

# Thèse

en cotutelle

Université du Sud Toulon Var

&

Université Badji Mokhtar Annaba

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Option : Mathématiques Appliquées

## Approximants de Padé à $N$ points avec le point à l'infini pour les fonctions de Stieltjes

Par Mme **HEBHOUB FAHIMA**

Sous la direction de  
**Rachid Benzine et Jacek Gilewicz**

Soutenue à l'U.B.M. Annaba le 21 novembre 2011 devant le jury

Président	Y. Laskri	Prof.	Université Badji Mokhtar, Annaba
Codirecteur de thèse	J. Gilewicz	Prof.	Université du Sud Toulon-Var
Codirecteur de thèse	R. Benzine	Prof.	Université Badji Mokhtar, Annaba
Examineur	M. Redivo Zaglia	Prof.	Université de Padova, Italie
Examineur	B. Djebbar	Prof.	Université Essenia, Oran



# Remerciements

*Je tiens à exprimer ma plus vive reconnaissance et ma profonde gratitude à mes Codirecteurs de thèse, Jacek Gilewicz et Rachid Benzine. C'est grâce à leur attention, leur disponibilité, leurs conseils et leur amitié que j'ai pu mener à bien ce travail.*

*Mes remerciements vont également à Djebbar Bachir et Michela Redivo Zaglia pour avoir accepté le rôle de rapporteur et dont les remarques m'ont été très précieuses pour améliorer la rédaction de ce mémoire.*

*De même je remercie vivement Madame Y. Laskri pour l'honneur qu'elle m'a fait de bien vouloir accepter de présider le jury.*

*Un grand merci à ma chère amie et ma collègue Lidiya Yushchenko avec qui j'ai eu le plaisir de travailler quotidiennement au CPT à Marseille.*

*Ce travail a été réalisé au Centre de Physique Théorique du CNRS à Marseille où j'ai trouvé les conditions idéales pour le mener à terme. Que tous mes collègues du CPT, scientifiques et non-scientifiques, trouvent ici l'expression de ma grande reconnaissance.*

*Enfin, merci de tout mon coeur à mon Mari Karim, mes parents, mes frères Hakim et Mohamed, mes cousines, et toute ma famille pour l'encouragement constant qu'ils m'ont manifesté durant ces dernières années.*

*Merci à tous.*



# Table des matières

# Chapitre 1

## Introduction et résumé de la thèse

Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , analytique au voisinage du point  $z = 0$  et  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  son développement en série de Taylor. L'approximant de Padé AP associé à  $f$  ou à la série formelle  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , qu'on note  $[m/n]_f^0$ , est la fraction rationnelle  $\frac{P_m}{Q_n}$  telle que :

$$f(z) - \frac{P_m}{Q_n}(z) = O(z^{m+n+1}).$$

Cela signifie que l'approximant de Padé  $[m/n]_f^0$ , s'il existe, reproduit la série de Mc Laurin de  $f$ , au moins jusqu'au terme en  $z^{m+n}$ . Depuis une cinquantaine d'années les approximants de Padé (AP) sont utilisés couramment dans de divers calculs et dans des branches variées de sciences. Les AP représentent une approximation rationnelle des fonctions ou des séries, sont facilement maniables dans des calculs numériques, permettent de sommer les séries ou encore accélérer la convergence de divers processus.

De récents développements des applications des AP généralisés à  $N$  points,

c'est-à-dire définis à partir des développements d'une fonction en  $N$  points différents, dont aussi les points complexes et même le point infini, nous ont amené à reprendre l'étude des propriétés de ces approximations. Le sujet de cette thèse porte donc sur les AP à  $N$  points et sur le rôle joué par le point à l'infini. Lidiya Yushchenko préparait en même temps que moi une thèse sur les "Approximants de Padé à  $N$  points complexes pour les fonctions de Stieltjes" dont l'essentiel consistait à examiner l'effet produit sur les AP par le choix des points complexes par opposition aux points réels. Plusieurs résultats ont été obtenus en commun et c'est pourquoi les deux premiers chapitres sont communs à nos deux thèses.

Revenons au début, c'est-à-dire aux AP classiques, définis par le développement en série d'une fonction en un point, au départ en  $z = 0$ . Il est bien connu que certains zéros et pôles des AP reproduisent de vrais zéros et pôles de la fonction considérée (on dit que ce sont les zéros et pôles stables), d'autres s'entrelacent sur la coupure, et d'autres encore se promènent partout (on dit qu'ils sont instables et ce sont eux qui sont responsables de la non-convergence des AP vers la fonction). Oui, mais si on prend cette fois un point complexe pour le développement ? Est-ce la même chose ? C'est-à-dire est-ce que les zéros et les pôles des AP désigneront encore la coupure dans l'alignement entre le point de développement en série de la fonction et son point de ramification, qui est  $z = R$  pour une fonction de Stieltjes ? On l'a cru en faisant confiance à J.S.R.Chisholm, A.C.Genz et M.Pusterla qui prétendaient avoir démontré en 1976 [?] que c'est bien la propriété caractérisant les AP de la fonction  $\ln(1 - z)$  développée en  $z_0 \notin \mathbb{R}$  : les pôles et les zéros des AP diagonaux ( $m = n$ ) se placeaient selon eux sur la droite  $\{z - z_0 = t(1 - z_0) ; t > 1\}$ . Or, en ce qui concerne les pôles des approximants de Padé de cette fonction, cette propriété est vérifiée, mais elle est fautive en ce qui concerne les zéros. Visiblement les auteurs de [?] n'ont jamais vérifié numériquement leurs affirmations. S.Klarsfeld [?] a remarqué cela déjà en 1981.

Nous avons repris, avec L. Yushchenko, l'étude de Klarsfeld et nous avons généralisé son résultat portant sur la position des zéros et pôles de la fonction  $\ln(1 - z)$  au cas des approximants de Padé  $[m/n]$ , ( $m \geq n$ ) (cf. Théorème 4.4). Nous avons étudié aussi d'autres cas de fonctions de Stieltjes dont on connaît les dérivées aux points complexes [?]. Ce type de problèmes a trouvé l'application chez les mécaniciens dans le calcul des propriétés physiques des composites. Nos expériences numériques obtenus en collaboration avec Lidiya Yushchenko, portant sur diverses fonctions de Stieltjes et sur leurs approximants de Padé définis en des points complexes montrent que les zéros et les pôles, qui devraient en principe désigner la coupure sur la demi-droite suivant la direction : point de développement - point de ramification, s'écartent de cette demi-droite.

Notons que l'interpolation classique d'une fonction par une fraction rationnelle de type  $P_m/Q_n$  où  $m + n + 1 = N$  correspond au calcul d'un AP à  $N$  points où en chaque point on ne prend qu'une seule information : valeur de la fonction  $f$ . Si en chaque point, disons  $z_i$ , on prend  $l_i$  informations (valeur de  $f$  et de ses dérivées), alors on peut construire un AP où  $m + n + 1 = l_1 + l_2 + \dots + l_N$ . De la même façon on construit une fraction continue à  $N$  points. On la note en abrégé :

$$K_1 K_2 \dots K_N \quad (1.1)$$

où chaque étage représente une fraction continue au point  $z_i$  (pour le moment nous ne précisons pas la forme des  $K_i$ ). On s'est aperçu [?] que, comme pour le problème d'interpolation, l'ordre dans lequel on utilise les points  $z_i$  importe peu. Autrement dit une fraction continue

$$K_{\alpha_1} K_{\alpha_2} \dots K_{\alpha_N} \quad (1.2)$$



où  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$  est une permutation de  $(1, 2, \dots, N)$  représente le même AP que  $(?)$ . Oui, c'est toujours vrai s'il n'y a pas de point à l'infini. Dans ce dernier cas c'est parfois vrai, parfois faux. C'est précisément une partie du sujet de la présente thèse (cf. Théorème 6.1 qui parle de cette invariance).

Cette thèse, ainsi que la thèse déjà citée de Lidiya Yushchenko, ont été préparées en même temps et dans le même bureau au Centre de Physique Théorique du CNRS à Marseille.

Les premières pages du deuxième chapitre contiennent un petit aperçu historique sur les approximants de Padé. Puis nous présentons une description concise de grands sujets et problèmes liés à l'approximation de Padé. Le chapitre 3 est consacré à une brève introduction à la théorie des approximants de Padé avec le rappel de principaux résultats. Dans le chapitre 4 on trouvera en détail beaucoup d'informations sur les zéros et les pôles des AP des fonctions de Stieltjes et par la même occasion sur les zéros des polynômes orthogonaux. Le chapitre 5 est consacré aux résultats personnels : théorèmes 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, corollaire 5.1, conjecture sur l'alignement des pôles et des zéros. Dans le chapitre 6 on introduit les fractions continues de Stieltjes à  $N$  points. Le théorème 6.1 définit l'invariance qui caractérise ces fractions continues. On définit ensuite les approximants de Padé à deux points qui ne sont pas les convergents des pures fractions de Stieltjes. Ce sont les convergents des fractions continues mixtes de type Thiele-Stieltjes (TS) ou de type Stieltjes-Thiele (ST). L'invariance démontrée pour les fractions de Stieltjes ne se traduit pas directement au cas de ces fractions, précisément à cause du point à l'infini dont les étages type Thiele sont responsables. C'est à la fin du chapitre 6 que nous présentons au Théorème 6.4 qui règle le problème de l'invariance de ces fractions.

# Chapitre 2

## Note historique et Aperçu général

### 2.1 Petit parcours historique

Comme nous l'avons signalé au chapitre 1, l'approximant de Padé AP d'une fonction de variable complexe  $f$ , analytique au voisinage de l'origine  $z = 0$ , est une fraction rationnelle  $P_m/Q_n$  vérifiant :

$$f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = O(z^{m+n+1}) \quad (2.1)$$

L'approximation à laquelle Van Vleck, ami de Henri Padé, a donné vers les années 30 du siècle dernier le nom d'approximation de Padé que nous utilisons aujourd'hui a déjà été signalée en 1821 dans le *Cours d'Analyse* de Cauchy, puis étudiée vers 1846 par Jacobi et en 1881 par Frobenius. Puis, dans des célèbres travaux de Stieltjes sur les fractions continues vers la fin du XIX siècle, on trouve le théorème de la convergence uniforme des réduits (ou convergents) des fractions continues (appelées aujourd'hui : fractions *de*

*Stieltjes*) vers une fonction limite appelée aujourd'hui *fonction de Stieltjes*. Ce n'est rien d'autre que la convergence des AP vers les fonctions de Stieltjes, même si certains auteurs ont essayé discrètement de s'approprier ce résultat 60 ans plus tard. Henri Padé, dans sa thèse, soutenue en 1892 à la Sorbonne sous la direction de Charles Hermite et dans les travaux qui ont suivi (1899) a étudié systématiquement la structure d'une table infinie des AP à deux entrées :  $m$  et  $n$ . La première colonne de cette table représente les séries tronquées de  $f$ . On voit déjà que l'approximant de Padé offre une richesse bien plus grande que la simple troncature de la série de Maclaurin. En effet, avec la même information contenue dans  $(m+n+1)$  premiers coefficients de la série en question, on peut construire  $\frac{1}{2}(m+n+2)(m+n+1)$  AP différents. Parmi eux on a plus de chance de trouver une meilleure approximation de la fonction par opposition à l'approximation par polynôme : série tronquée. En plus ces AP reproduisent les singularités de la fonction, ce que les polynômes ne font pas. Revenons donc à Henri Padé et ses tables des AP, appelées aujourd'hui tables de Padé. Il y a découvert l'existence des blocs carrés composés de mêmes éléments (cf. (2.7)) et était à un doigt de découvrir la structure de ces blocs,

à savoir de s'apercevoir que les éléments placés sous la diagonale principale ne satisfont pas a (??), donc ne sont pas AP selon cette définition. Cette propriété a été démontrée seulement vers 1973 par G.A.Baker Jr. [?] et indépendamment par J.Gilewicz [?].

Rappelons encore que Padé a prétendu démontrer un théorème général de la convergence des AP en se basant sur sa mystérieuse théorie des fractions holoïdes, qui était plutôt une création linguistique (Padé était un grand érudit et connaissait plusieurs langues anciennes).

Ce "théorème", transformé en 1961 par Baker, Gammel et Wills en "conjecture de Padé" a résisté tout au long du XX-ème siècle, et pour cause, il était faux! C'est seulement en 2002 [?] que le mathématicien russe V.I.Buslaev, de l'équipe de A.A.Gonchar de l'Institut de Steklov à Moscou, a trouvé un

contre-exemple qui a abattu cette conjecture.

Quant à Padé, après quelques mots maladroits adressés à l'encontre de Stieltjes au début des années 1900, reprochant à ce dernier de ne pas s'appuyer sur cette fameuse théorie des fractions holoïdes et, très vraisemblablement, après une probable reprimande d'Hermite, il a cessé de publier et s'était tourné vers la rédaction des livres d'enseignement et vers l'administration. Padé est né en 1863 et est mort à Aix-en-Provence en 1953 sans jamais savoir que les approximations qu'il a étudié portaient déjà depuis 20 ans son nom.

En 1948 Wall écrit un livre sur les fractions continues où il établit clairement le lien entre les réduits de ces fractions et les AP. Puis, c'est la redécouverte des AP par les physiciens théoriciens des hautes énergies vers les années 50-60 du siècle dernier. C'est une nécessité qui a conduit à cette redécouverte : une série de perturbation représentait une fonction qui cachait des caractéristiques des particules élémentaires. En particulier la singularité de cette fonction caractérisait la masse de cette particule. Alors... il fallait obligatoirement transformer le début de cette série en fonction rationnelle.

En plus, au départ, on ne connaissait que trois premiers termes de cette série. Et, de manière inattendue, le pôle de l'approximant de Padé le plus simple a fourni la masse de la particule très proche de la valeur estimée expérimentalement.

C'était un véritable déclencheur. D'un côté les physiciens : G.A.Baker Jr., J.L.Gammel, P.Nevai et d'autres aux USA, M.Froissart, D.Bessis, J.L.Basdevant, J.Zinn-Justin en France, F.J.Yndurain en Espagne, M.Pusterla, G.Turchetti en Italie, les mathématiciens : R.S.Varga, E.B.Saff aux USA, J.S.R.Chisholm, P.R.Graves-Morris en Angleterre, A.A.Gonchar, A.A.Aptekarev, V.Kalyagin, Souetine, V.I.Buslaev à Moscou, Pommerenke et H.Stahl en Allemagne, M.G.Krein, A.A.Nudelman, V.K.Dzyadyk et V.Ya.Skorobogadko en Ukraine, puis les spécialistes de l'algorithmique numérique : A.C.Aitken en Allemagne, Daniel Shanks, William Gragg et Jef Wimp aux USA, Peter Wynn

au Canada, Claude Brezinski et Jacek Gilewicz en France qui contribuent au développement de toute sorte d'applications des AP en analyse numérique et aux méthodes d'accélération de la convergence des suites. A cette famille de "padéistes" il faut ajouter les équipes travaillant sur les fractions continues : Arne Magnus, W.B.Jones, W.J.Thron aux USA, H.Waadeland en Norvège, Alphonse Ph. Magnus en Belgique et Marcel de Bruin en Hollande. Il faut ajouter aussi les spécialistes des polynômes orthogonaux, surtout les espagnols : F.Marcellan, J.Dehesa, P.Gonzales-Vera, J.J.Guadalupe, E.Godoy, J.Vinuesa et bien d'autres.

En 1972 la conférence de Bulder, puis celle de Canberbury ont réuni finalement ces spécialistes de différentes branches. Désormais les conférences internationales perpétuent les rencontres interdisciplinaires et aujourd'hui on compte plus que 10000 références dans le domaine des AP et sujets annexes.

## 2.2 Problème de la convergence des approxi- mants de Padé

On a déjà mentionné la fameuse conjecture de Padé qui est tombée 100 ans après être formulée. Aujourd'hui on connaît très peu de théorèmes de convergence des AP. Il y a quelques théorèmes simples concernant les fonctions méromorphes, en commençant par le théorème de Montessus de Ballore, puis le théorème sur la convergence uniforme des AP vers les fonctions de Stieltjes. Pour la class  $S$  de fonctions de Schoenberg, appelée aussi *Polya frequency*, Arms et Edrei prouvent en 1970 la convergence asymptotique des approximants de Padé, mais la position des zéros et des pôles excédentaires n'y est pas contrôlée. Toutefois, en 1980 Jacek Gilewicz et Elie Leopold ont montré qu'il existe un petit domaine au voisinage de l'origine libre des zéros

et des pôles excédentaires, c'est-à-dire un domaine où la convergence est uniforme. Puis, il y a des théorèmes de la convergence moins intéressants : convergence en mesure (en dehors d'un ensemble de mesure nulle) ou convergence en capacité (en dehors d'un ensemble de capacité nulle ; c'est le fameux théorème de Pommerenke de 1973). Ces théorèmes sont moins intéressants, car ces ensembles ne sont pas localisés, ce qui leur procure uniquement un intérêt théorique. Tout espoir d'avoir un théorème général est tombé à l'eau dès que Wallin a trouvé l'exemple d'une fonction entière pour laquelle les pôles et les zéros des AP remplissaient le plan complexe de façon dense. Et récemment le contre-exemple de la conjecture de Padé par V.I. Buslaev. Il faut remarquer que toute cette théorie de convergence repose sur l'étude des positions des pôles et des zéros des AP, c'est-à-dire sur l'étude des zéros des polynômes définis par des relations (générales) de récurrence à trois termes (donc il ne s'agit pas nécessairement des polynômes orthogonaux). Il faut noter également que les AP des fonctions qui n'appartiennent pas nécessairement

aux classes de Stieltjes ou  $S$ , reproduisent en général bien les caractéristiques de ces fonctions : les zéros et les pôles stables des AP reproduisent bien les vrais zéros et pôles de la fonction, les pôles et les zéros qui s'entrelacent reproduisent les coupures, entassement des zéros et des pôles sur un cercle dénotent une frontière naturelle et l'apparition des doublets de Froissart (c'est-à-dire pôles et zéros très proches) signale le bruit.

