

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA  
UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA



جامعة باجي مختار  
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

**DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES**

Option : Analyse Numérique

**Étude numérique de quelques problèmes issus de  
la mécanique des fluides: Ondes longues de  
gravité, tsunami**

Par

**Aicha BOUSSAHA**

Sous la direction de:

Directeur de thèse: Mr. Abdelhamid LAOUAR, MCA, U. B. M. ANNABA

Co-directeur de thèse : Mr. Allaoua GUERZIZ, MCA, U. B. M. ANNABA

Devant le jury

Président	Hocine SISSAOUI	Prof. U.B.M. ANNABA
Examineur	Amar MAKHLOUF	Prof. U.B.M. ANNABA
Examineur	Azzedine BENCHETTAH	Prof. U.B.M. ANNABA
Examineur	Mohamed Zine AISSAOUI	Prof. Univ. 8 Mai 45 Guelma

Année : 2015

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>II</b>	<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>III</b>	<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>IV</b>	<b>Résumé en arabe</b>	<b>xi</b>
<b>V</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>xiii</b>
<b>1</b>	<b>Rappel de quelques notions fondamentales</b>	<b>1</b>
1.1	Partie hydrodynamique . . . . .	1
1.1.1	Définitions et hypothèses . . . . .	1
1.1.2	Variables de repérage . . . . .	2
1.1.3	Equations générales de la mécanique des fluides . . . . .	4
1.2	Partie analyse numérique . . . . .	7
1.2.1	Méthodes des directions alternées . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Nouveau schéma modifié calculant la dispersion d'un tsunami pour un fluide non-visqueux et faiblement visqueux</b>	<b>10</b>
2.1	Description du phénomène . . . . .	11
2.2	Equations de base . . . . .	12
2.2.1	Equations modélisant l'eau peu profonde . . . . .	13
2.2.2	Equations classiques de Boussinesq . . . . .	14
2.2.3	Equations de Boussinesq améliorées . . . . .	14
2.2.4	Equations de " <i>shallow water</i> " modifiées . . . . .	15
2.3	Partie numérique . . . . .	21
2.3.1	Discrétisation du problème (2.28)-(2.34) . . . . .	21
2.3.2	Stabilité et consistance du schéma DAI . . . . .	25
2.3.3	Algorithme . . . . .	30

---

2.3.4	Simulations numériques et discussions . . . . .	31
2.3.5	Autres applications . . . . .	35
2.4	Conclusion . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Calcul numérique des valeurs propres du spectre négatif des solitons hydrodynamiques</b>	<b>38</b>
3.1	Position du problème . . . . .	39
3.1.1	Description du phénomène . . . . .	39
3.1.2	Équations de base du modèle mathématique . . . . .	40
3.2	Techniques de résolution . . . . .	41
3.2.1	Introduction des variables de distorsion classique . . . . .	41
3.2.2	Introduction des variables de double distorsion . . . . .	41
3.2.3	Approximation des solutions d'équations (3.20)-(3.24) . . . . .	42
3.2.4	Solutions-solitons de l'équation KdV (3.1) . . . . .	43
3.2.5	Equation de Sturm-Liouville . . . . .	45
3.2.6	Equation de la surface libre . . . . .	48
3.3	Simulations numériques . . . . .	49
3.3.1	Résultats numériques et discussion . . . . .	50
3.3.2	Conclusion . . . . .	57
<b>A</b>	<b>Annexe</b>	<b>58</b>
<b>B</b>	<b>Annexe</b>	<b>61</b>

# Table des figures

2.1	Description du phénomène. . . . .	12
2.2	Technique de discrétisation . . . . .	22
2.3	Diminution de la grande valeur $Cr$ en fonction de $\alpha_1$ . . . . .	27
2.4	Profils de la surface libre avec dispersion sur $6 m$ . . . . .	31
2.5	Onde bichromatique se propageant sur $15 m$ . . . . .	32
2.6	Comparaison entre les deux cas . . . . .	33
2.7	Profils des surfaces libres calculés par les deux modèles . . . . .	34
2.8	Ondes bichromatiques se propageant dans chaque océan à $15 m$ de la frontière ouest, pour $\Delta x = 10^{-5} m$ . . . . .	36
3.1	Description du phénomène . . . . .	39
3.2	Coordonnées de Lagrange $a$ et $b$ . . . . .	40
3.3	Fonction de déplacement (3.65) suivant le tableau 3.1. . . . .	51
3.4	Potentiel initial (3.66) suivant le tableau 3.1 . . . . .	51
3.5	<b>1 soliton solution</b> . . . . .	52
3.6	<b>2 soliton solution</b> : interaction de deux solitons. . . . .	53
3.7	Fonction de déplacement (3.67) du tableau 3.5 . . . . .	54
3.8	Potentiel initial (3.67) du tableau 3.5 . . . . .	55
3.9	Collision de deux solitons . . . . .	55
3.10	<b>3 soliton solution</b> : interaction de trois solitons . . . . .	56

# Liste des tableaux

**Première partie**  
**Remerciements**

## Remerciements

Avant tout, je tiens à remercier **Dieu** le tout puissant, de m'avoir donné le courage et la patience pour pouvoir mener à terme ce travail.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à Monsieur **Abdelhamid Laouar** Maître de conférences à l'université d'Annaba, d'avoir accepté de m'encadrer et pour la responsabilité de diriger ce travail. Je remercie du fond du coeur et sincèrement mon co-encadreur Monsieur **Allaoua Guerziz** Maître de conférences à l'université d'Annaba, pour l'aide qu'il m'a apporté surtout dans le domaine de la mécanique des fluides. Leurs conseils et leurs critiques m'ont été très bénéfiques.

Mes respectueux remerciements vont à Monsieur **H. Sissaoui**, Professeur à l'université d'Annaba, d'avoir accepté de présider le jury de soutenance de mon mémoire de doctorat. De même je remercie vivement Monsieur **M. Makhlouf**, Professeur à l'université d'Annaba et Monsieur **A. Benchettah**, Professeur à l'université d'Annaba et Monsieur **M. Aissaoui**, Professeur à l'université de Guelma, d'être membre de jury.

Enfin, je n'oublie pas de remercier les personnes qui m'ont facilité la tâche et toutes celles que j'ai connues au département de Mathématiques aussi mes parents et mes amis.

# Deuxième partie

## Résumé



## Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude mathématique et numérique de deux problèmes issus de la mécanique des fluides : le premier modélise la propagation transocéanique d'un tsunami et le second détermine les solitons qui sont des solutions de l'équation *Korteweg de Vries KdV*.

Concernant le premier problème, nous considérons le cas d'un fluide parfait et celui d'un fluide de faible viscosité en intégrant une dispersion numérique. Pour cela, nous adoptons la technique des différences finies combinée avec *la méthode des directions alternées implicites DAI*. Ensuite, nous étudions la stabilité et la convergence de la solution.

Pour le second, nous introduisons les variables de distorsion et *l'"inverse scattering method"* afin d'amener l'équation KdV à une équation aux dérivées ordinaires EDO appelée *Sturm-Liouville*. Aussi, nous utilisons l'algorithme de Runge-Kutta-4 pour calculer les valeurs propres et les fonctions propres associées au problème de Sturm-Liouville.

Des simulations numériques sont présentées à la fin de chaque chapitre pour valider l'aspect théorique.

**Mots-clés :** Dispersion numérique ; Équations de Boussinesq ; Équation de KdV ; Équation de Sturm-Liouville ; Méthode des directions alternées implicites ; Simulations numériques ; Stabilité et convergence.

# Troisième partie

## Abstract

## Abstract

This thesis is devoted to the mathematical and numerical study of two problems from fluid mechanics : the first models the transoceanic propagation of a tsunami and the second determines the solitons which are solutions of *the Korteweg de Vries KdV equation*.

As for the first problem, we consider the case of a perfect fluid and weakly viscous fluid by integrating numerical dispersion. For this, we adopt finite differences technique combined with *the alternating directions implicit scheme ADI*. Afterward, we study the stability and convergence of the solution.

Regarding the second, we introduce the distortion variables and applied *inverse scattering method* in order to deal the KdV equation to ordinary derived equation ODE called *Sturm-Liouville*. To calculate the eigenvalues and eigenfunctions associated with to Sturm-Liouville problem, we use the Runge-Kutta-4 algorithm.

Endly, numerical simulations are represented in order to validate the theoretical models.

**Keywords :** Numerical dispersion ; Boussinesq equations ; KdV equation ; Sturm-Liouville equation ; Alternating directions implicit method ; Numerical simulations ; Stability and convergence.

**Quatrième partie**  
**Résumé en arabe**

---

Résumé en arabe

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

**Cinquième partie**  
**Introduction générale**

---

## Introduction générale

La propagation des ondes liquides de surface, en général, et le cas particulier majeur des ondes solitaires –ou solitons– reste un sujet d'intérêt aussi bien pour les physiciens que pour les mathématiciens. Divers modèles décrivant ce phénomène sont représentés par un ensemble d'équations aux dérivées partielles EDPs complétées par des conditions aux limites sur la frontière du domaine et les conditions initiales liées au temps (cf., [14], [11], [12]). Le modèle le plus représentatif et le plus connu est celui des équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides (cf., [8], [9], [18]). Il faut noter que ces problèmes sont généralement des phénomènes non linéaires dont la solution analytique explicite est souvent inexistante à l'heure actuelle, par conséquent l'approche numérique reste l'approche la plus appropriée pour traiter ce type de phénomène. Un autre modèle représentant la propagation de la houle sur fonds plats est décrit par les équations de Boussinesq en 1872 (cf., [6], [7], [15]). Ces équations représentent une intégration sur la verticale des équations de conservation de la quantité de mouvement et de conservation de la masse pour un fluide incompressible. Elles permettent de prendre en considération le transfert d'énergie entre plusieurs composantes fréquentielles, les changements de forme d'ondes individuelles et l'évolution d'un groupe de vagues aléatoires. La limitation principale de la forme la plus commune des équations de Boussinesq est qu'elles ne sont valables que pour des profondeurs d'eau relativement faibles. Ce n'est qu'à partir des années 1990 que de nombreux modèles dérivés des équations initiales de Boussinesq ont été développés afin d'étendre leur domaine de validité à des eaux plus profondes et la plupart du temps en améliorant l'équation de dispersion des ondes. La performance du modèle résultant est très sensible aux propriétés de dispersion linéaire. Le bon choix de la variable de vitesse peut améliorer considérablement la propagation des ondes modérément longues (cf., [17]).

L'étude analytique et numérique des modèles de Boussinesq pour améliorer les caractéristiques de propagation ont reçu un grand intérêt par les scientifiques. Nous citons quelques travaux liés à ce domaine : Daripa et Hua [10] considèrent que les équations de Boussinesq sont des équations mal posées et qui appartiennent à la famille des équations de "*shallow water*". Ainsi, ils ont étudié l'effet de l'instabilité numérique de la précision de la solution des ondes courtes et ont conclu que la perte de la précision de la solution est due à la croissance des erreurs d'arrondi ainsi que les erreurs de troncature.

Antonopoulos et al. [2] ont considéré une famille de systèmes de Bona-Smith [6] (une classe des modèles de Boussinesq) modélisant deux types de propagation des ondes longues de faible amplitude dans un canal.

Mitsotakis [28] a étudié la génération et la propagation des ondes de tsunami en utilisant le modèle simplifié de Boussinesq discrétisé par la méthode des éléments finis. Il a établi une étude comparative avec les équations linéaires d'Euler.

Pour notre part, nous nous sommes intéressés à la modélisation d'une propagation d'un tsunami provoqué par un tremblement de terre pour un fluide non-visqueux et faiblement visqueux. En effet, nous nous sommes inspirés des travaux de Madsen et al [24] dans lesquels ils ont considéré la dispersion physique dans le système d'équations de Boussinesq amélioré. Pour cela, nous avons intégré des termes d'une dispersion numérique dans les équations de *shallow water*. L'avantage de cette formulation est qu'elle offre une souplesse dans la résolution numérique comparativement aux modèles classiques de Boussinesq [7], [15], [17]. L'utilisation de la méthode des directions alternées combinée avec celle des différences finies permet d'obtenir un schéma numérique implicite modifié. Ce dernier offre une flexibilité pour raffiner le maillage de la discrétisation. Ainsi nous avons établi la stabilité et la convergence de ce schéma.

Parallèlement aux équations de Boussinesq, nous nous sommes intéressés à la propagation des solitons sur un fond horizontal. Nous avons utilisé la théorie de l'eau profonde de Germain [30] en recherchant les solutions sous forme de séries entières. Cette théorie permet de se ramener à l'équation de KdV après une première puis une seconde distorsion sur les variables d'espace et le temps. Les solitons sont considérés comme des solutions particulières de l'équation de KdV. L'utilisation de la méthode "*inverse scattering*" permet de se ramener à une équation différentielle ordinaire EDO appelée *équation de Sturm-Liouville*. Ainsi, le problème revient à chercher les valeurs propres et les fonctions propres associées du spectre discret négatif. À chaque valeur propre, il correspond un soliton dont le profil de la surface libre est connu (cf., [31]). Nous utilisons l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 pour les déterminer.

Cette thèse comporte une introduction générale, trois chapitres et une annexe. Le chapitre 1 est consacré à un rappel succinct des équations fondamentales de la dynamique des fluides ainsi que quelques outils d'analyse numérique. Le chapitre 2 étudie la propagation d'un tsunami et l'importance de la dispersion numérique, en s'appuyant sur les équations classiques et améliorées de Boussinesq ainsi que sur la théorie de l'eau peu profonde (*shallow water theory*). Le chapitre 3 présente l'étude des ondes solitaires qui sont des solutions de l'équations KdV.



# Chapitre 1

## Rappel de quelques notions fondamentales

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les équations fondamentales de la dynamique des fluides ainsi que quelques outils d'analyse numérique que nous utiliserons aux chapitres 2 et 3.

### 1.1 Partie hydrodynamique

Pour étudier les équations modélisant l'eau peu profonde «shallow water» et celles de Boussinesq dans les chapitres 2 et 3, on a jugé utile de rappeler les sources de telles équations, à savoir : l'équation cinématique, les équations dynamiques de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie. Ce rappel nous servira également à l'étude d'un tsunami et mettre l'accent sur certains aspects généraux, qui sont parfois négligés : la dissipation d'un fluide, la dispersion d'une onde, etc.

#### 1.1.1 Définitions et hypothèses

**Milieu continu :** On appelle fluide un milieu matériel sans rigidité et ayant une faible résistance d'opposition au cisaillement. La notion de milieu continu pour un fluide suppose que la masse est répartie de manière continue dans le matériau.

**Particule fluide :** On admet que le volume observé, que nous désignerons par *particule fluide* assez grand pour contenir un très grand nombre de molécules et

pour définir une valeur locale, est aussi assez petit pour être assimilé à un élément de volume infinitésimal et pour justifier l'utilisation du calcul différentiel et intégral.

**Fluide parfait :** Un fluide est dit parfait si les forces de surface n'incluent pas les forces de frottement ; autrement dit, les effets dues à la viscosité sont négligeables.

**Fluide incompressible :** Un fluide est dit incompressible si le volume de toute quantité de fluide que l'on suit dans son mouvement reste constant. Autrement dit, la masse volumique est constante.

**Milieu isotrope :** Le fluide se comporte indépendamment de la direction des contraintes appliquées.

### 1.1.2 Variables de repérage

Dans le cas le plus général, la description de l'état d'un fluide en mouvement se fait au moyen de six grandeurs physiques, qui sont :

- Les composantes  $u_1, u_2, u_3$  du champ de vecteur des vitesses  $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ .
- La pression  $p(x_1, x_2, x_3, t)$ .
- La masse volumique  $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ .
- La température  $T(x_1, x_2, x_3, t)$ .

Il existe en mécanique des fluides deux modes principaux de description du mouvement, à savoir : la description lagrangienne et la description eulerienne.

#### Description lagrangienne

Dans cette description, l'observateur suit chaque particule à partir de l'instant initial  $t_0$ . Cela consiste donc à déterminer la trajectoire de chaque particule à partir, par exemple, de l'instant  $t_0$ . Désignons par  $\mathbf{x}$  le vecteur position de la

particule à l'instant  $t$ ,

$$\mathbf{x}(a, b, c, t), \text{ soit } \begin{cases} x_1(a, b, c, t) \\ x_2(a, b, c, t) \\ x_3(a, b, c, t) \end{cases}, \quad (1.1)$$

et  $\mathbf{x}(a, b, c, t_0) = \mathbf{x}_0$ ,

où  $a, b, c$  et  $t$  sont appelées variables de Lagrange.

Les champs des vitesses et des accélérations sont alors respectivement les champs de vecteurs

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(a, b, c, t) \text{ et } \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}(a, b, c, t). \quad (1.2)$$

Notons que cette description est plus commode en mathématique qu'en physique.

### Description eulérienne

Cette fois l'observateur est placé en un point  $M$  fixe du repère et regarde passer les particules fluides devant lui. Ainsi, à deux instants différents, ce n'est pas la même particule qui occupe la position  $\mathbf{x}(M)$  de l'observateur. Les variables permettant de décrire ainsi un tel système sont les trois coordonnées d'espace  $x_1, x_2, x_3$  à l'instant  $t$  d'observation qu'on appelle les variables d'Euler.

On montre qu'on peut prendre comme inconnues du mouvement les trois fonctions :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \text{ soit } \begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases}. \quad (1.3)$$

**Remarque 1** Nous pouvons, à partir du champ des vitesses, retrouver les trajectoires et la description lagrangienne du mouvement en résolvant les équations différentielles ci-après :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{x}(a, b, c, 0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{x}_0$  est la donnée initiale.

### 1.1.3 Equations générales de la mécanique des fluides

Nous allons décrire brièvement les équations gouvernant le mouvement d'un fluide newtonien, utilisant la représentation eulerienne. Notons par :

$\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ , la masse volumique du fluide,

$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  les forces de surface appliquées à la frontière,  $\mathbf{F}(F_1, F_2, F_3)$ ,

$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  les forces de volume,  $\mathbf{f}(f_1, f_2, f_3)$ ,

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  le vecteur vitesse de la particule en un point  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ ,

$p = p(\mathbf{x}, t)$  la pression du fluide au point  $\mathbf{x}$ .

Les équations générales d'un fluide sont :

· L'équation de continuité (équation de conservation de la masse)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (1.5)$$

$u_i$  représente la  $i$ ème composante du vecteur vitesse.

· L'équation de mouvement (la loi de conservation de la quantité de mouvement conséquence de la loi fondamentale de la dynamique) :

$$\rho \gamma_i = \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad i, j = \overline{1, 3} \quad (1.6)$$

où :

$\gamma_i$  est l'accélération de la particule fluide,

$f_i$  est la  $i$ ème composante de la force de volume  $\mathbf{f}$ .

Pour un fluide newtonien, il existe une loi de comportement qui définit une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations notés par  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  respectivement. Elle se traduit par l'équation suivante :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - p\delta_{ij}, \quad \text{pour } i, j, k = \overline{1, 3} \quad (1.7)$$

où :  $\mu$  est la viscosité dynamique,  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ ,  $\lambda$  est le coefficient de viscosité de dilatation et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Krönecker.

