Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Badji Mokhtar-Annaba

Badji Mokhtar University-Annaba

جامعة باجي مختار

عنابة-

Année 2015

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Appliquées

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

SUR LA THEORIE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES FRACTIONNAIRES

Option

Mathématiques Appliquées

Présentée par

BOUAZIZ Asma

Sous la direction de :	NISSE Lamine	Prof.	UNIV.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT:	REBBANI Faouzia	Prof.	EPST. ANNABA
EXAMINATEUR:	BOUSSETILA Nadjib	Prof.	UNIV DE GUELMA
EXAMINATEUR:	CHORFI Lahcen	Prof.	UNIV.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR:	LASKRI Yamina	Prof.	EPST. ANNABA
EXAMINATEUR:	SALMI Abdelouahab	MC(A)	UNIV.B.M. ANNABA

A mes chers parents

BOUAZIZ Rabah et TEFFAHI Dalila

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier ALLAH pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce travail

Je tiens à remercier tout spécialement mon directeur de thèse M. NISSE Lamine pour sa confiance, ses conseils avisés et le temps qu'il m'a accordé et pour la responsabilité de diriger ce travail.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation LMD.

Je tiens à remercier Mme. REBBANI Faouzia pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.

Je remercie M. BOUSSETILA Nadjib, M. CHORFI Lahcen , Mme. LASKRI Yamina et M. SALMI Abdelouahab pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Mes plus profonds remerciements vont à mes parents. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude.

Je remercie mon époux pour son aide et son soutien. Je remercie également ma famille et en particulier ma chère soeur Marwa, mes frères Mohammed El-Amine et Ismail, ma petite Meriem et ma cousine Amira qui m'ont toujours soutenu dans les moments difficiles.

Enfin, je remercie mes beaux parents pour leur disponibilité toutes les fois que j'ai eu besoin d'eux. Je voudrais également remercie tous mes plus proches amies.

حول نظرية المعادلات التفاضلية الكسرية

ملخص

موضوع هذه الأطروحة هو دراسة الأنظمة التفاضلية الكسرية غير الخطية مع التأخير. نعتبر منها فئتين. في البداية، ندرس نظام تأخير ثابت. باستخدام بعض نظريات النقطة الصامدة، نثبت وجود ووحدانية حل إيجابي وشامل. في المجموعة الثانية، نعتبر نظام مع سوابق منحرفة (متقدمة ومتأخرة). نعطي شروطا كافية لوجود و وحدانية الحل. ويستند تحليلنا على نظرية النقطة الصامدة من باناخ. لهذه الفئة، ندرس الاستقرار الموحد من الحل. يتم توضيح نتائج كل فئة بتقديم بعض الأمثلة الملموسة.

الكلمات المفتاحية

الأنظمة التفاضلية الكسرية, حل إيجابي وشامل, نظريات النقطة الصامدة, تأخير ثابت, سوابق منحرفة, الاستقرار.

Sur la théorie des équations différentielles fractionnaires

Résumé

Cette thèse a pour objet d'étude de certains systèmes différentiels non linéaires fractionnaires à retards. Nous considérons deux classes de ce type de systèmes. Dans la première, nous étudions un système à retards constants. En utilisant certains théorèmes de point fixe, nous établissons l'existence et l'unicité d'une solution positive et globale. Dans la deuxième, nous considérons un système avec des arguments déviés (avancés et retardés). Nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution. Notre analyse s'appuie sur le théorème du point fixe de Banach. Pour cette dernière classe, nous étudions également la stabilité uniforme de la solution. Les résultats établis, pour chaque classe, sont illustrés par des exemples concrets.

Mots clés : Systèmes différentiels fractionnaires, solution positive et globale, théorèmes de point fixe, retards constants, arguments déviés, stabilité.

On the theory of fractional differential equations

Abstract

This thesis is the subject of study of nonlinear fractional differential systems with delays. We consider two classes. In the first, we study a constant delay system. Using some fixed point theorems, we establish the existence and uniqueness of a global positive solution. In the second, we consider a system with deviated arguments (delay and advance). We give sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution. Our analysis is based on the Banach fixed point theorem. For this last class, we also study the uniform stability of the solution. Established results, for each class, are illustrated by some concrete examples.

Keywords : Fractional differential systems, global positive solution, fixed point theorems, constant delays, deviating arguments, stability.

Notations

- $\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}^+$: ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
- $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.
- $[a, b]$: intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b.
- $C([a, b], \mathbb{R}^+)$: l'espace des fonctions continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$.
- $L^p[a, b]$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [1, \infty)$ intégrables sur $[a, b]$.
- $AC[a, b]$: espace des fonctions absolûment continues sur $[a, b]$.
- $AC^n[a, b]$: $(n \geq 2)$, espace des fonctions $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que $u^{(n-1)} \in AC[a, b]$ et $u^{(k)} \in C[a, b]$, $k = 1, ..., n-1$.
- $\mathbb{C}^{m \times n}$: espace vectoriel des matrices à coefficients complexes de m lignes et n colonnes.
- Γ : fonction Gamma d'Euler.
- B : fonction Bêta.
- $I_{a^+}^{\alpha} f(t)$: intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$.
- $D_a^{\alpha} f(t)$: dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction $f(t)$.

- ${}^{c}D_{a}^{\alpha}f\,(t)$: dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction $f\,(t)$.

Table des matières

Introduction

L'objectif de cette thèse est l'étude des systèmes différentiels non linéaires fractionnaires à retards.

Le calcul fractionnaire est la différentiation et l'intégration d'ordre arbitraire (non entier), qui généralisent les notions de différentiation d'ordre entier et d'intégration itérée $n-$fois. Ce sujet est aussi vieux que le calcul ordinaire, puisque il a eté initié par Leibniz et Newton au $XVII^e$ siècle. Ensuite, plusieurs mathématiciens ont contribué à son développement : Laplace (1812), Fourier (1822), Abel $(1823-1826)$, Liouville $(1832-1873)$, Riemann (1847), Grunwald $(1867-1872)$ [17], Letnikov $(1868-1872)$ [25, 26], Laurent (1884), Nekrassov (1888), Krug (1890) et Hadamard (1892)... (voir [20, 22, 23, 30, 37, 38, 40, 31]).

Des recherches récentes ont montré que de nombreux systèmes physiques peuvent être représentés avec plus de précision en considérant des dérivés d'ordre non entier. Les équations différentielles fractionnaires, trouvent ainsi de nombreuses applications dans le domaine de la viscoélasticité, des circuits électriques, l'électromagnétiques, la physique, de la chimie et des sciences biologiques [7, 8, 15, 16, 23, 26, 30, 33]. Par conséquent, il y a eu un développement important dans l'étude de ces équations au cours de ces dernières années ; voir les monographies de Kilbas et al [23], Podlubny [38], Samko et al [40]...; et les articles [1, 3, 4, 5, 11, 14, 36, 39]

Parmi les classes des systèmes fractionnaires, décrits ci-dessus, ceux avec arguments modifiés ont été récemment le sujet de quelques travaux de recherche. Ce sont des systèmes où l'argument de la fonction inconnue est modifé. A titre d'exemple explicatif, nous considérons le modèle suivant :

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t - \varphi(t))). \tag{0.0.1}$$

Nous entendons par *système modifié* la dépendance de F de $x(t - \varphi(t))$. Nous distinguons donc trois types de systèmes :

- *en avance (ou avancé)*, si $\varphi(t) < 0$;
- *à retard (ou retardé)*, si $\varphi(t) > 0$;
- *dévié (mixte)*, si la fonction φ est de signe non constant (c'est à dire, avancé et retardée à la fois).

En outre, ces systèmes fractionnaires à arguments modifiés se sont avérés plus réalistes dans la description des phénomènes naturels. Par conséquent, leur étude a attiré beaucoup d'attention par de nombreux auteurs. Pour les systèmes avancés, nous renvoyons à [13, 33, 42]. Pour les systèmes à retard, nous citons [3, 9, 11, 14, 27, 28, 29, 39, 45]. Pour les systèmes déviés, nous citons [2, 19, 21, 24] et les références qui s'y trouvent. Notons que le dernier type est moins étudié que les deux autres.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude des deux derniers types. Pour chaque type, nous considérons un modèle représentatif. Pour le premier, nous traitons l'existence et l'unicité de la solution positive. Quant au deuxième, nous établissons l'existence et l'unicité ainsi que la stabilité de la solution. Notre outil principal est la technique du point fixe. Elle consiste à transformer le problème considéré en la recherche d'un point fixe d'un opérateur défini sur un espace fonctionnel adéquat. Ce point fixe n'est autre que la solution cherchée. L'enjeu est de bien choisir l'espace fonctionnel (norme) approprié à l'opérateur en question afin que nous puissions appliquer la méthode de point fixe.

Organisation de la thèse

Cette thèse est composée de quatre chapitres. Elle est structurée comme suit:

Le premier chapitre est consacré à rappeler les outils dont nous avons besoin dans cette thèse.

Le deuxième chapitre est scindé en trois sections. Dans la première, nous donnons un historique sur le calcul fractionnaire. Ensuite, deux applications concrètes d'un problème de tautochrone et un problème en méchanique feront l'objet de la deuxième section. Enfin, la troisième partie contient les définitions de différentes dérivées fractionnaires ainsi que leurs propriétés.

Dans le troisième chapitre, nous étudions un système d'équations différentielles fractionnaires à retards constants de la forme suivante:

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}x_j\left(t\right) = f_j\left(t, x_j\left(t\right), x_1\left(t-\tau_1\right), ..., x_n\left(t-\tau_n\right)\right), \quad j = 1, 2, ..., n, \quad t \geq 0, \\ x\left(t\right) = \Phi\left(t\right) \geq 0, \quad t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Nous montrons l'existence de la solution globale positive en utilisant un théorème de point fixe basé sur la solution minimale et maximale du problème. Puis, en utilisant le théorème de contraction de Banach, nous traitons l'unicité de la solution.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude du système d'équations différentielles fractionnaires à retards variables de la forme suivante:

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}x_i\left(t\right) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(t, x_i\left(t\right), x_j\left(t-\tau_j\left(t\right)\right)\right), \quad i = 1, 2, ..., n, \quad t > 0, \\ x\left(t\right) = \Phi(t), \qquad t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Notons que les τ_j ne sont pas de signe constant, ce qui revient à dire que le problème, dans ce cas là, est avec arguments déviés. En appliquant le principe de contraction de Banach, nous établissons des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution au problème. En outre, nous prouvons la stabilité uniforme de la solution.

Les résultats que nous établissons, dans cette thèse, sont illustrés par des exemples.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Nous rappelons certaines définitions d'espaces fonctionnels et quelques fonctions spéciales. Nous énonçons ensuite deux théorèmes du point fixe. Enfin, nous présentons brièvement la notion de stabilité des systèmes différentiels.

1.1 Espaces fonctionnels

Soit $\Omega = [a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle borné ou non borné de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 *[23] Pour $1 \leq p \leq \infty$ on définit*

i) L'espace $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, des (classes de) fonctions f réelles ou complexes sur Ω telles que f est mesurable et $\int_a^b |f(t)|^p \, dt < \infty$, muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

ii) L'espace $L^{\infty}(\Omega)$ des (classes de) fonctions mesurables bornées presque partout sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_{\infty} = ess\sup_{t\in\Omega} |f(t)| = \inf\{M \geq 0;\ \ |f(t)| \leq M,\ \ p.p.\ \ sur\ \Omega\}.$$

Définition 1.1.2 *[23] Soit $\Omega = [a,b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$, alors l'espace des fonctions absolument continues, noté $AC(\Omega)$, est défini comme l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dérivable presque partout telle que $f' \in L^1(\Omega)$. On a alors*

$$f \in AC(\Omega) \iff f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)\,ds, \quad t \in \Omega.$$

Pour $n \geq 2$, on définit l'espace $AC^n(\Omega)$ comme l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$, telles que $f^{(k)} \in C(\Omega)$, $k = 1, 2, ..., n-1$ et $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.

Une propriété caractéristique de l'espace AC^n est donnée par le lemme suivant:

Lemme 1.1.1 *[23] Une fonction $f \in AC^n(\Omega)$, si et seulement si elle s'écrit sous la forme*

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\,ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \quad \forall t \in \Omega.$$

1.2 Fonctions spéciales

On entend par "fonction spéciale" toute fonction qui n'est pas élémentaire (polynôme, fonction trigonométrique, exponentielle, etc.) ayant une grande importance et plusieurs applications.

Dans cette section on en rappelle quelques unes qu'on en aura besoin dans notre travail.

Fonction Gamma

La fonction Gamma (d'Euler) est une fonction complexe qui généralise la fonction factorielle. Elle a été obtenue par Euler en 1729.

Définition 1.2.1 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{1.2.1}$$

où z est un nombre complexe quelconque tel que $\operatorname{Re} z > 0$.

Remarque 1.2.1 *Une intégration par parties de (1.2.1) donne*

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Lorsque $z = n \in \mathbb{N}^*$, alors $\Gamma(n) = (n-1)!$

Fonction Bêta

Définition 1.2.2 *On appelle fonction Bêta la fonction définie par*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \qquad (\operatorname{Re} z > 0; \ \operatorname{Re} w > 0). \tag{1.2.2}$$

Remarque 1.2.2 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (\operatorname{Re} z > 0; \ \operatorname{Re} w > 0).$$

1.3 Quelques théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe sont des outils très utiles en mathématiques, essentiellement dans le domaine de la résolution des équations différentielles. Dans cette section, on va donner les théorèmes de point fixe dont nous aurons besoin dans le présent document.

Commençons par la définition d'un point fixe.

Définition 1.3.1 *Soit A une application d'un ensemble E dans lui-même. On appelle point fixe de A tout point $\hat{u} \in E$ tel que : $A(\hat{u}) = \hat{u}$.*

Théorème du point fixe (solution minimale et maximale)

Le théorème de point fixe suivant est basé sur les définitions suivantes:

Définition 1.3.2 *Soit E un espace de Banach réel. Soit K un sous-ensemble non vide fermé de E. K est appelé cône si $ax + by \in K$ pour tout $x, y \in K$ et a, b sont réels positifs où $K \cap (-K) = \{0\}$ et $K \neq \{0\}$.*

Définition 1.3.3 *Un cône K introduit un ordre partielle $\leq$ dans E de la manière suivante [44]*

$$x \leq y \quad si \; y - x \in K.$$

Définition 1.3.4 *Le cône K est appelé*

- *normal: s'il existe un nombre $l \geq 1$ de telle sorte que pour tout $x, y \in K$:*

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq l \, \|y\| \, ,$$

- *régulier: si toute suite croissante qui est bornée par le dessus est convergente. Autrement dit, si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ est une suite telle que $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq y$ pour certains $y \in E$, alors il existe $x \in E$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.*

Définition 1.3.5 *[44] Pour $x, y \in E$ l'intervalle d'ordre $\langle x, y \rangle$ est définie par*

$$\langle x, y \rangle = \{z \in E : \quad x \leq z \leq y\} \, .$$

Définition 1.3.6 *[44] La fonctionnelle $h(t, x, x_1, ..., x_n)$ est dite croissante sur $I \times E^{n+1}$, si pour tout $(t, \phi, \phi_1, ..., \phi_n) \in I \times E^{n+1}$ et $(t, \psi, \psi_1, ..., \psi_n) \in I \times E^{n+1}$, tels que*

$$\phi(\theta) \leq \psi(\theta) \;\; et \; \phi_i(\theta) \leq \psi_i(\theta) \, , \quad i = 1, 2, ..., n, \;\; \theta \in [-\tau, 0]$$

on a l'inégalité suivante

$$h(t, \phi, \phi_1, ..., \phi_n) \leq h(t, \psi, \psi_1, ..., \psi_n) \, .$$

Théorème 1.3.1 *[44] Soit D un sous-ensemble du cône K de l'espace partiellement ordonné E, $F : D \to E$ est croissante. S'il existe $x_0, y_0 \in D$ telle que $x_0 \leq y_0$, $\langle x_0, y_0 \rangle \subset D$ et x_0, y_0 sont respectivement des sous et sur solutions de l'équation $x - F(x) = 0$, alors l'équation $x - F(x) = 0$ a une solution minimale et une solution maximale $x^*, y^* \in \langle x_0, y_0 \rangle$ telle que $x^* \leq y^*$, lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

1. *K est normal et F est complètement continue;*
2. *K est régulier et F est continue;*
3. *E est réflexif, K est normal, et F est continue ou faiblement continue.*

Pour la démonstration du théorème, nous renvoyons le lecteur à [44].

Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour garantir l'existence et l'unicité d'un point fixe d'une fonction.

Définition 1.3.7 *[41] Soit (E, d) un espace métrique. Une application $f : E \to E$ est dite $k-$Lipschitzienne de constante $k \geq 0$ si*

$$\forall u, v \in E, \quad d(f(u), f(v)) \leq kd(u, v).$$

Définition 1.3.8 *[41] L'application $k-$Lipschitzienne f est dite une contraction si $k \in (0, 1)$.*

Théorème 1.3.2 *[41] (Théorème du point fixe de Banach)*

Soit (E, d) un espace métrique complet, soit F une partie fermée de E, et soit $f : F \to E$ une contraction. Alors f admet un unique point fixe.

