'existe aucune méthode commune pour trouver les solutions exactes de tous les types d'équations partielles non linéaires.

Dans ce chapitre, on va présenter un certain nombre de méthodes utilisées pour la résolution des équations de type KdV. Ces méthodes puissantes permettent de déterminer des solutions de type soliton pour ces modèles. En premier lieu, nous allons présenter deux méthodes de résolution numérique de l'équation KdV, qui sont la méthode de Fourier à pas divisés et celle de Runge-Kutta d'ordre quatre. Par la suite, nous allons exposer deux méthodes utilisées pour résoudre analytiquement ce genre d'équation comme par exemple la méthode (G'/G) étendue et celle de l'équation auxiliaire.

III.2. Méthodes de résolution numérique des modèles KdV

La résolution numérique des équations d'évolutions non linéaires reste, aujourd'hui encore, le seul moyen pour pallier l'impossibilité de trouver des solutions analytiques exactes à certaines équations de propagation présentant une perturbation non linéaire. Les méthodes numériques peuvent être regroupées en trois catégories principales: la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et les méthodes spectrales ou pseudo-spectrales. Les méthodes pseudo-spectrales sont basées sur une interpolation globale réelle de la solution d'une équation différentielle non linéaire par contre les méthodes des différences finies et des éléments finis sont basées sur une interpolation locale.

III.2.1. Méthode de la transformée de Fourier à pas divisé

La méthode de Fourier à pas divisé (plus communément appelée méthode du Split Step Fourier) est une méthode pseudo-spectrale rapide, qui permet de résoudre numériquement les équations non linéaires. Hasegawa [1] est le premier qui a utilisé cette méthode et après elle est devenue une approche assez courante, qui permet de simuler la propagation des impulsions dans la fibre optique et d'autres types de milieux matériels [2-4].

La méthode de Fourier à pas divisé est basée sur le principe de traiter séparément la partie non linéaire et la partie linéaire (dispersion). On peut donc séparer une équation non linéaire en deux opérateurs comme suit [5]:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} = (L + N)u \quad (\text{III.1})$$

où L et N représentent les opérateurs linéaires et non linéaires, respectivement.

La solution de l'équation (III.1) prend la forme suivante [3-5]:

$$u(z + \Delta z, t) = e^{[L+N]\Delta z} u(z, t) \approx e^{L\Delta z} e^{N\Delta z} u(z, t) \quad (\text{III.2})$$

Pour traiter séparément les opérateurs, on a approché l'exponentiel d'une somme par un produit d'exponentiel.

Considérons une équation KdV ayant la forme suivante [6]:

$$u_t = -\delta^2 u_{xxx} - uu_x \quad (\text{III.3})$$

Les opérateurs L et N correspondants sont donnés par [6]:

$$L \equiv -\delta^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \quad N \equiv -u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{III.4})$$

On voit que l'opérateur non linéaire dépend de la solution qui n'est pas connu explicitement.

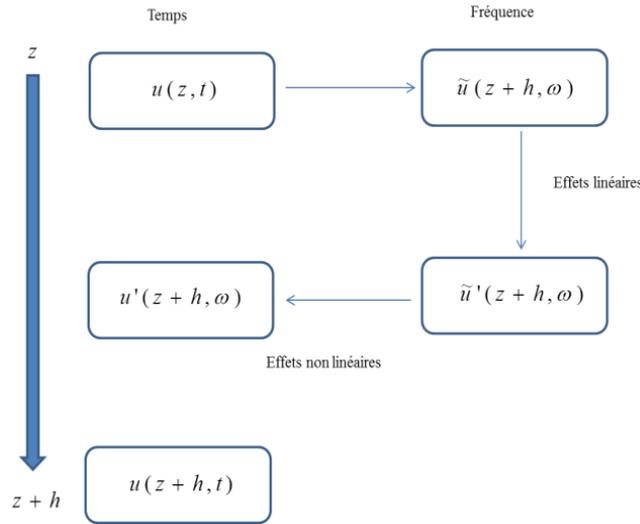


Figure III.1: Organigramme de la méthode du split-step Fourier [7].

On peut écrire la solution comme une superposition de modes de Fourier dans l'espace de nombre d'onde comme suit [6]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx} \tilde{u}(p, t) \tag{III.5}$$

Ainsi, la partie linéaire peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle ordinaire simple suivante [6]:

$$\frac{d \tilde{u}(p, t)}{dt} = i\delta^2 p^3 \tilde{u}(k, t) \tag{III.6}$$

Pour chaque mode, l'amplitude est donnée par [6]:

$$\tilde{u}(p, t) = \tilde{u}(p, 0) e^{i\delta^2 p^3 t} \tag{III.7}$$

La solution $u(x, t)$ est donnée par [6]:

$$u(x, t) = \exp \left[\int_0^t dt' (N + L) \right] u(x, 0) \tag{III.8}$$

Ceci n'est pas une solution explicite, car l'opérateur non linéaire dépend de la solution inconnue à tous les temps $0 < t' < t$.

L'algorithme se rapproche de la solution formelle pendant un petit temps du pas dt [6]:

$$\begin{aligned} u(x, t + dt) &= \exp \left[\int_0^{t+dt} dt' (N + L) \right] u(x, 0) \\ &\approx \exp \left[\int_0^{t+dt} dt' N \right] \exp \left[\int_0^{t+dt} dt' L \right] u(x, t) \end{aligned} \tag{III.9}$$

Cette factorisation introduit des erreurs de $O(dt^2)$ parce que les opérateurs N et L ne commutent pas l'un de l'autre, ce qui donne:

$$[N, L] \neq 0 \quad (\text{III.10})$$

Sachant que l'équation KdV utilisée par Zabusky et Kruskal est donnée par [6]:

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \quad (\text{III.11})$$

Le terme non linéaire peut s'écrire sous la forme [6]:

$$uu_x = F_x, \quad F[u(x)] = \frac{1}{2}u^2 \quad (\text{III.12})$$

Nous allons appliquer la méthode de Fourier à pas divisé sur l'équation KdV pour avoir des solutions numériques. Commençons tout d'abord par réécrire l'équation KdV comme suit [8]:

$$\partial_t u + 3\partial_x(u)^2 + \partial_x^3 u = 0 \quad (\text{III.13})$$

La transformée de Fourier de cette équation est donc [8]:

$$\partial_t \hat{u} + 3ik(\hat{u})^2 - ik^3 \hat{u} = 0 \quad (\text{III.14})$$

On peut réécrire cette dernière sous la forme:

$$\partial_t \hat{u} = -3ik(\hat{u})^2 + ik^3 \hat{u} \quad (\text{III.15})$$

L'équation (III.15) se résout en deux temps:

$$\partial_t \hat{u} = ik^3 \hat{u} \quad (\text{III.16})$$

Et [8]:

$$\partial_t \hat{u} = -3ik(\hat{u})^2 \quad (\text{III.17})$$

L'idée de la méthode de Fourier à pas divisé est de résoudre alternativement chacune de ces équations quand le pas varie de t à $t + \Delta t$. Par conséquent, nous obtenons [8]:

$$\hat{u}_1(k, t + \Delta t) = \hat{u}(k, t) e^{ik^3 \Delta t} \quad (\text{III.18})$$

$$\hat{u}(k, t + \Delta t) = \hat{u}_1(k, t + \Delta t) - 3ik\Delta t \left(\hat{u}_1^2 \right) \quad (\text{III.19})$$

Notons qu'ici nous utilisons la méthode d'Euler pour le pas du temps et que la solution pourrait être améliorée si on utilise une méthode plus puissante comme par exemple la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre [9]. La seule chose un peu délicate c'est que nous avons à la fois \hat{u} et u dans l'équation, mais on peut simplement utiliser la transformée de Fourier pour les relier. Les équations (III.18) et (III.19) deviennent alors [8]:

$$\hat{u}_1(k, t + \Delta t) = \hat{u}(k, t) e^{ik^3 \Delta t} \quad (\text{III.20})$$

$$\hat{u}(k, t + \Delta t) = \hat{u}_1(k, t + \Delta t) - 3ik\Delta t \left(F \left(\left(F^{-1} [\hat{u}_1(k, t + \Delta t)] \right)^2 \right) \right) \quad (\text{III.21})$$

III.2.2. Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre

C'est Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta qui ont élaboré ces méthodes en 1901 [9]. Le principe de ces méthodes repose sur l'itération où on utilise une première estimation de la solution pour calculer une seconde estimation, et ainsi de suite. Ce sont des méthodes à pas unique, directement dérivées de la méthode d'Euler. Une des plus utilisées est la méthode dite de Runge-Kutta d'ordre quatre.

Appliquant cette dernière méthode sur l'équation KdV suivante [9]:

$$u_t + \beta u u_x + \mu u_{xxx} = 0 \tag{III.22}$$

où $x \in [-p, p]$ et p est un nombre. En utilisant le changement de variable suivant :

$$x \rightarrow \frac{\pi x}{p} + \pi \tag{III.23}$$

Donc, nous avons changé l'intervalle de la solution du $[-p, p]$ à $[0, 2\pi]$. Alors, l'équation (III.22) devient [9]:

$$u_t + \frac{\beta\pi}{p} u u_x + \frac{\mu\pi^3}{p^3} u_{xxx} = 0 \tag{III.24}$$

avec $x \in [0, 2\pi]$.

Appliquant maintenant la transformée de Fourier inverse, l'équation (III.24) devient [9]:

$$u_t = -\frac{i\beta\pi}{p} u F^{-1} \{k F(u)\} + \frac{i\mu\pi^3}{p^3} F^{-1} \{k^3 F(u)\} \tag{III.25}$$

Posons:

$$U = [u(x_0, t), u(x_1, t), \dots, u(x_{N-1}, t)]^T \tag{III.26}$$

L'équation (III.25) s'écrit sous une forme vectorielle comme suit :

$$U_t = F(U) \tag{III.27}$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre pour le système (III.27) est donnée par [9] :

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= F(U^n, t^n) \\ K_2 &= F\left(U^n + \frac{1}{2} \Delta t K_1, t^n + \frac{1}{2} \Delta t\right) \\ K_3 &= F\left(U^n + \frac{1}{2} \Delta t K_2, t^n + \frac{1}{2} \Delta t\right) \\ K_4 &= F(U^n + \Delta t K_3, t^{n+1}) \\ U^{n+1} &= U^n + \frac{\Delta t}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \end{aligned} \right\} \tag{III.28}$$

où les exposants indiquent le niveau de temps dans laquelle le terme est évalué.