### 2.3 Approximants de Padé en analyse numérique

Dans les algorithmes itératifs qui améliorent l'approximation d'une fonction à chaque itération, on utilise classiquement les séries tronquées. Plusieurs auteurs ont remarqué que le remplacement de ces séries tronquées par de simples AP procure une énorme économie de calcul. Un exemple présenté

par J. Gilewicz [?] sur le calcul relatif à la diffraction de la lumière par un réseau montre que le calcul d'un AP avec 7 coefficients à chaque itération donnait meilleur résultat que l'itération sur une série tronquée au centième terme. On a ainsi développé [?] les algorithmes du choix du meilleur approximant de Padé "*experimental*", très utiles en pratique numérique.

D'autres méthodes, sont relatives aux algorithmes d'accélération de la convergence, comme l' $\varepsilon$ -algorithme qui est lié directement aux AP. Ces méthodes sont très utiles dès qu'on itère sur une valeur, par exemple lors d'une intégration numérique.

Signalons ici une propriété spectaculaire de l' $\varepsilon$ -algorithme observée par Claude Brezinski et démontrée par Jacek Gilewicz. Celle qui permet de sommer les suites divergentes, dite propriété de l'anti-limite [10, p.332].

## 2.4 Meilleure approximation rationnelle

Attention, l'AP n'est pas la meilleure approximation rationnelle d'une fonction de variable réelle sur un intervalle réel. L'AP est la meilleure approximation locale d'une fonction d'une variable complexe, c'est-à-dire la meilleure approximation rationnelle de cette fonction au voisinage infinitésimal du point de développement. C'est, par sa nature, une approximation d'une fonction d'une variable complexe. Dans beaucoup de cas elle réalise un prolongement analytique d'une série de Taylor au delà du disque de la convergence. En particulier, si la série représente une fraction rationnelle, la méthode d'approximation de Padé retrouve automatiquement cette fraction, qui se trouve au coin d'un bloc infini dans la table de Padé.

## 2.5 Approximants de Padé et le bruit

Il y a une quarantaine d'années Marcel Froissart, aujourd'hui professeur de physique corpusculaire au Collège de France, a voulu simuler le bruit numérique en entachant les coefficients d'une série numérique des erreurs aléatoires. Il a observé que les AP des séries bruitées présentaient les pôles et les zéros stables correspondant aux vrais zéros et pôles de la fonction considérée, puis certains zéros et pôles se groupaient en doublets placés de façon aléatoire au voisinage du cercle de convergence de la série non-bruitée. Ce phénomène a été largement étudié vers les années 1990-2000 par Jacek Gilewicz et Maciej Pindor qui ont montré numériquement, que statistiquement ces doublets de Froissart se placent au voisinage des zéros de l'unité (il s'agissait de l'exemple de la série géométrique bruitée). Ce problème reste toujours ouvert.



# Chapitre 3

## Approximants de Padé et fractions continues

### 3.1 Approximants de Padé

Soit  $f$  une fonction analytique dans un domaine  $D \subset \mathbb{C}$  et  $z_0 \in D$ . On note par  $P_m$  un polynôme de degré  $m$  au plus. Si besoin est et si c'est le cas, on dira que le polynôme  $P_m$  est exactement de degré  $m$ .

On dit qu'un polynôme  $P_m$  est inversible, si  $P_m(0) \neq 0$  et dans ce cas  $P_m^{-1}$  désigne l'inverse de  $P_m$ .

**Définition 3.1** *On dit que  $P_m/Q_n$  est un approximant de Padé de  $f$  au voisinage de  $z_0$  et on le note  $[m/n]$ , si et seulement si*

$$f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = O((z - z_0)^{m+n+1}). \quad (3.1)$$

Si besoin est de préciser, on notera l'AP :  $[m/n]_f(z - z_0)$ . L'existence d'un approximant de Padé implique l'inversibilité de  $Q_n$  en  $z_0$ . Dans le cas classique de  $z_0 = 0$  la relation (??) doit donc être comprise ainsi :

$$\begin{aligned} f(z) - P_m(z)Q_n^{-1}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i - (p_0 + p_1 z + \dots + p_m z^m) (1 + q_1 z + \dots + q_n z^n)^{-1} = \\ &= \alpha z^{m+n+1} + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Cela conduit à une définition équivalente :

**Définition 3.2** *On dit que  $P_m/Q_n$  est un AP de  $f$  au voisinage de  $z_0$  si le système linéaire suivant*

$$Q_n(z_0) = 1, \quad Q_n(z)f(z) - P_m(z) = O((z - z_0)^{m+n+1}) \quad (3.3)$$

*possède une solution.*

Dans le cas de  $z_0 = 0$  (??) s'écrit :

$$(1 + q_1 z + \dots + q_n z^n)(c_0 + c_1 z + \dots) - (p_0 + p_1 z + \dots + p_m z^m) = \alpha z^{m+n+1} + \dots \quad (3.4)$$

qui conduit au système linéaire découplé entre  $Q_n$  et  $P_m$ . Les coefficients de  $Q_n$  sont calculés par :

$$\begin{pmatrix} c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & \dots & c_{m-n+1} \\ c_{m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m+n-1} & c_{m+n-2} & c_{m+n-3} & \dots & c_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ c_{m+3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m+n} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

$(c_{-|k|} \equiv 0)$ .

Puis, la solution de (??) fournit automatiquement le numérateur  $P_m$  :

$$k = 0, 1, \dots, m : \quad -p_k + \sum_{j=1}^n c_{k-j}q_j = -c_k. \quad (3.6)$$

La matrice du système (??) est une matrice de Toeplitz. Son déterminant sera noté  $C_n^m$  et la table de tels déterminants se nomme *table c*. Si le système (??) possède la solution, alors on dit que l'approximant de Padé existe. Dans ce cas il peut être exprimé à l'aide du rapport de deux déterminants :

$$\frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \frac{\begin{vmatrix} C_{(m)}(z) & zC_{(m-1)}(z) & z^2C_{(m-2)}(z) & \dots & z^nC_{(m-n)}(z) \\ c_{m+1} & c_m & c_{m-1} & \dots & c_{m-n+1} \\ c_{m+2} & c_{m+1} & c_m & \dots & c_{m-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & c_{m+n-2} & \dots & c_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^n \\ c_{m+1} & c_m & c_{m-1} & \dots & c_{m-n+1} \\ c_{m+2} & c_{m+1} & c_m & \dots & c_{m-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & c_{m+n-2} & \dots & c_m \end{vmatrix}} \quad (3.7)$$

où

$$C_{(k)} : C_{(k)}(z) = \begin{cases} \sum_{j=0}^k c_j z^j & \text{si } k \geq 0, \\ 0 & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

La forme (??), qui découle des formules de Cramer, définit, plus généralement, une fraction rationnelle notée  $\{m/n\} = \frac{P_m}{Q_n}$  dans la table de Padé, qui n'est pas nécessairement un AP (cas de certains éléments d'un bloc).

Il existe plusieurs algorithmes rapides pour résoudre de tels systèmes. Le membre de droite de (??) provient de l'hypothèse  $Q(0) = q_0 = 1$ . Sans elle on aurait un système homogène de  $n$  équations à  $(n+1)$  inconnues  $(q_0, q_1, \dots, q_n)$  qui, d'après Frobenius, possède toujours une solution non triviale. Malheureusement, parfois on obtient  $q_0 = 0$ . Ces sont les cas où les approximants de Padé n'existent pas. Dans ces cas, bien sûr, le système (??) n'a pas de solutions.

On place les AP dans une table, appelée table de Padé ou *table p* :

$m \setminus n$	0	1	2	...
0	[0/0]	[0/1]	[0/2]	...
1	[1/0]	[1/1]	[1/2]	...
2	[2/0]	[2/1]	[2/2]	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Si tous les éléments de cette table sont différents les uns des autres, ou, ce qui revient au même, si les numérateurs et les dénominateurs de tous les AP  $[m/n]$  sont exactemant de degrés  $m$  et  $n$ , alors on dit, que la table  $p$  est *normale*. De même on dira que la fonction qui l'a engendrée est *normale*. Sinon, on se trouve dans le cas évoqué plus haut, où certaines solutions du système (??) n'existent pas, où, ce qui revient au même, les solutions correspondantes du système de  $(n + 1)$  équations (sans condition  $Q(0) \neq 0$ ) existent, mais avec  $q_0 = 0$ . Dans ce cas *la table p* présente des blocs carrés composés des mêmes éléments  $\{m/n\}$  :

où les éléments sous la diagonale représentent "*les AP non-existants*". La notation  $\{m/n\}$  est réservée pour une fraction rationnelle  $\frac{P_m}{Q_n}$  qui n'est pas nécessairement un AP.

Les blocs sont notées  $(m, n; k)$ , où  $k$  représente sa dimension et  $m, n$  les indices du coin haut gauche. Les éléments se trouvant sur les positions  $m + k - j/n + l$ ,  $j, l = 1, 2, \dots, k - 1$  ne sont pas les AP ("AP *inexistants*"). Si le bloc est infini, alors la série représente la fonction rationnelle  $[m/n]$ . On voit donc, qu'en suivant n'importe quelle paradiagonale dans la table  $p$ , on retrouve automatiquement la fonction rationnelle si c'est le cas.

Rappelons quelques théorèmes [?] sur les approximants de Padé qui nous seront utiles plus loin. Introduisons les notations suivantes :

$$f : f(z) = c_0 + c_1z + \dots \quad (3.8)$$

$$f_m : f_m(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \dots \quad (m \geq 0), \quad (3.9)$$

ou  $f_m(z) = f(z) \quad \text{si} \quad m \leq 0.$

$$f_{(m)} = f - f_{m+1}, \quad -\infty < m < +\infty \quad \text{série tronquée} \quad (3.10)$$

$$g_m : g_m(z) = z^{-m} f_m(z), \quad -\infty < m < +\infty \quad (3.11)$$

On a :

$$C_n^m(g_k) = C_n^{m+k}(f) \neq 0 \quad (3.12)$$

**Théorème 3.1** *Si un approximant de Padé existe, alors il est unique.*

Pour la démonstration : voir celle du Théorème 6.1.

**Théorème 3.2** *Si la fonction  $f$  est rationnelle de type  $\{m/n\}$ , alors quelque soit le point régulier  $z_0$  de son développement en série, la table  $p$  obtenue présentera toujours le même bloc infini  $(m, n; \infty)$ .*

**Théorème 3.3** *Soit  $f$  une série formelle inversible, alors :*

$$\forall m, n \geq 0 : \quad [m/n]_f^{-1} = [n/m]_{f^{-1}} \quad (3.13)$$

*En particulier si la série  $f$  engendre un bloc de type  $(m, n; k)$ , alors la série inversée  $f^{-1}$  engendre le bloc de type  $(n, m; k)$ .*

**Théorème 3.4** *Soit  $f$  une série formelle, alors*

$$\forall m, n \geq 0 : \quad [m/n]_{\bar{f}} = \overline{[m/n]_f} \quad (3.14)$$

*où la conjugaison complexe porte sur les coefficients de la série ou de ceux de l'approximant de Padé. En particulier, si  $f$  est à coefficients réels, alors les coefficients des approximants de Padé de  $f$  sont réels.*

**Théorème 3.5** Soit  $f$  une fonction telle que  $f(z)\overline{f(\bar{z})} = 1$ , alors :

$$\forall m, n \geq 0 : \quad [m/n]_f(z) \overline{[n/m]_f(\bar{z})} = 1 \quad (3.15)$$

**Théorème 3.6** Soient  $[m/n]_f$  l'approximant de Padé de la série formelle  $f$  appartenant au bloc de type  $(m, n; k + 1)$ , ( $k \geq 0$ ), et  $R_j$  un polynôme de degré  $j$ , alors on a :

$$[m/n]_f + R_j = \begin{cases} [m/n]_{f+R_j} & \text{si } 0 \leq j \leq m - n \\ [n + j/n]_{f+R_j} & \text{si } \text{Max}(0, m - n + 1) \leq j \leq m - n + k \end{cases} \quad (3.16)$$

Si  $k = 0$ , tous les cas sont représentés par la première alternative. Dans la table de Padé de la série  $f + R_j$  il y a, selon la valeur de  $j$ , un bloc de type suivant :

$$0 \leq j \leq m - n : \quad (m, n; k + 1) \quad (3.17)$$

$$j = m - n + k - p \geq m - n \quad (0 \leq p \leq k) : \quad (m + k - p, n; p + 1). \quad (3.18)$$

**Théorème 3.7** Soit  $f$  la série formelle,  $a, b, c$  et  $d$  des constantes, telles que  $(cf + d)$  soit inversible. Alors :

$$\forall n \quad [n/n]_{\frac{af+b}{cf+d}} = \frac{a[n/n]_f + b}{c[n/n]_f + d} \quad (3.19)$$

Pour trouver d'autres éléments sur la théorie des AP, on peut se référer à [?, ?, ?].

### 3.2 Fractions continues

Soit la fraction rationnelle  $\frac{A_n}{B_n}$  donnée par

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}} \quad (3.20)$$

On appelle fraction continue, la suite des fractions rationnelles  $\left\{ \frac{A_n}{B_n} \right\}_{n \geq 0}$  et on la note :

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \quad (3.21)$$

Cette définition est analogue à celle d'une série qui représente une écriture compacte d'une suite de sommes partielles.

La fraction rationnelle  $\frac{A_n}{B_n}$  est appelée  $n^{\text{ième}}$  approximant (ou "convergent" ou "réduit" ) de la fraction continue (??).

Les  $a_i$  et  $b_i$  s'appellent respectivement  $n^{\text{ième}}$  numérateur partiel et  $n^{\text{ième}}$  dénominateur partiel.

Si  $\{a_i, b_i\}$  sont des éléments d'un corps, et si la suite des convergents converge dans ce corps, alors on dit que la fraction continue (??) est convergente. Si  $\{a_i, b_i\}$  sont des fonctions d'une variable complexe  $z$ , l'ensemble des  $z$  pour lesquels la suite de convergents converge est dit domaine de convergence de la fraction continue (??). On dit que la fraction continue diverge en dehors de ce domaine.

La notation compacte la plus utilisée de la fraction continue (??) est :

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} = b_0 + \mathbf{K}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n +} \quad (3.22)$$



Le symbole **K** provient du mot allemand *Kettenbrüche* qui se traduit par *fractions en chaîne* ou *enchaînées*. Le terme anglosaxon est *continued fraction* qui a été maladroitement traduit en français par *fraction continue* au lieu de *fraction continuée*, comme l'a remarqué Jean Dieudonné. Une ancienne notation utilisée par Alfred Pringsheim était :

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \dots \quad (3.23)$$

Les formules récurrentes suivantes facilitent le calcul des convergents de (??) :

$$\left. \begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} \end{aligned} \right\} \quad \forall n \geq 1 \quad (3.24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_0 &= b_0, \quad A_{-1} = 1 \\ B_0 &= 1, \quad B_{-1} = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.25)$$

On peut les écrire de façon conventionnelle ainsi :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} &= b_n \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix} + a_n \begin{pmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A_{-1} \\ B_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Familles

Les fractions continues peuvent être classées en plusieurs familles selon les propriétés de leurs numérateurs et dénominateurs partiels. Entre autres, on peut distinguer les familles suivantes :

1/ Fractions C sont les fractions continues de la forme

$$1 + \mathbf{K}_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_i z^{\beta_i}}{1} \right) \quad \alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \beta_i \in \mathbb{N} \quad (3.26)$$

2/ Fractions S ou fractions continues de Stieltjes sont représentées par

$$\mathbf{K}_{i=1}^{\infty} \left( \frac{a_i z}{1} \right) \quad a_i > 0 \quad (3.27)$$

3/ Fractions T, ou les fractions continues de Thron, sont de la forme

$$\mathbf{K}_{i=1}^{\infty} \left( \frac{F_i z}{1 + G_i z} \right) \quad F_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad G_i \in \mathbb{C} \quad (3.28)$$

-Si  $F_1 z$  est remplacé par  $F_1$ , (??) sera dite fraction M par référence à Murphy et McCabe

4/ Fractions J, introduite par Jacobi, ont la forme suivante :

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1 + z} + \mathbf{K}_{i=2}^{\infty} \left( \frac{-\alpha_i}{\beta_i + z} \right) \quad \alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \beta_i \in \mathbb{C} \quad (3.29)$$

5- Interpolation de Thiele : ou les fractions continues de la forme :

$$b_0 + \mathbf{K}_{i=2}^{\infty} \left( \frac{z - z_{i-1}}{b_i} \right) \quad b_i \in \mathbb{C}, \quad z_i \in \mathbb{C} \quad (3.30)$$

### 3.3 Relations entre les fractions continues et les approximants de Padé

L'importance des fractions continues dans la théorie de la table de Padé se manifeste surtout dans les résultats de convergence, et ceci découle du fait que la suite des approximants de Padé paradiagonale coïncide avec les convergents de la fraction continue associée à la série. Nous ne donnerons ici que quelques résultats de cette connection ; pour d'autres compléments voir [?, ?, ?, ?].