Pour la démonstration du théorème, nous renvoyons le lecteur à [41].

Définition 1.3.9 *Une partie M d'un espace métrique (E, d) est dite compact si toute suite $\{x_n\}$ de M admet une sous suite convergente vers une limite appartenant à M.*

M est relativement compacte si toute suite de M admet une sous suite convergente vers une limite appartenant à E (i.e. si la fermeture de M est compacte).

Définition 1.3.10 *Soit U un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions avec $f_n : U \to \mathbb{R}^p$. Soit $|.|$ une norme quelconque dans $\mathbb{R}^p$.*

(i) $\{f_n\}$ est uniformément bornée sur U s'il existe $L \geq 0$ tel que $|f_n(t)| \leq L$ pour tout n et tout $t \in U$.

(ii) $\{f_n\}$ est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $t_1, t_2 \in U$ et $|t_1 - t_2| < \delta$ alors $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon$ quelque soit n.

Théorème 1.3.3 *(Théorème d'Arzela-Ascoli)*

Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions réelles uniformément bornée et équicontinue définie sur un intervalle $[a, b]$, alors la suite admet une sous suite converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction continue.

Mais dans notre travail, les fonctions qu'on va manipuler sont définies sur des intervalles infinis (non bornés). Par conséquent, dans notre cas (projet), le théorème d'Arzela-Ascoli ne fonctionne pas, donc nous avons besoin de la modification suivante :

Soit $p : I := [0, \infty) \to (0, \infty)$ une fonction continue telle que $\sup_I \{|x(t)| p(t)\} < \infty$. Soit $\Omega \subset E$.

Définition 1.3.11 *une fonction $x \in \Omega$ est dite presque équicontinue sur I si elle est équicontinue dans chaque intervalle $[0, T]$, $0 < T < \infty$.*

Théorème 1.3.4 *[46] Si une fonction $x \in \Omega$ est presque équicontinue sur I et uniformément bornée dans le sens de la norme*

$$\|x\|_q = \sup_I \{|x(t)| \, q(t)\},$$

où la fonction q est positive et continue sur I et

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{q(t)} = 0,$$

alors Ω est relativement compact dans E.

1.4 Stabilité des systèmes différentiels

L'émergence de la théorie de la stabilité a été à la fin du $XIX^{ème}$ siècle par Liaponov. Cette théorie a une large application dans divers domaines de la physique et les mathématiques.

Pour $r > 0$, considérons $C = C([0,T], \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Notons au passage , que cet espace muni de la norme $\|\phi\| = \sup_{0\leq t\leq T} |\phi(t)|$, $\phi \in C$, est un espace de Banach. Considérons donc le problème à valeur initiale suivant

$$x'(t) = f(t,x), \quad \text{pour } t \geq t_0, \tag{1.4.3}$$

$$x(t) = \psi(t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_0, \tag{1.4.4}$$

où $\psi : [0,t_0] \to \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée continue et $f : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. La fonction $f(t,x)$ est supposée satisfaire les conditions nécessaires qui garantissent l'existence de la solution $x(t,t_0,\psi)$ à travers (t_0,ψ) du problème (1.4.3)-(1.4.4) et d'être continue en (t,t_0,ψ) du domaine de définition de f.

Définition 1.4.1 *[18] Supposons que $f(t,0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La solution triviale $x = 0$ de (1.4.3) est dite:*

- *stable en t_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que:*

  $$\|\psi\| < \delta \Rightarrow |x(t, t_0, \psi)| < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0,$$

  dans le cas contraire on dit que la solution est instable en t_0,

- *uniformément stable si le nombre δ est indépendant de t_0,*

- *asymptotiquement stable en t_0 si elle est stable en t_0 et s'il existe $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ tel que:$\|\psi\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t, t_0, \psi) = 0$.*

Dans la suite, nous présentons quelques résultats de la stabilité des systèmes différentiels linéaires.

Système différentiel linéaire

Considérons le système différentiel le plus simple, à savoir le système linéaire homogène :

$$Y' = AY,$$

avec $Y \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ et $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$. L'unique solution du problème de Cauchy, de condition initiale $Y(t_0) = Y_0$, est donnée par

$$Y(t, Y_0) = e^{(t-t_0)A} Y_0.$$

On a donc

$$Y(t, Y_0) - Y(t, Z_0) = e^{(t-t_0)A}.(Y_0 - Z_0),$$

et la stabilité est liée au comportement de $e^{(t-t_0)A}$ lorsque $t \to +\infty$, dont la norme matricielle $\left\|e^{(t-t_0)A}\right\|$ doit rester bornée.

Théorème 1.4.1 *[6] Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres complexes de la matrice A. Alors les solutions du système linéaire $Y' = AY$ sont*

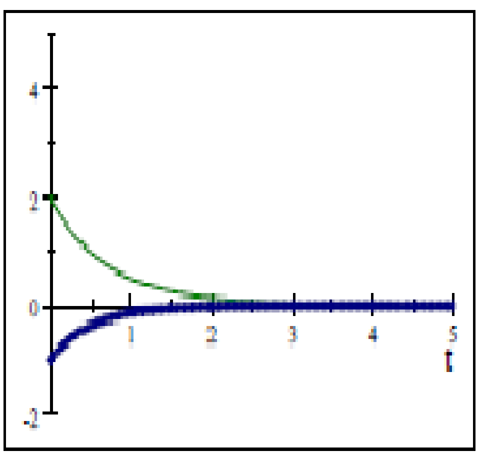
- *asymptotiquement stables si et seulement si* $\mathrm{Re}\,(\lambda_j) < 0$ *pour tout* $j = 1, ..., m$;
- *stables si et seulement si pour tout* $j = 1, ..., m$, *ou bien* $\mathrm{Re}\,(\lambda_j) < 0$, *ou bien* $\mathrm{Re}\,(\lambda_j) = 0$ *et le bloc correspondant est diagonalisable.*

Exemple 1.4.1 *La solution générale du système*

$$\begin{cases} x' &= -x + y & ;\ x(0) = 2 \\ y' &= \quad -2y & ;\ y(0) = -1 \end{cases}$$

est donnée par

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$



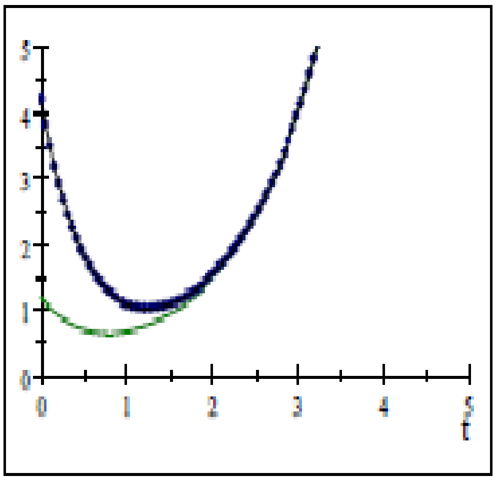
On voit bien que $X(t) \rightarrow_{t\to\infty} 0$; *la solution triviale est asymptotiquement stable.*

Exemple 1.4.2 *La solution générale du système*

$$\begin{cases} x' &= 2x - y & ;\ x(0) = 1.2 \\ y' &= 4x - 3y & ;\ y(0) = 4.2 \end{cases}$$

est donnée par

$$X(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$



On voit bien que $X(t) \to_{t\to\infty} \infty$; *la solution triviale n'est pas stable.*

CHAPITRE 2

Analyse fractionnaire

Dans ce chapitre, nous citons un aperçu historique du calcul fractionnaire. Ensuite, nous donnons deux exemples de ses applications concrètes. Enfin, nous donnons quelques définitions et résultats connus sur le calcul fractionnaire.

2.1 Historique

Le *calcul fractionnaire* est une branche des mathématiques qui est, dans un certain sens, aussi vieux que le calcul classique que nous connaissons aujourd'hui: Les origines peuvent être retracées à la fin du $XVII^e$ siècle.

Notre objectif dans cette section n'est pas d'établir un état de l'art complet sur le calcul fractionnaire. Comme les domaines de recherche sont tellement variées qu'il semble difficile d'avoir une présentation complète. Pour cette raison, nous allons fournir un aperçu historique uniquement de la période de 1695 à 1974.

- **1695**

l'époque où Newton et Leibniz ont développé les bases de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz $(1646-1716)$ introduit le symbole

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

pour désigner la dérivé $n^{ième}$ d'une fonction f. Quand il a indiqué dans une lettre à de L'Hôpital[(1)] $(1661-1704)$ (avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\})$, de l'hôpital a répondu: "Qu'est-ce que $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ signifie si $n = \frac{1}{2}$?" En 30 Septembre 1695, Leibniz écrivit à L'Hôpital dans une lettre que cela mène à un paradoxe dont on tirera profit, un jour, d'utiles conséquences.

- **1730**

Euler est le deuxième grand mathématicien à aborder la question. Dans son article [12] où il a présenté sa célèbre fonction Gamma Γ qui généralise la factorielle ($\Gamma(n+1) = n!$), il a achèvé sur une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de x^μ, avec $\mu > 0$; en commençant par: pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$, on a

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}. \tag{2.1.1}$$

Grâce à sa fonction Gamma, (2.1.1) s'étend à une puissance $m > 0$.

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}.$$

Par conséquent, une définition pour la dérivée d'ordre réel $\alpha > 0$ est donneé par

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \tag{2.1.2}$$

[(1)] Avant l'introduction de l'accent circonflexe en langue française, le nom s'écrivit : "De l'Hospital".

- **1822**

  Fourier obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel grâce à sa célèbre transformée.Il compose sa transformée (réelle) d'une fonction f avec sa transformée inverse

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \cos(p(x-\theta))\, d\theta dp. \tag{2.1.3}$$

  Après, il remarque que la dérivée $n^{ième}$ ($n \in \mathbb{N}$) du cos peut s'écrire comme suit:

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos(p(x-\theta)) = p^n \cos\left[p(x-\theta) + \frac{n\pi}{2}\right]. \tag{2.1.4}$$

  L'équation (2.1.4) a un sens si on remplace n par $\alpha > 0$, ce qui permet de définir la dérivée d'ordre α de $\cos(p(x-\theta))$ et ainsi la dérivée d'ordre α de la fonction f

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, p^\alpha \cos\left[p(x-\theta) + \frac{\alpha\pi}{2}\right] d\theta dp.$$

- **1823**

  Abel résoud le problème du tautochrone généralisé, en utilisant le calcul fractionnaire.

- **1832 – 1837**

  Liouville est le premier à étudier de manière approfondie le calcul fractionnaire qui semblent attester les huit articles qu'il a publiés entre 1832 et 1837. Partant de

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax}, \tag{2.1.5}$$

  pour $n \in \mathbb{N}$, il a proposé de définir la dérivée d'ordre α de e^{ax} en étendant n à α.

Par conséquent, toute fonction f peut être écrite sous la forme:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}, \tag{2.1.6}$$

possède une dérivée d'ordre $\alpha > 0$ donnée par

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha e^{a_k x}. \tag{2.1.7}$$

Pour prolonger cette définition à d'autres types de fonctions que (2.1.6), Liouville remarque que :

$$\forall \beta > 0,\ \forall x > 0,\ x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-xu} du.$$

En utilisant (2.1.5), il trouve :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-xu} du,$$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}. \tag{2.1.8}$$

Remarque 2.1.1 *Bien que (2.1.2) et (2.1.8) sont différents pour les exposants β, la limite $\beta = 0$ est problématique.*

Par exemple, pour $\alpha = 1/2$,

- *la définition d'Euler donne:*

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}},$$

- *alors que celle de Liouville donne:*

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^0 = 0.$$

Ce paradoxe est effectivement résolu lors de l'utilisation de définitions modernes des dérivées fractionnaires.

- **1847**

  À partir d'une généralisation de la formule de Taylor, Riemann donne une définition d'intégrale fractionnaire :

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\, dy + \psi(x),$$

  où $\psi(x)$ est une “fonction complémentaire” qui fait obstacle dans ses travaux ultérieurs.

  Elle sera éventuellement abandonnée pour obtenir la définition moderne de l'intégrale fractionnaire.

  Remarque 2.1.2 *Les progrès les plus importants sont celles de Liouville dans ses multiples mémoires à l'école polytechnique entre* 1832 *et* 1835*, puis la contribution de Riemann en* 1847*, rend les noms de ces deux mathématiciens restent attaché.*

- **1867 – 1868**

  Grünwald ensuite Letnikov suggérent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie.

- **1869**

  La formule définitive de ce qu'on appelle maintenant intégrale fractionnaire de Riemann apparaît pour la première fois dans le travail Sonin. Pour une fonction complexe, dérivant n fois la formule de Cauchy ($n \in \mathbb{N}$), on obtient:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(y)}{(y-z)^{n+1}} dz.$$

Sonin généralise cette formule à $n < 0$ et il obtient finalement une définition de l'intégrale d'ordre $\alpha > 0$, notée par ${}_aI_x^\alpha$:

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\, dy. $$

- **1892**

  Heaviside offre cette année la première application concrète du calcul fractionnaire pour la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle:

  $$ \frac{\partial}{\partial t} U(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x,t). $$

  L'approche d'Heaviside est loin d'être rigoureuse (elle ne sera justifiée qu'en 1919), mais donne la bonne solution, il constate que

  $$ U(x,t) = U_0 \exp\left(-axp^{1/2}\right). $$

  Il assume alors que $p^{1/2}U_0 = U_0\sqrt{\pi t}$... ce qui correspond à la dérivée d'ordre $1/2$ de U_0. Il obtient finalement la solution exacte, en développant la solution en série entière.

- **1917**

  Weyl introduit une définition de l'intégrale fractionnaire adaptée aux fonctions périodiques.

- **1927**

  Marchaud construit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire:

  $$ D_+^\alpha f(x) = c \int_0^\infty \frac{\Delta_t^l f(x)}{t^{\alpha+1}} dt, $$

  où $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$ avec $l > \alpha$ et c est une constante de renormalisation. L'opérateur Δ_t^l est une différence finie d'ordre l.

- **1928**

  Hardy et Littlewood affirment dans leur principale théorème que pour $0 < \alpha < 1$ et $1 < p < 1/\alpha$, ${}_aI_x^\alpha$ est un opérateur borné de L^p dans L^q, où $1/q = 1/p - \alpha$.

- **1937**

  Riesz donne une définition de l'intégrale fractionnaire pour des fonctions à plusieurs variables:
  $$I^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-\alpha}} dy.$$
  Cet opérateur vérifie $I^\alpha \circ I^\beta = I^{\alpha+\beta}$ et $\Delta I^{\alpha+2} = -I^\alpha$, où Δ est l'opérateur Laplacien.

- **1970**

  Oldham et Spanier étudient Dans [37] le problème du flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique. Ils montrent que le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée 1/2 du paramètre physique lors d'un phénomène de diffusion.

- **1974**

  Ross organise dans cette année la première conférence sur le calcul fractionnaire à l'Université de New Haven.

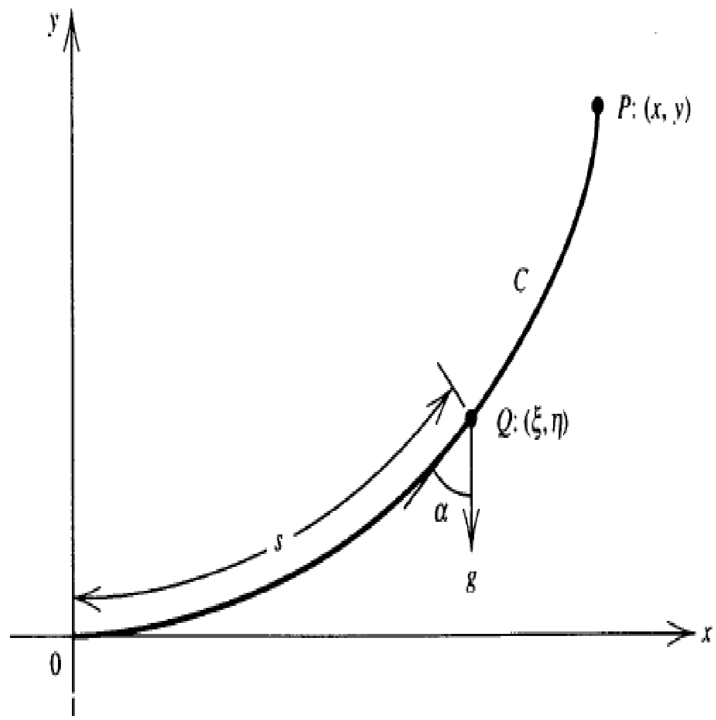
Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché une grande réussite de la théorie, ce qui n'est certainement pas unifiée; En outre, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche intéressants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions différentes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Durant ces trois dernières décennies, plus grand d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire ainsi une diversification importante a été paru dans les domaines d'application.