Dans la figure (III.2), on donne un plot de la solution numérique de l'équation KdV obtenue en utilisant la méthode spectrale. La figure (III.4) représente la solution de l'équation KdV (III.27) par la méthode de Fourier spectral/ETDRK4 [10].

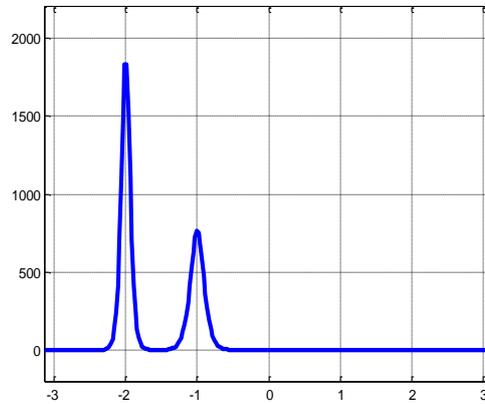


Figure III.2: Plot de la solution numérique de l'équation KdV [10].

III.3. Méthodes de résolution analytiques des modèles KdV

Plusieurs méthodes analytiques ont été développées pour déterminer les solutions exactes pour de nombreuses équations non linéaires telles que la méthode de diffusion inverse [11], la méthode d'expansion de la fonction tangente hyperbolique [12, 13], la méthode bilinéaire de Hirota [14, 15], la méthode de la fonction exponentielle [16], l'expansion elliptique de Jacobi [17-22], la méthode de transformation de Backlund [23, 24], la méthode de l'équation généralisée de Riccati [25], la méthode (G'/G) étendue [26], la méthode sub-ODE [27, 28], etc [29-30].

Gardner et al. [11] ont proposé une méthode pour résoudre l'équation KdV appelée méthode de diffusion inverse «*Inverse scattering method*». L'équation KdV est complètement intégrable par la méthode de la diffusion inverse. Ceci implique qu'il existe une infinité d'invariants pour l'équation KdV dans le cas conservatif [12].

Dans notre étude, nous allons utiliser la méthode (G'/G) étendue et la méthode de l'équation auxiliaire pour résoudre des modèles de type KdV. L'application de ces deux méthodes permet de trouver de nouvelles solutions d'onde solitaire qui ne peuvent pas être obtenues par aucune autre méthode de résolution.

III.3.1. Méthode (G'/G) étendue

Récemment Wang et ses collaborateurs [26] ont proposé une nouvelle méthode appelée "*méthode (G'/G) étendue*" pour résoudre les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ils ont obtenu des solutions de type ondes progressives "*traveling wave*" exprimées en terme des fonctions hyperboliques, trigonométriques et rationnelles. Plus tard, Zhang et al. [31-33] ont généralisé la méthode (G'/G) et amélioré le travail de Wang pour résoudre les équations à coefficients variables et à plusieurs dimensions. De plus, Zhang [31-33] a trouvé de nouvelles applications de cette méthode pour une certaine classe d'équations différentielles partielles non linéaire spéciale.

La méthode (G'/G) étendue [29] est une méthode efficace pour le calcul des solutions exactes des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Une équation différentielle partielle non linéaire prend la forme générale suivante [29]:

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (\text{III.29})$$

où $u(x,t)$ est la fonction inconnue dépendante du variable d'espace x et de variable du temps t . P est un polynôme contenant la fonction $u(x,t)$ et ses dérivées partielles. Pour résoudre l'équation (III.29), on introduit la variable $\xi = x - vt$ de sorte que $u(x,t) = U(\xi)$, où v est la vitesse de l'onde. Ainsi, on trouve les dérivées partielles suivantes [29]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (\text{III.30})$$

En utilisant ces dérivées, l'équation différentielle partielle non linéaire (III.29) se réduit à une équation différentielle ordinaire suivante [29]:

$$Q(U, U', -vU', U'', v^2U'', U''', \dots) = 0 \quad (\text{III.31})$$

où les primes désignent les dérivées partielles par rapport à ξ . Puis, l'équation (III.31) est intégrée en considérant des constantes d'intégration nulles. Ensuite, on suppose que la solution de l'équation différentielle ordinaire (III.31) peut être exprimée par un polynôme en (G'/G) comme suit [29]:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i \quad \text{et} \quad \alpha_m \neq 0 \quad (\text{III.32})$$

où $G = G(\xi)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante [29]:

$$G(\xi)'' + \lambda G(\xi)' + \mu G(\xi) = 0 \quad (\text{III.33})$$

avec

$$G' = \frac{d}{d\xi}, \quad G'' = \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (\text{III.34})$$

où α_m , λ et μ sont des constantes réelles à déterminer.

L'équation (III.31) possède les solutions exactes suivantes [29, 31]:

a) Si $\lambda^2 - 4\mu > 0$, la solution exacte prend la forme :

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left(\frac{c_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{c_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi} \right) - \frac{\lambda}{2} \quad (\text{III.35})$$

b) Si $\lambda^2 - 4\mu < 0$, l'équation (III.33) admet une solution sous la forme:

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left(\frac{c_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi}{c_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi} \right) - \frac{\lambda}{2} \quad (\text{III.36})$$

c) Pour $\lambda^2 - 4\mu = 0$, on obtient:

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = -\frac{\lambda}{2} \quad (\text{III.37})$$

Pour déterminer U explicitement, nous suivons les quatre étapes suivantes [26]:

Étape 1.

Le nombre entier " m " dans l'équation (III.32) peut être déterminé en considérant le principe de balance homogène entre les ordres les plus élevés des dérivées et les termes non linéaires qui se trouvent dans l'équation (III.31). Si le degré de $U(\xi)$ est défini comme étant $D[U(\xi)] = m$, le degré des autres termes peut être aussi défini comme suit [30]:

$$D \left[U^r \left(\frac{d^q u}{d\xi^q} \right)^s \right] = mr + s(q + m) \quad (\text{III.38})$$

Étape 2

En substituant l'équation (III.32) dans l'équation (III.33) et par l'utilisation de l'équation différentielle ordinaire (III.31) avec la valeur de " m " obtenue dans l'étape 1, collectons tous les termes ayant le même ordre de (G'/G) ensemble, on obtient un polynôme en (G'/G) . En met chaque coefficient de ce polynôme égal à zéro. On obtient un ensemble d'équations algébriques dont les inconnus sont les paramètres α_i et v .

Étape 3

Dans cette étape, on résout le système d'équations algébriques obtenues dans l'étape 2 pour déterminer les paramètres α_m et μ à l'aide de Mathematica où Maple.

Etape 4

Une fois la solution exacte de l'équation (III.33) est déterminée, on remplace cette solution ainsi que les paramètres α_i, ν dans (III.32), et on obtient finalement les solutions exactes de type onde progressive de l'équation (III.29).

III.3.2. Méthode de l'équation auxiliaire

Récemment, Sirendaoreji et Sun [30] ont proposé une nouvelle approche très efficace pour résoudre les équations différentielles partielles non linéaires basée sur la méthode de la fonction tanh étendue [30]. Cette méthode s'applique aussi bien pour les équations aux dérivées partielles d'ordre pair et impair. Elle permet de déterminer de nouvelles solutions exactes qui ne peuvent pas être obtenus par d'autres méthodes telles que la méthode "tanh".

La description de cette méthode peut être illustrée comme suit :

On suppose tout d'abord que la solution de l'équation (III.29) s'écrit sous la forme suivante:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i z^i(\xi) \tag{III.39}$$

où $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ sont des constantes à déterminer. Le nombre "n" est un entier positif qui peut être obtenu en appliquant la procédure de balance homogène entre les termes linéaire exprimés par les dérivées partielles et les termes non linéaires d'ordre le plus élevé [34]. $z(\xi)$ exprime les solutions de l'équation différentielle ordinaire auxiliaire suivante:

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = a z^2(\xi) + b z^3(\xi) + c z^4(\xi) \tag{III.40}$$

où a, b et c sont des paramètres réels.

L'équation (III.40) présente des solutions exactes suivantes [30] :

$$z(\xi) = \begin{cases} \frac{-ab \operatorname{sech}^2\left(\pm \frac{\sqrt{a}}{2} \xi\right)}{b^2 - ac(1 - \tanh\left(\pm \frac{\sqrt{a}}{2} \xi\right))^2}, & \text{pour } a > 0 \\ \frac{2a \operatorname{sech}\sqrt{a}\xi}{b^2 - 4ac - b \operatorname{sech}\sqrt{a}\xi}, & \text{pour } b^2 - 4ac > 0, a > 0 \end{cases} \tag{III.41}$$

Substituant des solutions exactes (II.39) et (III.40) dans l'équation (III.41), collectons tous les termes ayant le même degré de $z(\xi)$ ensemble, on obtient un polynôme en $z(\xi)$. Ensuite, on met chaque coefficient de $z(\xi)$ égale à zéro. On obtient un système d'équations algébriques

qui peut être résolue pour donner les expressions des constantes a, b, c, ω, a_i ($i=0,1,\dots,n$). Puis, on remplace les constantes a, b, c, ω, a_i ainsi que la variable $\xi=x-\omega t$ dans les solutions (III.41). Finalement, en faisant la substitution des solutions $z(\xi)$ dans l'équation (III.39), on obtient les solutions exactes du modèle considéré.