**Théorème 3.8** *les convergents  $\frac{A_{2n}}{B_{2n}}$  (resp.  $\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ ) de la FC de Stieltjes (??) sont les approximants de Padé  $[n - 1/n]$  (resp.  $[n/n]$ ).*

**Théorème 3.9** *Soit*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \begin{cases} c_0 + c_1 z + \dots + c_{k-1} z^{k-1} + z^k \frac{a_0}{1-} \frac{a_1}{1-} \frac{a_2}{1-} \dots & k = 1, 2, \dots \\ \frac{a_0}{1-} \frac{a_1}{1-} \frac{a_2}{1-} \dots & k = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

*alors les convergents successive de la FC de Stieltjes (??) sont les approximants de Padé suivants :*

$$\begin{array}{ccc} [k - 1/0] & & \\ [k/0] & [k/1] & \\ & [k + 1/1] & [k + 1/2] \\ & \dots & \dots \end{array} \quad (3.32)$$

**Théorème 3.10** *Soit*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} d_i z^i} = \frac{1}{d_0 + d_1 z + \dots + d_{k-1} z^{k-1} + z^k \frac{b_0}{1-} \frac{b_1}{1-} \frac{b_2}{1-} \dots} \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

*alors les convergents successive de la FC de Stieltjes (??) sont les approximants de Padé suivants :*

$$\begin{array}{ccc} [0/k - 1] & [0/k] & \\ & [1/k] & [1/k + 1] \\ & & [2/k + 1] \quad \dots \\ & & \dots \end{array} \quad (3.34)$$

**Théorème 3.11** *Soit*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{k-1} z^{k-1} + z^k \frac{a_0}{1 + b_0 z} \frac{a_1 z^2}{1 + b_1 z} \frac{a_2 z^2}{1 + b_2 z} \cdots \quad (3.35)$$

alors les convergents  $\frac{A_n}{B_n}$  de cette fraction continue de Jacobi sont les approximants de Padé  $[n + k - 1/n]$

# Chapitre 4

## Fonctions de Stieltjes et approximants de Padé

Introduisons quelques notations :  $\uparrow$  - espace des fonctions croissantes ;

$\mathcal{B}([a, b])$  - espace des fonctions numériques à variation bornée sur  $[a, b]$  ;

$V_f$  - ensemble des fonctions prenant un nombre fini de valeurs sur  $[a, b]$  ;

$V_i$  - ensemble des fonctions prenant un nombre infini de valeurs sur  $[a, b]$  ;

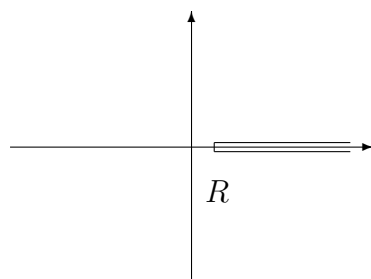
$\uparrow \mathcal{B}([a, b])V_i$  - l'intersection des ensembles définis précédemment ;

$d\mu$  - mesure.

Notre travail porte sur les fonctions de Stieltjes. Considérons au départ la représentation intégrale suivante d'une fonction de cette classe :

$$z \in \mathbb{C} \setminus ]R, \infty[ : \quad f(z) = \int_0^{1/R} \frac{d\mu(x)}{1 - xz}, \quad \mu \in \uparrow \mathcal{B}, R \geq 0. \quad (4.1)$$

$\mu$  est une fonction qui peut présenter des sauts, auquel cas, elle n'est dérivable qu'au sens des distributions (la dérivée d'une fonction de Heaviside est une distribution  $\delta$  de Dirac). La notation  $d\mu \geq 0$ , veut dire que  $d\mu$  est une mesure positive. La fonction  $f$  est analytique dans le plan complexe en dehors de la coupure  $]R, \infty[$  :



**Fig.1** : Le plan complexe avec la coupure, sur laquelle la fonction  $f$  est définie par (??).

En développant en série  $\frac{1}{1-xz} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n z^n$  et en intervertissant (formellement si  $R = 0$ ) l'ordre de la sommation et de l'intégration dans (??) on obtient la *série de Stieltjes*

$$f \implies C : C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (4.2)$$

qui est une série asymptotique si son rayon de convergence  $R = 0$ . Sinon, elle converge dans le disque de rayon  $R > 0$ . Les coefficients  $c_n$  se nomment *moments* de la mesure  $d\mu$  :

$$c_n = \int_0^{1/R} x^n d\mu(x) \quad (4.3)$$

Si  $R = 0$  ce sont les *moments de Stieltjes*, si  $R = 1$  ce sont les *moments de Hausdorff* (ou encore les éléments d'une suite dite *totalelement monotone*).

Notons encore deux autres définitions des fonctions de Stieltjes. La première, la plus utilisée aujourd'hui consiste à remplacer  $z$  par  $-z$  dans (??) :

$$z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, -R[ : f(z) = \int_0^{1/R} \frac{d\mu(x)}{1+xz}, \quad \mu \in \uparrow \mathcal{B}, R \geq 0. \quad (4.4)$$

Une autre, utilisée surtout par les Russes est due à Markov :

$$z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, -R[: \quad f(z) = \int_0^R \frac{d\mu(x)}{z+x}, \quad \mu \in \uparrow \mathcal{B}, R \geq 0. \quad (4.5)$$

Pour comparer ces trois définitions regardons trois fonctions de Stieltjes calculées, dans l'ordre, par une de ces formules avec la mesure  $d\mu(x) = dx$  :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{z} \ln \left(1 - \frac{z}{R}\right) \\ &\frac{1}{z} \ln \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ &\ln \left(1 + \frac{1}{Rz}\right) \end{aligned}$$

Quand on parle de "problème des moments" on pense à la reconstitution de la mesure  $d\mu$  à partir de la suite de ses moments  $(c_n)$ . Les approximants de Padé de la série de Stieltjes (??) donnent l'approximation de (??), ou encore l'approximation de  $\mu$  par une fonction en escaliers de  $\uparrow \mathcal{BV}_f$ .

Notre étude portera essentiellement sur les fonctions de Stieltjes non-rationnelles, c'est-à-dire celles définies par les fonctions  $\mu$  appartenant à  $V_i$ . Le cas des fonctions de Stieltjes rationnelles est réglé par le théorème 2.1 ; c'est le cas où

$$d\mu(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta(x - \beta_i) dx, \quad \beta_i > 0, \alpha_i > 0 \quad (4.6)$$

et où la table  $p$  présente un bloc infini. Pour caractériser une série de Stieltjes (donc aussi une fonction de Stieltjes qui lui est associée) on utilise les déterminants de Hankel définis comme suit :

$$m, n \geq 0 : H_n^m = \left| (c_{m-2+i+j})_{i,j=1,n+1} \right| = \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+n} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & \\ \vdots & & \cdot & \\ c_{m+n} & \cdots & \cdots & c_{m+2n} \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

$H_n^m$  est un déterminant d'une matrice  $(n + 1) \times (n + 1)$  ayant les mêmes éléments sur toutes les antidiagonales. Les déterminants de Hankel sont liés aux déterminants de Toeplitz (déterminants des matrices de systèmes (??)) :

$$C_n^m = \left| (c_{m+i-j})_{i,j=1,n} \right|. \quad (4.8)$$

$$H_n^m = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} C_{n+1}^{m+n}; \quad C_n^m = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} H_{n-1}^{m-(n-1)} \quad (4.9)$$

Ces dernières relations s'obtiennent par une permutation des colonnes.

**Théorème 4.1** *La série (??) est une série de Stieltjes représentant la fonction non-rationnelle de Stieltjes (c'est-à-dire  $\mu \in \uparrow \mathcal{BV}_i$ ) si et seulement si les suites des moments  $(c_n)_{n=0}^\infty$  et  $(c_n)_{n=1}^\infty$  sont  $H$ -positives, c'est-à-dire :*

$$\forall n : \quad H_n^0 > 0 \quad \text{et} \quad H_n^1 > 0 \quad (4.10)$$

Nous disposons donc de deux moyens d'identification d'une fonction non-rationnelle de Stieltjes : ou bien nous découvrons sa représentation intégrale (??) (c'est-à-dire la mesure  $d\mu$ ), ou, en connaissant les moments  $(c_n)$  nous vérifions les inégalités (??).

Il existe des définitions axiomatiques des fonctions de Stieltjes [?] via leur propriétés. Nous ne les précisons pas ici, mais nous citerons quelques propriétés simples de ces fonctions qui nous permettent, au moins, d'éliminer les fonctions qui ne les possèdent pas avant de se lancer à la recherche d'une mesure positive ou à la vérification des inégalités (??).



## 4.1 Propriétés des fonctions de Stieltjes.

**Propriété 4.1** *Les fonctions de Stieltjes sont les fonctions complexe-symétriques, c'est-à-dire :*

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad (4.11)$$

**Propriété 4.2**  *$f$  est analytique en dehors de  $[R, \infty[$ , ( $R \geq 0$ )*

**Propriété 4.3**  *$f$  est une fonction d'Herglotz, c'est-à-dire*

$$\operatorname{Im} f(z) \operatorname{Im} z > 0 \text{ pour } \operatorname{Im} z \neq 0 \quad (4.12)$$

**Propriété 4.4**

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) < \infty \quad (4.13)$$

Par exemple cette propriété n'est pas satisfaite par la fonction exponentielle  $e^z$ , donc cette fonction n'est pas de Stieltjes.

**Propriété 4.5**

$$\forall x \in ]-\infty, R[ : f(x) \geq 0 \quad (4.14)$$

$$f'(x) \geq 0 \quad (4.15)$$

$$[m/n]_f(x) \geq 0 \quad (4.16)$$

**Propriété 4.6** Soit  $f$  une fonction de Stieltjes définie par (??), alors  $g$  défini par

$$\int_0^{1/R} \frac{d\mu(x)}{1-xz} = f(z) = \frac{f_0}{1-zg(z)} \quad (4.17)$$

est aussi une fonction de Stieltjes. Elle est définie par

$$g(z) = \int_0^{1/R} \frac{d\nu(x)}{1-xz}, \quad (4.18)$$

où la mesure  $d\nu$  est définie par la mesure  $d\mu$ . En plus, si la fonction  $\mu$  présente un saut à l'origine, alors la fonction  $\nu$  ne l'en n'a pas et vice versa [?].

Remarquons que si  $f$  est de Stieltjes, alors  $f^{-1}$  n'en n'est pas (??). Soit  $f$  une fonction (série) inversible normalisée par  $f(0) = 1$ . On définit les suites  $c$ ,  $d$  et  $g$  par :

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots = (1 + d_1z + d_2z^2 + \dots)^{-1} \equiv & (4.19) \\ &\equiv (1 - z(g_0 + g_1z + \dots)) \end{aligned}$$

Les relations suivantes d'Hadamard nous seront utiles pour identifier les fonctions de Stieltjes :

$$\begin{aligned} \forall m, n : \quad C_n^m(c) &= (-1)^{mn} C_m^n(d); & (4.20) \\ m = 0, 1, 2 : \quad H_n^m(d) &= (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + n} H_{m+n-1}^{2-m}(c) \end{aligned}$$

Pour montrer que  $g$  est une fonction de Stieltjes on se sert du Théorème 3.1. Rappelons cette démonstration.

D'après (??) on a  $\forall k \geq 0 : g_k = -d_{k+1}$ . On va vérifier les inégalités (??) pour la suite  $g$  en sachant qu'elles sont satisfaites pour la suite  $c$ . On a :

$$H_n^0(g) = H_n^1(-d) = (-1)^{n+1} H_n^1(d) = (-1)^{2(n+1)} H_n^1(c) = H_n^1(c) > 0,$$

$$\begin{aligned} H_n^1(g) &= H_n^2(-d) = (-1)^{n+1} H_n^2(d) = (-1)^{(n+1)+3+n} H_{n+1}^0(c) = \\ &= H_{n+1}^0 > 0. \end{aligned}$$

La première transformation découle de la définition de la suite  $g$ , la deuxième correspond aux changement de signe de chaque colonne, la dernière repose sur (??).

**Propriété 4.7** Soit  $f$  une fonction de Stieltjes et  $F$  la fonction définie par :

$$f(z) = f_0 + f_1 z + \cdots + f_{n-1} z^{n-1} + z^n F(z) \quad (4.21)$$

alors  $F$  est aussi une fonction de Stieltjes définie par :

$$F(z) = \int_0^{1/R} \frac{x^n d\mu(x)}{1 - xz} \quad (4.22)$$

**Remarque 4.1** Les propriétés 3.2 et 3.4 montrent immédiatement que la fonction exponentielle  $e^z$  n'est pas de Stieltjes. La propriété 3.6 dit, en particulier, que  $f^{-1}$  n'est pas de Stieltjes.

## 4.2 Polynômes orthogonaux engendrés par les approximants de Padé

La théorie de la convergence des approximants de Padé repose sur certaines propriétés des polynômes orthogonaux engendrés par les approximants en question. Dans cet aspect, les polynômes orthogonaux ont été étudiés dans [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?].

Soit  $P_n$  un polynôme d'ordre zéro. On note  $\overline{P}_n$  le polynôme de degré  $n$  défini par :

$$\overline{P}_n : \quad \overline{P}_n(x) = x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right) \quad (4.23)$$

**Théorème 4.2** Soit  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_n z^n$  une série formelle où :

$$\forall n : \quad c_n = \int_a^b x^n d\mu(x); \quad \mu \in \mathcal{B}[a, b]; \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (4.24)$$

et telle que pour  $k \geq -1$  fixé tous les approximants de Padé de la suite :

$$k \geq -1 \quad \left\{ [n + k/n]_f \right\}_{n \geq \text{Max}(0, -k)} \quad (4.25)$$

existent, alors les dénominateurs  $Q_n$  de ces approximants définissent selon (??) les polynômes  $\overline{Q}_n$  orthogonaux au sens de :

$$\forall n, n' : \quad \int_a^b \overline{Q}_n(x) \overline{Q}_{n'}(x) x^{k+1} d\mu(x) = \alpha_n \delta_{nn'} \quad (4.26)$$

Rappelons les propriétés des polynômes  $P$  et  $Q$  des approximants de Padé  $P_{n+k}/Q_n$  selon la valeur de  $k$ .

**Théorème 4.3** Soient  $f$  une fonction (série) non-rationnelle de Stieltjes de rayon de la convergence  $R$  strictement positif ( $R > 0$ ),  $k$  un entier fixé et  $\left\{ [n + k/n]_f \right\}_{n \geq \text{Max}(0, -k)}$  une suite paradiagonale d'approximants de Padé  $P_{n+k}/Q_n$ , alors, selon la valeur de  $k$ , les polynômes  $P$  et  $Q$  possèdent les propriétés qui suivent.

Si  $k$  satisfait à :

$$k \geq -1 \tag{4.27}$$

alors :

(I) Les dénominateurs  $Q_n$  des approximants de Padé considérés définissent selon (??) les polynômes orthogonaux  $\overline{Q}_n$  au sens de (??), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall n, n' : \int_0^{1/R} \overline{Q}_n(x) \overline{Q}_{n'}(x) x^{k+1} d\mu(x) &= \tag{4.28} \\ &= \int_0^{1/R} \overline{Q}_n(x) \overline{Q}_{n'}(x) x^{k+1} \varphi(x) dx = \alpha_n \delta_{nn'}. \end{aligned}$$

(II) Les résidus des pôles des approximants de Padé sont tous négatifs.

(III) Les pôles des approximants de Padé se placent dans  $]R, \infty[$ .

(IV) Quel que soit  $n$ , les zéros du polynôme  $Q_n$  s'intercalent entre les zéros du polynôme  $Q_{n+1}$ .

(V)  $n$  zéros (ou  $n-1$ , si  $k = -1$ ) des numérateurs  $P_{n+k}$  s'intercalent entre les zéros des dénominateurs  $Q_n$ .

Si  $k$  satisfait à :

$$k \leq 0 \tag{4.29}$$

alors :

(VI) Les numérateurs  $P_{n+k}$  des approximants de Padé de la suite  $\left\{ [n + k/n]_f \right\}_{n \geq -k}$  définissent d'après (??) les polynômes orthogonaux  $\overline{P}_{n+k}$  au sens de :

$$\forall m, m' : \int_0^{1/R} \overline{P}_m(x) \overline{P}_{m'}(x) x^{-k} d\nu(x) = \tag{4.30}$$

$$\int_0^{1/R} \overline{P_m(x)} \overline{P_{m'}(x)} x^{-k} \psi(x) dx = \beta_m \delta_{mm'}.$$

où la fonction  $\nu$  définit la fonction non-rationnelle de Stieltjes  $g$  qui est liée à  $f$  par :

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{c_0} - zg(z), \quad g(z) = \int_0^{1/R} \frac{d\nu(x)}{1-xz} \quad \nu \in \uparrow \mathcal{B} \quad (4.31)$$

et où la distribution  $\psi$  représente le saut de la fonction  $g$ .

