



---

Université Badji Mokhtar Annaba

**THÈSE**  
**ÉVALUATION D'OPTION EUROPÉENNE À**  
**BARRIÈRE**



pour obtenir le grade de

**Docteur en Mathématiques**

**Option : Calcul Stochastique et Optimisation**

par

**KHODJA NAWEL**

soutenue devant le jury composé de

---

Pr Djellab Natalia	Professeur	U. Annaba (Présidente)
Pr Remita Mohamed Riad	Professeur	U. Annaba ( Directeur )
Dr Trabelsi Faouzi	M. C. A	U. Monastir (co-Directeur)
Pr Boukhetala Kamel	Professeur	USTHB (Examineur)
Pr Kandouci Abdeljebbar	Professeur	U. Saïda (Examineur)
Dr Zeghdoudi Halim	M. C. A	U. Annaba (Examineur)



*A mon mari Mootassem*

*A ma fille Senda*

*A l'âme de mon père et mon grand père Messaoud*

# Remerciements

*Avant tout, mes vifs remerciements, je les exprime à Dieu tout puissant. Dans les lignes suivantes je vais tenter d'exprimer toute ma gratitude aux personnes qui m'ont soutenu et permis de mener à terme ce travail.*

*Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Trabelsi Faouzi, mon Co-encadreur de thèse à L'université de Monastir. Tunis, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire ENIT et pour son encadrement. Je tiens également à le remercier pour sa disponibilité, la confiance qu'il m'a accordée et pour ses conseils et ses commentaires fort utiles qui ont fortement enrichi ma formation.*

*J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur Remita Mohamed Riad, mon directeur de thèse, pour ses nombreux conseils.*

*J'adresse ma profonde reconnaissance à Madame Djellab Natalia pour avoir présider le jury.*

*Tous mes remerciements s'adressent aux Professeurs Boukhetala Kamel et Kandouci Abdeljebbar pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je voudrais également remercier mon collègue monsieur Zeghdoudi Halim pour avoir bien voulu faire partie du jury.*

*Je voudrais remercier mon chéri Mootassem qui a supporté au jour le jour mes déprimés, ma démotivation, voire ma mauvaise humeur, m'a toujours soutenue avec enthousiasme et sans qui rien de tout cela n'aurait été possible, sans toi la pression de ces derniers mois aurait été insupportable .*

*Je voudrais également remercier ma mère, mon frère et mes deux soeurs qui ont toujours été présents pour m'épauler dans les moments difficiles.*

*Enfin, de tout mon coeur, je remercie mes proches et mes chères amies de leur soutien émotionnel inestimable : Hamida, Asma, Amel et Lyliia.*

# Résumé

Cette thèse est dédiée à l'étude des options européennes à barrière dans le cadre de Black et Scholes avec une maturité déterministe ou aléatoire.

Les options européenne à barrière auxquels, on s'est intéressés sont les options d'achats et de ventes de type up et out. Quand la maturité est déterministe, on fournit des formules fermées pour ces options et quand la maturité est aléatoire, on suppose qu'elle suit une distribution de Poisson. Dans ce cas, on fournit une expression explicite pour les options européennes à barrières, présentée sous forme d'une série numérique.

Afin de rendre nos résultats plus explicites, on donne un développement de Taylor pour l'option européenne à barrière à maturité aléatoire quand la volatilité décroît vers zéro. Puisqu'il est difficile d'obtenir une formule de forme fermée pour les options européennes à barrières avec maturité aléatoire. La dernière formule doit être très utile en pratique et en théorie de l'évaluation de l'option.

## Mots-clefs

Temps d'atteinte; option européenne d'achat et de vente à barrière; option européenne à barrière up et out; maturité aléatoire; développement de Taylor.

# Abstract

In this paper, we study and analyse European barrier options in the Black-Scholes framework with deterministic or random maturity. When the maturity is deterministic, we provide closed form formulas for (up and out) European barrier call and put options. When the maturity is random, we suppose that it follows a Poisson distribution. In this case, we provide an explicit expression for the European barrier call option, presented in the form of a numerical series. In order to make our results more explicit, we give a Taylor expansion's formula for the random maturity European barrier call option, as the volatility decreases to zero. Since there are no, or at least, it is hard to obtain a closed form formula for random maturity barrier contingent claims, the last formula should be very useful both in practice and theory of option pricing.

## Keywords

Hitting time ; european barrier call and put ; up and out barrier option ; random maturity ; Taylor expansion.

# Table de matières

Remerciements	ii
Table de matières	v
Introduction	viii
<b>1 Marché financier et options</b>	<b>1</b>
1.1 Historique . . . . .	1
1.2 Définitions et terminologies . . . . .	2
1.3 Evaluation d'option Européenne . . . . .	3
1.3.1 Bref historique et principes fondamentaux de l'évaluation d'options .	3
1.3.2 Notion d'arbitrage . . . . .	3
1.3.2.1 Arbitrage . . . . .	4
1.3.2.2 Probabilité risque neutre . . . . .	4
1.3.2.3 Hypothèses sur le marché . . . . .	6
1.3.2.4 Relation de parité . . . . .	7
1.3.3 Modèle de Black et Scholes . . . . .	7
1.3.3.1 Description du modèle de Black et Scholes : . . . . .	8
1.3.3.2 Evaluation des options dans le modèle de Black et Scholes .	9
1.4 Temps d'atteintes . . . . .	13
1.4.1 Principe de réflexion . . . . .	13
1.4.2 Loi jointe du Brownien drifté et son maximum . . . . .	18
<b>2 Les Options à barrières</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Options à Barrières . . . . .	23
2.2.1 Définitions et caractéristiques . . . . .	23
2.2.2 Intérêt . . . . .	24
2.2.3 Relation de parité . . . . .	25
2.3 Options Européenne à barrière à temps continu . . . . .	25
2.3.1 Evaluation d'option Européenne à barrière avec maturité fixe . . . . .	25
2.3.1.1 Option Européenne call . . . . .	25
2.3.1.2 Option Européenne put . . . . .	29
2.3.2 Evaluation d'option Européenne à barrière avec maturité aléatoire . .	29
2.4 Options Européenne à barrière à temps discret . . . . .	30

2.4.1	Evaluation d'option Européenne à barrière avec maturité fixe . . . . .	30
2.4.2	Evaluation d'option Européenne à barrière avec maturité aléatoire . .	31
<b>3</b>	<b>Comportement asymptotique</b>	<b>35</b>
3.1	comportement asymptotique d'option barrière à temps continu avec maturité aléatoire . . . . .	35
3.2	comportement asymptotique d'option barrière à temps discret avec maturité aléatoire. . . . .	38
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>41</b>
	<b>Références</b>	<b>42</b>

# Table des figures

2.1	Résultats des prix de l'option barrière : Up et Out Call, variant $\sigma$ paramètres : $a \in [10, 20]$ , $S_0 \in [10, 20]$ , $r \in [0, 1]$ , $n \in [0, 100]$ , $K \in [0, 10]$ . . .	34
3.1	Prix du Call Up et Out avec maturité aléatoire en fonction de $\sigma$ paramètres : $a = 200$ , $S_0 = 1$ , $r \in [0, 1]$ , $n \in [0, 100]$ , $K = 100$ . . . . .	38
3.2	Prix d'une option call Discrète : Up et Out en fonction de $\sigma$ et $n$ . Paramètres : $A_0 = -5.3$ , $B_0 = -4.6$ , $r \in [0, 1]$ , $n \in [0, 100]$ , $\sigma \in [-0.1e^{-2}, 0.1e^{-1}]$ . . . . .	40

# Introduction

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'évaluation des options Européenne à barrières avec un temps de maturité aléatoire, et au comportement asymptotique d'option à barrière en temps discret et continu, en particulier lorsque la volatilité  $\sigma$  tend vers zero.

## Motivation

Les produits financiers se sont complexifiés après les célèbres travaux de Black et Scholes. Parmi eux les options barrière qui sont l'un des exemples les plus populaires des options exotiques qui ont été proposé et analysé au cours des quatre dernières décennies. L'événement d'arrêt se produit lorsque le niveau sous-jacent traverse la barrière. Diverses approches pour l'évaluation des options barrières continues et discrètes ont été développées. (pour plus de détails, voir la motivation de l'article [20]).

Ces options peuvent être activées ou désactivées (c'est-à-dire créées ou annulées) par le passage du sous-jacent au dessus ou en dessous d'une valeur limite (la barrière). Ceci permet de réduire le risque du vendeur et donc le prix pour l'acheteur puisqu'elle ne produit ses effets que dans un nombre plus limité de situation. Il existe huit types d'option à barrière selon qu'elle soit d'achat ou de vente, avec activation ou désactivation, par franchissement à la hausse ou à la baisse de la barrière.

Nous pouvons remarquer trois points principaux dans l'utilisation des options à barrière : Le prix de ces options peut être selon le niveau de la barrière, nettement plus faible que celui d'une option standard de mêmes caractéristiques. On note aussi la multiplicité des options à barrière qui permet d'élaborer des stratégies très précises tant en terme d'anticipation, qu'en terme de couverture : pour une classe donnée d'options standard, il existe quatre types d'options à barrière. Enfin le rendement importants : le versement d'une prime faible combiné à un « pay-off » identique à celui d'une option standard en cas d'évolution favorable du sous-jacent permettent d'améliorer le levier de façon significative, ainsi que le rendement de

l'option.

Considérée en finance comme la base de la mesure du risque, la volatilité est par définition une mesure des amplitudes des variations du cours d'un actif financier. Ainsi, plus la volatilité d'un actif est élevée, plus l'investissement dans cet actif sera considéré comme risqué et par conséquent plus l'espérance de gain sera important, mais le risque de perte l'est aussi. C'est, par exemple, le cas de l'action d'une société plus endettée, mais en contre partie les portefeuilles d'actions à faible volatilité visent à procurer les rendements à long terme des actions, tout en connaissant moins de fluctuations des cours; en fait les actions à faible risque génèrent sur de longues périodes des rendements plus élevés que ceux des actions à risque élevé. C'est pour cette raison que nous allons étudier le comportement asymptotique d'option barrière avec maturité aléatoire en temps discret et continu, en particulier lorsque la volatilité  $\sigma$  tend vers zero.

Dans cette thèse nous allons nous concentrer sur un type d'option barrières particulier : le Call up and out afin de dégager clairement les problématiques, la plupart des résultats se transcrivent sans difficulté aux autres types d'options barrières.

Ce travail est organisé de la façon suivante : le premier chapitre présente un travail de synthèse avec lequel on entame la thèse. On commence par introduire quelques résultats classiques de finance et de théorie des processus stochastiques utiles dans notre étude.

Le deuxième chapitre introduit au lecteur quelques définitions et notions de base sur les marchés financiers et les options Européennes d'achat et de vente à barrière. Nous étudions, en particulier, les options européennes à barrière de type up et out avec une maturité fixe et aléatoire. Nous fournissons des formules fermées pour ces options quand la maturité est fixe et nous supposons qu'elle suit une distribution de Poisson, quand elle est aléatoire. Dans ce cas, nous obtenons une expression explicite pour les options européennes à barrières, présentée sous forme d'une série numérique.

Dans le chapitre trois, nous étudions le comportement asymptotique d'option Européenne à barrière en temps continu et discret. Nous commençons par le cas où la maturité est fixe, puis celui avec maturité aléatoire.

Les résultats issues des deux derniers chapitres ont fait l'objet d'une publication dans le journal IJOR( International Journal of Operational Research), (2014).

# Chapitre 1

## Marché financier et options

### 1.1 Historique

Le premier marché d'options moderne est apparu en 1973, c'était le CBOE (Chicago Board of Options Exchange). Remarquons (sans prétendre qu'il y a un lien entre les deux événements) que le célèbre article de Fisher Black et Myron Scholes "The pricing of options and corporate liabilities" à été publié dans la même année. De l'autre côté de l'Atlantique, le premier marché d'options à été créé à Londres en 1978 (London Traded Option Exchange aujourd'hui devenu LIFFE qui fait maintenant partie du groupe Euronext). En France, le MONEP (Marché d'Options Négotiables de Paris) a ouvert ces portes en 1987.

Les Produits dérivés s'achètent et se vendent sur deux types de marchés.

- **Marché organisé** : Un marché organisé ou bourse est une plateforme permettant aux acheteurs et aux vendeurs de produits financiers d'effectuer des ordres de bourses, via un intermédiaire qui transmet l'ordre à un membre officiel de la bourse. La chambre de compensation est un pilier central dans la bourse, elle intervient comme contrepartie entre acheteurs et vendeurs en garantissant la bonne fin des opérations.
- **Marché de gré à gré** : est un marché sur lequel les transactions se font directement entre un acheteur et un vendeur. La principale différence avec la bourse est donc qu'il n'existe pas de chambre de compensation permettant d'éviter le risque de contrepartie.

**Remarque 1.1.1.** *Les termes anglo-saxons se sont largement imposés sur les marchés financiers. Nous préférons souvent l'utilisation de ces termes plutôt que des termes français, moins utilisés.*

## 1.2 Définitions et terminologies

Dans cette section on rappelle la définition et la terminologie liée aux marchés financiers que nous utiliserons tout au long de cette thèse.