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un certain nombre de méthodes utilisées pour la résolution des modèles de type KdV. Nous avons en particulier présenté deux méthodes numériques fréquemment utilisées pour résoudre les modèles KdV, ce sont la méthode de diffusion inverse proposée par Gardner et ses collaborateurs, et la méthode de Fourier à pas divisé. Le principe de cette dernière méthode consiste à traiter la propagation de l'impulsion sur une distance extrêmement faible en supposant que les effets dispersifs et non linéaires peuvent être découplés. Nous nous sommes ensuite intéressés aux méthodes analytiques récemment introduites pour résoudre les équations d'évolution non linéaires. Il s'agit de la méthode (G'/G) étendue proposée par Wang et al, et la méthode de l'équation auxiliaire. Ces nouvelles méthodes permettent de déterminer des solutions de type ondes progressives qui ne peuvent pas être obtenues avec aucune des autres méthodes de résolution.

REFERENCES

- [1] A. Hasegawa and F. Tappert, "Transmission of stationary nonlinear optical pulse in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion", Appl. Phys. Lett 23 (1973) 142–144.
- [2] G. P. Agrawal, "Nonlinear Fiber Optics", 2nd Ed., Academic Press, Inc.(1995).
- [3] R. Fisher and W. K. Bischel, " Numerical studies of the interplay between self-phase modulation and dispersion for intense plane wave laser pulses ", Appl. Phys 46 (1975) 4921-4933.
- [4] R. Fisher and W. K. Bischel, " A role of linear dispersion in plane wave self-phase modulation ", Appl. Phys. Lett 23 (1975) 661-663.
- [5] Q. Flandroy, " Théorie de la propagation lumineuse non linéaire dans des structures guidantes en silicium ", mémoire de fin d'études d'ingénieur civil, université libre de Bruxelles, faculté des sciences appliquée, (2009).
- [6] www.physics.buffalo.edu/phy411-506/topic1/topic1-lec5.pdf.
- [7] F. Azzouzi, " Etude de la dynamique de propagation non linéaire des solitons optiques modélisés par l'équation de Schrödinger non linéaire ", Thèse de doctorat, Université de Badji Mokhtar Annaba, Algérie (2010).
- [8] [http://www.wikiwaves.org/Numerical Solution of the KdV](http://www.wikiwaves.org/Numerical%20Solution%20of%20the%20KdV).
- [9] P. Anhaouy, " Fourier spectral methods for solving the Korteweg-de Vries equation ", Université de Simon Fraser (1997).
- [10] L. N. Trefethen, " Ten digit algorithms ", Oxford University Computing Laboratory, (2005).
- [11] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, " Korteweg-de Vries equation and generalizations. Methods for exact solution ", In Communications on Pure and Appl. Math. 27 (1974) 97–133.
- [12] L. Yang, J. Liu and K. Yang, " Exact solutions of nonlinear PDE, nonlinear transformations and reduction of nonlinear PDE to a quadrature ", Phys. Lett. A 278 (2001) 267-270.
- [13] E. M. E. Zayed, H. A. Zedan, K. A. Gepreel, " On the solitary wave solutions for nonlinear Euler equations ", Appl. Anal. 83 (2004)1101-1132.
- [14] R. Hirota, " Exact N-soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow-water and in nonlinear lattices ", Math. Phys. 14 (1973) 810-816.

- [15] R. Hirota, J. Satsuma, "Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation", Phys. Lett. A, 85 (1981) 407-408.
- [16] J. H. He and X.H. Wu, "Exp-function method for nonlinear wave equations", Chaos Solitons Fractals. 30 (2006) 700-708.
- [17] E. G. Fan, "Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations", Phys. Lett. A 277 (2000) 212-218.
- [18] M. Inc and D. J. Evans, "On traveling wave solutions of some nonlinear evolution equations", Int. J. Comput. Math 81 (2004) 191-202.
- [19] S. K. Liu, Z. T. Fu, S. D. Liu, Q. Zhao, "New Jacobi elliptic function expansion and new wave solutions of nonlinear wave equations", Phys. Lett. A 289 (2001) 69-72.
- [20] Z. Y. Yan, "Abundant families of Jacobi elliptic function solutions of the (2+1)-dimensional integrable Davey-Stewartson-type equation via a new method", Chaos, Solitons Fractals. 18 (2003) 299-309.
- [21] E. M. E. Zayed, A. M. Abourabia, K. A. Gepreel, M. M. Horbaty, "Traveling solitary wave solutions for nonlinear coupled KdV system", Chaos, Solitons and Fractals. 34 (2007) 292-306.
- [22] E. M. E. Zayed, H. A. Zedan, K. A. Gepreel, "On the solitary wave solutions for nonlinear Hirota-Satsuma coupled KdV equations", Chaos, Solitons and Fractals. 22 (2004) 285- 303.
- [23] M. R. Miura, "Backlund Transformation", Springer-Verlag, Berlin (1978).
- [24] C. Rogers and W. F. Shadwick, "Backlund Transformation", Academic, New York (1982).
- [25] Z. Yan, H. Q. Zhang, "New explicit solitary wave solutions and periodic wave solutions for Whitham-Broer-Kaup equation in shallow water", Phys. Lett. A 285, (2001) 355-362.
- [26] M. Wang, X. Li, J. Zhang, "The (G'/G) expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics", Phys. Lett. A 372 (2008) 417-423.
- [27] X. Z. Li, M. L. Wang, "A sub-ODE method for finding exact solutions of a generalized KdV-mKdV equation with high-order nonlinear terms", Phys.Lett. A361 (2007) 115-118.
- [28] M. L. Wang, X. Z. Li and J. L. Zhang, "Sub-ODE method and solitary wave solutions for higher order nonlinear Schrodinger equation", Phys. Lett. A 363 (2007) 96-101.
- [29] E. M. E. Zayed, M. A. S. E. Malky, "The Generalized (G'/G) Expansion Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics", Int. J. Contemp. Math. Sciences. 6 (2011) 263 -278.

- [30] Sirendaoreji, Sun. J, "*Auxiliary equation method for solving nonlinear partial differential Equations*", Phys. Lett. A 309 (2003) 387-396.
- [31] S. Zhang, J. L. Tong, and W. Wang, Phys. Lett. A 372 (2008)2254.
- [32] J. Zhang, X. Wei, and Y. Lu, Phys. Lett. A 372 (2008) 3653.
- [33] S. Zhang, J. M. B, Y. N. Sun, L. Dong, "*Generalized (G'/G) -Expansion Method for the Nonlinear Schrödinger Equation with Variable Coefficients*", Departement de Mathematiques, Universitéde Bohai, Chine , (2009).
- [34] W. Malfliet, Am. J. Phys. 60 (1992) 650.

CHAPITRE VI

**Dynamique de propagation non linéaire des solitons
modélisés par les équations KdV et Gardner à
coefficients variables**

VI.1. Introduction

Les équations à solution soliton fournissent des exemples remarquables de systèmes complètement intégrables possédant un nombre infini de degrés de liberté. La détermination des solutions exactes de cette classe d'équations aux dérivées partielles permet de comprendre les phénomènes de propagation d'ondes non linéaires au sein d'un milieu matériel. Dans le cas d'un système homogène où les propriétés du milieu sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace, la famille d'équations non linéaires à coefficients constants est utilisée pour décrire la dynamique de propagation. Une modélisation plus réaliste de la propagation des ondes non linéaires dans un milieu matériel requiert de traiter les phénomènes en utilisant les équations d'évolution à coefficients variables. Ces équations d'évolution sont très promotrices car elles sont capables de modéliser la propagation des ondes dans de nombreux systèmes physiques et de l'ingénierie. Elles fournissent souvent une approche fructueuse pour décrire la physique d'un système dynamique non linéaire. Au lieu de faire une approximation linéaire, puis de traiter les non linéarités par perturbation, il peut être beaucoup plus efficace de décrire approximativement la physique du système par une équation à coefficients variables puis, si nécessaire, de tenir compte des contributions qui perturbent les solitons.

Chacune de ces équations admet une solution explicite appelée "onde solitaire", qui peut se propager dans le milieu matériel sans aucune déformation notable. La formation des ondes solitaires est due principalement à un équilibre parfait entre deux effets antagonistes : l'effet de dispersion représenté par la partie linéaire de ces équations et l'effet de non linéarité exprimé par la partie non-linéaire.

En particulier, l'équation KdV à coefficients variables décrit la propagation des ondes dans les milieux faiblement non linéaires et faiblement dispersifs. Ce modèle intervient dans de nombreux domaines de physique comme par exemple, pour décrire la propagation des ondes en eaux peu profondes où la variation spatio-temporelle des coefficients est due aux variations de la profondeur de l'eau et d'autres conditions physiques. Récemment, l'étude des propriétés de l'équation KdV et ces formes généralisées constitue un thème de recherche très actif vue les applications potentielles de ces modèles.

Dans ce chapitre, nous présenterons les différents résultats de nos calculs basés sur des techniques semi-analytiques et analytiques pour résoudre différentes équations de type KdV et Gardner généralisées. Les modèles étudiés seront à coefficients variables. On considèrera principalement l'équation KdV à coefficient variable en présence de l'effet de pertes et l'équation de Gardner généralisée en présence de l'effet de perte et dispersion du premier ordre.

Ces équations à coefficients variables permettent de modéliser des phénomènes de propagation d'ondes dans des milieux inhomogènes. Nous allons chercher les solutions d'ondes solitaires pour les modèles considérés en utilisant la méthode auxiliaire et la méthode (G'/G) étendue. L'influence de la variation temporelle des différents paramètres présents dans les équations d'évolutions permettant de contrôler la dynamique non linéaires des solutions d'ondes solitaires obtenues.

VI.2. Equations pour soliton

VI.2.1. Milieux homogènes : Equations KdV à coefficients constants

Un milieu homogène est un milieu où l'indice est identique en tout point c.-à-d. les propriétés du milieu sont les mêmes en tout point de l'espace. Les équations non-linéaires décrivant la propagation des ondes dans un milieu homogène non linéaire sont donc à coefficients constants. Une équation différentielle partielle non-linéaire d'ordre quelconque est dite homogène si chaque terme de l'équation contient la variable dépendante par u ou un de ses dérivées. En prenant l'équation KdV comme exemple, elle prend la forme suivante :

$$u_t + \beta u u_x + u_{xxx} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Cette dernière représente un modèle de propagation unidirectionnelle pour les ondes longues à la surface de l'eau, en faible profondeur.