2.2 Applications du calcul fractionnaire

Avant de passer à une étude des propriétés mathématiques des opérateurs différentiels fractionnaires, prenons un bref regard sur deux exemples : le premier c'est le problème de tautochrone résolu par Abel et le deuxième est un modèle résultant en mécanique où dérivées fractionnaires peuvent être utilisés avec succès.

Equation intégrale d'Abel et le problème de tautochrone

Abel était le premier à résoudre une équation intégrale par le biais du cal-



cul fractionnaire [31].

Supposons qu'un fil mince C est placé dans le premier quadrant d'un plan vertical et soit une particule glissant sous l'influence de la gravitation terrestre tel que sa vitesse initiale égale à zéro. Le problème du tautochrone consiste à trouver la forme de la courbe C de sorte que le temps de descente T de P à l'origine reste le même quelque soit le point de départ. Une telle courbe est appelée une tautochrone.

Le problème d'Abel est formulé comme suit : Soit s la longueur d'arc mesurée le long de C de O à un point arbitraire Q sur C, et soit α l'angle d'inclinaison. Puis $-g\cos\alpha$ est l'accélération de d^2s/dt^2 du particule, où g est la constante de la gravité, et

$$\frac{d\eta}{ds} = \cos\alpha.$$

Nous avons donc l'équation différentielle

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{d\eta}{ds}.$$

A l'aide du facteur intégrant ds/dt, on a

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -2g\eta + k, \tag{2.2.9}$$

où k est une constante d'intégration. Puisque la particule a démarré d'un repos, ds/dt est nul lorsque $\eta = y$, et donc $k = 2gy$. Nous pouvons donc écrire (2.2.9) comme suit

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g\,(y-\eta)}.$$

La racine carrée négative est choisi de tel sorte que t croît, s décroît.

Ainsi, le temps de descente T de P à S est

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_P^O \frac{1}{\sqrt{y-\eta}}ds.$$

La longueur de l'arc s est une fonction de η, c'est à dire

$$s = h\,(\eta)\,,$$

où h dépend de la forme de la courbe C. donc,

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_y^0 (y-\eta)^{-1/2} \left[h'(\eta)\, d\eta\right]$$

ou bien

$$\sqrt{2g} T = \int_0^y (y-\eta)^{-1/2} h'(\eta)\, d\eta, \tag{2.2.10}$$

où

$$h'(\eta) = \frac{ds}{d\eta}.$$

Si nous prennons

$$f(y) \equiv h'(y),$$

alors l'équation intégrante de (2.2.10) peut être écrite avec les notations du calcul fractionnaire comme

$$\frac{\sqrt{2g}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} T = I^{1/2} f(y), \tag{2.2.11}$$

où $I^{1/2}$ est l'intégrale de Riemann-Liouville fractionnaire d'ordre $1/2$. Comme la dérivée fractionnaire est l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire il s'ensuit

$$D^{1/2} \frac{\sqrt{2g}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} T = f(y).$$

C'est notre formulation souhaitée. Il reste alors à résoudre (2.2.11) et ensuite trouver l'équation de C. La résolution de l'équation (2.2.11) peut être trouvé dans le livre de Miller et Ross [31].

Un modèle en mécanique

Le modèle a été proposé à l'origine comme une théorie par Nutting [34, 35]. (le détail peut être consulté dans le livre de Kai Diethelm [8, pages 10-12])

Dans ce qui suit, nous voulons décrire le comportement de certains matériaux sous l'influence de forces extérieures; en utilisant les lois de Hooke et Newton. La relation que nous intéresse, c'est la relation entre la contrainte $\sigma(t)$ et la déformation $\varepsilon(t)$, qui sont tous deux pris en fonction du temps t. La loi de Newton est donnée par

$$\sigma(t) = \eta D\varepsilon(t),$$

où η est la viscosité du matériau et D est la dérivée temporelle d'ordre un.

D'autre part, la loi de Hooke est donnée par

$$\sigma(t) = ED^0\varepsilon(t) = E\varepsilon(t),$$

modélise la relation contrainte-déformation pour les solides élastiques où E est le module d'élasticité du matériau et D^0 est la dérivée temporelle d'ordre zéro (le symbole $D^0 = I$ a été utilisé pour montrer la similitude entre les deux lois).

Considérons maintenant une expérience dans laquelle la déformation est manipulée d'une manière contrôlée de telle sorte que, par exemple, $\varepsilon(t) = t$ pour $t \in [0, T]$ avec un certain $T > 0$. Il s'ensuit que la contrainte se comporte comme

$$\sigma(t) = Et,$$

dans le cas d'un solide élastique et

$$\sigma(t) = \eta = cst,$$

pour un liquide visqueux.

Nous pouvons résumer ces équations dans la forme suivante

$$\psi_k = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} t^k,$$

où $\psi_0 = E$ et $\psi_1 = \eta$. Évidemment le cas $k = 0$ correspond à la loi de Hooke pour les solides et $k = 1$ se réfère à la loi de Newton pour les liquides.

En pratique, il n'est pas rare de trouver des matériaux dits viscoélastiques qui présentent un comportement entre le liquide pur visqueux et le solide purement élastique. Toutefois, différents matériaux tels que des polymères, ainsi que l'aluminium ont des caractéristiques intermédiaires entre l'élasticité et la viscosité. Ainsi, en s'inspirant des lois de Hooke et Newton, et avec l'opérateur de dérivation fractionnaire, Nutting proposa la loi suivante

$$\sigma(t) = vD^{\alpha}\varepsilon(t), \tag{2.2.12}$$

où v est une constante dépendante du matériau utilisé et D^{α} est la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in (0, 1)$. La relation (2.2.12) est souvent appelée loi de Nutting.

2.3 Calcul fractionnaire

Dans cette section, on introduit des définitions concernant le calcul fractionnaire.

2.3.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.3.1 *[23] Les intégrales fractionnaires (à gauche et à droite) de Riemann-Liouville de la fonction $f \in L^1[a, b]$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sont définis par*

$$I_{a^+}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \quad x > a, \tag{2.3.13}$$

et

$$I_{b^-}^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \quad x < b, \tag{2.3.14}$$

respectivement. Pour $\alpha = 0$, *on a*

$$I_{a^+}^{\alpha} = I_{b^-}^{\alpha} = I \quad \text{(l'opérateur identité).}$$

Remarque 2.3.1 *Lorsque* $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, $I_{a^+}^{\alpha}$ *et* $I_{b^-}^{\alpha}$ *coïncident avec l'intégrale itérée* $n-$*fois de la forme :*

$$\begin{aligned}
\left(I_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left(I_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^{b} dt_2 ... \int_{t_{n-1}}^{b} f(t_n)\, dt_n \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (x-t)^{n-1} f(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.2 *Dans la suite, nous allons utiliser uniquement l'intégrale fractionnaire (à gauche). Pour simplifier, nous écrivons* I_a^{α} *au lieu de* $I_{a^+}^{\alpha}$, *et dans le cas où* $a = 0$ *l'intégrale fractionnaire sera noté tout simplement* I^{α}

Exemple 2.3.1 *Soit* $f(t) = (t-a)^{\mu}$ *ou* $\mu > -1$, *alors*

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{(s-a)^{\mu}}{(t-s)^{1-\alpha}} ds.
\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $s = a + (t-a)\,x$, *on obtient,*

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha} f(t) &= \frac{(t-a)^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\mu} dx \\
&= \frac{(t-a)^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \mu+1) \\
&= \frac{(t-a)^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\alpha)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$I_a^{\alpha}(t-a)^{\mu}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\alpha)}(t-a)^{\mu+\alpha}.$$

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe:

Théorème 2.3.1 *[23] Soit $\alpha,\beta>0$, alors pour toute $f\in L^1[a,b]$ on a*

$$I_a^{\alpha}I_a^{\beta}f(t)=I_a^{\alpha+\beta}f(t)=I_a^{\beta}I_a^{\alpha}f(t), \tag{2.3.15}$$

pour presque tout $t\in[a,b]$.

Preuve. Soit $f\in L^1[a,b]$, on a :

$$I_a^{\alpha}I_a^{\beta}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}\int_a^s(s-\tau)^{\beta-1}f(\tau)\,d\tau ds,$$

par le théorème de Fubini on arrive à :

$$I_a^{\alpha}I_a^{\beta}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)\int_\tau^t(t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}\,dsd\tau,$$

On utilise le changement de variable $s=\tau+z(t-\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned}I_a^{\alpha}I_a^{\beta}f(t)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1(1-z)^{\alpha-1}z^{\beta-1}dzd\tau\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}d\tau\\&=I_a^{\alpha+\beta}f(t),\end{aligned}$$

presque partout sur $[a,b]$. ■

2.3.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.3.2 *[23] Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n-1 \leq \alpha < n$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f est définie par :*

$$D_a^\alpha f(t) := D^n I_a^{n-\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds,\ t > a, \quad (2.3.16)$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

Remarque 2.3.3 *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante non nulle est différente de zéro. En effet, pour $0 < \alpha < 1$ et c une constante, on a*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha c &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha}\, ds,\ t > a, \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Exemple 2.3.2 *Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ avec $\beta > -1$ et $\alpha \geq 0$ pour $n-1 \leq \alpha < n$, alors*

$$D_a^\alpha f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n (t-a)^{n-\alpha+\beta},$$

Il s'ensuit alors que, si $(\alpha-\beta) \in \{1,2,...,n\}$, alors

$$D_a^\alpha f(t) = D^n (t-a)^{\alpha-j} = 0, \quad j \in \{1,2,...,n\},$$

et si $(\alpha-\beta) \notin \{1,2,...,n\}$, on trouve

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha},\ a < t < b.$$

Le lemme suivant montre que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est l'inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire :

Lemme 2.3.1 *[23] Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a,b]$, alors on a*

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t),$$

pour presque tout $t \in [a,b]$.

Preuve. Utilisant le Théorème (2.3.1), on trouve

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(t) = D^n I_a^n f(t) = f(t),$$

presque partout sur $[a,b]$. ■

Une condition suffisante pour l'existence de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée par le résultat suivant:

Lemme 2.3.2 *[23] Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire $D_a^\alpha f$ existe presque partout sur $[a,b]$, en plus elle est donnée par*

$$D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds.$$

2.3.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 2.3.3 *[23] La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ pour une fonction f est définie par*

$$^cD_a^\alpha f(t) := I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds, \tag{2.3.17}$$

avec $n = [\alpha] + 1$ où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.

Exemple 2.3.3 *Soit $f(t) = (t-a)^\mu$ ou $\mu > 0$, alors pour $0 < \alpha \leq 1$ on a*

$$\begin{aligned} ^cD_a^\alpha f(t) &:= I_a^{1-\alpha} f'(t) := \mu I_a^{1-\alpha} (t-a)^{\mu-1} \\ &:= \frac{\mu}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} (s-a)^{\mu-1}\, ds,\ t > a. \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $s = a + (t-a)\,x$, on obtient,

$$\begin{aligned} {}^{c}D_{a}^{\alpha} f(t) &= \frac{\mu}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha+\mu} \int_{0}^{1} x^{\mu-1} (1-x)^{-\alpha}\, dx \\ &= \frac{\mu}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha+\mu} \beta(\mu, 1-\alpha). \end{aligned}$$

Par conséquent

$${}^{c}D_{a}^{\alpha} f(t) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(1-\alpha+\mu)} (t-a)^{-\alpha+\mu}.$$

Remarque 2.3.4 *Contrairement à la dérivée de Riemann-Liouville, la dérivée de Caputo d'une fonction constante non nulle est nulle.*

La relation entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée de Caputo sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.3.2 *[23] Soient $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $n-1$ dérivées en a et si $D^{\alpha} f$ existe, alors :*

$${}^{c}D_{a}^{\alpha} f(t) = D_{a}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k} \right], \tag{2.3.18}$$

pour presque tout $x \in [a, b]$.

Preuve. d'après la définition de la dérivée Riemann-Liouville on a :

$$\begin{aligned} & D_{a}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k} \right] \\ &= D^{n} I_{a}^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k} \right] \\ &= \frac{d^{n}}{dt^{n}} \int_{a}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^{k} \right] ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie :

$$\begin{aligned}
&I_a^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]\\
&=\int_a^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(s)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right]ds\\
&=\frac{-1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[f(s)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right]_{s=a}^{s=t}\\
&+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t(t-s)^{n-\alpha}\left[Df(s)-D\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right],
\end{aligned}$$

où

$$I_a^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]=I_a^{n-\alpha+1}D\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right],$$

poursuivre de la même manière $n-$fois, on obtient:

$$\begin{aligned}
&I_a^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]\\
&=I_a^{n-\alpha+n}D^n\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]\\
&=I_a^nI_a^{n-\alpha}D^n\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right],
\end{aligned}$$

or $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k$ est un polynôme d'ordre $n-1$, on obtient donc :

$$I_a^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]=I_a^nI_a^{n-\alpha}D^nf(t),$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha\left[f(t)-\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]&=D^nI_a^nI_a^{n-\alpha}D^nf(t)\\
&=I_a^{n-\alpha}D^nf(t)\\
&={}^cD_a^\alpha,
\end{aligned}$$

pour presque tout $x\in[a,b]$. ■

Remarque 2.3.5 *Pour* $0 < \alpha < 1$, *la relation* (2.3.18) *devient*

$$ {}^{c}D_{a}^{\alpha} f(t) = D_{a}^{\alpha} [f(t) - f(a)] . \tag{2.3.19} $$

La dérivée fractionnaire de Caputo est l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville:

Théorème 2.3.3 *[23] Si* $f \in C[a,b]$ *et si* $\alpha > 0$ $(n-1 < \alpha \leq n)$, *alors*

$$ {}^{c}D_{a}^{\alpha} I_{a}^{\alpha} f(t) = f(t) . \tag{2.3.20} $$

Le théorème suivant nous montre que la dérivée de Caputo n'est pas l'inverse à droite de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville:

Théorème 2.3.4 *[23] Si* $f \in AC^{n}[a,b]$ *et si* $\alpha > 0$ $(n-1 < \alpha \leq n)$, *alors*

$$ I_{a}^{\alpha c} D_{a}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k} ; \quad \forall t \in [a,b]. \tag{2.3.21} $$

CHAPITRE 3

Systèmes d'équations différentielles fractionnaires à retards constants

3.1 Introduction

Ce chapitre fait l'objet de l'étude du système d'équations différentielles fractionnaires à retards constants de la forme suivante

$$^{c}D^{\alpha}x_{j}\left(t\right)=f_{j}\left(t,x_{j}\left(t\right),x_{1}\left(t-\tau_{1}\right),...,x_{n}\left(t-\tau_{n}\right)\right),\qquad j=1,2,...,n,\quad t\geq0. \tag{3.1.1}$$

avec la condition

$$x\left(t\right)=\Phi\left(t\right)\geq0,\quad t\in[-\tau,0], \tag{3.1.2}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha\in(0,1)$, $x\left(t\right)=\left(x_{1}\left(t\right),...,x_{n}\left(t\right)\right)'$, où $'$ désigne la transposée du vecteur et $f_{j}:\mathbb{R}^{+}\times C^{n+1}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ sont continues où $C=C\left([-\tau,\infty],\mathbb{R}^{+}\right)$. $\Phi\left(t\right)=\left(\phi_{1}\left(t\right),...,\phi_{n}\left(t\right)\right)'$ est un vecteur donné, tel que $\phi_{i}\left(t\right)\in C\left([-\tau,0],\mathbb{R}^{+}\right)$ l'espace des fonctions continue de $[-\tau,0]$ dans $\mathbb{R}^{+}$, $\tau=\max\tau_{j}$, où $\tau_{j}\geq0$, $j=1,2,...,n$, $n\in\mathbb{N}$, sont des constantes.

Ce problème est motivé par le travail de Ye et al. [43]. Ils ont étudié le problème d'équation différentielle fractionnaire non linéaire suivant

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left[x\left(t\right)-x\left(0\right)\right]=x\left(t\right)f\left(t,x_{t}\right) & , \quad t\in(0,T],\ T<\infty, \\ x\left(t\right)=\phi\left(t\right)\geq 0 & , \quad t\in\left[-r,0\right], \end{cases} \tag{3.1.3}$$

où D^{α} est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha\in(0,1)$; ϕ et f sont continues. En utilisant la méthode de sous et sur solution, ils ont donné des conditions suffisantes de l'existence de solutions positives. Ils ont montré également l'unicité de la solution, en appliquant le théorème du point fixe de Banach.

Dans notre travail, nous étendons ce résultat au système d'équations généralisant celle de (3.1.3). Nous étudions, dans un premier temps, l'existence de la solution positive du problème (3.1.1)-(3.1.2). Nous traitons ensuite l'unicité de la solution positive. L'intervalle étant infini (ce qui correspond à prendre $T=\infty$), nos résultats sont globaux. Par ailleurs, le caractère infini de l'intervalle nous amène à considérer un espace fonctionnel dont la norme est pondérée par une fonction bien choisie.