La combinaison des équations (1.5)-(1.7) donne l'équation vectorielle de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (1.8)$$

Les constantes  $\lambda$  et  $\mu$  sont liées par la relation (cf., [31])

$$3\lambda + 2\mu \geq 0. \quad (1.9)$$

Les différents opérateurs intervenant dans l'équation de Navier-Stokes sont définis par :

$$\begin{aligned} \nabla &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T, & (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^3, \\ \Delta \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2} \in \mathbb{R}^3, & \operatorname{div} \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### Cas particuliers

· Pour un fluide parfait, les constantes  $\lambda$  et  $\mu$  de (1.7) sont négligeables, par conséquent la relation (1.7) devient :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (1.10)$$

et l'équation de Navier-Stokes (1.8) se réduit à :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (1.11)$$

Cette équation est connue sous le nom *équation d'Euler*.

· Pour un fluide incompressible, on a une masse volumique  $\rho = cte$ ; dans ce cas, l'équation cinématique se réduit à :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1.12)$$

et l'équation (1.11) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{\mathbf{f}}{\rho}, \quad (1.13)$$

où  $\nu = \mu/\rho$  est appelé coefficient cinématique de viscosité.

### Thermohydraulique

Les équations générales des fluides newtoniens décrites auparavant supposaient que sa température restait constante. Nous donnons les équations pour des fluides peu compressibles lorsque les phénomènes thermiques sont pris en compte. La température locale  $T = T(\mathbf{x}, t)$  est gouvernée par l'équation d'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T - \tilde{k} \Delta T = r, \quad (1.14)$$

où :

$\tilde{k}$  est le coefficient de conductivité thermique du fluide,  
 $r$  est la source interne de chaleur.

En l'absence de source de chaleur interne ( $r = 0$ ), et dans l'approximation de Boussinesq des fluides peu compressibles, les équations (1.5) et (1.8) sont simplifiées comme suit :

$\rho$  est supposé constant ( $= \rho_0$ ) partout sauf dans le terme des forces de gravité. Pour les forces de gravité,  $\rho$  est remplacée par une fonction linéaire de  $T$  :

$$\rho = \rho_0 - \alpha(T - T_0), \quad (1.15)$$

et l'équation (1.8) devient

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \frac{p}{\rho_0} - \nu \Delta \mathbf{u} = \frac{\alpha g}{\rho_0} \mathbf{k} (T - T_0), \quad (1.16)$$

où on a posé  $k = \tilde{k}/\rho_0$ , tel que  $k$  est appelé coefficient de diffusion thermique, enfin  $\mathbf{k}$  représente un vecteur unitaire vertical ascendant. L'équation (1.16) constitue un système *des équations de Boussinesq* pour un fluide faiblement compressible.

En plus des définitions données ci-avant, nous rajoutons :

**Onde bichromatique** : C'est la superposition de deux ondes ayant généralement deux longueurs d'onde différentes.

**Force de Coriolis :** Dans un milieu fluide, la force de Coriolis est une force fictive agissant perpendiculairement à la direction du mouvement de la particule fluide en déplacement relatif dans un milieu lui-même en rotation uniforme.

**Dissipation du fluide :** La dissipation, dont le facteur principal est la viscosité, a pour effet de transformer une partie de l'énergie cinétique du fluide (donc sa vitesse) en chaleur, dans le cas des ondes de surface, elle participe directement à la perte d'amplitude de ces ondes.

**Effet de la viscosité :** La viscosité d'un fluide en écoulement a pour effet de freiner le mouvement des particules les unes par rapport aux autres. On observe ainsi un gradient des vitesses qui serait nul dans le cas d'un fluide non-visqueux. En outre, les expériences de Newton ont montré que ce gradient était proportionnel au coefficient de viscosité dans le cas des fluides newtoniens.

**Vitesse de phase :** C'est la vitesse à laquelle la phase de l'onde se propage dans l'espace, en sélectionnant un point particulier de l'onde, par exemple la crête. Ce point immatériel se déplace dans l'espace à la vitesse de phase, elle s'exprime comme suit :

$$\mathbf{V}_p = \frac{\omega}{\text{Re}(\vec{k})}, \quad (1.17)$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde.

## 1.2 Partie analyse numérique

Dans ce paragraphe, nous allons introduire quelques définitions qui vont être utiles pour le chapitre 2.

Considérons un problème différentiel donné dans un cadre général :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}v = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ v = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times [0, T], \\ v(0) = v_0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un domaine ouvert de frontière  $\partial\Omega$ ,  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel,  $v_0$

est une fonction donnée.

Le problème approché à présent par la méthode des différences finies correspondant au problème  $(\mathcal{P})$  s'écrit :

$$(\mathcal{P}_h) \begin{cases} \frac{\partial v_h}{\partial t} + \mathcal{L}_h v_h = 0 & \text{dans } \Omega_h \times [0, T], \\ v_h = 0 & \text{dans } \partial\Omega_h \times [0, T], \\ v_h(0) = v_{h0} & \text{dans } \partial\Omega_h, \end{cases}$$

où  $\mathcal{L}_h$  est l'opérateur discret de  $\mathcal{L}$  et  $v_{h0}$  est l'approché de la fonction  $v_0$ .

**Erreur de consistance :** On définit l'erreur de consistance du problème  $(\mathcal{P}_h)$  par rapport à  $(\mathcal{P})$  comme suit :

$$R_h v(x) = \mathcal{L}v(x) - \mathcal{L}_h v_h(x). \quad (1.18)$$

Le problème  $(\mathcal{P}_h)$  est dit consistant par rapport à  $(\mathcal{P})$ , si pour chaque  $v$ , on a  $R_h v(x) = \mathcal{L}v(x) - \mathcal{L}_h v_h(x) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ . ( $h$ , ici, indique le pas de discrétisation de la méthode).

### 1.2.1 Méthodes des directions alternées

Cette méthode est aussi appelée méthode des pas fractionnaires. L'idée de cette méthode est d'introduire des calculs intermédiaires pour passer de l'étape  $k$  à l'étape  $(k+1)$  qui ne nécessitent la résolution que de problèmes monodimensionnels.

Décomposons l'opérateur  $\mathcal{L}$  du problème  $(\mathcal{P})$  sous la forme suivante :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2. \quad (1.19)$$

Notons par  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  les matrices associées aux opérateurs discrets  $\mathcal{L}_{h1}$  et  $\mathcal{L}_{h2}$  respectivement. Le schéma implicite de directions alternées s'écrit :

$$\frac{2}{\Delta t} \left( v^{k+\frac{1}{2}} - v^k \right) + \mathcal{A}_1 v^{k+\frac{1}{2}} + \mathcal{A}_2 v^k = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{2}{\Delta t} \left( v^{k+1} - v^{k+\frac{1}{2}} \right) + \mathcal{A}_1 v^{k+\frac{1}{2}} + \mathcal{A}_2 v^{k+1} = 0. \quad (1.21)$$



Ou bien sous la forme

$$\left(I_d + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{A}_1\right) v^{k+\frac{1}{2}} = \left(I_d - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{A}_2\right) v^k, \quad (1.22)$$

$$\left(I_d + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{A}_2\right) v^{k+1} = \left(I_d - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{A}_1\right) v^k. \quad (1.23)$$

## Chapitre 2

# Nouveau schéma modifié calculant la dispersion d'un tsunami pour un fluide non-visqueux et faiblement visqueux

Avant de commencer le développement de ce chapitre, nous allons définir ce qu'est un tsunami ? Dans quelles conditions est-il provoqué ?

Un tsunami est un raz-de-marée, c'est-à-dire un déplacement d'une grande quantité d'eau suite à un glissement de terrain côtier ou sous-marin. Lorsque le niveau du fond océanique change notablement, la perturbation se transmet de proche en proche, sous forme d'une onde de surface, dont la longueur d'onde peut atteindre plusieurs centaines de kilomètres. Ainsi, l'onde dispersive (si sa célérité dépend de sa fréquence) se propage alors sur plusieurs milliers de kilomètres. En revanche, une onde est dite « non dispersive » si sa célérité ne dépend pas de sa fréquence. La dispersion a pour effet de changer continûment la forme de l'onde. Le modèle de la propagation du tsunami Héraklion en 365 avant J.C est bien décrit dans [15] en champ proche suivant plusieurs scénarios. On s'intéresse, ici, au scénario 1 car il est le plus proche au champ lointain. Nous reprenons toutes les données de ce scénario en particulier le temps de début de l'étape de dispersion. Tous les travaux réalisés sur le scénario 1 mentionnent que les

premiers solitons disparaissent au bout de trois heures. Comme la simulation des trains d'ondes irrégulières est peu discutée en littérature [11], nous allons contribuer à analyser les effets de la viscosité sur ce type de dispersion. Nous proposons des simulations à l'étape de dispersion d'un tsunami affectée par une faible dissipation. On s'intéresse plus particulièrement à la propagation dispersive d'un fluide non visqueux et celui d'un fluide de faible viscosité (incluant l'effet d'une viscosité cinématique faible). Comme la solution analytique explicite du problème bidimensionnel de Boussinesq est presque impossible à obtenir ([2], [6]), nous allons alors résoudre un problème approché.

Pour une meilleure précision de la solution approchée, on prend en considération l'erreur de troncature à l'ordre 3 en l'intégrant dans le système d'équations modélisant "shallow water". Cette étape est connue sous l'appellation "*dispersion numérique*".

Pour résoudre numériquement le système d'équations modifiées, nous proposons la méthode des différences finies combinée avec celle des directions alternées afin d'aboutir à un schéma itératif implicite, noté DAI. Nous allons étudier la stabilité et la convergence de ce schéma et déterminer numériquement la surface libre de la propagation de l'onde de tsunami par la méthode itérative de Gauss-Seidel.

## 2.1 Description du phénomène

Dans un bassin à fond irrégulier et de deux cotés ouverts (voir la figure 2.1), on lie au bassin un repère de référence d'origine  $O$  tels que les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  soient horizontaux et coïncident avec le fond du bassin de sorte que si l'on désigne le rivage par une droite  $(R)$  on aura  $(Ox) \perp (R)$  et  $(Oy) // (R)$ . Ainsi,  $(Oz)$  est vertical ascendant. Le fluide parfait occupe un domaine  $\Omega(t)$  ( $\partial\Omega(t)$  désigne les latéraux ouverts de gauche et de droit) délimité en haut par une surface libre et en bas par le fond imperméable. On note par :

-  $\eta$  le profile de la surface libre défini par

$$z = \eta(x, y, t), \tag{2.1}$$

-  $h(x, y)$  la profondeur d'eau.

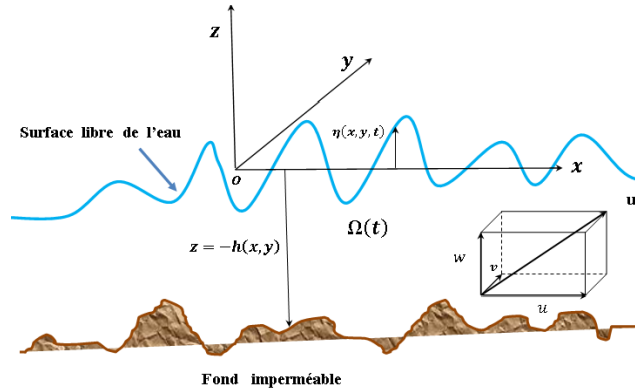


FIG. 2.1 – Description du phénomène.

## 2.2 Equations de base

Commençons d'abord par donner quelques hypothèses qui sont nécessaires pour la suite de ce travail.

### Hypothèses

- L'incompressibilité du fluide se traduit par (1.12).
- L'écoulement irrotationnel qui donne un potentiel  $\phi(x, y, z, t)$  du vecteur vitesse  $\mathbf{u}(u, v, w)$  tel que

$$\mathbf{u} = \nabla\phi. \quad (2.2)$$

- La condition cinématique

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \nabla\eta = 0 \quad \text{à} \quad z = \eta(x, y, t), \quad (2.3)$$

qui traduit l'imperméabilité de la surface libre  $\eta$ .

- La condition dynamique

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + g\eta = 0 \quad \text{à} \quad z = \eta(x, y, t), \quad (2.4)$$

où  $g$  est la gravité.

- L'imperméabilité du fond

$$\nabla\phi \cdot \nabla h = 0 \quad \text{à} \quad z = -h(x, y). \quad (2.5)$$

Notons que les problèmes classiques (cf., [11], [12], [17]) qui modélisent le phénomène tsunami sous les hypothèses ci-dessus, sont formulés par les équations en eau peu profonde et/ou par un type d'équations de Boussinesq.

Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques problèmes modélisés par des équations différentielles aux dérivées partielles qui sont basées sur de l'équation cinématique et les équations dynamiques de Navier Stokes (voir chapitre 1) ; nous renvoyons le lecteur intéressé à ce sujet aux travaux de Denys Dutykh [11] et le livre de A. Miranville et R. Temam [31] pour les différentes étapes de développements ainsi que les transformations nécessaires.

### 2.2.1 Equations modélisant l'eau peu profonde

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (2.8)$$

où  $M (= u h)$  et  $N (= v h)$  sont les flux de décharge horizontales suivant les directions  $x$  et  $y$  respectivement ;  $h$  est une profondeur constante suffisamment grande ;  $u$  et  $v$  sont les vitesses moyennes calculées sur la profondeur  $h$  suivant les directions horizontales  $x$  et  $y$  respectivement.

**Remarque 2** *La résolution numérique du système (2.6)-(2.8) souffre d'un manque de précision à cause de la négligence de la dispersion physique. Ainsi, ce système ne prend pas en considération l'accélération de Coriolis ce qui revient à dire, qu'il convient pour la propagation des tsunamis à des courtes distances dans un temps limité ( $t$  quelques heures).*

### 2.2.2 Equations classiques de Boussinesq

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 N}{\partial t \partial x \partial y} \right), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{h^2}{3} \left( \frac{\partial^3 N}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x \partial y} \right). \quad (2.11)$$

Les termes du second membre des équations (2.10)-(2.11) sont appelés *les termes de dispersion physique*.

**Remarque 3** Notons que le système (2.9)-(2.11) tient compte de l'accélération de Coriolis et décrit la propagation d'un tsunami lointain. Mais la présence des termes de dispersion physique représentent un inconvénient pour la résolution numérique puisqu'ils nécessitent beaucoup d'opérations arithmétiques et un stockage important de données dans la mémoire. Ainsi, la convergence de l'algorithme utilisé est relativement lente (cf., [6]).

Pour déterminer le type de dispersion physique (monochromatique, bichromatique,...) du système (2.9)-(2.11), Madsen et al. [26] ont proposé un nouveau système appelé *le système d'équations de Boussinesq améliorées*.

### 2.2.3 Equations de Boussinesq améliorées

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0. \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 \left( \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 N}{\partial t \partial x \partial y} \right) \\ &+ Bgh^3 \left( \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 \left( \frac{\partial^3 N}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial^3 M}{\partial t \partial x \partial y} \right) \\ &+ Bgh^3 \left( \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Où  $B$  est un paramètre d'ajustement de la courbe (voir [26]).

L'avantage du système (2.12)-(2.14) est qu'il peut simuler la propagation *d'un train d'ondes irrégulières* voyageant de l'eau profonde vers l'eau peu profonde.

### Equation de la surface libre

L'équation améliorée de la surface libre  $\eta$  correspondante s'obtient par la combinaison de (2.12)-(2.14) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = -Bgh^3 \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} \right) \\ + h^2 \left( B + \frac{1}{3} \right) \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial t^2 \partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Notons que la dispersion représentée, ici, par les termes du second membre de l'équation (2.15) peuvent engendrer des difficultés numériques à cause des dérivées d'ordre 4.

### 2.2.4 Equations de "shallow water" modifiées

L'idée principale qu'on propose, ici, est d'intégrer des termes de *dispersion numérique* qui vont apparaître dans les équations du système (2.6)-(2.8). En effet, la dispersion numérique, à présent, joue le même rôle que la dispersion physique dans le système d'équations de Boussinesq amélioré (2.12)-(2.14). *Notons que cette démarche constitue l'originalité de cette étude.*

Avant de donner les équations décrivant le phénomène de tsunami provoqué par un tremblement de terre (cf., [7], [17], [15]) pour un fluide non visqueux ou faiblement visqueux, nous allons proposer quelques développements nécessaires.

#### a)- Cas d'un fluide non-visqueux

Nous considérons, ici, le cas d'une viscosité négligeable. Pour cela, on discrétise

les équations (2.7) et (2.8) par le schéma de la méthode DAI comme suit :

$$\frac{M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i+\frac{1}{2},j}^k}{\frac{\Delta t}{2}} + gh \frac{\eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = o(\Delta t, \Delta x), \quad (2.16)$$

$$\frac{N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} - N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + gh \frac{\eta_{i,j+1}^{k+1} - \eta_{i,j}^{k+1}}{\Delta y} = o(\Delta t, \Delta y). \quad (2.17)$$

Grâce aux développements de Taylor à l'ordre 3 pour la variable temps  $t$  et la variable spatiale  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i+\frac{1}{2},j}^k}{\frac{\Delta t}{2}} &= \frac{\partial M(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t_k)}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 M(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t_k)}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{24} \frac{\partial^3 M(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t_k)}{\partial t^3} + o(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} &= \frac{\partial \eta(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 \eta(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 \eta(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^3} + o(\Delta x^3). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pour des raisons de simplification, on adopte temporairement les écritures suivantes :  $M(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t_k) = M$  et  $\eta(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) = \eta$ .

Dans le but de transformer le système d'équations (2.6)-(2.8) en un système comparable à celui de Boussinesq amélioré (2.12)-(2.14) et afin de pouvoir établir une comparaison entre eux, nous allons procéder comme suit :

### Développement du système (2.6)-(2.8)

Remplaçons (2.18) et (2.19) dans (2.16) et utilisons l'équation (2.7) afin d'obtenir le terme  $\frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2}$ .



Enfin appliquons l'équation de convection :

$$\frac{\partial M}{\partial t} - c \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \quad (2.20)$$

où  $c = \sqrt{gh}$  est la célérité.

Pour obtenir le terme  $\frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2}$  au lieu de  $\frac{\partial^3 M}{\partial t^3}$  d'une part, et d'autre part, pour éliminer les termes  $\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}$  et  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$  puisque ces termes ne figurent pas dans le système de Boussinesq amélioré (2.12)-(2.14).

Par analogie, on procède de la même façon pour l'équation (2.17).

On range les termes de la même manière que ceux existaient dans le système d'équations de Boussinesq amélioré (2.12)-(2.14). On regroupe ensuite les termes de sorte que :  $\alpha_1$  soit le coefficient de  $\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}$  et  $\frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3}$ ,  $\alpha_2$  le coefficient de  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y^2}$  et  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2 \partial y}$  et  $\alpha_3$  le coefficient de  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2 \partial x}$  et  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2 \partial y}$ .