- **Marché financier** : est un lieu (parfois virtuel) où l'on achète et vend des titres financiers (ou bien actifs financiers).
- **Actif sous-jacent** (*underlying asset*) : Actif de base transigé sur les marchés financiers (bourse par exemple) dont la valeur future est incertaine par exemple action ordinaire d'une compagnie, un baril de pétrole,...
- **Produit dérivé** (*derivative*) ou **droit conditionnel** (*contingent claim*) : Actif financier dont le paiement à la maturité dépend de la valeur d'un actif sous-jacent ou de la réalisation d'un événement quelconque sous-jacent par exemple option sur action, contrat à terme, dérivé climatique, dérivé catastrophique,...
- **Option** : est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non l'obligation d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent (exemple : une action) à un prix fixé à l'avance (Strike), pendant un temps donné ou à une date fixée. Ce contrat peut se faire dans une optique de spéculation ou d'assurance.
- **Un Call** : est une option d'achat.
- **Un put** : est une option de vente.
- **Option européenne** : Option qui ne peut être exercée qu'à la date de maturité.
- **Option américaine** : Option qui peut être exercée à toute date entre 0 et T.  
Une option est dite :
- **A la monnaie** (*at the money*) : lorsque son prix d'exercice est égal au prix du sous-jacent.
- **Dans la monnaie** (*in the money*) : lorsque son prix d'exercice est inférieur au prix de son actif sous-jacent (pour un call) ou supérieur au prix de son actif sous-jacent (pour un put).
- **hors de la monnaie** (*out of the money*) dans le cas contraire.
- **Le payoff** : La valeur de l'option à la maturité. Il est positif si l'option termine dans la monnaie et nul sinon.
- **Maturité** ou **expiration** : Date d'échéance de l'option à laquelle (option européenne) ou jusqu'à laquelle (option américaine) on peut l'exercer.
- **Prix d'exercice** (*Strike*) : Prix d'achat ou de vente convenu dans un contrat d'option ou forward.

- **Prime** : Montant à verser à la banque pour bénéficier d'une option.
- **Evaluation** (*Pricing*) : Calcul du prix d'une option ou d'un titre.
- **Couverture** (*Hedging*) : Technique qui consiste à acheter ou vendre des titres pour diminuer le risque d'une position.
- **Arbitrage** : combinaison d'opérations pour tirer un profit sans prise de risque.

## 1.3 Evaluation d'option Européenne

Dans cette section nous allons dresser brièvement un historique du problème d'évaluation d'options, afin de dégager les principes fondamentaux sur lesquels nous nous appuierons pour modéliser le problème d'évaluation d'options.

### 1.3.1 Bref historique et principes fondamentaux de l'évaluation d'options

Les bases de la théorie de l'évaluation d'options moderne, ont été mises en place, en 1973, par F.Black et M.Scholes [2] et R.C.Merton [23], lauréats du prix Nobel d'économie le 14 octobre 1997 (F.Black, décédé le 30 août 1995, est cité dans la décision). Pour définir la prime d'une option sur une base objective, le principe fondamental, dû à R.C.Merton (et donc appelé principe fondamental de Merton), s'appuie sur la gestion d'un portefeuille « dynamique autofinancé » avec lequel il est possible de « répliquer l'option » à l'échéance  $T$ , c'est-à-dire d'adopter une politique de transaction de sorte que le portefeuille soit de valeur égale au paiement à l'échéance, et cela quelle que soit l'évolution du cours de l'actif sous-jacent durant la période de l'option. La prime de l'option est alors définie comme la valeur initiale de création d'un tel portefeuille. Le principe fondamental de Merton dérive directement de la notion « d'absence d'opportunité d'arbitrage » qui est une notion fondamentale en finance ; elle se situe à la base de nombreux raisonnements.

### 1.3.2 Notion d'arbitrage

Nous avons besoin de quelques définitions, pour calculer le prix d'une option.

**Definition 1.3.1.** *Une stratégie est un couple de processus  $\phi = (\phi_t^0, \phi_t)$  $_{0 \leq t \leq T}$  représentant la quantité d'actif non risqué et d'actif risqué dans le portefeuille. La valeur du portefeuille  $V_t(\phi)$  à l'instant  $t$  est donc :  $V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$ . Une stratégie est dite admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée du portefeuille  $\hat{V}_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t \hat{S}_t$  est positive pour*

tout  $t$ . On rappelle qu'une stratégie est dite autofinçante s'il n'y a pas besoin de réinjecter d'argent après la mise de fond initiale. Mathématiquement, cela se traduit en temps discret par l'égalité suivante :

$$\phi_n^0 S_n^0 + \phi_n S_n = \phi_{n+1}^0 S_n^0 + \phi_{n+1} S_n$$

ce qui donne :

$$V_{n+1} - V_n = \phi_{n+1}^0 S_{n+1}^0 + \phi_{n+1} S_{n+1} - \phi_n^0 S_n^0 - \phi_n S_n \quad (1.1)$$

$$= \phi_{n+1}^0 (S_{n+1}^0 - S_n^0) + \phi_{n+1} (S_{n+1} - S_n) \quad (1.2)$$

La transposition de cette égalité à temps continu conduit à écrire la condition d'autofinancement sous la forme suivante :

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t$$

### 1.3.2.1 Arbitrage

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage est une condition cruciale dans la théorie de la valorisation de produits dérivés. Nous formalisons ce concept avec la définition suivante.

**Definition 1.3.2.** Une opportunité d'arbitrage sur  $[0, T]$  est une stratégie de portefeuille autofinçant  $\phi$  dont la valeur  $V(\phi)$  vérifie :

$$(i) V_0(\phi) = 0, \quad (ii) V_T(\phi) \geq 0 \text{ et } \mathbb{P}[V_T(\phi)] > 0$$

On utilise aussi l'acronyme AOA pour Absence d'Opportunité d'Arbitrage.

### 1.3.2.2 Probabilité risque neutre

Une des conséquences des hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés est l'existence et l'unicité à équivalence près d'une mesure de probabilité dite probabilité martingale ou « probabilité risque-neutre » telle que le processus des prix actualisés des actifs ayant une source de risque commune est une martingale sous cette probabilité. Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement de ceux-ci était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre : aucune prime n'est attribuée à la prise de risque).

**Definition 1.3.3.** Soient  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  deux probabilités définies sur le même espace  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

- On dit que  $\mathbb{P}$  est absolument continue par rapport à  $\mathbb{Q}$  et on écrit  $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$  si pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$ .
- On dit que  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  sont équivalentes et on écrit  $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$  si pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Le théorème suivant, dû à Radon-Nikodym, sera très utile pour comprendre le théorème de Girsanov :

**Théorème 1.3.4.** Soient  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  deux probabilités définies sur le même espace  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Alors  $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$  si et seulement s'il existe une variable  $Z \geq 0$  est  $\mathcal{F}$ -mesurable et d'espérance 1 sous  $\mathbb{Q}$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z\mathbf{1}_A].$$

On appelle  $Z$  la densité de Radon-Nikodym de  $\mathbb{P}$  par rapport à  $\mathbb{Q}$  et on écrit formellement  $d\mathbb{P} = Zd\mathbb{Q}$  ou encore

$$Z = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}.$$

Ceci est motivé par l'écriture suivante, pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$\mathbb{P}[A] = \int_A d\mathbb{P}(w) = \int_A \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}(w)d\mathbb{Q}(w) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z\mathbf{1}_A].$$

De plus dans le cas où  $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ , on voit que  $Z > 0$  p.s. et que  $d\mathbb{Q} = Z^{-1}d\mathbb{P}$ .

On peut démontrer le résultat suivant, connu sous le nom de théorème de Girsanov.

**Théorème 1.3.5.** (Théorème de Girsanov) Soit  $(B_t, t \geq 0)$  un mouvement Brownien sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et  $(\mathcal{F}_t)$  sa filtration canonique. Soit

$$Z_t := \exp\left[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right], t \leq T$$

où  $\theta$  est un processus  $(\mathcal{F}_t)$ -adapté (autrement dit  $dZ_t = Z_t \theta_t dB_t$ ). On suppose  $\mathbb{E}(Z_t) = 1$ . Soit  $d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T} \stackrel{\text{def}}{=} Z_t d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$ . Le processus  $B_t$  s'écrit  $\widetilde{B}_t := B_t - \int_0^t \theta_s ds$  où  $\widetilde{B}_t$  est un  $\mathbb{Q}$ -mouvement Brownien. Sous la condition de Novikov  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds) < \infty$ ,  $Z_T$  est une variable positive d'espérance 1 sous  $\mathbb{P}$  et  $Z$  est une  $\mathbb{P}$ -martingale.

*Démonstration.* Le lecteur peut consulter le livre de Karatzas et Shreve [19]. □

**Proposition 1.3.6.** (Théorème de Girsanov : cas discret) :

Pour tout mesure de probabilité  $\mathbb{P}$ , soit  $\mathbb{Q}$  définie par :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i Z_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i^2\right)$$

où les  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sont des constantes arbitraires et les  $Z_i$  sont des variables aléatoires Gaussiennes standard sous la probabilité  $\mathbb{P}$ .

Alors sous la probabilité  $\mathbb{Q}$  et pour tout  $1 \leq i \leq m$ ,  $\widehat{Z}_i = Z_i - \alpha_i$  est une variable aléatoire Gaussienne standard.

*Démonstration.* Voir [21]. □

### 1.3.2.3 Hypothèses sur le marché

- **Les marchés viables** sont ceux où il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage c'est-à-dire où l'on ne peut pas s'enrichir sans prendre de risque.
- **Les marchés complets** sont ceux dans lesquels il existe toujours une stratégie (à déterminer) permettant d'atteindre une richesse donnée à l'échéance.
- **Les marchés parfaits** (on dit parfois sans friction) sont ceux où il n'existe pas de frais de transaction (fixes ou variables) ni aucune restriction sur le nombre ou la fréquence des transactions.

**Théorème 1.3.7.** *Le marché est viable si et seulement s'il existe une probabilité  $\mathbb{Q}$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  équivalente à  $\mathbb{P}$  sous laquelle les prix actualisés des actifs  $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$  sont des martingales.*

**Definition 1.3.8.** *La probabilité  $\mathbb{Q}$  est appelée probabilité risque neutre.*

**Definition 1.3.9.** *On appelle actif conditionnel une variable aléatoire positive  $C$  définie sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .*

**Definition 1.3.10.** *Un actif conditionnel est dit simulable, s'il existe une stratégie autofinancée admissible  $(\phi_t)_{t=1\dots T}$  telle que*

$$V_T = C \quad \mathbb{P} - p.s.$$

*La stratégie  $(\phi_t)_{t=1\dots T}$  est alors appelée stratégie de répliation.*

**Definition 1.3.11.** *Un modèle de marché financier viable est appelé complet si tout actif conditionnel est simulable.*

**Théorème 1.3.12.** *Un modèle de marché financier est complet si et seulement s'il existe une unique probabilité martingale équivalente.*

### 1.3.2.4 Relation de parité

Il existe une relation entre un call (européen) et un put (européen), sur un marché AOA, on l'appelle « la parité Call-Put ». Son intérêt réside dans la possibilité de calculer l'un connaissant l'autre. En utilisant un modèle exposé ci-dessous, on calcule l'un et on déduit l'autre grâce à cette relation. Dans un cas où le sous-jacent ne rapporte pas d'argent durant sa durée de détention, et que nous nous situons bien dans le cadre d'une option européenne, il existe alors une relation de parité call-put.

$$C_t - P_t = S_t - K \exp^{-r(T-t)}$$

Profit sans risque si on a, par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - K \exp^{-r(T-t)}$$

A l'instant  $t$ , on achète une action et un put et on vend un call. Cela dégage un profit net égal à

$$C_t - P_t - S_t$$

Si cette somme est positive, on la place au taux  $r$  jusqu'à la date  $T$ , on obtient deux cas :

- $S_T > K$  : donc, le call est exercé, on livre l'action, on encaisse la somme  $K$  et on solde l'emprunt, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + \exp^{-r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0$$

- $S_T \leq K$  : donc, on exerce son put et on solde comme précédemment, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + \exp^{-r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0.$$

Dans les deux cas, on a réalisé un profit positif sans mise de fond initiale, qui est un exemple d'arbitrage.

### 1.3.3 Modèle de Black et Scholes

Les raisonnements par arbitrage fournissent des nombreuses relations intéressantes, mais ils ne sont pas suffisants pour obtenir les formules des prix. Pour cela, on a besoin de modéliser l'évolution des cours d'une façon précise. Le problème traité par Black et Scholes est l'évaluation et la couverture d'une option de type européen (call ou put) sur une action ne donnant pas de dividendes. Black et scholes ont proposé un modèle conduisant à une formule

explicite pour le prix d'un call (européen) sur une action ne distribuant pas de dividendes et à une stratégie de gestion qui permet au vendeur de l'option d'éliminer totalement le risque (c'est à dire se couvrir).

Dans la suite, on considère un marché d'espace de scénario  $(\Omega, \mathcal{F})$ , où  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t$  est la filtration historique.  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  est l'ensemble des cours d'actions (actifs risqués) à la date  $t$  et d'échéance  $T$ .  $(S_t^0)_{t \in [0, T]}$  est l'ensemble des cours d'actifs sans risque  $S_t^0 \exp(rt)$  où  $r$  est le taux d'intérêts.

Le facteur de discontinuité est donné par :

$$B(t, T) = \exp[-r(T - t)].$$

- L'option call peut être vue comme un actif de pay-off :

$$H(S_T) = (S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$$

et son prix est donné par :

$$C_t(T, K) = \exp -r(T - t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)/\mathcal{F}_t]$$

- L'option put peut être vue comme un actif de pay-off :

$$H(S_T) = (K - S_T)_+ = \max(K - S_T, 0)$$

et son prix est donné par :

$$P_t(T, K) = \exp -r(T - t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(K - S_T)/\mathcal{F}_t]$$

- La valeur  $(S_T - K)$  ( resp  $(K - S_T)$ ) est la valeur intrinsèque de l'option et  $C_t(T, K) - (S_T - K)_+$  ( resp  $P_t(T, K) - (K - S_T)_+$ ) est sa valeurs de temps.