3.2 Existence de solution positive

Dans cette section, nous démontrons l'existence d'une solution globale positive. Tout d'abord, nous allons présenter dans le lemme suivant l'équivalence entre le problème (3.1.1)-(3.1.2) et une équation intégrale.

Lemme 3.2.1 *Le problème (3.1.1)-(3.1.2) est équivalent avec*

$$x_{j}\left(t\right)=\phi_{j}\left(0\right)+I^{\alpha}f_{j}\left(t,x_{j}\left(t\right),x_{1}\left(t-\tau_{1}\right),...,x_{n}\left(t-\tau_{n}\right)\right).$$

Preuve. Pour $t > 0$, l'équation (3.1.1) peut s'écrire comme

$$I^{1-\alpha} D x_j(t) = f_j(t, x_j(t), x_1(t-\tau_1), ..., x_n(t-\tau_n)).$$

Appliquant l'opérateur I^α sur les deux côtés,

$$I D x_j(t) = I^\alpha f_j(t, x_j(t), x_1(t-\tau_1), ..., x_n(t-\tau_n)).$$
$$x_j(t) - x_j(0) = I^\alpha f_j(t, x_j(t), x_1(t-\tau_1), ..., x_n(t-\tau_n)).$$

Alors

$$x_j(t) = \phi_j(0) + I^\alpha f_j(t, x_j(t), x_1(t-\tau_1), ..., x_n(t-\tau_n)).$$

■

Maintenant, nous définissons l'espace E sur lequel nous cherchons la solution du problème.

Soit $E = [C([-\tau, \infty), \mathbb{R}^+)]^n$ la classe de toutes les fonctions $n-$vecteurs colonnes continues avec la norme

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{n} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-Nt} |x_j(t)| \right\}, \ x \in E.$$

$(E, \|.\|)$ est un espace de Banach. En effet, soit $(u_n) \subset E$ une suite de Cauchy. Nous allons montrer que $u_n \to u \subset E$:

$$e^{-Nt} \left| u_n^j(t) - u^j(t) \right| \leq \left| u_n^j(t) - u^j(t) \right|,$$

donc

$$\sum_{j=1}^{n} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-Nt} \left| u_n^j(t) - u^j(t) \right| \right\} \leq \sum_{j=1}^{n} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left| u_n^j(t) - u^j(t) \right|,$$

il s'ensuit que

$$\|u_n - u\| \leq \|u_n - u\|_\infty$$

Comme $(E, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach, donc $\|u_n - u\|_\infty < \varepsilon$. Par conséquent

$$\|u_n - u\| < \varepsilon.$$

Soit le cône K donné par

$$K = \{x \in E : x_j(t) \geq 0,\ t \geq -\tau, \quad j = 1, 2, ..., n\}.$$

Et soit

$$D = \{x \in K : x(t) = \Phi(t), -\tau \leq t \leq 0\} \subset K.$$

Nous définissons l'opérateur intégral F par

$$Fx_j = \begin{cases} \phi_j(t), & t \in [-\tau, 0] \\ \phi_j(0) + I^\alpha f_j(t, x_j(t), x_1(t - \tau_1), ..., x_n(t - \tau_n)), & t > 0 \end{cases}, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{3.2.4}$$

Nous proposons les hypothèses suivantes :

(H_1) Il existe $g_j, \psi_{ij} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continues, telle que

$$f_j(t, u_j, v_1, ..., v_n) \leq g_j(u_j) + \sum_{i=1}^{n} \psi_{ij}(v_i) \qquad \text{pour} \quad j = 1, 2, ..., n.$$

(H_2) $\forall\ A,\ \exists\ B_i, B_i' : g_i(A) \subset B_i$ et $\psi_{ij}(A) \subset B_i'$, où A, B_i et B_i' sont des sous-ensembles bornés dans D pour $i = 1, 2, ..., n$.

Pour prouver nos principaux résultats, nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme 3.2.2 *Supposons que les hypothèses* $(H_1), (H_2)$ *sont vérifiées, Alors l'opérateur* $F : D \to D$ *est complètement continu.*

Preuve. L'opérateur $F : D \to D$ est continu, en vue de l'hypothèse de la positivité et la continuité de f.

Soit $G \subset D$ borné, c'est à dire il existe une constante l positif tel que $\|x\| \le l$, $\forall x \in G$.

Pour chaque $x \in G$, Compte tenu de l'hypothèse (H_1) on a pour $j = 1, 2, ..., n$:

$$\begin{aligned}
|Fx_j(t)| &\le |\phi_j(0)| + \textstyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_j(s, x_j(s), x_1(s-\tau_1), ..., x_n(s-\tau_n))| \, ds \\
&\le |\phi_j(0)| + \textstyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |g_j(x_j(s))| \, ds \\
&+ \textstyle\sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |\psi_{ij}(x_i(s-\tau_i))| \, ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
e^{-Nt}|Fx_j(t)| &\le e^{-Nt}|\phi_j(0)| + \textstyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} |g_j(x_j(s))| \, ds + \\
&+ \textstyle\sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s+\tau_i)} e^{-N(s-\tau_i)} |\psi_{ij}(x_i(s-\tau_i))| \, ds \\
&\le \|\phi\| + \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |g_j(x_j(\xi))|\} \textstyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} ds + \\
&+ \textstyle\sum_{i=1}^n \int_{-\tau_i}^{t-\tau_i} \frac{(t-\theta-\tau_i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-\theta)} e^{-N\theta} |\psi_{ij}(x_i(\theta))| \, d\theta \\
&\le \|\phi\| + \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |g_j(x_j(\xi))|\} \textstyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} ds + \\
&+ \textstyle\sum_{i=1}^n \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \{e^{-N\xi} |\psi_{ij}(x_i(\xi))|\} \int_{-\tau_i}^{t-\tau_i} \frac{(t-\theta-\tau_i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-\theta)} d\theta.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H_2), il existe $L_j, L_i^{'}$ tel que $L_j = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\{e^{-N\xi}\left|g_j\left(x_j\left(\xi\right)\right)\right|\}$, $\quad L_i^{'} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\{e^{-N\xi}\left|\psi_{ij}\left(x_i\left(\xi\right)\right)\right|\}$, $\forall j$ et en effectuant le changement de variable $u = N\left(t-s\right)$ on aura

$$\begin{aligned}
e^{-Nt}\left|Fx_i\left(t\right)\right| &\leq \|\phi\| + L_j\int_0^{Nt}\frac{u^{\alpha-1}}{N^\alpha\Gamma(\alpha)}e^{-u}du \\
&+ \sum_{i=1}^n L_i^{'}\int_0^{Nt}\frac{u^{\alpha-1}}{N^\alpha\Gamma(\alpha)}e^{-u}e^{-N\tau_i}du.
\end{aligned}$$

Donc

$$e^{-Nt}\left|Fx_i\left(t\right)\right| \leq l + \frac{L_j+\sum_{i=1}^n e^{-N\tau_i}L_i^{\prime}}{N^\alpha}.$$

Ainsi FG est borné.

Ensuite, nous allons montrer que FG est localement équicontinue. Il y a trois cas possibles pour $j = 1, 2, ..., n$:

Cas 1. Pour chaque $x \in G$, $\epsilon_j > 0, \forall T \in [0, \infty)$, $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$. Soit $\delta_j = \left(\frac{\epsilon_j\Gamma(\alpha+1)}{2\left(c_j+\sum_{i=1}^n c_i^{\prime}\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, puis quand $t_2 - t_1 < \delta_j$, on a:

$$|Fx_j(t_1) - Fx_j(t_2)|$$

$$\leq \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_j(s, x_j(s), x_1(s-\tau_1), ..., x_n(s-\tau_n))| \, ds$$

$$- \int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_j(s, x_j(s), x_1(s-\tau_1), ..., x_n(s-\tau_n))| \, ds$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_j(s, x_j(s), x_1(s-\tau_1), ..., x_n(s-\tau_n))| \, ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left((t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}\right) \left|g_j(x_j(s)) + \sum_{i=1}^n \psi_{ij}(x_i(s-\tau_i))\right| ds +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|g_j(x_j(s)) + \sum_{i=1}^n \psi_{ij}(x_i(s-\tau_i))\right| ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left((t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}\right) \left\{|g_j(x_j(s))| + \left|\sum_{i=1}^n \psi_{ij}(x_i(s-\tau_i))\right|\right\} ds +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left\{|g_j(x_j(s))| + \left|\sum_{i=1}^n \psi_{ij}(x_i(s-\tau_i))\right|\right\} ds.$$

$\exists l > 0$ tel que pour $x \in G$, $\|x\| \leq l$, alors $|x_j(t)| \leq le^{Nt} \leq le^{NT}$. En effet, le sous-ensemble $X = \{x(t), \ t \in [0,T], \ x \in G\}$ est un sous-ensemble borné fermé. Donc g_i, ψ_{ij} ont un maximum sur X. Par conséquent, $\exists \ c_i, c_i'$: $c_i = \sup_{t\in[0,T]} |g_i(x_i(t))|$, $c_i' = \sup_{t\in[0,T]} |\psi_{ij}(x_i(t-\tau_i))|$, $\forall j, i = 1, 2, ..., n$. Alors

$$\begin{aligned}
&\left|Fx_j\left(t_1\right)-Fx_j\left(t_2\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left(\left(t_1-s\right)^{\alpha-1}-\left(t_2-s\right)^{\alpha-1}\right)\left(c_j+\textstyle\sum_{i=1}^n c_i'\right)ds+ \\
+\ & \int_{t_1}^{t_2}\tfrac{\left(t_2-s\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(c_j+\textstyle\sum_{i=1}^n c_i'\right)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \tfrac{c_j+\sum_{i=1}^n c_i'}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int_0^{t_1}\left(\left(t_1-s\right)^{\alpha-1}-\left(t_2-s\right)^{\alpha-1}\right)ds+\int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha-1}ds\right\} \\
\leq\ & \tfrac{c_j+\sum_{i=1}^n c_i'}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left\{\left(t_2-t_1\right)^{\alpha}+t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}+\left(t_2-t_1\right)^{\alpha}\right\} \\
<\ & 2\tfrac{c_j+\sum_{i=1}^n c_i'}{\Gamma(\alpha+1)}\left(t_2-t_1\right)^{\alpha}<2\tfrac{c_j+\sum_{i=1}^n c_i'}{\Gamma(\alpha+1)}\delta_j^{\alpha}=\epsilon_j.
\end{aligned}$$

Cas 2. Pour chaque $x\in G$, $\epsilon_j>0$, $t_1\in[-\tau,0]$, $t_2\in[0,T],\forall T\in[0,\infty)$. Puisque $\phi_j\in C[-\tau,0]$, $\exists\delta':\left|\phi_j\left(t_1\right)-\phi_j\left(0\right)\right|<\frac{\epsilon_j}{2}$ quand $0-\ t_1<\delta'$. Quand $t_2-t_1<\delta_j$, $\delta_j=\min\left(\delta',\left(\frac{\epsilon_j\Gamma(\alpha+1)}{2\left(c_j+\sum_{i=1}^n c_i'\right)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, on a:

$$\begin{aligned}
&\left|Fx_j\left(t_1\right)-Fx_j\left(t_2\right)\right| \\
\leq\ & \left|\phi_j\left(t_1\right)-\phi_j\left(0\right)\right|+\int_0^{t_2}\tfrac{\left(t_2-s\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left|f_j\left(s,x_j\left(s\right),x_1\left(s-\tau_1\right),...,x_n\left(s-\tau_n\right)\right)\right|ds \\
\leq\ & \tfrac{\epsilon_j}{2}+\int_0^{t_2}\tfrac{\left(t_2-s\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left\{\left|g_j\left(x_j\left(s\right)\right)\right|+\textstyle\sum_{i=1}^n\left|\psi_{ij}\left(x_i\left(s-\tau_i\right)\right)\right|\right\}ds \\
<\ & \tfrac{\epsilon_j}{2}+\tfrac{c_j+\sum_{i=1}^n c_i'}{\alpha\Gamma(\alpha)}t_2^{\alpha} \\
<\ & \tfrac{\epsilon_j}{2}+\tfrac{c_j+\sum_{i=1}^n c_i'}{\Gamma(\alpha+1)}\delta_j^{\alpha}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$|Fx_j(t_1) - Fx_j(t_2)| \quad < \quad \tfrac{\epsilon_j}{2} + \tfrac{\epsilon_j}{2} = \epsilon_j.$$

Cas 3. Pour chaque $x \in G$, $\epsilon_j > 0$, $t_1, t_2 \in [-\tau, 0]$. En fait, par continuité de ϕ_j, quand $t_2 - t_1 < \delta_j$, on a

$$|Fx_j(t_1) - Fx_j(t_2)| = |\phi_j(t_1) - \phi_j(t_2)| < \epsilon_j.$$

Par conséquent, FG est équicontinue dans chaque intervalle borné. Nous appelons maintenant le Théorème (1.3.4) pour conclure que FG est relativement compact. Par conséquent, l'opérateur F est complètement continu. Ceci achève la preuve. ■

Dans la définition suivante, nous introduisons la définition de sous et sur solutions de l'équation (3.1.1).

Définition 3.2.1 *La fonction $u \in E$ est appelée sous solution du problème* (3.1.1)-(3.1.2) *si*

$${}^cD^\alpha u_j(t) \leq f_j(t, u_j(t), u_1(t-\tau_1) ..., u_n(t-\tau_n)), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

et

$$u(t) \leq \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0]$$

De même, la fonction $v \in E$ est appelée sur solution du problème (3.1.1)-(3.1.2) *si*

$${}^cD^\alpha v_j(t) \geq f_j(t, v_j(t), v_1(t-\tau_1) ..., v_n(t-\tau_n)), \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n,$$

et

$$v(t) \geq \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0].$$

Si les inégalités sont strictes, $u(t), v(t)$ *sont appelées sous et sur solutions strictes.*

Suite à cette définition, nous donnons le résultat d'existence pour le problème $(3.1.1)$-$(3.1.2)$.

Théorème 3.2.1 *Supposons que les hypothèses* $(H_1) - (H_2)$ *sont vérifiées, et Supposons:*

(H_3) *Pour* $j = 1, 2, ..., n : f_j : \mathbb{R}^+ \times [C([-\tau, \infty), \mathbb{R}^+)]^{n+1} \to \mathbb{R}^+$ *est une fonction continue et croissante pour chaque* $t \in [0, \infty)$.

(H_4) $u_0 = (u_0^1, ..., u_0^n)', v_0 = (v_0^1, ..., v_0^n)'$ *sont respectivement des sous et sur solutions du problème* $(3.1.1)$-$(3.1.2)$, *satisfont* $u_0(t) \leq v_0(t)$, $t \in [0, \infty)$, $u_0, v_0 \in D$.

Alors le problème $(3.1.1)$-$(3.1.2)$ *a au moins une solution positive globale.*

Preuve. Par le Lemme (3.2.2), on a $F : D \to D$ est complètement continue. Et par (3.2.4), u_0^i, v_0^i sont respectivement des sous et sur solutions de F. Par (H_3), $x, y \in D$, $x \leq y$, on a pour $j = 1, 2, ..., n$:

$$\begin{aligned} Fx_j(t) &= x_j(0) + I^\alpha f_j(t, x_j(t), x_1(t-\tau_1), ..., x_n(t-\tau_n)) \\ &\leq y_j(0) + I^\alpha f_j(t, y_j(t), y_1(t-\tau_1), ..., y_n(t-\tau_n)) \\ &\leq Fy_j(t). \end{aligned}$$

D'où F est un opérateur croissant. Il est clair que, pour $i = 1, 2, ..., n$: $Fu_0^i \geq u_0^i$, $Fv_0^i \leq v_0^i$ par la définition de sous et sur solutions de F. Ainsi, $F : \langle u_0, v_0 \rangle \to \langle u_0, v_0 \rangle$ est un opérateur continu compact. Comme K est un cône normal, d'après le Théorème (1.3.1), F a un point fixe $x \in \langle u_0, v_0 \rangle$. ■

Voici un autre résultat d'existence pour le problème $(3.1.1)$-$(3.1.2)$.

Théorème 3.2.2 *Supposons que les hypothèses* $(H_1)-(H_3)$ *sont vérifiées, et Supposons:*

(H_5) *Il existe une fonction* $H(t)=(h_1(t),...,h_n(t))'$, $t\geq 0$ *positive, telle que*

$$f_j(t,x_j(t),x_1(t-\tau_1),...,x_n(t-\tau_n))\leq h_j(t), \qquad t\geq 0.$$

où $\forall\ t\geq 0$: $\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h_j(s)\,ds<\infty$. *Alors le problème* (3.1.1)-(3.1.2) *a au moins une solution positive globale.*

Preuve. Considérons le problème

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u_0^i(t)=0, & t\geq 0 \\ u_0^i(t)=\phi_i(t), & -\tau\leq t\leq 0 \end{cases}, \ i=1,2,...,n. \tag{3.2.5}$$

Évidemment, l'équation ${}^cD^\alpha u_0^i(t)=0$ a une solution $u_0^i(t)=\phi_i(0)$, $t\geq 0$, $i=1,2,...,n$, qui est une sous solution du problème (3.1.1)-(3.1.2). De même, considérons le problème

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha v_0^i(t)=h_i(t)\geq f_i(t,x_i(t),x_1(t-\tau_1),...,x_n(t-\tau_n)), & t\geq 0 \\ v_0^i(t)=\phi_i(t), \quad -\tau\leq t\leq 0 & \end{cases}, \ i=1,2,...,n.$$

On a

$$v_0^i(t)=\phi_i(0)+\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h_i(s)\,ds, \quad t\geq 0$$

est une sur solution du problème (3.1.1)-(3.1.2), et $u_0^i(t)\leq v_0^i(t)$. D'après le Théorème (3.2.1), le problème (3.1.1)-(3.1.2) a au moins une solution positive.