Par conséquent le système résultant s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = o(\Delta t, \Delta x, \Delta y), \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gh}{2} \left( \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{\alpha_2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} + \alpha_3 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial x} \right) \\ = o(\Delta t^3, \Delta x^3, \Delta x \Delta y^2, \Delta t^2 \Delta x), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{gh}{2} \left( \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} + \frac{\alpha_2}{3} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} + \alpha_3 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial y} \right) \\ = o(\Delta t^3, \Delta y^3, \Delta x^2 \Delta y, \Delta t^2 \Delta y). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Le nouveau système d'équations obtenu ci-dessus est un système d'équations aux dérivées partielles modifiées linéaires EDPMLs qui modélise le problème pour un fluide parfait en intégrant la dispersion numérique qui est représentée par

$$\frac{gh}{2} \left( \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{\alpha_2}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2 \partial x} \right)$$

et

$$\frac{gh}{2} \left( \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} + \frac{\alpha_2}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2 \partial y} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2 \partial y} \right)$$

dans les équations (2.22) et (2.23) respectivement.

Notons que cet arrangement permet d'établir une identification avec le système de Boussinesq amélioré (2.12)-(2.14), où les coefficients  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont des constantes à déterminer. Ces coefficients sont appelés *les coefficients de correction de dispersion numérique* (cf., [7]).

Notons que La modélisation complète du phénomène nécessite d'ajouter au système (2.21)-(2.23) les conditions aux bords et les conditions initiales (qui seront définies ultérieurement).

### Equation de la surface libre

A cet effet, nous éliminons les flux  $M$  et  $N$  en combinant les équations (2.21)-(2.23) et en utilisant l'approche de Warming et Hyett [34] afin d'obtenir une équation en  $\eta$  comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) - c^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} (1 + \alpha_1 - C_r^2) \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} \right) \\ & + (1 + \alpha_1 - \alpha_2) c^2 \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} - c^2 \frac{(\Delta t)^2}{4} (1 - \alpha_3) \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \\ & = O(\Delta x^3, \Delta x^2 \Delta t, \Delta t^2 \Delta x, \Delta t^3). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Pour des raisons pratiques, on prend  $\Delta x = \Delta y$ .

Notons par  $C_r = c\Delta t/\Delta x$  le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy ou nombre de CFL.

**Remarque 4**  $C_r$  est un nombre sans dimension, utilisé dans nombreux domaines comme celui de la prévision numérique en temps et plus particulièrement en calcul par différences finies. Ce nombre consiste à une condition de convergence pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles EDPs. Pratiquement, il sert à donner le seuil dimensionnel sous lequel on observe : une instabilité de calcul, grandissement d'erreur d'approximation dans des calculs numériques au fur et à mesure. Si la dimension de la grille est inférieure à la distance parcourue par la solution dans l'intervalle de pas de temps, l'erreur grandit et envahit la solution physique.

Dans l'équation modifiée (2.24), les termes de dispersion numérique sont :

$$-c^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} (1 + \alpha_1 - C_r^2) \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} \right) + (1 + \alpha_1 - \alpha_2) \times \\ c^2 \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} - c^2 \frac{(\Delta t)^2}{4} (1 - \alpha_3) \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^2 \partial t^2} \right).$$

### Détermination des constantes $\alpha_1$ , $\alpha_2$ et $\alpha_3$

Par identification de l'équation modifiée (2.24) avec l'équation (2.15) on a :

$$\alpha_1 = C_r^2 - \frac{12Bh^2}{\Delta x^2} - 1, \quad (2.25)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 1 \quad (2.26)$$

et

$$\alpha_3 = 1 - \frac{(B + \frac{1}{3})h^2}{c^2 \Delta t^2}. \quad (2.27)$$

**Cas particulier :** Pour le cas  $B = \frac{-1}{3}$  (c'est à dire  $\alpha_3 = 1$ ), on retrouve le système de Cho, Sohn et Lee [7], qui est identique au système classique de Boussinesq (2.9)-(2.11). Notons que la dispersion numérique dans [7] joue le même rôle que la dispersion physique dans les équations classiques de Boussinesq (2.9)-(2.11).

**b)- Cas d'un fluide faiblement visqueux**

Nous considérons, ici, une viscosité cinématique constante et non nulle.

Selon [12], les termes d'une dissipation faible sont intégrés dans le système (2.21)-(2.23), ainsi le nouveau système devient :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - 2\nu \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = o(\Delta t, \Delta x, \Delta y), \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{gh}{2} \left( \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{\alpha_2}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2 \partial x} \right) - \frac{2\nu}{h} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \\ o(\Delta t^3, \Delta x^3, \Delta x \Delta y^2, \Delta t^2 \Delta x), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + gh \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{gh}{2} \left( \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} + \frac{\alpha_2}{3} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2 \partial y} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2 \partial y} \right) - \frac{2\nu}{h} \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} = \\ = o(\Delta t^3, \Delta y^3, \Delta x^2 \Delta y, \Delta t^2 \Delta y). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Où  $\nu$  est la viscosité cinématique; pour  $\nu = 0$ , on retrouve le système (2.21)-(2.23).

On remarque que le système (2.28)-(2.30) est d'ordre 3 en espace et en temps.

*Les équations (2.28)-(2.30) modélisent une propagation d'un train d'ondes irrégulières voyageant de l'eau en grande profondeur vers l'eau peu profonde.*

Pour compléter la modélisation du phénomène nous ajoutons aussi aux équations (2.28)-(2.30) ce qui suit :

**- Conditions aux limites**

$$\frac{\partial M}{\partial t} - c \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \quad \text{sur} \quad \partial \Omega(t), \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} - c \frac{\partial N}{\partial y} = 0, \quad \text{sur} \quad \partial \Omega(t). \quad (2.32)$$

**- Conditions initiales**

$$\eta(x, y, 0) = -h, \quad (2.33)$$

$$M(x, y, 0) = N(x, y, 0) = 0. \quad (2.34)$$

Ainsi, le système d'équations (2.28)-(2.34) modélise le phénomène d'un tsunami provoqué par un tremblement de terre.

## 2.3 Partie numérique

Dans cette partie, nous allons calculer numériquement la surface libre  $\eta$  et les flux de décharges  $M$  et  $N$  correspondants.

Pour le cas d'un fluide faiblement visqueux, nous allons résoudre numériquement le système d'équations (2.28)-(2.34).

**Remarque 5** *Pour le cas d'un fluide parfait, la dispersion numérique donnée par les termes de l'équation modifiée (2.24) correspondants aux dérivées d'ordre 4, peut causer des difficultés numériques. En outre, celle-ci ne permet pas de déterminer les flux de décharges  $M$  et  $N$ . Il est préférable donc de résoudre le système (2.21)-(2.23) avec (2.31)-(2.34), qui est un cas particulier du système (2.28)-(2.34) en prenant  $\nu = 0$ .*

### 2.3.1 Discrétisation du problème (2.28)-(2.34)

Nous proposons la méthode DAI pour résoudre le système (2.28)-(2.34). Pour ce faire, on introduit un demi-pas de discrétisation  $\Delta x/2$  suivant l'axe des  $x$  et on maille uniformément le domaine carré  $\Omega(t)$ . L'axe du temps est discrétisé par un demi-pas régulier  $\Delta t/2$ . On construit la suite des points  $M_{i+\frac{1}{2}, j}^k$  en  $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t_k)$ ,  $N_{i, j+\frac{1}{2}}^k$  en  $(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t_k)$  et  $\eta_{i, j}^k$  en  $(x_i, y_j, t_k)$ . En découpant les intervalles selon l'axe des  $x$  (de même pour  $y$ ) et  $t$  en  $\lambda_x$  sous-intervalles et  $T$  sous-intervalles respectivement. Les points de discrétisations sont les points  $x_i = x_0 + i \Delta x$ ,  $y_j = y_0 + j \Delta y$  et  $t_k = t_0 + k \Delta t$  où  $i, j = 0, 1, \dots, N$  et  $k = 0, 1, \dots, T$  avec  $t_0 = 0$ ,  $x_0, y_0, x_{\lambda_x+\frac{1}{2}}$  et  $y_{\lambda_x+\frac{1}{2}}$  sont supposées connues.

Rappelons que la méthode des différences finies utilisée consiste à calculer des approximations de la solution des EDPs en des points qui sont distribuées sur des grilles. Pour cela nous donnons en annexe A les approximations nécessaires des équations (2.28)-(2.30) (les approximations des dérivées premières, deuxièmes et troisièmes).

La discrétisation aux noeuds  $(x_i, y_j, t_k)$  du maillage uniforme est donnée par le schéma ci-dessous :

A l'étape  $k$ , on va calculer les flux  $M_{i+\frac{1}{2}, j}^{k+\frac{1}{2}}$ ,  $N_{i, j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}$  et ensuite  $\eta_{i, j}^{k+\frac{1}{2}}$  en utilisant les valeurs disponibles  $\eta_{i, j}^{k+\frac{1}{2}}$  et  $\eta_{i, j}^k$ .

Nous allons expliquer par la figure 2.2 les nœuds du maillage :

- le carré supérieur à gauche représente des variables discrétisées d'une maille spatiale,
- le carré supérieur à droite représente la discrétisation du temps. Le nœud est limité au-dessus par la surface libre  $\eta$  et des côtés latéraux par le flux  $M$  suivant la direction de l'axe des  $x$ . Ainsi la surface libre  $\eta$  peut être calculée au centre de ce carré et tandis que les flux  $M$  et  $N$  peuvent être déterminés d'un demi-pas spatial par la suite.
- Dans le grand carré inférieur, les points situés à la zone grise ne sont pas pris en compte.

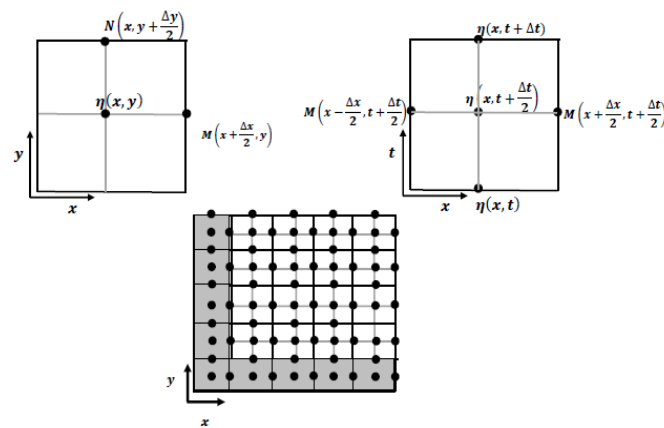


FIG. 2.2 – Technique de discrétisation

### Schéma de dispersion-dissipation

Calcul de  $\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$  et  $M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}$  suivant la direction de l'axe des  $x$  en approximant (2.28) et (2.29)

**Étape de prédiction**

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \eta_{i,j}^k}{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{N_{i,j+\frac{1}{2}}^k - N_{i,j-\frac{1}{2}}^k}{\Delta y} \\ & = \frac{2\nu}{(\Delta x)^2} \left( \eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i,j+1}^k - 2\eta_{i,j}^k + \eta_{i,j-1}^k \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

**Étape de correction**

$$\begin{aligned} & \frac{M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i+\frac{1}{2},j}^k}{\frac{\Delta t}{2}} + gh \frac{\eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{\alpha_1}{12\Delta x} gh \left( \eta_{i+2,j}^{k+\frac{1}{2}} - 3\eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + 3\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\ & + \frac{\alpha_2}{12\Delta x} gh \left[ \left( \eta_{i+1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - 2\eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}} \right) - \left( \eta_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - 2\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} \right) \right] \\ & + \frac{\alpha_3}{4\Delta x} gh \left[ \left( \eta_{i+1,j}^{k+1} - 2\eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i+1,j}^k \right) - \left( \eta_{i,j}^{k+1} - 2\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i,j}^k \right) \right] \\ & = \frac{2\nu}{h(\Delta x)^2} \left( M_{i+\frac{3}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - 2M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} + M_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Calcul de  $\eta_{i,j}^{k+1}$  et  $N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1}$  suivant la direction de l'axe des  $y$  en approximant (2.28) et (2.30)

**Étape de prédiction**

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_{i,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} - N_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1}}{\Delta y} \\ & = \frac{2\nu}{(\Delta x)^2} \left( \eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i,j+1}^{k+1} - 2\eta_{i,j}^{k+1} + \eta_{i,j-1}^{k+1} \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

**Étape de correction**

$$\begin{aligned} & \frac{N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} - N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} + gh \frac{\eta_{i,j+1}^{k+1} - \eta_{i,j}^{k+1}}{\Delta y} + \frac{\alpha_1}{12\Delta y} gh \left( \eta_{i,j+2}^{k+1} - 3\eta_{i,j+1}^{k+1} + 3\eta_{i,j}^{k+1} + \eta_{i,j-1}^{k+1} \right) \\ & + \frac{\alpha_2}{12\Delta y} gh \left[ \left( \eta_{i+1,j+1}^{k+1} - 2\eta_{i,j+1}^{k+1} + \eta_{i-1,j+1}^{k+1} \right) - \left( \eta_{i+1,j}^{k+1} - 2\eta_{i,j}^{k+1} + \eta_{i-1,j}^{k+1} \right) \right] \\ & \frac{\alpha_3}{4\Delta y} gh \left[ \left( \eta_{i,j+1}^{k+1} - 2\eta_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i,j+1}^k \right) - \left( \eta_{i,j}^{k+1} - 2\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i,j}^k \right) \right] \\ & = \frac{2\nu}{h(\Delta y)^2} \left( N_{i,j+\frac{3}{2}}^{k+1} - 2N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} + N_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1} \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Le discret de l'équation aux limites (2.31) est donné par :

$$\frac{M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i+\frac{1}{2},j}^k}{\frac{\Delta t}{2}} = c \frac{M_{i+\frac{3}{2},j}^k - M_{i+\frac{1}{2},j}^k}{\Delta x}. \quad (2.39)$$

On en tire que :

$$M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\Delta x} \left[ (2\Delta x - c\Delta t) M_{i+\frac{1}{2},j}^k + c\Delta t M_{i+\frac{3}{2},j}^k \right]. \quad (2.40)$$

En utilisant (2.40), on déduit ce qui sont :

$$M_{1+1/2,j}^{k+1/2} = 0, \quad \text{paroi verticale sur le côté gauche,} \quad (2.41)$$

$$M_{\lambda_x+1/2,j}^{k+1/2} = 0, \quad \text{paroi verticale sur le côté droit,} \quad (2.42)$$

$$M_{1+1/2,j}^{k+1/2} = \frac{1}{\Delta x} \left[ (\Delta x - c\Delta t) M_{1+1/2,j}^k + c\Delta t M_{2+1/2,j}^k \right], \quad (2.43)$$

paroi horizontale ouvert sur le côté gauche,

$$M_{\lambda_x+1/2,j}^{k+1/2} = \frac{1}{\Delta x} \left[ (\Delta x - c\Delta t) M_{i+1/2,j}^k + c\Delta t M_{i+3/2,j}^k \right], \quad (2.44)$$

paroi horizontale ouvert sur le côté droit.

Par analogie, on discrétise (2.32) en remplaçant  $k$  par  $k + 1/2$  et  $k + 1/2$  par  $k + 1$ .

Ajoutons aussi les conditions initiales discrètes :

$$M_{i,j}^0 = N_{i,j}^0 = 0, \quad (2.45)$$

$$\eta_{i,j}^0 = -h. \quad (2.46)$$

Par identification de l'équation modifiée de la surface libre (2.24) à celle de Madsen et al. (cf., [26]) équation (2.15), implique la relation suivante :

$$(\Delta x)^2 = 4h^2 - 2gh(\Delta t)^2. \quad (2.47)$$

En effet, L'équation modifiée de la surface libre  $\eta$  (2.24) obtenue par les étapes développées dans la section 2.2.4 est réécrite sans les paramètres de dispersion ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) - \left( gh \frac{(\Delta x)^2}{12} + (gh)^2 \frac{(\Delta t)^2}{12} \right) \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} \right), \\ & -gh \frac{(\Delta t)^2}{4} \left( \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^2 \partial t^2} \right) = O(\Delta x^3, \Delta x^2 \Delta t, \Delta t^2 \Delta x, \Delta t^3). \end{aligned} \quad (2.48)$$



Par identification des termes de l'équation modifiée (2.48) avec ceux de l'équation (2.15), on aura :

$$Bgh^3 = gh \frac{(\Delta x)^2}{12} + (gh)^2 \frac{(\Delta t)^2}{12}, \quad (2.49)$$

$$h^2 \left( B + \frac{1}{3} \right) = gh \frac{(\Delta t)^2}{4}. \quad (2.50)$$

Tirons  $B$  de (2.49) et (2.50) et égalisons, on obtient facilement la relation (2.47).

**Remarque 6** Dans la simulation numérique, le choix des pas  $\Delta x$  en espace et  $\Delta t$  en temps prend en considération la relation (2.47).

Nous allons réécrire le système (2.35)-(2.46) sous forme matricielle :

$$\mathcal{A}_x \eta^{k+\frac{1}{2}} = U_x \eta^k + V_x N^k, \quad (2.51)$$

$$M^{k+\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_x \left[ Z_x \eta^k + W_x \eta^{k+\frac{1}{2}} + S_x \eta^{k+1} \right], \quad (2.52)$$

$$\mathcal{A}_y \eta^{k+1} = U_y \eta^{k+\frac{1}{2}} + V_y M^{k+\frac{1}{2}}, \quad (2.53)$$

$$N^{k+1} = \mathcal{E}_y \left[ Z_y \eta^{k+\frac{1}{2}} + W_y \eta^{k+1} + S_x \eta^{k+1} \right], \quad (2.54)$$

où les vecteurs

$$\eta^k = \left[ \eta_{1,1}^k, \dots, \eta_{\lambda_x,1}^k; \eta_{1,2}^k, \dots, \eta_{\lambda_x,2}^k; \eta_{1,\lambda_y}^k, \dots, \eta_{\lambda_x,\lambda_y}^k \right]^T, \quad (2.55)$$

$$N^k = \left[ N_{1,\frac{3}{2}}^k, \dots, N_{\lambda_x,\frac{3}{2}}^k; N_{1,\frac{5}{2}}^k, \dots, N_{\lambda_x,\frac{5}{2}}^k; \dots; N_{1,\lambda_y+\frac{1}{2}}^k, \dots, N_{\lambda_x,\lambda_y+\frac{1}{2}}^k \right]^T, \quad (2.56)$$

$$M^{k+\frac{1}{2}} = \left[ M_{\frac{3}{2},1}^{k+\frac{1}{2}}, \dots, M_{\frac{3}{2},\lambda_y}^{k+\frac{1}{2}}; M_{\frac{5}{2},1}^{k+\frac{1}{2}}, \dots, M_{\frac{5}{2},\lambda_y}^{k+\frac{1}{2}}; \dots; M_{\lambda_x+\frac{1}{2},1}^{k+\frac{1}{2}}, \dots, M_{\lambda_x+\frac{1}{2},\lambda_y}^{k+\frac{1}{2}} \right]^T \quad (2.57)$$

et  $\mathcal{A}_x$  (resp.,  $\mathcal{A}_y$ ) sont des sous-matrices triangulaires; pour les détails voir l'annexe B.