### 1.3.3.1 Description du modèle de Balck et Scholes :

Nous supposons que nous avons un espace de probabilité avec une filtration  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$  tel que :  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \leq \dots \mathcal{F}_T, T < \infty$  qui est une filtration naturelle du mouvement brownien standard  $B_t$ .

Le modèle proposé pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix  $S_t$  à l'instant  $t$ ) et un actif sans risque ( de prix  $S_t^0$  à l'instant  $t$ ).

- On suppose que l'évolution de  $S_t^0$  est régie par l'équation différentielle :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad S_0^0 = 1$$

de sorte que  $S_t^0 = e^{rt}$  pour  $t \geq 0$ .

Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant égale à  $r$ .

- On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \quad S_0 > 0 \quad (1.3)$$

où  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $S_0$  sont des constantes.

$B_t$  : un mouvement brownien standard.

$\mu$  : est un coefficient de croissance (dérivé).

$\sigma$  : est un coefficient de volatilité.

$S_0$  : est une valeur initiale pour  $S_t$ .

Le modèle étudié sur l'intervalle  $[0, T]$  où  $T$  est la date de l'échéance de l'option à étudier.

**Remarque 1.3.13.** *L'hypothèse selon laquelle le cours d'une action est un mouvement Brownien n'était pas réaliste car le prix de l'action ne peut pas prendre des valeurs négatives. D'où l'idée de modéliser par un mouvement Brownien géométrique :*

La solution de  $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$  est :

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right) \quad (1.4)$$

où  $S_0$  est le cours observé à la date 0.

la loi de  $S_t$  est une loi log-normale (son logarithme suit une loi normale).

Le processus  $(S_t)$  vérifie une équation de type (1.3) sauf si son logarithme est un mouvement Brownien.

### 1.3.3.2 Evaluation des options dans le modèle de Black et Scholes

Dans notre étude, on va chercher une loi de probabilité équivalente à la probabilité initiale sous laquelle les prix actualisés des actifs seront des martingales, puis on va construire des stratégies autofinancées simulant les options.

**Probabilité martingale :**

On va montrer qu'il existe une probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à la probabilité initiale  $\mathbb{P}$ , sous laquelle le prix actualisé  $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}$ . On a

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t) \end{aligned}$$

Posons

$$W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t = B_t + \theta t$$

d'où

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t$$

D'après le théorème de Girsanov : il existe  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$  tel que  $W_t$  est un mouvement brownien standard sous  $\mathbb{Q}$  et on a

$$\frac{d\mathbb{Q}/\mathcal{F}_t}{d\mathbb{P}/\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{1}{2}\theta^2 t + \theta B_t}$$

On déduit que  $(\tilde{S}_t)$  est une martingale, et que

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$$

### Valorisation :

Soit  $H$  une variable  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, positive et de la forme  $f(S_T)$  telle que :  $f(x) = (x - K)_+$  dans le cas d'un call, et  $f(x) = (K - x)_+$  dans la cas d'un put. On va définir la valeur de l'option en la simulant.

**Definition 1.3.14.** *Une option est simulable si sa valeur à l'échéance est égale à la valeur finale d'une stratégie admissible.*

Il est maintenant possible d'écrire le prix d'une option grâce au :

**Théorème 1.3.15.** *Dans le modèle de Black-Scholes, toute option définie par une fonction  $H$  continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+$  est simulable et la valeur à l'instant  $t$  de tout portefeuille simulant est donnée par :*

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)} H(S_t) / \mathcal{F}_t) \\ &= F(t, S_t) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une stratégie admissible  $(\phi^0, \phi)$  simulant l'option. La valeur du portefeuille  $(\phi_t^0, \phi_t)$  à l'instant  $t$  est :

$$V_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

Par hypothèse  $H = V_T$  ;

Soit  $\tilde{V}_t = \phi_t^0 + \phi_t \tilde{S}_t$  la valeur actualisée du portefeuille. Puisque la stratégie est autofinancée,

nous avons :

$$\begin{aligned}
d\tilde{V}_t &= d(e^{-rt}V_t) \\
&= -r\tilde{V}_t(\phi)dt + e^{-rt}dV_t(\phi) \\
&= -re^{-rt}(\phi_t^0 e^{rt} + \phi_t S_t)dt + e^{-rt}\phi_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt}\phi_t dS_t \\
&= \phi_t(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) \\
&= \phi_t d\tilde{S}_t \\
&= \phi_t \sigma \tilde{S}_t dW_t
\end{aligned}$$

Il en résulte que, sous  $\mathbb{Q}$ ,  $\tilde{V}_t$  est une martingale. D'où

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_T / \mathcal{F}_t)$$

et par conséquent :

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)} H(S_T) / \mathcal{F}_t)$$

Il reste à montrer que l'option est bien simulable, on cherche des processus  $(\phi_t^0)$  et  $\phi_t$  définissent une stratégie admissible et tel que :

$$\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)} H / \mathcal{F}_t)$$

Le processus  $M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-rT} H / \mathcal{F}_t)$ , sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ , est une martingale de carré intégrable.

D'après le théorème de représentation des martingales Browniennes : il existe un processus adapté  $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$  tel que  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\int_0^T K_s^2 ds) < \infty$  et

$$\forall t \in [0, T] : \quad M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s \quad p.s$$

la stratégie  $\phi = (\phi_t^0, \phi_t)$  avec  $\phi_t = \frac{K_t}{\sigma \tilde{S}_t}$  et  $\phi_t^0 = M_t - \phi_t \tilde{S}_t$ , alors  $\phi$  est une stratégie autofinancée, dont la valeur à l'instant  $t$  est donnée par :

$$V_t(\phi) = e^{rt} M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)} H / \mathcal{F}_t)$$

il est clair que  $V_t(\phi)$  est une variable aléatoire positive, et que  $V_t(\phi) = H$

On a donc bien une stratégie admissible simulant  $H$ .

□

Développons maintenant  $S_T$  dans l'expression de  $V_t$  :

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(f(S_T))/\mathcal{F}_t]$$

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}f(S_t \exp\{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\})]$$

La variable aléatoire  $S_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, sous  $\mathbb{Q}$ ,  $W_T - W_t$  est indépendant de  $\mathcal{F}_t$  donc  $V_t = F(t, S_t)$ .  $W_T - W_t$  varie comme  $\sqrt{T-t} * y$  tel que  $y$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , implique que  $W_T - W_t$  est une gaussienne centrée de variance  $T-t$ . Avec :

$$F(t, S_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} f(x) \exp \left( (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(W_T - W_t) \right) / \mathcal{F}_t \right]$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}\} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

On a  $F(t, S_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}f(S_t)/\mathcal{F}_t]$  Dans le cas d'un call, c'est-à-dire avec  $f(x) = (x-K)_+$ , il est possible de calculer explicitement la fonction  $F(t, x)$  ce qui nous donne le prix du call

$$C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f \left( x \exp \left\{ (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t} \right\} \right) dy$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left( e^{-r(T-t)} \left( x \exp \left\{ (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t} \right\} - K \right)_+ \right) dy$$

Posons  $\tau = T-t$  et  $g$  est une gaussienne centrée réduite.

$$C(t, S_t) = \mathbb{E} \left( x \exp \left\{ \sigma \sqrt{\tau} g - \frac{\sigma^2}{2} \right\} - K e^{-r\tau} \right)$$

Comme  $x \exp \left\{ \sigma \sqrt{\tau} g - \frac{\sigma^2}{2} \right\} - K e^{-r\tau} \geq 0$  alors

$$g \geq \frac{\ln \frac{K}{x} - r\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

Posons

$$d_1 = \frac{\ln \frac{K}{x} - r\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}$$

d'où :  $g \geq -d_2$ , avec ces notations on obtient

$$C(t, S_t) = \mathbb{E} \left( \left( x \exp \left\{ \sigma \sqrt{\tau} g - \frac{\sigma^2}{2} \right\} - K e^{-r\tau} \right) \mathbf{1}_{\{g+d_2 \geq 0\}} \right)$$

$$= \int_{-d_2}^{+\infty} \left( x \exp \left\{ \sigma \sqrt{\tau} g - \frac{\sigma^2}{2} \right\} - K e^{-r\tau} \right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

$$= I_1 - I_2$$

où

$$I_1 = x \int_{-d_2}^{+\infty} \exp \left\{ \sigma \sqrt{\tau} y - \frac{\sigma^2}{2} \right\} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

et

$$I_2 = K e^{-r\tau} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = K e^{-r\tau} \varphi(d_2)$$

avec  $\varphi$  une fonction de répartition de  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Pour calculer  $I_1$  on fait le changement de variable  $y = z + \sigma \sqrt{\tau}$ ;

$$I_1 = e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} \exp \left\{ \sigma \sqrt{\tau} y - \frac{\sigma^2}{2} \right\} dy = \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \varphi(d_1) \text{ Donc, on obtient}$$

$$C(t, S_t) = x\varphi(d_1) - K e^{-r\tau} \varphi(d_2)$$

Pour le put, on note que  $F(t, S_t) = P(t, S_t)$  où  $f(x) = (K - x)_+$ . Un calcul analogue nous donne

$$P(t, S_t) = K e^{-r\tau} \varphi(-d_2) - x\varphi(-d_1)$$

## 1.4 Temps d'atteintes

**Definition 1.4.1.** Soient  $\{B_t, t \geq 0\}$  un mouvement brownien standard et  $a \in \mathbb{R}$ , on définit le temps d'atteinte  $T_a$  par :

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$$

### 1.4.1 Principe de réflexion

**Proposition 1.4.2.** Soient  $M_t = \max_{s \in [0, t]} B_s$  le maximum du mouvement Brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $b > 0$  et  $a \geq b$ . Alors on a,

$$\forall t > 0, \mathbb{P}[M_t \geq a, B_t \leq b] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b],$$

En particulier  $M_t$  à même loi que  $|B_t|$ .

*Démonstration.* En appliquant la propriété de Markov forte au temps d'arrêt

$$T_a = \inf\{t \geq 0, B_t = a\}.$$

On sait que  $T_a < \infty$  p.s. Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[M_t \geq a, B_t \leq b] &= \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t \leq b] \\ &= \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t - a \leq b - a] \\ &= \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t - B_{T_a} \leq b - a] \\ &= \mathbb{P}[T_a \leq t, B_{t-T_a} \leq b - a]; \end{aligned}$$

où

$$B_{t-T_a} = B_t - B_{T_a} = B_t - a.$$

Notons  $B^{T_a}$  par  $\dot{B}$ , de sorte que d'après la propriété de Markov forte, le processus  $\dot{B}$  est un mouvement brownien indépendant de  $\mathcal{F}_{T_a}$  donc en particulier de  $T_a$ . Comme  $\dot{B}$  a même loi que  $-\dot{B}$ , le couple  $(T_a, \dot{B})$  a aussi même loi que  $(T_a, -\dot{B})$ . Posons

$$H = \{(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}); s \leq t, \omega(t-s) \leq b-a\}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T_a \leq t, B_{t-T_a}] &= \mathbb{P}[(T_a, \dot{B}) \in H] \\ &= \mathbb{P}[(T_a, -\dot{B}) \in H] \\ &= \mathbb{P}[T_a \leq t, -B_{t-T_a} \leq b-a] \\ &= \mathbb{P}[T_a \leq t, B_t \geq 2a-b] \\ &= \mathbb{P}[B_t \geq 2a-b]. \end{aligned}$$

Parce que l'évènement  $\{B_t \geq 2a-b\}$  est contenu dans  $\{T_a \leq t\}$ , en effet : soient  $a > 0$  et  $b \leq a$ , soit  $\omega \in \{B_t \geq 2a-b\}$  alors

$$B_t(\omega) \geq 2a-b = a + (a-b) \geq a \Rightarrow M_t(\omega) \geq a \Rightarrow T_a(\omega) \leq t.$$

Pour la deuxième assertion on observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[M_t \geq a] &= \mathbb{P}[M_t \geq a, B_t \geq a] + \mathbb{P}[M_t \geq a, B_t \leq a] = 2\mathbb{P}[B_t \geq a] = \mathbb{P}[|B_t| \geq a] \\ &= \mathbb{P}[B_t \geq a] + \mathbb{P}[B_t \leq -a]. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\forall a > 0$

$$\mathbb{P}[M_t \geq a] = \mathbb{P}[|B_t| \geq a],$$

Donc

$$\forall t > 0, S_t \stackrel{d}{=} |B_t|.$$

Telle que la notation :  $\stackrel{d}{=}$  signifie : "sont égales en distribution". De plus : la densité de  $M_t$  est égale à

$$\forall t \geq 0, f_{M_t}(x) = \frac{d\mathbb{P}[M_t \leq a]}{da} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(x).$$

□

**Remarque 1.4.3.** Le temps d'arrêt  $T_a$  est P.p.s finie, en effet :

Soit  $t > 0$  et supposons que  $a > 0$ , on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_a = +\infty] &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[T_a > t] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[M_t \leq a] \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[|B_t| \leq a] \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^a f_{|B_t|}(x) dx \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}[T_a < +\infty] = 1.$$

de même si  $a \leq 0$ .