- (VII) Les zéros des approximants de Padé (des polynômes  $P_m$ ) se placent dans  $]R, \infty[$ .
- (VIII) Quel que soit l'entier positif  $m$ , les zéros du polynôme  $P_m$  s'intercalent entre les zéros du polynôme  $P_{m+1}$ .
- (IX)  $n+k+1$  zéros (ou  $n$ , si  $k=0$ ) des dénominateurs  $Q_n$  se placent dans  $]R, \infty[$  et s'intercalent entre les zéros des numérateurs  $P_{n+k}$ .

L'intersection des cas (??) et (??) montre que dans le cas des suites suivantes :

$$\left\{ [n - 1/n]_f \right\}_{n \geq 1}, \quad \left\{ [n/n]_f \right\}_{n \geq 0} \quad (4.32)$$

aussi bien les numérateurs que les dénominateurs des approximants de Padé définissent les polynômes orthogonaux. Dans le cas des suites  $\{[n - 1/n]\}$  et  $\{[n/n]\}$  les zéros et les pôles des approximants de Padé se placent sur la coupure :

**Fig.2 :** *Positionnement des zéros et des pôles sur la coupure dans le cas des suites  $\{[n - 1/n]\}$  et  $\{[n/n]\}$ .*

Les zéros des polynômes orthogonaux se placent strictement à l'intérieur du support de la mesure (Théorème 3.3 (III) et (VII)). Les zéros et les pôles des AP qui ne se placent pas sur ce support (qui représente une coupure), ou qui ne représentent ni un zéro, ni un pôle de la fonction considérée, seront appelés *excédentaires*. Les zéros excédentaires représentent un "gène" dans le problème de convergence des approximants de Padé vers les fonctions non-rationnelles de Stieltjes, car ces dernières ne possèdent pas de zéros dans le domaine  $\mathbb{C} \setminus [R, \infty[$ . Dans le cas des suites  $\{[n + k/n]\}_{n \geq 0}$  ( $k > 0$ ) chaque terme possède  $k$  zéros excédentaires.

### 4.3 Zéros et pôles des approximants de Padé de $\ln(1 - z)$

Dans L'article de J.S.R.Chisholm et al. [?] qui est paru depuis 40 ans, dans lequel les auteurs y ont d'abord rappelé que les zéros et les pôles des AP  $[m/m]$  et  $[m/m - 1]$  de la fonction  $\ln(1 - z)$  développée à l'origine

$$\ln(1 - z) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} z^n \tag{4.33}$$

s'entrelacent sur la coupure  $]1, \infty[$ .

**Fig.3 :** Zéros et pôles de  $[n/n], n \leq 6$

**Fig.4 :** Zéros et pôles de  $[n/n - 1], n \leq 6$

Ils ont ensuite affirmé qu'en développant cette fois la même fonction au voisinage d'un point complexe  $z_0 \notin \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \ln(1 - z) &= \ln(1 - z_0) + \ln\left(1 - \frac{z - z_0}{1 - z_0}\right) \\ &= \ln(1 - z_0) - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left(\frac{z - z_0}{1 - z_0}\right)^n \end{aligned} \tag{4.34}$$



et calculant les AP  $[m/m]$  et  $[m/m - 1]$  à partir de cette série, les zéros et les pôles se placent sur la droite  $\{z - z_0 = t(1 - z_0), t > 1\}$ .

Nos résultats numériques montrent toutefois, que ceci est à moitié faux. Par exemple, pour le point  $z_0 = 1 + i$ , (c'est le point que Chisholm a étudié dans son article), on a la situation suivante :

**Fig.5 :** Zéros et pôles de  $[n/n], n \leq 6, (z_0 = 1 + i)$

**Fig.6 :** Zéros et pôles de  $[n/n - 1], n \leq 6, (z_0 = 1 + i)$

les pôles des approximants de Padé  $[m/m]$  et  $[m/m - 1]$  de cette fonction se placent comme prévu dans [?], mais les zéros échappent à cette règle. Cela a déjà été remarqué par S.Klarsfeld [?] dans son article de 1981. Il a considéré la fonction  $f(z) = -\ln(1 - z)$  développée comme suit :

$$f(z) = -\ln(1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{4.35}$$

$$c_0 = 0, n > 0 : c_n = \frac{1}{n}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* (z - z_0)^n = c_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{z - z_0}{1 - z_0} \right)^n \quad (4.36)$$

$$c_0^* = -\ln(1 - z_0), \quad n > 0 : c_n^* = \frac{1}{n(1 - z_0)^n} = c_n \frac{1}{(1 - z_0)^n}.$$

Nous utilisons \* pour préciser qu'il s'agit de développement en  $z_0$  qui n'est pas nécessairement égal à zéro. En considérant ce dernier développement Klarsfeld a remarqué que dans le système linéaire (??) pour le dénominateur de  $[m/m]^* = \frac{P_m^*}{Q_m^*}$ , le coefficient  $c_0^*$  n'intervient pas. Alors, dans ce cas le polynôme  $Q_m^*$  exprimé en variable  $\frac{z - z_0}{1 - z_0}$  possède les mêmes coefficients que le dénominateur de  $[m/m] = \frac{P_m}{Q_m}$  où  $Q_m(z) = 1 + q_1z + \dots + q_mz^m$ .

**Fig.7 :** Pôles des AP  $[m/m]$   
 calculés à partir du développement (??).

Il est facile de généraliser cette observation :

**Théorème 4.4** Soit  $[m/n]$  et  $[m/n]^*$ ,  $m \geq n$  les approximants de Padé, de la fonction  $f(z) = \ln(1 - z)$  développée aux points  $z = 0$  et  $z = z_0$  respectivement, si  $z_k$   $k = 1, 2, \dots, n$  désignent les pôles de  $[m/n]$ , alors

$$z_k^* = z_0 + z_k(1 - z_0) \quad (4.37)$$

sont les pôles de  $[m/n]^*$ .

Autrement dit, les pôles de  $[m/n]^*$  se placent sur la coupure  $z = z_0 + t(1 - z_0)$ ,  $t \geq 1$  dirigée par la droite joignant le point  $z_0$  de développement de  $f$  et le point de ramification  $z = 1$ , tandis que les zéros de  $[m/n]^*$  échappent à cette règle.

**Démonstration** Il suffit de remarquer, que pour que  $c_0^*$  n'intervienne pas dans la matrice du système (??) il faut que  $m - n + 1 > 0$ , c'est-à-dire que  $m \geq n$ . Ainsi, dans ce cas,  $Q_n^*$  exprimé en variable  $\frac{z-z_0}{1-z_0}$  possède les mêmes coefficients que le dénominateur  $Q_n$  :

Considérons les développements (??), (??) et les AP correspondants :

$$z = 0 : \quad [m/n](z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \frac{p_0 + p_1z + \dots + p_mz^m}{1 + q_1z + \dots + q_nz^n} \quad (4.38)$$

$$z = z_0 : \quad [m/n]^*(z) = \frac{P_m^*(z)}{Q_n^*(z)} = \frac{p_0^* + p_1^*(z - z_0) + \dots + p_m^*(z - z_0)^m}{1 + q_1^*(z - z_0) + \dots + q_n^*(z - z_0)^n} \quad (4.39)$$

En utilisant les formules (??) on peut déterminer le coefficient de proportionnalité entre  $Q_n^*$  et  $Q_n$ .

$$Q_n(z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^n \\ c_{m+1} & c_m & c_{m-1} & \dots & c_{m-n+1} \\ c_{m+2} & c_{m+1} & c_m & \dots & c_{m-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & c_{m+n-2} & \dots & c_m \end{vmatrix}, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
 Q_n^*(z) &= \begin{vmatrix} 1 & z - z_0 & (z - z_0)^2 & \dots & (z - z_0)^n \\ \frac{c_{m+1}}{(1-z_0)^{m+1}} & \frac{c_m}{(1-z_0)^m} & \frac{c_{m-1}}{(1-z_0)^{m-1}} & \dots & \frac{c_{m-n+1}}{(1-z_0)^{m-n+1}} \\ \frac{c_{m+2}}{(1-z_0)^{m+2}} & \frac{c_{m+1}}{(1-z_0)^{m+1}} & \frac{c_m}{(1-z_0)^m} & \dots & \frac{c_{m-n+2}}{(1-z_0)^{m-n+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{c_{m+n}}{(1-z_0)^{m+n}} & \frac{c_{m+n-1}}{(1-z_0)^{m+n-1}} & \frac{c_{m+n-2}}{(1-z_0)^{m+n-2}} & \dots & \frac{c_m}{(1-z_0)^m} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{z-z_0}{1-z_0} & \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^2 & \dots & \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n \\ \frac{c_{m+1}}{(1-z_0)^{m+1}} & \frac{c_m}{(1-z_0)^{m+1}} & \frac{c_{m-1}}{(1-z_0)^{m+1}} & \dots & \frac{c_{m-n+1}}{(1-z_0)^{m+1}} \\ \frac{c_{m+2}}{(1-z_0)^{m+2}} & \frac{c_{m+1}}{(1-z_0)^{m+2}} & \frac{c_m}{(1-z_0)^{m+2}} & \dots & \frac{c_{m-n+2}}{(1-z_0)^{m+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{c_{m+n}}{(1-z_0)^{m+n}} & \frac{c_{m+n-1}}{(1-z_0)^{m+n}} & \frac{c_{m+n-2}}{(1-z_0)^{m+n}} & \dots & \frac{c_m}{(1-z_0)^{m+n}} \end{vmatrix} (1-z_0)^{1+2+\dots+n} = \\
 &= (1-z_0)^{\frac{n(n+1)}{2} - [(m+1)+(m+2)+\dots+(m+n)]} \begin{vmatrix} 1 & \frac{z-z_0}{1-z_0} & \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^2 & \dots & \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n \\ c_{m+1} & c_m & c_{m-1} & \dots & c_{m-n+1} \\ c_{m+2} & c_{m+1} & c_m & \dots & c_{m-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & c_{m+n-2} & \dots & c_m \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{(1-z_0)^{mn}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{z-z_0}{1-z_0} & \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^2 & \dots & \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n \\ c_{m+1} & c_m & c_{m-1} & \dots & c_{m-n+1} \\ c_{m+2} & c_{m+1} & c_m & \dots & c_{m-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & c_{m+n-2} & \dots & c_m \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

d'où :

$$Q_n^*(z) = \underbrace{\frac{1}{(1-z_0)^{mn}}}_{const} Q_n \left( \frac{z - z_0}{1 - z_0} \right). \quad (4.41)$$

Nos résultats numériques confirment, que déjà les pôles des AP  $[m - 1/m]$  ne se placent pas sur la coupure :

**Fig.8 :** Pôles des AP  $[m-1/m]$   
 calculés à partir du développement (??).

**Remarque 4.1** *Il faut noter que cette relation particulière (??) entre les coefficients  $c_n^*$  et  $c_n$  des développements en série de  $f(z) = -\ln(1-z)$  en  $z_0 \neq 0$  et  $z_0 = 0$  respectivement, et qui permet de localiser les pôles des AP dans le cas où le développement a été fait en  $z_0 \neq 0$ , est propre à la fonction  $\ln(1-z)$  uniquement. Pour le moment nous n'avons pas repéré de relations aussi simples entre les coefficients de développement pour d'autres fonctions de Stieltjes. Ainsi la conclusion du théorème ne porte pas de caractère général relatif aux fonctions de Stieltjes.*

Les zéros des AP de la fonction  $\ln(1-z)$  développée en  $z_0$  ne se comportent

pas comme les pôles, à cause de la présence de  $c_0^* \neq 0$  (??) dans la définition des numérateurs  $P_m^*(z)$  (cf. (??)).

**Fig.9** : Zéros des AP  $[m/m]$   
 calculés à partir du développement (??).

**Théorème 4.5** [?] Soit  $f(z) = \ln(1 - z) - \ln(1 - z_0) = \ln\left(\frac{1-z}{1-z_0}\right)$  et

$$[n/n]_f(z) = \frac{P_n\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)}{Q_n\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)} = \frac{p_0 + p_1\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right) + \dots + p_n\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n}{1 + q_1\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right) + \dots + q_n\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n} \quad (4.42)$$

alors

$$[n/n]^*(z) := [n/n]_{f+\alpha}(z) = \frac{P_n^*\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)}{Q_n^*\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)} = \frac{\alpha Q_n\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right) + P_n\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)}{Q_n\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)}. \quad (4.43)$$

**Démonstration** Il est aisé de voir que (4.43) s'obtient en utilisant le cas particulier du théorème 23 [?], p.217 qui s'écrit :

$$[n/n]_f + c = [n/n]_{f+c} \quad (4.44)$$

où  $c = \alpha$  dans notre cas.

Si  $\alpha = 0$ , les zéros et les pôles se placent sur la coupure  $z_0 + t(1 - z_0)$ ,  $t \geq 0$ .

### Problème ouvert

L'emplacement des zéros de  $[n/n]^*(z)$  reste un problème ouvert. D'après le théorème 4.5 le problème consiste à analyser le comportement des zéros de  $P_n^*$  en fonction de  $\alpha$  telque  $\alpha \in [0, c_0^* = \ln(1 - z_0)]$ .

## Chapitre 5

# Approximants de Padé à $N$ points (APN).

Le problème étudié dans ce chapitre porte aussi le nom d'interpolation de Cauchy-Jacobi. Il s'agit, cette fois, de construire une fraction rationnelle qui approxime une fonction  $f$  donnée en lui étant égale, aux points d'abscisses  $z_0, z_1, \dots, z_n$ .

La construction de la table de Padé à  $N$  points résulte d'un jeu d'écritures assez fastidieuses utilisant des différences réciproques peu agréables à manipuler. Heureusement, toute la table de Padé ne doit pas nécessairement être construite et, comme pour les approximants de Padé ordinaires, les éléments diagonaux et paradiagonaux de la table sont bien suffisants en pratique.



## 5.1 Préliminaires

Soit  $f$  une fonction dont on connaît les développements limités suivants aux points  $z_1, z_2, \dots, z_N$  :

$$j = 1, \dots, N : \quad f(z) = \sum_{i=0}^{l_j-1} c_{ji} (z - z_j)^i + O\left((z - z_j)^{l_j}\right). \quad (5.1)$$

L'approximant de Padé à  $N$  points  $[m/n]$  de  $f$  est défini par :

$$[m/n]_{z_1^{l_1} z_2^{l_2} \dots z_N^{l_N}}(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_m z^m}{1 + q_1 z + \dots + q_n z^n}; \quad q_0 = 1 \quad (5.2)$$

$$l_1 + l_2 + \dots + l_N = l' = m + n + 1 \quad (5.3)$$

$$j = 1, \dots, N : \quad Q_n(z) \sum_{i=0}^{l_j-1} c_{ji} (z - z_j)^i - P_m(z) = O\left((z - z_j)^{l_j}\right). \quad (5.4)$$

Pour écrire explicitement les équations définissant les coefficients  $p_i$  et  $q_i$  il faut écrire les membres de gauche de (5.4) sous forme des sommes de puissances de  $(z - z_j)$  donc, d'abord remplacer dans  $P_m$  et  $Q_n$  les puissances de  $z$  par ces puissances.