VI.2.2. Milieux inhomogènes : Equations KdV à coefficients variables

Dans un milieu inhomogène, les propriétés de propagation telles que l'équation de dispersion dépendent de la position de l'onde. On associera au cas du milieu inhomogène celui pour lequel les caractéristiques des ondes sont variables dans la direction de propagation par leur condition aux limites (vagues de surface sur une pente en profondeur finie). Réellement, il n'existe pas un milieu homogène, donc, l'équation d'onde régissant la propagation dans un milieu inhomogène tel que les fluides prend la forme suivante:

$$u_t + \alpha(t) u + \beta(t) u u_x + \gamma(t) u_{xxx} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

où $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ sont des fonctions arbitraires dépendantes du temps t , et z est la distance de propagation normalisée. Dans l'équation (IV.2), le premier terme représente le terme d'évolution linéaire, le second terme est l'amortissement, le troisième terme est le terme non linéaire et le dernier terme représente la dispersion d'ordre trois.

Assumant la solution de l'équation (IV.2) donnée par l'expression suivante :

$$u(x,t) = A(t) \operatorname{sech}^2(\mu(t)(x - v(t)t)) \quad (\text{IV.3})$$

A condition que l'amplitude des solutions d'ondes solitaires soit nulle lorsque la variable d'espace s'approche de l'infini. Notons que $A(t)$, $\mu(t)$ et $v(t)$ sont respectivement, l'amplitude, la largeur et la vitesse de l'onde.

En substituant l'équation (IV.3) dans l'équation (IV.2) et en posant les coefficients des termes indépendants contenant des combinaisons indépendantes de ces fonctions hyperboliques égales à zéro, on obtient :

$$A_t + \alpha(t)A = 0 \quad (IV.4)$$

$$-2A \frac{d\mu}{dt} (x - vt) + 2\mu \left(v + \frac{dv}{dt} \right) - 8\gamma(t)\mu^3 A = 0 \quad (IV.5)$$

$$24\gamma(t)\mu^3 A - 2\beta(t)A^2 \mu = 0 \quad (IV.6)$$

A partir des équations (IV.4)-(IV.6), on peut obtenir :

$$A(t) = A_0 e^{-\int \alpha(t) dt} \quad (IV.7)$$

$$\mu(t) = \mu_0 \quad (IV.8)$$

$$v(t) = \frac{4\mu_0^2}{t} \int \gamma(t) dt \quad (IV.9)$$

avec la condition paramétrique : $\beta(t) = (12\mu_0^2 / A_0) e^{\int \alpha(t) dt}$.

Notons que A_0 , μ_0 sont l'amplitude et la largeur initiales, respectivement. Selon l'équation (IV.8), on voit clairement que la largeur du soliton est une constante.

Remplaçant $A(t)$, $\mu(t)$ et $v(t)$ dans la solution (IV.3), on obtient la solution de l'équation KdV à coefficients variable (IV.2):

$$u(x, t) = A_0 e^{-\int \alpha(t) dt} \operatorname{sech}^2 \left[\mu_0 \left(x - 4\mu_0^2 \int \gamma(t) dt \right) \right] \quad (IV.10)$$

Cette dernière équation montre que l'amplitude de l'onde solitaire dépend exclusivement du temps tandis que sa largeur reste constante au cours de propagation.

VI.3. Impact de la variation temporelle des paramètres sur la dynamique de propagation de l'onde solitaire

Selon l'équation (IV.7), on voit clairement que l'amplitude de l'onde solitaire est affectée uniquement par les pertes exprimées par le coefficient $\alpha(t)$. En plus, l'expression (IV.9) montre que la vitesse du soliton dépend du coefficient non linéaire $\gamma(t)$. Par la suite, nous allons étudier la dynamique de propagation du soliton KdV dans le cadre des variations des deux paramètres $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$.

VI.3.1. Impact des pertes

La figure (IV.1) montre l'évolution d'un soliton KdV donné par l'expression (IV.10) dans le domaine de l'espace-temps pour différentes valeurs du coefficient de pertes $\alpha(t)$ et en prenant une non linéarité sous la forme : $\gamma(t) = 1/(20\sqrt{t})$.

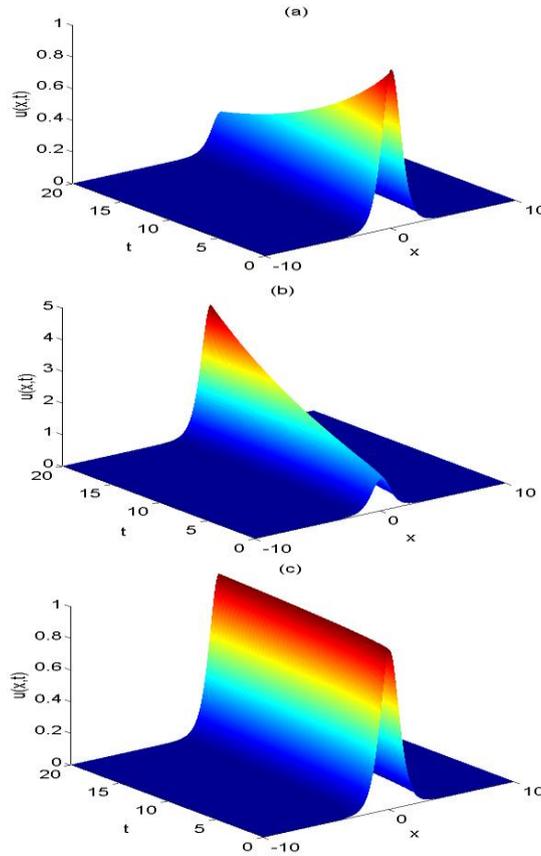


Figure VI.1 : Évolution de l'onde solitaire brillante d'amplitude $A_0 e^{-\int \alpha(t) dt} \operatorname{sech}^2 \left[\mu_0 \left(x - 4\mu_0^2 \int \gamma(t) dt \right) \right]$
 Pour $\gamma(t) = 1/(20\sqrt{t})$ et : a) $\alpha(t) = 0.07$, b) $\alpha(t) = -0.07$ et c) $\alpha(t) = 0$.

La figure (VI.1.b) montre que l'amplitude du soliton augmente pour le cas $\alpha(t) < 0$. Si $\alpha(t) > 0$, la puissance crête du soliton va énormément diminuer à cause de l'influence de l'effet de pertes sur l'onde (figure (VI.1.a)). Par ailleurs, un régime stable de propagation d'un soliton est atteint pour le cas d'un milieu sans pertes ($\alpha(t) = 0$) une fois qu'un équilibre parfait entre la non linéarité et la dispersion est obtenu (figure (VI.1.c)). Dans ce cas, l'amplitude de l'onde garde une forme constante au cours de la propagation et le soliton se propage sans la moindre atténuation, déformation ou distorsion.

La figure (IV.2) présente l'évolution des profils correspondants du soliton en fonction du temps le long de la distance de propagation dans le milieu faiblement non linéaire et faiblement dispersif.

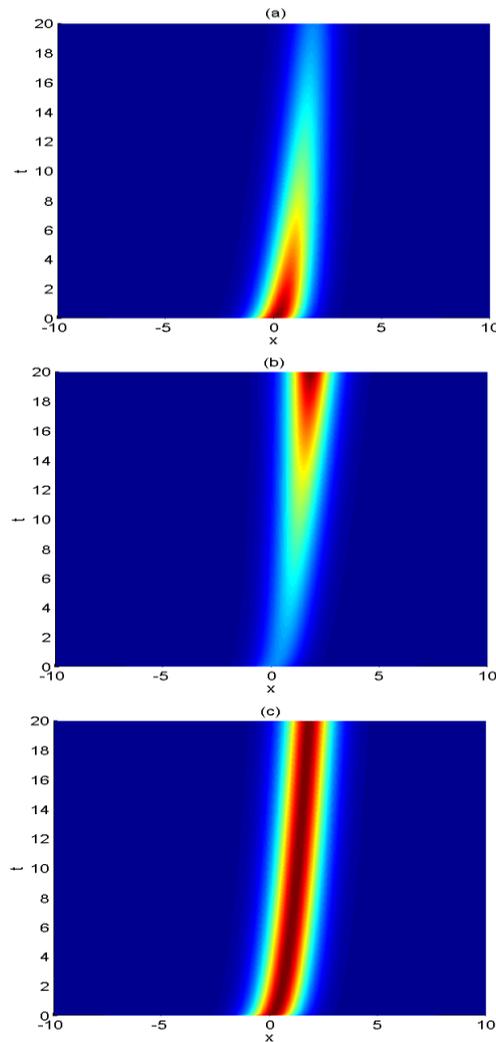


Figure VI.2 : Évolution du profil de l'onde solitaire pour $\gamma(t) = 1/(20\sqrt{t})$
et : a) $\alpha(t) = 0.07$, b) $\alpha(t) = -0.07$ et c) $\alpha(t) = 0$.

L'évolution des profils d'amplitude en fonction du temps représentés sur la figure (VI.2) confirme les observations citées précédemment. Nous pouvons conclure que l'inclusion du terme lié aux pertes dans l'équation (IV.2) permet de contrôler plus efficacement l'amplitude du soliton et par conséquent la dynamique de propagation non linéaire d'un soliton KdV. Il est à noter que les pertes sont principalement dues à l'absorption du matériau et aux interactions fondamentales entre l'onde et le milieu matériel.

VI.3.2. Impact de la non linéarité

Dans l'équation (IV.10), le terme $[(4\mu_0/t)\int\gamma(t)dt]$ représente la vitesse de l'onde solitaire qui dépend du coefficient non linéaire $\gamma(t)$. Les figures (IV.3)-(VI.7) montrent l'évolution spatio-temporelle et le profil correspondant du soliton KdV pour différentes valeurs du coefficient non linéaire $\gamma(t)$ en considérant un milieu sans pertes où $\alpha(t)=0$.