■

3.3 Unicité de la solution

Dans cette section, nous discutons l'unicité de la solution.

Théorème 3.3.1 *Soient* $f_j : \mathbb{R}^+ \times [C([-\tau,\infty),\mathbb{R}^+)]^{n+1} \to \mathbb{R}^+$ *continues et satisfont la condition de Lipschitz pour* $j = 1, 2, ..., n$*:*

$$\begin{aligned}&|f_j(t, u_j, u_1, ..., u_n) - f_j(t, v_j, v_1, ..., v_n)| \\ &\leq l_j |u_j - v_j| + \sum\nolimits_{i=1}^{n} k_{ij} |u_i - v_i|, \ j = 1, 2, ..., n.\end{aligned}$$

Alors le problème (3.1.1)-(3.1.2) *a une unique solution globale positive.*

Preuve. Soient $u, v \in D$, Alors:

$$|Fu_j(t) - Fv_j(t)|$$

$$\begin{aligned}&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \times \\ &\times |f_j(s, u_j(s), u_1(s-\tau_1), ..., u_n(s-\tau_n)) - f_j(s, v_j(s), v_1(s-\tau_1), ..., v_n(s-\tau_n))|\, ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left\{ l_j |u_j(s) - v_j(s)| + \sum_{i=1}^{n} k_{ij} |u_i(s-\tau_i) - v_i(s-\tau_i)| \right\} ds \\ &\leq l_j \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |u_j(s) - v_j(s)|\, ds + \sum_{i=1}^{n} k_{ij} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |u_i(s-\tau_i) - v_i(s-\tau_i)|\, ds.\end{aligned}$$

Soient $l = \sum\limits_{j=1}^{n} |l_j|$, $k = \sum\limits_{j=1}^{n} |k_j| = \sum\limits_{j=1}^{n} \max_{\forall i} |k_{ij}|$. Alors

$$e^{-Nt} |Fu_j(t) - Fv_j(t)|$$

$$\begin{aligned}\leq \quad & l_j \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} |u_j(s) - v_j(s)|\, ds + \\ + \quad & k_j \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s+\tau_i)} e^{-N(s-\tau_i)} |u_i(s-\tau_i) - v_i(s-\tau_i)|\, ds.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \; l_j \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|u_j(\xi)-v_j(\xi)\right|\right\}\int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-N(t-s)}ds+\\
&+ \; k_j\sum_{i=1}^{n}\int_{-\tau_i}^{t-\tau_i}\tfrac{(t-\theta-\tau_i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-N(t-\theta)}e^{-N\theta}\left|u_i(\theta)-v_i(\theta)\right|d\theta\\
&\leq \; l_j \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|u_j(\xi)-v_j(\xi)\right|\right\}\int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-N(t-s)}ds+\\
&+ \; \sum_{i=1}^{n}k_i\sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|u_i(\xi)-v_i(\xi)\right|\right\}\int_{-\tau_i}^{t-\tau_i}\tfrac{(t-\theta-\tau_i)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-N(t-\theta)}d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \; l_j \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|u_j(\xi)-v_j(\xi)\right|\right\}\tfrac{1}{N^\alpha}\int_0^{Nt}\tfrac{u^{\alpha-1}e^{-u}}{\Gamma(\alpha)}du+\\
&+ \; k_j\sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|u_i(\xi)-v_i(\xi)\right|\right\}\tfrac{e^{-N\tau_i}}{N^\alpha}\int_0^{Nt}\tfrac{u^{\alpha-1}e^{-u}}{\Gamma(\alpha)}du\\
&\leq \; \tfrac{l_j}{N^\alpha}\left\|u-v\right\|+k_j\sum_{i=1}^{n}\tfrac{e^{-N\tau_i}}{N^\alpha}\left\|u-v\right\|\\
&\leq \; \tfrac{l_j+k_j\sum_{i=1}^{n}e^{-N\tau_i}}{N^\alpha}\left\|u-v\right\|
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left\|Fu-Fv\right\| &= \sum_{j=1}^{n}\sup_{t\in\mathbb{R}^+}e^{-Nt}\left|Fu_j(t)-Fv_j(t)\right|\\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\tfrac{l_j+k_j\sum_{i=1}^{n}e^{-N\tau_i}}{N^\alpha}\left\|u-v\right\|\\
&\leq \tfrac{l+k\sum_{i=1}^{n}e^{-N\tau_i}}{N^\alpha}\left\|u-v\right\|
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|Fu - Fv\| \leq \frac{l + k\sum_{i=1}^{n} e^{-N\tau_i}}{N^\alpha} \|u - v\| .$$

Nous choisissons N assez grand de telle sorte $\frac{l+k\sum_{i=1}^{n} e^{-N\tau_i}}{N^\alpha} < 1$. Alors, d'après le théorème de point fixe de Banach, F a un point fixe unique dans D, qui est l'unique solution positive. ■

3.4 Exemples

Exemple 3.4.1 *Considérons le problème*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x_j(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i(t - \tau_i), & t \geq 0 \\ x(t) = \Phi(t) \geq 0, & -\tau \leq t \leq 0 \end{cases}, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{3.4.6}$$

où $A = (a_{ji})_{n \times n}$ est une matrice donnée. Les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ sont vérifiées, alors d'après le Théorème (3.2.1), le problème (3.4.6) a au moins une solution positive. En outre, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i(t - \tau_i)$ satisfait la condition de Lipschitz , alors d'après le Théorème (3.3.1) le problème (3.4.6)a une unique solution globale positive.

Exemple 3.4.2 *Considérons le problème*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x_j(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_j^2(t-\tau_k)}{1+x_j^2(t-\tau_k)}, & t \geq 0 \\ x(t) = \Phi(t) \geq 0, & -\tau \leq t \leq 0 \end{cases}, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{3.4.7}$$

Les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ sont vérifiées, alors d'après le Théorème (3.2.1), le problème (3.4.7) a au moins une solution globale positive.

CHAPITRE 4

Systèmes d'équations différentielles fractionnaires à retards variables

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du système d'équations différentielles fractionnaires à retards variables.

Dans [11], El Sayed et Gaafar ont considéré le système différentiel fractionnaire non linéaire à retards constants

$$\begin{cases} D^{\alpha}x_i(t) = f_i(t, x_1(t), ..., x_n(t)) + g_i(t, x_1(t-r_1), ..., x_n(t-r_n)), \quad t \in (0,T], T < \infty \\ x(t) = \Phi(t) \quad \text{pour } t < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0^-} \Phi(t) = O \\ I^{1-\alpha}x(t)\,|_{t=0} = O, \end{cases}$$

où D^{α} est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0,1)$. Ils ont établi des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution unique dans un intervalle borné en utilisant des théorèmes de point fixe. En outre, ils ont démontré la stabilité de la solution.

Dans [14], Gao et al. ont étendu cette étude à une classe d'équations différentielles fractionnaire non linéaires avec retards constants sur un intervalle infini

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) f(t, x(t), x(t-\tau_j)), & t > 0, \\ x(t) = \phi(t) \quad \text{pour } t < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0^-} \phi(t) = 0, \\ I^{1-\alpha}x(t)\,|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Alors que les travaux précédents, et la plupart des travaux existants, se concentrent sur l'étude des problèmes à retards constants, nous nous intéressons à l'étude d'un système d'équations contenants des *retards variables*. Précisément, nous considérons le système d'équations différentielles fractionnaires à retards variables de la forme suivante:

$${}^{c}D^{\alpha}x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t-\tau_j(t))), \quad i = 1, 2, ..., n, \quad t > 0, \tag{4.1.1}$$

avec la condition

$$x(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{4.1.2}$$

où ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in (0,1)$, $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))'$, où $'$ désigne la transposée du vecteur et $f_{ij} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues pour $i, j = 1, 2, ..., n$, τ_j sont des fonctions à valeurs réelles continues définies sur $\mathbb{R}^+$, tels que $\tau = \max\{\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \tau_j(t) : j = 1, 2, ..., n\} > 0$, et $\Phi(t) = (\phi_1(t), ..., \phi_n(t))'$ est un vecteur de fonction définit sur $[-\tau, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Notre but est d'établir des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution au problème (4.1.1)-(4.1.2), en appliquant le principe de contraction de Banach. En outre, nous prouvons la stabilité uniforme de la solution.

Il est important de noter que nos résultats sont valables même dans le cas où les équations sont de type mixte. C'est-à-dire, des équations dont les arguments avancés et retardés. Cela fait une différence nette avec les travaux précédents (voir Remarque (4.2.1)). Ainsi, le présent travail généralise les résultats obtenus dans [11, 14].

Ce chapitre est organisé comme suit : En premier temps, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution de tel problème. Ensuite, nous montrons la stabilité uniforme de la solution du problème (4.1.1)-(4.1.2). Enfin, nous donnons quelques exemples illustratifs.

4.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, notre objectif est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.1.1)-(4.1.2) . Nous commençons par établir l'équivalence entre le problème (4.1.1)-(4.1.2) et une équation intégrale dans le lemme suivant:

Lemme 4.2.1 *La fonction vecteur* $x(t) := (x_1(t), ..., x_n(t))$ *est une solution du problème* (4.1.1)-(4.1.2) *si et seulement si*

$$x_i(t) = \begin{cases} \phi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} I^{\alpha} f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))), & t > 0 \\ \phi_i(t), \quad t \in [-\tau, 0], & i = 1, 2, ..., n \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Preuve. Pour $t > 0$ et $i = 1, 2, ..., n$, l'équation (4.1.1) peut s'écrire comme

$$I^{1-\alpha} D x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))).$$

Appliquant l'opérateur I^{α} sur les deux côtés,

$$I D x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} I^{\alpha} f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))).$$

$$x_i(t) - x_i(0) = \sum_{j=1}^{n} I^{\alpha} f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))).$$

Alors

$$x_i(t) = \phi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} I^{\alpha} f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))).$$

■

Considérons l'espace $E = [C([-\tau, +\infty), \mathbb{R})]^n$ la classe de toutes les fonctions n-vecteurs colonnes continues, muni de la norme

$$\|x\|_N = \sum_{i=1}^{n} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-Nt} |x_i(t)| \right\}, \; x \in E,$$

où $N \in \mathbb{R}^+$ sera choisi plus tard. Nous définissons l'opérateur intégral $F : E \to E$ par

$$Fx_i(t) = \begin{cases} \phi_i(0) + \sum\limits_{j=1}^{n} I^{\alpha} f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))), & t > 0 \\ \phi_i(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases}.$$

Nous énonçons maintenant le théorème principal de ce chapitre :

Théorème 4.2.1 *On suppose que:*

(H_1) Soient $f_{ij} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et satisfont la condition de Lipschitz

$$|f_{ij}(t, x_i, y_j) - f_{ij}(t, u_i, v_j)| \leq k_i |x_i - u_i| + h_j |y_j - v_j|,$$

où $k_i, h_j > 0$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

(H_2) Pour $j = 1, 2, ..., n$, $\tau_j \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$\tau_j(t) > -\tau, \quad t > 0$$

(H_3) Pour $j = 1, 2, ..., n$, $\exists t_j > 0$:

$$\begin{cases} \tau_j(t) \geq t, & \forall t \in [0, t_j] \\ \tau_j(t) < t, & \forall t \in]t_j, +\infty[\end{cases}$$

(H_4)

$$n\tau^\alpha \left[\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{n} h_j e \right] < 1,$$

alors le problème (4.1.1)-(4.1.2) *a une solution unique.*

Preuve. Soient $x, y \in E$, pour $i = 1, 2, ..., n$ on a

$$\begin{aligned} & |Fx_i(t) - Fy_i(t)| \\ = & \left| \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \{ f_{ij}(s, x_i(s), x_j(s - \tau_j(s))) - f_{ij}(s, y_i(s), y_j(s - \tau_j(s))) \} ds \right| \\ \leq & \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f_{ij}(s, x_i(s), x_j(s - \tau_j(s))) - f_{ij}(s, y_i(s), y_j(s - \tau_j(s)))| ds \end{aligned},$$

pour simplifier, nous mettons $r_j(s) = s - \tau_j(s)$. Compte tenu des hypothèses (H_1) et (H_3) on a

$$\begin{aligned} |Fx_i(t) - Fy_i(t)| & \leq \sum_{j=1}^{n} k_i \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_i(s) - y_i(s)| ds + \\ & + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_0^{t_j} \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |\phi_j(r_j(s)) - \phi_j(r_j(s))| ds \\ & + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^{t} \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_j(r_j(s)) - y_j(r_j(s))| ds \\ & \leq nk_i \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_i(s) - y_i(s)| ds + \\ & + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^{t} \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_j(r_j(s)) - y_j(r_j(s))| ds \end{aligned}.$$

D'où

$$e^{-Nt}\left|Fx_i(t)-Fy_i(t)\right|$$

$$\leq \quad nk_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns}\left|x_i(s)-y_i(s)\right| ds+$$

$$+ \quad \sum_{j=1}^n h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-r_j(s))} e^{-Nr_j(s)}\left|x_j(r_j(s))-y_j(r_j(s))\right| ds$$

$$\leq \quad nk_i \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_i(\xi)-y_i(\xi)\right|\right\} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} ds+$$

$$+ \quad \sum_{j=1}^n h_j \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-Nr_j(\xi)}\left|x_j(r_j(\xi))-y_j(r_j(\xi))\right|\right\} \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-r_j(s))} ds$$

En effectuant le changement de variable $u=N(t-s)$ on aura

$$e^{-Nt}\left|Fx_i(t)-Fy_i(t)\right|$$

$$\leq \quad nk_i \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_i(\xi)-y_i(\xi)\right|\right\} \frac{1}{N^\alpha} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha-1}e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} du+$$

$$+ \quad \sum_{j=1}^n h_j \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_j(\xi)-y_j(\xi)\right|\right\} \frac{1}{N^\alpha} \int_0^{N(t-t_j)} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-u} e^{-N\tau_j\left(t-\frac{u}{N}\right)} du$$

Compte tenu de l'hypothèse (H_2) on a

$$
\begin{aligned}
& e^{-Nt}\left|Fx_i(t)-Fy_i(t)\right| \\
\leq\ & nk_i \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_i(\xi)-y_i(\xi)\right|\right\}\tfrac{1}{N^\alpha}\textstyle\int_0^{Nt}\frac{u^{\alpha-1}e^{-u}}{\Gamma(\alpha)}du+ \\
+\ & \textstyle\sum_{j=1}^n h_j \sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_j(\xi)-y_j(\xi)\right|\right\}\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{N(t-t_j)}\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-u}e^{N\tau}du \\
\leq\ & \tfrac{nk_i}{N^\alpha}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_i(\xi)-y_i(\xi)\right|\right\}+\textstyle\sum_{j=1}^n\frac{h_je^{N\tau}}{N^\alpha}\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_j(\xi)-y_j(\xi)\right|\right\} \\
\leq\ & \tfrac{nk_i}{N^\alpha}\left\|x-y\right\|_N+\textstyle\sum_{j=1}^n\frac{h_je^{N\tau}}{N^\alpha}\left\|x-y\right\|_N.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{i=1}^n\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-Nt}\left|Fx_i(t)-Fy_i(t)\right|\right\} \\
\leq\ & \left[\textstyle\sum_{i=1}^n\frac{nk_i}{N^\alpha}+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{h_je^{N\tau}}{N^\alpha}\right]\left\|x-y\right\|_N \\
\leq\ & \tfrac{n}{N^\alpha}\left[\textstyle\sum_{i=1}^n k_i+\sum_{j=1}^n h_je^{N\tau}\right]\left\|x-y\right\|_N.
\end{aligned}
$$

On choisit $N=\frac{1}{\tau}$, on a

$$
\sum_{i=1}^n\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-Nt}\left|Fx_i(t)-Fy_i(t)\right|\right\}\leq n\tau^\alpha\left[\sum_{i=1}^n k_i+\sum_{j=1}^n h_je\right]\left\|x-y\right\|_N.
$$

De l'hypothèse (H_4) on a $n\tau^\alpha\left[\sum_{i=1}^n k_i+\sum_{j=1}^n h_je\right]<1$. Alors, $F:E\to E$ est une contraction, d'où F a un unique point fixe $x=Fx$ qui est l'unique solution du problème (4.1.1)-(4.1.2). ∎

Remarque 4.2.1 *Notons que, si pour j la fonction à retard $\tau_j(t)$ prend des valeurs négatives, ce qui est possible dans les hypothèses (H_2) et (H_3), alors* (4.1.1) *sont des équations avec des arguments avancés. Ainsi, le signe des fonctions à retard étant arbitraire, les équations du système considéré* (4.1.1) *peut contenir les deux types de déviation de l'argument c'est à dire le retard et l'avance.*

Autant que nous savons, il n'y a pas d'études publiées traitant de ces questions pour ces systèmes d'équations. Cependant, concernant les problèmes aux limites d'ordre fractionnaire, quelques résultats sur l'existence de solutions sont obtenues dans [42]. Mais dans [42], les auteurs ont considéré uniquement un argument avancé, et ils n'abordent pas la question de l'unicité (et la stabilité) de la solution.