Supposons que  $\zeta$  est un des points  $z_i$ . On a :

$$z^k = [(z - \zeta) + \zeta]^k = \sum_{r=0}^k C_k^r (z - \zeta)^r \zeta^{k-r}; \quad C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!} \quad (5.5)$$

$$f(z) = \sum_{r=0}^{l-1} c_r (z - \zeta)^r + O\left((z - \zeta)^l\right). \quad (5.6)$$

$$[m/n]_{\dots \zeta \dots}^{\dots \zeta \dots}(z) = \frac{P_m}{Q_n}; \quad q_0 = 1 \quad (5.7)$$

ce qui, d'après (??), s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{r=0}^{l-1} c_r (z - \zeta)^r \right] \left[ \sum_{r=0}^{\min(l-1, n)} \left( \sum_{s=r}^n C_s^r \zeta^{s-r} q_s \right) (z - \zeta)^r \right] + \\ & - \left[ \sum_{r=0}^{\min(l-1, m)} \left( \sum_{s=r}^m C_s^r \zeta^{s-r} p_s \right) (z - \zeta)^r \right] = O\left((z - \zeta)^l\right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

et conduit aux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{s=0}^m C_s^0 \zeta^s p_s + c_0 \sum_{s=0}^n C_s^0 \zeta^s q_s = 0 \\ - \sum_{s=1}^m C_s^1 \zeta^{s-1} p_s + c_1 \sum_{s=0}^n C_s^0 \zeta^s q_s + c_0 \sum_{s=0}^n C_s^1 \zeta^{s-1} q_s = 0 \\ \dots \\ - \sum_{s=l-1}^m C_s^{l-1} \zeta^{s-(l-1)} p_s + c_{l-1} \sum_{s=0}^n C_s^0 \zeta^s q_s + \dots + c_0 \sum_{s=l-1}^n C_s^{l-1} \zeta^{s-(l-1)} q_s = 0 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

$p_0$	$p_1$	$\dots$	$p_l$	$\dots$	$p_m$	$q_1$	$\dots$	$q_n$		
$-C_0^0$	$-C_1^0 \zeta$	$\dots$	$-C_l^0 \zeta^l$	$\dots$	$-C_m^0 \zeta^m$	$c_0 C_2^0 \zeta^2$	$\dots$	$c_0 C_n^0 \zeta^n$		$-c_0$
	$-C_1^1$	$\dots$	$-C_l^1 \zeta^{l-1}$	$\dots$	$-C_m^1 \zeta^{m-1}$	$c_1 C_1^0 \zeta + c_0 C_1^1$	$\dots$	$c_1 C_n^0 \zeta^n + c_0 C_n^1 \zeta^{n-1}$		$-c_1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
			$-C_{l-1}^{l-1}$	$\dots$	$-C_m^{l-1} \zeta^{m-(l-1)}$	$c_{l-1} C_1^0 \zeta + c_{l-1} C_1^1$	$\dots$	$c_{l-1} C_n^0 \zeta^n + \dots + c_0 C_n^{l-1}$		$-c_{l-1}$

(5.10)

ou encore :

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 p_0 & p_1 & \dots & p_l & \dots & p_m & q_1 & q_2 & \dots & q_n & \\
 \hline
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1,m+1} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -c_0 \\
 & a_{22} & \dots & a_{2,l} & \dots & a_{2,m+1} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & -c_1 \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{ll} & \dots & a_{l,m+1} & b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ln} & -c_{l-1}
 \end{array} \quad \text{si} \quad l \leq m$$

ou

$$\begin{array}{cccccc|c}
 p_0 & p_1 & \dots & p_m & q_1 & q_2 & \dots & q_n & \\
 \hline
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m+1} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -c_0 \\
 & a_{22} & \dots & a_{2,m+1} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & -c_1 \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{m,m+1} & b_{m+1,1} & b_{m+1,2} & \dots & b_{m+1,n} & -c_m \\
 & & & & b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ln} & -c_{l-1}
 \end{array} \quad \text{si} \quad l > m$$

(5.11)

où

$$\begin{array}{l}
 i = 1, \dots, l \\
 j = i, \dots, m + 1
 \end{array} : \begin{cases} a_{ij} = -C_{j-1}^{i-1} \zeta^{j-1} \\ b_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j+1)} c_{i-k} C_j^{k-1} \zeta^{j-k+1} \end{cases} \quad (5.12)$$

$$i > j : \quad a_{ij} \equiv 0$$

Le système complet (??) s'obtient en reiterant (??) et (??)  $N$  fois.

## 5.2 Approximants de Padé à $N$ points ( couples : complexes, complexes conjugués ) d'une fonction complexe symétrique.

Une fonction complexe symétrique  $f$  est une fonction qui satisfait la condition

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}). \quad (5.13)$$

Si pour cette fonction on connaît les développements limités

$$j = 1, \dots, N : \quad f(z) = \sum_{i=0}^{l_j-1} c_{ji} (z - z_j)^i + O\left((z - z_j)^{l_j}\right), \quad (5.14)$$

alors les développements aux points conjugués  $\bar{z}_j$  sont :

$$j = 1, \dots, N : \quad f(z) = \sum_{i=0}^{l_j-1} \bar{c}_{ji} (z - \bar{z}_j)^i + O\left((z - \bar{z}_j)^{l_j}\right), \quad (5.15)$$

c'est-à-dire les coefficients des développements (??) sont les complexes conjugués de ceux de (??). Le APN

$$[m/n]_{z_1 \dots z_N \bar{z}_1 \dots \bar{z}_N}^{l_1 \dots l_N l_1 \dots l_N} = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_m z^m}{1 + q_1 z + \dots + q_n z^n} \quad (5.16)$$

$$m + n + 1 = 2(l_1 + l_2 + \dots + l_N) = 2l \quad (5.17)$$

est défini par  $2l$  équations :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 - \sum_{i=0}^{l_1-1} c_{1i} (z - z_1)^i \cdot Q_n(z) - P_m(z) = O\left((z - z_1)^{l_1}\right) \\
 - \sum_{i=0}^{l_1-1} \overline{c_{1i}} (z - \overline{z_1})^i \cdot Q_n(z) - P_m(z) = O\left((z - \overline{z_1})^{l_1}\right) \\
 \dots \\
 - \sum_{i=0}^{l_N-1} c_{Ni} (z - z_N)^i \cdot Q_n(z) - P_m(z) = O\left((z - z_N)^{l_1}\right) \\
 - \sum_{i=0}^{l_N-1} \overline{c_{Ni}} (z - \overline{z_N})^i \cdot Q_n(z) - P_m(z) = O\left((z - \overline{z_N})^{l_1}\right).
 \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Les APN (??) remplissent, dans la table de Padé, l'antidiagonale :

$$[2l - 1/0], [2l - 2/1], \dots, [0/2l - 1] \quad (5.19)$$

### 5.3 Résultats fondamentaux

Le premier théorème concerne les systèmes linéaires à matrices qui n'ont aucune ligne composée uniquement des éléments réels.

**Théorème 5.1** *Soit une matrice  $A$  à éléments complexes telle que  $\det A \neq 0$ , alors la solution du système linéaire  $Ax = b$  suivant*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,2n} \\ \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \dots & \overline{a_{1,2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,2n} \\ \overline{a_{n1}} & \overline{a_{n2}} & \dots & \overline{a_{n,2n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \overline{b_1} \\ \vdots \\ b_n \\ \overline{b_n} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

est réelle.

**Démonstration :** Les déterminants de la matrice  $A$  et des matrices  $A_i$  ( $i$ -ème colonne de  $A$  remplacée par le membre de droite) peuvent être calculés par blocs  $2 \times 2$ . Le déterminant de chaque bloc est un nombre imaginaire :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{vmatrix} = \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta = \alpha\bar{\beta} - \overline{\alpha\beta} = 2Im(\alpha\bar{\beta})i \quad (5.21)$$

Ainsi, si  $n$  est pair,  $detA$  et  $detA_i$  sont réels; dans le cas contraire ils sont imaginaires. Par contre leur rapport  $x_i = \frac{detA_i}{detA}$  est toujours réel.  $\square$

**Théorème 5.2** [?] *L'approximant de Padé à  $N$  points  $[m/n]_{z_1 \dots z_N}^{l_1 \dots l_N}$  d'une fonction complexe symétrique a des coefficients réels.*

**Démonstration :** Les  $l_1$  premières équations du système (??) définissant le APN ont été détaillées en (??). Les  $l_1$  équations suivantes sont identiques, mais avec les éléments (??) complexes conjugués. Puis on reitère  $l_2$  équations de type (??) et  $l_2$  complexes conjuguées et ainsi de suite pour obtenir finalement le système de  $2(l_1 + l_2 + \dots + l_N)$  équations. On constate que c'est un système de type (??), donc sa solution est réelle.  $\square$

Pour étudier les zéros et les pôles des APN  $[m/n]_{z_1 \dots z_N}^{l_1 \dots l_N}$  il nous faut démontrer quelques théorèmes utiles.

**Théorème 5.3** *Soit  $[m/n]_f(z - z_0)$  et  $[m/n]_f^*(z - \bar{z}_0)$  les approximants de Padé d'une fonction de Stieltjes calculés à partir d'un développement en point  $z_0$  et en son complexe conjugué  $\bar{z}_0$  respectivement, alors les zéros et les pôles de ces approximants de Padé sont les complexes conjugués les uns des autres.*

**Démonstration :** La fonction  $f$  en tant que fonction de Stieltjes est une fonction complexe symétrique (??), c'est-à-dire

$$f(z) = \sum c_i(z - z_0)^i = \sum \bar{c}_i(z - \bar{z}_0)^i \quad (5.22)$$

Si on note

$$[m/n]_f(z - z_0) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \text{ et } [m/n]_f^*(z - \bar{z}_0) = \frac{P_m^*(z)}{Q_n^*(z)} \quad (5.23)$$

où  $Q_n(z) = 1 + q_1(z - z_0) + \dots + q_n(z - z_0)^n$  et on considère le système (??) définissant les  $q_i$ , alors on voit qu'en prenant le complexe conjugué de ce système, on obtient

$$Q_n^*(z) = 1 + \bar{q}_1(z - \bar{z}_0) + \dots + \bar{q}_n(z - \bar{z}_0)^n \quad (5.24)$$

compte tenu de (??). Ainsi les zéros du polynôme  $Q_n^*$  sont les complexes conjugués des zéros de  $Q_n$ . Le même raisonnement s'applique au système (??) et aux zéros de  $P_m$  et  $P_m^*$ .  $\square$

Le théorème suivant est la conséquence du théorème 5.3.

**Théorème 5.4** *Soit  $f$  une fonction complexe symétrique. Alors les zéros et les pôles de l'approximant de Padé à 2 points  $[m/n]_{\zeta}^l \frac{l'}{\bar{\zeta}}$  de  $f$  sont les complexes conjugués des zéros et des pôles de  $[m/n]_{\bar{\zeta}}^{l'} \frac{l}{\zeta}$ , où  $l$  et  $l'$  vérifient la condition  $l + l' = m + n + 1$ .*

**Démonstration :** Les deux APN du théorème sont définis par les systèmes linéaires (??) et (??) issus de :

$$f(z)Q_n(z) - P_m(z) = O((z - \zeta)^l), \quad f(z)Q_n(z) - P_m(z) = O((z - \bar{\zeta})^{l'}), \quad (5.25)$$

et de :

$$f(z)Q_n(z) - P_m(z) = O((z - \zeta)^{l'}), \quad f(z)Q_n(z) - P_m(z) = O((z - \bar{\zeta})^l) \quad (5.26)$$

respectivement. Comme dans la démonstration précédente, en transformant le système (??) en (??), i.e. en prenant son complexe conjugué, on peut se référer au théorème 5.3 pour conclure.  $\square$

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 5.4 au cas de l'AP à  $2k$  points. La démonstration est analogue, mais au lieu de deux, elle repose sur  $2k$  systèmes linéaires.

**Théorème 5.5** *Soit  $f$  une fonction complexe symétrique. Alors les zéros et les pôles de l'approximant de Padé à  $N$  points  $[m/n]_{\zeta_1}^{l_1} \zeta_2^{l_2} \dots \zeta_k^{l_k} \frac{l'_1}{\zeta_1} \frac{l'_2}{\zeta_2} \dots \frac{l'_k}{\zeta_k}$  de  $f$  sont les complexes conjugués des zéros et des pôles de l'APN  $[m/n]_{\zeta_1}^{l'_1} \zeta_2^{l'_2} \dots \zeta_k^{l'_k} \frac{l_1}{\zeta_1} \frac{l_2}{\zeta_2} \dots \frac{l_k}{\zeta_k}$ , où  $l_1 + l_2 + \dots + l_k + l'_1 + l'_2 + \dots + l'_k = m + n + 1$ .*

L'exemple suivant illustre ces théorèmes.

**Exemple :**

Soit

$$f(z) = -\frac{1}{z} \ln(1 - z). \tag{5.27}$$

L'approximant de Padé  $[4/5]_{1+2i}^3 \frac{7}{1-2i}$  est :

$$\begin{aligned}
 & [4/5]_{1+2i}^3 \frac{7}{1-2i}(z) = \\
 & = \frac{1 + 0.0004i + (-1.49 + 0.41i)z + (0.63 - 0.42i)z^2 + (-0.07 + 0.11i)z^3 + (0.0002 - 0.01i)z^4}{1 + (-1.99 + 0.41i)z + (1.29 - 0.63i)z^2 + (-0.31 + 0.29i)z^3 + (0.02 - 0.04i)z^4 + (0.0001 + 0.001i)z^5}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

**Zéros de AP**  $[4/5]_{1+2i}^3 \frac{7}{1-2i}(z)$  :

$$z_1 := 1.25 + 0.21i;$$

$$z_2 := 2.09 + 0.65i;$$

$$z_3 := 3.78 + 1.67i;$$

$$z_4 := 10.98 + 8.38i.$$

**Pôles de AP**  $[4/5]_{1+2i}^3 \frac{7}{1-2i}(z)$  :

$$z_1 := 1.12 + 0.08i;$$



$$z_2 := 1.65 + 0.38i;$$

$$z_3 := 2.69 + 0.88i;$$

$$z_4 := 5.10 + 2.41i;$$

$$z_5 := 20.03 + 14.56i.$$

L'approximant de Padé  $[4/5]_{1+2i}^7 \quad {}^3_{1-2i}$  est :

$$\begin{aligned} & [4/5]_{1+2i}^7 \quad {}^3_{1-2i}(z) = \\ & = \frac{1 - 0.0004i + (-1.49 - 0.41i)z + (0.63 + 0.42i)z^2 + (-0.07 - 0.11i)z^3 + (0.0002 + 0.01i)z^4}{1 + (-1.99 - 0.41i)z + (1.29 + 0.63i)z^2 + (-0.31 - 0.29i)z^3 + (0.02 + 0.04i)z^4 + (0.0001 - 0.001i)z^5} \end{aligned} \quad (5.29)$$

**Zéros de AP**  $[4/5]_{1+2i}^7 \quad {}^3_{1-2i}(z)$  :

$$z_1 := 1.25 - 0.21i;$$

$$z_2 := 2.09 - 0.65i;$$

$$z_3 := 3.78 - 1.67i;$$

$$z_4 := 10.98 - 8.38i.$$

**Pôles de AP**  $[4/5]_{1+2i}^7 \quad {}^3_{1-2i}(z)$  :

$$z_1 := 1.12 - 0.08i;$$

$$z_2 := 1.65 - 0.38i;$$

$$z_3 := 2.69 - 0.88i;$$

$$z_4 := 5.10 - 2.41i;$$

$$z_5 := 20.03 - 14.56i.$$

**Fig.10 :** Zéros et pôles des AP  $[4/5]_{1+2i}^3 \frac{7}{1-2i}(z)$   
 et  $[4/5]_{1+2i}^7 \frac{3}{1-2i}(z)$

**Théorème 5.6** Soit  $f$  une fonction complexe symétrique. Les zéros et les pôles de l'APN  $[m/n]_{\zeta_1}^{l_1} \frac{l_2}{\zeta_2} \dots \frac{l_k}{\zeta_k} \frac{l_1}{\bar{\zeta}_1} \frac{l_2}{\bar{\zeta}_2} \dots \frac{l_k}{\bar{\zeta}_k}$  de  $f$  sont soit réels, soit se présentent par paires : complexe et son complexe conjugué.

**Démonstration :** D'après le théorème 5.2 les coefficients de ces APN sont réels et les zéros des polynômes à coefficients réels ont la propriété indiquée.  
 □

Nous illustrons ce résultat avec l'APN  $[m/n]_{\zeta_1}^{l_1} \frac{l_2}{\zeta_2} \dots \frac{l_k}{\zeta_k} \frac{l_1}{\bar{\zeta}_1} \frac{l_2}{\bar{\zeta}_2} \dots \frac{l_k}{\bar{\zeta}_k}$  pour trois différentes valeurs de  $m$  et  $n$ .

1<sup>er</sup> cas :  $m = n - 1$

Nos calculs numériques ont montré, que tous les zéros et les pôles de  $[m/n]_{\zeta_1}^{l_1} \frac{l_2}{\zeta_2} \dots \frac{l_k}{\zeta_k} \frac{l_1'}{\bar{\zeta}_1} \frac{l_2'}{\bar{\zeta}_2} \dots \frac{l_k'}{\bar{\zeta}_k}$  sont réels et s'entrelacent sur la coupure de la fonction, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 1**

Soit

$$f(z) = -\frac{1}{z} \ln(1-z). \tag{5.30}$$

et son approximant de Padé  $[8/9]_{i-i \ 1+i \ 1-i \ 1-i \ 1+2i \ 1-2i}$  :

$$\frac{1 - 3.4228z + 4.7233z^2 - 3.3767z^3 + 1.3378z^4 - 0.2913z^5 + 0.0324z^6 - 0.0015z^7 + 0.00002z^8}{1 - 3.9228z + 6.3514z^2 - 5.4948z^3 + 2.7488z^4 - 0.804z^5 + 0.1325z^6 - 0.0112z^7 + 0.0004z^8 - 0.000003z^9}. \tag{5.31}$$

Voici les pôles et les zéros de cet APN (voir aussi la figure qui suit) :

Pôles	Zéros
1.0325	1.0587
1.1723	1.2534
1.4333	1.5980
1.8555	2.1713
2.5634	3.2199
3.8968	5.4978
6.9069	12.1497
16.3336	51.6746
83.8770	

Conformément au théorème 5.2 tous les coefficients de cet APN sont réels.

**Fig.11** Zéros et pôles de l'APN  $[8/9]_{i-i \ 1+i \ 1-i \ -1+2i \ -1-2i}^{4 \ 4 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3}$ .