**Corollaire 1.4.4.** On a pour  $t > 0$ ,  $a \geq b$  et  $b \geq 0$ , le couple  $(M_t, B_t)$  a pour densité la fonction  $f_{(M_t, B_t)}$  définie par :

$$f_{(M_t, B_t)}(a, b) = \frac{2(2a - b)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2a-b)^2}{2t}}$$

*Démonstration.* D'après la proposition (1.4.2), on a

$$\mathbb{P}[B_t \leq b, M_t \geq a] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b] = \int_{2a-b}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy \quad (1.5)$$

Puisque pour tout  $b \geq 0$ ,  $a \geq b$  nous avons

$$\mathbb{P}[B_t \leq b] = \mathbb{P}[B_t \leq b, M_t < a] + \mathbb{P}[B_t \leq b, M_t \geq a]$$

donc

$$F_{(M_t, B_t)}(a, b) = \mathbb{P}[B_t \leq b] - \mathbb{P}[B_t \leq b, M_t \geq a].$$

Avec le changement de variable suivant :  $[u = \frac{y}{\sqrt{2\pi}}]$ , (1.5) devient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B_t \leq b, M_t \geq a] &= \int_{\frac{2a-b}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= 1 - \phi\left(\frac{2a-b}{\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

où  $\phi$  est la fonction de répartition d'une gaussienne. Donc

$$\begin{aligned}
f_{(M_t, B_t)}(a, b) &= \frac{d^2}{dad b} \left[ 1 - (1 - \phi)\left(\frac{2a - b}{\sqrt{t}}\right) \right] \\
&= \frac{d^2}{dad b} \left[ \phi\left(\frac{2a - b}{\sqrt{t}}\right) \right] \\
&= \frac{d}{db} \left[ \frac{d}{da} \left[ \phi\left(\frac{2a - b}{\sqrt{t}}\right) \right] \right] \\
&= \frac{d}{db} \left[ \left( -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(2a-b)^2}{2t}} \right) \frac{2}{\sqrt{t}} \right] \\
&= \frac{2(2a - b)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2a-b)^2}{2t}} \\
&= \frac{2(2a - b)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2a-b)^2}{2t}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la densité du couple  $(M_t, B_t)$  est,

$$\begin{aligned}
f_{(M_t, B_t)}(a, b) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \frac{(2a - b)}{t} e^{-\frac{(2a-b)^2}{2t}} \mathbf{1}_{\{a \geq b \vee 0\}} \\
&= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \frac{(2a-b)}{t} e^{-\frac{(2a-b)^2}{2t}}, & \text{si } a > b \vee 0 \\ 0, & \text{si } a < b \vee 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

où  $a \vee b = \max(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

□

**Proposition 1.4.5.** *Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , et suivant la mesure de Wiener  $\mathbb{P}_x$ , la densité de  $T_a$  est*

$$f_{T_a}(t) = \frac{|x - a|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} \mathbf{1}_{\{t > 0\}}$$

*Démonstration.* Commençons d'abord par calculer la densité par rapport à la mesure de Wiener  $\mathbb{P}_0$ . Soit  $t > 0$ , on distingue deux cas :

1<sup>er</sup> cas :  $a \geq 0$

$$\begin{aligned}
f_{T_a}(t) &= \mathbb{P}_0[T_a \leq t] \\
&= \mathbb{P}_0[M_t \geq a] \\
&= 2\mathbb{P}_0[B_t \geq a] \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable  $[x = \sqrt{t}u]$ , on trouve

$$f_{T_a}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

d'où

$$f_{T_a(t)} = 2 \left( 1 - \phi_1\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) \right),$$

avec  $\phi_1$  est la fonction de répartition de la gaussienne  $\mathcal{N}(0, 1)$ , donc

$$\begin{aligned} f_{T_a(t)} &= \frac{d}{dt} F_{T_a(t)} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ 2 \left( 1 - \phi_1\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) \right) \right] \\ &= -2 \frac{d}{dt} \left[ \phi_1\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) \right] \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(t). \end{aligned}$$

2<sup>eme</sup> cas :  $a < 0$

$$\begin{aligned} F_{T_a(t)} &= \mathbb{P}_0[T_a \leq t] \\ &= \mathbb{P}_0[M_t \geq a] \\ &= 2\mathbb{P}_0[B_t \geq a] \\ &= 2\mathbb{P}_0[-B_t \leq -a] \\ &= 2\mathbb{P}_0[B_t \leq -a] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \end{aligned}$$

On fait le changement de variable [ $x = \sqrt{t}u$ ], on trouve

$$F_{T_a(t)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{a}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

d'où

$$F_{T_a(t)} = 2\phi_1\left(\frac{-a}{\sqrt{t}}\right),$$

donc

$$\begin{aligned} f_{T_a(t)} &= \frac{d}{dt} F_{T_a(t)} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ 2\phi_1\left(\frac{-a}{\sqrt{t}}\right) \right] \\ &= \frac{-a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(t). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $a$  quelconque, on a

$$f_{T_a(t)} = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(t).$$

Pour terminer, la densité de  $T_a$  suivant  $\mathbb{P}_x$  se calcule en faisant appel à la remarque suivante

$$\mathbb{P}_x[B_t \in A] = \mathbb{P}_0[(B_t + x) \in A],$$

où  $A$  est un évènement de  $\mathcal{F}$ , ainsi, si  $a \in \mathbb{R}$ , et  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $\forall t > 0$

$$\begin{aligned} F_{T_a}^x(t) &= \mathbb{P}_x[T_a \leq t] \\ &= \mathbb{P}_x[M_t \geq a] \\ &= 2\mathbb{P}_x[B_t \geq a] \\ &= 2\mathbb{P}_0[B_t + x \geq a] \\ &= 2\mathbb{P}_0[B_t \geq a - x] \\ &= \mathbb{P}_0[M_t \geq a - x] \\ &= \mathbb{P}_0[T_{a-x} \leq t] \\ &= F_{T_{a-x}}(t) \\ &= \frac{|x - a|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} \mathbf{1}_{(t>0)} dt. \end{aligned}$$

□

## 1.4.2 Loi jointe du Brownien drifté et son maximum

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  un mouvement Brownien sous  $\mathbb{P}$  et  $\nu \in \mathbb{R}$ . On définit le mouvement Brownien drifté  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  par

$$W_t \equiv B_t + \nu t$$

et sa borne supérieure  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  par

$$M_t = \sup_{s \in [0, t]} W_s$$

d'après le théorème de Girsanov,  $W_t$  est un mouvement Brownien sous  $\mathbb{Q}$  définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \equiv e^{-\nu B_t - \frac{\nu^2}{2} t}$$

**Definition 1.4.6.** On définit le premier temps d'atteinte d'un point  $a \in \mathbb{R}$  par le mouvement Brownien drifté,  $\tau_a$ , par

$$\tau_a \equiv \inf\{t \in \mathbb{R}^+, W_t \geq a\}$$

On rappelle que

- $\tau_a$  est un temps d'arrêt fini presque-sûrement, i.e.  $\mathbb{P}(\tau_a < +\infty) = 1$
- $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\{\tau_a \leq t\} = \{M_t \geq a\}$$

**Définition 1.4.7.** si  $\tau$  est temps d'arrêt fini presque-sûrement, on rappelle que

$$\mathcal{F}_\tau \equiv \{A \in \mathcal{F}, \forall t \in \mathbb{R}^+, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

est une tribu appelée filtration arrêtée.

**Théorème 1.4.8.** Soit  $W_t = B_t + \nu t$ , si  $b \geq 0$  et  $a \geq b$  alors

$$\mathbb{P}[W_t \leq b, M_t \geq a] = e^{2\nu a} \mathcal{N}\left(\frac{b - 2a - \nu t}{\sqrt{t}}\right)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \geq a] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_{\{M_t \geq a\}} \mathbf{1}_{\{W_t \leq b\}}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_{\{\tau_a \leq t\}} \mathbf{1}_{\{W_t \leq b\}}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{\{\tau_a \leq t\}} \mathbf{1}_{\{W_t \leq b\}} e^{\nu B_t + \frac{\nu^2}{2} t}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{\{\tau_a \leq t\}} \mathbf{1}_{\{W_t \leq b\}} e^{\nu W_t - \frac{\nu^2}{2} t}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{\{\tau_a \leq t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{W_t \leq b\}} e^{\nu W_t - \frac{\nu^2}{2} t} | \mathcal{F}_{\tau_a})] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{\{\tau_a \leq t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{a + \hat{W}_{t-\tau_a} \leq b\}} e^{\nu(a + \hat{W}_{t-\tau_a}) - \frac{\nu^2}{2} t})] \end{aligned}$$

où  $(\hat{W}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est un mouvement Brownien sous  $\mathbb{Q}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \geq a] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{\{\tau_a \leq t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{a - \hat{W}_{t-\tau_a} \leq b\}} e^{\nu(a - \hat{W}_{t-\tau_a}) - \frac{\nu^2}{2} t})] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{\{\tau_a \leq t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{2a - (a + \hat{W}_{t-\tau_a}) \leq b\}} e^{\nu(2a - (a + \hat{W}_{t-\tau_a})) - \frac{\nu^2}{2} t})] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{\{\tau_a \leq t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{2a - W_t \leq b\}} e^{\nu(2a - W_t) - \frac{\nu^2}{2} t} | \mathcal{F}_{\tau_a})] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{\{\tau_a \leq t\}} \mathbf{1}_{\{2a - W_t \leq b\}} e^{\nu(2a - W_t) - \frac{\nu^2}{2} t}] \\ &= e^{2\nu a} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{\{M_t \geq a\}} \mathbf{1}_{\{W_t \geq 2a - b\}} e^{-\nu W_t - \frac{\nu^2}{2} t}] \end{aligned}$$

On remarque que, comme  $a \geq b$ ,

$$W_t \geq 2a - b \Rightarrow W_t \geq a \Rightarrow M_t \geq a$$

donc

$$\mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \geq a] = e^{2\nu a} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\mathbf{1}_{\{W_t \geq 2a - b\}} e^{-\nu W_t - \frac{\nu^2}{2} t}]$$

On définit la probabilité  $\hat{\mathbb{Q}}$  par

$$\frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \equiv e^{-\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t}$$

On a alors, par définition,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \geq a] &= e^{2\nu a} \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}} [\mathbf{1}_{\{W_t \geq 2a-b\}}] \\ &= e^{2\nu a} \hat{\mathbb{Q}}[W_t \geq 2a-b] \end{aligned}$$

$(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est un mouvement Brownien sous  $\mathbb{Q}$  donc, d'après le théorème de Girsanov à nouveau,  $(W_t + \nu t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est un mouvement Brownien sous  $\hat{\mathbb{Q}}$ .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \geq a] &= e^{2\nu a} \hat{\mathbb{Q}} \left[ \frac{W_t + \nu t}{\sqrt{t}} \geq \frac{2a - b + \nu t}{\sqrt{t}} \right] \\ &= e^{2\nu a} \left[ 1 - \mathcal{N} \left( \frac{2a - b + \nu t}{\sqrt{t}} \right) \right] \\ &= e^{2\nu a} \mathcal{N} \left( \frac{b - 2a - \nu t}{\sqrt{t}} \right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

□

**Proposition 1.4.9.** (*Loi du Brownien drifté*)

$$\mathbb{P}[W_t \leq x] = \mathcal{N} \left( \frac{x - \nu t}{\sqrt{t}} \right)$$

*Démonstration.* Comme  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ ,  $M_t \geq 0$ , on vérifie bien que,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$ , en posant  $b = x$  et  $a = 0$  dans (1.6),

$$\mathbb{P}[W_t \leq x] = \mathcal{N} \left( \frac{x - \nu t}{\sqrt{t}} \right)$$

□

**Proposition 1.4.10.** (*Loi du maximum d'un Brownien drifté*)

$$\mathbb{P}[M_t \geq x] = e^{2\nu x} \mathcal{N} \left( \frac{-x - \nu t}{\sqrt{t}} \right) + \mathcal{N} \left( \frac{-x + \nu t}{\sqrt{t}} \right)$$

*Démonstration.*  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ , on remarque que

$$\mathbb{P}[M_t \geq x] = \mathbb{P}[W_t \leq x; M_t \geq x] + \mathbb{P}[W_t > x; M_t \geq x]$$

Comme

$$W_t > x \Rightarrow M_t \geq x$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[W_t > x; M_t \geq x] &= \mathbb{P}[W_t > x] \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{-x + \nu t}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, en posant  $b = a = x$  dans (1.6), on obtient,

$$\mathbb{P}[W_t \leq x; M_t \geq x] = e^{2\nu x} \mathcal{N}\left(\frac{-x - \nu t}{\sqrt{t}}\right)$$

En réunissant les deux résultats, on trouve finalement

$$\mathbb{P}[M_t \geq x] = e^{2\nu x} \mathcal{N}\left(\frac{-x - \nu t}{\sqrt{t}}\right) + \mathcal{N}\left(\frac{-x + \nu t}{\sqrt{t}}\right)$$

□

**Proposition 1.4.11.** *Soit  $W_t = B_t + \nu t$ , si  $b \geq 0$  et  $a \geq b$  alors*

$$\mathbb{P}[W_t \geq b; M_t \leq a] = \mathcal{N}\left(\frac{a - \nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu a} \mathcal{N}\left(\frac{-b - \nu t}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{b - \nu t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\nu a} \mathcal{N}\left(\frac{b - 2a - \nu t}{\sqrt{t}}\right)$$

*Démonstration.* On peut décomposer la probabilité  $\mathbb{P}[M_t \leq a]$  comme

$$\mathbb{P}[M_t \leq a] = \mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \leq a] + \mathbb{P}[W_t \geq b; M_t \leq a]$$

donc

$$\mathbb{P}[W_t \geq b; M_t \leq a] = \mathbb{P}[M_t \leq a] - \mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \leq a]$$

□

**Proposition 1.4.12.** *Soit  $W_t = B_t + \nu t$ , si  $b \geq 0$  et  $a \geq b$  alors*

$$\mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \leq a] = \mathcal{N}\left(\frac{b - \nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu a} \mathcal{N}\left(\frac{b - 2a - \nu t}{\sqrt{t}}\right)$$

*Démonstration.* On peut décomposer la probabilité  $\mathbb{P}[W_t \leq b]$  comme

$$\mathbb{P}[W_t \leq b] = \mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \leq a] + \mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \geq a]$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \leq a] &= \mathbb{P}[W_t \leq b] - \mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \geq a] \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{b - \nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu a} \mathcal{N}\left(\frac{b - 2a - \nu t}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

□

Ce qui donne la densité de probabilité conjointe suivante

$$f_{\{W_t, M_t\}}(a, b) = \frac{d\mathbb{P}[W_t \leq b; M_t \leq a]}{dad b},$$

c'est-à-dire

$$f_{\{W_t, M_t\}}(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} (2a - b) e^{-\nu^2 t/2 + \nu b - (2a - b)^2/(2t)}, & \text{si } a > b \vee 0; \\ 0, & \text{si } a < b \vee 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

# Chapitre 2

## Les Options à barrières

### 2.1 Introduction

Les options exotiques ou options de seconde génération sont les options autres que les options call et put ordinaire et ce sont des options multi sous-jacents avec des payoffs complexes. On peut distinguer les options exotiques en deux grandes catégories :

- Les options « non-path-dependent » : ce sont les options dont la valeur finale ne dépendant pas du chemin suivi par le cours du sous jacent pendant toute la durée de vie de l'option, par exemple : les options Binaires, Paniers etc..
- Les options « path-dependent » : le prix de ces options dépend du chemin suivi par le cours du sous jacent pendant toute la durée de vie de l'option par exemple, on peut citer les options barrières, les options asiatiques et lookbacks...