### 2.3.2 Stabilité et consistance du schéma DAI

D'après le théorème classique de convergence (voir [29]), il suffit de montrer que le schéma (2.35)-(2.38) est stable et consistant. Commençons d'abord par étudier la stabilité du schéma.

### Etude de stabilité

La solution des équations (2.35)-(2.46) peut être écrite sous formes de séries de Fourier selon [21] :

$$\eta = \eta_0 \rho^t e^{\hat{i}mx} e^{\hat{i}ly}, \quad (2.58)$$

$$M = M_0 \rho^t e^{\hat{i}mx} e^{\hat{i}ly}, \quad (2.59)$$

$$N = N_0 \rho^t e^{\hat{i}mx} e^{\hat{i}ly}. \quad (2.60)$$

Le facteur d'amplification  $|\rho^{\Delta t}|$  doit être inférieur ou égal à un. Le remplacement des équations (2.58)-(2.60) dans les équations (2.35)-(2.38), en utilisant les notations suivantes :

$$\begin{aligned} t &= k_0 \Delta t, \quad (k_0 = 0, 1, 2, \dots, k, \dots), \\ x &= i_0 \Delta x, \quad (i_0 = 0, 1, 2, \dots, i, \dots), \\ y &= j_0 \Delta y, \quad (j_0 = 0, 1, 2, \dots, j, \dots), \end{aligned} \quad (2.61)$$

donne un système linéaire dont la forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} \tilde{a} & c_x & c_y \\ \tilde{c}_x & \tilde{a}_x & 0 \\ \tilde{c}_y & 0 & \tilde{a}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.62)$$

où :

$$\tilde{a} = \frac{2\left(\rho^{\frac{\Delta t}{2}} - 1\right)}{\left(\rho^{\frac{\Delta t}{2}} + 1\right)} + \frac{4\nu r_x (\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y)}{h \Delta x}, \quad \tilde{a}_x = \left(\rho^{\frac{\Delta t}{2}} - 1\right) + \frac{4\nu r_x \rho^{\frac{\Delta t}{2}} \sin^2 \theta_x}{h \Delta x},$$

$$c_x = \hat{i} r_x \sin \theta_x, \quad \tilde{c}_x = \frac{1}{3} r_x g h \sin \theta_x \left[ \rho^{\frac{\Delta t}{2}} (3 - \alpha_1 \sin^2 \theta_x - \alpha_2 \sin^2 \theta_y) + 3\alpha_3 \left( \rho^{\Delta t} - 2\rho^{\frac{\Delta t}{2}} + 1 \right) / 4 \right],$$

pour  $\tilde{a}_y, \tilde{c}_y$  et  $c_y$  remplaçons  $x$  par  $y$ .

Nontons aussi par :  $r_x = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ,  $r_y = \frac{\Delta t}{\Delta y}$ ,  $\theta_x = \frac{m \Delta x}{2}$  et  $\theta_y = \frac{l \Delta y}{2}$ .

Comme le système matriciel (2.62) est homogène, le déterminant de la matrice doit s'annuler afin d'obtenir des solutions non triviales.

Prenons le cas  $\Delta x = \Delta y$  pour simplifier les calculs et considérons le facteur d'amplification suivant :

$$\rho^{\Delta t} = 1, \quad (2.63)$$

on obtient le nombre de Courant comme suit :

$$C_r = \sqrt{0.25 + \frac{gh (3 - \sin^2 \theta_x) + (3 - \sin^2 \theta_y) - \alpha_1 (gh + 1) (\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y)}{12\nu^2 (\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y)}}. \quad (2.64)$$

Dans le schéma proposé (2.35)-(2.46), le coefficient de correction de dispersion  $\alpha_1$  varie de  $(-1)$  à  $\left(1 + \frac{3\nu^2}{(gh+1)}\right)$ , afin de satisfaire la condition de stabilité (2.63); tandis que dans la propagation transocéanique, comme  $h \gg \nu$ , la valeur de  $\alpha_1$  est donc comprise entre  $(-1)$  et  $1$ .

Si  $\sin \theta_x = \sin \theta_y = 1$  et  $\alpha_1 = 1$ , alors la plus grande valeur de nombre de Courant est  $0.5$ .

Si  $h$  est nul, alors  $\alpha_1 = -1$  et  $C_r \leq [0.25 + 1/6\nu^2]^{0.5}$ .

Ainsi, dans le problème réel, le schéma proposé a la plus grande valeur admissible de nombre de Courant  $0.5$ . Pour cela  $\alpha_1$  joue un rôle important dans la condition de stabilité. Comme  $\alpha_1$  augmente, le plus grand nombre de Courant admissible diminue (voir figure 2.3).

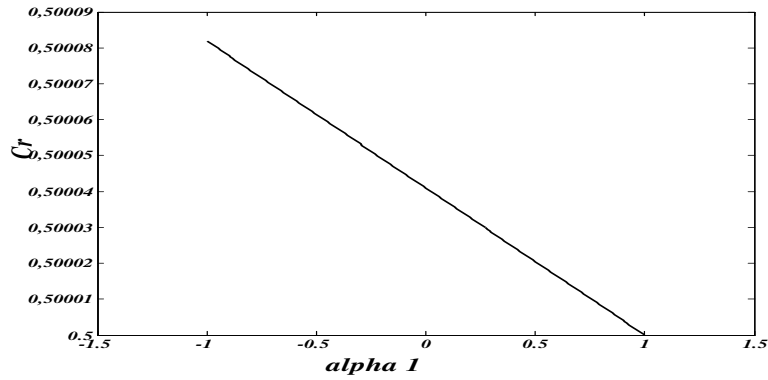


FIG. 2.3 – Diminution de la grande valeur  $Cr$  en fonction de  $\alpha_1$ .

La valeur de  $B$  n'est pas limitée aux valeurs discutées dans [26]. Pour cela l'utilisation de (2.25) donne le résultat suivant :

$$(C_r^2 - 2) \frac{(\Delta x)^2}{12h^2} \leq B \leq \frac{g(\Delta t)^2}{12h}. \quad (2.65)$$

Ainsi le schéma (2.35)-(2.46) est stable si  $B$  vérifie (2.65).

### Consistance du schéma numérique

La solution intermédiaire de DAI introduit une complication supplémentaire, ainsi nous pouvons combiner les estimations distinctes des erreurs de discrétisation locales des étapes de prédiction et correction (cf., [14]).

Pour éliminer la solution intermédiaire  $\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$  on fait la somme de (2.35) et (2.37) de l'étape de prédiction ; le résultat est :

$$\eta_{i,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^k = \left( \frac{\nu r_x}{\Delta x} \delta_{xx} + \frac{\nu r_y}{\Delta y} \delta_{yy} \right) (\eta_{i,j}^{k+1} + \eta_{i,j}^k) - \frac{r_x}{2} \delta_x (M_{i,j}^{k+1} + M_{i,j}^k) - \frac{r_y}{2} \delta_y (N_{i,j}^{k+1} + N_{i,j}^k), \quad (2.66)$$

où

$$\begin{aligned} \delta_x \cdot &= \cdot_{i+\frac{1}{2},j} - \cdot_{i-\frac{1}{2},j}, \\ \delta_y \cdot &= \cdot_{i,j+\frac{1}{2}} - \cdot_{i,j-\frac{1}{2}}, \\ \delta_{xx} \cdot &= \cdot_{i+1,j} - 2 \cdot_{i,j} + \cdot_{i-1,j}, \\ \delta_{yy} \cdot &= \cdot_{i,j+1} - 2 \cdot_{i,j} + \cdot_{i,j-1}, \end{aligned}$$

telle que l'erreur de discrétisation locale est :

$$\begin{aligned} \Delta t \tau_{i,j}^k &= \Delta t \eta_t + M_x + N_y - \nu (\eta_{xx} + \eta_{yy})|_{i,j}^k - \left( 1 - \frac{\nu r_x}{\Delta x} \delta_{xx} - \frac{\nu r_y}{\Delta y} \delta_{yy} \right) \eta_{i,j}^{k+1} \\ &+ \left( 1 + \frac{\nu r_x}{\Delta x} \delta_{xx} + \frac{\nu r_y}{\Delta y} \delta_{yy} \right) \eta_{i,j}^k - \frac{r_x}{2} \delta_x (M_{i,j}^{k+1} + M_{i,j}^k) \\ &- \frac{r_y}{2} \delta_y (N_{i,j}^{k+1} + N_{i,j}^k). \end{aligned} \quad (2.67)$$

L'équation (2.67) est le produit de  $\Delta t$  par l'erreur de discrétisation locale du schéma de Crank-Nicolson.

On note l'expression du second membre de (2.67) par  $(\Delta t \tau_{i,j}^k)_{CN}$ .

Faisons la même procédure de calcul pour l'étape de correction, nous obtenons les erreurs de discrétisation locales des équations (2.36) et (2.38) respectivement comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta t \tau_{i+\frac{1}{2},j}^k &= \Delta t \left( M_t - \frac{\nu}{h} M_{xx} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j}^k + \Delta t \left( gh\eta_x + \frac{\alpha_1}{12} gh\eta_{xxx} + \frac{\alpha_2}{12} gh\eta_{xyy} + \frac{\alpha_3}{4} gh\eta_{xtt} \right) \Big|_{i,j}^k \\ &- \left( 1 - \frac{\nu r_x}{h\Delta x} \delta_{xx} \right) M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} + \left( 1 + \frac{\nu r_x}{h\Delta x} \delta_{xx} \right) M_{i+\frac{1}{2},j}^k - \left( gh\frac{r_x}{2} \delta_x + \frac{\alpha_1}{24} ghr_x \delta_{xxx} + \frac{\alpha_2}{24} ghr_x \delta_{xyy} \right. \\ &+ \left. \frac{\alpha_3}{8} r_x gh \delta_{xtt} \right) (\eta_{i,j}^{k+1} + \eta_{i,j}^k) + \frac{\nu r_x}{2h\Delta x} \delta_{xx} \left( M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i+\frac{1}{2},j}^k \right) - \frac{1}{2} \left( gh\frac{r_x}{2} + \frac{\alpha_1}{24} ghr_x \delta_{xxx} \right. \\ &+ \left. \frac{\alpha_2}{24} ghr_x \delta_{xyy} + \frac{\alpha_3}{8} r_x gh \delta_{xtt} \right) (\eta_{i,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^k), \end{aligned} \quad (2.68)$$

où

$$\begin{aligned} \delta_{xxx} \cdot &= \cdot_{i+2,j} - 3 \cdot_{i+1,j} + 3 \cdot_{i,j} - \cdot_{i-1,j}, \\ \delta_{xtt} \cdot &= \left( \cdot_{i+1,j}^{k+1} - 2 \cdot_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \cdot_{i+1,j}^k \right) - \left( \cdot_{i,j}^{k+1} - 2 \cdot_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \cdot_{i,j}^k \right), \\ \delta_{xyy} &= (\cdot_{i+1,j+1} - 2 \cdot_{i+1,j} + \cdot_{i+1,j-1}) - (\cdot_{i,j+1} - 2 \cdot_{i,j} + \cdot_{i,j-1}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \Delta t \tau_{i,j+\frac{1}{2}}^k &= \Delta t \left( N_t - \frac{\nu}{h} N_{yy} \right) \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}^k + \Delta t \left( gh\eta_y + \frac{\alpha_1}{12} gh\eta_{yyy} + \frac{\alpha_2}{12} gh\eta_{yxx} + \frac{\alpha_3}{4} gh\eta_{ytt} \right) \Big|_{i,j}^k \\
 &- \left( 1 - \frac{\nu r_y}{h\Delta y} \delta_{yy} \right) N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} + \left( 1 + \frac{\nu r_y}{h\Delta y} \delta_{yy} \right) N_{i,j+\frac{1}{2}}^k - \left( gh\frac{r_y}{2} \delta_y + \frac{\alpha_1}{24} ghr_y \delta_{yyy} + \frac{\alpha_2}{24} ghr_y \delta_{yxx} \right. \\
 &+ \left. \frac{\alpha_3}{8} r_y gh \delta_{ytt} \right) (\eta_{i,j}^{k+1} + \eta_{i,j}^k) + \frac{\nu r_y}{2h\Delta y} \delta_{yy} \left( N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - N_{i,j+\frac{1}{2}}^k \right) - \frac{1}{2} \left( gh\frac{r_y}{2} + \frac{\alpha_1}{24} ghr_y \delta_{yyy} \right. \\
 &+ \left. \frac{\alpha_2}{24} ghr_y \delta_{yxx} + \frac{\alpha_3}{8} r_y gh \delta_{ytt} \right) (\eta_{i,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^k), \tag{2.69}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \delta_{yyy} &= \cdot_{i,j+2} - 3 \cdot_{i,j+1} + 3 \cdot_{i,j} - \cdot_{i,j-1}, \\
 \delta_{ytt} &= \left( \cdot_{i,j+1}^{k+1} - 2 \cdot_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} + \cdot_{i,j+1}^k \right) - \left( \cdot_{i,j}^{k+1} - 2 \cdot_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \cdot_{i,j}^k \right), \\
 \delta_{yxx} &= (\cdot_{i+1,j+1} - 2 \cdot_{i,j+1} + \cdot_{i-1,j+1}) - (\cdot_{i+1,j} - 2 \cdot_{i,j} + \cdot_{i-1,j}).
 \end{aligned}$$

Les cinq premiers termes du second membre des équations (2.68) et (2.69) sont nuls. Les restes des termes contiennent les erreurs de dispersion numérique et de viscosité faible.

Additionnons les formules (2.67), (2.68) et (2.69), on obtient :

$$\tau^k = (\tau_{i,j}^k)_{CN} + \tau_{i+\frac{1}{2},j}^k + \tau_{i,j+\frac{1}{2}}^k, \tag{2.70}$$

l'erreur de discrétisation locale de la méthode DAI dépend de l'erreur de schéma Crank-Nicolson.

Les termes restants dans la série de Taylor (2.70) sont :

$$\begin{aligned}
 &\frac{\nu r_y}{2h\Delta y} \delta_{yy} \left( N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - N_{i,j+\frac{1}{2}}^k \right) - \frac{1}{2} \left( gh\frac{r_y}{2} + \frac{\alpha_1}{24} ghr_y \delta_{yyy} + \frac{\alpha_2}{24} ghr_y \delta_{yxx} \right. \\
 &+ \left. \frac{\alpha_3}{8} r_y gh \delta_{ytt} \right) (\eta_{i,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^k) = \frac{\nu r_y}{4h\Delta y} \Delta t \delta_{yy} \delta_t N_{i,j+\frac{1}{2}}^k - \frac{1}{2} \left( gh\frac{r_y}{2} \delta_y + \right. \\
 &\left. \left( \frac{\alpha_1}{24} ghr_y \delta_{yyy} + \frac{\alpha_2}{24} ghr_y \delta_{yxx} + \frac{\alpha_3}{8} r_y gh \delta_{ytt} \right) \Delta t \delta_t \eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right), \tag{2.71}
 \end{aligned}$$

Dans l'équation (2.71), lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ , nous obtenons  $\tau_{i+\frac{1}{2},j}^k \rightarrow 0$  (respectivement  $\tau_{i,j+\frac{1}{2}}^k \rightarrow 0$ ). Alors le système (2.35)-(2.46) est consistant et l'erreur de troncature est donnée par :

$$\tau^k = (\tau_{i,j}^k)_{CN} + (\Delta x)^3 + (\Delta x) (\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 (\Delta t). \tag{2.72}$$

**Remarque 7** Le schéma (2.35)-(2.46) est stable et est consistant alors il est convergent.

### 2.3.3 Algorithme

On applique une méthode itérative et particulièrement la méthode de Gauss Seidel G-S pour sa grande stabilité relativement aux erreurs d'arrondi.

La résolution du système (2.51)-(2.54) se fait selon les étapes suivantes :

#### I. Construction des matrices :

1- Etape d'initialisation : la profondeur d'eau  $h$ , la gravité  $g$ , la viscosité  $\nu$ , la tolérance  $l$  et le pas de discrétisation spatiale  $\Delta x$ .

2- Calcul du pas de discrétisation temporel  $\Delta t$  (selon (2.47)), de la célérité  $c$ , du nombre de Courant  $Cr$  et des paramètres de correction de dispersion :  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$ .

3- Calcul des coefficients des matrices :

$$\begin{aligned} & a_1, a_2, a_3, \\ & F, H, D, D^*, R, \\ & e_1, \dots, e_{12}. \text{ (voir l'annexe B)} \end{aligned}$$

4- Obtention des matrices suivantes :

$$A, E, U, Z \text{ et } W. \text{ (voir l'annexe B)}$$

5- Calcul des matrices  $M_1, M_2, eta_1, eta_2, N_1$  et  $N_2$  (voir l'annexe B), pour leurs utilisation dans l'algorithme itératif G-S.

#### II. Résolution par l'algorithme itératif G-S :

a- initialisation :  $\eta^0 = -h, N^0 = 0$

b- tant que  $k > 0$

calculer :

$$\begin{aligned} M^{k+\frac{1}{2}} &= M_1\eta^k + M_2N^k \\ N^{k+1} &= N_1\eta^k + N_2N^k \\ \eta^{k+1} &= eta_1\eta^k + eta_2N^k \end{aligned}$$

si (Test de convergence :)

$$\max \left\{ \left( M^{k+\frac{1}{2}} - M^k \right), \left( N^{k+1} - N^k \right), \left( \eta^{k+1} - \eta^k \right) \right\} \leq l$$

afficher

$$M^{k+\frac{1}{2}}, \eta^{k+1}, N^{k+1}$$

sinon

$$k = k + 1$$

et aller à l'étape b

### 2.3.4 Simulations numériques et discussions

#### Convergence de la solution numérique

Pour mieux simplifier l'algorithme de calcul, nous adoptons les critères prévus par Madsen et al. dans [26] et la condition (2.65) dans le choix du paramètre  $B(= 1/21)$ .

Etudions la tendance de la convergence numérique en prenant le maillage  $\Delta x = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$  et  $\frac{1}{1000}$ , qui correspondent aux valeurs  $\Delta t$  vérifiant la condition (2.47).

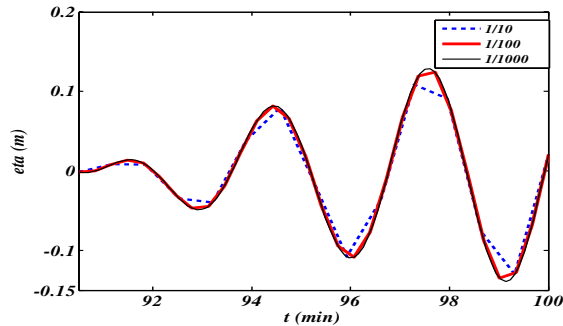


FIG. 2.4 – Profils de la surface libre avec dispersion sur 6 m

L'erreur relative ( $rerr$ ) est définie par la relation suivante :

$$rerr = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\lambda_x} \sum_{j=1}^{\lambda_y} [\eta(i, j) - \eta_{ref}(i, j)]^2}{\sum_{i=1}^{\lambda_x} \sum_{j=1}^{\lambda_y} [\eta_{ref}(i, j)]^2}}, \quad (2.73)$$

où  $\eta_{ref}(i, j)$ , calculée à  $\Delta x = 1/1000$ , est considérée comme une solution référence parmi les solutions proposées.