**Exemple 2** Soit

$$g(z) = \frac{\pi}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{5.32}$$

L'approximant de Padé  $[10/11]_{i-i \ 2+i \ 2-i}^{6 \ 6 \ 5 \ 5}$  est donné par :

$$[10/11]_{i-i \ 2+i \ 2-i}^{6 \ 6 \ 5 \ 5} = \frac{3.1415 - 4.9490z - 0.5901z^2 + 4.4265z^3 - 1.7908z^4 - 0.6166z^5 + 0.50484z^6 - 0.0624z^7 - 0.0149z^8 + 0.0033z^9 - 0.0001z^{10}}{1 - 1.5753z - 0.6877z^2 + 2,1965z^3 - 0.6008z^4 - 0.7043z^5 + 0.4074z^6 - 0.00048z^7 - 0.039z^8 + 0.0072z^9 + 0.00001z^{10} - 0.00005z^{11}} \tag{5.33}$$

et ses zéros et ses pôles s'entrelacent sur l'axe des réels comme les montrent le tableau et la figure suivants :

Pôles	Zéros
1.0343	1.1327
1.2826	1.4665
1.6678	1.8772
2.0963	2.3373
2.6246	3.0056
3.5846	4.6437
7.2813	23.9674
-1.0495	-1.2038
-1.4881	-1.9749
-2.8721	-4.9340
-13.8694	

**Fig.12** Zéros et pôles de  $[10/11]_{i-i}^{6 \ 6 \ 5 \ 5}$

2<sup>ème</sup> cas :  $m \geq n$

Dans ce cas on peut écrire  $m = n + k$  ou  $k \geq 0$ , et on rencontre  $k$  zéros excédentaires dont un est toujours réel en dehors de la coupure et les autres  $n$  zéros se placent avec les  $n$  pôles sur la coupure de la fonction.

**Exemple 3**

2a/ Soit

$$f(z) = -\frac{1}{z} \ln(1 - z). \tag{5.34}$$

L'approximant de Padé [13/4] dans les points  $i, -i, -1 - 2i, -1 + 2i, 1 - i, 1 + i$  est :

$${}_{[13/4]}^4 \begin{matrix} 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ -i & 1+i & 1-i & -1+2i & -1-2i \end{matrix} = \frac{1 - 2.2z + 1.6z^2 - 0.4z^3 + 0.02z^4 + 0.02z^5 + 0.03z^6 + 0.005z^7 + 0.0012z^8 + 1.9 \times 10^{-6}z^9 + 3 \times 10^{-7}z^{10} + 6.3 \times 10^{-7}z^{11} + 7.5 \times 10^{-8}z^{12} - 7.5 \times 10^{-8}z^{13}}{1 - 2.7405z + 2.72827z^2 - 1.1641z^3 + 0.1787z^4}$$

ses zéros et ses pôles sont donnés par le tableau et la figure ci dessous :

Pôles	Zéros
1.0481	-8.9268
1.2580	1.0916
1.6761	1.3984
2.5327	2.0166
	3.7736
	4.4705+4.7213i
	4.4705-4.7143i
	1.0934+7.7143i
	1.0934 -7.7143i
	-3.5606+7.7669i
	-3.5606-7.7669i
	-7.4342+4.8211i
	-7.4342-4.8211i

**Fig.13** Zéros et pôles de AP  $[13/4]_{i \begin{smallmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ -i & 1+i & 1-i & -1+2i & -1-2i \end{smallmatrix}}$ .

3<sup>ème</sup> cas :  $m < n$

Nous avons remarqué que les zéros de  $[m/n]$  se trouvent sur la coupure, mais si on met  $n = m + k$  on constate que seulement  $m + 1$  pôles s'entrelacent avec les zéros et les autres  $k - 1$  pôles sont excédentaires.

**Exemple**

3a/ Soit

$$f(z) = -\frac{1}{z} \ln(1 - z). \tag{5.35}$$

L'approximant de Padé  $[3/12]$  dans les points  $i, -i, -1 - 2i, -1 + 2i, 1 - i, 1 + i$  est :

$$[3/12]_{i \begin{smallmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -i & 1+i & 1-i & -1+2i & -1-2i \end{smallmatrix}}(z) = \frac{1 - 2.02z + 1.31z^2 - 0.26z^3}{1 - 2.5z + 2.2z^2 - 0.8z^3 + 0.83z^4 + 0.02z^5 + 0.003z^6 + 0.006z^7 + 0.0012z^8 + 26 \times 10^{-6}z^9 + 54 \times 10^{-7}z^{10} + 83 \times 10^{-8}z^{11} + 11 \times 10^{-8}z^{12}}$$

Le tableau et la figure suivants montre la position de ses zéros et de ses pôles :

<b>Pôles</b>	<b>Zéros</b>
1.0558	1.1085
1.2999	1.4731
1.8028	2.2691
2.9974	
4.5044-4.2955i	
4.5044+4.2955i	
0.7883-7.6478i	
0.7883+7.6478i	
-4.5074-7.1611i	
-4.5074+7.1611i	
-8.2173+2.9051i	
-8.2173-2.9051i	



**Fig.14** Zéros et pôles de  $[3/12]_i^4 \begin{matrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -i & 1+i & 1-i & -1+2i & -1-2i \end{matrix}$ .

**Remarques :**

- Les trois cas montrent que les zéros et les pôles d'un approximant de Padé calculé dans les points complexes et complexes conjugués avec le même nombre d'informations se comportent comme les zéros et les pôles d'un approximant de Padé calculé dans les points réels.
- Les zéros excédentaires dans le 2<sup>ème</sup> cas et le 3<sup>ème</sup> cas forment des courbes régulières qui se réduisent en augmentant  $k$ . Cela peut être illustré par ces figures :

**Fig.15 :** Zéros et pôles des AP  $[n+k/n]$  :  $n=3, k=9, 19, 27$  .

**Fig.16** : Zéros et pôles des AP  $[n/n+k]$  :  $n=3$ ,  $k=9, 19, 27$  .

## 5.4 Conjecture sur l'alignement des zéros et des pôles des APN

**Fig.17**

$$D_R^\theta : \{z(t) = R + te^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}; t \in \mathbb{R}\};$$

$$\text{Démi-droite } D_{\perp R}^\theta : \{z(t) = R + te^{i\theta}; t \geq 0\};$$

$$D_{\perp R}^\theta \perp D_R^\theta;$$

$R$  - le point de ramification de la fonction.

Nous prendrons maintenant des points complexes symétriques par rapport au point de ramification  $z = R$  et placés sur la droite oblique  $z(t) = R + te^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Examinons ceci sur la fonction  $\frac{-1}{z} \ln(1-z)$  et prenons les points  $i, 1-2i, -1+2i, 3-2i, -2+3i, 4-3i$  placés sur la droite  $D_R^\theta$  et observons les zéros et les pôles du NAP  $[5/6]_i^2 \begin{matrix} 2 \\ 1-2i \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ -1+2i \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 3-2i \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ -2+3i \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 4-3i \end{matrix} (z)$  sur la figure suivante

**Fig.18** Zéros et pôles de AP  $[4/5]_{i \begin{smallmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2-i & 3-2i & -1+2i \end{smallmatrix}}(z)$

Nous avons constaté que les zéros et les pôles de ce APN se placent presque sur la demi-droite  $D_{\perp R}^{\theta}$  sensée représenter une nouvelle coupure.

$$[4/5]_{i \begin{smallmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2-i & 4-3i & -2+3i \end{smallmatrix}}(z) = \frac{1 - 0.0003i + (-1.41 + 0.54i)z + (0.49 - 0.53i)z^2 + (-0.02 + 0.12i)z^3 + (-0.02 - 0.04i)z^4}{1 + (-1.91 + 0.54i)z + (1.11 - 0.81i)z^2 + (-0.19 + 0.34i)z^3 + (-0.065 - 0.04i)z^4 + (0.006 + 0.009i)z^5} \quad (5.36)$$

**Zéros de AP**  $[4/5]_{i \begin{smallmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2-i & 4-3i & -2+3i \end{smallmatrix}}(z)$  :

$$z_1 := 1.2411 + 0.2565i;$$

$$z_2 := 1.9282 + .9609i;$$

$$z_3 := 3.5691 + 2.6601i;$$

$$z_4 := 11.0524 + 10.6681i;$$

Pôles de AP  $[4/5]_{i \begin{smallmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2-i & 4-3i & -2+3i \end{smallmatrix}}(z)$  :

$$z_1 := 1.1254 + .1006i;$$

$$z_2 := 1.5923 + .5140i;$$

$$z_3 := 2.5293 + 1.3705i;$$

$$z_4 := 5.0118 + 3.6270i;$$

$$z_5 := 20.1695 + 17.0604i;$$

Nous étions donc tentés de formuler l'hypothèse suivante : Si APN est calculé dans les points complexes symétriques par rapport à  $R$  (dans le cas de la fonction  $f(z) = -\frac{1}{z}\ln(1-z)$ ,  $R = 1$ ) placés sur  $D_R^\theta$  alors ses zéros et ses pôles suivent la demi-droite  $D_{\perp R}^\theta$ . Malheureusement ceci a été infirmé par l'exemple suivant :

**Fig.19** Zéros et pôles de AP  $[1/2]_i^2 \quad {}_2^2_{2-i}(z)$ 

Ce qui reste toutefois surprenant, c'est la curieuse régularité entre les zéros et les pôles de l' APN calculé aux points symétriques disposés sur  $D_R^0$  et les zéros et les pôles du APN calculé aux points correspondant sur la droite  $D_R^\theta$ . Les zéros et les pôles du premier APN désignent la coupure sur  $D_{\perp R}^0$ .

1- En faisant la rotation de  $D_R^\theta$  en  $D_R^0$  et utilisant les points complexes et complexes conjugués correspondants pour le calcul de APN on constate que les zéros et les pôles des deux APN ont subit pratiquement la même rotation ce qui peut être illustrée par l'exemple suivant

**Exemple :**

Revenons sur (??) et calculons l'approximant de Padé

$$\begin{aligned}
[4/5]_{1+\sqrt{2}i}^3 [4/5]_{1-\sqrt{2}i}^3 [4/5]_{1-3\sqrt{2}i}^2 [4/5]_{1+3\sqrt{2}i}^2 (z) &= \\
&= \frac{1 - 1.4435z + 0.6530z^2 - 0.1034z^3 + 0.0430z^4}{1 - 1.9433z + 1.2922z^2 - 0.3510z^3 + 0.0359z^4 - 0.0091z^5}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

ses zéros et ses pôles sont

**Zéros de AP**  $[4/5]_{1+\sqrt{2}i}^3 [4/5]_{1-\sqrt{2}i}^3 [4/5]_{1-3\sqrt{2}i}^2 [4/5]_{1+3\sqrt{2}i}^2 (z)$  :

$$z_1 := 1.3520;$$

$$z_2 := 2.3358;$$

$$z_3 := 4.6973;$$

$$z_4 := 15.6491;$$

$[4/5]_{1+\sqrt{2}i}^3 [4/5]_{1-\sqrt{2}i}^3 [4/5]_{1-3\sqrt{2}i}^2 [4/5]_{1+3\sqrt{2}i}^2 (z)$  :

$$z_1 := 1.1584;$$

$$z_2 := 1.7824;$$

$$z_3 := 3.0603;$$

$$z_4 := 6.4436;$$

$$z_5 := 26.9205;$$

et voici la figure qui regroupe les zéros et les pôles des approximants de Padé suivants :  $[4/5]_{i}^3 [4/5]_{2-i}^3 [4/5]_{4-3i}^2 [4/5]_{-2+3i}^2 (z)$  et  $[4/5]_{1+\sqrt{2}i}^3 [4/5]_{1-\sqrt{2}i}^3 [4/5]_{1-3\sqrt{2}i}^2 [4/5]_{1+3\sqrt{2}i}^2 (z)$

**Fig.20** Zéros et pôles des AP  $:[4/5]_{i \ 2-i \ 4-3i \ -2+3i}^3 \ (z)$  et  $[4/5]_{1+\sqrt{2}i \ 1-\sqrt{2}i \ 1-3\sqrt{2}i \ 1+3\sqrt{2}i}^3 \ (z)$

2- En faisant la projection de points de développement placés sur  $D_R^\theta$  sur la droite  $D_R^0$  et utilisant cette fois les points correspondants ( qui vont être complexes et complexes symétriques ) pour le calcul de APN on constate, que les parties réelles des zéros et des pôles des deux APN sont presque égales.

Voici l'exemple illustrant cette propriété :

**Exemple :**

Calculons maintenant l'approximant de Padé dans les points complexes et leurs complexes conjugués.

L'approximant de Padé  $[4/5]_{1+i \ 1-i \ 1-3i \ 1+3i}^3 \ (z)$  est donné par :

$$[4/5]_{1+i \ 1-i \ 1-3i \ 1+3i}^3 \ (z) = \tag{5.38}$$



$$= \frac{1 - 1.6855z + 0.9232z^2 - 0.1848z^3 + 0.0102z^4}{1 - 2.1858z + 1.6834z^2 - 0.5478z^3 + 0.6988z^4 - 0.0023z^5}$$

et voici ses zéros et ses pôles :

**Zéros de AP**  $[4/5]_{1+i}^3 \begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1-i & 1-3i \end{smallmatrix} (z)$  :

$$z_1 := 1.2455;$$

$$z_2 := 1.9374;$$

$$z_3 := 3.5943;$$

$$z_4 := 11.2228;$$

**Pôles de AP**  $[4/5]_{1+i}^3 \begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1-i & 1-3i \end{smallmatrix} (z)$  :

$$z_1 := 1.1172;$$

$$z_2 := 1.5701;$$

$$z_3 := 2.4927;$$

$$z_4 := 4.9404;$$

$$z_5 := 19.8508;$$

dans cette figure, on regroupe les zéros et les pôles des approximants de Padé

suivants :  $[4/5]_{i}^3 \begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2-i & 4-3i \end{smallmatrix} (z)$  et  $[4/5]_{1+i}^3 \begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1-i & 1-3i \end{smallmatrix} (z)$

**Fig.21** Zéros et pôles des AP  $:[4/5]_{i \ 2-i \ 4-3i \ -2+3i}^3 \ 3 \ 2 \ 2 (z)$  et  $[4/5]_{1+i \ 1-i \ 1-3i \ 1+3i}^3 \ 3 \ 2 \ 2 (z)$

Nous ne savons pas encore expliquer théoriquement cette régularité, mais d'après nos observations, on voit qu'il y a certainement un lien entre les zéros et les pôles de deux APN dans les deux cas : 1/ et 2/.

# Chapitre 6

## Fractions continues à $N$ points

### 6.1 Fractions continues de Stieltjes à $N$ points

Soit  $f$  une fonction définie par (??), analytique en  $N$  points  $x_1, x_2, \dots, x_N$ ,  
 $-R < x_1 < x_2 \dots < x_N \leq \infty$  ayant aux voisinages de ces points les développements limités suivants

$$j = 1, \dots, N : f(x) = \sum_{i=0}^{p_j-1} c_{ji} (x - x_j)^i + O((x - x_j)^{p_j}) \quad (6.1)$$

Introduisons la fonction

$$L(x) = \sum_{i=0}^N p_i H(x - x_i). \quad (6.2)$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

$L(x)$  représente le nombre total de coefficients des développements en séries de  $f$  en tout point  $x_j \leq x$

$$L(x_i) = p_1 + p_2 + \dots + p_i, \quad L(x_N) = p_1 + p_2 + \dots + p_N = p \quad (6.4)$$

La fraction continue (cf. ??) donnée par :

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= f_1(x) = \\
 &\frac{1}{x-x_1} K_{k=1}^{L(x_1)} \frac{(x-x_1)f_k(x_1)}{1+} \frac{x-x_1}{x-x_2} K_{k=L(x_1)+1}^{L(x_2)} \frac{(x-x_2)f_k(x_2)}{1+} \cdots \frac{x-x_{N-1}}{x-x_N} \\
 &\times K_{k=L(x_{N-1})+1}^{L(x_N)=p} \frac{(x-x_N)f_k(x_N)}{1+} \frac{(x-x_N)f_{p+1}(x)}{1}.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

s'appelle fraction continue de Stieltjes à  $N$  points, notée FCNS.

Les  $f_k(x_j)$   $j = 1, \dots, N$  doivent être choisis de manière que les deux cotés de l'égalité (??) coïncident en  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Ils peuvent être calculés à partir de relations de récurrence suivantes :

$$f_0(x) = f(x)$$

$$p_0 = 0$$

$$i = 1, \dots, N$$

$$j = \sum_{k=1}^i p_{i-1} + 1, \dots, \sum_{k=1}^i p_i$$

$$f_j(x) = \frac{f_{j-1}(x) - f_{j-1}(x_i)}{(x - x_i)f_{j-1}(x)}. \tag{6.6}$$

Les convergents de (??), notés  $\frac{A_k}{B_k}$  sont aussi donnés par ces relations de récurrence :

$$n = 1, \dots, N$$

$$m = L(x_{n-1}) + 2, \dots, L(x_N) :$$

$$\begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{m-1} \\ B_{m-1} \end{pmatrix} + (x - x_n)f_m(x_n) \begin{pmatrix} A_{m-2} \\ B_{m-2} \end{pmatrix};$$

$$m = L(x_n) + 1 :$$

$$\begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{m-1} \\ B_{m-1} \end{pmatrix} + (x - x_n)f_m(x_n + 1) \begin{pmatrix} A_{m-2} \\ B_{m-2} \end{pmatrix};$$

où

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ 1 \end{pmatrix};$$

$L(x_0) := 0$  et  $x_{N+1} := x$

### Propriétés de FCNS

1/ Les tronquées de (??) donnent les APN :  $[0/0], [1/0], [1/1], [1/2], \dots$  c.à.d la suite diagonale et subdiagonale dans la table de Padé.