On s'intéresse dans ce chapitre à étudier l'exemple le plus simple d'option exotique, c'est-à-dire d'option dont la valeur n'est pas seulement fonction des valeurs atteintes par l'actif sous-jacent à l'échéance mais aussi de toutes les valeurs qu'il prend pendant la durée du contrat.

### 2.2 Options à Barrières

#### 2.2.1 Définitions et caractéristiques

Les options à barrière sont des options dont la valeur est conditionnée par l'évolution, pendant leur durée de vie, du prix du sous-jacent par rapport à un ou plusieurs seuils. Nous pouvons distinguer deux catégories de produit :

- **L'option à barrière activante** (knock-in option) : à une valeur à l'échéance dépendant du fait que le sous jacent atteigne ou non un certain niveau du cours appelé barrière, pendant la durée de vie de l'option. L'option n'est active que si elle atteint la barrière.

- **L'option à barrière désactivante** (knock-out option) : fonctionne de la même manière que l'option à barrière activante sauf que l'option à barrière est désactivée lorsque l'actif sous-jacent atteint un certain niveau.

Pour que l'option soit activée ou désactivée, différentes possibilités existent :

- la barrière doit être franchie au moins une fois, à n'importe quel moment, au cours de la vie de l'option (barrière continue)
- la barrière doit être franchie au moins une fois, lors d'un fixing, au cours de la vie de l'option (barrière discrète)
- la barrière doit être franchie au moment de l'échéance, peu importe ce qui a pu se passer auparavant (barrière à maturité, ou barrière infinie).

Il existe huit types d'options à barrières :

- Calls barrière :

Types	payoff
Down-and-out	$(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0, T]} S_t \geq a\}}$
Down-and-in	$(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0, T]} S_t \leq a\}}$
Up-and-out	$(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0, T]} S_t \leq a\}}$
Up-and-in	$(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0, T]} S_t \geq a\}}$

- Puts barrière :

Types	Payoff
Down-and-out	$(K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0, T]} S_t \geq a\}}$
Down-and-in	$(K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{\min_{t \in [0, T]} S_t \leq a\}}$
Up-and-out	$(K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0, T]} S_t \leq a\}}$
Up-and-in	$(K - S_T)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0, T]} S_t \geq a\}}$

## 2.2.2 Intérêt

La prime d'une option barrière est plus faible que celle d'une option standard, puisque l'option aura de la valeur au sein d'un ensemble de trajectoires de cours plus restreint que pour l'option standard de même type.

Le faible prix des options barrières en fait l'une des plus populaires au sein du groupe des options exotiques. Elle offrent la possibilité aux spéculateurs de disposer d'un effet de levier plus important pour un même montant investi.

### 2.2.3 Relation de parité

La relation de parité Call-Put pour les options standard s'écrit :

$$C_t - P_t = S_t - K \exp(-r(T - t))$$

cette relation simple résiste mal au passage aux options barrières puisque la décomposition  $(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K$  doit être multipliée ici par une fonction indicatrice du type  $\mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0, T]} S_t < a\}}$  où  $a$  est la valeur de la barrière ; la fonction de paiement  $S_T \cdot \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0, T]} S_t < a\}}$  ne correspond à aucun produit financier standard. Par contre, il existe une relation liant les options barrières de type out à celles de type in. En effet, les indicatrices de deux événements contraires somment à un :  $\mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0, T]} S_t < a\}} + \mathbf{1}_{\{\max_{t \in [0, T]} S_t \geq a\}} = 1$ . on obtient ainsi,

$$\begin{aligned} C_{up-in}(t) + C_{up-out}(t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[(S_T - K)^+] \\ C_{down-in}(t) + C_{down-out}(t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[(S_T - K)^+] \end{aligned}$$

et ces relations se traduisent de façon équivalente pour les puts.

## 2.3 Options Européenne à barrière à temps continu

Dans cette section, nous allons donner la modélisation en temps continu des options Européenne à barrière avec maturité fixe et aléatoire.

### 2.3.1 Evaluation d'option Européenne à barrière avec maturité fixe

#### 2.3.1.1 Option Européenne call

Nous allons nous concentrer sur la valorisation d'un type d'options barrières particuliers, le call up-and-out maturant en  $T$ , de strike  $K$  et de niveau de barrière  $a$ .

La plupart des résultats se transcrivent sans difficulté majeure aux autres types d'options barrières.

**Definition 2.3.1.** *Une option up-and-out call est le droit d'acheter le sous-jacent au prix  $K$  à la date  $T$  si celui-ci ne dépasse jamais la valeur  $a$  avant expiration du contrat. Le payoff d'un up-and-out call peut s'écrire :*

$$(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{0 \leq t \leq T} S_t \leq a\}} = \begin{cases} S_T - K, & \text{si ; } \max_{\{0 \leq t \leq T\}} S_t \leq a . \\ 0, & \text{si ; } \max_{\{0 \leq t \leq T\}} S_t > a . \end{cases}$$

**Proposition 2.3.2.** *le prix d'une option up-and-out call avec maturité  $T$ , strike  $K$  et barrière  $a$  est donné par :*

- Si  $K < a$  alors,

$$\begin{aligned} \pi(r, \sigma, K, a) = & S_0 \left[ \mathcal{N} \left( g_+^T \left( \frac{S_0}{K} \right) \right) - \mathcal{N} \left( g_+^T \left( \frac{S_0}{a} \right) \right) - \left( \frac{a}{S_0} \right)^{1+2\frac{r}{\sigma^2}} \left( \mathcal{N} \left( g_+^T \left( \frac{a^2}{KS_0} \right) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathcal{N} \left( g_+^T \left( \frac{a}{S_0} \right) \right) \right) \right] - e^{-rT} K \left[ \mathcal{N} \left( g_-^T \left( \frac{S_0}{K} \right) \right) - \mathcal{N} \left( g_-^T \left( \frac{S_0}{a} \right) \right) \right. \\ & \left. - \left( \frac{a}{S_0} \right)^{1-2\frac{r}{\sigma^2}} \left( \mathcal{N} \left( g_-^T \left( \frac{a^2}{KS_0} \right) \right) - \mathcal{N} \left( g_-^T \left( \frac{a}{S_0} \right) \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

où  $g_{\pm}^t(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} (\log x + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)t)$ ,  $x > 0$ .

- Si  $K > a$ , alors  $\pi(r, \sigma, K, a) = 0$

*Démonstration.* Nous traitons ici le cas où  $K < a$ .

Le prix d'un call up-and-out est donné par la formule suivante :

$$\pi(r, \sigma, K, a) = \mathbb{E}[e^{-rT} \varphi / \mathcal{F}_t]$$

où  $\varphi$  est la fonction de paiement.

Alors,

$$\begin{aligned} & e^{-rt} \mathbb{E} \left[ (S_t - K)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{0 \leq t \leq T} S_t \leq a\}} \right] = e^{-rt} \mathbb{E} [(S_0 e^{\sigma W_t} - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_0 e^{\sigma \max_t(W_t)} \leq a\}}] \\ & = e^{-rt} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{y \vee 0}^{\infty} (S_0 e^{\sigma y} - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_0 e^{\sigma x} \leq a\}} d\mathbb{P} \left( \max_t(W_t) = x, W_t = y \right) \\ & = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-rt} \int_{-\infty}^{\frac{\log(a/S_0)}{\sigma}} \int_{y \vee 0}^{\infty} (S_0 e^{\sigma y} - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_0 e^{\sigma x} \leq a\}} (2x - y) \exp(-\nu^2 t / 2 + \mu y - (2x - y)^2 / (2t)) dx dy \\ & = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-rt} \int_0^{\frac{\log(a/S_0)}{\sigma}} \int_y^{\infty} (S_0 e^{\sigma y} - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_0 e^{\sigma x} \leq a\}} (2x - y) \exp(-\nu^2 t / 2 + \nu y - (2x - y)^2 / (2t)) dx dy \\ & + \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-rt} \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} (S_0 e^{\sigma y} - K)^+ \mathbf{1}_{\{S_0 e^{\sigma x} \leq a\}} (2x - y) \exp(-\nu^2 t / 2 + \nu y - (2x - y)^2 / (2t)) dx dy \\ & = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-rt} \int_0^{\frac{\log(a/S_0)}{\sigma}} \int_y^{\infty} (S_0 e^{\sigma y} - K)^+ \mathbf{1}_{\{x \leq \frac{\log(a/S_0)}{\sigma}\}} (2x - y) \exp(-\nu^2 t / 2 + \nu y - (2x - y)^2 / (2t)) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-rt} \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} (S_0 e^{\sigma y} - K)^+ \mathbf{1}_{\{x \leq \frac{\log(a/S_0)}{\sigma}\}} (2x - y) \exp(-\nu^2 t/2 + \nu y - (2x - y)^2/(2t)) dx dy \\
& = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-rt} \int_{\frac{\log(K/S_0)}{\sigma}}^{\frac{\log(a/S_0)}{\sigma}} \int_{y \vee 0}^{\frac{\log(K/S_0)}{\sigma}} (S_0 e^{\sigma y} - K) (2x - y) \exp(-\nu^2 t/2 + \nu y - (2x - y)^2/(2t)) dx dy
\end{aligned}$$

Rappelons que  $a \geq S_0$  (sinon le prix de l'option est nulle), avec  $\nu = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$  et  $y \vee 0 = \max(y, 0)$

Soient  $z_1 = y \vee 0$ ,  $z_2 = \frac{\log(a/S_0)}{\sigma}$  et  $z_3 = \frac{\log(K/S_0)}{\sigma}$  on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_{z_1}^{z_2} (2x - y) e^{2x(y-x)/t} dx &= \frac{-t}{2} [e^{2x(y-x)/t}]_{z_1}^{z_2} \\
&= \frac{t}{2} (e^{2z_1(y-z_1)/t} - e^{2z_2(y-z_2)/t}) \\
&= \frac{t}{2} (1 - e^{2z_2(y-z_2)/t})
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& e^{-rt} \mathbb{E} \left[ (S_t - K)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{0 \leq t \leq T} S_t \leq a\}} \right] \\
& = e^{-t(r+\nu^2/2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{z_3}^{z_2} (S_0 e^{\sigma y} - K) \exp(\nu y - y^2/(2t)) (1 - e^{2z_2(y-z_2)/t}) dy \\
& = S_0 e^{-t(r+\nu^2/2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{z_3}^{z_2} \exp((\nu + \sigma)y - y^2/(2t)) dy \\
& \quad - S_0 e^{-t(r+\nu^2/2) - 2z_2^2/t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{z_3}^{z_2} \exp((\nu + \sigma + 2z_2/t)y - y^2/(2t)) dy \\
& \quad - K e^{-t(r+\nu^2/2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{z_3}^{z_2} \exp(\nu y - y^2/(2t)) dy \\
& \quad + K e^{-t(r+\nu^2/2) - 2z_2^2/t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{z_3}^{z_2} \exp((\nu + 2z_2/t)y - y^2/(2t)) dy
\end{aligned}$$