Temps (min)	$rerr$ de $\eta_{\frac{1}{10}}$	$rerr$ de $\eta_{\frac{1}{100}}$
92	$2.13457e - 02$	$1.34467e - 04$
94	$2.81415e - 02$	$1.77726e - 04$
96	$5.65162e - 01$	$3.536673e - 05$
98	$6.95978e - 01$	$4.36707e - 06$
100	$2.81622e - 03$	$1.76797e - 05$

TAB. 2.1 - Erreur relative pour le raffinement  $\Delta x = 1/10$  et  $1/100$ .

**Commentaire :** le graphe de la figure 2.4 et le tableau 2.1 montrent bien que l'erreur diminue progressivement lorsque  $\Delta x$  tend vers zéro. L'ordre de convergence est  $O((\Delta t)^3, (\Delta x)^3, (\Delta x)(\Delta t)^2, (\Delta x)^2(\Delta t),)$  (voir la section 2.3.2).

Pour la propagation de la dispersion numérique, les calculs de la surface libre  $\eta$ , dans la figure ci-dessous sont relatifs aux cas des fluides non-visqueux ( $\nu = 0$ ) (cf., [15]) et visqueux pour la valeur  $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Cette dernière valeur, diverses études expérimentales et théoriques montrent qu'elle s'adapte bien aux données disponibles, contrairement à  $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (particulièrement en expérimental).

Pour  $h = 50 \text{ m}$ ,  $\Delta x = 0.001 \text{ m}$  et  $\Delta t = 4.16 \text{ s}$ , on a :

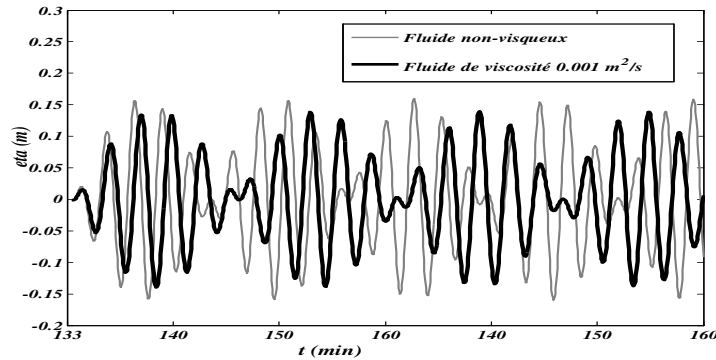


FIG. 2.5 – Onde bichromatique se propageant sur  $15 \text{ m}$

**Commentaire :** la figure 2.5 montre la propagation d'un train d'ondes irrégulières et le début de la dispersion durant environ  $27 \text{ minutes}$ , correspondant à une distance de  $15 \text{ m}$ . De même, elle montre aussi clairement une diminution



## 2. Nouveau schéma modifié calculant la dispersion d'un tsunami pour un fluide non-visqueux et faiblement visqueux

33

des amplitudes de train pour le fluide visqueux ( $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ) par rapport au fluide non-visqueux. Ainsi, la propagation des ondes est légèrement ralentie ; ceci est confirmé par le tableau ci-après.

Temps (min)	Fluide visqueux $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$		Fluide non-visqueux $\nu = 0$	
	$M \text{ (m}^2/\text{s)}$	$N \text{ (m}^2/\text{s)}$	$M \text{ (m}^2/\text{s)}$	$N \text{ (m}^2/\text{s)}$
133	75.1041	70.341	76.2173	89.942
140	60.3746	71.832	73.2849	83.955
150	40.2070	40.001	59.4052	45.8509
160	30.9501	20.0115	58.43112	20.0125
140	20.5325	20.0001	41.033	20.0104
150	10.1472	10.099	10.4105	11.1902
160	10.70202	10.001	10.0085	11.2016

TAB. 2.2 - Flux de décharge horizontales pour un fluide (ou non) visqueux

Physiquement, la propagation est ralentie à cause de la viscosité, ce qui signifie mathématiquement que l'effet est attribué aux termes non locaux [12] qui sont plus importants en amplitude.

Notons que ces résultats confirment ceux de [12] le cas des petits nombres d'ondes.

La figure ci-dessous montre la simulation numérique suivant la viscosité océanique  $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (i.e., dans la mer Héraklienne de scénario 1) et celle de l'étude réalisée avec une viscosité  $10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ .

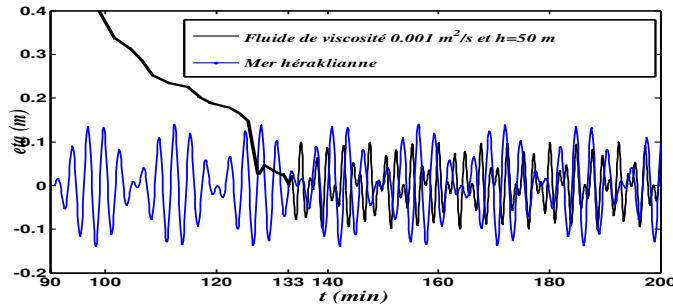


FIG. 2.6 – Comparaison entre les deux cas

**Commentaire :** à titre de comparaison, la viscosité de la mer héraclienne est  $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  dans la figure 2.6, qui est presque négligeable pour modéliser le phénomène de dissipation dans un canal de laboratoire. En revanche, cette valeur est plus réaliste pour les simulations numériques.

Nous remarquons que l'onde bichromatique commence à se propager après une heure et demie environ pour le fluide de viscosité  $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ . Nous constatons qu'elle a ralenti l'onde irrégulière de plus d'une demi-heure de retard comparativement au cas de mer Héraklion (voir figure 2.6).

### Validation de la méthode numérique

Nous comparons nos résultats numériques avec ceux obtenus dans [26]. Ces auteurs ont simulé la propagation d'un train d'ondes irrégulières en utilisant la discrétisation selon la méthode de DAI-swipping appliquée directement sur le système de Boussinesq amélioré (2.12)-(2.14). La présente simulation est effectuée pour  $\Delta x = 0.6 \text{ m}$  sur un intervalle  $[0, 12 \text{ m}]$ , pour une durée de  $90 \text{ s}$  (les mêmes données de [26]). Pour distinguer le comportement des solutions, on fait un zoom : par exemple, on choisit l'intervalle  $[8 \text{ s}, 23 \text{ s}]$ .

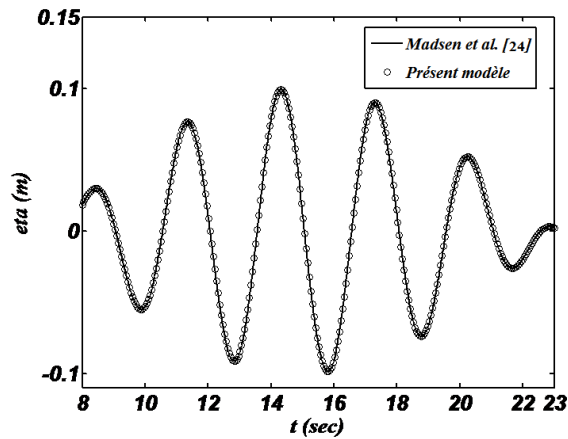


FIG. 2.7 – Profils des surfaces libres calculés par les deux modèles

**Commentaire :** la figure 2.7 montre une bonne concordance avec les travaux de Madsen et al. qui utilise la dispersion physique (*système (2.12)-(2.14)*) et

notre système qui utilise les paramètres de dispersion numérique (*système (2.28)-(2.30)*). Le tableau ci-dessous montre que le schéma prédicteur-correcteur de [26] appliqué au le système (2.12)-(2.14) consomme plus de temps de calcul, tandis que dans cette étude le temps est environ 1/10 du temps de [26].

Modèle	Madsen et al. [24]	Schéma modifié (2.28)-(2.30)
$\Delta x$ (m)	0.6	0.6
Nombre des grilles spatiales	$20 \times 10$	$20 \times 20$
$\Delta t$ (sec)	0.1	0.9
Nombre des grilles temporelles	14	7
Temps uniforme utilisé par l'ordinateur	770	72

TAB. 2.3 - Comparaison des temps de calcul pour les deux modèles

Par conséquent, le schéma proposé, ici, confirme les résultats numériques publiés dans [26].

### 2.3.5 Autres applications

A titre indicatif, nous avons repris les données de [3]. Pour l'illustration de notre modèle en prenant en considération la profondeur  $h$  et la viscosité  $\nu$  pour les trois océans : ATL est l'océan Atlantique, IND est l'océan Indien et PAC est de l'océan Pacifique.

	ATL (tempéré)	PAC (équatorial)	IND (golfe du Bengal)
Latitude	$41^\circ 00' N$	$3^\circ 23' S$	$5^\circ 23' N$
Longitude	$32^\circ 58' W$	$83^\circ 21' W$	$90^\circ 21' W$
Profondeur (m)	3427	3091	2925
Température récente ( $^\circ C$ )	2.5	1.8	1.6
Viscosité ( $m^2/s$ )	$1.7 \times 10^{-6}$	$1.73 \times 10^{-6}$	$1.74 \times 10^{-6}$
Taille de la grille temporelle $\Delta t$ (sec)	26.5	25.5	24.3

TAB. 2.4 - Données physiques relatives aux différents océans

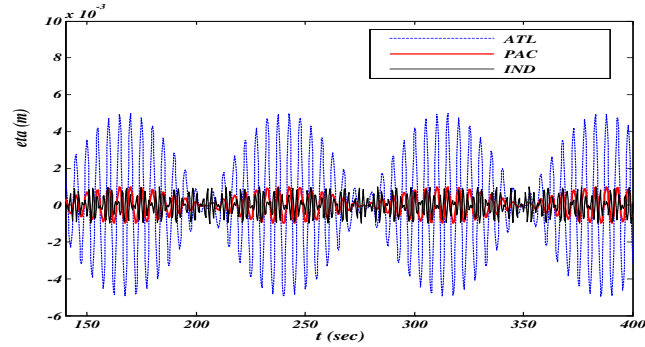


FIG. 2.8 – Ondes bichromatiques se propageant dans chaque océan à 15 m de la frontière ouest, pour  $\Delta x = 10^{-5} m$

Dans la figure 2.8, nous remarquons que la viscosité  $\nu$  a une influence importante sur la dispersion des trains d'ondes, notamment pour le cas ATL.

## 2.4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons appliqué un nouveau schéma modifié pour résoudre numériquement les équations améliorées de Boussinesq pour un fluide non-visqueux et faiblement visqueux. Plus précisément, nous avons intégré des termes d'une dispersion numérique dans les équations modélisant "*shallow water*". En effet, nous nous sommes donc inspirés des travaux de Madsen et al [24] dans lesquels ils ont considéré la dispersion physique dans le système d'équations de Boussinesq amélioré. Etant donné l'existence des similitudes entre les deux systèmes, nous avons pu déterminer trois coefficients de correction de dispersion numérique  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  grâce à la formule (2.47) qui montre l'existence d'une relation de calcul entre le pas de discrétisation selon  $x$  et celui du temps  $t$ . Notre démarche présente, comparativement aux résultats numériques de [24], certains avantages en précision puisque nous avons à traiter un schéma numérique d'ordre 3, et des gains en temps de calcul qui se traduisent par une rapidité de convergence (le temps de calcul en CPU est passé de 720 à 72, i.e, il est divisé par 10). D'autre part, les simulations numériques obtenues ont montré l'effet physique des termes de la viscosité faible sur la propagation d'un train d'ondes irrégulières. Par ailleurs, cette étude permet de considérer des données de viscosité plus réalistes en pratique pour la propagation transocéanique et une discrétisation plus

## **2. Nouveau schéma modifié calculant la dispersion d'un tsunami pour un fluide non-visqueux et faiblement visqueux** **37**

---

souple pour raffiner le maillage par rapport aux schémas classiques : schéma de saute-mouton appliqué dans [17] et les éléments finis utilisés dans [28] puisque si l'on désire augmenter la précision du calcul, seuls les coefficients de correction sont affectés. L'étude de la stabilité de ce schéma numérique dépend du choix du paramètre  $B$  qui doit vérifier la condition (2.65).

Nous envisageons d'étendre cette étude pour le cas général de ce problème en prenant en considération les variations de la viscosité en fonction de la température. A cet effet, nous rajoutons au système d'équations du problème traité, l'équation de l'énergie [31].

## Chapitre 3

# Calcul numérique des valeurs propres du spectre négatif des solitons hydrodynamiques

Ce chapitre concerne l'étude de l'existence et des caractéristiques physiques (amplitude, célérité, ...) des ondes solitaires de gravité, appelées aussi solitons. Expérimentalement, ces derniers peuvent être générés par un batteur piston placé à l'amont d'un canal horizontal (cf., [30]). Après la modélisation du phénomène, le système est transformé par la *double distorsion* pour aboutir à l'équation de Korteweg de Vries *KdV* et qui admet comme solution particulière : le soliton. L'équation KdV est donnée par :

$$\frac{\partial f(r, s)}{\partial s} - 6f \frac{\partial f(r, s)}{\partial r} + \frac{\partial^3 f(r, s)}{\partial r^3} = 0, \quad (3.1)$$

$s$  et  $r$  représentent respectivement les variables d'espace et de temps.

Pour déterminer  $f(r, s)$ , on utilise "*inverse scattering method*" pour transformer l'équation KdV en une équation spectrale appelée *Sturm-Liouville* :

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + (\lambda - f_0(r)) \psi(r) = 0, \quad (3.2)$$

où  $\lambda$  est la valeur propre,  $\psi$  la fonction propre associée et  $f_0(r)$  le potentiel initial. L'équation 3.2 peut être résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta. Pour illustration, nous considérons deux types de mouvement du batteur piston qui génèrent des solitons. Les résultats numériques sont présentés pour soutenir la théorie.

## 3.1 Position du problème

### 3.1.1 Description du phénomène

On lie au canal un repère de référence  $Oxy$ , tel que l'axe horizontal  $Ox$  coïncide avec la surface libre au repos et l'axe vertical  $Oy$  ascendant. Le fluide supposé parfait occupe un domaine  $D$ , où  $D = \{x \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq -h\}$  avec  $h$  la hauteur du fluide au repos (voir figure 3.1).

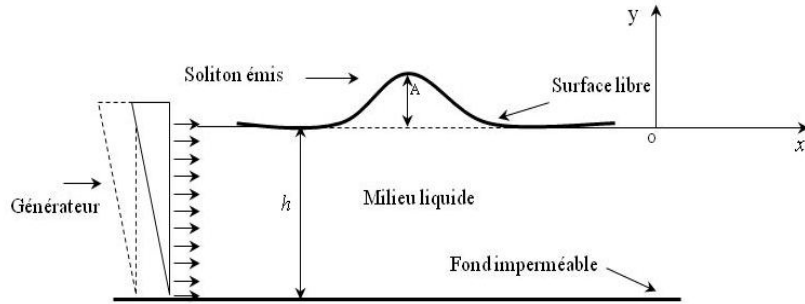


FIG. 3.1 – Description du phénomène

Un batteur piston part de la position extrême arrière et s'arrête à l'instant  $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$  tel que  $\omega$  est la pulsation (élongation positive). Le mouvement du batteur est connu soit par une loi théorique, soit expérimentalement.

Dans notre cas, le batteur piston suit la loi théorique  $D(t)$  donnée par :

$$D(t) = \begin{cases} e[1 - \cos(\omega t)] & \text{pour } t \in \left[0, \frac{\pi}{\omega}\right], \\ 0 & t \notin \left[0, \frac{\pi}{\omega}\right], \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $e$  est l'amplitude de l'élongation du batteur piston.

La position de la particule fluide à l'instant  $t$ ,  $t > 0$ , est désignée par  $(x, y)$  et  $(a, b)$  ses coordonnées initiales, où  $a$ ,  $b$  et  $t$  sont des variables de Lagrange (voir figure 3.2). Il est préférable d'introduire des nouvelles variables  $X$  et  $Y$  comme suit :

$$X(a, b, t) = x(a, b, t) - a \quad \text{et} \quad Y(a, b, t) = y(a, b, t) - b. \quad (3.4)$$

$X(a, b, t)$  et  $Y(a, b, t)$  représentent les écarts par rapport à la position initiale.

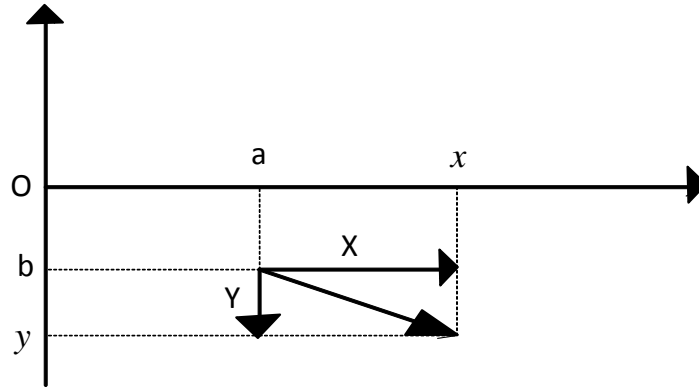


FIG. 3.2 – Coordonnées de Lagrange  $a$  et  $b$ .

### 3.1.2 Équations de base du modèle mathématique

Les équations générales du modèle mathématique sont présentées ci-dessous :

(i) la condition cinématique exprime l'incompressibilité du fluide (c'est à dire, le Jacobien est égal à l'unité)

$$\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial b} - \frac{\partial X}{\partial b} \frac{\partial Y}{\partial a} = 0, \quad (3.5)$$

(ii) la condition dynamique pour un mouvement irrotationnel

$$\frac{\partial^2 X}{\partial b \partial t} \left(1 + \frac{\partial X}{\partial a}\right) - \frac{\partial X}{\partial b} \frac{\partial^2 X}{\partial a \partial t} + \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial^2 Y}{\partial b \partial t} - \frac{\partial^2 Y}{\partial a \partial t} \left(1 + \frac{\partial Y}{\partial b}\right) = 0, \quad (3.6)$$

(iii) les conditions aux limites d'imperméabilité

$$\left(1 + \frac{\partial X}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - g \frac{\partial Y}{\partial a} = 0 \text{ à la surface libre } (b = 0), \quad (3.7)$$

$$Y(a, b = -h, t) = 0 \quad \text{au fond}, \quad (3.8)$$

(iv) les conditions initiales de repos à l'infini

$$X(a, b, -\infty) = 0 \text{ et } Y(a, b, -\infty) = 0, \quad (3.9)$$

(v) la condition sur le batteur piston

$$X(a = 0, b, t) = D(t), \quad (3.10)$$



## 3.2 Techniques de résolution

### 3.2.1 Introduction des variables de distorsion classique

Afin de transformer les équations (3.5)-(3.10) en l'équation de KdV (3.1), nous commençons d'abord par introduire les variables de distorsion classique (3.4) qui expriment la théorie de l'eau peu profonde. Cette théorie sera caractérisée d'abord par le petit paramètre  $\varepsilon$  dont la signification physique apparait dans [30] :

$$\alpha = \varepsilon a, \quad \beta = b \quad \text{et} \quad \tau = \varepsilon \sqrt{gh} t, \quad (3.11)$$

où  $\sqrt{gh}$  représente la célérité critique des ondes longues propagées ( $g$  est la gravité).