4.3 Stabilité

Dans cette section, nous étudions la stabilité de la solution du problème (4.1.1)-(4.1.2). Tout d'abord, nous rappelons la définition de la stabilité uniforme de la solution.

Définition 4.3.1 *La solution du problème* (4.1.1)-(4.1.2) *est stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ pour toutes les deux solutions $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))'$ et $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), ..., \tilde{x}_n(t))'$ avec la condition initiale* (4.1.2) *et $\tilde{x}(t) = \widetilde{\Phi}(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]$ respectivement, on a $\left\|\Phi - \widetilde{\Phi}\right\| \leq \delta$, alors $\|x - \tilde{x}\|_N \leq \epsilon$ pour tout $t > 0$. Où $\|.\|$ est la norme supremum définit par $\|\Psi\| = \sum_{i=1}^{n} \max\limits_{t\in[-\tau,0]} |\psi_i(t)|$, pour tout vecteur de fonction bornée ψ de $[-\tau, 0]$ vers $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 4.3.1 *Supposons que les hypothèses (H_1)-(H_4) du Théorème (4.2.1) sont vérifiées, alors la solution du problème* (4.1.1)-(4.1.2) *est uniformément stable.*

Preuve. Soient $x(t)$ et $\tilde{x}(t)$ les solutions du système (4.1.1) sous les conditions (4.1.2) et $\{\tilde{x}(t) = \widetilde{\Phi}(t)$ pour $t \in [-\tau, 0]\}$ respectivement, alors pour $t > 0$, de (4.2.3), nous avons pour

$$
\begin{aligned}
& x_i(t) - \tilde{x}_i(t) \\
= \;& \phi_i(0) - \tilde{\phi}_i(0) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} I^{\alpha}\left\{f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))) - f_{ij}(t, \tilde{x}_i(t), \tilde{x}_j(t - \tau_j(t)))\right\}
\end{aligned}
$$

Compte tenu des hypothèses (H_1) et (H_3) on a

$$
\begin{aligned}
& |x_i(t) - \tilde{x}_i(t)| \\
\leq \;& \left|\phi_i(0) - \tilde{\phi}_i(0)\right| + \\
+ \;& \textstyle\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|f_{ij}(s, x_i(s), x_j(s - \tau_j(s))) - f_{ij}(s, \tilde{x}_i(s), \tilde{x}_j(s - \tau_j(s)))\right| ds \\
\leq \;& \left|\phi_i(0) - \tilde{\phi}_i(0)\right| + \textstyle\sum_{j=1}^{n} k_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_i(s) - \tilde{x}_i(s)|\, ds + \\
+ \;& \textstyle\sum_{j=1}^{n} h_j \int_0^{t_j} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|\phi_j(s - \tau_j(s)) - \tilde{\phi}_j(s - \tau_j(s))\right| ds \\
+ \;& \textstyle\sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_j(s - \tau_j(s)) - \tilde{x}_j(s - \tau_j(s))|\, ds \\
\leq \;& \max_{s\in[-\tau,0]} \left|\phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s)\right| + n k_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x_i(s) - \tilde{x}_i(s)|\, ds + \\
+ \;& \textstyle\sum_{j=1}^{n} \max_{s\in[-\tau,0]} \left|\phi_j(s) - \tilde{\phi}_j(s)\right| h_j \int_0^{t_j} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds
\end{aligned}
$$

$$+ \quad \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left| x_j \left(s - \tau_j \left(s \right) \right) - \tilde{x}_j \left(s - \tau_j \left(s \right) \right) \right| ds$$

D'où

$$\begin{aligned}
& e^{-Nt} \left| x_i \left(t \right) - \tilde{x}_i \left(t \right) \right| \\
\leq \quad & e^{-Nt} \max_{s\in[-\tau,0]} \left| \phi_i \left(s \right) - \tilde{\phi}_i \left(s \right) \right| + nk_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} \left| x_i \left(s \right) - \tilde{x}_i \left(s \right) \right| ds + \\
+ \quad & e^{-Nt} \sum_{j=1}^{n} \max_{s\in[-\tau,0]} \left| \phi_j \left(s \right) - \tilde{\phi}_j \left(s \right) \right| \frac{h_j}{\Gamma(\alpha+1)} [t^{\alpha} - (t-t_j)^{\alpha}] \\
+ \quad & \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-r_j(s))} e^{-Nr_j(s)} \left| x_j \left(r_j \left(s \right) \right) - \tilde{x}_j \left(r_j \left(s \right) \right) \right| ds \\
\leq \quad & \max_{s\in[-\tau,0]} \left| \phi_i \left(s \right) - \tilde{\phi}_i \left(s \right) \right| + \sum_{j=1}^{n} \max_{s\in[-\tau,0]} \left| \phi_j \left(s \right) - \tilde{\phi}_j \left(s \right) \right| \frac{h_j t_j^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
+ \quad & nk_i \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} \left| x_i \left(\xi \right) - \tilde{x}_i \left(\xi \right) \right| \right\} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} ds \\
+ \quad & \sum_{j=1}^{n} h_j \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+} \left\{ e^{-Nr_j(\xi)} \left| x_j \left(r_j \left(\xi \right) \right) - \tilde{x}_j \left(r_j \left(\xi \right) \right) \right| \right\} \int_{t_j}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-r_j(s))} ds
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = N(t-s)$ pour les deux derniers lignes, on aura

$$\begin{aligned}
& e^{-Nt} \left| x_i \left(t \right) - \tilde{x}_i \left(t \right) \right| \\
\leq \quad & \max_{s\in[-\tau,0]} \left| \phi_i \left(s \right) - \tilde{\phi}_i \left(s \right) \right| + \sum_{j=1}^{n} \max_{s\in[-\tau,0]} \left| \phi_j \left(s \right) - \tilde{\phi}_j \left(s \right) \right| \frac{h_j t_j^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} +
\end{aligned}$$

$$+ \quad nk_i \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} \left| x_i(\xi) - \tilde{x}_i(\xi) \right| \right\} \frac{1}{N^\alpha} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-u} du$$

$$+ \quad \sum_{j=1}^{n} h_j \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} \left| x_j(\xi) - \tilde{x}_j(\xi) \right| \right\} \frac{1}{N^\alpha} \int_0^{N(t-t_j)} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-u} e^{-N\tau_j\left(t-\frac{u}{N}\right)} du$$

Compte tenu de l'hypothèse (H_2) on a

$$e^{-Nt} \left| x_i(t) - \tilde{x}_i(t) \right|$$

$$\leq \quad \max_{s\in[-\tau,0]} \left| \phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s) \right| + \sum_{j=1}^{n} \left\| \Phi - \tilde{\Phi} \right\| \frac{h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$+ \quad \frac{nk_i}{N^\alpha} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ e^{-N\xi} \left| x_i(\xi) - \tilde{x}_i(\xi) \right| \right\} + \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j e^{N\tau}}{N^\alpha} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \left\{ \left\{ e^{-N\xi} \left| x_j(\xi) - \tilde{x}_j(\xi) \right| \right\} \right\}$$

$$\leq \quad \max_{s\in[-\tau,0]} \left| \phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s) \right| + \sum_{j=1}^{n} \left\| \Phi - \tilde{\Phi} \right\| \frac{h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{nk_i}{N^\alpha} \left\| x - \tilde{x} \right\|_N + \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j e^{N\tau}}{N^\alpha} \left\| x - \tilde{x} \right\|_N$$

Alors

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left\{ e^{-Nt} \left| x_i(t) - \tilde{x}_i(t) \right| \right\} \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{n} \max_{s\in[-\tau,0]} \left| \phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s) \right| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\| \Phi - \tilde{\Phi} \right\| \frac{h_j t_j^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
+\ & \sum_{i=1}^{n} \frac{n k_i}{N^{\alpha}} \left\| x - \tilde{x} \right\|_N + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j e^{N\tau}}{N^{\alpha}} \left\| x - \tilde{x} \right\|_N \\
\leq\ & \left\| \Phi - \widetilde{\Phi} \right\| + \frac{n \sum_{j=1}^{n} h_j t_j^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left\| \Phi - \tilde{\Phi} \right\| + \frac{n \sum_{i=1}^{n} k_i}{N^{\alpha}} \left\| x - \tilde{x} \right\|_N + \frac{n \sum_{j=1}^{n} h_j e^{N\tau}}{N^{\alpha}} \left\| x - \tilde{x} \right\|_N \\
\leq\ & \left[1 + \frac{n \sum_{j=1}^{n} h_j t_j^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \left\| \Phi - \widetilde{\Phi} \right\| + \frac{n \left[\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{n} h_j e^{N\tau} \right]}{N^{\alpha}} \left\| x - \tilde{x} \right\|_N
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que

$$
\left[1 - \frac{n \left[\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{n} h_j e^{N\tau} \right]}{N^{\alpha}} \right] \left\| x - \tilde{x} \right\|_N \leq \left[1 + \frac{n \sum_{j=1}^{n} h_j t_j^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \left\| \Phi - \widetilde{\Phi} \right\|.
$$

On choisit $N = \frac{1}{\tau}$, on a

$$
\left[1 - n\tau^{\alpha} \left[\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{n} h_j e \right] \right] \left\| x - \tilde{x} \right\|_N \leq \left[1 + \frac{n \sum_{j=1}^{n} h_j t_j^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right] \left\| \Phi - \widetilde{\Phi} \right\|.
$$

Par conséquent, pour $\epsilon > 0$ et en utilisant l'hypothèse (H_4), on peut trouver

$$
\delta = \left[1 - n\tau^{\alpha} \left[\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{n} h_j e \right] \right] \left[1 + \frac{n \sum_{j=1}^{n} h_j t_j^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{-1} \epsilon > 0
$$

telle que $\left\| \Phi - \widetilde{\Phi} \right\| < \delta$. Par conséquent $\left\| x - \tilde{x} \right\|_N \leq \epsilon$, ce qui prouve que la solution du problème (4.1.1)-(4.1.2) est uniformément stable. ■

4.4 Applications

Exemple 4.4.1 *Considérons le problème*

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}x_1(t) = \frac{10^{-3}}{x_1^2(t)+1} + \frac{10^{-2}}{x_2^2(t-\tau_2(t))+1} \\ {}^{c}D^{\alpha}x_2(t) = \frac{10^{-1}}{x_2^2(t)-x_2(t)+1} + \frac{10^{-2}}{x_3^2(t-\tau_3(t))-x_3(t-\tau_3(t))+1} \\ {}^{c}D^{\alpha}x_3(t) = \frac{10^{-3}}{x_3^2(t)+1} + \frac{10^{-2}}{x_1^2(t-\tau_1(t))+1} \end{cases}, \ t > 0$$

et

$$x(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0],$$

où $\alpha = 0.8$, $\tau_j(t) = \frac{4}{3} - \frac{1}{j+t}$ *pour* $j = 1, 2, 3$. $\tau = \max_{t\in\mathbb{R}^+} \tau_j(t) = \frac{4}{3}$.

Il est facile de voir que les conditions (H_1) *et* (H_2) *du théorème (4.2.1) sont vérifiées. Aussi,* $\exists t_j = \frac{4-3j+\sqrt{9j^2+24j-20}}{6}$ *telle que*

$$\begin{cases} \tau_j(t) \geq t, & \forall t \in [0, t_j] \\ \tau_j(t) < t, & \forall t \in]t_j, +\infty[\end{cases}$$

Et on a

$$3\tau^{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{3} k_i + \sum_{j=1}^{3} h_j e\right] = 0.9523063402 < 1.$$

où $k_1 = k_3 = 10^{-3}$, $k_2 = 10^{-1}\frac{8\sqrt{3}}{9}$, $h_1 = h_2 = 10^{-2}$ *et* $h_3 = 10^{-2}\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Ensuite, toutes les hypothèses de théorème (4.2.1) sont satisfaites. Ainsi, le problème a une solution unique, aussi par le théorème (4.3.1) la solution est uniformément stable. Par conséquent, en conclusion, le problème a une solution unique uniformément stable.

Exemple 4.4.2 *Considérons le problème*

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}x_1(t) = 10^{-1}\left\{\sqrt{x_1^2(t)+1} + \sqrt{x_2^2(t-\tau_2(t))+1}\right\} \\ {}^{c}D^{\alpha}x_2(t) = 10^{-2}\left\{x_2(t) + x_1(t-\tau_1(t))\right\} \end{cases}, \ t > 0$$

et

$$x(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0],$$

où $\alpha = 0.4$, $\tau_j(t) = \frac{5}{4} - \frac{1}{j+t}$ *pour* $j = 1, 2$. $\tau = \max_{t\in\mathbb{R}^+} \tau_j(t) = \frac{5}{4}$

Il est facile de voir que les conditions (H_1) *et* (H_2) *du théorème (4.2.1) sont vérifiées. Aussi,* $\exists t_j = \frac{-4j+\sqrt{16j^2+8}}{8}$ *telle que*

$$\begin{cases} \tau_j(t) \geq t, & \forall t \in [0, t_j] \\ \tau_j(t) < t, & \forall t \in]t_j, +\infty[\end{cases}$$

Et on a

$$2\tau^\alpha \left[\sum_{i=1}^{2} k_i + \sum_{j=1}^{2} h_j e \right] = 0.8943942329 < 1.$$

où $k_1 = h_2 = 10^{-1}$ *et* $k_2 = h_1 = 10^{-2}$.

Alors, toutes les hypothèses de théorème (4.2.1) sont satisfaites. Ainsi, le problème a une solution unique, aussi par le théorème (4.3.1) la solution est uniformément stable. Par conséquent, en conclusion, le problème a une solution unique uniformément stable.

Exemple 4.4.3 *Considérons le problème*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x_1(t) = 10^{-3} x_2(t) + 10^{-1} x_1(t - \tau_1(t)) \\ {}^cD^\alpha x_2(t) = 10^{-2} \left\{ \frac{1}{x_1^2(t)+1} + \frac{1}{x_2^2(t-\tau_2(t))+1} \right\} \end{cases}, \ t > 0$$

et

$$x(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0],$$

où $\alpha = \frac{1}{2}$, $\tau_j(t) = \frac{9}{8} - \frac{1}{j+t}$ *pour* $j = 1, 2$. $\tau = \max_{t\in\mathbb{R}^+} \tau_j(t) = \frac{9}{8}$.

Il est facile de voir que les conditions (H_1) *et* (H_2) *du théorème (4.2.1) sont vérifiées. Aussi,* $\exists t_j = \frac{1}{16}\sqrt{(8j-7)(8j+25)} - \frac{1}{2}j + \frac{9}{16}$ *telle que*

$$\begin{cases} \tau_j(t) \geq t, & \forall t \in [0, t_j] \\ \tau_j(t) < t, & \forall t \in]t_j, +\infty[\end{cases}$$

Et on a

$$2\tau^\alpha \left[\sum_{i=1}^{2} k_i + \sum_{j=1}^{2} h_j e \right] = 0.6576326435 < 1.$$

où $k_1 = 10^{-3}$, $h_1 = 10^{-1}$ *et* $k_2 = h_2 = 10^{-2}$.

Alors, toutes les hypothèses de théorème (4.2.1) sont satisfaites. Ainsi, le problème a une solution unique, aussi par le théorème (4.3.1) la solution est uniformément stable. Par conséquent, en conclusion, le problème a une solution unique uniforme stable.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Notre intérêt dans ce travail portait sur l'étude des systèmes différentiels non linéaires fractionnaires à retards.

Dans ce travail de recherche nous avons étudié un système à retards constants. En utilisant certains théorèmes de point fixe, nous avons établi l'existence et l'unicité d'une solution positive et globale.

Par ailleurs, nous avons considéré un système avec des arguments déviés (avancés et retardés). Nous avons donné des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution. Notre analyse s'est appuyé sur le théorème du point fixe de Banach. Nous avons étudié également la stabilité uniforme de la solution. Ce dernier travail a fait l'objet d'une publication, voir [32].

Perspectives

Les résultats obtenus dans ce travail suggèrent certaines questions; l'une des questions importantes:

- Etude d'un système différentiel fractionnaire avec multi-ordre.