En utilisant la relation

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{z_3}^{z_2} e^{\gamma y - y^2/(2t)} dy = e^{\gamma^2 t/2} \left( \mathcal{N}\left(\frac{-z_3 + \gamma t}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{-z_2 + \gamma t}{\sqrt{t}}\right) \right)$$

on trouve :

$$e^{-rt} \mathbb{E} \left[ (S_t - K)^+ \mathbf{1}_{\{\max_{0 \leq t \leq T} S_t \leq a\}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= S_0 e^{-t(r+\nu^2/2)+(\sigma+\nu)^2 t/2} \left( \mathcal{N} \left( \frac{-z_3 + (\sigma + \nu)t}{\sqrt{t}} \right) - \mathcal{N} \left( \frac{-z_2 + (\sigma + \nu)t}{\sqrt{t}} \right) \right) \\
&- S_0 e^{-t(r+\nu^2/2)-2z_2^2/t+(\sigma+\nu+2z_2/t)^2 t/2} \left( \mathcal{N} \left( \frac{-z_3 + (\sigma + \nu + 2z_2/t)t}{\sqrt{t}} \right) - \mathcal{N} \left( \frac{-z_2 + (\sigma + \nu + 2z_2/t)t}{\sqrt{t}} \right) \right) \\
&- K e^{-rt} \left( \mathcal{N} \left( \frac{-z_3 + \nu t}{\sqrt{t}} \right) - \mathcal{N} \left( \frac{-z_2 + \nu t}{\sqrt{t}} \right) \right) \\
&+ K e^{-t(r+\nu^2/2)-2z_2^2/t+(\nu+2z_2/t)^2 t/2} \left( \mathcal{N} \left( \frac{-z_3 + (\nu + 2z_2/t)t}{\sqrt{t}} \right) - \mathcal{N} \left( \frac{-z_2 + (\nu + 2z_2/t)t}{\sqrt{t}} \right) \right) \\
&= S_0 \left( \mathcal{N} \left( g_+^t \left( \frac{S_0}{K} \right) \right) - \mathcal{N} \left( g_+^t \left( \frac{S_0}{a} \right) \right) \right) \\
&- S_0 e^{-t(r+\nu^2/2)-2z_2^2/t+(\sigma+\nu+2z_2/t)^2 t/2} \left( \mathcal{N} \left( g_+^t \left( \frac{a^2}{K S_0} \right) \right) - \mathcal{N} \left( g_+^t \left( \frac{a}{S_0} \right) \right) \right) \\
&- K e^{-rt} \left( \mathcal{N} \left( g_-^t \left( \frac{S_0}{K} \right) \right) - \mathcal{N} \left( g_-^t \left( \frac{S_0}{a} \right) \right) \right) \\
&+ K e^{-t(r+\nu^2/2)-2z_2^2/t+(\nu+2z_2/t)^2 t/2} \left( \mathcal{N} \left( g_-^t \left( \frac{a^2}{K S_0} \right) \right) - \mathcal{N} \left( g_-^t \left( \frac{a}{S_0} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

On utilise les relations suivantes :

$$-t(r + \nu^2/2) - 2z_2^2/t + (\sigma + \nu + 2z_2/t)^2 t/2 = 2z_2(r/\sigma + \sigma/2) = (1 + 2r/\sigma^2) \log(a/S_0)$$

et

$$-t(r + \nu^2/2) - 2z_2^2/t + (\nu + 2z_2/t)^2 t/2 = -rt + 2\nu z_2 = -rt + (-1 + 2r/\sigma^2) \log(a/S_0)$$

donc on trouve la formule du prix d'une option call up-and-out suivante

$$\begin{aligned}
\pi(r, \sigma, K, a) &= S_0 \left[ \mathcal{N} \left( g_+^T \left( \frac{S_0}{K} \right) \right) - \mathcal{N} \left( g_+^T \left( \frac{S_0}{a} \right) \right) - \left( \frac{a}{S_0} \right)^{1+2\frac{r}{\sigma^2}} \left( \mathcal{N} \left( g_+^T \left( \frac{a^2}{K S_0} \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mathcal{N} \left( g_+^T \left( \frac{a}{S_0} \right) \right) \right) \right] - e^{-rT} K \left[ \mathcal{N} \left( g_-^T \left( \frac{S_0}{K} \right) \right) - \mathcal{N} \left( g_-^T \left( \frac{S_0}{a} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{a}{S_0} \right)^{1-2\frac{r}{\sigma^2}} \left( \mathcal{N} \left( g_-^T \left( \frac{a^2}{K S_0} \right) \right) - \mathcal{N} \left( g_-^T \left( \frac{a}{S_0} \right) \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

□

### 2.3.1.2 Option Européenne put

**Proposition 2.3.3.** *le prix d'une option up-and-out put avec maturité  $T$ , strike  $K$  et barrière  $a$  est donné par :*

- Si  $K < a$ ,

$$\begin{aligned} \pi'(r, \sigma, K, a) &= S_0 \left[ -\mathcal{N} \left( -g_+^T \left( \frac{S_0}{K} \right) \right) + \left( \frac{a}{S_0} \right)^{1+2\frac{r}{\sigma^2}} \left( \mathcal{N} \left( -g_+^T \left( \frac{a^2}{KS_0} \right) \right) \right) \right] \\ &\quad - e^{-rT} K \left[ -\mathcal{N} \left( -g_-^T \left( \frac{S_0}{K} \right) \right) + \left( \frac{S_0}{a} \right)^{1-2\frac{r}{\sigma^2}} \left( \mathcal{N} \left( -g_-^T \left( \frac{a^2}{KS_0} \right) \right) \right) \right], \end{aligned}$$

- Si  $K > a$ , alors :

$$\begin{aligned} \pi'(r, \sigma, K, a) &= S_0 \left[ -\mathcal{N} \left( -g_+^T \left( \frac{S_0}{K} \right) \right) + \left( \frac{a}{S_0} \right)^{1+2\frac{r}{\sigma^2}} \left( \mathcal{N} \left( -g_+^T \left( \frac{a}{S_0} \right) \right) \right) \right] \\ &\quad - e^{-rT} K \left[ -\mathcal{N} \left( -g_-^T \left( \frac{S_0}{K} \right) \right) + \left( \frac{S_0}{a} \right)^{1-2\frac{r}{\sigma^2}} \left( \mathcal{N} \left( -g_-^T \left( \frac{a}{S_0} \right) \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{où } g_{\pm}^t(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left( \log x + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)t \right), \quad x > 0.$$

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle du cas d'une option call. □

### 2.3.2 Evaluation d'option Européenne à barrière avec maturité aléatoire

Dans cette étude nous allons considérer que la maturité  $T$  est aléatoire, noté  $\tau$ , et elle suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  (autres lois sont également possibles), dans ce cas le prix d'une option barrière up-and-out call avec maturité aléatoire est donné par :

$$\begin{aligned} \pi(r, \sigma, K, a, \tau) &= \mathbb{E} \left[ e^{-r\tau} (S_{\tau} - K)^+ \mathbf{1}_{\{T_a \geq \tau\}} \right] \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ e^{-rm} (S_m - K)^+ \mathbf{1}_{\{T_a \geq m\}} \right] \mathbb{P}(\tau = m) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ e^{-rm} (S_m - K)^+ \mathbf{1}_{\{T_a \geq m\}} \right] \frac{\lambda^m}{m!}. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition (2.3.2) et en remplaçant  $\mathbb{E} \left[ e^{-rm} (S_m - K)^+ \mathbf{1}_{\{T_a \geq m\}} \right]$  par sa valeur, nous devons avoir,



Les sept autres types d'options à barrière discrètes peuvent être représentés de manière similaire.

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}
\pi(r, \sigma, K, a) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ (e^{-rT} (S_m - K)^+ \mathbf{1}_{\{T_{(a,S)} \geq m\}} \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ (e^{-rT} (S_m - K) \mathbf{1}_{\{S_m \geq K, T_{(a,S)} \geq m\}} \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ e^{-rT} S_m \mathbf{1}_{\{S_m \geq K, T_{(a,S)} \geq m\}} \right] - K e^{-rT} \mathbb{P} \left[ \mathbf{1}_{\{S_m \geq K, T_{(a,S)} \geq m\}} \right].
\end{aligned}$$

Nous Utilisons le théorème de Girsanov discret (voir proposition 1.3.6), avec  $\alpha_i = \sigma \sqrt{\Delta t}$ , nous trouvons que le premier terme de la dernière équation est donné par :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ e^{-rT} S_0 \exp \left( \nu m \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m Z_i \right) \mathbf{1}_{\{S_m \geq K, T_{(a,S)} \geq m\}} \right] \\
&= S_0 \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 T + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m Z_i \right) \mathbf{1}_{\{S_m \geq K, T_{(a,S)} \geq m\}} \right] \\
&= S_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{1}_{\{S_m \geq K, T_{(a,S)} \geq m\}} \right] \\
&= S_0 \mathbb{Q} [S_m \geq K, T_{(a,S)} \geq m],
\end{aligned}$$

où  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$  est l'espérance sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ .

Nous avons sous  $\mathbb{Q}$ ,

$$W_m = \sum_{i=1}^m \left( \hat{Z}_i + \left[ \{(\nu + \sigma^2)/\sigma\} \sqrt{T/m} \right] \right), \quad (2.4)$$

et sous  $\mathbb{P}$ ,

$$W_m = \sum_{i=1}^m \left( Z_i + \left[ (\nu/\sigma) \sqrt{T/m} \right] \right) \quad (2.5)$$

où  $\hat{Z}_i$  et  $Z_i$  sont des variables aléatoires suivent la loi normale standard.  $\square$

## 2.4.2 Evaluation d'option Européenne à barrière avec maturité aléatoire

**Proposition 2.4.2.**

$$\begin{aligned}
\pi(r, \sigma, K, a, \tau) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ e^{-rn} (S_m - K)^+ \mathbf{1}_{\{T_a \geq m\}} \right] \mathbb{P}(\tau = n) \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ e^{-rn} (S_m - K)^+ \mathbf{1}_{\{T_a \geq m\}} \right] \frac{\lambda^n}{n!}
\end{aligned}$$

où sous  $\mathbb{Q}$

$$W_m = \sum_{i=1}^m \left( \hat{Z}_i + \left( r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) / \sigma \sqrt{\Delta t} \right)$$

et sous  $\mathbb{P}$

$$W_m = \sum_{i=1}^m \left( Z_i + \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) / \sigma \sqrt{\Delta t} \right).$$

avec  $Z_i$  et  $\hat{Z}_i$  sont des variables aléatoires qui suivent la loi normale standard sous  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$ , respectivement.

Calculons maintenant

$$\mathbb{P} \left( W_m \geq \frac{\log(K/S_0)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, T\{(\log(a/S_0)/\sigma\sqrt{m\Delta t}, W\} \geq m \right)$$

**Lemme 2.4.3.** On a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( W_m \geq \frac{\log(K/S_0)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, T\{(\log(a/S_0)/\sigma\sqrt{m\Delta t}, W\} \geq m \right) \tag{2.6} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{N} \left( \frac{a_1}{\sigma} + a_2\sigma \right) - \mathcal{N} \left( \frac{a_3}{\sigma} + a_2\sigma \right) + \exp \left( -2 \frac{rA_0}{\sigma^2\sqrt{m}} + \frac{A_0}{\sqrt{m}} \right) \left[ \begin{array}{l} \mathcal{N} \left( \frac{a_4}{\sigma} + a_2\sigma \right) - \mathcal{N} \left( \frac{a_5}{\sigma} + a_2\sigma \right) \end{array} \right] & \text{si } K \leq a \\ 0 & \text{si } K > a \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$a_1 \triangleq \frac{-A_0}{m} - \sqrt{mr}, \quad a_2 \triangleq \frac{\sqrt{m}}{2}, \quad a_3 \triangleq \frac{-B_0}{m} - \sqrt{mr}, \quad a_4 \triangleq \frac{-B_0 + 2A_0}{m} - \sqrt{mr}$$

$$a_5 \triangleq \frac{A_0}{n} - \sqrt{mr}, \quad B_0 \triangleq \log\left(\frac{S_0}{K}\right), \quad A_0 \triangleq \log\left(\frac{S_0}{a}\right).$$

*Démonstration.* Pour démontrer le lemme, nous aurons besoin d'utiliser la proposition (2.3.2) et la proposition (1.4.11). On a

$$\mathbb{P}(W_T \geq x, T_a^W \geq T) = \begin{cases} \mathcal{N} \left( \frac{a-\nu T}{\sqrt{T}} \right) - \mathcal{N} \left( \frac{x-\nu T}{\sqrt{T}} \right) + e^{2\nu a} \left[ \mathcal{N} \left( \frac{x-2a-\nu T}{\sqrt{T}} \right) \right. \\ \left. - \mathcal{N} \left( \frac{-a-\nu T}{\sqrt{T}} \right) \right], & \text{si } x \leq a; \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

alors dans la proposition (2.4.2), la barrière n'est pas franchie c'est-à-dire,  $\frac{\log(K/S_0)}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \leq \frac{\log(a/S_0)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$  avec  $K > S_0$  et  $a > S_0$ . □

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

**Proposition 2.4.4.**

$$\pi(r, \sigma, K, a, \tau) = e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ S_0 \mathbb{Q} \left( W_m \geq \frac{\log(K/S_0)}{\sigma \sqrt{\Delta t}}, T \left\{ \log\left(\frac{a}{S_0}\right) / \sigma \sqrt{m \Delta t}, W \right\} \geq m \right) - K e^{-rn} \mathbb{P} \left( W_m \geq \frac{\log(K/S_0)}{\sigma \sqrt{\Delta t}}, T \left\{ \log\left(\frac{a}{S_0}\right) / \sigma \sqrt{m \Delta t}, W \right\} \geq m \right) \right] \frac{\lambda^n}{n!},$$

avec

$$\mathbb{P} \left( W_m \geq \frac{\log(K/S_0)}{\sigma \sqrt{\Delta t}}, T \left\{ \log\left(\frac{a}{S_0}\right) / \sigma \sqrt{m \Delta t}, W \right\} \geq m \right) =$$

$$\begin{cases} \mathcal{N} \left( \frac{a_1}{\sigma} + a_2 \sigma \right) - \mathcal{N} \left( \frac{a_3}{\sigma} + a_2 \sigma \right) + \exp \left( -2 \frac{r A_0}{\sqrt{m} \sigma^2} + \frac{A_0}{\sqrt{m}} \right) \left[ \mathcal{N} \left( \frac{a_4}{\sigma} + a_2 \sigma \right) - \mathcal{N} \left( \frac{a_5}{\sigma} + a_2 \sigma \right) \right], & \text{si } K \leq a; \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

où

(i) sous  $\mathbb{Q}$

$$W_m = \sum_{i=1}^m \left( \hat{Z}_i + \left( \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) / \sigma \right) \sqrt{\Delta t} \right)$$

(ii) sous  $\mathbb{P}$

$$W_m = \sum_{i=1}^m \left( Z_i + \left( \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) / \sigma \right) \sqrt{\Delta t} \right).$$

$Z_i$  et  $\hat{Z}_i$  sont des variables aléatoires qui suivent la loi normale sous  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$ , respectivement.