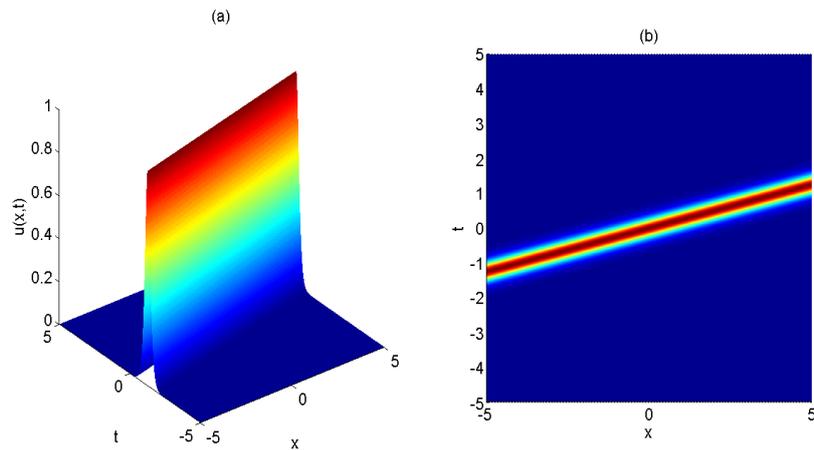


Figure VI.3 : Évolution de l'onde KdV en fonction du temps pour $\alpha(t) = 0$ et $\gamma(t) = t^2 / 2$.
 a) L'amplitude de l'onde, b) Profil du soliton.

La figure (VI.3) montre une similitude entre le profil d'un soliton KdV ayant la forme en sécante hyperbolique au carré (figure II.9) et celui obtenue dans les conditions d'un milieu supposé sans perte présentant une non linéarité sous la forme $\gamma(t) = t^2 / 2$.

Les évolutions spatio-temporelles ainsi que les profils correspondants du soliton KdV sont présentés sur les figures (VI.4)-(VI.5) pour différentes variations du coefficient non linéaire $\gamma(t)$.

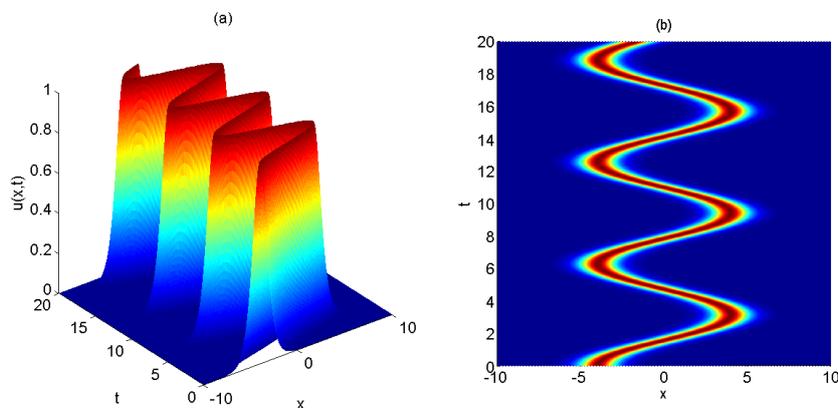


Figure VI.4 : Évolution de l'onde KdV en fonction du temps pour $\alpha(t) = 0$ et $\gamma(t) = \sin(t)$.
 a) L'amplitude de l'onde, b) Profil du soliton.

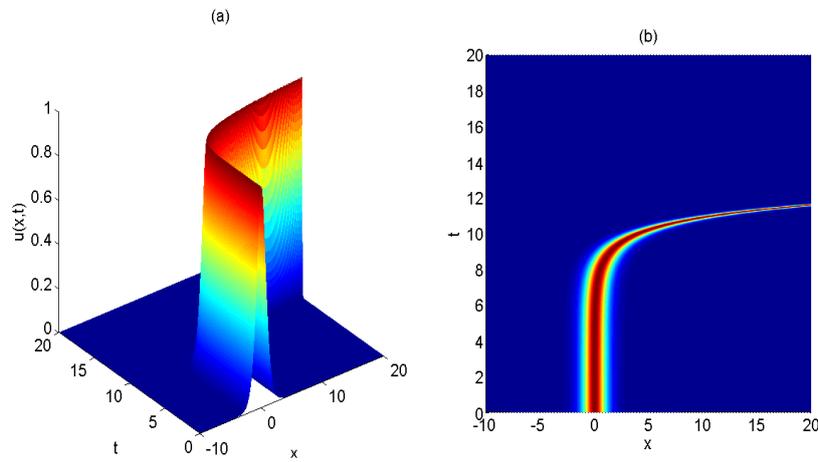


Figure VI.5: Évolution de l'onde KdV en fonction du temps pour $\alpha(t) = 0$ et $\gamma(t) = e^{t-10}$.
 a) L'amplitude de l'onde, b) Profil du soliton.

Quand le coefficient non linéaire prend une variation temporelle donnée par $\gamma(t) = \sin(t)$, le soliton prend une forme similaire à serpent (snake) (figure VI.4.a). Il est intéressant de remarquer que pour une variation de type $\gamma(t) = e^{t-10}$, le soliton dévie au cours de la propagation après un temps donné (figure VI.5.a).

Pour des variations plus complexes de $\gamma(t)$, le soliton KdV prend différentes formes au cours de sa propagation en espace-temps (voir figures (VI.6) et (VI.7)).

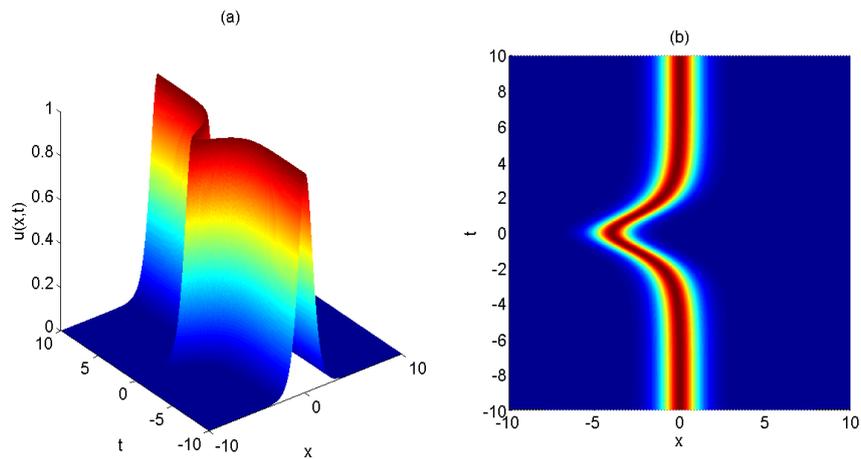


Figure VI.6: Évolution de l'onde KdV en fonction du temps pour $\alpha(t) = 0$ et $\gamma(t) = \text{sech}(t)\tanh(t)$.
 a) L'amplitude de l'onde, b) Profil du soliton.

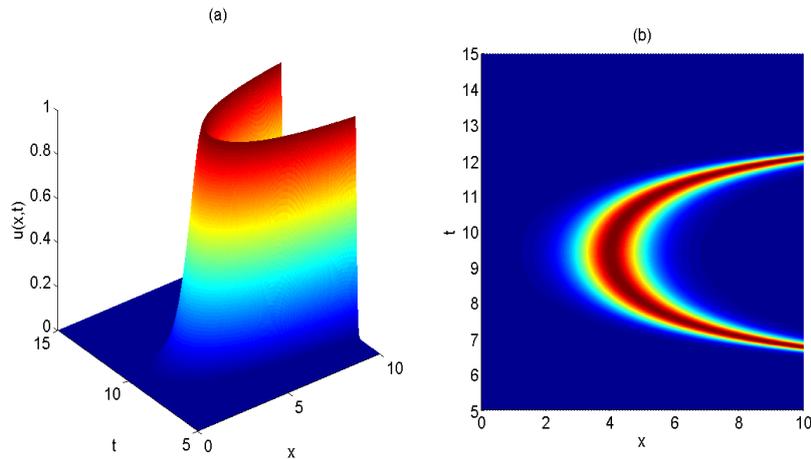


Figure VI.7: Évolution de l'onde KdV en fonction du temps pour $\alpha(t) = 0$ et

$$\gamma(t) = \left[\frac{2}{3} \tan^2\left(\frac{t}{3}\right) + \left(\frac{t}{3}\right) \right] \tan\left(\frac{t}{3}\right).$$

a) L'amplitude de l'onde, b) Profil du soliton.

Les résultats numériques présentés ci-dessus, nous ont conduit à conclure que la dépendance du coefficient non linéaire vis à vis du temps provoque un changement de forme de l'onde solitaire tout en conservant son amplitude et sa largeur. Remarquons par ailleurs que les variations temporelles de $\gamma(t)$ permettent de moduler et de contrôler la propagation des solitons d'une manière efficace.

Ainsi, on a pu suivre la dynamique spatio-temporelle du soliton KdV dans un milieu inhomogène et son comportement sous l'influence des effets non linéaires et de pertes en évaluant le taux de participation de chaque effet. On a constaté également que la dynamique de propagation non linéaire d'un soliton KdV peut être efficacement contrôlée à travers les variations temporelles de ces paramètres.

VI.4. Equations de Gardner à coefficients variables

L'étude de la propagation d'une onde nécessite la description des propriétés du milieu matériel dans lequel elle évolue. De ce fait, on doit faire une modélisation des interactions avec le milieu matériel ce qui est traduit classiquement par une modification des caractéristiques de cette onde. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la propagation dans un milieu faiblement non linéaire modélisé par une équation appelée «équation de Gardner».

Nous rappelons tout d'abord l'équation de Gardner adimensionnée sous la forme [1-6] :

$$u_t + 2auu_x - 3bu^2u_x + u_{xxx} = 0 \tag{IV.11}$$

Pour décrire la propagation dans un milieu inhomogène, nous considérons l'équation de Gardner généralisée à coefficients variables suivante [7]:

$$u_t + \alpha(t)u + (\beta(t) + \gamma_1(t)u^n + \gamma_2(t)u^{2n})u_x + \delta(t)u_{xxx} = 0 \quad (IV.12)$$

où $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ et $\delta(t)$ sont des fonctions arbitraires dépendantes du temps t et n représente le degré de la non linéarité.