Cette distorsion est justifiée par le fait que le mouvement horizontal des particules fluides est beaucoup plus important que leur mouvement vertical.

La substitution de (3.11) dans les équations (3.5)-(3.10), donne :

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta} + \varepsilon \left[ \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{\partial X}{\partial \alpha} \frac{\partial Y}{\partial \beta} - \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right] = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \beta \partial \tau} + \varepsilon \left[ \frac{\partial X}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 X}{\partial \beta \partial \tau} - \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial^2 X}{\partial \alpha \partial \tau} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 Y}{\partial \beta \partial \tau} - \left( 1 + \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right) \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha \partial \tau} \right] = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \varepsilon h \frac{\partial^2 X}{\partial \tau^2} + \varepsilon^2 h \left[ \frac{\partial X}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 X}{\partial \tau^2} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2} \right] = 0 \quad \text{à la surface libre } (\beta = 0), \quad (3.14)$$

$$Y(\alpha, \beta, \tau) = 0 \quad \text{au fond } (\beta = -h), \quad (3.15)$$

$$X(\alpha, \beta, -\infty) = 0 \quad \text{et} \quad Y(\alpha, \beta, -\infty) = 0 \quad \text{au repos}, \quad (3.16)$$

$$X(\alpha = 0, \beta, t) = D(t). \quad (3.17)$$

### 3.2.2 Introduction des variables de double distorsion

Nous introduisons les variables de la double distorsion comme suit :

$$\theta = \varepsilon \left( \alpha - \sqrt{ght} \right), \quad \varphi = \varepsilon^3 \alpha, \quad (3.18)$$

où  $\theta$  et  $\varphi$  représentent la variable rapide et lente respectivement.

Ainsi, les dérivées suivant  $\theta$  et  $\varphi$  sont définies par :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\varepsilon \sqrt{gh} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (3.19)$$

L'injection de (3.18)-(3.19) dans les équations (3.12)-(3.17), permet d'obtenir respectivement :

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta} + \varepsilon \left[ \frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial Y}{\partial \beta} - \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right] + \varepsilon^3 \left[ \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \beta} - \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right] = 0, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 X}{\partial \beta \partial \theta} + \varepsilon \left[ \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial^2 X}{\partial \beta \partial \theta} - \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \beta \partial \theta} - \frac{\partial Y}{\partial \beta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} \right] \\ & + \varepsilon^3 \left[ \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 X}{\partial \beta \partial \theta} - \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 Y}{\partial \beta \partial \theta} - \frac{\partial Y}{\partial \beta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta \partial \varphi} \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta \partial \varphi} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \varepsilon^2 \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right] + \varepsilon \left[ \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \varepsilon \left( \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} \right) + \varepsilon^3 \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$Y(\theta, \varphi, -h) = 0 \quad \text{et} \quad \beta = -h, \quad (3.23)$$

$$X(\theta, \varphi, -\infty) = 0 \quad \text{et} \quad Y(\theta, \varphi, -\infty) = 0. \quad (3.24)$$

### 3.2.3 Approximation des solutions d'équations (3.20)-(3.24)

Selon la théorie de l'eau peu profonde [30], les solutions seront calculées sous la forme de séries entières en  $\varepsilon$  comme suit :

$$X(\theta, \varphi, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} X_{2n+1}(\theta, \varphi, \beta), \quad (3.25)$$

$$Y(\theta, \varphi, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} Y_{2n}(\theta, \varphi, \beta). \quad (3.26)$$

En substituant (3.25)-(3.26) dans (3.20)-(3.24), l'approximation du quatrième ordre donne :

$$\frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 X_1}{\partial \theta^4} - 3 \frac{\partial X_1}{\partial \theta} \frac{\partial^2 X_1}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 X_1}{\partial \theta \partial \varphi} = 0. \quad (3.27)$$

Introduisons enfin les nouvelles variables  $r$  et  $s$  tels que

$$r = \frac{\theta}{\varepsilon h} = \frac{\alpha - \sqrt{gh}t}{h}, \quad s = \frac{\varphi}{6\varepsilon^3 h} = \frac{\alpha}{6h}, \quad (3.28)$$

Si nous écrivons (3.28) en utilisant les nouvelles variables (3.27) selon [30], la fonction  $f$  est prise comme suit :

$$f = \frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial X_1}{\partial \theta} = -\frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{\eta_2}{h} = \frac{-3\eta}{2h} + O(\varepsilon^4), \quad (3.29)$$

où  $\eta$  est la surface libre ( $y = \eta(x, t)$ ).

En négligeant  $O(\varepsilon^4)$ , on peut écrire l'expression (3.29) sous la forme suivante :

$$\eta(x, t) = -\frac{2}{3} h f(r, s), \quad (3.30)$$

Notons que  $f(r, s)$  de (3.30) satisfait à l'équation KdV (3.1).

Pour  $\alpha = s = 0$ , sa valeur  $f_0(r) = f(r, 0)$  est donnée par  $\frac{\partial X_1}{\partial \theta}(\alpha = 0, t)$ . Le mouvement du générateur d'ondes longues (bateur piston) a pour équation  $D(r) = X(\alpha = 0, \beta, t) = \varepsilon X_1(\alpha = 0, t) + O(\varepsilon^3)$ ; le terme  $O(\varepsilon^3)$  peut être négligé dans toute la suite.

### 3.2.4 Solutions-solitons de l'équation KdV (3.1)

Maintenant, nous donnons les propositions suivantes :

**Proposition 8** *L'équation de KdV (3.1) admet comme solution particulière une onde solitaire (soliton) de la forme suivante :*

$$f(r, s) = \frac{-\mu}{2ch^2 \left( \frac{\sqrt{\mu}}{2} (r - \mu s) \right)}, \quad (3.31)$$

tel que  $\mu$  est un paramètre arbitraire.

**Preuve.** Posons

$$f(r, s) = \phi(\xi) = \phi(r - \mu s), \quad (3.32)$$

où  $\xi = r - \mu s$ .

En substituant (3.32) dans (3.1), on obtient l'équation différentielle suivante

$$(-\mu - 6\phi) \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{d^3\phi}{d\xi^3} = 0. \quad (3.33)$$

Par intégration de (3.33), on obtient

$$-3\phi^2 - \mu\phi + \frac{d^2\phi}{d\xi^2} = l_1, \quad (3.34)$$

où  $l_1$  est une constante.

Multiplions l'équation (3.34) par  $\frac{d\phi}{d\xi}$  et intégrons de nouveau, on obtient :

$$-\phi^3 - \frac{\mu}{2}\phi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 = l_1\phi + l_2. \quad (3.35)$$

Les conditions aux limites aident à déterminer les constantes  $l_1$  et  $l_2$  : l'onde est inexistante à l'infini et donc  $\phi$  et ses dérivées s'annulent à l'infini. Cela donne  $l_2 = 0$ .

La dérivée de (3.35) par rapport à  $\xi$  et la simplification (i.e., division par  $\frac{d\phi}{d\xi}$ ) donnent

$$-3\phi^2 - \mu\phi + \frac{d^2\phi}{d\xi^2} = l_1, \quad (3.36)$$

avec  $l_1 = 0$  quand  $\xi \rightarrow \infty$ .

On prend  $l_1 = l_2 = 0$  dans (3.35) et par intégration des fonctions transcendentes élémentaires [31], on obtient la solution

$$\phi(\xi) = \frac{-\mu}{2ch^2 \left( \frac{\sqrt{\mu}}{2} \xi \right)}, \quad (3.37)$$

d'une part et on trouve (3.31) d'autre part.

Il est facile de vérifier que la fonction  $f$  est la solution de l'équation KdV (3.1) et pratiquement nulle dès que  $\xi$  vaut quelques unités (e.g.,  $\sqrt{\mu} |\xi| = \sqrt{\mu} |r - \mu s| \geq 20$ ) [31]. ■

**Proposition 9** *La solution (3.31) de l'équation (3.1) est asymptotiquement représentée par une superposition linéaire c'est-à-dire,*

$$f \sim \sum_{n=1}^N f_n. \quad (3.38)$$

Tel que

$$f_n(r, s) = \frac{-2K_n^2}{\cosh^2[K_n(r - 4K_n^2s) + \delta_n]}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (3.39)$$

où  $K_n$  est un nombre (à déterminer ci-après) et  $\delta_n$  un déphasage dépendant de  $K_n$ .

**Preuve.** voir [30]. ■

### 3.2.5 Equation de Sturm-Liouville

Comme nous l'avons indiqué précédemment dans l'introduction, la solution de l'équation KdV (3.1) peut être associée à l'équation différentielle ordinaire linéaire de Sturm-Liouville (3.2) (pour plus de détails, voir [1]) à laquelle nous ajoutons les conditions aux limites. Le problème revient à trouver, pour un potentiel donné  $f_0(r)$ , les valeurs propres  $\lambda \in \mathbb{R}$  et les fonctions propres associées  $\psi$  ( $\psi(r) \neq 0$ , pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ) tel que :

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + (\lambda - f_0(r))\psi(r) = 0, \\ \psi(-\infty) = 0 \text{ et } \psi(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

Ici, la fonction  $f_0(r)$  est prise comme suit :

$$f_0(r) = \begin{cases} \frac{3}{2h} \frac{dD(r)}{dr} & r \in [r_1, 0], \\ 0 & r \notin [r_1, 0], \end{cases} \quad (3.41)$$

où

$$r_1 = -\sqrt{\frac{g}{h}} t_1, \quad (3.42)$$

et  $t_1$  le temps au bout duquel s'arrête le batteur piston.

**Problème spectral direct :** pour un potentiel donné  $f_0(r)$ , le problème (3.40) consiste à trouver l'ensemble  $\{\lambda\}$  des valeurs propres et les fonctions propres correspondantes  $\psi(r, \lambda)$ . Une condition suffisante simple pour l'apparition d'au moins un état lié dans le spectre (c'est à dire la présence d'un soliton dans la solution) est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(r) dr > 0. \quad (3.43)$$

où

$$r(t) = -\sqrt{\frac{g}{h}}t. \quad (3.44)$$

La limite supérieure pour le nombre des solitons  $N$  dont la solution peut être estimée [18] est représentée par la formule suivante :

$$N \leq 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} |r| |f_0(r)| dr. \quad (3.45)$$

Notons que le spectre continu n'est pas l'objet de cette étude.

**Spectre discret** ( $\lambda = \lambda_n < 0$ ) :

Si le potentiel  $f_0(r)$  est suffisamment négatif près de l'origine de l'axe  $x$ , le problème spectral (3.40) implique l'existence d'un nombre fini des fonctions propres  $\psi = \psi_n(r; \lambda)$ ,  $n = 1, \dots, N$  correspondantes aux valeurs propres discrètes du paramètre spectral  $\lambda = \lambda_n = -K_n^2$ ,  $K_n \in \mathbb{R}$ ,  $K_1 > K_2 > \dots > K_N$  (voir livre de Courant et Hilbert [9], p.p 416-418).

Chaque valeur propre  $\lambda_n = -K_n^2$  permet de déterminer la fonction  $f(r, s)$  qui est un soliton (l'équation asymptotique (3.31)).

**$K_n$ -Conditions :** La résolution du problème (3.40) consiste à intégrer l'équation (3.2) avec la prise en compte de la continuité des solutions et la condition que ses dérivées s'annulent à l'infini (cf., [30]).

**Résolution de (3.40)**

Pour cela nous considérons les 3 cas suivants :

$\alpha$ ) Si  $r \in ]-\infty, r_1[$  alors  $f_0(r) = 0$  et l'équation (3.40) devient

$$\frac{d^2\psi_n(r)}{dr^2} - K_n^2\psi_n(r) = 0. \quad (3.46)$$

Notons la solution de (3.46) par

$$\widehat{\psi}_n(r) = e^{K_n(r-r_1)}, \quad (3.47)$$

la solution (3.47) satisfait les conditions aux limites suivantes lorsque  $r \rightarrow r_1$

$$\widehat{\psi}_n(r_1) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{d\widehat{\psi}_n(r_1)}{dr} = K_n. \quad (3.48)$$

$\beta$ ) Si  $r \in [r_1, 0]$ , par intégration numérique de (3.40) (méthode de Runge-Kutta d'ordre 4) associée aux conditions (3.48), nous pouvons calculer

$$\widehat{\psi}_n(0) \text{ et } \frac{d\widehat{\psi}_n}{dr}(0). \quad (3.49)$$

$\gamma$ ) si  $r \in ]0, +\infty[$  alors  $f_0(r) = 0$ , les solutions générales de (3.40) obtenues par la méthode de Fourier, sont de la forme suivante :

$$\widehat{\psi}_n(r) = c_1 e^{-K_n r} + c_2 e^{K_n r}. \quad (3.50)$$

Les coefficients  $c_1$  et  $c_2$  sont calculées par la condition de continuité des solutions (3.50) et ses dérivées au point  $r = 0$  :

$$c_1 = \frac{1}{2} \left[ \widehat{\psi}_n(0) - \frac{1}{K_n} \frac{d\widehat{\psi}_n}{dr}(0) \right], \quad (3.51)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left[ \widehat{\psi}_n(0) + \frac{1}{K_n} \frac{d\widehat{\psi}_n}{dr}(0) \right]. \quad (3.52)$$

La solution bornée de (3.50) est obtenue à la condition que  $c_2$  tendre vers zéro, lorsque  $r \rightarrow +\infty$ .  $K_n$  doit alors vérifier la relation suivante :

$$K_n \widehat{\psi}_n(0) + \frac{d\widehat{\psi}_n}{dr}(0) = 0. \quad (3.53)$$

*Nous notons que la relation (3.53) est très importante pour la simulation numérique, puisque le nombre discret  $K_n$  doit en être solution et appartenir à l'intervalle  $[0, K_{\max}]$  où  $K_{\max}$  est déterminé par la proposition suivante (mais on calcule  $K_n$  tout simplement par une méthode de balayage sur  $[0, K_{\max}]$ ).*

**Proposition 10** *Soient la solution (3.47) et la condition (3.48), alors on a :*

$$K_{\max} = \sqrt{\sup |f_0(r)|}. \quad (3.54)$$

**Preuve.** Supposons que

$$K_n > \sqrt{\sup |f_0(r)|}, \quad (3.55)$$

ce qui entraîne

$$K_n^2 + f_0(r) > 0, \forall r. \quad (3.56)$$

En désignant par  $\widehat{\psi}_r$  et  $\widehat{\psi}_{rr}$  la 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> dérivées respectivement. Considérons l'équation (3.2) et selon (3.48), nous avons

$$\widehat{\psi}(r_1) = 1 \text{ et } \frac{d\widehat{\psi}(r_1)}{dr} = K_n > 0, \quad (3.57)$$

donc

$$\psi_{rr}(r_1) > 0. \quad (3.58)$$

On en déduit que  $\widehat{\psi}_r$  et  $\widehat{\psi}$  sont des fonctions positives et croissantes. La fonction  $\psi$ , sa dérivée première  $\psi_r$  et la seconde  $\psi_{rr}$  augmentent avec les valeurs propres positives, alors la relation (3.53) n'est pas vérifiée. ■

### 3.2.6 Equation de la surface libre

Le calcul de  $K_n$  à partir de (3.53) permet de déterminer l'équation de la surface libre en utilisant les formules (3.30) et (3.31) on obtient :

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{\cosh^2(\chi_n)}, \text{ pour } n = \overline{1, N} \quad (3.59)$$

où

$$\chi_n = \frac{xK_n}{h} \left(1 - \frac{2}{3}K_n^2\right) - \sqrt{\frac{g}{h}}K_n t + \delta_n, \quad (3.60)$$

avec

$$A_n = \frac{4}{3}hK_n^2, \quad (3.61)$$

$A_n$  est l'amplitude du  $n$ -soliton.

Si nous négligeons  $\delta_n$  (voir [30]) nous avons

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{\cosh^2(x - c_n t)}, \text{ pour } n = \overline{1, N}, \quad (3.62)$$

avec

$$c_n = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{A_n}{2h}\right), \quad (3.63)$$

$c_n$  est la vitesse du  $n$ -soliton.



### 3.3 Simulations numériques

Pour résoudre le problème (3.40), utilisons la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. Pour cela, nous réécrivons ce problème comme un système d'équations au premier ordre tel que :

Posons  $u = \psi$  et  $v = \frac{du}{dr}$ , alors (3.40) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(r) = \frac{du}{dr}(r), \\ \frac{dv}{dr}(r) = \frac{d^2\psi}{dr^2} = (K^2 + f_0(r))u(r), \text{ pour tout } r \in [r_1, 0], \\ u(r_1) = 1, v(r_1) = K_n. \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Pour obtenir une approximation de la solution du problème (3.64) subdivisons l'intervalle  $[r_1, 0]$  en  $M$  sous-intervalles. Pour tout  $K_n$ , subdivisons l'intervalle  $[0, K_{\max}]$  en  $N_{int}$  sous-intervalles.

#### Algorithme

Données :

$t_1$  temps au bout duquel s'arrête le batteur piston

$e$  amplitude de l'élongation

$h$  profondeur de fluide au repos

$g$  accélération de la pesanteur

$TOL$  tolérance,  $r_1$  point final

$N_{int}$  et  $M$  des entiers

On évalue  $K_{\max} = \frac{3\pi e}{2t_1\sqrt{gh}}$

étape 1 Pour  $n = 1, 2, \dots, N_{int}$  faire les étapes 2-7

On calcule  $L = \frac{K_{\max}}{N_{int}}$ ,  $K = 0$ ,

étape 2 On calcule  $H = -r_1/M$ ;

$r = r_1$ ;  $u = 1$ ;  $v = K$ ;

On affiche  $(r, u, v)$ .