Nous présentons sur la figure (2.1) des prix de l'option d'achat up et out à barrière en variant  $\sigma$ .

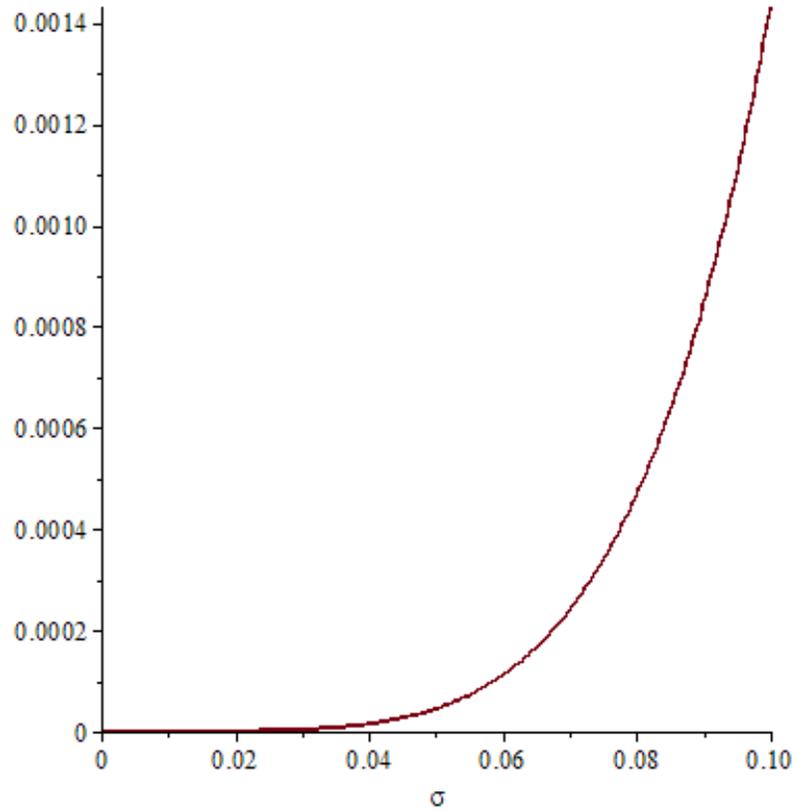


FIGURE 2.1: Résultats des prix de l'option barrière : Up et Out Call, variant  $\sigma$  paramètres :  $a \in [10, 20]$ ,  $S_0 \in [10, 20]$ ,  $r \in [0, 1]$ ,  $n \in [0, 100]$ ,  $K \in [0, 10]$ .

Remarquons que le prix de l'option est convexe par rapport à la volatilité  $\sigma$ .

# Chapitre 3

## Comportement asymptotique

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement asymptotique d'option européenne à barrière de type up and out call avec maturité aléatoire. Une première étude du comportement asymptotique d'option barrière a été réalisée par Kou ([21]) et ceci pour maturité fixe.

### 3.1 comportement asymptotique d'option barrière à temps continu avec maturité aléatoire

Notre objectif est de donner un développement de Taylor de l'option européenne up and out call à barrière avec maturité aléatoire et de prix  $\pi(r, a, \sigma, K, \tau)$  quand  $\sigma$  tend vers zéro. Pour cela, nous aurons approximer le prix  $\pi(r, a, \sigma, K, \tau)$ .

Une bonne approximation de la distribution de la loi Normal  $\mathcal{N}(x)$  pour les grandes valeurs  $x \gg 1$  est obtenu par la série asymptotique (voir par exemple [8]).

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} (x^{-1} - x^{-3} + 3x^{-5} - 15x^{-7} + \dots). \quad (3.1)$$

Pour exprimer notre résultat principal, nous aurons besoin du résultat suivant

**Proposition 3.1.1.** *Le prix d'une option up and out call à barrière  $\pi(r, a, \sigma, K, \tau)$  et de maturité aléatoire quand  $\sigma \rightarrow 0$ , est réécrit comme*

$$\pi(r, a, \sigma, K, m) = \frac{1}{256} \Upsilon_0(r, a, K, m) \sigma^5 + o(\sigma^7), \quad (3.2)$$

où

$$\Upsilon_0(r, a, K, m) = - \frac{\sqrt{S_0} m^{5/2} \sqrt{2} r m e^{-1/2 r m} \left( B_0 \sqrt{K^{-1}} + \sqrt{K^{-1}} r m - A_0 \sqrt{a^{-1}} - \sqrt{a^{-1}} r m \right)}{\sqrt{a^{-1}} \sqrt{K^{-1}} \sqrt{\pi} (A_0 + r m) (B_0 + r m)} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
& +m^{5/2}\sqrt{2}rme^{-1/2rm}\left(B_0\sqrt{\frac{a}{K}}-2A_0\sqrt{\frac{a}{K}}+rm\sqrt{\frac{a}{K}}+A_0-rm\right)\frac{1}{\sqrt{\pi S_0 K^{-1}}}\left(-A_0+rm\right)^{-1}\left(B_0-2A_0\right. \\
& \left.+rm\right)^{-1}+\frac{rme^{-rm}K\sqrt{S_0}m^{5/2}\sqrt{2}rme^{1/2rm}\left(\sqrt{a^{-1}}B_0+\sqrt{a^{-1}}rm-\sqrt{K^{-1}}A_0-\sqrt{K^{-1}}rm\right)}{\sqrt{\pi}\left(A_0+rm\right)\left(B_0+rm\right)} \\
& -am^{5/2}\sqrt{2}rme^{1/2rm}\left(-B_0+2A_0-rm-\sqrt{\frac{1}{S_0 K}}aA_0\sqrt{\frac{1}{S_0 a}}\right. \\
& \left.+\sqrt{\frac{1}{S_0 K}}arm\sqrt{\frac{1}{S_0 a}}\right)S_0^{-1}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{S_0}\sqrt{\pi}}\left(-A_0+rm\right)^{-1}\left(B_0-2A_0+rm\right)^{-1},
\end{aligned}$$

où  $A_0 = \log\left(\frac{S_0}{a}\right)$ , et  $B_0 = \log\left(\frac{S_0}{K}\right)$

*Démonstration.* Pour démontrer la proposition ci-dessus, nous aurons besoin d'utiliser le lemme suivant :

**Lemme 3.1.2.** Soient  $a, b > 0$  alors :

$$\exp\left(-\frac{\left(\frac{a}{\sigma}+b\sigma\right)^2}{2}\right)=-\frac{1}{8}b^4e^{-ab}\sigma^4+o(\sigma^6)$$

*Démonstration.* Nous utilisons l'approximation suivante :

$$e^{-\frac{x}{\sigma}}+e^{-x\sigma}=1-(x\sigma)+\frac{(x\sigma)^2}{2!}+\dots \quad \text{quand } \sigma \rightarrow 0, \quad x > 0,$$

le lecteur peut consulter le livre de mass [8] Nous pouvons prouver que pour tout  $a, b$  positifs, nous avons

$$e^{-\frac{a}{\sigma}}+e^{-b\sigma}=1-(b\sigma)+\frac{(b\sigma)^2}{2!}+\dots \quad \text{quand } \sigma \rightarrow 0$$

Ensuite nous utilisons

$$e^{-\frac{3a}{\sigma}}+e^{-3b\sigma}=\left(e^{-\frac{a}{\sigma}}+e^{-b\sigma}\right)\left(e^{-\frac{2a}{\sigma}}+e^{-2b\sigma}-e^{-\left(\frac{a}{\sigma}+b\sigma\right)}\right)$$

pour prouver que  $e^{-\left(\frac{a}{\sigma}+b\sigma\right)}=-\frac{1}{2}b^2\sigma^2+o(\sigma^4)$ , ce qui prouve le lemme.  $\square$

Nous définissons

$$\begin{aligned}
y_1 &\triangleq \frac{a_1}{\sigma} + a_2\sigma, & a_1 &= \frac{B_0}{\sqrt{T}} + r\sqrt{T} & a_2 &= \frac{\sqrt{T}}{2} \\
y_2 &\triangleq \frac{a_3}{\sigma} + a_4\sigma, & a_3 &= \frac{A_0}{\sqrt{T}} + r\sqrt{T} & a_4 &= \frac{\sqrt{T}}{2} \\
y_3 &\triangleq \frac{a_5}{\sigma} + a_6\sigma, & a_5 &= \frac{B_0 - 2A_0}{\sqrt{T}} + r\sqrt{T} & a_6 &= \frac{\sqrt{T}}{2} \\
y_4 &\triangleq \frac{a_7}{\sigma} + a_8\sigma, & a_7 &= \frac{-A_0}{\sqrt{T}} + r\sqrt{T} & a_8 &= \frac{\sqrt{T}}{2} \\
y_5 &\triangleq \frac{a_9}{\sigma} + a_{10}\sigma, & a_9 &= \frac{B_0}{\sqrt{T}} + r\sqrt{T} & a_{10} &= \frac{-\sqrt{T}}{2} \\
y_6 &\triangleq \frac{a_{11}}{\sigma} + a_{12}\sigma, & a_{11} &= \frac{A_0}{\sqrt{T}} + r\sqrt{T} & a_{12} &= \frac{-\sqrt{T}}{2} \\
y_7 &\triangleq \frac{a_{13}}{\sigma} + a_{14}\sigma, & a_{13} &= \frac{B_0 - 2A_0}{\sqrt{T}} + r\sqrt{T} & a_{14} &= \frac{-\sqrt{T}}{2} \\
y_8 &\triangleq \frac{a_{15}}{\sigma} + a_{16}\sigma, & a_{15} &= \frac{-A_0}{\sqrt{T}} + r\sqrt{T} & a_{16} &= \frac{-\sqrt{T}}{2}
\end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire la proposition précédente de telle sorte que

$$\begin{aligned}
\pi(r, a, \sigma, K, m) &= S_0 \left[ \mathcal{N}(y_1) - \mathcal{N}(y_2) - \left( \frac{a}{S_0} \right)^{1+2\frac{r}{\sigma^2}} \left( \mathcal{N}(y_3) - \mathcal{N}(y_4) \right) \right] - e^{-rm} K \left[ \mathcal{N}(y_5) - \mathcal{N}(y_6) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{a}{S_0} \right)^{1-2\frac{r}{\sigma^2}} \left( \mathcal{N}(y_7) - \mathcal{N}(y_8) \right) \right].
\end{aligned}$$

Il nous reste d'utiliser le lemme (3.1.2) et l'équation (3.1) pour compléter la preuve.  $\square$

**Théorème 3.1.3.** *Le prix d'une option européenne d'achat up and out à barrière avec maturité aléatoire quand  $\sigma \rightarrow 0$ , est*

$$\pi(r, a, \sigma, K, \lambda) = \Psi_0(r, a, K, \lambda)\sigma^5 + o(\sigma^7),$$

où  $\Psi_0(r, a, K, \lambda) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\exp(-\lambda)}{256} \Upsilon_0(r, a, K, m) \frac{\lambda^m}{m!}$ ,  $\Upsilon$  est la même fonction de (3.3).

En particulier, le prix  $\pi(r, a, \sigma, K, \lambda)$  tend vers zero quand la volatilité décroît vers zero.

*Démonstration.* Nous combinons Propositions (3.1.1) et l'équation (2.1).  $\square$

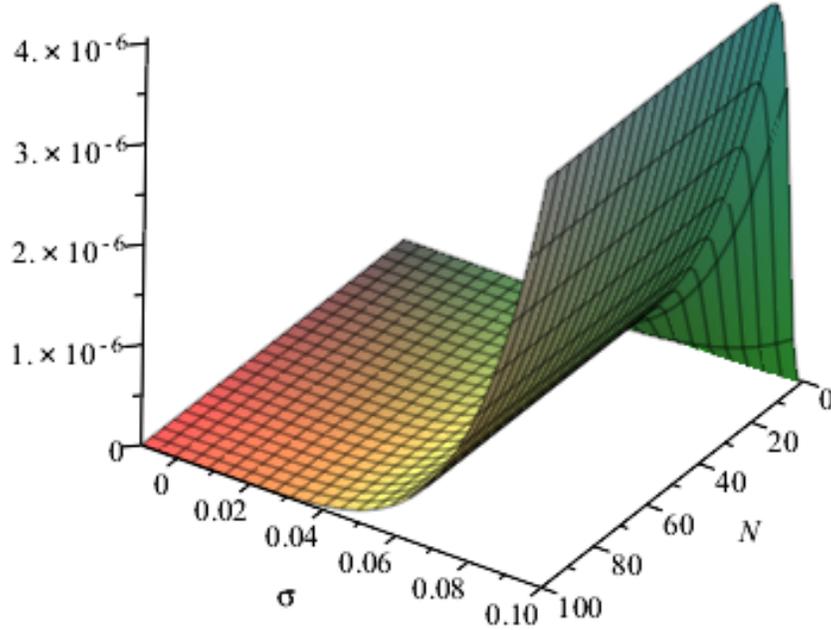


FIGURE 3.1: Prix du Call Up et Out avec maturité aléatoire en fonction de  $\sigma$  paramètres :  $a = 200$ ,  $S_0 = 1$ ,  $r \in [0, 1]$ ,  $n \in [0, 100]$ ,  $K = 100$ .

### 3.2 comportement asymptotique d'option barrière à temps discret avec maturité aléatoire.

Notre but est de donner un développement de Taylor d'une option barrière discrète avec maturité aléatoire et de prix  $\pi(r, a, \sigma, K, \tau)$  quand  $\sigma$  tend vers zéro.