Dans l'équation (IV.12), le premier terme représente le terme d'évolution, le second terme décrit l'amortissement linéaire, tandis que le troisième terme correspond à la dispersion de premier ordre. Les termes liés aux coefficients $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ sont les termes non linéaires, et le dernier terme représente la dispersion d'ordre trois. Soulignons que le cas le plus simple de l'équation (IV.12) se présente quand tous les coefficients sont des constantes avec $\alpha=\beta=0$ et $\delta=1$. Ce cas a été bien étudié dans les Refs. [3-8].

Généralement, l'équation (IV.12) n'est pas intégrable pour tout n arbitraire en utilisant la méthode de diffusion inverse «*Inverse scattering method*». Il est remarquable que la non-intégrabilité d'une équation d'évolution ne soit pas forcément liée aux termes non linéaires. Les termes de dispersion d'ordre supérieur, par exemple, peuvent également rendre l'équation non-intégrable.

VI.4.1. Application de la méthode de l'équation auxiliaire

Dans ce qui suit, on va appliquer la méthode de l'équation auxiliaire [9] pour déterminer les solutions exactes de type soliton pour l'équation (IV.12).

Pour commencer, on va d'abord introduire la transformation suivante :

$$u(x, t) = v^{\frac{1}{n}}(x, t) \quad (IV.13)$$

En substituant l'équation (VI.13) dans l'équation (VI.12), on obtient l'équation suivante :

$$n^2 v^2 v_t + \alpha n^3 v^3 + \beta n^2 v^2 v_x + \gamma_1 n^2 v^3 v_x + \gamma_2 n^2 v^4 v_x + \delta \left\{ (1-n)(1-2n)v_x^3 + 3n(1-n)v v_x v_{xx} + n^2 v^2 v_{xxx} \right\} = 0 \quad (IV.14)$$

En appliquant le principe de balance homogène entre les ordres les plus élevés des dérivées v_x^3 et des termes non linéaires $v^4 v_x$ qui se trouvent dans l'équation (IV.14), on peut déterminer la valeur de m (voire équation (III.45)) comme suite :

$$4m + m + 1 = 3(m + 1) \quad (IV.15)$$

Ce qui donne $m=1$.

Adoptons pour la fonction de l'amplitude de l'équation (IV.14) la forme suivante :

$$v = f(t) + g_1(t)\phi(\xi) \quad (IV.16)$$

avec

$$\xi = p(t)x + q(t) \quad (\text{IV.17})$$

où $f(t)$, $g_1(t)$, $p(t)$ et $q(t)$ sont des fonctions dépendantes du temps t à déterminer.

On définit la fonction $\varphi(\xi)$ comme étant une fonction vérifiant l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = q_4\varphi^4 + q_3\varphi^3 + q_2\varphi^2 + q_1 \quad (\text{IV.18})$$

où q_1 , q_2 , q_3 et q_4 sont des constantes.

Substituant les équations (IV.16)-(IV.18) dans l'équation (IV.14), rassemblant tous les coefficients de même puissance de ϕ^j et $\phi^j\phi'$ avec $i=0,\dots,3$ et $j=0,\dots,4$, et mettant chaque terme égale à zéro, on obtient le système d'équations suivant :

$$f^2(f'+\alpha n f) = 0 \quad (\text{IV.19})$$

$$(f^2 g_1)'+3\alpha n f^2 g_1 = 0 \quad (\text{IV.20})$$

$$(f g_1^2)'+3\alpha n f g_1^2 = 0 \quad (\text{IV.21})$$

$$g_1^2(g_1' + \alpha n g_1) = 0 \quad (\text{IV.22})$$

$$\begin{aligned} n^2 f^2 g_1(p'x + q') + \beta n^2 f^2 g_1 p + \gamma_1 n^2 f^3 g_1 p + \gamma_2 n^2 f^4 g_1 p \\ + \delta(1-n)(1-2n)g_1^3 p^3 q_1 + \delta n^2 f^2 g_1 p^3 q_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

$$\begin{aligned} 2n^2 f g_1^2(p'x + q') + 2\beta n^2 f g_1^2 p + 3\gamma_1 n^2 f^2 g_1^2 p + 4\gamma_2 n^2 f^3 g_1^2 p \\ + 3\delta n(1-n)f g_1^2 p^3 q_2 + 3\delta q_3 n^2 f^2 g_1 p^3 + 2\delta q_2 n^2 f g_1^2 p^3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

$$\begin{aligned} n^2 g_1^3(p'x + q') + \beta n^2 g_1^3 p + 3\gamma_1 n^2 f g_1^3 p + 6\gamma_2 n^2 f^2 g_1^3 p + \delta(1-n)(1-2n)g_1^3 p^3 q_2 \\ + \frac{9}{2}\delta q_3 n(1-n)f g_1^2 p^3 + 3\delta q_2 n(1-n)g_1^3 p^3 + 6q_4 \delta n^2 p^3 f^2 g_1 \\ + 6q_3 \delta n^2 f g_1^2 p^3 + q_1 \delta n^2 g_1^3 p^3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 n^2 g_1^4 p + 4\gamma_2 n^2 f g_1^4 p + \delta(1-n)(1-2n)g_1^3 p^3 q_3 \\ + 6n(1-n)q_4 \delta p^3 f g_1^2 + \frac{9}{2}\delta q_3 n(1-n)g_1^3 p^3 + 3\delta q_3 n^2 g_1^3 p^3 + 12q_4 \delta n^2 p^3 f g_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

$$\gamma_2 n^2 g_1^5 p + \delta(1+n)(1+2n)g_1^3 p^3 q_4 = 0 \quad (\text{IV.27})$$

où la prime dénote la différentiation selon le temps t .

Pour résoudre ce système, nous supposons $q_1 = 0$. Ainsi, on obtient :

$$f(t) = k_1 e^{-n \int \alpha(t) dt} \quad (\text{IV.28})$$

$$g_1(t) = k_2 e^{-n \int \alpha(t) dt} \quad (IV.29)$$

$$p(t) = \sqrt{\frac{\gamma_2(t)}{\delta(t)}} k_3 e^{-n \int \alpha(t) dt} \quad (IV.30)$$

$$q_2 = \frac{nk_1^2}{12k_3^2(2n+1)} \quad q_3 = \frac{-n^2k_1k_2}{2k_3^2(5n+2)(2n+1)} \quad q_4 = \frac{-n^2k_2^2}{k_3^2(n+1)(2n+1)} \quad (IV.31)$$

et

$$q(t) = \int \sqrt{\frac{\gamma_2(t)}{\delta(t)}} k_3 e^{-n \int \alpha(t) dt} \left\{ n\alpha(t)x - \beta(t) - \frac{4k_1}{3} \gamma_1(t) e^{-n \int \alpha(t) dt} - \frac{5k_1^2}{3} \gamma_2(t) e^{-2n \int \alpha(t) dt} - \frac{k_1^2}{12(2n+1)} \gamma_2(t) e^{-2n \int \alpha(t) dt} + \frac{n^2k_1^2}{2(5n+2)(2n+1)} \gamma_2(t) e^{-2n \int \alpha(t) dt} \right\} dt \quad (IV.32)$$

On trouve également la relation suivante :

$$f(t) = \frac{q_3}{4q_4} g_1(t) - \frac{(2n+1)\gamma_1(t)}{2(n+2)\gamma_2(t)} \quad (IV.33)$$

où k_1, k_2 , et k_3 sont des constantes arbitraires avec $k_3 \neq 0$.

En utilisant les relations (IV.28) et (IV.33), on obtient la condition suivante :

$$\frac{\gamma_1(t) e^{n \int \alpha(t) dt}}{\gamma_2(t)} = \frac{(q_3 k_2 - 4q_4 k_1)(n+2)}{2q_4(2n+1)} \quad (IV.34)$$

Cette dernière montre que les paramètres $\alpha(t), \gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ sont reliés entre eux de sorte que la condition (IV.34) soit vérifiée.

Dans la suite, nous allons construire les solutions exactes de l'équation auxiliaire (IV.18) en prenant le cas $q_1=0$ [7, 8, 10] :

Cas 1 : Si $q_2 > 0$, l'équation (IV.18) possède la solution exacte suivante :

$$\varphi(\xi) = \frac{-q_2 q_3 \operatorname{sech}^2 \left(\pm \frac{\sqrt{q_2}}{2} \xi \right)}{q_3^2 - q_2 q_4 \left(1 - \tanh \left(\pm \frac{\sqrt{q_2}}{2} \xi \right) \right)^2} \quad (IV.35)$$

Cas 2 : Si $q_3^2 - 4q_2 q_4 > 0$ et $q_2 > 0$, la solution prend la forme suivante :

$$\varphi(\xi) = \frac{2q_2 \operatorname{sech}(\sqrt{q_2} \xi)}{\sqrt{q_3^2 - 4q_2 q_4} - q_3 \operatorname{sech}(\sqrt{q_2} \xi)} \quad (IV.36)$$

Cas 3 : Si $q_2=4$, $q_3 = -\frac{4(2b+d)}{a}$ et $q_4 = \frac{c^2 + 4b^2 + 4bd}{a^2}$, on trouve :

$$\varphi(\xi) = \frac{a \operatorname{sech}^2(\xi)}{b \operatorname{sech}^2(\xi) + c \tanh(\xi) + d} \quad (\text{IV.37})$$

où a, b, c et d sont des constantes arbitraires.