étape 3 Pour  $i = 1, 2, \dots, M$  faire les étapes 4 – 6

étape 4 On calcule  $C_{11} = H v$ ;

$$C_{21} = H (K^2 + f_0(r)) u; \quad C_{12} = H \left( v + \frac{C_{21}}{2} \right);$$

- $$C_{22} = H \left( K^2 + f_0 \left( r + \frac{H}{2} \right) \right) \left( u + \frac{C_{11}}{2} \right);$$
- $$C_{13} = H \left( v + \frac{C_{22}}{2} \right); C_{23} = H \left( K^2 + f_0 \left( r + \frac{H}{2} \right) \right) \left( u + \frac{C_{12}}{2} \right);$$
- $$C_{14} = H \left( v + C_{23} \right); C_{24} = H \left( K^2 + f_0 \left( r + \frac{H}{2} \right) \right) \left( u + C_{13} \right).$$
- étape 5 On calcule  $u = u + \frac{1}{6} (C_{11} + 2C_{12} + 2C_{13} + C_{14})$ ;
- $$v = v + \frac{1}{6} (C_{21} + 2C_{22} + 2C_{23} + C_{24});$$
- $$r = r_1 + i H.$$
- étape 6 Si  $\left| \frac{v}{u} + K \right| \leq TOL$  alors On affiche  $(K, u, v)$
- sinon  $K = n L$  et allez à l'étape 2

### 3.3.1 Résultats numériques et discussion

Pour illustration, nous prenons deux types de mouvements du batteur piston selon deux applications courantes.

#### Première application

Pour  $N = 1, 2$ , l'équation de déplacement du batteur piston est donnée par

$$D(t) = \begin{cases} e \left[ 1 - \cos \left( \omega r \sqrt{\frac{h}{g}} \right) \right] & \text{pour } r \in [r_1, 0], \\ 0 & r \notin [r_1, 0], \end{cases} \quad (3.65)$$

L'utilisation de (3.41) donne ce résultat

$$f_0(r) = \frac{3\pi e}{2t_1\sqrt{gh}} \sin \left( \frac{\pi r}{t_1} \sqrt{\frac{h}{g}} \right), r \in [r_1, 0]. \quad (3.66)$$

Nous prenons les données suivantes

$t_1$ (s)	$e$ (cm)	$h$ (cm)	$N_{int}$	$\Delta K_n$	$\varepsilon$	$g$ (cm/s <sup>2</sup> )
1.5 s	10	8 cm	10 <sup>3</sup>	10 <sup>-4</sup>	6 × 10 <sup>-7</sup>	981

TAB. 3.1 - Données de la première application A

$t_1(s)$	$e(cm)$	$h(cm)$	$N_{int}$	$\Delta K_n$	$\varepsilon$	$g(cm/s^2)$
1.8	11	10	$5 \times 10^5$	$2 \times 10^{-3}$	$4 \times 10^{-7}$	981

TAB. 3.1 - Données de la première application B

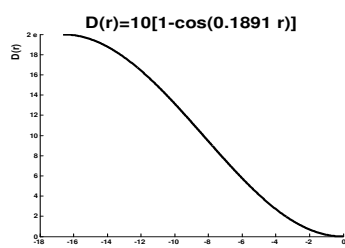


FIG. 3.3 – Fonction de déplacement (3.65) suivant le tableau 3.1.

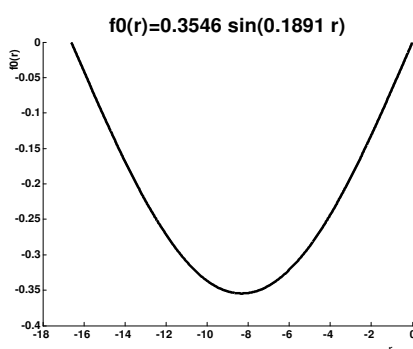


FIG. 3.4 – Potentiel initial (3.66) suivant le tableau 3.1

On obtient les résultats suivants

$K_{max}$	$K_n$	$A(cm)$	$c(cm/s)$
0.5955	0.2148	0.6152	102.1887

TAB. 3.3 - Résultats de A

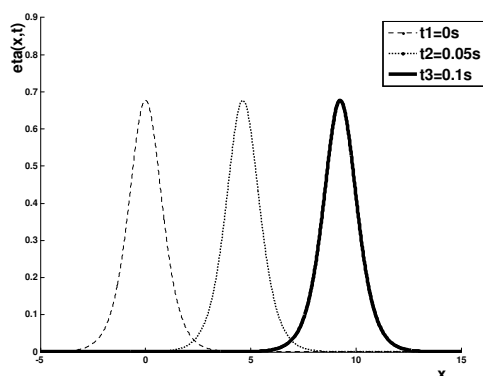


FIG. 3.5 – 1 soliton solution

Cela signifie qu'il existe un soliton. La surface libre d'un soliton aux instants  $t_1 = 0\text{ s}$ ,  $t_2 = 0.05\text{ s}$  et  $t_3 = 0.1\text{ s}$ , est donnée par le graphique ci-dessus.

$K\text{ max}$	$K_1$	$K_2$	$A_1\text{ (cm)}$	$c_1\text{ (cm/s)}$	$A_2\text{ (cm)}$	$c_2\text{ (cm/s)}$
0.5392	0.318	0.14	1.3483	106.2054	0.2613	100.3568

TAB. 3.4 - Résultats de B

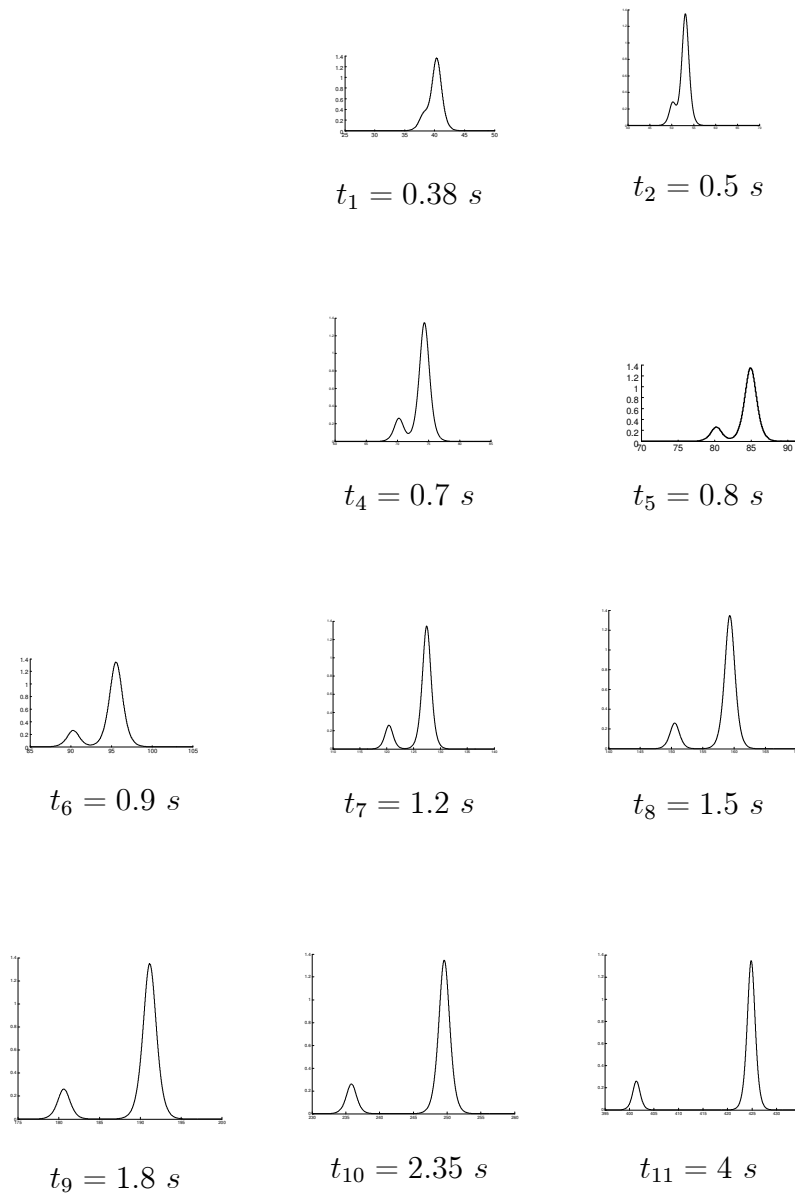


FIG. 3.6 – **2 soliton solution** : interaction de deux solitons.

**Commentaire :** Cet exemple montre la propagation de deux solitons : le soliton de grande amplitude ( $1,35 \text{ cm}$  associé à la valeur propre  $K_1 = 0,32$ ) et un soliton de petite amplitude ( $0,26 \text{ cm}$  associé à la valeur propre  $K_2 = 0,14$ ) et leur collision transitoire. Un soliton se propage d'autant plus rapidement que son amplitude est grande et si les deux solitons d'amplitudes différentes sont créés, il se produit une collision qui ne change pas la forme des solitons avant l'interaction.

Deuxième application

Le batteur piston suit une loi théorique  $D(r)$  qui génère des solitons en l'absence de dispersion,  $N = 2, 3$ .

$$D(r) = e \left[ 1 - \tanh \left( 2.48 r \sqrt{\frac{h}{g}} + 3 \right) \right], \quad (3.67)$$

$$f_0(r) = \frac{-3.72 e}{\sqrt{gh}} \left[ 1 - \tanh^2 \left( -2.48 r \sqrt{\frac{h}{g}} - 3 \right) \right], \quad r \in [r_1, 0]. \quad (3.68)$$

Nous prenons les données suivantes

$t_1$ (s)	$e$ (cm)	$h$ (cm)	$N_{int}$	$\Delta K_n$	$\varepsilon$	$g$ (cm/s <sup>2</sup> )
2	11	10	10 <sup>3</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-5</sup>	981

TAB. 3.5 - Données de la deuxième application C

On aura :

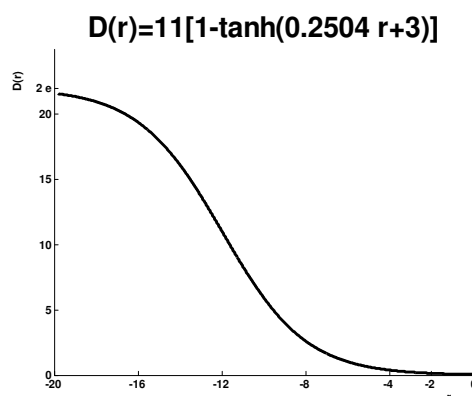


FIG. 3.7 – Fonction de déplacement (3.67) du tableau 3.5

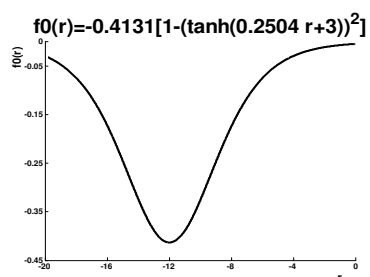


FIG. 3.8 – Potentiel initial (3.67) du tableau 3.5

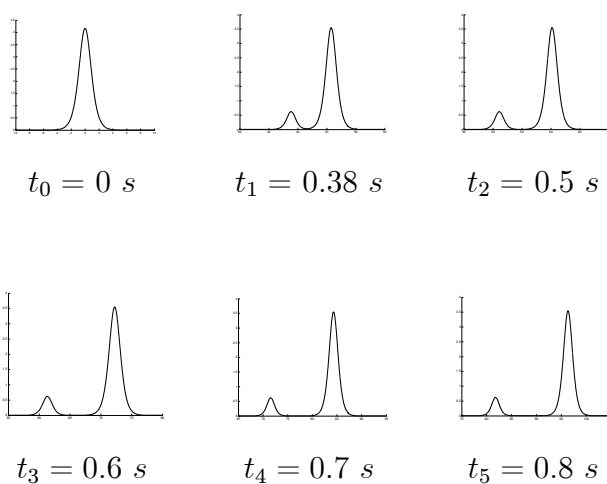


FIG. 3.9 – Collision de deux solitons

$K \text{ max}$	$K_1$	$K_2$	$A_1 \text{ (cm)}$	$c_1 \text{ (cm/s)}$	$A_2 \text{ (cm)}$	$c_2 \text{ (cm/s)}$
0.6428	0.516	0.216	3.5501	120.4206	0.6221	102.2251

TAB. 3.6 - Résultats de C

Si nous changeons les données comme suit :

$t_1$ (s)	$e$ (cm)	$h$ (cm)	$N_{int}$	$\Delta K_n$	$\varepsilon$	$g$ (cm/s <sup>2</sup> )
2	10.3	10	10 <sup>3</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-5</sup>	981

TAB. 3.7 - Données de la deuxième application D

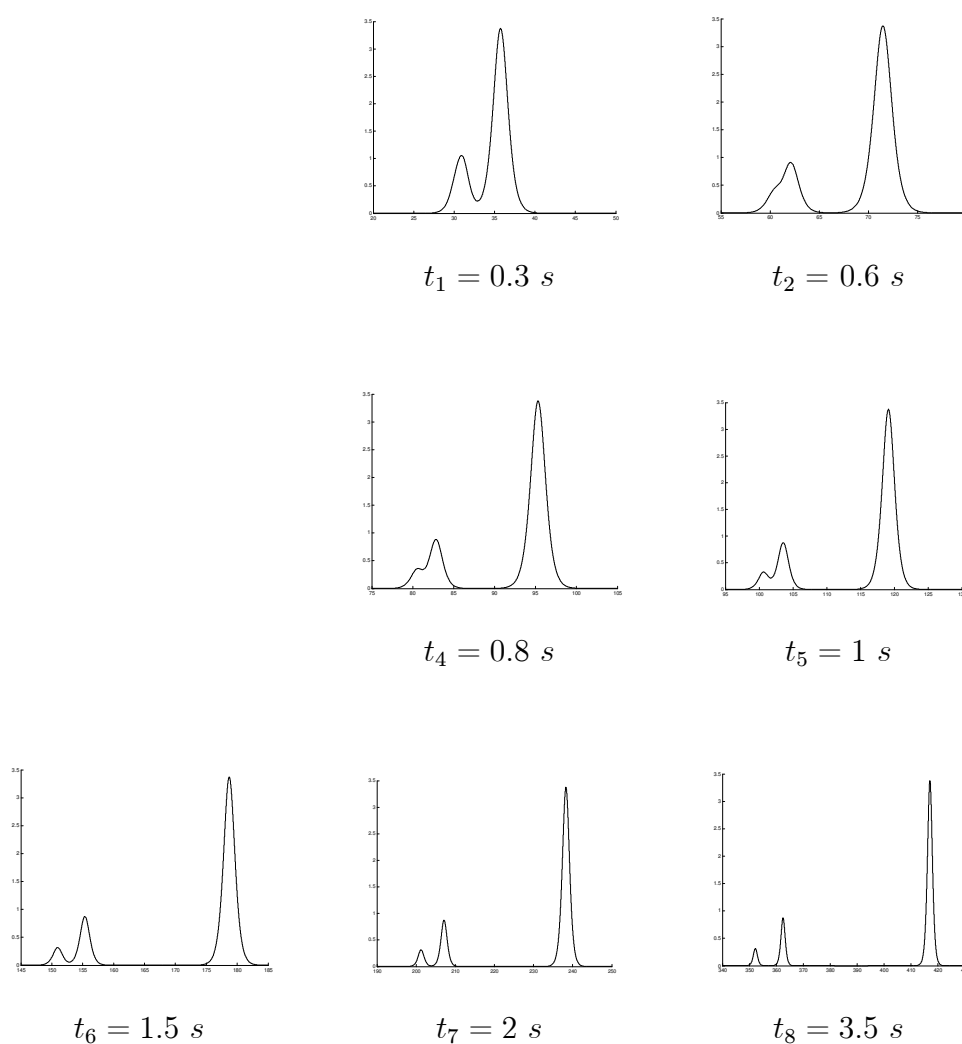


FIG. 3.10 – **3 soliton solution** : interaction de trois solitons

On obtient les résultats suivants



$K_{\max}$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$A_1(cm)$	$c_1(cm/s)$	$A_2(cm)$	$c_2(cm/s)$	$A_3(cm)$	$c_3(cm/s)$
0.62	0.5	0.26	0.15	3.37	119.14	0.87	103.57	0.32	100.64

TAB. 3.8 - Résultats de D

### 3.3.2 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la génération d'ondes solitaires de type KdV, obtenues par le potentiel initial  $f_0(r)$ . Nous avons considéré deux types de mouvement : l'un sinusoïdal, l'autre en tangente hyperbolique. Le choix judicieux des paramètres physiques liés au mouvement du batteur piston (élongation, type de mouvement, pulsation, ...) et à la profondeur d'eau  $h$  est directement lié au nombre et aux caractéristiques des solitons obtenues. En perspective, cette étude sera étendue avec un fond irrégulier ( $h$  dépend de la variable  $x$ ) ou la présence d'un obstacle isolé sur la propagation de l'onde solitaire.

# Annexe A

## Annexe

### Approximations des dérivées premières :

Les approximations des dérivées premières de la fonction  $\eta$  aux points  $(x_i, y_j, t_k)$ ,  $(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})$  et  $(x_i, y_j, t_{k+1})$  sont données par les schémas décentrés en avant respectivement.

Dérivées temporelles dans la prédiction :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta(x_i, y_j, t_k)}{\partial t} \simeq \frac{\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \eta_{i,j}^k}{\frac{\Delta t}{2}} \quad \text{suivant } x, \\ \frac{\partial \eta(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t} \simeq \frac{\eta_{i,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} \quad \text{suivant } y. \end{array} \right.$$

Dérivées spatiales dans la correction :

$$\frac{\partial \eta(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x} \simeq \frac{\eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial \eta(x_i, y_j, t_{k+1})}{\partial y} \simeq \frac{\eta_{i,j+1}^{k+1} - \eta_{i,j}^{k+1}}{\Delta y}.$$

Les approximations des dérivées premières temporelles des fonctions  $M$  et  $N$  aux points  $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t_k)$  et  $(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t_{k+\frac{1}{2}})$  sont données par les schémas décentrés en avant respectivement.

Dérivées à la correction :

$$\begin{aligned}\frac{\partial M \left( x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t_k \right)}{\partial t} &\simeq \frac{M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i+\frac{1}{2},j}^k}{\frac{\Delta t}{2}}, \\ \frac{\partial N \left( x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t_{k+\frac{1}{2}} \right)}{\partial t} &\simeq \frac{N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} - N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}}.\end{aligned}$$

Les approximations des dérivées premières spatiales des fonctions  $M$  et  $N$  aux points  $\left( x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} \right)$  et  $\left( x_i, y_j, t_{k+1} \right)$  sont données par les schémas centrés respectivement.

Dérivées à la prédiction :

$$\begin{aligned}\frac{\partial M \left( x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} \right)}{\partial x} &\simeq \frac{M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - M_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \\ \frac{\partial N \left( x_i, y_j, t_{k+1} \right)}{\partial y} &\simeq \frac{N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} - N_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1}}{\Delta y}.\end{aligned}$$

### Approximations des dérivées secondes :

Les approximations des dérivées secondes de la fonction  $\eta$  aux points  $\left( x_i, y_j, t_k \right)$ ,  $\left( x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} \right)$  et  $\left( x_i, y_j, t_{k+1} \right)$  s'obtiennent aisément à partir des schémas centrés à 3 points respectivement.