Annexe

Copie de l'article publié

Nisse and Bouaziz *Advances in Difference Equations* 2014, 2014:275
http://www.advancesindifferenceequations.com/content/2014/1/275

Advances in Difference Equations
a SpringerOpen Journal

RESEARCH Open Access

Existence and stability of the solutions for systems of nonlinear fractional differential equations with deviating arguments

Lamine Nisse and Asma Bouaziz*

*Correspondence:
a_bouaziz@hotmail.com
Laboratory of Applied Mathematics, Badji Mokhtar University, B.P. 12, Annaba, 23000, Algeria

Abstract

In this paper, we give sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution for a class of nonlinear fractional differential systems, with variable delays. Our analysis relies on the Banach fixed point theorem. Furthermore, we prove the uniform stability of the solution. Some examples are given to illustrate our results.

Keywords: Caputo fractional derivatives; nonlinear fractional differential equations; deviating arguments; fixed point theorem; stability

1 Introduction

In recent years, many research works have been interested in fractional differential equations. This is due, first, to their widespread applications in diverse fields of engineering and natural sciences, and secondly to the intensive development of the theory of fractional calculus (see [1–12]). Furthermore, fractional differential equations with delays have proven more realistic in the description of natural phenomena than those without delays. Therefore, the study of these equations has drawn much attention (see *e.g.*, [13–17]).

El-Sayed and Gaafar [16] established sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to some nonlinear Riemann-Liouville fractional differential systems with constant delays. Also, they proved the stability of the solution. Recently, this study has been extended to another class of nonlinear fractional differential equations with delay in [17].

In the current paper, motivated and inspired by the works of [16, 17], we treat the same questions, but with time-dependent delays. Thus, we consider a system of nonlinear fractional differential equations with variable delays of the form

$$ {}^{c}D^{\alpha}x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\bigl(t, x_i(t), x_j\bigl(t-\tau_j(t)\bigr)\bigr), \quad i = 1, 2, \ldots, n, t > 0, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{1.2}$$

where ${}^{c}D^{\alpha}$ is the Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))'$, where $'$ denotes the transpose of the vector, and $f_{ij} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are continuous functions for $i, j = 1, 2, \ldots, n$, τ_j are continuous real-valued functions defined on $\mathbb{R}^+$, such that $\tau = \max\{\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \tau_j(t) : j = 1, 2, \ldots, n\} > 0$, and $\Phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))'$ is a given vector function defined on $[-\tau, 0]$ with values in $\mathbb{R}^n$.

Our purpose is to establish sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to the problem (1.1)-(1.2), by applying the Banach contraction principle. Furthermore, we prove the uniform stability of the solution.

While most existing research focuses on constant delays, the considered equations (1.1) contain variable delays. Moreover, it is important to note that our results are valid even in the case where the equations are of mixed type. Namely, equations of mixed type are those that have both retarded and advanced arguments. This makes a net difference with the previous works (see Remark 3.3). Thus, the present work generalizes the results obtained in [16, 17].

This paper is organized as follows. In Section 2, we introduce some basic definitions and notations, which are used in the sequel of the paper. In Section 3 and Section 4, we present our main results. Finally, in Section 5, two examples are given, as applications to illustrate our results.

2 Definitions and notations

Let us start by giving the definition of Riemann-Liouville fractional integral, and Caputo fractional derivatives. Further details of related basic properties used in the text can be found in [3, 5, 8].

Definition 2.1 Let $\alpha \in \mathbb{R}$. The Riemann-Liouville fractional integral operator I^α is defined on $L^1[0,T]$ by

$$I^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the gamma function.

For $\alpha = 0$, we set $I^0 := Id$, the identity operator. The operator I^α has the semigroup property, that is, for $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ and $f \in L^1[0,T]$, the identity

$$I^\alpha I^\beta f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$$

holds almost everywhere on $[0,T]$. Moreover, if $f \in C[0,T]$ or $\alpha + \beta \geq 1$, then the identity holds everywhere on $[0,T]$.

If $n \in \mathbb{N}^*$, and $D^n f$ (or $f^{(n)}$) means the nth derivative of a function f, then we have the following definition.

Definition 2.2 Let $n = [\alpha]$, and assume $D^n f \in L^1[0,T]$. The Caputo fractional derivative of order a real number $\alpha \geq 0$ is defined by

$${}^c D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\,ds, \quad t \geq 0.$$

3 Existence and uniqueness

In this section we prove the existence and uniqueness of the solution of the problem (1.1)-(1.2).

Lemma 3.1 *The vector function* $\mathbf{x}(t) := (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *is a solution of the problem* (1.1)-(1.2) *if and only if*

$$x_i(t) = \begin{cases} \phi_i(0) + \sum_{j=1}^n I^\alpha f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))), & t > 0, \\ \phi_i(t), & t \in [-\tau, 0], i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Proof For $t > 0$ and $i = 1, 2, \ldots, n$, (1.1) can be written as

$$I^{1-\alpha} Dx_i(t) = \sum_{j=1}^n f_{ij}\bigl(t, x_i(t), x_j\bigl(t - \tau_j(t)\bigr)\bigr).$$

Applying the operator I^α on both sides of the last equality, we obtain

$$IDx_i(t) = \sum_{j=1}^n I^\alpha f_{ij}\bigl(t, x_i(t), x_j\bigl(t - \tau_j(t)\bigr)\bigr),$$

$$x_i(t) - x_i(0) = \sum_{j=1}^n I^\alpha f_{ij}\bigl(t, x_i(t), x_j\bigl(t - \tau_j(t)\bigr)\bigr).$$

Then

$$x_i(t) = \phi_i(0) + \sum_{j=1}^n I^\alpha f_{ij}\bigl(t, x_i(t), x_j\bigl(t - \tau_j(t)\bigr)\bigr).$$

□

Let us denote by E the class of all continuous column vector-valued functions $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ equipped with the norm given by

$$\|\mathbf{x}\|_N = \sum_{i=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \bigl\{ e^{-Nt} \bigl| x_i(t) \bigr| \bigr\}, \quad \mathbf{x} \in E,$$

where $N \in \mathbb{R}^+$ will be chosen later. We define the integral operator $F : E \to E$ by

$$Fx_i(t) = \begin{cases} \phi_i(0) + \sum_{j=1}^n I^\alpha f_{ij}(t, x_i(t), x_j(t - \tau_j(t))), & t > 0, \\ \phi_i(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Theorem 3.2 *Assume that the following hypotheses are satisfied*:

(H_1) *Let* $f_{ij} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *be a continuous function, satisfying the Lipschitz condition*

$$\bigl| f_{ij}(t, x_i, y_j) - f_{ij}(t, u_i, v_j) \bigr| \leq k_i |x_i - u_i| + h_j |y_j - v_j|,$$

where $k_i, h_j > 0$, $i, j = \overline{1, n}$.

(H_2) *For* $j = 1, 2, \ldots, n$, $\tau_j \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ *and*

$$\tau_j(t) > -\tau, \quad t > 0.$$

(H_3) *For* $j = 1, 2, \ldots, n$, $\exists t_j > 0$ *such that*

$$\begin{cases} \tau_j(t) \geq t, & \forall t \in [0, t_j], \\ \tau_j(t) < t, & \forall t \in]t_j, +\infty[. \end{cases}$$

(H_4)

$$n\tau^{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{n} h_j e\right] < 1.$$

Then the problem (1.1)-(1.2) *has a unique solution.*

Proof Let $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, then for $i = 1, 2, \dots, n$ and $t > 0$ we have

$$\begin{aligned}
&\left|Fx_i(t) - Fy_i(t)\right| \\
&\quad= \left|\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left\{f_{ij}\bigl(s, x_i(s), x_j\bigl(s-\tau_j(s)\bigr)\bigr) - f_{ij}\bigl(s, y_i(s), y_j\bigl(s-\tau_j(s)\bigr)\bigr)\right\} ds\right| \\
&\quad\le \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|f_{ij}\bigl(s, x_i(s), x_j\bigl(s-\tau_j(s)\bigr)\bigr) - f_{ij}\bigl(s, y_i(s), y_j\bigl(s-\tau_j(s)\bigr)\bigr)\right| ds \\
&\quad\le \sum_{j=1}^{n} k_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|x_i(s) - y_i(s)\right| ds \\
&\qquad+ \sum_{j=1}^{n} h_j \int_0^{t_j} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|\phi_j\bigl(r_j(s)\bigr) - \phi_j\bigl(r_j(s)\bigr)\right| ds \\
&\qquad+ \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|x_j\bigl(r_j(s)\bigr) - y_j\bigl(r_j(s)\bigr)\right| ds \\
&\quad\le nk_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|x_i(s) - y_i(s)\right| ds \\
&\qquad+ \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left|x_j\bigl(r_j(s)\bigr) - y_j\bigl(r_j(s)\bigr)\right| ds,
\end{aligned}$$

where $r_j(s) = s - \tau_j(s)$, thus

$$\begin{aligned}
&e^{-Nt}\left|Fx_i(t) - Fy_i(t)\right| \\
&\quad\le nk_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} \left|x_i(s) - y_i(s)\right| ds \\
&\qquad+ \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-r_j(s))} e^{-Nr_j(s)} \left|x_j\bigl(r_j(s)\bigr) - y_j\bigl(r_j(s)\bigr)\right| ds \\
&\quad\le nk_i \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_i(\xi) - y_i(\xi)\right|\right\} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)}\, ds \\
&\qquad+ \sum_{j=1}^{n} h_j \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-Nr_j(\xi)}\left|x_j\bigl(r_j(\xi)\bigr) - y_j\bigl(r_j(\xi)\bigr)\right|\right\} \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-r_j(s))}\, ds \\
&\quad\le nk_i \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_i(\xi) - y_i(\xi)\right|\right\} \frac{1}{N^{\alpha}} \int_0^{Nt} \frac{u^{\alpha-1}e^{-u}}{\Gamma(\alpha)}\, du \\
&\qquad+ \sum_{j=1}^{n} h_j \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_j(\xi) - y_j(\xi)\right|\right\} \frac{1}{N^{\alpha}} \int_0^{N(t-t_j)} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-u} e^{-N\tau_j(t-\frac{u}{N})}\, du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le nk_i \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_j(\xi)-y_j(\xi)\right|\right\}\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{Nt}\frac{u^{\alpha-1}e^{-u}}{\Gamma(\alpha)}\,du \\
&\quad+\sum_{j=1}^n h_j \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_j(\xi)-y_j(\xi)\right|\right\}\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{N(t-t_j)}\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-u}e^{N\tau}\,du \\
&\le \frac{nk_i}{N^\alpha}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_j(\xi)-y_j(\xi)\right|\right\}+\sum_{j=1}^n\frac{h_je^{N\tau}}{N^\alpha}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_j(\xi)-y_j(\xi)\right|\right\} \\
&\le \frac{nk_i}{N^\alpha}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_N+\sum_{j=1}^n\frac{h_je^{N\tau}}{N^\alpha}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_N.
\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-Nt}\left|Fx_i(t)-Fy_i(t)\right|\right\} &\le \left[\sum_{i=1}^n\frac{nk_i}{N^\alpha}+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{h_je^{N\tau}}{N^\alpha}\right]\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_N \\
&\le \frac{n}{N^\alpha}\left[\sum_{i=1}^n k_i+\sum_{j=1}^n h_je^{N\tau}\right]\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_N.
\end{aligned}$$

Let us choose $N=\frac{1}{\tau}$. So, we have

$$\sum_{i=1}^n \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-Nt}\left|Fx_i(t)-Fy_i(t)\right|\right\}\le n\tau^\alpha\left[\sum_{i=1}^n k_i+\sum_{j=1}^n h_je\right]\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_N.$$

From hypothesis (H_4) we have $n\tau^\alpha[\sum_{i=1}^n k_i+\sum_{j=1}^n h_je]<1$. So, $F:E\to E$ is a contraction. Hence, it has a unique fixed point $\mathbf{x}=F\mathbf{x}$ which is precisely the unique solution of our problem (1.1)-(1.2). □

Remark 3.3 Note that, if for some j the delay function $\tau_j(t)$ takes negative values, which is possible under the assumptions (H_2) and (H_3), then (1.1) are with advanced arguments. Thus, the sign of the delay functions being arbitrary, the equations of the considered system (1.1) may contain both types of deviation of argument *i.e.* both delay and advance. As far as we know, there are no published studies addressing these issues for such systems of equations. However, concerning boundary value problems of fractional order, some results on the existence of solutions are obtained in [18]. But in [18], the authors considered problems involving only an advanced argument, and they do not address the question about the uniqueness (and the stability) of the solution.

4 Stability

In this section we study the stability of the solution of the problem (1.1)-(1.2).

Definition 4.1 The solution of the problem (1.1)-(1.2) is stable if for any $\epsilon>0$, there exists $\delta>0$ such that for any two solutions $\mathbf{x}(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))'$ and $\tilde{\mathbf{x}}(t)=(\tilde{x}_1(t),\dots,\tilde{x}_n(t))'$ with the initial condition (1.2) and $\tilde{\mathbf{x}}(t)=\widetilde{\Phi}(t)$ for $t\in[-\tau,0]$, respectively, one has $\|\Phi-\widetilde{\Phi}\|\le\delta$, implies $\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_N\le\epsilon$, where $\|\cdot\|$ denotes the supremum norm defined by $\|\Psi\|=\sum_{i=1}^n\max_{t\in[-\tau,0]}|\psi_i(t)|$, for all bounded vector function Ψ from $[-\tau,0]$ to $\mathbb{R}^n$.

Theorem 4.2 *Assume that hypotheses* (H_1)-(H_4) *in Theorem* 3.2 *are satisfied, then the solution of the problem* (1.1)-(1.2) *is uniformly stable*.

Proof Let $\mathbf{x}(t)$ and $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ be the solutions of the system (1.1) under the conditions (1.2) and $\{\tilde{\mathbf{x}}(t) = \widetilde{\Phi}(t) \text{ for } t \in [-\tau, 0]\}$, respectively. Then for $t > 0$, from (3.1), we have

$$\begin{aligned} x_i(t) - \tilde{x}_i(t) &= \phi_i(0) - \tilde{\phi}_i(0) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} I^{\alpha}\bigl\{f_{ij}\bigl(t, x_i(t), x_j\bigl(t - \tau_j(t)\bigr)\bigr) - f_{ij}\bigl(t, \tilde{x}_i(t), \tilde{x}_j\bigl(t - \tau_j(t)\bigr)\bigr)\bigr\}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} &\bigl|x_i(t) - \tilde{x}_i(t)\bigr| \\ &\quad\le \bigl|\phi_i(0) - \tilde{\phi}_i(0)\bigr| \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bigl|f_{ij}\bigl(s, x_i(s), x_j\bigl(s - \tau_j(s)\bigr)\bigr) - f_{ij}\bigl(s, \tilde{x}_i(s), \tilde{x}_j\bigl(s - \tau_j(s)\bigr)\bigr)\bigr|\, ds \\ &\quad\le \bigl|\phi_i(0) - \tilde{\phi}_i(0)\bigr| + \sum_{j=1}^{n} k_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bigl|x_i(s) - \tilde{x}_i(s)\bigr|\, ds \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_0^{t_j} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bigl|\phi_j\bigl(s - \tau_j(s)\bigr) - \tilde{\phi}_j\bigl(s - \tau_j(s)\bigr)\bigr|\, ds \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bigl|x_j\bigl(s - \tau_j(s)\bigr) - \tilde{x}_j\bigl(s - \tau_j(s)\bigr)\bigr|\, ds \\ &\quad\le \max_{s\in[-\tau,0]} \bigl|\phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s)\bigr| + nk_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bigl|x_i(s) - \tilde{x}_i(s)\bigr|\, ds \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{n} \max_{s\in[-\tau,0]} \bigl|\phi_j(s) - \tilde{\phi}_j(s)\bigr| h_j \int_0^{t_j} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, ds \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bigl|x_j\bigl(s - \tau_j(s)\bigr) - \tilde{x}_j\bigl(s - \tau_j(s)\bigr)\bigr|\, ds. \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} &e^{-Nt}\bigl|x_i(t) - \tilde{x}_i(t)\bigr| \\ &\quad\le e^{-Nt} \max_{s\in[-\tau,0]} \bigl|\phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s)\bigr| + nk_i \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} e^{-Ns} \bigl|x_i(s) - \tilde{x}_i(s)\bigr|\, ds \\ &\qquad + e^{-Nt} \sum_{j=1}^{n} \max_{s\in[-\tau,0]} \bigl|\phi_j(s) - \tilde{\phi}_j(s)\bigr| \frac{h_j}{\Gamma(\alpha+1)} \bigl[t^{\alpha} - (t - t_j)^{\alpha}\bigr] \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t - r_j(s))} e^{-Nr_j(s)} \bigl|x_j\bigl(r_j(s)\bigr) - \tilde{x}_j\bigl(r_j(s)\bigr)\bigr|\, ds \\ &\quad\le \max_{s\in[-\tau,0]} \bigl|\phi_i(s) - \tilde{\phi}_i(s)\bigr| + \sum_{j=1}^{n} \max_{s\in[-\tau,0]} \bigl|\phi_j(s) - \tilde{\phi}_j(s)\bigr| \frac{h_j t_j^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + nk_i \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_i(\xi)-\tilde{x}_i(\xi)\right|\right\}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-N(t-s)}\,ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^n h_j \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-Nr_j(\xi)}\left|x_j\bigl(r_j(\xi)\bigr)-\tilde{x}_j\bigl(r_j(\xi)\bigr)\right|\right\}\int_{t_j}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-N(t-r_j(s))}\,ds \\
&\le \max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_i(s)-\tilde{\phi}_i(s)\right| + \sum_{j=1}^n \max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_j(s)-\tilde{\phi}_j(s)\right|\frac{h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad + nk_i \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_i(\xi)-\tilde{x}_i(\xi)\right|\right\}\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{Nt}\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-u}\,du \\
&\quad + \sum_{j=1}^n h_j \sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_j(\xi)-\tilde{x}_j(\xi)\right|\right\}\frac{1}{N^\alpha}\int_0^{N(t-t_j)}\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-u}e^{-N\tau_j(t-\frac{u}{N})}\,du \\
&\le \max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_i(s)-\tilde{\phi}_i(s)\right| + \sum_{j=1}^n \|\Phi-\tilde{\Phi}\|\frac{h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{nk_i}{N^\alpha}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_i(\xi)-\tilde{x}_i(\xi)\right|\right\} + \sum_{j=1}^n \frac{h_j e^{N\tau}}{N^\alpha}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-N\xi}\left|x_j(\xi)-\tilde{x}_j(\xi)\right|\right\} \\
&\le \max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_i(s)-\tilde{\phi}_i(s)\right| + \sum_{j=1}^n \|\Phi-\tilde{\Phi}\|\frac{h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{nk_i}{N^\alpha}\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_N + \sum_{j=1}^n \frac{h_j e^{N\tau}}{N^\alpha}\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_N.
\end{aligned}
$$