Cas 4 : Si $4q_2q_4 - q_3^2 > 0$ et $q_2 > 0$, l'équation (VI.18) admet une solution exacte donnée par :

$$\varphi(\xi) = \frac{-2q_2}{q_3 + \sqrt{4q_2q_4 - q_3^2} \sinh(\sqrt{q_2}\xi)} \quad (\text{IV.38})$$

Cas 5 : Si $q_3^2 - 4q_2q_4 > 0$ et $q_2 > 0$, la solution est sous la forme suivante :

$$\varphi(\xi) = \frac{-2q_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{q_2}}{2}\xi\right)}{2\sqrt{q_3^2 - 4q_2q_4} - \left(\sqrt{q_3^2 - 4q_2q_4} - q_3\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{q_2}}{2}\xi\right)} \quad (\text{IV.39})$$

La combinaison de la relation (IV.16) avec une des expressions (IV.35)-(IV.39) permet de déterminer les solutions exactes de l'équation de Gardner à coefficients variables (IV.12).

On trouve donc les solutions d'ondes solitaires suivantes :

Type 1 : En utilisant (IV.13), (IV.16), (IV.28)-(IV.30) et (IV.35), on obtient la solution soliton suivante :

$$u = \left\{ k_1 e^{-n \int \alpha(t) dt} - k_2 e^{-n \int \alpha(t) dt} \left[\frac{q_2 q_3 \operatorname{sech}^2\left(\pm \frac{\sqrt{q_2}}{2}\xi\right)}{q_3^2 - q_2 q_4 \left(1 - \tanh\left(\pm \frac{\sqrt{q_2}}{2}\xi\right)\right)^2} \right] \right\}^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.40})$$

où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes arbitraires avec $k_3 \neq 0$, $q_2 > 0$ et $\xi = p(t)x + q(t)$.

Type 2 : En utilisant (IV.13), (IV.16), (IV.28)-(IV.30) et (IV.36), on trouve la solution suivante :

$$u = \left\{ k_1 e^{-n \int \alpha(t) dt} + k_2 e^{-n \int \alpha(t) dt} \left[\frac{2q_2 \operatorname{sech}(\sqrt{q_2} \xi)}{\sqrt{q_3^2 - 4q_2 q_4} - q_3 \operatorname{sech}(\sqrt{q_2} \xi)} \right] \right\}^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.41})$$

où $k_3 \neq 0$, $q_3^2 - 4q_2 q_4 > 0$ et $q_2 > 0$.

Type 3 : En remplaçons la solution donnée dans le cas 3 dans l'équation (VI.16) et par l'utilisation de l'expression (IV.37), on obtient la solution exacte suivante :

$$u = \left\{ k_1 e^{-n \int \alpha(t) dt} + k_2 e^{-n \int \alpha(t) dt} \left[\frac{a \operatorname{sech}^2(\xi)}{b \operatorname{sech}^2(\xi) + c \tanh(\xi) + d} \right] \right\}^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.42})$$

où a, b, c et d sont des constantes réels arbitraires, et $k_3 \neq 0$.

Type 4 : Substituons la solution obtenue dans le cas 4 dans l'équation (VI.16) et le résultat trouvé dans la solution (VI.38), on obtient une solution de la forme :

$$u = \left\{ k_1 e^{-n \int \alpha(t) dt} - k_2 e^{-n \int \alpha(t) dt} \left[\frac{-2q_2}{q_3 + \sqrt{4q_2 q_4 - q_3^2} \sinh(\sqrt{q_2} \xi)} \right] \right\}^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.43})$$

où $k_3 \neq 0$, $4q_2 q_4 - q_3^2 > 0$ et $q_2 > 0$.

Type 5 : A partir des équations (IV.13), (IV.16), et la solution donnée dans le cas 5, on obtient une solution soliton comme suit:

$$u = \left\{ k_1 e^{-n \int \alpha(t) dt} - k_2 e^{-n \int \alpha(t) dt} \left[\frac{2q_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{q_2}}{2} \xi\right)}{2\sqrt{q_3^2 - 4q_2 q_4} - \left(\sqrt{q_3^2 - 4q_2 q_4} - q_3\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{q_2}}{2} \xi\right)} \right] \right\}^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.44})$$

où $k_3 \neq 0$, $q_3^2 - 4q_2 q_4 > 0$ et $q_2 > 0$. Notons que dans toutes les solutions précédentes, on a $\xi = p(t)x + q(t)$ où $p(t)$ et $q(t)$ sont donnés par les expressions (IV.30)-(IV.32).

Ainsi, les solutions physiquement intéressantes (IV.40)-(IV.44) présentent une nouvelle classe des solutions soliton de l'équation de Gardner à coefficients variables (IV.12). On constate que cette famille de solutions dépend de la variation temporelle des paramètres $\alpha(t)$,

$\beta(t)$, $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ et $\delta(t)$ qui par conséquent influent sur la propagation des solitons. On peut noter que la dynamique de propagation non linéaire des solitons Gardner est contrôlée par la variation de ces coefficients dépendants du temps.

VI.4.2. Application de la méthode (G'/G) étendue

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode (G'/G) étendue [11, 12] pour construire les solutions exactes de type soliton pour l'équation de Gardner généralisée à coefficients variables suivante [7]:

$$u_t + \left(a(t) + b(t)u^n + c(t)u^{2n} \right) u_x + u_{xxx} = 0 \quad (\text{IV.45})$$

où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des paramètres arbitraires dépendants du temps t , et n indique le degré de la non linéarité.

Le premier terme dans ce modèle d'équation représente le terme d'évolution, le second terme décrit la dispersion du premier ordre, les termes liés aux coefficients $b(t)$ et $c(t)$ sont les termes non linéaires, et le dernier terme représente la dispersion d'ordre trois.

En utilisant la transformation des ondes progressives :

$$u(x) = U(\xi) \quad (\text{IV.46})$$

avec ξ est une nouvelle variable définie par $\xi = x - v(t)t$.

En reportant cette transformation dans l'équation (IV.45), on obtient l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$-\left(v(t) + t \frac{dv(t)}{dt} \right) U' + \left(a(t) + b(t)U^n + c(t)U^{2n} \right) U' + U''' = 0 \quad (\text{IV.47})$$

où le prime désigne la dérivée par rapport à ξ .

L'intégration de cette équation (IV.47) donne :

$$\left(a(t) - v(t) + t \frac{dv(t)}{dt} \right) U + \frac{b(t)}{n+1} U^{n+1} + \frac{c(t)}{2n+1} U^{2n+1} + U'' = 0 \quad (\text{IV.48})$$

où la constante d'intégration a été prise zéro dans la mesure où l'on s'intéresse aux solutions localisées spatialement.

En appliquant le principe de balance homogène entre le terme non linéaire U^{2n+1} et le terme dispersif U'' , on obtient la valeur de m qui a pour relation:

$$m = \frac{1}{n} \quad (\text{IV.49})$$

En cherchant des solutions sous la forme :

$$U(\xi) = B \left(\frac{G'}{G} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{IV.50})$$

où B est une constante à déterminer et $G(\xi)$ est une fonction vérifiant l'équation différentielle suivante:

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \quad (\text{IV.51})$$

où λ et μ sont des constantes non nulles.

Substituant l'équation (IV.50) dans l'équation (IV.48), puis recueillant les termes qui ont le même ordre de (G'/G) ensemble, et posant le coefficient de chaque polynôme égale à zéro, on obtient le système d'équations algébriques suivant :

$$\frac{c(t)}{2n+1} B^{2n+1} + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) B = 0 \quad (\text{IV.52})$$

$$\frac{b(t)}{n+1} B^{n+1} + \left(\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n}\right) B\lambda = 0 \quad (\text{IV.53})$$

$$\left(a(t) - v(t) - t \frac{dv(t)}{dt}\right) B + \left(\frac{2}{n^2} \mu + \frac{1}{n^2} \lambda^2\right) B = 0 \quad (\text{IV.54})$$

$$\left(\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}\right) B\mu\lambda = 0 \quad (\text{IV.55})$$

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) B\mu^2 = 0 \quad (\text{IV.56})$$

Ce système permet de trouver

$$\mu = 0 \quad (\text{IV.57})$$

$$B = \left(-\frac{(n+1)(2n+1)}{c(t)n^2}\right)^{\frac{1}{2n}} \quad (\text{IV.58})$$

$$\lambda = -\sqrt{\frac{n^2 b^2(t)(2n+1)}{c(t)(n+1)(n+2)^2}} \quad (\text{IV.59})$$

$$v(t) = \frac{1}{t} \int \left\{ a(t') - \frac{b^2(t')(2n+1)}{c(t')(n+1)(n+2)^2} \right\} dt' \quad (\text{IV.60})$$

L'expression (IV.58) montre que l'amplitude de l'onde est liée au degré de non linéarité " n " et dépend de la variation temporelle du paramètre non linéaire $c(t)$. A partir de (IV.60), on constate que la vitesse de d'onde $v(t)$ dépend fortement de la dispersion du premier ordre proportionnelle au coefficient $a(t)$ et les deux types de non linéarités ayant les coefficients $b(t)$ et $c(t)$.

En utilisant les équations (IV.57)-(VI-60), la solution proposée (VI.46), et les expressions (IV.50)-(VI-51), on obtient une famille de solutions exactes pour le modèle de l'équation de Gardner (IV.45) sous la forme :

$$u(x,t) = \left\{ \left[\begin{array}{l} -\frac{b(t)(2n+1)}{c(t)(n+2)} \\ c_2 \left\{ \exp \left(\sqrt{-\frac{n^2 b^2(t)(2n+1)}{c(t)(n+1)(n+2)^2}} \right) \right\} \left\{ x - \int \left\{ a(t') - \frac{b^2(t')(2n+1)}{c(t')(n+1)(n+2)^2} \right\} dt' \right\} \right. \\ \times \left. \frac{\left[c_1 + c_2 \left\{ \exp \left(\sqrt{-\frac{n^2 b^2(t)(2n+1)}{c(t)(n+1)(n+2)^2}} \right) \right\} \left\{ x - \int \left\{ a(t') - \frac{b^2(t')(2n+1)}{c(t')(n+1)(n+2)^2} \right\} dt' \right\} \right]}{\left[c_1 + c_2 \left\{ \exp \left(\sqrt{-\frac{n^2 b^2(t)(2n+1)}{c(t)(n+1)(n+2)^2}} \right) \right\} \left\{ x - \int \left\{ a(t') - \frac{b^2(t')(2n+1)}{c(t')(n+1)(n+2)^2} \right\} dt' \right\} \right]} \right] \right\}^{\frac{1}{n}} \quad (IV.61)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires.