Dérivées à la prédiction :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \eta \left( x_i, y_j, t_k \right)}{\partial y^2} &\simeq \frac{\eta_{i,j+1}^k - 2\eta_{i,j}^k + \eta_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2} \quad \text{suivant } x, \\ \frac{\partial^2 \eta \left( x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} \right)}{\partial x^2} &\simeq \frac{\eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2}, \\ \frac{\partial^2 \eta \left( x_i, y_j, t_{k+1} \right)}{\partial y^2} &\simeq \frac{\eta_{i,j+1}^{k+1} - 2\eta_{i,j}^{k+1} + \eta_{i,j-1}^{k+1}}{(\Delta y)^2} \quad \text{suivant } y.\end{aligned}$$

Les approximations des dérivées secondes spatiales des fonctions  $M$  et  $N$  aux points  $\left( x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} \right)$  et  $\left( x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t_{k+1} \right)$  sont données par les schémas centrés à 3 points respectivement.

Dérivées à la correction :

$$\frac{\partial^2 M \left( x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} \right)}{\partial x^2} \simeq \frac{M_{i+\frac{3}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - 2M_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} + M_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 N \left( x_i, y_{j+\frac{1}{2}}, t_{k+1} \right)}{\partial y^2} \simeq \frac{N_{i,j+\frac{3}{2}}^{k+1} - 2N_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+1} + N_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+1}}{(\Delta y)^2}.$$

**Approximations des dérivées troisièmes :**

L'approximation de la dérivée troisième de la fonction  $\eta$  au point  $\left( x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} \right)$  s'obtient aisément à partir de schéma centré à 4 points.

Dérivée à la correction :

$$\frac{\partial^3 \eta \left( x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} \right)}{\partial x^3} \simeq \frac{\eta_{i+2,j}^{k+\frac{1}{2}} - 3\eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + 3\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \eta_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^3}.$$

Les approximations des dérivées troisièmes croisées s'obtiennent en emboîtant les schémas centrés des différences finies comme suit (dérivées à la correction) :

$$\frac{\partial^3 \eta \left( x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} \right)}{\partial x \partial y^2} \simeq \frac{\partial_x \left( \eta_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - 2\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} \right)}{(\Delta y)^2},$$

$$\simeq \frac{\eta_{i+1,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - 2\eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i+1,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x (\Delta y)^2} - \frac{\eta_{i,j+1}^{k+\frac{1}{2}} - 2\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x (\Delta y)^2}.$$

$$\frac{\partial^3 \eta \left( x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} \right)}{\partial x \partial t^2} \simeq \frac{\partial_x \left( \eta_{i,j}^{k+1} - 2\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i,j}^k \right)}{(\Delta t)^2},$$

$$\simeq \frac{\eta_{i+1,j}^{k+1} - 2\eta_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i+1,j}^k}{\Delta x (\Delta t)^2} - \frac{\eta_{i,j}^{k+1} - 2\eta_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \eta_{i,j}^k}{\Delta x (\Delta t)^2}.$$

Par analogie on peut déterminer  $\frac{\partial^3 \eta(x_i, y_j, t_{k+1})}{\partial y^3}$ ,  $\frac{\partial^3 \eta(x_i, y_j, t_{k+1})}{\partial x^2 \partial y}$  et  $\frac{\partial^3 \eta(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial y \partial t^2}$ .



## Annexe B

### Annexe

$$\begin{aligned}
 A_x &= \begin{bmatrix} 1 - a_3^x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2a_3^x & 1 - a_3^x & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ a_3^x & -2a_3^x & 1 - a_3^x & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & a_3^x & -2a_3^x & 1 - a_3^x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \diagdown & \diagdown & \diagdown & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_3^x & -2a_3^x & 1 - a_3^x \end{bmatrix}, & \mathcal{A}_x &= \begin{bmatrix} A_x & & & & & \\ & A_x & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_x & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_x \end{bmatrix} \\
 E_x &= \begin{bmatrix} 1 - c r_x & c r_x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - c r_x & c r_x & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 - c r_x & c r_x & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - c r_x & \diagdown & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \diagdown & c r_x \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 - c r_x \end{bmatrix}, & \mathcal{E}_x &= \begin{bmatrix} E_x & & & & & \\ & E_x & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & E_x & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & E_x \end{bmatrix} \\
 G_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_x & -F_x & 0 & 0 & & \\ e_1^x & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ e_2^x & e_3^x & -F_x & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & D_x & -F_x & 0 & & \\ 0 & e_1^x & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & e_2^x & e_3^x & -F_x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_x & -F_x & 0 & 0 & \\ & & & & e_1^x & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \cdots & & 0 & e_2^x & e_3^x & -F_x & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ D_x & 0 & 0 & 0 & & & \\ e_4^x & 0 & 0 & 0 & & \dots & \vdots \\ e_5^x & e_6^x & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & D_x & 0 & 0 & & & \\ 0 & e_4^x & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & e_5^x & e_6^x & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & e_4^x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & e_5^x & e_6^x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
L_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ D_x^* & 0 & 0 & 0 & & \dots & \\ e_{10}^x & 1 & 0 & 0 & & & \vdots \\ e_{11}^x & e_{12}^x & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & D_x' & 0 & 0 & & & \\ 0 & e_{10}^x & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & e_{11}^x & e_{12}^x & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_x^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & e_{10}^x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & e_{11}^x & e_{12}^x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
P_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 \\ D_x^* & 0 & 0 & 0 & & & \\ e_7^x & 1 & 0 & 0 & & \dots & \vdots \\ e_8^x & e_9^x & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & D_x^* & 0 & 0 & & & \\ 0 & e_7^x & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & e_8^x & e_9^x & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_x^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & e_7^x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & e_8^x & e_9^x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$Q_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ 1 & F_x & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & F_x & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & & \cdots & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & 0 & 1 & F_x & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$S_x = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_3}{8} R_x Q_x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_3}{8} R_x Q_x & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_3}{8} R_x Q_x & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3}{8} R_x Q_x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3}{8} R_x Q_x \end{bmatrix} ,$$

$$U_x = \begin{bmatrix} a_1^x I & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3^x I & a_1^x I & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ a_3^x I & a_3^x I & a_1^x I & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & a_3^x I & a_3^x I & a_1^x I & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \diagdown & \diagdown & \diagdown & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_3^x I & a_3^x I & a_1^x I \end{bmatrix} ,$$

$I$  matrice d'identité de dimension  $\lambda_x \times \lambda_y$ .



$$\begin{aligned}
V_x &= \begin{bmatrix} a_2^x I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2^x I & a_2^x I & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_2^x I & a_2^x I & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -a_2^x I & a_2^x I & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \diagdown & \diagdown & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -a_2^x I & a_2^x I \end{bmatrix}, \\
W_x &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{12} R_x L_x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 R_x P_x & \frac{\alpha_1}{12} R_x L_x & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 R_x K_x & \alpha_2 R_x P_x & \frac{\alpha_1}{12} R_x L_x & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \alpha_2 R_x K_x & \alpha_2 R_x P_x & \frac{\alpha_1}{12} R_x L_x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \diagdown & \diagdown & \diagdown & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_2 R_x K_x & \alpha_2 R_x P_x & \frac{\alpha_1}{12} R_x L_x \end{bmatrix}, \\
Z_x &= \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_3}{8} R_x G_x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_3}{8} R_x G_x & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_3}{8} R_x G_x & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3}{8} R_x G_x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \diagdown & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3}{8} R_x G_x \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$F_x = \frac{1}{c r_x (1 - a_3^x)},$$

$$H_x = \frac{1 - c r_x}{c r_x (1 - a_3^x)},$$

$$D_x = a_3^x (H_x - c r_x F_x) - F_x,$$

$$D_x^* = a_3^x (H_x - c r_x F_x) + F_x,$$

$$R_x = \frac{gh r_x (\Delta x)^2}{(\Delta x)^2 + 2\nu r_x}.$$

$$a_1^x = \frac{(\Delta x)^2 - 2\nu r_x}{(\Delta x)^2 + 2\nu r_x},$$

$$a_2^x = \frac{-r_x (\Delta x)^2}{24 [(\Delta x)^2 + 2\nu r_x]},$$

$$a_3^x = \frac{\nu r_x}{(\Delta x)^2 + 2\nu r_x}.$$

$$e_1^x = (a_3^x - 1) [a_3^x (H_x - c r_x F_x) - F_x] + F_x,$$

$$e_2^x = [a_3^x (H_x - c r_x F_x) - F_x] [(a_3^x)^2 (H_x - c r_x F_x) - a_3^x + F_x], \\ + F_x [H_x + a_3^x (H_x - c r_x F_x)] - H_x.$$

$$e_3^x = F_x (1 - H_x + c r_x F_x),$$

$$e_4^x = a_3^x (H_x - c r_x F_x) [a_3^x (H_x - c r_x F_x) + F_x - 1] + F_x,$$

$$e_5^x = a_3^x (H_x - c r_x F_x) [a_3^x (H_x - c r_x F_x) + F_x - 1] + (H_x - c r_x F_x), \\ \times [a_3^x (H_x - c r_x F_x) + F_x] - H_x.$$

$$e_6^x = [a_3^x (H_x - c r_x F_x) + H_x] F_x.$$

$$e_7^x = a_3^x (H_x - c r_x F_x) [a_3^x (H_x - c r_x F_x) + F_x - 1] + F_x + 2,$$

$$e_8^x = [a_3^x (H_x - c r_x F_x) + H_x] \{a_3^x (H_x - c r_x F_x), \\ \times [a_3^x (H_x - c r_x F_x) - 1] + F_x + 2\} [F_x + H_x (1 - a_3^x)], \\ \times [a_3^x (H_x - c r_x F_x) + F_x] - H_x + F_x.$$

$$e_9^x = H_x + a_3^x (H_x - c r_x F_x) + 2F_x,$$

$$e_{10}^x = a_3^x (H_x - c r_x F_x) [a_3^x (H_x - c r_x F_x) + F_x], \\ - a_3^x (H_x - c r_x F_x) + F_x - \frac{F_x}{\alpha_1} (-2\alpha_1 + 24\alpha_2 + 3\alpha_3 + 6).$$

$$e_{11}^x = [H_x + a_3^x (H_x - c r_x F_x)] \{a_3^x [a_3^x (H_x - c r_x F_x) + F_x], \\ \times (H_x - c r_x F_x) + F_x + \frac{1}{\alpha_1} (-2\alpha_1 + 24\alpha_2 + 3\alpha_3 + 6) [F_x + H_x (1 - a_3^x)], \\ \times [a_3^x (H_x - c r_x F_x) + F_x] + H_x + \frac{F_x}{\alpha_1} (-2\alpha_1 + 24\alpha_2 + 3\alpha_3 + 6)\}.$$

$$e_{12}^x = -H_x - a_3^x (H_x - c r_x F_x) - \frac{F_x}{\alpha_1} (-2\alpha_1 + 24\alpha_2 + 3\alpha_3 + 6).$$

$\mathcal{A}_x, \mathcal{E}_x, U_x, V_x, Z_x, W_x, S_x$  sont des matrices de bloc de dimension  $\lambda_x \lambda_x \times \lambda_x \lambda_x$ .

$G_x, L_x, P_x, Q_x$  sont des matrices dimension  $\lambda_x \times \lambda_x$ .

Par symétrie, nous obtenons les matrices et leurs coefficients selon la direction  $y$ ; sauf la matrice  $S_x$  est seulement pour la direction  $x$ .

$$\begin{aligned} M_1 &= EZ + EWA^{-1}U + ES. (I - A^{-1}VEZS)^{-1}. (A^{-1}UA^{-1}U + A^{-1}VEZ + WA^{-1}U), \\ M_2 &= EWA^{-1}V + ES. (I - A^{-1}VEZS)^{-1}. (A^{-1}UA^{-1}V + WA^{-1}V), \\ N_1 &= EZA^{-1}U + E. (W + S). (I - A^{-1}VEZS). (A^{-1}UA^{-1}U + A^{-1}VEZ + WA^{-1}U), \\ N_2 &= EZA^{-1}V + E. (W + S). (I - A^{-1}VEZS)^{-1}. (A^{-1}UA^{-1}V + WA^{-1}V), \\ eta_1 &= (I - A^{-1}VEZS)^{-1}. (A^{-1}UA^{-1}U + A^{-1}VEZ + WA^{-1}U), \\ eta_2 &= (I - A^{-1}VEZS)^{-1}. (A^{-1}UA^{-1}V + WA^{-1}V). \end{aligned}$$

$$A = \mathcal{A}_x, E = \mathcal{E}_x, Z = Z_x, W = W_x, U = U_x, V = V_x, S = S_x.$$

# Bibliographie

- [1] T. Aktosun, Solitons and inverse scattering transform, In : D. P. Clemence and G. Tang (eds.), *Mathematical studies in nonlinear wave propagation*, Contemporary Mathematics, Vol. 379, Amer. Math. Soc., Providence, 2005, pp. 47–62.
- [2] D. C. Antonopoulos, V.A. Dougalis, Numerical solution of the ‘classical’ Boussinesq system, *Mathematics and Computers in Simulation* 82 (2012) 984–1007.
- [3] S. L. Bates, M. Siddall, C. Waelbroeck, Hydrographic variations in deep ocean temperature over the mid-Pleistocene transition, *Quaternary Science Reviews* 88 (2014) 147-158.
- [4] I. L. Bogolubsky, Some examples of inelastic soliton interaction, *Comp Phys Commun* 13 (1977) 149-155.
- [5] A. Boussaha, A. Laouar, A. Guerziz, H. Hassan, A new modified scheme for linear shallow-water equations with distant propagation of irregular wave trains tsunami dispersion type for inviscid and weakly viscous fluids. *Global Journal Pure and Applied Mathematics*. ISSN 0973-1768 Volume 10, Number 6 (2014), pp. 793-815.
- [6] J. Boussinesq. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d’un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pures Appl.*, 17 :55–108, 1872.
- [7] Y. S. Cho, D. H. Sohn and S. O. Lee, Practical modified scheme of linear shallow-water equations for distant propagation, *Ocean Engineering* 34 (2007) 1769-1777.
- [7] C. I. Christo, M. A. Christov, Numerical implementation of the asymptotic boundary conditions for steadily propagating 2D solitons of Boussinesq type equations, *Mathematics and Computers in Simulation* 82 (2012) 1079–1092.
- [8] M.A. Christou, N.C. Papanicolaou, Kawahara solitons in Boussinesq equations using a robust Christov–Galerkin spectral method, *Applied Mathematics and Computation* 243 (2014) 245–257.
- [9] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol (I)*. New York, intersciences Pub, 1953.

- [10] P. Daripa and W. Hua, A numerical study of an ill-posed Boussinesq equation arising in water waves and nonlinear lattices : Filtering and regularization techniques, *Appl. Math. Comput.*, 101, pp.159–207, 1999.
- [11] D. Dutykh, Modélisation mathématique des tsunamis, Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan. France, 2007.
- [12] D. Dutykh, O. Goubet, Derivation of dissipative Boussinesq equations using the Dirichlet-to-Neumann operator approach, *Mathematics and Computers in Simulation* (2014).
- [13] Jr. J. DOUGLAS and J. E. GONN, A General Formulation of Alternating Direction Methods, Part I, *Numerische Mathematik* 6 (1964) 428–453.
- [14] Jr. J. Douglas and H. H. Rachford, On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, *Transactions of the American Mathematics Society* 82 (1956) 421-439.
- [15] E.T., Flouri, N., Kalligeris, G., Alexandrakis, N.A., Kampanis, and C.E., Synolakis, Application of a finite difference computational model to the simulation of earthquake generated tsunamis, *Appl. Numer. Math.*, 67 (2013), pp. 111-125.
- [16] E. Goncalvès, Résolution numérique des équations d'Euler monodimensionnelles, Institut National Polytechnique De Grenoble, Avril 2004.
- [17] C. Goto and Y. Ogawa, Numerical method of tsunami simulation with the leap-frog scheme, *Intergovernmental Oceanographic Commission* (35) 1977.
- [18] R. Grimshaw, *Solitary Waves in Fluids*. *Advances in Fluid Mechanics* (ed.) 2007, Vol 47, WIT Press, UK.
- [19] M. A. Helal, A. R. Seadawy, M. H. Zekry, Stability analysis of solitary wave solutions for the fourth-order nonlinear Boussinesq water wave equation, *Applied Mathematics and Computation* 232 (2014) 1094–1103.
- [20] T.C. Gopalakrishnan, C.C. Tung, Run-up of non-breaking waves : a finite-element approach, *Coast. Engrg.* 4 (1980) 3–32.
- [21] L. Lapidus, G. F. Pinder, *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering* (1982) p. 677.
- [22] Z. Liu, Z. Lin, S. Liao, Phase velocity effects of the wave interaction with exponentially sheared current, *Wave Motion* 51 (2014) 967–985.
- [23] P. A. Madsen, D. R. Fuhrman, H. A. Schaffer, On the solitary wave paradigm for tsunamis, *J. Geophys. Res.* 113 (2008).
- [24] P. A. Madsen, R. Murray and O. R. Sørensen, A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Engineering* 15 (1991) 371-388.
- [26] P. A. Madsen and O. R. Sørensen, A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, Part 2, *Coastal Engineering* 18 (1992) 183-204.

- 
- [27] C. C. Mei, *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, World Scientific Publishing (1989) p 740.
- [28] D. E. Mitsotakis, Boussinesq systems in two space dimensions over a variable bottom for the generation and propagation of tsunami waves, *Mathematics and Computers in Simulation* 80 (2009) 860–873.
- [29] S. Repin, & T. Tiihonen, *Numerical Methods for Differential Equations. Optimization and Technological Problems* (2013) Springer.
- [28] J. J. Stoker, *Water waves : The Mathematical Theory with Applications*, Wiley-Interscience (1957) pp 567.
- [30] A. Temperville, *Contribution à la théorie des ondes de gravité en eau peu profonde*, Thèse d'état de mathématiques, Université de Grenoble (1985).
- [31] A. Miranville, R. Temam, *Modélisation mathématique et mécanique des milieux continus*, Cambridge University Press, 2000.
- [32] S. Tinti and R. Tonini, The UBO-TSUFDF tsunami inundation model : validation and application to a tsunami case study focused on the city of Catania, Italy, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci* (2013) 1795-1816.
- [33] X. Wang, P. L.-F. Liu, A numerical investigation of Boumerdes–Zemmouri (Algeria) earthquake and tsunami. *CMES* 10 (2) (2005) 171–184.
- [34] R. F. Warming, B. J. Hyett, The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite difference methods. *Journal of Computational Physics* 14 (1974) 159–179.
- [35] A-M. Wazwaz, New travelling wave solutions to the Boussinesq and the Klein–Gordon equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 13 (2008) 889–901.
- [36] L. Yao, R. Weiguo, H. Bin, Traveling wave solutions for higher order wave equations of KdV type, *Chaos, Solitons & Fractals* 23 (2) (2005) 469–475.
- [37] Z. Yang, S. Liua, H. B. Bingham, J. Li. Second-order coupling of numerical and physical wave tanks for 2D irregular waves, Part I : Formulation, implementation and numerical properties, *Coastal Engineering* (2014).
- [38] Z. Yang and X. Wang, Blowup of solutions for improved Boussinesq type equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 278 (2003) 335–353.