**Proposition 3.2.1.**

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( W_m \geq \frac{\log(K/S_0)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, T\{\log(a/S_0)/\sigma\sqrt{m\Delta t}, W\} \geq m \right) \\ &= \Upsilon_1(r, a, K, m)\sigma^5 + o(\sigma^7), \end{aligned}$$

où

$$\Upsilon_1(r, a, K, m) = \frac{1}{256} m^3 \sqrt{2} (A_0 + m^{3/2}r)^{-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (B_0 + m^{3/2}r)^{-1} \left[ \exp \left( 1/2 \frac{A_0 + m^{3/2}r}{\sqrt{m}} \right) B_0 \right] \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
& + \exp\left(1/2 \frac{A_0 + m^{3/2}r}{\sqrt{m}}\right) m^{3/2}r - \exp\left(1/2 \frac{B_0 + m^{3/2}r}{\sqrt{m}}\right) A_0 - \exp\left(1/2 \frac{B_0 + m^{3/2}r}{\sqrt{m}}\right) m^{3/2}r \Big] \\
& - \frac{1}{256} m^3 \sqrt{2} (-B_0 + 2A_0 - m^{3/2}r)^{-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (A_0 - m^{3/2}r)^{-1} \left[ \exp\left(-1/2 \frac{-B_0 + 2A_0 - m^{3/2}r}{\sqrt{m}}\right) A_0 \right. \\
& - \exp\left(-1/2 \frac{-B_0 + 2A_0 - m^{3/2}r}{\sqrt{m}}\right) m^{3/2}r + \exp\left(-1/2 \frac{A_0 - m^{3/2}r}{\sqrt{m}}\right) B_0 - 2 \exp\left(-1/2 \frac{A_0 - m^{3/2}r}{\sqrt{m}}\right) A_0 \\
& \left. + \exp\left(-1/2 \frac{A_0 - m^{3/2}r}{\sqrt{m}}\right) m^{3/2}r \right] \exp\left(\frac{A_0}{\sqrt{m}}\right) \\
& \text{avec } A_0 = \log\left(\frac{S_0}{a}\right) \quad B_0 = \log\left(\frac{S_0}{K}\right).
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Soient

$$\begin{aligned}
x_1 & \triangleq \frac{a_1}{\sigma} + a_2\sigma, \\
x_2 & \triangleq \frac{a_3}{\sigma} + a_2\sigma, \\
x_3 & \triangleq \frac{a_4}{\sigma} + a_2\sigma, \\
x_4 & \triangleq \frac{a_5}{\sigma} + a_2\sigma
\end{aligned}$$

avec,  $a_1 = \frac{B_0\sqrt{m}}{m\Delta t}$ ,  $a_2 = -r\Delta t$ ,  $a_3 = \frac{\sqrt{m\Delta t}}{2}$ , et  $a_4 = \frac{A_0}{\sqrt{m\Delta t}}$ .

Evidemment  $x_1, x_2$ , et  $x_3$  converge vers l'infini quand  $\sigma$  tend vers zero.

En effet, nous aurons besoins de calculer le comportement asymptotique de

$$\mathbb{P}\left(W_m \geq \frac{\log(K/S_0)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, T\left\{\log\left(\frac{a}{S_0}\right)/\sigma\sqrt{m\Delta t}, W\right\} \geq m\right)$$

par rapport au variable  $x = \frac{1}{\sigma}$  (quand  $x$  approche de l'infinie).  $\square$

**Théorème 3.2.2.** *Le prix d'une option à barrière up and out call dont la fonction  $\pi(r, a, \sigma, K, \lambda)$  a le développement de Taylor au voisinage 0 suivant.*

$$\pi(r, a, \sigma, K, \lambda) = \Psi_1(r, a, K, m)\sigma^5 + o(\sigma^7) \tag{3.5}$$

où

$$\Psi_1(r, a, K, m) = e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ (S_0 - Ke^{-rn}) \Upsilon_1(r, a, K, m) \right] \frac{\lambda^n}{n!}, \tag{3.6}$$

$\Upsilon_1$  est le même que dans l'équation (3.4).

En particulier, le prix  $\pi(r, a, \sigma, K, \lambda)$  tend vers zero, quand la volatilité décroît à zero.

*Démonstration.* Combinant les deux Propositions (2.4.4) et (3.2.1) nous obtenons : Le prix d'une option barrière avec maturité aléatoire et avec la fonction de contrat  $\pi(r, a, \sigma, K, \lambda)$

est réécrit comme :

$$\pi(r, a, \sigma, K, \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[ S_0 \mathbb{Q} \left( W_m \geq \frac{\log(K/S_0)}{\sigma \sqrt{\Delta t}}, T \left\{ \log\left(\frac{a}{S_0}\right) / \sigma \sqrt{m \Delta t}, W \right\} \geq m \right) - K e^{-rn} \mathbb{P} \left( W_m \geq \frac{\log(K/S_0)}{\sigma \sqrt{\Delta t}}, T \left( \frac{\log(a/S_0)}{\sigma \sqrt{m \Delta t}}, W \right) \geq m \right) \right] \frac{\lambda^n}{n!} \quad (3.7)$$

où

$$\begin{aligned} & \mathbb{Q} \left( W_m \geq \frac{\log(K/S_0)}{\sigma \sqrt{\Delta t}}, T \left( \frac{\log(a/S_0)}{\sigma \sqrt{m \Delta t}}, W \right) \geq m \right) \\ &= \mathbb{P} \left( W_m \geq \frac{\log(K/S_0)}{\sigma \sqrt{\Delta t}}, T \left( \frac{\log(a/S_0)}{\sigma \sqrt{m \Delta t}}, W \right) \geq m \right) \\ &= \Upsilon_1(r, a, K, m) \sigma^5 + o(\sigma^7), \end{aligned} \quad (3.8)$$

□

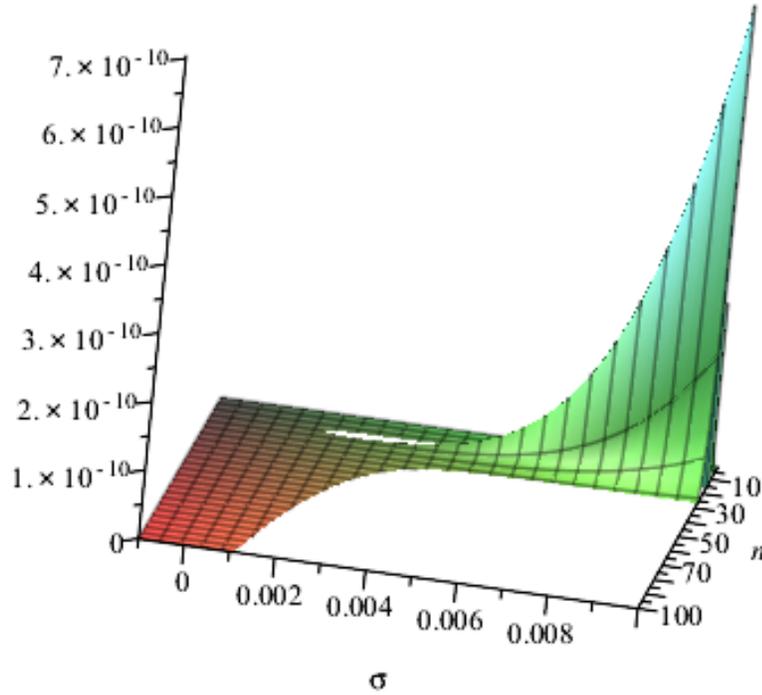


FIGURE 3.2: Prix d'une option call Discrète : Up et Out en fonction de  $\sigma$  et  $n$ .  
Paramètres :  $A_0 = -5.3$ ,  $B_0 = -4.6$ ,  $r \in [0, 1]$ ,  $n \in [0, 100]$ ,  $\sigma \in [-0.1e^{-2}, 0.1e^{-1}]$

# Conclusion et perspectives

Dans ce travail nous nous sommes intéressés aux options européennes à barrières avec maturité aléatoire en temps discret et continu, quand la maturité est déterministe, on a fourni des formules fermées et quand la maturité est aléatoire, on a supposé qu'elle suit une distribution de Poisson et on a fourni une expression explicite présentée sous forme d'une série numérique.

Enfin, le comportement asymptotique de ces options a été étudié, en particulier lorsque la volatilité  $\sigma$  tend vers zéro.

L'importance de ce choix de  $\sigma$  est Lorsque la volatilité est élevée, la possibilité de gain est plus importante, mais le risque de perte l'est aussi.

Ces résultats contribuent à la théorie de l'évaluation des options. Une suite possible de ce travail, serait de faire la même étude pour les options barrières à maturité aléatoire, de type Américain. On peut aussi essayer de généraliser l'étude pour une distribution arbitraire de la maturité aléatoire.

Finalement, on peut examiner l'étude pour la classe des processus de Lévy.

# Bibliographie

- [1] B. Alziary, J. Decamps. P. Koehl. *A PDE approach to Asian options : analytical and numerical evidence*. Journal of Banking and Finance. Vol. 21, No. 5 :pp. 613-640. (1997).
- [2] F. Black, and M. Scholes. *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy. Vol. 81, No. 3 : pp. 637-54. (1973).
- [3] L. Benothman and F. Trabelsi. *Asymptotic analysis of European and American options with jumps in the underlying*. Int. J. of Mathematics in Operational Research, Vol. 4, No. 5 : pp. 548-585. (2012).
- [4] L. Benothman and F. Trabelsi. *Asymptotic analysis of options in a jump-diffusion model with binomial jump size distribution*. Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, Vol. 4, No. 1 : pp. 14-55. (2013).
- [5] L. Benothman and F. Trabelsi. *Error Analysis of Asymptotic Option Prices in a Jump-Diffusion Model*, to appear in Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, (2014).
- [6] M. Broadie, P. Glasserman, and S.G. Kou. *A continuity correction for discrete barrier options*. Mathematical Finance. Vol. 7, No. 4, pp. 325-349. (1997).
- [7] J. Cheng, S. P. Zhu and S. J. Liao. *An explicit series approximation to the optimal exercise boundary of American put options*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 15, No. 5 : pp. 1148-1158. (2010).
- [8] J. Cousteix, J. Mauss, *Analyse asymptotique et couche limite*, Springer-Verlag. Berlin and Heidelberg GmbH Co. K, Vol. 21 : pp 54. (2006).
- [9] C.S. Chuang. *Joint distributions of Brownian motion and its maximum, with a generalization to corrected BM and applications to barrier options*. Statistics and Probability Letters, Vol. 28 : pp. 81-90. (1996).
- [10] D. Dufresne. *Asian and Basket Asymptotics*. Springer Finance Textbook, Centre for Actuarial Studies, Department of Economics, The University of Melbourne, (2002).

- [11] D. Dufresne. *Bessel processes and a functional of Brownian motion*. Tech. Rep. Centre for Actuarial Studies. University of Melbourne. (2004).
- [12] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. New York : Wiley. Vol. 1, 3rd ed, (1968).
- [13] P. A. Forsyth, K. R. Vetzal and R. Zvan. *Robust numerical methods for PDE models of Asian options*. Journal of Computational Finance. Vol. 1, No. 2 : pp 39-78. (1998).
- [14] J. M. Harrison. *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*. John Wiley, New York, (1995).
- [15] H. He and A. Takahashi. *A variable reduction technique for pricing average-rate-options*. Japanese Journal of Financial Economics. Vol. 1, No. 2 : pp 123-142. (1996).
- [16] J. Hull and A. White. *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*. The Journal of Finance. Vol. 42, No. 2 : pp 281-300. (1987).
- [17] F. Hu and C. Knessl. *Asymptotics of Barrier Option Pricing Under the CEV Process*. Applied Mathematical Finance, Vol. 17, No. 3 : pp. 261-300. (2010).
- [18] J. Jean Michel. *The Istanbul option : where the Istanbul European option becomes Asian. Insurance*. Mathematics and Economics. Vol. 21, No. 2 : pp. 139-152. (1997).
- [19] I. Karatzas, S. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag. New-York, (1988).
- [20] N. Khodja, F. Trabelsi, M. R. Remita *Asymptotic behaviour of random maturity barrier options* . Int. J. of Mathematics in Operational Research, (2014).
- [21] S. G. Kou. *On pricing of discrete barrier options*. Statistica Sinica. Vol. 13, No. 4 : pp 55-964, (2003).
- [22] S. G. Kou. *Discrete Barrier and Lookback Options*. Handbooks in ORMS. Vol. 15, (2008).
- [23] R. C. Merton. *Theory of rational option pricing*. Bell J. Econom. Manage, Vol. 4, No. 1 : pp 141-183, (1973).
- [24] S. H. Park and J. H. Kim. *Asymptotic option pricing under the CEV diffusion*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 375, No. 2 : pp. 490-501. (2011).
- [25] C. S. Pun and H. Y. Wong. *CEV asymptotics of American options*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 403, No. 2 : pp. 451-463. (2013).
- [26] E. Reiner and M. Rubinstein . *Breaking Down the Barriers*. Risk Magazine. Vol 4, No. 8, (1991).

- [27] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Notices Amer. Math. Soc. Vol. 50, No. 8 : pp 912-915. (2003).
- [28] S. Shreve. *Stochastic calculus for finance II, continuous-time models*. Springer-Verlag, New York (2004).
- [29] S. Song, J. Jeong and J. Song. *Asymptotic option pricing under pure-jump Lévy processes via nonlinear regression*. Journal of the Korean Statistical Society. Vol. 40 : pp. 227-238. (2011).
- [30] F. Trabelsi. *Asymptotic behaviour of random maturity american options*. IAENG International Journal of Applied Mathematics. Vol. 41, No. 2 : pp. 112-121. (2011).
- [31] D. Xie, D. A. Edwards, G. Schleiniger and Q. Zhu. *Characterization of the American Put Option Using Convexity*. Applied Mathematical Finance. Vol. 18, No. 4 : pp. 353-365. (2011).