L'expression (IV.61) présente une nouvelle famille de solution exacte de type onde progressive pour l'équation de Gardner à coefficients variables (IV.45). Si on choisit les constantes c_1 et c_2 telle que $c_1=c_2$, on obtient une solution d'onde solitaire pour l'équation de Gardner :

$$u(x,t) = \left\{ \left[\begin{array}{l} -\frac{b(t)(2n+1)}{2c(t)(n+2)} \\ \times \left(1 + \tanh \left[\sqrt{-\frac{n^2 b^2(t)(2n+1)}{4c(t)(n+1)(n+2)^2}} \left(x - \int \left\{ a(t') - \frac{b^2(t')(2n+1)}{c(t')(n+1)(n+2)^2} \right\} dt' \right) \right] \right) \right] \right\}^{\frac{1}{n}} \quad (IV.62)$$

Cette dernière représente une solution d'onde de choc qui se peut exister dans un milieu modélisé par l'équation de Gardner à coefficients variables.

De plus, on trouve une autre famille de solutions de type ondes solitaires singulières sous la forme suivante:

$$u(x,t) = \left\{ \left[\begin{array}{l} -\frac{b(t)(2n+1)}{2c(t)(n+2)} \\ \times \left(1 + \coth \left[\sqrt{-\frac{n^2 b^2(t)(2n+1)}{4c(t)(n+1)(n+2)^2}} \left(x - \int \left\{ a(t') - \frac{b^2(t')(2n+1)}{c(t')(n+1)(n+2)^2} \right\} dt' \right) \right] \right) \right] \right\}^{\frac{1}{n}} \quad (IV.63)$$

Les solutions (IV.61)-(IV.63) deviennent alors explicitement dépendantes du temps du fait qu'elles sont liées aux paramètres de dispersion $a(t)$, et de non linéarité $b(t)$ et $c(t)$. Ainsi, la dynamique de propagation non linéaire des ondes peut être contrôlée à l'aide de la variation temporelle de ces paramètres. En faisant un choix judicieux de leurs formes, la propagation des solitons peut être manipulée d'une manière significative.

VI.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la dynamique de propagation non linéaire des solitons KdV et Gardner dans les milieux inhomogènes faiblement non linéaires et faiblement dispersifs. En premier lieu, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'influence des variations temporelles du coefficient de perte sur l'évolution d'un soliton KdV. On a montré que l'amplitude du soliton dépend du signe de coefficient de perte. Pour un coefficient de perte positif, l'amplitude de l'onde diminue énormément et elle augmente rapidement en considérant un coefficient négatif. Nous avons aussi prouvé que le soliton KdV se propage sans aucune déformation dans des milieux sans perte. L'influence de la variation temporelle du coefficient non linéaire sur le comportement du soliton KdV a été aussi étudiée. On a constaté que la dynamique de propagation des solitons KdV peut être contrôlée à travers la variation temporelle des coefficients de perte et de non linéarité. De plus, nous avons appliqué la méthode de l'équation auxiliaire pour déterminer les solutions d'ondes progressives de l'équation de Gardner généralisée à coefficients variables incorporant des termes dépendants du temps de la dispersion du premier ordre et de perte. Nous avons également utilisé la méthode (G'/G) étendue pour construire les solutions de type ondes solitaires, ondes de choc (kink) et solitons singuliers pour un modèle d'équation de Gardner généralisé présentant des termes non linéaires de puissance quelconque n . Les résultats ainsi obtenus peuvent être utilisés pour comprendre les différents phénomènes intervenant au cours de la propagation des ondes dans les milieux non linéaires modélisés par les équations de type KdV et Gardner.

REFERENCES

- [1] B. Tian, Y. Gao, " *Variable-coefficient balancing-act method and variable-coefficient KdV equation from fluid dynamics and plasma physics*", Eur. Phys (2001) J. B 22 351.
- [2] O. Nakoulima et al, " *Analytical and numerical studies of the variable-coefficient Gardner equation*", Appl. Math. Comput (2004) 152 449.
- [3] A. Biswas, E. Zerrad, " *Soliton Perturbation Theory for the Gardner Equation*", Adv. Studies Theor. Phys 2 (2008) 787.
- [4] S. El-Ganaini, " *Applications of He's Variational Principle and the First Integral Method to the Gardner Equation*", Appl. Math. Sci. 6 (2012) 4249.
- [5] E. V. Krishnan, H. Triki, M. Labidi, A. Biswas, " *A study of shallow water waves with Gardner's equation*", Nonlinear Dynam (2011) 66 497.
- [6] A. M. Wazwaz, " *A study on KdV and Gardner equations with time-dependent coefficients and forcing terms*", Appl. Math. Comput (2010) 217 2277.
- [7] A. K. Daoui, H. Triki, M. Mirzazadeh, A. Biswas, " *Solitary waves, Shock waves and Singular solitons of Gardner's equation for shallow water dynamics*", Acta Physica Polonica B, 45 (2014) 1135-1145.
- [8] M. A. Alejo, C. Munoz, L. Vega, " *The Gardner equation and the stability of the soliton solution of the Korteweg-de Vries equation*", Trans. Amer. Math. Soc (2013) 365 195.
- [9] Sirendaoreji, Sun. J, " *Auxiliary equation method for solving nonlinear partial differential Equations*", Phys. Lett. A 309 (2003) 387 396.
- [10] E. Yomba, " *The extended Fan's sub-equation method and its application to KdV-MKdV, BKK and variant Boussinesq equations*", Physics Letters A 336 (2005) 463-476.
- [11] M. Wang, X. Li, J. Zhang, " *The (G'/G) expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics*", Phys Lett A 372 (2008) 417 423.
- [12] S. Zhang, J. L. Tong, W. Wang, " *A generalized (G'/G) -expansion method for the mKdV equation with variable coefficients*", Appl Math Comput 372 (2008) 2254 2257.

CONCLUSION GENERALE

Le travail effectué dans cette thèse porte sur l'étude théorique de la dynamique de propagation non linéaire des solitons dans les milieux faiblement non linéaires et faiblement dispersifs approximés par les équations d'évolution de type KdV. Cette dernière équation constitue un modèle de propagation unidirectionnelle pour les ondes longues à la surface de l'eau, en faible profondeur. En particulier, nous avons utilisé les équations à coefficients variables de KdV et de Gardner généralisée comme support pour étudier la dynamique spatio-temporelle des solutions solitons dans les milieux inhomogènes en présence des variations temporelles des différents paramètres permettant de modéliser la propagation non linéaire des ondes dans ces systèmes.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'influence des variations temporelles du coefficient de perte sur l'évolution du soliton KdV. Dans ce contexte, nous avons trouvé que l'amplitude du soliton dépend du signe de ce coefficient dépendant du temps. Pour un coefficient de perte positif, l'amplitude de l'onde diminue énormément et elle augmente rapidement en considérant un coefficient négatif. En absence de perte, le soliton KdV se propage au sein du milieu sans aucune déformation. Nous avons également étudié l'effet de la non linéarité sur la propagation des solitons KdV. Les résultats de simulation numérique qui sont en parfait accord avec nos prévisions théoriques ont montré comment les solutions solitons peuvent être contrôlées en considérant des variations temporelles appropriées du coefficient non linéaire. En effet, une variété de formes d'ondes solitaires est obtenue en considérons différentes variations temporelles du coefficient non linéaire existant. En résumé, nous pouvons conclure que la dynamique de propagation des solitons KdV peut être manipulée à travers la variation temporelle des paramètres dépendants du temps, et en particulier les coefficients de perte et de non linéarité.

Dans une seconde étape, nous nous sommes intéressés à la recherche de solutions explicites de type ondes progressives de l'équation de Gardner généralisée à coefficients variables. Cette classe d'équation non linéaire, aussi appelée équation KdV-mKdV (équation KdV modifiée), modélise la propagation d'ondes solitaires dans le contexte d'eaux peu profondes dans un canal. Nous avons adapté la technique de *l'équation auxiliaire* pour résoudre un type d'équation de Gardner généralisée à coefficient variables incorporant des termes dépendants du temps de la dispersion du premier ordre et de perte. L'idée principale de cette technique se base sur le fait que les solutions de type ondes progressives des équations partielles non linéaires plus complexes peuvent être exprimées sous la forme d'un polynôme dont la

variable indépendante ou la variable fonctionnelle à déterminer est la solution d'une équation différentielle ordinaire, et le degré de ce polynôme peut être déterminé en considérant le principe de balance homogène entre les termes de dérivées et de non linéarité les plus élevés. En appliquant cette méthode, nous avons obtenu avec succès de nouvelles solutions exactes de type ondes progressives pour l'équation de Gardner généralisée à coefficients dépendant du temps.

Dans une troisième partie de ce travail, relatif à l'étude théorique de la dynamique de propagation non linéaire des solitons Gardner, nous avons traité un problème physique très important permettant d'identifier les solutions de type ondes progressives pour un modèle Gardner généralisé présentant des termes non linéaires de puissance quelconque n . Nous avons adapté la méthode (G'/G) étendue pour construire les solutions localisées de cette équation d'évolution non linéaire. Dans ce contexte, de nouvelles familles de solutions exactes de type ondes solitaires, ondes de choc (kink) et soliton singulier ont été obtenues sous certaines conditions paramétriques.

Les résultats obtenus ont montré que la méthode de l'équation auxiliaire et la méthode (G'/G) étendue sont souples et efficaces pour déterminer des nouvelles solutions exactes de type onde progressive à une variété de modèles de type KdV.

Les solutions obtenues pourraient être utiles dans l'interprétation de certains phénomènes intervenant au cours de la propagation non linéaire des ondes dans les systèmes faiblement non linéaires et faiblement dispersifs. En particulier, le choix des modèles de type KdV généralisés et à coefficients variables permet d'analyser plus efficacement la dynamique spatio-temporelle des ondes solitaires dans les milieux physiques inhomogènes modélisés par des équations d'évolution de type KdV.