2/ Si  $f$  est une fonction de Stieltjes alors la fonction  $g$  définie par :

$$f(x) = \frac{f(x_1)}{1 + (x - x_1)g(x)} \quad (6.7)$$

est aussi une fonction de Stieltjes, et plus généralement les  $f_k(x)$  dans (??) sont tous des fonctions de Stieltjes.

3/ La FCNS (APN) possède la propriété de l'invariance par rapport à l'ordre d'utilisation des informations aux points de développements comme le montre ce théorème démontré par J.Gilewicz dans [?],

**Théorème 6.1** [?] Soit  $\mathbf{K}_{p_1} \mathbf{K}_{p_2} \dots \mathbf{K}_{p_N}$  la FCNS (??) et soit  $(q_1, q_2, \dots, q_N)$  une permutation arbitraire de  $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ . Alors :

$$\mathbf{K}_{q_1} \mathbf{K}_{q_2} \dots \mathbf{K}_{q_N} = \mathbf{K}_{p_1} \mathbf{K}_{p_2} \dots \mathbf{K}_{p_N} \quad (6.8)$$

### Démonstration :

Supposons que  $\mathbf{K}_{q_1} \mathbf{K}_{q_2} \dots \mathbf{K}_{q_N}$  et  $\mathbf{K}_{p_1} \mathbf{K}_{p_2} \dots \mathbf{K}_{p_N}$  définissent deux approximations de Padé différents :  $\frac{P_m}{Q_n}$  et  $\frac{P'_m}{Q'_n}$ . Par définition d'un AP ils s'identifient à la fonction en  $(m + n + 1)$  points, donc leur différence

$$\frac{P_m}{Q_n} - \frac{P'_m}{Q'_n} = \frac{P_m Q'_n - P'_m Q_n}{Q'_n Q_n} \quad (6.9)$$

s'annule en  $(n+m+1)$  points. Or, le numérateur de droite est un polynôme de degré  $(m + n)$  qui n'a donc que  $(m + n)$  zéros. Par conséquent il est

identiquement nul. Il suffisait même de dire que les AP, s'ils existent, sont uniques, ce qui implique directement (??).  $\square$

**Exemple**

Prenons la fonction de Stieltjes  $f(x) := -\frac{\ln(1-x)}{x}$

$$[1/2]_{-1 \ 0 \ -2}^2 \ 1 \ 1 = \frac{0.69314}{1 - \frac{0.27865(x+1)}{1 - \frac{0.09190(x+1)}{1 - 0.21653x}}} \quad (6.10)$$

$$= [1/2]_{-2 \ 0 \ -1}^1 \ 1 \ 2 = \frac{0.54930}{1 - \frac{0.22534(x+2)}{1 - \frac{0.08591(x)}{1 - 0.18940(x+1)}}} \quad (6.11)$$

$$= [1/2]_{0 \ -1 \ -2}^1 \ 2 \ 1 = \frac{1}{1 - \frac{0.44269x}{1 - \frac{0.09190(x+1)}{1 - 0.16163(x+1)}}} \quad (6.12)$$

$$= \frac{1 - 0.33964x}{1 - 0.83684x + 0.09585x^2} \quad (6.13)$$

**Remarque :**

Les points de développement choisis dans ce théorème sont finis c'est-à-dire  $x_j \neq \infty, \forall j = 1, \dots, N$ . Dans le paragraphe suivant nous examinerons le cas de l'adjonction du point infini à ces points.

## 6.2 Approximants de Padé et fractions continues

### 6.2.1 Approximant de Padé à deux points

Un cas très intéressant de APN est le cas de  $N = 2 \quad (0, \infty)$ . Supposons que les développements de la fonction  $f$  en  $z = 0$  et en  $z = \infty$  existent :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (6.14)$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^{-k} \quad (6.15)$$

L'approximant de Padé de la fonction  $f$  avec  $i$  informations au point  $z = 0$  et  $j$  informations au point  $z = \infty$  est noté :

$$[M/N]_f^{i,j}(z) = \frac{p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_M z^M}{1 + q_1 z + \dots + q_N z^N}; \quad i + j = M + N + 1 \quad (6.16)$$

et est définit par :

$$f(z) - [M/N]_f^{i,j}(z) = O(z)^i \quad (6.17)$$

$$f(z) - [M/N]_f^{i,j}(z) = O\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{j+1}\right) \quad (6.18)$$

### 6.2.2 Fractions continues mixtes

Cette section résume les résultats de l'article [15]. Elle est consacrée à l'étude des fractions continues mixtes, celles qui commencent par la fraction de Thiele notée T et se terminent par la fraction de Stieltjes notée S, ( on les notera TS

), ainsi que celles qui sont construites inversement, ( on les notera fractions ST ). Le théorème suivant [?] est à la base de ce qui suit.

**Théorème 6.2** [?] Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de Stieltjes définies par

$$f(z) = \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{d\mu(t)}{1+tz}; \quad f(z) = \frac{f(0)}{1+zg(z)}. \quad (6.19)$$

(i) La fonction  $f$  admet une limite positive à l'infini

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = G, \quad G > 0 \quad (6.20)$$

si et seulement si la fonction  $\mu$  a un saut à l'origine :

$$\mu(t) = GH(t) + \sigma(t) \quad d\mu(t) = G\delta(t) + d\sigma(t) \quad (6.21)$$

$H$  est la fonction de Heaviside (??) et  $\sigma$  est une fonction ne présentant pas de saut à l'origine.

(ii) Si  $f$  est définie par une mesure de type(??), alors la fonction  $g$  est définie par une mesure qui ne contient pas  $\delta$  à l'origine, et vice versa.

On va noter par  $f_j$  les fonctions de Stieltjes définies par les mesures  $d\gamma_j$  de type  $d\sigma$  et par  $f_*^j$  les fonctions de Stieltjes qui sont définies par des mesures de type (??).

Supposons que les fonctions  $f_j$  possèdent les développements au voisinage de zéro, et au voisinage de l'infini :

$$S_0^{(j)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(j)} z^i; \quad c_i^{(j)} = (-1)^i \int_0^{\frac{1}{R}} t^i d\gamma_j(t) \quad i = 0, 1, \dots \quad (6.22)$$

$$S_\infty^{(j)}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^{(j)} z^{-i}; \quad C_i^{(j)} = (-1)^{i+1} \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{d\gamma_j(t)}{t^i} \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.23)$$

En particulier on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_j(z) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z f_j(z) = C_1^{(j)}$$



En inversant les fonctions de Stieltjes  $f_j$  et  $f_j^*$ , on obtient les fonctions de Stieltjes  $f_{j+1}^*$  et  $f_{j+1}$  respectivement.

$$f_j(z) = \frac{f_j(0)}{1 + z f_{j+1}^*(z)}, \quad (6.24)$$

$$f_j^*(z) = \frac{f_j^*(0)}{1 + z f_{j+1}(z)}. \quad (6.25)$$

Pour simplifier les notations on va introduire les constantes  $F_i$  et  $g_i$  comme suit :

$$f_{j+1}^*(z) = \frac{f_j(0)}{C_1^{(j)}} + f_{j+1}(z) = \frac{f_j(0)}{C_1^{(j)}} + \frac{f_{j+1}(0)}{1 + z f_{j+2}^*(z)} = G_j + \frac{F_{j+1}}{1 + z f_{j+2}^*(z)}, \quad 1 \leq j \leq k \quad (6.26)$$

$$f_{k+2j-1}(z) = \frac{f_{k+2j-1}(0)}{1 + z f_{k+2j}^*(z)} = \frac{g_{k+2j-1}}{1 + z f_{k+2j}^*(z)}, \quad j \geq 1, \quad (6.27)$$

$$f_{k+2j}^*(z) = \frac{f_{k+2j}^*(0)}{1 + z f_{k+2j+1}(z)} = \frac{g_{k+2j}}{1 + z f_{k+2j+1}(z)}, \quad j \geq 1. \quad (6.28)$$

Ces hypothèses sur  $f_j$  font qu'on peut commencer le développement de  $z f_1(z)$  en fraction de Thiele et à n'importe quel moment basculer sur le développement en fraction de Stieltjes

$$f(z) = z f_1(z) = \frac{z F_1}{1 + z G_1} + \frac{z F_2}{1 + z G_2} + \dots + \frac{z F_k}{1 + z G_k} + \frac{z g_{k+1}}{1 +} \frac{z g_{k+2}}{1 +} \dots + \frac{z g_{k+n-1}}{1 +} \frac{z g_{k+n}}{1 +} \dots \quad (6.29)$$

Cette fraction continue est dite fraction continue TS à deux points.

On peut également commencer le développement de  $z f_1(z)$  en fraction de Stieltjes, mais on ne pourra basculer en développement en fraction de Thiele qu'après l'étage à indice pair, car seulement les fonctions de Stieltjes d'indice pair sont définies par les mesures sans  $\delta$  à l'origine.

$$f(z) = z f_1(z) = \frac{z g_1}{1 +} \frac{z g_2}{1 +} \dots + \frac{z g_{2l}}{1 +} \frac{z F_{2l+1}}{1 + z G_{2l+1}} + \frac{z F_{2l+2}}{1 + z G_{2l+2}} + \dots + \frac{z F_{2l+k}}{1 + z G_{2l+k}} + \dots \quad (6.30)$$

(??) est dite fraction continue ST. Notons de façon abrégée les fractions TS et ST comme suit :

$$\{T(0, k)S(k, n)\} = \frac{zF_1}{1+zG_{1+}} \cdots \frac{zF_1}{1+zG_{1+}} \frac{zg_{k+1}}{1+} \cdots \frac{zg_{k+n-1}}{1+} \frac{zg_{k+n}}{1.} \quad (6.31)$$

$$\{S(0, n)T(n, k)\} = \frac{zg_1}{1+} \cdots \frac{zg_n}{1+} \frac{zF_{n+1}}{1+zG_{n+1+}} \cdots \frac{zF_{n+k}}{1+zG_{n+k.}} \quad (n=2l) \quad (6.32)$$

Les approximants successifs de  $TS$  vont être notés  $\frac{A_p}{B_p}$  et ceux de  $ST$   $\frac{A'_p}{B'_p}$ .

Avec la notation (??) et (??) cela donne :

$$\frac{A_{k+n}}{B_{k+n}} = \{T(0, k)S(k, n)\} \quad (6.33)$$

$$\frac{A'_{k+n}}{B'_{k+n}} = \{S(0, n)T(n, k)\}. \quad (6.34)$$

Ces approximants s'identifient aux approximants de Padé en deux points :

**Théorème 6.3** [?] (i) *Les approximants successifs de la fraction continue  $TS$  (??) sont les approximants de Padé suivants*

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{zF_1}{1+zG_1} = [1/1]_f^{2,1}(z)$$

.....

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{zF_1}{1+zG_{1+}} \cdots \frac{zF_k}{1+zG_k.} = [k/k]_f^{k+1,k}(z) \quad (6.35)$$

$$\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} = \frac{zF_1}{1+zG_{1+}} \cdots \frac{zF_k}{1+zG_k+} \frac{zg_{k+1}}{1.} = [k/k]_f^{k+2,k-1}(z) \quad (6.36)$$

$$\frac{A_{k+2}}{B_{k+2}} = \frac{zF_1}{1+zG_{1+}} \cdots \frac{zF_k}{1+zG_k+} \frac{zg_{k+1}}{1+} \frac{zg_{k+2}}{1.} = [k+1/k+1]_f^{k+3,k}(z) \quad (6.37)$$

$$\frac{A_{k+3}}{B_{k+3}} = \frac{zF_1}{1+zG_{1+}} \cdots \frac{zg_{k+3}}{1.} = [k+1/k+1]_f^{k+4,k-1}(z) \quad (6.38)$$

.....

$$\frac{A_{2l-k}}{B_{2l-k}} = \frac{zF_1}{1+zG_{1+}} \cdots \frac{zg_{2l-k}}{1.} = [l/l]_f^{2l-k+1,k}(z) \quad (6.39)$$

.....

(ii) Les approximants successifs de la fraction continue  $ST$  (??) sont les approximants de Padé suivants

$$m \leq k : \frac{A_{2k+n}}{B_{2k+n}} = [m/m - 1]_f^{2m,0}(z) \quad (6.40)$$

$$\frac{A_{2m}}{B_{2m}} = [m/m]_f^{2m+1,0}(z)$$

$$n \geq 1 : \frac{A_{2k+n}}{B_{2k+n}} = [k + n/k + n]_f^{2k+n+1,n}(z) \quad (6.41)$$

Toute cette préparation a été destinée pour pouvoir poser la question essentielle : dans quel cas peut-on permuter l'ordre de développement  $S$  et  $T$  et obtenir le même résultat ? le théorème suivant répond à cette question.

#### Théorème 6.4

$$\forall k, l \geq 0 : \{T(0, k) S(k, 2l)\} = \{S(0, 2l) T(2l, k)\} \quad (6.42)$$

**Démonstration :** ?? s'écrit :

$$\frac{A_{k+2l}}{B_{k+2l}} = \frac{A'_{k+2l}}{B'_{2l+k}} = \frac{A'_{2l+k}}{B'_{k+2l}}$$

et en se référant au théorème précédent on conclut que cette approximation s'identifie à l'AP

$$[k + l/k + l]^{k+2l+1,k} \quad \square.$$

#### Conclusion

On constate donc, qu'une fois sur deux, les fractions  $TS$  et  $ST$  s'identifient.

# Chapitre 7

## Quelques Problèmes ouverts

Nous réunissons dans ce chapitre quelques problèmes ouverts qui ont apparu dans notre travail et nous nous risquons à imaginer quelques explications sous forme des conjectures.

### **Problème 1**

Les zéros et les pôles des approximants de Padé calculés dans les points réels pour une fonction de Stieltjes se placent sur la coupure de cette fonction. On se pose donc de façon légitime la question suivante : considérons les points complexes et complexes conjugués et calculons les AP dans ces points pour les fonctions de Stieltjes ; Où se placent les zéros et les pôles dans ce cas ?

### **Conjecture 1**

Tous les tests numériques effectués sur les fonctions de Stieltjes nous ont montré que les zéros et les pôles de la suite  $[n - 1/n]_{n \geq 1}$  sont tous réels et en plus s'intercalent sur la coupure. Nous pensons donc que cette propriété est générale.

**Problème 2**

**Théorème 7.1** [?] Soit  $f$  une fonction de Stieltjes  $f(z) = \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{d\mu(t)}{1+tz}$ , alors les approximants de Padé à  $N$  points  $[k-1/k]$  et  $[k/k]$  obeissent à :

$$x \in ]-R, \infty[: \quad (-1)^{L(x)}[m/n](x) \leq (-1)^{L(x)}f(x) \quad (7.1)$$

Peut-on élargir la classe de fonctions pour lesquelles (??) est vérifiée

**Conjecture 2**

la démonstration du résultat (??) a été basé sur la positivité des numérateurs partiels de la fraction continue pour la fonction de Stieltjes, mais nous pensons qu'elle est aussi vraie pour les fonctions monotones.

**Problème 3**

En cherchant la régularité dans le positionnement des zéros et des pôles des APN calculés à partir des points complexes nous avons observé, dans le cas de la fonction  $-\frac{1}{z}\ln(1-z)$  et en prenant pour la définition de l'APN les points complexes et les points complexes symétriques (par rapport au point de ramification, ici  $z = 1$ ), que les pôles et les zéros des APN sont "presque" alignés. Le problème consiste à caractériser ce terme "presque".

Voici nos observations (cf. le paragraphe 5.4 pour la définition des droites  $D_R^\theta, D_R^0, D_{\perp R}^\theta$  en Fig.17 et les résultats sur les figures suivantes) :

1. APN calculé à partir des points complexes et complexes symétriques placés sur  $D_R^\theta$ . Les zéros et les pôles de l'APN sont presque alignés sur  $D_{\perp R}^\theta$ .
2. APN calculé à partir des points complexes et complexes symétriques placés sur  $D_R^0$ , images des points précédents issus de la rotation de  $D_R^\theta$  en  $D_R^0$ . Les zéros et les pôles de l'APN obtenus en 1. subissent la même rotation.
3. On projette sur  $D_R^0$  les points de définition de l'APN de l'expérience 1. (i.e. on remplace les parties réelles de ces points par 1). Les zéros et les pôles de l'APN obtenus en 1. subissent la même projection.

**Conjecture 3**

L'écartement de la position des zéros et des pôles des APN dans des exemples précédents est fonction de la distribution des parties imaginaires des points de définition des APN.

# Annexe

Article de F. Hebhou et L. Yushchenko in  
International Journal of Mathematics and Ma-  
thematical Sciences

Padé approximants in complex points revisited

## Abstract

The class of complex-symmetric functions contains the Stieltjes functions. The aim of this work is to give some new results concerning the location of zeros and poles of Padé approximants using the Taylor series of functions developed in neighborhoods of complex points and their conjugate points.