Then

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left\{e^{-Nt}\left|x_i(t)-\tilde{x}_i(t)\right|\right\} \\
&\quad \le \sum_{i=1}^n \max_{s\in[-\tau,0]}\left|\phi_i(s)-\tilde{\phi}_i(s)\right| + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \|\Phi-\tilde{\Phi}\|\frac{h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^n \frac{nk_i}{N^\alpha}\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_N + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{h_j e^{N\tau}}{N^\alpha}\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_N \\
&\quad \le \|\Phi-\widetilde{\Phi}\| + \frac{n\sum_{j=1}^n h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|\Phi-\tilde{\Phi}\| + \frac{n\sum_{i=1}^n k_i}{N^\alpha}\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_N + \frac{n\sum_{j=1}^n h_j e^{N\tau}}{N^\alpha}\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_N \\
&\quad \le \left[1+\frac{n\sum_{j=1}^n h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\|\Phi-\widetilde{\Phi}\| + \frac{n[\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{j=1}^n h_j e^{N\tau}]}{N^\alpha}\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_N.
\end{aligned}
$$

It follows that

$$
\left[1-\frac{n[\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{j=1}^n h_j e^{N\tau}]}{N^\alpha}\right]\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_N \le \left[1+\frac{n\sum_{j=1}^n h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\|\Phi-\widetilde{\Phi}\|.
$$

We choose $N = \frac{1}{\tau}$, and we have

$$
\left[1-n\tau^\alpha\left[\sum_{i=1}^n k_i + \sum_{j=1}^n h_j e\right]\right]\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_N \le \left[1+\frac{n\sum_{j=1}^n h_j t_j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\|\Phi-\widetilde{\Phi}\|.
$$

Therefore, given any $\epsilon > 0$, there exists

$$\delta = \left[1 - n\tau^{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{n} h_j e\right]\right]\left[1 + \frac{n\sum_{j=1}^{n} h_j t_j^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^{-1}\epsilon > 0,$$

such that if $\|\Phi - \widetilde{\Phi}\| < \delta$, then $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_N \le \epsilon$, which shows that the solution of the problem (1.1)-(1.2) is uniformly stable. □

5 Applications

Example 5.1 Consider the problem

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x_1(t) = \frac{10^{-3}}{x_1^2(t)+1} + \frac{10^{-2}}{x_2^2(t-\tau_2(t))+1}, \\ {}^cD^{\alpha}x_2(t) = \frac{10^{-1}}{x_2^2(t)-x_2(t)+1} + \frac{10^{-2}}{x_3^2(t-\tau_3(t))-x_3(t-\tau_3(t))+1}, \quad t > 0, \\ {}^cD^{\alpha}x_3(t) = \frac{10^{-3}}{x_3^2(t)+1} + \frac{10^{-2}}{x_1^2(t-\tau_1(t))+1}, \end{cases}$$

and

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0],$$

where $\alpha = 0.8$, $\tau_j(t) = \frac{4}{3} - \frac{1}{j+t}$ for $j = 1, 2, 3$. $\tau = \max_{t\in\mathbb{R}^+} \tau_j(t) = \frac{4}{3}$.

It is easy to see that the conditions (H_1) and (H_2) of Theorem 3.2 hold. Also, $\exists t_j = \frac{4-3j+\sqrt{9j^2+24j-20}}{6}$ such that

$$\begin{cases} \tau_j(t) \ge t, & \forall t \in [0, t_j], \\ \tau_j(t) < t, & \forall t \in]t_j, +\infty[, \end{cases}$$

and

$$3\tau^{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{3} k_i + \sum_{j=1}^{3} h_j e\right] = 0.9523063402 < 1,$$

where $k_1 = k_3 = 10^{-3}$, $k_2 = 10^{-1}\frac{8\sqrt{3}}{9}$, $h_1 = h_2 = 10^{-2}$ and $h_3 = 10^{-2}\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Hence, all hypotheses of Theorem 3.2 are fulfilled. Thus, the problem has a unique solution, and by Theorem 4.2 the solution is uniformly stable. Therefore, as a conclusion, the problem has a unique uniform stable solution.

Example 5.2 Consider the problem

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x_1(t) = 10^{-1}\{\sqrt{x_1^2(t)+1} + \sqrt{x_2^2(t-\tau_2(t))+1}\}, \\ {}^cD^{\alpha}x_2(t) = 10^{-2}\{x_2(t) + x_1(t-\tau_1(t))\}, \end{cases} \quad t > 0,$$

and

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0],$$

where $\alpha = 0.4$, $\tau_j(t) = \frac{5}{4} - \frac{1}{j+t}$ for $j = 1, 2$. $\tau = \max_{t\in\mathbb{R}^+} \tau_j(t) = \frac{5}{4}$.

It is easy to see that the conditions (H_1) and (H_2) of Theorem 3.2 hold. Also, $\exists t_j = \frac{-4j+\sqrt{16j^2+8}}{8}$ such that

$$\begin{cases} \tau_j(t) \geq t, & \forall t \in [0, t_j], \\ \tau_j(t) < t, & \forall t \in]t_j, +\infty[\end{cases}$$

and

$$2\tau^\alpha \left[\sum_{i=1}^{2} k_i + \sum_{j=1}^{2} h_j e \right] = 0.8943942329 < 1,$$

where $k_1 = h_2 = 10^{-1}$ and $k_2 = h_1 = 10^{-2}$.

Hence, all hypotheses of Theorem 3.2 are satisfied. Thus, the problem has a unique solution. Moreover, by Theorem 4.2 the solution is uniformly stable. Therefore, as a conclusion, the problem has a unique uniform stable solution.

Competing interests
The authors declare that they have no competing interests.

Authors' contributions
LN has proposed the main idea of this paper and has directed this study. LN and AB have conceived and drafted the manuscript. All authors read and approved the final manuscript.

Acknowledgements
The authors are very thankful to the anonymous referees for their valuable comments and constructive suggestions, which helped to improve the quality of the paper.

Received: 6 June 2014 Accepted: 17 October 2014 Published: 27 Oct 2014

References

1. Ahmad, B, Nieto, JJ: Existence of solution for non-local boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations. Abstr. Appl. Anal. **2009**, Article ID 494720 (2009)
2. Benchohra, M, Hellal, M: Perturbed partial functional fractional order differential equations with infinite delay. J. Adv. Res. Dyn. Control Syst. **5**(2), 1-15 (2013)
3. Kilbas, AA, Srivastava, HM, Trujillo, JJ: Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Elsevier, Amsterdam (2006)
4. Liu, S, Jia, M, Tian, Y: Existence of positive solutions for boundary-value problems with integral boundary conditions and sign changing nonlinearities. Electron. J. Differ. Equ. **2010**, 163 (2010)
5. Miller, KS, Ross, B: An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation. Wiley, New York (1993)
6. Oldham, KB, Spanier, J: The Fractional Calculus. Academic Press, New York (1974)
7. Podlubny, I: Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego (1999)
8. Samko, SG, Kilbas, AA, Marichev, OI: Fractional Integral and Derivatives: Theory and Applications. Gordon & Breach, New York (1993)
9. Tarasov, VE: Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Springer, Berlin (2010)
10. Tenreiro Machado, JA, Kiryakova, V, Mainardi, F: Recent history of fractional calculus. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **16**(3), 1140-1153 (2011)
11. Wang, G, Liu, W: Existence results for a coupled system of nonlinear fractional 2m-point boundary value problems at resonance. Adv. Differ. Equ. (2011). doi:10.1186/1687-1847-2011-44
12. Zhong, C, Fan, X, Chen, W: Nonlinear Functional Analysis and Its Application. Lanzhou University Press, Lanzhou (1998)
13. Ravichandran, C, Baleanu, D: Existence results for fractional neutral functional integro-differential evolution equations with infinite delay in Banach spaces. Adv. Differ. Equ. (2013). doi:10.1186/1687-1847-2013-215
14. Li, F: Mild solutions for abstract fractional differential equations with almost sectorial operators and infinite delay. Adv. Differ. Equ. (2013). doi:10.1186/1687-1847-2013-327
15. Bolat, Y: On the oscillation of fractional-order delay differential equations with constant coefficients. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **19**(11), 3988-3993 (2014)
16. El-Sayed, AMA, Gaafar, FM: Stability of a nonlinear non-autonomous fractional order systems with different delays and non-local conditions. Adv. Differ. Equ. (2011). doi:10.1186/1687-1847-2011-47

17. Gao, Z, Yang, L, Luo, Z: Stability of the solutions for nonlinear fractional differential equations with delays and integral boundary conditions. Adv. Differ. Equ. (2013). doi:10.1186/1687-1847-2013-43
18. Wang, G, Ntouyas, SK, Zhang, L: Positive solutions of the three-point boundary value problem for fractional-order differential equations with an advanced argument. Adv. Differ. Equ. (2011). doi:10.1186/1687-1847-2013-43

10.1186/1687-1847-2014-275
Cite this article as: Nisse and Bouaziz: **Existence and stability of the solutions for systems of nonlinear fractional differential equations with deviating arguments.** *Advances in Difference Equations* 2014, 2014:275

Bibliographie

[1] B. Ahmad, JJ. Nieto, Existence of solution for non-local boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations, Abstr. Appl. Anal. Article ID 494720, (2009).

[2] K. Balachandran, J.Y. Park, M.D. Julie, On local attractivity of solutions of a functional integral equation of fractional order with deviating arguments, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 15 (2010), 2809–2817.

[3] M. Benchohra, M. Hellal, Perturbed partial functional fractional order differential equations with infinite delay, J. Adv. Res. Dyn. Control Syst. 5(2), (2013), 1-15 .

[4] Y. Bolat, On the oscillation of fractional-order delay differential equations with constant coefficients, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 19(11), (2014), 3988-3993.

[5] B. Bonilla, M. Rivero, J.J. Trujillo, On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients, Appl. Math. Comput. 187 (1) (2007), 68-78.

[6] J.P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, EDP Sience, (2006).

[7] K. Diethelm, A. D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in "Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil,W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), Springer-Verlag, Heidelberg, (1999), 217-224.

[8] K. Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer. (2004).

[9] JPC. dos Santos, MM. Arjunan, C. Cuevas, Existence results for fractional neutral integro-differential equations with state dependent delay, Comput. Math. Appl. 62(3), (2011), 1275-1283.

[10] A.M.A. El-Sayed, Fractional order evolution equations, J. Fract. Calc.7 (1995), 89-100.

[11] A.M.A. El-Sayed, F.M. Gaafar, Stability of a nonlinear non-autonomous fractional order systems with different delays and non-local conditions, Advances in Difference Equations, (2011), 1-9.

[12] L. Euler, De progressionibus transcentibus, sev quarum termini algebraice dari nequeunt, Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae 5, (1738), 36–57.

[13] F.M. Gaafar, Cauchy type problems of functional diffeintegral equations with advanced arguments, Journal of Fractional Calculus and Applications, Vol. 5(2) July (2014), 71-77.

[14] Z. Gao, L. Yang and Z. Luo, Stability of the solutions for nonlinear fractional differential equations with delays and integral boundary conditions, Advances in Difference Equations, (2013), 1-8.

[15] L. Gaul, P. Klein, S. Kempfle, Damping description involving fractional operators, Mech. Systems Signal Processing 5 (1991), 81-88.

[16] W.G. Glockle and T.F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics, Biophys. J.68, (1995), 46-53.

[17] A.K. Grünwald, Ueber "begrenzte" derivationen und deren anwendung, Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, 12 (6), 441-480.

[18] J, Hale, Theory of functional differential equations, Springer Verlag, NY, (1977).

[19] R. Haloi, P. Kumar, D.N. Pandey, Sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional integro-differential equations with deviating arguments, Journal of Fractional Calculus and Applications 5(1) (2014), no. 7, 73-84.

[20] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, (2000).

[21] R.W. Ibrahim, Existence of deviating fractional differential equation. Cubo 14 (2012), no. 3, 129-142.

[22] A.A. Kilbas, S.A. Mazran, Nonlinear differential equations with Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, Differential Equations.41 (2005), 84 - 89.

[23] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[24] P. Kumar, D.N. Pandey and D. Bahuguna, Impulsive boundary value problems for fractional differential equations with deviating arguments, Journal of Fractional Calculus and Applications, Vol. 5(1) Jan. (2014), 146-155.

[25] A.V. Letnikov, Theory of differentiation of an arbitrary order, Mat. Sb.3 (1868), 1-68 (in Russian).

[26] A.V. Letnikov, On the historical development of the theory of differentiation of an arbitrary order, Mat. Sb. 3 (1868), 85-112 (in Russian).

[27] F. Li, Mild solutions for abstract fractional differential equations with almost sectorial operators and infinite delay, Adv. Differ. Equ. (2013). doi:10.1186/1687-1847-2013-327.

[28] J. Liang, TJ. Xiao, JV. Casteren, A note on semilinear abstract functional differential and integrodifferential equations with infinite delay, Appl. Math. Lett. 17(4), (2004), 473-477.

[29] J. Liang, TJ. Xiao, The Cauchy problem for nonlinear abstract functional differential equations with infinite delay, Comput. Math. Appl. 40, (2000), 693-703.

[30] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainaedi, Eds), Springer-Verlag, Wien, (1997), 291-348.

[31] K.S, Miller and B, Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons Inc., New York, (1993).

[32] L. Nisse, A. Bouaziz, Existence and stability of the solutions for systems of nonlinear fractional differential equations with deviating arguments. Advances in Difference Equations, (2014), 2014:275. doi: 10.1186/1687-1847-2014-275.

[33] S.K. Ntouyas, G. Wang, L. Zhang, Positive solutions of arbitrary order nonlinear fractional equations with advanced arguments, Opuscula Mathematica, (2011), 433-442.

[34] P.G. Nutting, A new general law of deformation, J. Franklin Inst, 191, 679–685 (1921).

[35] P.G. Nutting, A general stress–strain–time formula. J. Franklin Inst. 235, 513–524 (1943).

[36] Z.M. Odibat, Analytic study on linear systems of fractional differential equations, Computers and Mathematics with Applications, (2010), 1171-1183.

[37] K.B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, London, (1974).

[38] I. Podlubny, Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, (1999).

[39] C. Ravichandran, D.Baleanu, Existence results for fractional neutral functional integro-differential evolution equations with infinite delay in Banach spaces, Adv. Differ. Equ. (2013). doi:10.1186/1687-1847-2013-215.

[40] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marchev, Fractional Integrals and Derivatives; Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, (1993).

[41] Y. Sonntag, Topologie et analyse fonctionnelle, ellipse, (1997).

[42] G. Wang, SK. Ntouyas, L. Zhang, Positive solutions of the three-point boundary value problem for fractional-order differential equations with an advanced argument, Adv. Differ. Equ. (2011). doi:10.1186/1687-1847-2013-43.

[43] H. Ye, Y. Ding, J. Gao, The existence of a positive solution of $D^{\alpha}[x(t) - x(0)] = x(t)f(t, x_t)$, Positivity 11, (2007), 341–350.

[44] C. Zhong, X. Fan, W. Chen, Nonlinear Functional Analysis and Its Application, Lanzhou Univ. Press, (1998).

[45] Y. Zhou, F. Jiao, J. Li, Existence and uniqueness for fractional neutral differential equations with infinite delay, Nonlinear Anal. 71, (2009), 3249-3256.

[46] K. Zima, Sur l'existence des solutions d'une équation intégro-différentielle, Ann. Polon. Math 27, (1973), 181-187.