*Key words* : Padé approximants ; Stieltjes function,  $N$ -point Padé approximants.

## Introduction

In 1976 Chisholm and al [?] published a paper concerning the location of poles and zeros of Padé approximants of  $\ln(1-z)$  developed at the complex

point  $\zeta$  :  $\ln(1 - z) = \ln(1 - \zeta) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{z-\zeta}{1-\zeta} \right)^n$ . They claimed that all poles and zeros of diagonal Padé approximants  $[n/n]$  interlace on the cut  $z = \zeta + t(1 - \zeta)$ ,  $t \in ]1, \infty[$ . Unfortunately this result is only partially true : for poles. Klarsfeld still remarked in 1981 [?] that the zeros do not follow this rule. The study of this problem was the starting motivation of the present work. We consider the general class of complex-symmetric functions  $f$ , i.e. functions satisfying the following condition :

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad (7.2)$$

In particular, if  $\zeta$  and  $\bar{\zeta}$  are two complex conjugate points then :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \zeta)^n \text{ and } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n (z - \bar{\zeta})^n, \quad (7.3)$$

that is the coefficients of these both series are also complex conjugate. This property is the basic element of all our proofs.

Let us introduce some definitions and notations.

The 1-point Padé approximant (PA), or simply Padé approximant  $[m/n]$  to  $f$  at the point  $\zeta$  is a rational function  $\frac{P_m}{Q_n}$  iff

$$f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = O((z - \zeta)^{m+n+1}). \quad (7.4)$$

Because the existence of PA defined by (??) implies the invertibility of  $Q_n$ , that the equivalent definition is :

$$Q_n(z)f(z) - P_m(z) = O((z - \zeta)^{m+n+1}), \quad Q_n(\zeta) = 1. \quad (7.5)$$

This definition leads to the following linear system for the coefficients of polynomials  $Q_n$  and  $P_m$  :

$$Q_n(z) = 1 + q_1(z - \zeta) + \dots + q_n(z - \zeta)^n, \quad (7.6)$$

$$P_m(z) = p_0 + p_1(z - \zeta) + \dots + p_m(z - \zeta)^m, \quad (7.7)$$



$$\begin{pmatrix} c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & \cdots & c_{m-n+1} \\ c_{m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m+n-1} & c_{m+n-2} & c_{m+n-3} & \cdots & c_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{m+n} \end{pmatrix}, \quad c_{-|k|} \equiv 0, \quad (7.8)$$

$$k = 0, 1, \dots, m : \quad -p_k + \sum_{j=1}^n c_{k-j} q_j = -c_k. \quad (7.9)$$

The PA exists iff the system (??) has a solution. The following, so called Padé form [?], define PA if it exists (and other rational functions in the square blocs in the Padé table if (??) has no solution); for simplicity it is written for the case  $\zeta = 0$  :

$$\frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \frac{\begin{vmatrix} C_{(m)}(z) & zC_{(m-1)}(z) & z^2C_{(m-2)}(z) & \cdots & z^nC_{(m-n)}(z) \\ c_{m+1} & c_m & c_{m-1} & \cdots & c_{m-n+1} \\ c_{m+2} & c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & c_{m+n-2} & \cdots & c_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \cdots & z^n \\ c_{m+1} & c_m & c_{m-1} & \cdots & c_{m-n+1} \\ c_{m+2} & c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & c_{m+n-2} & \cdots & c_m \end{vmatrix}} \quad (7.10)$$

where

$$C_{(k)}(z) = \begin{cases} \sum_{j=0}^k c_j z^j & \text{if } k \geq 0, \\ 0 & \text{if } k < 0. \end{cases}$$

Let  $f$  be a function defined at the points  $\zeta_1, \dots, \zeta_N \in \mathbb{C}$  and having at these points the following power expansions :

$$i = 1, 2, \dots, N : \quad \sum_{k=0}^{p_i-1} c_k(\zeta_i)(z - \zeta_i)^k + O((z - \zeta_i)^{p_i}). \quad (7.11)$$

A  $N$ -point Padé approximant (NPA)  $[m/n]$  at the points  $\zeta_1, \dots, \zeta_N$  noted

$$[m/n]_{\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_N}^{p_1 p_2 \dots p_N}(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m}{1 + b_1 z + \dots + b_n z^n}, \quad (7.12)$$

where

$$p := p_1 + p_2 + \dots + p_N = m + n + 1$$

is defined by

$$i = 1, 2, \dots, N : \quad f(z) - [m/n]_{\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_N}^{p_1 p_2 \dots p_N}(z) = O((z - \zeta_i)^{p_i}). \quad (7.13)$$

This leads to the following definition like (??) :

$$i = 1, 2, \dots, N : \quad Q_n(z)f(z) - P_m(z) = O((z - \zeta_i)^{p_i}) \quad (7.14)$$

representing  $m + n + 1$  linear equations.

### Zeros and poles of Padé approximants of $\ln(1 - z)$

This function studied in [?] is related to the Stieltjes function

$$f(z) = \int_0^1 \frac{dx}{1 - xz} = -\frac{1}{z} \ln(1 - z) \quad (7.15)$$

defined in the cut-plane  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty[$ . The zeros and poles of PA defined by a power series of  $f$  expanded at the real points interlace on the cut  $]1, \infty[$ . What happens if PA is defined at the complex point  $\zeta$ ? Klarsfeld still remarked [?] that Chisholm result [?] is wrong and showed that poles of the PA of  $\ln(1 - z)$  follow the cut  $z = \zeta + t(1 - \zeta)$ ,  $t \geq 1$ , as mentioned in introduction, but not the zeros. We generalize this result to all  $m \geq n$ . For the convenience let us introduce the following notations :

$$\text{if } \zeta = 0 : \quad f(z) = \ln(1 - z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \text{if } \zeta \neq 0 : \quad f(z) &= \ln(1 - \zeta) + \ln\left(1 - \frac{z - \zeta}{1 - \zeta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* (z - \zeta)^n = \\ &= \ln(1 - \zeta) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z - \zeta}{1 - \zeta}\right)^n \end{aligned} \quad (7.17)$$

then, we have :

$$c_0^* = \ln(1 - \zeta), \quad n \geq 1 : c_n^* = \frac{c_n}{(1 - \zeta)^n} \quad (7.18)$$

**Théorème 7.2** *Let  $[m/n]$  and  $[m/n]^*$ ,  $m \geq n$ , are the Padé approximants of the function  $f(z) = \ln(1 - z)$  developed at the points  $z = 0$  and  $z = \zeta$  respectively, then if  $z_k (k = 1, 2, \dots, n)$  denotes a pole of  $[m/n]$  then*

$$z_k^* = \zeta + z_k(1 - \zeta) \quad (7.19)$$

*denotes the pole of  $[m/n]^*$ . In other words the poles of  $[m/n]^*$  locate on the cut*

$$z = \zeta + t(1 - \zeta), \quad t \geq 1 \quad (7.20)$$

*directed by the straight line joining the point of development of  $f : z = \zeta$  with the branch point  $z = 1$ . The zeros of  $[m/n]^*$  locate out of this line.*

**Proof.** We can readily verify this theorem looking at the formula (??) and considering the numerator  $P_m^*$  and the denominator  $Q_n^*$  of  $[m/n]^*$  and the relation (??). The denominator  $Q_n^*$  expressed in the variable  $\frac{z-\zeta}{1-\zeta}$  have the same coefficients as  $Q_n$  of  $[m/n]$  if  $c_0^*$  do not occur in its definition, that is if  $m - n + 1 > 0$ , i.e. if  $m \geq n$ . More exactly, we have

$$Q_n^*(z) = \frac{1}{(1 - \zeta)^{mn}} Q_n \left( \frac{z - \zeta}{1 - \zeta} \right). \quad (7.21)$$

That is, in this case the poles of  $[m/n]^*$  follow the way of poles of  $[m/n]$  rotated by some angle around the branch point which gives (??) and (??). On the contrary the definition of  $P_m^*$  contains always  $c_0^*$  and then the zeros of  $[m/n]^*$  locate out of (??).  $\square$

The location of the zeros of  $[m/n]^*$  remains an open problem. However the following remarks can unlock, may be, this question. The particular case of

Gilewicz theorem [10, p.217] say, that if  $[n/n]_f$  is a PA of some function  $f$  and  $\alpha$  a constant, then

$$[n/n]_f + \alpha = [n/n]_{f+\alpha}. \quad (7.22)$$

This readily leads to the following theorem, where all notations are the same as in Theorem 7.2 except  $c_0^*$  which is replaced by an arbitrary constant  $\alpha$ .

**Théorème 7.3** *Let  $f(z) = \ln(1-z) - \ln(1-\zeta) = \ln\left(\frac{1-z}{1-\zeta}\right)$  and*

$$[n/n]_f(z) = \frac{P_n\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta}\right)}{Q_n\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta}\right)} = \frac{p_0 + p_1\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta}\right) + \dots + p_n\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta}\right)^n}{1 + q_1\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta}\right) + \dots + q_n\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta}\right)^n} \quad (7.23)$$

then

$$[n/n]^*(z) = [n/n]_{f+\alpha}(z) = \frac{P_n^*\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta}\right)}{Q_n^*\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta}\right)} = \frac{\alpha Q_n\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta}\right) + P_n\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta}\right)}{Q_n\left(\frac{z-\zeta}{1-\zeta}\right)}. \quad (7.24)$$

If  $\alpha = 0$ , then the poles and also the zeros simulate the cut  $\zeta + t(1-\zeta)$ ,  $t \geq 0$ . The problem consists to analyse the behaviour of the zeros of  $P_n^*$  as function of  $\alpha$  with  $\alpha \in [0, c_0^* = \ln(1-\zeta)]$ .

### Zeros and poles of Padé approximants at complex and complex conjugate points

In this section  $[m/n]_f(z-\zeta)$  and  $[m/n]_f^*(z-\bar{\zeta})$  denote the Padé approximants of a complex-symmetric function  $f$  at the point  $\zeta$  and its complex conjugate  $\bar{\zeta}$  respectively.

**Théorème 7.4** *Let  $[m/n]$  and  $[m/n]^*$  are Padé approximants of a complex-symmetric function  $f$  at  $\zeta$  and  $\bar{\zeta}$ , then the zeros and the poles of  $[m/n]$  are complex conjugate of the corresponding zeros and poles of  $[m/n]^*$ .*

**Proof.** (??) gives

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(z - \zeta)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{c}_i(z - \bar{\zeta})^i. \quad (7.25)$$

Now,  $[m/n](z - \zeta) = \frac{P_m}{Q_n}$ ,  $Q_n = 1 + q_1(z - \zeta) + \dots + q_n(z - \zeta)^n$ , where  $q_i$  are defined by the linear system (??). We identify the solutions  $\bar{q}_i$  as coefficients of  $Q_n^*$  due to (??) :  $Q_n^* = 1 + \bar{q}_1(z - \bar{\zeta}) + \dots + \bar{q}_n(z - \bar{\zeta})^n$ . Then the zeros of  $Q_n^*$  (poles of  $[m/n]^*$ ) are the complex conjugates of those of  $Q_n$ . The same arguments are used for the system (??) and for  $P_m$  and  $P_m^*$  which completes the proof.  $\square$

## **$N$ -point Padé approximants of the complex-symmetric functions**

The following theorem is the consequence of Theorem 7.4.

**Théorème 7.5** *Let  $f$  be a complex-symmetric function, then the zeros and poles of 2-point Padé approximant  $[m/n]_{\zeta \bar{\zeta}}^{l l'}$  of  $f$  are complex conjugate of the zeros and poles of  $[m/n]_{\bar{\zeta} \zeta}^{l' l}$  where  $l$  and  $l'$  are the arbitrary integers satisfying the condition  $l + l' = m + n + 1$ .*

**Proof.** In this case the NPA is defined by two linear system like (??) and (??) leading from :

$$fQ_n - P_m = O((z - \zeta)^l), \quad fQ_n - P_m = O((z - \bar{\zeta})^{l'}) \quad (7.26)$$

and for the second NPA leading from :

$$fQ_n - P_m = O((z - \zeta)^{l'}), \quad fQ_n - P_m = O((z - \bar{\zeta})^l). \quad (7.27)$$

The same arguments as those used in the proof of Theorem 7.4 can be used to transform the system (??) to (??) and then, to obtain the result of Theorem 7.5 on the basis of Theorem 7.4.  $\square$

**Corollaire 7.1** *Let  $f$  be a complex-symmetric function then the zeros and poles of NPA  $[m/n]_{\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_k \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 \dots \bar{\zeta}_k}^{l_1 l_2 \dots l_k l'_1 l'_2 \dots l'_k}$  of  $f$  are complex conjugate of the zeros and poles of  $[m/n]_{\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_k \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2 \dots \bar{\zeta}_k}^{l'_1 l'_2 \dots l'_k l_1 l_2 \dots l_k}$ , where  $l_1 + l_2 + \dots + l_k + l'_1 + l'_2 + \dots + l'_k = m + n + 1$ .*

We are also prove the following :

**Théorème 7.6** *Let  $f$  be a complex-symmetric function, then all coefficients of  $N$ -point Padé approximant  $[m/n]_{\zeta_1 \dots \zeta_k \bar{\zeta}_1 \dots \bar{\zeta}_k}^{l_1 \dots l_k l_1 \dots l_k}$  of  $f$  are real.*

Unfortunately it is not true that the zeros and poles of these NPA are real.

**Conclusion.** In many numerical experiments with Padé approximants or  $N$ -point Padé approximants at the complex points we are not able to detect any clear regularity related to the location of poles and zeros. However it seems that their positions follow some corridors well defined. In the present time many general problem in this field remain still open.

**Acknowledgement.** We would like to thank professor Jacek Gilewicz for many useful suggestions which helped to improve this paper.

# Bibliographie

- [1] G. D. ALLEN, C. K. CHUI, W. R. MADYCH, F. J. NARCOWICH, P. W. SMITH, Padé approximation and orthogonal polynomials, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 10,(1974) 263–271,
- [2] G. D. ALLEN, C. K. CHUI, W. R. MADYCH, F. J. NARCOWICH, P. W. SMITH, Padé approximation and gaussian quadrature, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 11, (1974) 63–71
- [3] G. A. BAKER JR., *Essentials of Padé approximants*, Academic Press, New York, (1975)
- [4] G. A. BAKER JR., P. GRAVES-MORRIS, *Padé Approximants, Part I : Basic Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, (1981)
- [5] G. A. BAKER JR., P. GRAVES-MORRIS, *Padé Approximants, Part II : Extensions and applications*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, (1981)
- [6] D. BESSIS, Topics in the theory of Padé approximants, In "Padé Approximants" (P. R. Graves-Morris, ed.), Inst. of Phys., London, (1973) 19–44
- [7] C. BREZINSKI, *Rhombus algorithms connected to the Padé table and continued fractions*, Publ. Univ. Lille, (1977)
- [8] V. I. BUSLAEV, On the Baker-Gammel-Wills conjecture in the theory of Padé approximants, *Sbornik Mathematics*, 193 :6, (2002) 811–823

- [9] J. S. R. CHISHOLM, A. C. GENZ, M. PUSTERLA, A method for computing Feynman amplitudes with branch cuts, *J. Comp. Appl. Math.*, 2, (1976) 73–76
- [10] J. GILEWICZ, *Approximants de Padé*, Lectures Notes in Mathematics, 667, Springer, Berlin, (1978)
- [11] J. GILEWICZ, 100 years of improvements of bounding properties of Padé approximants to the Stieltjes functions : One point, two points and  $N$ -points Padé Approximants , *Applied Numerical Mathematics*, 60, (2010) 1320–1331
- [12] J. GILEWICZ, A. P. MAGNUS, Inverse Stieltjes iterates and errors of Padé approximants in the whole complex plane, *J. Comp. Appl. Math.*, 49, (1993) 79–84
- [13] J. GILEWICZ, M. PINDOR, Optimal Inequalities Between the contiguous two-point Padé approximant errors in the Stieltjes case, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, serie 2*, 68 (2002) 455–466
- [14] J. GILEWICZ, M. PINDOR, J. J. TELEGA, S. TOKARZEWSKI,  $N$ -point Padé Approximants and two-sided estimates of errors on the real axis for Stieltjes functions, *J. Comp. Appl. Math.*, 178, (2005) 247–602
- [15] J. GILEWICZ, M. PINDOR, J. J. TELEGA, S. TOKARZEWSKI, Continued fractions, two-point Padé Approximants and errors in the Stieltjes case, *J. Comp. Appl. Math.*, 145, (2002) 99–112
- [16] F. HEBHOUB, L. YUSHCHENKO, Padé approximants in complex points revisited, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Volume 2011, Article ID 135481, (2011)
- [17] S. KLARSFELD, Padé approximants and related methods for computing boundary values on cuts, *Lecture Notes in Mathematics*, 888, Springer, Berlin, (1981)
- [18] P. WYNN, A general system of orthogonal polynomials, *Quart. J. Math.*, 18 ser. 2, North-Holland (1967) 69–81



- [19] J. ZINN-JUSTIN, *Approximants de Padé en théorie de champs : système de pions et de kaons*, Thèse, Paris-Orsay, (1968)